

応用一般均衡分析入門

第 2 章：一般均衡モデル *

武田 史郎[†]

Date: 2024/01/28,

Version 4.1

目次

1	導入	2
2	一般均衡モデル（伝統的アプローチによる表現）	2
2.1	企業	3
2.2	家計（消費者）	3
2.3	市場均衡	4
2.4	均衡条件（まとめ）	5
2.5	一般均衡モデルの性質	6
2.5.1	性質 1: ワルラス法則	6
2.5.2	性質 2: 均衡価格の 0 次同次性	8
2.5.3	ニューメレールの設定	9
2.6	企業側の別表現	11
2.6.1	財を生産する部門	11
2.6.2	合成生産要素を生産する部門	12
2.6.3	均衡条件（まとめ）	12
3	一般均衡モデル（双対アプローチによる表現）	12
3.1	企業	13
3.2	家計	13
3.3	市場均衡	14
3.4	均衡条件（まとめ）	14
3.5	双対アプローチを利用する利点	14
3.5.1	利点 1: 生産サイドと需要サイドの表現の類似性	15
3.5.2	利点 2: 既存の研究	16
3.6	企業側の別表現	16
3.6.1	財を生産する部門	17

*このファイルの配布場所: <https://shirotakeda.github.io/ja/research-ja/cge-howto.html>[†]所属：京都産業大学経済学部. Website: <https://shirotakeda.github.io/ja/>

3.6.2	合成生産要素を生産する部門	17
3.6.3	均衡条件（まとめ）	17
4	関数例	18
4.1	伝統的アプローチによる均衡条件	19
4.2	双対アプローチによる均衡条件	19
5	終わりに	20
	参考文献	20
6	問題	20
7	履歴	21

1 導入

今回の内容について

- CGE モデルを考える準備として、まず単純な一般均衡モデルを考える。そして、その単純な一般均衡モデルを用いて次の二点について確認する。
 - 一般均衡モデルの表現方法
 - 一般均衡モデルで成立する重要な性質
- この第2章で扱うモデルは政府部門も投資も貿易もないモデルであり、非常に単純化されたものではあるが、CGE モデルの基本的な性質を理解するためには、今回のモデルの構造、及びそこから導かれる性質を十分理解しておく必要がある。
- 第1章で既に述べたことであるが、**ここで扱う一般均衡モデルはあくまで CGE 分析で利用されるタイプの一般均衡モデルである**。例えば、マクロ経済学でも一般均衡モデルが利用されるが、同じ一般均衡モデルと言ってもここで扱うモデルとは大きな違いがあることに注意して欲しい。

2 一般均衡モデル（伝統的アプローチによる表現）

企業、消費者（家計）のそれぞれの行動については第1章とほぼ同じ想定を置く。さらに一般均衡モデルを考えるにあたり、追加的に次のような仮定を置く。

- n 個の部門があるとする ($i = 1, \dots, n$)。一つの部門は一種類の財を生産・供給しているとする。よって、財の数（種類）も n 個となる。
- 一人の代表的家計が存在すると仮定する**。家計は本源的生産要素（具体的には労働や資本等、以下、**生産要素**と呼ぶ）を保有しており、それを企業に提供することで所得を得る。そして、得た所得を用いて効用を最大化するように財を消費する。生産要素は k 個あるとする ($f = 1, \dots, k$)。
- 企業は、他の企業が生産する中間財と家計から提供される生産要素を用いて、利潤を最大化す

るように生産をおこなう。

- 全ての市場は完全競争市場とする。従って、全ての経済主体はプライステイカー（価格受容者）として行動する。
- 全ての市場において需要と供給が等しくなるように価格が伸縮的に調整されるとする。
- 政府部門は存在しない。輸出入等の海外との取引がない閉鎖経済とする。投資支出、貯蓄もないものとする。モデルは静学モデルとする。

第 3 節の「双対アプローチによる表現」との対比のため、第 2 節におけるモデルの表現方法を「伝統的アプローチによる表現」と呼ぶことにする。

2.1 企業

各部門はある代表的な企業によって表現されるとする（以下では、部門＝企業のような表現をしていく）。企業は第 1 章の想定をそのまま利用する。すなわち、企業はプライステイカーであり、規模に関して収穫一定の技術を持つとする。企業は投入物として、中間財と生産要素を利用する。中間財は n 個の生産物からなり、生産要素は k 種類あるとする。

部門 i の企業の生産関数は次式で表現されるとする。

$$y_i = f_i(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}, v_{1i}, \dots, v_{ki}) = f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$$

ただし、 y_i は部門 i の企業の生産量、 x_{ji} は中間財 j の投入量、 v_{fi} は生産要素 f の投入量である。財 i の価格を p_i 、生産要素 f の価格を p_f^F とすると、部門 i の企業の利潤 π_i は次のように表現できる。

$$\pi_i = p_i f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i) - \left[\sum_j p_j x_{ji} + \sum_f p_f^F v_{fi} \right]$$

企業はこの利潤が最大になるように投入物の量を選択する。利潤最大化の条件は次のように表現される。

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_{ji}} = p_i \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)}{\partial x_{ji}} - p_j = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial v_{fi}} = p_i \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)}{\partial v_{fi}} - p_f^F = 0 \quad (2)$$

2.2 家計（消費者）

消費者についても第 1 章のときの想定を基本的にそのまま利用する。最初に述べたように、消費者としては一人の代表的家計のみが存在すると仮定する。複数の部門を想定したのと同様に、家計についても複数考慮するというアプローチもあるが、CGE 分析においてはマクロ経済学のモデルと同様に代表的家計（代表的消費者）を想定することが多いので、ここでもまずは代表的な家計のケースを考える¹⁾。家計は効用を最大化するように n 個の財を消費する。また、家計は k 種類の

1) 第 1 章では基本的に「消費者」という呼び方を利用したが、ここでは「家計」という呼び方をする。第 1 章では消費者の所得は外生的に与えられたものとして扱い、消費面にのみ着目していたが、ここでの一般均衡モデルでは消費者が

生産要素を保有し、それを企業に提供することで所得を得ている。

家計の効用関数は次式で与えられるとする。

$$u = g(d_1, \dots, d_n) = g(\mathbf{d})$$

家計の効用最大化行動は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{d}} \quad & u = g(\mathbf{d}) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_i p_i d_i \leq m \end{aligned}$$

ただし、 m は所得である。この効用最大化行動から非補償需要関数 $d_i(\mathbf{p}, m)$ が導ける²⁾。

家計は生産要素を保有し、それを企業に提供することで収入を得ている。家計が保有する生産要素の量（賦存量）を \bar{v}_f とすると、家計の所得は次式で表現できる。

$$m = \sum_f p_f^F \bar{v}_f \quad (3)$$

家計の所得として要素所得に加え、企業の利潤を含めることもあるが、このモデルでは企業の利潤はゼロとなるので、含めても含めなくても結局は変わらない³⁾。

2.3 市場均衡

ここまで、企業、家計の行動を考え、そこから供給、需要を導出してきた。均衡状態を想定するには、さらに市場均衡（供給と需要が等しくなる状況）が成り立っている必要がある⁴⁾。このモデルでは市場としては「財市場」と「生産要素市場」の二種類がある。

まず、財市場（財 i の市場）の均衡条件は次式で与えられる。

$$y_i = \sum_j x_{ij} + d_i(\mathbf{p}, m) \quad (4)$$

左辺は財 i の供給量であり、右辺は需要量である。需要量は中間投入需要と消費需要からなる。この式が成り立つように財の価格 p_i が調整されることになる。

一方、生産要素（生産要素 f ）の市場均衡は次式となる。

$$\bar{v}_f = \sum_j v_{fj}$$

左辺は生産要素の供給であり、右辺は需要である。この関係が成り立つように生産要素価格 p_f^F が決定される。

どのように所得を得るかも考える必要がある。消費者は生産要素を企業に提供し、所得を得るという側面もある。ここでは「消費とともに生産要素の提供をおこなう経済主体」を表す用語として家計という呼び方を使っている。

2) 導出方法について詳しくは第1章を参照して欲しい

3) 第1章で説明したように、この種のモデルでは本来企業の利潤とみなされる部分（営業余剰の部分）を費用（生産要素への支払い）の一種としてみなす。よって、要素所得の部分に既に利潤の部分が含まれているとみなせる。

4) ただし、一般均衡モデルといっても文字通り全ての市場が均衡していなければならないというわけではないし、実際一部の市場は不均衡とする場合もある。CGE 分析でよくあるのは、賃金の下方硬直性を仮定し、労働市場が均衡しない（非自発的失業が生じる）ケースである。本稿では基本的に全ての市場が均衡するようなケースを考える。

2.4 均衡条件（まとめ）

表 1：均衡条件式（伝統的アプローチによる表現）

条件	式	対応する変数
生産関数	$y_i = f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$	$\{y_i\}_{i=1, \dots, n}$
利潤最大化条件	$p_i \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)}{\partial x_{ij}} - p_j = 0$	$\{x_{ij}\}_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}$
	$p_i \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)}{\partial v_{fi}} - p_f^F = 0$	$\{v_{fi}\}_{i=1, \dots, n, f=1, \dots, k}$
財市場の均衡条件	$y_i = \sum_j x_{ij} + d_i(\mathbf{p}, m)$	$\{p_i\}_{i=1, \dots, n}$
要素市場の均衡条件	$\bar{v}_f = \sum_j v_{fj}$	$\{p_f^F\}_{f=1, \dots, k}$
所得の定義式	$m = \sum_f p_f^F \bar{v}_f$	$\{m\}$

以上の均衡条件をまとめたのが表 1 である。均衡条件式は合計 $n + n \times n + n \times k + n + k + 1 = 2n + n^2 + nk + k + 1$ 本ある。一方、変数は $\{y_i\}$ が n 個、 $\{x_{ij}\}$ が $n \times n$ 個、 $\{v_{fi}\}$ が $n \times k$ 個、 $\{p_i\}$ が n 個、 $\{p_f^F\}$ が k 個、 $\{m\}$ が 1 個で、合計 $n + n \times n + n \times k + n + k + 1 = 2n + n^2 + nk + k + 1$ 個となる。「変数の数＝式の数」であるので、式が独立でないということがなければ、解を求めることができるはずである⁵⁾。

条件式と変数の対応

表 1 の均衡条件の表現では、条件式の右にそれに対応した変数を示している。具体的には次のように対応させている。

- ・ 生産関数に対しては生産量
- ・ 利潤最大化条件に対してはそれで決まる投入量
- ・ 財市場の均衡条件に対してはそれで決まる財の価格
- ・ 生産要素市場の均衡条件に対してはそれで決まる生産要素の価格
- ・ 所得の定義式に対しては所得

連立方程式としては「式の数＝変数の数」が満たされていれば（かつ、式が独立であれば）、その解が存在するはずである。しかし、単に解を持つようにするというだけではなく、正しいモデルとなっているかをチェックするということも考えると、単に「式の数＝変数の数」を確認するだけではなく、どの式に対してどの変数が対応するかということも意識することが望ましい。このため、表 1 のようにどの条件式に対してどの変数が対応するかを明示的に表すようにしておくのがよい。一般に CGE モデルでは、変数の数、式の数が非常に多くなるため、仮にモデルに誤りがあ

5) 実際には、第 2.5.1 節で説明するように 1 本は独立ではない。

た場合にそれを見つけるのに手間がかかることが多い。そのような手間を減らすには、モデルの記述においても、モデルの構造ができるだけ把握しやすいようにしておくことが望ましい。

場合によって、どの式に対してどの変数を対応させるかわかりにくい場合もあるかもしれないが、均衡条件式はそれぞれの式に経済学的な意味があり、どの変数を対応させるべきかがはっきりしていることが多い。具体的には、次のように考えれば、多くのケースで変数を式に対応させることができる。

- 何らかの変数を定義する式なら、それによって定義される変数。例えば、生産関数なら、それによって定義される生産量の変数
- 市場均衡条件なら、それによって決まる財・生産要素の価格
- 利潤最大化条件、費用最小化条件などの最適化行動のための条件なら、その最適化条件に基づいて決定される変数

以上のようなルールにあてはめれば、ほとんどの変数を式に適切に対応させることができるはずである。

[注]

家計側（需要側）の行動は非補償需要関数 $d_i(\mathbf{p}, m)$ で表現しているのに対し、企業側（供給側）は供給関数や投入需要関数を用いず、生産関数、利潤最大化の条件で行動を表現している。その理由は、第1章で説明したように、「プライステイカー＋生産関数が1次同次」である場合には、最適な供給量、投入需要量が一意には決まらないため、供給関数や投入需要関数を使えないためである。

2.5 一般均衡モデルの性質

ここまで提示した一般均衡モデルは非常に単純化されたモデルではあるが、ミクロ経済学、あるいはその応用である国際貿易、環境経済学等の分野で利用されているモデルの基本となるような一般均衡モデルと言ってよい。このタイプの一般均衡モデルでは、いくつか重要な性質が成り立つことが知られている。以下では、そのうち

- 性質 1: ワルラス法則
- 性質 2: 均衡価格の0次同次性

を説明する。これらの性質はモデルの構築や分析結果の解釈といった作業において非常に重要な意味を持ってくるので、十分理解しておくことが望ましい。

2.5.1 性質 1: ワルラス法則

「ワルラス法則 (Walras' law)」とは「全ての市場の超過需要額の和が0に等しい」という性質を指す。ミクロ経済学で用いられる一般均衡モデルは「ワルラス法則」が満たされることが多い。本稿の一般均衡モデルでもワルラス法則は満たされている。以下、それを確認してみよう。

まず、この章のモデルにおいて、財 i の市場の超過需要額 (= 価格 × 超過需要量) は次のよう

に表せる。

$$\text{財}i\text{の超過需要額} = p_i \left[\sum_j x_{ij} + d_i(\mathbf{p}, m) - y_i \right]$$

同様に、生産要素 f の市場の超過需要額は次のように表せる。

$$\text{生産要素}f\text{の超過需要額} = p_f^F \left[\sum_j v_{fj} - \bar{v}_f \right]$$

よって、全ての市場の超過需要額の和（以下 VED）は次式のように表現できる。

$$\text{VED} = \sum_i p_i \left[\sum_j x_{ij} + d_i(\mathbf{p}, m) - y_i \right] + \sum_f p_f^F \left[\sum_j v_{fj} - \bar{v}_f \right] \quad (5)$$

仮に均衡状態にあるのなら、市場均衡の条件より [] 内が 0 となるので、(5) 式の値が 0 になるのは明白である。しかし、均衡状態になくても (5) 式は 0 になる。これは次のように (5) 式を書き換えることで示せる。

$$\text{VED} = \left[\sum_i p_i d_i(\mathbf{p}, m) - \sum_f p_f^F \bar{v}_f \right] - \left[\sum_i \left(p_i y_i - \left[\sum_j p_j x_{ji} + \sum_f p_f^F v_{fi} \right] \right) \right] \quad (6)$$

一つ目の [] 内は家計の「支出－収入」を表しており、予算制約が等号で満たされる（binding となる）なら 0 となる。二つ目の [] 内は全ての企業の利潤の和を表しており、全ての企業の利潤がゼロになるなら [] 内は 0 となる。以上より

条件 1: 家計の予算制約が binding になっている⁶⁾

条件 2: 企業の利潤が 0 となっている

という 2 つの条件が満たされれば、必ずしも均衡状態ではなくてもワルラス法則は成り立つことになる。

家計の選好が非飽和であるのなら条件 1 は満たされる⁷⁾。また、企業がプライステイカーで、規模に関して収穫一定の技術（1 次同次の生産関数）を持つなら条件 2 も満たされる⁸⁾。本稿のモデルを含む多くの一般均衡モデルではこの 2 つの条件が満たされているので、ワルラス法則が成立することになる。仮に企業の利潤がゼロという条件 2 が満たされない場合でも、その利潤が家計の所得に含まれるならば、結局 (6) 式全体が家計の予算制約を表すことになるので、条件 1 の非飽和

6) 「制約が binding」とは制約式が等号で成り立つということであり、これは、家計が予算を余らすようなことはしないということを意味している。

7) 効用関数が消費量に関して単調増加関数であれば家計の選好は非飽和になるが、CGE 分析では効用関数に単調増加な CES 関数を用いるので、実際に条件 1 は満たされる。もちろん飽和する選好を考えてはいけないというわけではないが、CGE 分析でそのようなケースが想定されることは見たことがない。

8) これは第 1 章で既に確認した。

という条件によってワルラス法則が満たされることになる。

ワルラス法則が含意すること

$$\text{VED} = \sum_i p_i \left[\sum_j x_{ij} + d_i(\mathbf{p}, m) - y_i \right] + \sum_f p_f^F \left[\sum_j v_{fj} - \bar{v}_f \right] = 0 \quad (7)$$

上式のワルラス法則が成り立っているとする。これは何を意味するであろうか？例えば、生産要素の k 個目の市場だけ抜き出して (7) 式を書き直す。すると

$$\sum_i p_i \left[\sum_j x_{ij} + d_i(\mathbf{p}, m) - y_i \right] + \sum_{f \neq k} p_f^F \left[\sum_j v_{fj} - \bar{v}_f \right] = -p_k^F \left[\sum_j v_{kj} - \bar{v}_k \right]$$

となる。左辺に含まれる $n + k - 1$ 個の市場で市場均衡が成り立てば左辺はゼロになるので、右辺もゼロにならなければいけない。右辺がゼロということは、 $\sum_j v_{kj} = \bar{v}_k$ であるので k 個目の生産要素の市場も均衡していることになる。つまり、 $n + k$ 個の市場のうち $n + k - 1$ 個の市場が均衡していれば残りの一つも自動的に均衡するということである。これは $n + k$ 本の市場均衡条件のうち独立なのは $n + k - 1$ 本だけということの意味する。

第 2.4 節で均衡条件式は全部で $2n + n^2 + nk + k + 1$ 本と説明したが、以上の議論よりこのうち独立なのは $2n + n^2 + nk + k$ 本となる。とすると「条件式の数 < 変数の数」ということになり、通常では連立方程式を解くことができなくなってしまう。しかし、次の第 2.5.2 節で説明するように、変数についても独立な変数は実は一つ少ないことが示せる。よって、実際には式の数も変数の数も $2n + n^2 + nk + k$ 本ということになり、モデルを正常に解くことができる。

モデルをチェックする基準としてのワルラス法則

通常、CGE 分析で利用される一般均衡モデルは、ワルラス法則が成り立つようなモデルである。この性質を利用してモデルの正しさをチェックするという方法がある。すなわち、ワルラス法則が成り立つはずのモデルで、実際にワルラス法則が成り立っているかを計算してみることで、モデルをチェックするということである。具体的には、一本の市場均衡条件式を除いた上でモデルを解いたあとに、除去した市場均衡条件が満たされているかどうかをチェックするという形をとる。もし、満たされていないければ、ワルラス法則が成り立っていないということになるので、それはモデル（やプログラム）のどこかがおかしいということの意味する。CGE 分析では、このように実際にワルラス法則が成り立っているかを確認してモデルをチェックすることがよくおこなわれる。これについては第 5 章で説明する。

2.5.2 性質 2: 均衡価格の 0 次同次性

第 2.4 節のモデルにおいて、 y_i^* 、 x_{ij}^* 、 v_{fi}^* 、 p_i^* 、 p_f^{F*} 、 m^* という組み合わせが均衡条件を満たすとする。このとき、 $\forall \lambda > 0$ 、 $\tilde{p}_i = \lambda p_i^*$ 、 $\tilde{p}_f^F = \lambda p_f^{F*}$ 、 $\tilde{m} = \lambda m^*$ として作成された y_i^* 、 x_{ij}^* 、 v_{fi}^* 、 \tilde{p}_i 、 \tilde{p}_f^F 、 \tilde{m} という別の組み合わせも均衡条件を満たす。つまり、ある価格（所得）が均衡価格（均衡所得）になっているのなら、それを定数倍したのもも均衡価格（均衡所得）となっているということである。以下、これを確認しよう。

まず価格を定数倍しても利潤最大化条件 (1) 式、(2) 式が成り立つことは明白である。財市場の均衡条件 (4) 式については、非補償需要の 0 次同次性、つまり $d_i(\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{m}) = d_i(\lambda \mathbf{p}^*, \lambda m^*) = d_i(\mathbf{p}^*, m^*)$ よりやはり成り立つ。最後に所得の定義式 (3) 式についても

$$\tilde{m} = \lambda m^* = \lambda \left[\sum_f p_f^F \bar{v}_f \right] = \sum_f \lambda p_f^F \bar{v}_f = \sum_f \tilde{p}_f^F \bar{v}_f$$

となり成り立つ。

以下、この性質を「**均衡価格の 0 次同次性**」と呼ぼう⁹⁾。この性質は、絶対価格は一意には決定しないということ、言い換えれば、均衡条件から決まるのは相対的な価格のみということを意味している。これは CGE 分析について一つの重要な点を示唆している。すなわち、**何らかの特殊な仮定を置かない限り、CGE 分析において絶対的な価格の水準（名目価格）の分析をすることはできない**ということである。

2.5.3 ニュメレールの設定

実際に CGE 分析においてモデルを解く際には、ある価格、例えば p_1 を 1 と置き、残りの価格 $\{p_2, \dots, p_n, p_1^F, \dots, p_k^F, m\}$ について解くという方法がとられることが多い。このケースの第 1 財のように、価格を 1 と基準化する財のことを「**ニュメレール (numeraire、価値基準財)**」と呼ぶ。ニュメレールの価格を 1 と置いて変数を一つ減らすと同時に、ニュメレールの市場均衡条件を除去して式の数も一本減らし、均衡条件の数と変数の数を一致させることによりモデルを解く。ニュメレールの市場均衡条件式を除いても、前節のワルラス法則よりそれは自動的に満たされることになる。

ただし、これは必ずある財の価格を 1 と置かなくてはならないということの意味するわけではない。例えば、第 1 財をニュメレールとし、それによって次の均衡価格、均衡数量が求められたとする。

$$\{1, p_2^+, \dots, p_n^+, p_1^{F+}, \dots, p_k^{F+}, m^+, y_i^+, x_{ij}^+, v_{fi}^+\}$$

すると、均衡価格のゼロ次同次性より、

$$\{2, 2p_2^+, \dots, 2p_n^+, 2p_1^{F+}, \dots, 2p_k^{F+}, 2m^+, y_i^+, x_{ij}^+, v_{fi}^+\}$$

も均衡価格、均衡数量の組み合わせになる。これは第 1 財の価格を 2 と固定して解くと、全ての価格が第 1 財の価格を 1 と置いていたときの 2 倍になるだけで、やはり同じ均衡生産・投入量が実現するということの意味する。つまり、要点は価格変数の一つが独立ではないということであるので、ある価格を 1 にしなければいけないというのではなく、どの価格（所得でも）よいのでとにかくある値に固定してやればよいということである。ただし、どの価格をどのような値に固定するかによって価格変数の均衡解は当然変わってくるので、その点は注意が必要である¹⁰⁾。実際にど

9) 厳密には、価格だけではなく、所得などの金額を表す変数全てに言える話である。

10) ここで「どの価格をどのような値に固定するのでもよい」というのは、モデルを解くという観点からの話である。

のようにニュメレールを選択するかという問題については別のところで議論する。

均衡価格の 0 次同次性は成り立たなければならないのか？

ここで取り上げているモデルでは均衡価格の 0 次同次性が成立した。しかし、そもそもそれは一般均衡モデルにおいて成り立たなければならない性質であろうか？これを考える前に、このモデルにおいて 0 次同次性が成り立つ理由を考えてみよう。第 2.5.2 節でこのモデルが価格について 0 次同次であることを見たが、そこでの議論は、このモデルにおいて価格の 0 次同次性が成り立つのは次の性質が満たされているからだということを示している。

- ・ 生産物価格と投入物価格をともに定数倍しても、利潤を最大化する生産量、投入量は変わらない。
- ・ 生産物価格と所得をともに定数倍しても、家計の効用を最大化する消費量は変わらない。
- ・ 生産要素価格が λ 倍されればその分所得も λ 倍される

最後の性質は当たり前のものである。一方、最初の 2 つの性質は「企業、消費者が貨幣錯覚を持たない」、言い換えれば「経済主体は絶対的な価格ではなく、相対的な価格に基づいて行動を決定するということ」を意味している。合理的な企業、家計を想定するモデルにおいては通常成り立つと仮定する性質ではあるが、これが適切な仮定であるとは必ずしも言えない（企業や家計が貨幣錯覚を持つ場合もありうる）。よって、価格の 0 次同次性が成り立つモデルとするかどうかは、分析対象や分析目的などに応じて判断すべきことで、必ず 0 次同次性を満たすようなモデルでなければならないということではない。

CGE 分析においても、均衡価格の 0 次同次性が成り立たないモデルを想定することは一つのアプローチとしてはありうるかもしれない。しかし、CGE 分析でしばしば問題となるのは、意図せずに均衡価格の 0 次同次性を損なう条件を入れてしまうということである。つまり、基本的には貨幣錯覚がない経済主体を想定し、モデルのほとんどの部分に置いて価格の 0 次同次性が成り立つような形にしているが、一部に 0 次同次性が成り立たない条件式を入れてしまうということである。もちろんそれにしかるべき理由があり、意図的に導入するのであれば問題がないが、多くは意図せずに入れてしまい、その結果モデルの挙動に問題が生じる、あるいはモデルが解けなくなるということがよく見られる。CGE モデルの構築という作業において、自分が意図しない限り、価格の 0 次同次性を損なうような要素を入れていないか常に注意を払う必要がある。

ニュメレールによるモデルのチェック

CGE 分析では価格の 0 次同次性（ニュメレール）を利用してモデルをチェックするという作業がよくおこなわれる。これについては第 5 章で詳しく扱う。

2.6 企業側の別表現

ここまでは、生産関数に

$$y_i = f_i(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{ni}, v_{1i}, \dots, v_{ki}) = f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$$

という形式を前提としてきた。生産は中間財と生産要素を投入しておこなわれるという非常に一般的な形式である。しかし、CGE 分析では次のような形式を想定することが多い。

$$y_i = f_i^y(\mathbf{x}_i, v_i^a) \quad (8)$$

$$v_i^a = f_i^v(\mathbf{v}_i) \quad (9)$$

ここで、 $f_i^y(\cdot)$ と $f_i^v(\cdot)$ は一次同次の生産関数である。つまり、生産要素については一度関数 $f_i^v(\cdot)$ によって一つの合成財 v_i^a とし、それが他の中間投入財とともに投入されるという二段階の投入構造である。以下、 v_i^a を合成生産要素と呼ぶ。

この技術を前提としてモデルの均衡条件を書き換える。単純に書き換えるだけなら、これまで $y_i = f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$ としていた部分を $y_i = f_i^y(\mathbf{x}_i, f_i^v(\mathbf{v}_i))$ とすればよいだけであるが、以下では一つに扱っていた企業を形式上次の二つの部門に分割した上で書き換えをおこなう。

- $y_i = f_i^y(\mathbf{x}_i, v_i^a)$ という生産関数を持つ「財を生産する部門」
- $v_i^a = f_i^v(\mathbf{v}_i)$ という生産関数を持つ「合成生産要素を生産する部門」

本来は上の二つは一つの部門がおこなっているのだが、モデルの記述をわかりやすくさせるために（具体的には、一本の式の長さを短くするために）、このような解釈の変更をおこなう。二つに分割したどちらの部門についても、企業はプライステイカーかつ、利潤最大化を目指して行動すると仮定する。

2.6.1 財を生産する部門

財を生産する部門の利潤は次式のように表現できる。

$$\pi_i^y = p_i f_i^y(\mathbf{x}_i, v_i^a) - \sum_j p_j x_{ji}$$

ここで、 p_i^{va} は合成生産要素の価格である。

利潤最大化条件は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_i^y}{\partial x_{ji}} &= p_i \frac{\partial f_i^y}{\partial x_{ji}} - p_j = 0 \\ \frac{\partial \pi_i^y}{\partial v_i^a} &= p_i \frac{\partial f_i^y}{\partial v_i^a} - p_i^{va} = 0 \end{aligned}$$

この 2 本から利潤を最大化する $\{x_{ji}\}$ 、 v_i^a が決定される。

2.6.2 合成生産要素を生産する部門

合成生産要素を生産する部門の利潤は次式で与えられる。

$$\pi_i^{va} = p_i^{va} f_i^v(\mathbf{v}_i) - \sum_f p_f^F v_{fi}$$

利潤最大化条件

$$\frac{\partial \pi_i^{va}}{\partial v_{fi}} = p_i^{va} \frac{\partial f_i^v}{\partial v_{fi}} - p_f^F = 0$$

これから利潤を最大化する生産要素投入量 v_{fi} が決まることになる。

[注]

以上の書き換えはあくまでモデルの記述をわかりやすくするという便宜上のものである。求められる均衡は、そのまま二段階の生産関数を持つ一つの部門として扱った場合と全く同じである。

2.6.3 均衡条件（まとめ）

以上の均衡条件をまとめたのが表 2 である。この均衡条件式から得られる均衡は、第 2.4 節の均衡条件において $y_i = f_i^y(\mathbf{x}_i, f_i^v(\mathbf{v}_i))$ として求められる均衡と全く同じになる。

表 2：二段階生産関数のケースの均衡条件式（伝統的アプローチによる表現）

条件	式	対応する変数
財の生産関数	$y_i = f_i^y(\mathbf{x}_i, v_i^a)$	$\{y_i\}_{i=1, \dots, n}$
財部門の利潤最大化条件	$p_i \frac{\partial f_i^y(\mathbf{x}_i, v_i^a)}{\partial x_{ji}} - p_j = 0$	$\{x_{ij}\}_{i,j=1, \dots, n}$
	$p_i \frac{\partial f_i^y(\mathbf{x}_i, v_i^a)}{\partial v_i^a} - p_i^{va} = 0$	$\{v_i^a\}_{i=1, \dots, n}$
合成生産要素の生産の利潤最大化条件	$p_i^{va} \frac{\partial f_i^v(\mathbf{v}_i)}{\partial v_{fi}} - p_f^F = 0$	$\{v_{fi}\}_{i=1, \dots, n, f=1, \dots, k}$
財市場の均衡条件	$y_i = \sum_j x_{ij} + d_i(\mathbf{p}, m)$	$\{p_i\}_{i=1, \dots, n}$
合成生産要素生産の市場の均衡条件	$f_i^v(\mathbf{v}_i) = v_i^a$	$\{p_i^{va}\}_{i=1, \dots, n}$
要素市場の均衡条件	$\bar{v}_f = \sum_j v_{fj}$	$\{p_f^F\}_{f=1, \dots, k}$
所得の定義式	$m = \sum_f p_f^F \bar{v}_f$	$\{m\}$

3 一般均衡モデル（双対アプローチによる表現）

第 2 節では、均衡条件を表現する際に、生産関数、非補償需要関数（マーシャルの需要関数）を用いた（これを便宜上「伝統的アプローチ」と呼ぶ）。これに対し、費用関数、支出関数、条件付き要素需要関数、補償需要関数（ヒックスの需要関数）を用いて均衡条件を表現するアプローチがある。これは「双対アプローチ（dual approach）」と呼ばれる。CGE 分析ではこの双対アプローチを利用することも多いので、以下では双対アプローチをとった場合における均衡条件の表現を提示する。「伝統的アプローチ」を用いようが「双対アプローチ」を用いようが、それは表現方法の違いにすぎないので、元々の生産関数や効用関数が同じであるなら、どちらを使っても同じモデルである。

双対アプローチに関して詳しくは、以下の文献を見て欲しい。

- Mas-Colell et al. (1995)、Varian (1992)、奥野・鈴木 (1985) 等のミクロ経済学のテキスト。

- Dixit and Norman (1980)。これは国際貿易モデルを扱ったテキストであるが、双対アプローチによるモデルの記述で有名なテキストである。

3.1 企業

双対アプローチでは、企業側の行動は（単位）費用関数、及びそこから導出される投入需要関数によって表現される。まず、単位費用関数は次のように定義される。

$$c_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) \equiv \min_{\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i^F} \left[\sum_j p_j z_{ji} + \sum_f p_f^F z_{fi}^F \mid f_i(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i^F) = 1 \right]$$

ただし、 $\mathbf{p} = \{p_1, \dots, p_n\}$ 、 $\mathbf{p}^F = \{p_1^F, \dots, p_k^F\}$ である。

この単位費用関数を利用すると利潤は次のように表現できる。

$$\pi_i = [p_i - c_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F)] y_i$$

利潤最大化条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial y_i} = p_i - c_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) = 0$$

投入物に対する単位需要（生産物 1 単位当たりの需要）はシェパードの補題より

$$a_{ji}(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) = \frac{\partial c_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F)}{\partial p_j}$$

$$a_{fi}^F(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) = \frac{\partial c_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F)}{\partial p_f^F}$$

で与えられる。 $a_{ji}(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F)$ は中間投入物 j に対する単位投入需要、 $a_{fi}^F(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F)$ は生産要素 f に対する単位投入需要である。投入物に対する総需要は単位需要に生産量を掛け合わせることで求められる。

$$a_{ji}(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) y_i \qquad a_{fi}^F(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) y_i$$

3.2 家計

家計側の行動は支出関数、及びそこから導出される補償需要関数で表現される。まず、支出関数は次のように定義される。

$$e(\mathbf{p}, u) \equiv \min_{\mathbf{h}} \left[\sum_i p_i h_i \mid g(\mathbf{h}) = u \right]$$

家計が効用最大化を図るなら、最小化された支出が家計の所得 m に等しくなっていなければならない。従って、次の関係が成立する。

$$e(\mathbf{p}, u) = m$$

価格と所得が決まれば、この関係から家計の効用水準が決まることになる。家計の需要はシェパードの補題により、支出関数から導出することができる。

$$h_i(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i}$$

これは補償需要関数である。

家計の所得の定義については第 2 節の表現と変わらない。

$$m = \sum_f p_f^F \bar{v}_f$$

3.3 市場均衡

財市場の均衡条件

$$y_i = \sum_j a_{ij}(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) y_j + h_i(\mathbf{p}, u)$$

生産要素市場の均衡条件

$$\bar{v}_f = \sum_j a_{fj}^F(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) y_j$$

3.4 均衡条件（まとめ）

表 3：均衡条件式（双対アプローチによる表現）

条件	式	対応する変数
利潤最大化条件	$p_i - c_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) = 0$	$\{y_i\}_{i=1, \dots, n}$
単位投入需要	$a_{ji} = \frac{\partial c_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F)}{\partial p_j}$	$\{a_{ij}\}_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}$
	$a_{fi}^F = \frac{\partial c_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F)}{\partial p_f^F}$	$\{a_{fi}^F\}_{f=1, \dots, k, i=1, \dots, n}$
補償需要	$h_i = \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i}$	$\{h_i\}_{i=1, \dots, n}$
財市場の均衡条件	$y_i = \sum_j a_{ij} y_j + h_i$	$\{p_i\}_{i=1, \dots, n}$
要素市場の均衡条件	$\bar{v}_f = \sum_j a_{fj}^F y_j$	$\{p_f^F\}_{f=1, \dots, k}$
所得と支出の関係	$e(\mathbf{p}, u) = m$	$\{u\}$
所得の定義式	$m = \sum_f p_f^F \bar{v}_f$	$\{m\}$

表 3 は双対アプローチによる均衡条件の表現をまとめたものである。

式の数 は $n + n^2 + nk + n + n + k + 1 + 1 = 3n + n^2 + nk + k + 2$ 本、変数は $\{y_i\}$ が n 個、 $\{a_{ij}\}$ が n^2 個、 $\{a_{fi}^F\}$ が $n \times k$ 個、 $\{h_i\}$ が n 個、 $\{p_i\}$ が n 個、 $\{p_f^F\}$ が k 個、 $\{u\}$ が 1 個、 $\{m\}$ が 1 個の合計 $n + n^2 + nk + n + n + k + 1 + 1 = 3n + n^2 + nk + k + 2$ 個となる。

表 4：双対アプローチにおける生産サイドと需要サイドの対応

条件	生産サイド		需要サイド
利潤最大化・効用最大化	$c_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) = p_i$	\Longleftrightarrow	$e(\mathbf{p}, u) = m$
(単位) 需要	$a_{ji}(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) = \frac{\partial c_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F)}{\partial p_j}$	\Longleftrightarrow	$h_i(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i}$
	$a_{fi}^F(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F) = \frac{\partial c_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}^F)}{\partial p_f^F}$		

3.5 双対アプローチを利用する利点

第 3 節の最初で述べたように、伝統的アプローチを用いようが双対アプローチを用いようが、それは同じモデルの別表現にすぎないので、モデルが変わってくるわけではない。この意味ではどちらを使うのでもよい。ただし、CGE 分析では双対アプローチを利用することに次のような利点がある。

- 1) 生産サイドと需要サイドを同じような形式で表現できる。
- 2) 既存の CGE モデル（特に、温暖化対策分析の CGE モデル）を参考にしやすくなる。

3.5.1 利点 1: 生産サイドと需要サイドの表現の類似性

表 1 の伝統的なアプローチによる均衡条件と表 3 の双対アプローチによる均衡条件を比べてみて欲しい。二つのアプローチの最も大きな違いは、伝統的アプローチでは生産サイドと需要サイドの記述の形式が異なっているのに対し、双対アプローチでは両者を同じような形式で記述できるという点である。伝統的なアプローチでは、生産サイドは生産関数、「限界生産物価値＝要素価格」という利潤最大化条件、需要サイドは非補償需要関数によって表現されている。このため生産サイドと需要サイドで記述の形式が異なる。これに対し、双対アプローチでは、表 4 が示すように生産サイドと需要サイドが同じような形式で記述されている。

単位費用関数と支出関数、単位需要関数と補償需要関数というように生産サイドと需要サイドがきれいに対応している。生産側は「単位」費用関数、「単位」需要関数を用いているのに対し、需要側は「総」支出関数、「総」補償需要関数を用いているため、若干の形式の差が生じているが、効用関数に一次同次関数を利用するのなら（実際、CGE 分析ではそうすることが多いのだが）、需要側についても生産側と全く同じように「単位」支出関数、「単位」補償需要関数によって表現できるため、実際には表 4 以上に類似性は高いと言える。

この形式の類似性は CGE 分析をおこなう際に大きなメリットとなる。CGE 分析をおこなうには、生産関数・効用関数の関数形を具体的に特定化した上で、そこから様々な関数を導出する必要がある。生産関数と効用関数が同じ関数形（例えば、CES 関数）であったとしても、伝統的アプローチでは、生産サイドは限界生産物、需要サイドは非補償需要という全く形式の異なったものを求める必要がある。一方、双対アプローチでは、生産サイドの単位費用関数と需要サイドの（単位）支出関数、生産サイドの需要と需要サイドの補償需要が全く同じ形式であるので、どちらかがわか

ればもう片方を計算する必要はなくなる。よって、関数の導出という手間を省くことができる。

また、同じ形式で記述できることで、シミュレーションのプログラムが読みやすくなるという利点もある。実際の CGE 分析では何段階もネストされた CES 関数を生産関数や効用関数に用いることが多い。そのようなケースで伝統的なアプローチを利用すると、ただでさえ複雑な関数形であるのに加え、生産サイド、消費サイドが全く異なった記述になるため、一層プログラムが読みにくくなる。一方、双対アプローチを利用すれば、式の数が増加するという意味での複雑さの増加はあるが、形式という面では共通化されていることから、プログラムの読みやすさは損なわれにくい。

3.5.2 利点 2: 既存の研究

CGE 分析においてモデルを記述する際に、伝統的アプローチで記述する人もいれば、双対アプローチで記述する人もいる。一般的にはどちらが多いとは言えないと思うが、温暖化対策の CGE 分析において利用されている著名な CGE モデルや著名な研究者の CGE モデルでは双対アプローチを利用しているものが多い。

例えば、モデルとしては、MIT の EPPA モデル Chen et al. (2015)¹¹⁾、ドイツ ZEW の PACE モデル¹²⁾は双対アプローチを利用してモデルを記述している¹³⁾。これらのモデルを参考にするには、双対アプローチを理解しておく必要がある。また、温暖化対策や貿易政策の CGE 分析に関する論文を数多く書いている Thomas F. Rutherford¹⁴⁾ や Christoph Böhringer 等の研究者は双対アプローチを用いてモデルを記述している。彼等の論文を読むには双対アプローチについての理解が必要である。また、彼等は数多くの CGE モデルのプログラムを公開してくれているが、そのプログラムを参考にするにも双対アプローチを理解しておく必要がある。筆者もウェブサイト¹⁵⁾で自分の CGE モデルのプログラムを公開しているが、全て双対アプローチを用いて記述している。このように、双対アプローチを理解しておくことで、CGE 分析の多くのプログラムを参考にすることができるというメリットがある。

3.6 企業側の別表現

(8)、(9) 式のように生産関数を特定化するケースでの双対アプローチによる表現を考える。

3.6.1 財を生産する部門

単位費用関数

$$c_i^y(\mathbf{p}, p_i^{va}) \equiv \min_{\mathbf{z}_i, z_i^a} \left[\sum_j p_j z_{ji} + p_i^{va} z_i^a \mid f_i^y(\mathbf{z}_i, z_i^a) = 1 \right]$$

11) <https://globalchange.mit.edu/research/research-tools/human-system-model> [2022-01-19 アクセス]

12) http://www.transust.org/models/pace/TranSust_ModelDocumentation_PACE.pdf [2022-01-19 アクセス]

13) 厳密には少し違う。これらのモデルは全て GAMS の MPSGE というソルバー用のプログラムで記述されている。MPSGE は GAMS の CGE モデル用のソルバーであり、数式を使わなくてもモデルを記述できる機能を提供するものである。直接、数式でモデルを記述しているわけではないので、モデルの作成者が直接、双対アプローチによってモデルを記述しているわけではないが、MPSGE 内部では双対アプローチの形式によってモデルが表現されている。その意味で双対アプローチによって記述しているということである。

14) <https://www.mpsge.org/> [2022-01-19 アクセス]

15) <https://shirotakeda.github.io/> [2022-01-19 アクセス]

利潤

$$\pi_i^y = [p_i - c_i^y(\mathbf{p}, p_i^{va})] y_i$$

利潤最大化条件

$$\frac{\partial \pi_i^y}{\partial y_i} = p_i - c_i^y(\mathbf{p}, p_i^{va}) = 0$$

単位投入需要

$$a_{ji}(\mathbf{p}, p_i^{va}) = \frac{\partial c_i^y(\mathbf{p}, p_i^{va})}{\partial p_j}$$
$$a_i^v(\mathbf{p}, p_i^{va}) = \frac{\partial c_i^y(\mathbf{p}, p_i^{va})}{\partial p_i^{va}}$$

3.6.2 合成生産要素を生産する部門

単位費用関数

$$c_i^{va}(\mathbf{p}^F) \equiv \min_{\mathbf{z}_i^F} \left[\sum_f p_f^F z_{fi}^F |f_i^v(\mathbf{z}_i^F)| = 1 \right]$$

利潤

$$\pi_i^{va} = [p_i^{va} - c_i^{va}(\mathbf{p}^F)] v_i^a$$

利潤最大化条件

$$\frac{\partial \pi_i^{va}}{\partial v_i^a} = p_i^{va} - c_i^{va}(\mathbf{p}^F) = 0$$

単位投入需要

$$a_{fi}^F(\mathbf{p}^F) = \frac{\partial c_i^{va}(\mathbf{p}^F)}{\partial p_f^F}$$

3.6.3 均衡条件（まとめ）

表 2 に均衡条件式をまとめている。

4 関数例

以下では、生産関数と効用関数を CES 関数に特定化した上でモデルを表現する。生産関数については第 2.6 節で利用した別表現のような関数形を想定する。CES 関数について詳しくは第 1 章

表 5：二段階生産関数のケースの均衡条件式（双対アプローチによる表現）

条件	式	対応する変数
財の生産の利潤最大化条件	$p_i - c_i^y(\mathbf{p}, p_i^{va}) = 0$	$\{y_i\}_{i=1, \dots, n}$
合成生産要素生産の利潤最大化条件	$p_i^{va} - c_i^{va}(\mathbf{p}^F) = 0$	$\{v_i^a\}_{i=1, \dots, n}$
財の生産の単位投入需要	$a_{ji} = \frac{\partial c_i^y(\mathbf{p}, p_i^{va})}{\partial p_j}$	$\{a_{ji}\}_{j=1, \dots, n, i=1, \dots, n}$
	$a_i^v = \frac{\partial c_i^y(\mathbf{p}, p_i^{va})}{\partial p_i^{va}}$	$\{a_i^v\}_{i=1, \dots, n}$
合成生産要素生産の単位投入需要	$a_{fi}^F = \frac{\partial c_i^{va}(\mathbf{p}^F)}{\partial p_f^F}$	$\{a_{fi}^F\}_{f=1, \dots, k, i=1, \dots, n}$
補償需要	$h_i = \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i}$	$\{h_i\}_{i=1, \dots, n}$
財市場の均衡条件	$y_i = \sum_j a_{ij} y_j + h_i$	$\{p_i\}_{i=1, \dots, n}$
合成生産要素市場の均衡条件	$v_i^a = a_i^v y_i$	$\{p_i^{va}\}_{i=1, \dots, n}$
要素市場の均衡条件	$\bar{v}_f = \sum_j a_{fj}^F v_j^a$	$\{p_f^F\}_{f=1, \dots, k}$
所得と支出の関係	$e(\mathbf{p}, u) = m$	$\{u\}$
所得の定義式	$m = \sum_f p_f^F \bar{v}_f$	$\{m\}$

や第 A-1 章を参照されたい。

生産関数

$$y_i = f_i^y(\mathbf{x}_i, v_i^a) = \left[\sum_j \alpha_{ji}^x (x_{ji})^{\frac{\sigma_i-1}{\sigma_i}} + \alpha_i^v (v_i^a)^{\frac{\sigma_i-1}{\sigma_i}} \right]^{\frac{\sigma_i}{\sigma_i-1}}$$

$$v_i^a = f_i^v(\mathbf{v}_i) = \left[\sum_f \beta_{fi}^v (v_{fi})^{\frac{\sigma_i^v-1}{\sigma_i^v}} \right]^{\frac{\sigma_i^v}{\sigma_i^v-1}}$$

効用関数

$$u = g(d_1, \dots, d_n) = \left[\sum_i \gamma_i (d_i)^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}} \right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}}$$

4.1 伝統的アプローチによる均衡条件

第 2 節の伝統的なアプローチによる均衡条件の表現。

$$y_i = \left[\sum_j \alpha_{ji}^x (x_{ji})^{\frac{\sigma_i-1}{\sigma_i}} + \alpha_i^v (v_i^a)^{\frac{\sigma_i-1}{\sigma_i}} \right]^{\frac{\sigma_i}{\sigma_i-1}} \quad \{y_i\}_{i=1, \dots, n}$$

$$p_i y_i^{\frac{1}{\sigma_i}} \alpha_{ji}^x (x_{ji})^{-\frac{1}{\sigma_i}} - p_j = 0 \quad \{x_{ij}\}_{i=1, \dots, n, j=1, \dots, n}$$

$$\begin{aligned}
p_i y_i^{\frac{1}{\sigma_i}} \alpha_i^v (v_i^a)^{-\frac{1}{\sigma_i}} - p_i^{va} &= 0 & \{v_i^a\}_{i=1, \dots, n} \\
p_i^{va} (v_i^a)^{\frac{1}{\sigma_i}} \beta_{fi}^v (v_{fi})^{-\frac{1}{\sigma_i}} - p_f^F &= 0 & \{v_{fi}\}_{i=1, \dots, n, f=1, \dots, k} \\
y_i = \sum_j x_{ij} + \left[\frac{\gamma_i}{p_i} \right]^{\sigma^c} \frac{m}{\sum_j (\gamma_j)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}} & & \{p_i\}_{i=1, \dots, n} \\
\left[\sum_f \beta_{fi}^v (v_{fi})^{\frac{\sigma_i^v - 1}{\sigma_i}} \right]^{\frac{\sigma_i^v}{\sigma_i^v - 1}} = v_i^a & & \{p_i^{va}\}_{i=1, \dots, n} \\
\bar{v}_f = \sum_j v_{fj} & & \{p_f^F\}_{f=1, \dots, k} \\
m = \sum_f p_f^F \bar{v}_f & & \{m\}
\end{aligned}$$

4.2 双対アプローチによる均衡条件

第3節の双対アプローチによる均衡条件の表現。

$$\left[\sum_j (\alpha_{ji}^x)^{\sigma_i} (p_j)^{1-\sigma_i} + (\alpha_i^v)^{\sigma_i} (p_i^{va})^{1-\sigma_i} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_i}} - p_i = 0 \quad \{y_i\}_{i=1, \dots, n} \quad (10)$$

$$\left[\sum_f (\beta_{fi}^v)^{\sigma_i^v} (p_f^F)^{1-\sigma_i^v} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_i^v}} - p_i^{va} = 0 \quad \{v_i^a\}_{i=1, \dots, n} \quad (11)$$

$$a_{ji}^x = \left[\frac{\alpha_{ji}^x}{p_j} \right]^{\sigma_i} \left[\sum_l (\alpha_{li}^x)^{\sigma_i} (p_l)^{1-\sigma_i} + (\alpha_i^v)^{\sigma_i} (p_i^{va})^{1-\sigma_i} \right]^{\frac{\sigma_i}{1-\sigma_i}} \quad \{a_{ji}^x\}_{i,j=1, \dots, n} \quad (12)$$

$$a_i^v = \left[\frac{\alpha_i^v}{p_i^{va}} \right]^{\sigma_i} \left[\sum_l (\alpha_{li}^x)^{\sigma_i} (p_l)^{1-\sigma_i} + (\alpha_i^v)^{\sigma_i} (p_i^{va})^{1-\sigma_i} \right]^{\frac{\sigma_i}{1-\sigma_i}} \quad \{a_i^v\}_{i=1, \dots, n} \quad (13)$$

$$a_{fi}^F = \left[\frac{\beta_{fi}^v}{p_f^F} \right]^{\sigma_i^v} \left[\sum_k (\beta_{ki}^v)^{\sigma_i^v} (p_k^F)^{1-\sigma_i^v} \right]^{\frac{\sigma_i^v}{1-\sigma_i^v}} \quad \{a_{fi}^F\}_{f=1, \dots, k, i=1, \dots, n} \quad (14)$$

$$h_i = \left[\frac{\gamma_i}{p_i} \right]^{\sigma^c} \left[\sum_j (\gamma_j)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}} u \quad \{h_i\}_{i=1, \dots, n} \quad (15)$$

$$y_i = \sum_j a_{ij}^x y_j + h_i \quad \{p_i\}_{i=1, \dots, n} \quad (16)$$

$$v_i^a = a_i^v y_i \quad \{p_i^{va}\}_{i=1, \dots, n} \quad (17)$$

$$\bar{v}_f = \sum_i a_{fi}^F v_i^a \quad \{p_f^F\}_{f=1, \dots, k} \quad (18)$$

$$u \left[\sum_i (\gamma_i)^{\sigma^c} (p_i)^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}} = m \quad \{u\} \quad (19)$$

$$m = \sum_f p_f^F \bar{v}_f \quad \{m\} \quad (20)$$

5 終わりに

この章では、一般均衡モデルについて扱った。まず、単純な一般均衡モデルを提示し、一般均衡モデルの均衡条件がどのように表現されるかを説明した。さらに、一般均衡モデルで成り立つ性質として、1) ワルラス法則、2) 均衡価格の 0 次同次性について説明した。この 2 つの性質は後の章でも頻繁に取り上げられるものであるので、十分理解しておくことが望ましい。最後に、生産関数、効用関数を CES 型関数に特定化した場合の均衡条件の表現を提示した。次の第 3 章では GAMS の利用方法について説明する。

参考文献

- Chen, Y.-H. H., S. Paltsev, J. Reilly, J. Morris, and M. H. Babiker (2015). *The MIT EPPA6 Model: Economic Growth, Energy Use, Emissions, and Food Consumptions*. Joint Program Report Series Report 278 278, p. 40 (cit. on p. 16).
- Dixit, A. K. and V. Norman (1980). *Theory of International Trade: A Dual General Equilibrium Approach*. Cambridge: Cambridge University Press (cit. on p. 13).
- Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green (1995). *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press (cit. on p. 13).
- Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis*. 3rd. New York: W. W. Norton Company (cit. on p. 13).
- 奥野正寛・鈴木興太郎 (1985) 『ミクロ経済学 I』, 岩波書店 (cit. on p. 13).

6 問題

問題 1

生産関数、効用関数が次のような Cobb-Douglas 型であるときの、第 4.1 節、第 4.2 節の均衡条件を求めなさい。

生産関数

$$y_i = f_i^y(\mathbf{x}_i, v_i^a) = \phi_i^y \prod_j (x_{ji})^{\alpha_{ji}^x} (v_i^a)^{\alpha_i^v}$$

$$v_i^a = f_i^v(\mathbf{v}_i) = \phi_i^v \prod_f (v_{fi})^{\beta_{fi}^v}$$

効用関数

$$u = g(d_1, \dots, d_n) = \phi^c \prod_i (d_i)^{\gamma_i}$$

問題 2

(10) 式～(20) 式において均衡価格の 0 次同次性が成立することを確認しなさい。つまり、 p_i^* 、 p_i^{va*} 、 p_f^{F*} 、 m^* が均衡価格（と所得）なら、 $p_i^+ = \lambda p_i^*$ 、 $p_i^{va+} = \lambda p_i^{va*}$ 、 $p_f^{F+} = \lambda p_f^{F*}$ 、 $m^+ = \lambda m^*$ を満たす p_i^+ 、 p_i^{va+} 、 p_f^{F+} 、 m^+ も均衡価格（所得）になることを確認しなさい。

問題 3

(10) 式～(20) 式において生産要素賦存量 \bar{v}_f が全て λ 倍されたとする。このとき新しい均衡は元の均衡と比較し、どのように変化するかを推測しなさい。

ヒント：(10) 式～(20) 式のモデルでは生産関数も効用関数も 1 次同次関数が仮定されている。また、外生的に設定されている数量変数は生産要素賦存量 \bar{v}_f だけである。

7 履歴

- 2023-04-27: 全体的に誤植の修正。
- 2022-01-10: 説明の追加・修正。
- 2018-07-20: 説明の追加・修正。
- 2017-03-15: 説明の修正。
- 2016-05-05: 説明を少しだけ修正。
- 2015-11-21: 誤植修正。
- 2015-10-23: 誤植修正。