応用一般均衡分析入門 第 10 章：モデルの別表現 *

武田 史郎 †

Date: 2022/01/28,
Version 3.0

目次

1 導入

今回の内容について。

- 第 2 章で一般均衡モデルを提示し、第 5 章〜第 9 章でそのモデルを GAMS 上で解いてきた。
- 第 10 章では第 8 章で解いたモデルの別の表現方法を 2 つ紹介する。
- まず一つは消費活動を生産活動と同じように表現するアプローチである。
    - 第 8 章のモデルでは家計が様々な財を消費することで効用を得ていると想定し、それをそのままモデルで表現していた。
    - しかし、家計が消費をおこない効用を得るという行動は、形式上財を投入することで効用という財を生産するという生産活動の一種とみなすことができる。

* このファイルの配布場所: https://shirotakeda.org/ja/research-ja/cge-howto.html

† 所属：京都産業大学経済学部. Website: https://shirotakeda.org/ja/

- 第 10 章ではそのように消費活動を生産活動の一種として表現するアプローチを紹介する。
  - 一部の研究者はこのアプローチを用いてモデルを表現している。特に、CGE モデ ルを解く際に、GAMS の MPSGE というソルバーを利用している場合には、この表現方法を使ってモデルが記述されていることが多い。それらの研究を参考にする際には、この表現方法を理解しておく必要がある。
- 二つ目は内生変数の初期均衡での値を 1 に規準化するような記述方法である。
  - 生産量等の水準をそのまま表現するような内生変数を定義するのではなく、初期均衡において 1 をとるように内生変数を定義する方法である。

2 元のモデル

表 1：元々の SAM

	農業	製造業	サービス	労働	資本	家計	行和
農業	30	10	30			70	140
製造業	10	50	20			220	300
サービス	20	40	20			70	150
労働	50	80	50				180
資本	30	120	30				180
家計				180	180		360
列和	140	300	150	180	180	360	

元々のモデルは第 5 章（第 8 章）で利用したモデルであり、表 1 が元のモデルで利用されていた SAM である。モデルの均衡条件式は次のように表現されていた。

$$c_i = \left[\sum_j (\alpha_{ji}^x)^{\sigma_i} (p_j)^{1-\sigma_i} + (\alpha_i^v)^{\sigma_i} (p_i^{va})^{1-\sigma_i} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_i}} \qquad \{c_i\}_{i=1,\cdots,n} \tag{1}$$

$$c_i^{va} = \left[\sum_f (\beta_{fi}^v)^{\sigma_i^v} \left[(1+t_{fi}^F) p_f^F \right]^{1-\sigma_i^v} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_i^v}} \qquad \{c_i^{va}\}_{i=1,\cdots,n} \tag{2}$$

$$c_i - p_i = 0 \qquad \{y_i\}_{i=1,\cdots,n} \tag{3}$$

$$c_i^{va} - p_i^{va} = 0 \qquad \{v_i^a\}_{i=1,\cdots,n} \tag{4}$$

$$a_{ji}^x = \left[\frac{\alpha_{ji}^x c_i}{p_j} \right]^{\sigma_i} \qquad \{a_{ji}^x\}_{i,j=1,\cdots,n} \tag{5}$$

$$a_i^v = \left[\frac{\alpha_i^v c_i}{p_i^{va}} \right]^{\sigma_i} \qquad \{a_i^v\}_{i=1,\cdots,n} \tag{6}$$

$$x_{ij} = a_{ij}^x y_j \qquad \{x_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n} \tag{7}$$

$$a_{fi}^F = \left[\frac{\beta_{fi}^v c_i^{va}}{(1+t_{fi}^F) p_f^F} \right]^{\sigma_i^v} \qquad \{a_{fi}^F\}_{i=1,\cdots,n,f=1,\cdots,k} \tag{8}$$

$$v_{fi} = a_{fi}^F v_i^a \qquad \{v_{fi}\}_{f=1,\cdots,k,i=1,\cdots,n} \tag{9}$$

$$e = \left[\sum_j (\gamma_j)^{\sigma^c} \left[(1+t_j^C) p_j \right]^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}} u \qquad \{e\} \qquad (10)$$

$$d_i = \left[\frac{\gamma_i (e/u)}{(1+t_i^C) p_i} \right]^{\sigma^c} u \qquad \{d_i\}_{i=1,\cdots,n} \qquad (11)$$

$$y_i = \sum_j a_{ij}^x y_j + d_i \qquad \{p_i\}_{i=1,\cdots,n} \qquad (12)$$

$$v_i^a = a_i^v y_i \qquad \{p_i^{va}\}_{i=1,\cdots,n} \qquad (13)$$

$$\bar{v}_f = \sum_i a_{fi}^F v_i^a \qquad \{p_f^F\}_{f=1,\cdots,k} \qquad (14)$$

$$m = \sum_f p_f^F \bar{v}_f + \sum_i t_i^C p_i d_i + \sum_{i,f} t_{fi}^F p_f^F v_{fi} \qquad \{m\} \qquad (15)$$

$$e = m \qquad \{u\} \qquad (16)$$

このモデルでは家計が消費をおこなって効用を得ており、それがそのままモデルで表現されている。家計の支出関数は (3) 式で、その支出関数に対応する補償需要関数が (11) 式である。さらに、家計の得る所得が (15) 式で与えられ、所得と収入が一致しているという (16) 式の条件によって効用水準 u が決まるというモデルである。第 2 章で説明したように、ここでは支出関数、補償需要関数を用いた双対アプローチによってモデルが記述されている。

3　消費活動を生産活動として扱う表現

第 2 節のモデルでは「家計が財を購入し（消費をおこない）効用を得る」という想定のもと、モデルが作成されている。これはごく普通の方法である。しかし、消費をすることで効用を得るという活動は、形式上**「財を投入することで効用という財を生産する活動」**と捉えることができる。より具体的には、

- 「効用」という財を生産する部門が存在し、その部門は財を投入（消費）することで効用を生産している。
- 家計は所得を用いて「効用」を生産する部門から「効用」という財を購入する。

というように解釈し直すことができる。以下では、このようにモデルを解釈し直した上で、モデルを表現し直してみる。

3.1　利用例

上のように消費活動を生産活動の一種のように記述する方法は、例えば、Thomas Rutherford 氏による Balistreri and Rutherford (2012)、GTAPinGAMS (Lanz and Rutherford, 2016) 等のモデル、MIT の EPPA モデル (Chen et al., 2015)、Christoph Bohringer 氏の Böhringer et al. (2012)、Böhringer and Rutherford (2010) 等で利用されている。また、筆者がモデルの作成に関わっている Takeda (2010)、Takeda et al. (2012)、Takeda et al. (2014)、武田他 (2010) でも用いられている。

Thomas Rutherford 氏、Christoph Bohringer 氏は温暖化対策の CGE 分析の著名な研究者であり、MIT の EPPA モデルもそれに基づいて数多くの論文が書かれている著名な CGE モデルである。これらの研究におけるモデルを理解するには、以下で説明するモデルの記述方法を理解する必要がある。

3.2 表現方法を変更する意義

第 2 章で双対アプローチを用いることにより、モデルの記述の際に生産活動と消費活動を同じように扱えるようになると説明した。上記のように、消費活動を生産活動の一種のようにモデルを書き換えることで、生産活動と消費活動の類似性をさらに高めることができる。類似性が高まることで、数式によるモデルの記述も統一的な表現になり、プログラムの簡素化につながる。

例えば、上で紹介した GTAPinGAMS に付属のプログラムでは、消費だけではなく、投資、政府支出も生産と同様の扱いがされていることもあり、全て統一的な形式で記述されている。そのため非常に簡潔で短いプログラムでモデルを表現することが可能になっている。

表 2：修正された SAM

	農業	製造業	サービス	**効用**	労働	資本	家計	行和
農業	30	10	30	70				140
製造業	10	50	20	220				300
サービス	20	40	20	70				150
効用							360	360
労働	50	80	50					180
資本	30	120	30					180
家計					180	180		360
列和	140	300	150	360	180	180	360	

3.3 数式によるモデルの表現

表 2 は消費活動を生産活動と解釈し直した SAM である。表 2 には「効用」という新しい行と列が追加されている。「効用」という列は「効用」という財を生産する部門を表している。この部門は「農業」財、「製造業」財、「サービス」財をそれぞれ 70、220、70 投入している。これは実際には各財の消費に当たる。一方、「効用」という行は「効用」という財の用途を表している。「家計」の列に 360 が計上されているのは、生産された「効用」が「家計」に 360 供給されていることを表している。

元の表 1 には「農業」、「製造業」、「サービス」という 3 つの財・部門が存在していたが、以上のように表 2 にはその 3 つに加えて、「効用」という財・部門が追加されている。この「効用」という財・部門は形式上、その他の 3 つの財・部門と同様に扱われる。

以下、数式によるモデルがどのように修正されるかを説明する。消費活動を生産活動の一種とみなすことは、効用関数を**「効用という財を生産するための生産関数」**と解釈するということである。ここまでずっと効用関数には、生産関数と同様に、一次同次の CES 関数を仮定していたので、

通常の生産のケースと同様に**「効用生産の単位費用関数」**を定義できる。 c^u を効用生産の単位費用とすると、単位費用関数は次式で与えられる。

$$c^u = \left[\sum_j (\gamma_j)^{\sigma^c} \left[(1 + t_j^C) p_j \right]^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}} \qquad \{c^u\}$$

これは形式上は (10) 式の支出関数を u で割ったもの、つまり**「単位支出関数」**に等しい。この単位費用関数から、Shephard の補題により、効用生産における単位投入需要が求められる。

$$a_i^u = \frac{\partial c^u}{\partial p_i} = \left[\frac{\gamma_i c^u}{(1 + t_i^C) p_i} \right]^{\sigma^c} \qquad \{a_i^u\}$$

これは通常「Hicks の需要関数」と呼ばれているものである（ただし、単位需要であるが)。

効用生産における投入需要は単位投入需要に生産量（効用水準）をかけあわせることで求められる。

$$d_i = a_i^u u \qquad \{d_i\}$$

通常の部門の利潤最大化条件が (3) 式で与えられるのと同様に、効用生産の利潤最大化条件は次式となる。

$$c^u - p^u = 0 \qquad \{u\}$$

ただし、p^u は「効用」の価格である。この条件で効用の生産水準（＝効用水準）「 u 」が決まる。

「効用」の供給量は効用の生産量 u で与えられる。供給された「効用」は家計が購入する。家計の効用に対する需要は「m/p^u」、つまり所得額を効用の価格で割った値で与えられる。以上より、「効用」の市場均衡条件は

$$u = \frac{m}{p^u} \qquad \{p^u\}$$

で与えられる。この市場均衡条件によって「効用の価格 p^u」が決まる。

$$c_i = \left[\sum_j (\alpha_{ji}^x)^{\sigma_i} (p_j)^{1-\sigma_i} + (\alpha_i^v)^{\sigma_i} (p_i^{va})^{1-\sigma_i} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_i}} \qquad \{c_i\}_{i=1,\cdots,n}$$

$$c_i^{va} = \left[\sum_f (\beta_{fi}^v)^{\sigma_i^v} \left[(1 + t_{fi}^F) p_f^F \right]^{1-\sigma_i^v} \right]^{\frac{1}{1-\sigma_i^v}} \qquad \{c_i^{va}\}_{i=1,\cdots,n}$$

$$c_i - p_i = 0 \qquad \{y_i\}_{i=1,\cdots,n}$$

$$c_i^{va} - p_i^{va} = 0 \qquad \{v_i^a\}_{i=1,\cdots,n}$$

$$a_{ji}^x = \left[\frac{\alpha_{ji}^x c_i}{p_j} \right]^{\sigma_i} \qquad \{a_{ji}^x\}_{i,j=1,\cdots,n}$$

$$a_i^v = \left[\frac{\alpha_i^v c_i}{p_i^{va}} \right]^{\sigma_i} \qquad \{a_i^v\}_{i=1,\cdots,n}$$

$$x_{ij} = a^x_{ij} y_j \qquad \{x_{ij}\}_{i,j=1,\cdots,n}$$

$$a^F_{fi} = \left[\frac{\beta^v_{fi} c^{va}_i}{(1+t^F_{fi}) p^F_f} \right]^{\sigma^v_i} \qquad \{a^F_{fi}\}_{i=1,\cdots,n,f=1,\cdots,k}$$

$$v_{fi} = a^F_{fi} v^a_i \qquad \{v_{fi}\}_{f=1,\cdots,k,i=1,\cdots,n}$$

$$c^u = \left[\sum_j (\gamma_j)^{\sigma^c} \left[(1+t^C_j) p_j \right]^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}} \qquad \{c^u\}$$

$$c^u - p^u = 0 \qquad \{u\}$$

$$a^u_i = \left[\frac{\gamma_i c^u}{(1+t^C_i) p_i} \right]^{\sigma^c} \qquad \{a^u_i\}_{i=1,\cdots,n}$$

$$d_i = a^u_i u \qquad \{d_i\}_{i=1,\cdots,n}$$

$$y_i = \sum_j a^x_{ij} y_j + a^u_i u \qquad \{p_i\}_{i=1,\cdots,n}$$

$$v^a_i = a^v_i y_i \qquad \{p^{va}_i\}_{i=1,\cdots,n}$$

$$\bar{v}_f = \sum_i a^F_{fi} v^a_i \qquad \{p^F_f\}_{f=1,\cdots,k}$$

$$u = \frac{m}{p^u} \qquad \{p^u\}$$

$$m = \sum_f p^F_f \bar{v}_f + \sum_i t^C_i p_i d_i + \sum_{i,f} t^F_{fi} p^F_f v_{fi} \qquad \{m\}$$

以上のようにモデルを書き換えることで、表 3 のようにモデルの変数は消費側、生産側を分けることなく表現できる。

表 3：モデルの変数

種類	変数
単位費用	c^y_i, c^{va}_i, c^u
価格	p_i, p^{va}_i, p^F_f, p^u
生産量	y_i, v^a_i, u
単位需要量	a^x_{ji}, a^v_i, a^F_{fi},a^u_i
需要量	x_{ji}, v_{fi}, d_i
所得	m

3.4 プログラム例

- `model_original.gms`: こちらが第 2 節の元々の表現方法によるモデル
- `model_alternative.gms`: こちらが第 3 節の表現方法によるモデル

どちらも同じモデルを表現方法を変更しただけであるので、同じ計算結果になるはずである。自分で実行して確認して欲しい。

4　内生変数を 1 に規準化する表現方法

4.1　説明

第 8 章で説明したように、CGE 分析ではベンチマークデータの下でモデルが均衡状態にあるという想定で分析が始まる。その均衡状態において価格変数は 1 という値をとると設定した（Harberger Convension）。そのため、生産量や投入量等のその他の変数については「金額データ＝数量データ」となり、初期均衡（基準均衡）の値が決まった。この方法では、価格以外の生産量等の変数はそのベンチマークにおける水準が初期均衡の値となるが、価格以外の内生変数についても初期均衡において 1 の値をとるようにモデルを書き換えるという方法がある。これは次のようにおこなう。

まず、普通の表現方法では、部門 i の生産量を y_i、そのベンチマークデータにおける値を $\bar{y}_i$ としたとき、初期均衡では $y_i = \bar{y}_i$ である。ここで、y_i のベンチマークの値と新たな変数 q_i^y を使って y_i という変数を $\bar{y}_i q_i^y$ と書き換えたとする。こうすると q_i^y という変数は初期均衡において 1 をとる変数となる。以上のように数量を表す変数を「初期均衡における値 $\times$ 新たな変数」という形に置き換えてやれば、その新たな変数はみな初期均衡において 1 をとる内生変数となる。

このように**初期均衡において 1 をとるように内生変数を書き換えることには、**1) **内生変数の変化率を把握しやすくなる、**2) **計算がしやすくなるという二つのメリット**がある。1 については、例えば、元々の生産量が 29,389,990 であったのが、35,856,890 に変化したとき、生産量がどれくらい変化したのかすぐに把握することは難しいであろう。しかし、元々の生産量を 1 に規準化しておけば、新しい値は 1.22004 であり、これなら約 22% 増加したのだとすぐに理解できる。このように変数の値を 1 に規準化しておくことで、変数の変化率を簡単に知ることができるというメリットがある。特に、CGE 分析では変数の変化量や変化幅よりも、「変化率」を見ることが多いので、このメリットが生きてくる。

2 は次のようなことである。規準化せずに、ベンチマークデータの値そのものを（内生）変数の値とする場合、変数間の桁の差が非常に大きくなる場合がある。例えば、数兆円の生産額となる部門がある一方、数百万円の生産額しかない部門があるというようなケースである。GAMS ではこのように内生変数の桁数が大きく異なると計算が難しくなる傾向があり、できるだけ内生変数の値は 1 に等しくなるようにスケール、単位を調整することが望ましいと言われている。元々、内生変数の値を 1 に規準化してやれば、計算が難しくなるという問題が生じる可能性を小さくできるということである。

4.2　プログラム例

`model_original.gms` が変数を規準化していない元のプログラムであるのに対し、`model_normalize.gms` は生産量 y_i、合成生産要素 v_i^a、効用水準 u に当る変数の値を 1 に規準化し

たプログラムである。model_original.gms では y_i、v_i^a、u はそれぞれ y(i)、v_a(i)、u という変数で表されているが、model_normalize.gms の中では

- y(i) ⇒ y0(i)*y(i)
- v_a(i) ⇒ v_a0(i)*v_a(i)
- u ⇒ u0*u

というように置き換えている。これにより、model_normalize.gms では、y(i)、v_a(i)、u はどれも初期均衡において 1 をとる変数となる。

以下は、model_original.gms での財市場の均衡条件と所得の定義式である。

```
*        財の市場均衡
e_p(i) .. y(i) =e= sum(j, a_x(i,j)*y(j)) + d(i);

*        所得の定義式
e_m .. m =e= sum(f, p_f(f)*v_bar(f))
             + sum((f,i), t_f(f,i)*p_f(f)*a_f(f,i)*v_a(i))
             + sum(i, t_c(i)*p(i)*d(i));
```

一方、以下は model_normalize.gms での財市場の均衡条件と所得の定義式である。

```
*        財の市場均衡
e_p(i) .. y0(i)*y(i) =e= sum(j, a_x(i,j)*y0(j)*y(j)) + d(i);

*        所得の定義式
e_m .. m =e= sum(f, p_f(f)*v_bar(f))
             + sum((f,i), t_f(f,i)*p_f(f)*a_f(f,i)*v_a0(i)*v_a(i))
             + sum(i, t_c(i)*p(i)*d(i));
```

元々の y(i)、v_a(i) が y0(i)*y(i)、v_a0(i)*v_a(i) に置き換えられていることが確認できる。

以下は model_original.gms において資本の賦存量が 20% 増加するシミュレーションをおこなったときの変数 y_i と v_i^a の値（プログラムにおける表記は y、v_a）を表示する部分である。

```
---- VAR y  生産量

            LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL

agr           .           127.3270        +INF            .
man           .           263.0791        +INF            .
ser           .           136.0850        +INF            .

---- VAR v_a  合成生産要素

            LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL
```

```
agr           .          73.1429        +INF            .
man           .         173.9130        +INF            .
ser           .          73.1429        +INF            .
```

この結果を見れば個々の変数の値はわかるが、元々の値を確認しないとどれだけ変数が変化しているのか全くわからない。

一方、以下は model_alternative.gms において同じシミュレーションをしたときの y_i と v_i^a の値である。

```
---- VAR y  生産量

           LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL

agr          .            0.9095         +INF             .
man          .            0.8769         +INF             .
ser          .            0.9072         +INF             .

---- VAR v_a  合成生産要素

           LOWER          LEVEL          UPPER         MARGINAL

agr          .            0.9143         +INF             .
man          .            0.8696         +INF             .
ser          .            0.9143         +INF             .
```

元々の値が 1 に規準化されているので、agr の生産量は約 10%の減少、man は 13%の減少というように、この結果から簡単に変化率の情報を得ることができる。

5 終わりに

この章では、1) 消費活動を生産活動と同じように表現するアプローチ、2) 内生変数の初期均衡での値を 1 に規準化するアプローチの 2 つを紹介した。どちらも CGE 分析において必須のものではないが、利用することで分析しやすくなるなどのメリットがあるものである。後の第 15 章ではこのアプローチを使って実際に CGE モデルを解くケースを紹介している。

参考文献

Balistreri, Edward J. and Thomas F. Rutherford (2012) "Subglobal Carbon Policy and the Competitive Selection of Heterogeneous Firms," *Energy Economics*, Vol. 34, pp. S190–S197, December, DOI: 10.1016/j.eneco.2012.08.002.

Böhringer, Christoph and Thomas F. Rutherford (2010) "The Costs of Compliance: A CGE Assessment of Canada's Policy Options under the Kyoto Protocol," *World Economy*, Vol. 33, No. 2, pp. 177–211, February, DOI: 10/b7367r.

Böhringer, Christoph, Brita Bye, Taran Fæhn, and Knut Einar Rosendahl (2012) "Alternative Designs for Tariffs on Embodied Carbon: A Global Cost-Effectiveness Analysis," *Energy Economics*, Vol. 34, pp. S143–S153, December, DOI: 10.1016/j.eneco.2012.08.020.

Chen, Y-H Henry, Sergey Paltsev, John Reilly, Jennifer Morris, and Mustafa H. Babiker (2015) "The MIT EPPA6 Model: Economic Growth, Energy Use, Emissions, and Food Consumptions," No. 278, p. 40.

Lanz, Bruno and Thomas F Rutherford (2016) "GTAPinGAMS: Multiregional and Small Open Economy Models," *Journal of Global Economic Analysis*, Vol. 1, No. 2, pp. 1–77, December, DOI: 10.21642/JGEA.010201AF.

Takeda, Shiro (2010) "A Computable General Equilibrium Analysis of the Welfare Effects of Trade Liberalization under Different Market Structures," *International Review of Applied Economics*, Vol. 24, No. 1, pp. 75–93, DOI: 10.1080/02692170903424307.

Takeda, Shiro, Tetsuya Horie, and Toshi H. Arimura (2012) "A Computable General Equilibrium Analysis of Border Adjustments under the Cap-And-Trade System: A Case Study of the Japanese Economy," *Climate Change Economics*, Vol. 03, No. 01, p. 1250003, February, DOI: 10.1142/S2010007812500030.

Takeda, Shiro, Toshi H. Arimura, Hanae Tamechika, Carolyn Fischer, and Alan K. Fox (2014) "Output-Based Allocation of Emissions Permits for Mitigating the Leakage and Competitiveness Issues for the Japanese Economy," *Environmental Economics and Policy Studies*, Vol. 16, No. 1, pp. 89–110, January, DOI: 10.1007/s10018-013-0072-8, Resouces for the Future Discussion Paper Series, RFF DP 11-40.

武田史郎・川崎泰史・落合勝昭・伴金美 (2010) 「日本経済研究センター CGE モデルによる CO2 削減中期目標の分析」,『環境経済・政策研究』, 第 3 巻, 第 1 号, 31–42 頁.

6 履歴

- 2022-01-20: 説明の追加・修正。
- 2018-07-20: 説明の追加・修正。
- 2017-03-15: 説明の修正。