応用一般均衡分析入門
第 A-1 章：関数形のレファレンス *

武田 史郎 †

Date: 2024/01/28,
Version 4.0

目次

* このファイルの配布場所: https://shirotakeda.github.io/ja/research-ja/cge-howto.html
† 所属：京都産業大学経済学部．Website: https://shirotakeda.github.io/ja/

1　導入

- 第 2 節から第 9 節は様々な関数のレファレンスであり、第 10 節はその導出方法の説明である。
- 他の文書との関係
  - 第 2 節、第 3 節の内容は第 1 章の内容に関連している。
  - 第 4 節、5 節のパラメータのカリブレーション、calibrated share form の関数については、第 8 章に関連している。
- 意味、解釈については、ミクロ経済学のテキストを参照すること。
  - 例えば、Varian (1992)、奥野・鈴村 (1985)、Mas-Colell et al. (1995) 等のテキストである。
- 経済学の数学については以下のテキストを参考にして欲しい。
  - Simon and Blume (1994)。中身はこれが非常によいが、英語である。
  - 尾山・安田 (2013)。こちらは日本語だが、Kuhn-Tucker 条件は扱っていない。

2　関数の定義

2.1　企業

生産関数（production function）

$$y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \cdots, x_n)$$

単位費用関数（unit cost function）

$$c(\mathbf{p}) \equiv \min_{x_1,\cdots,x_n} \left[\sum_i p_i x_i | f(\mathbf{x}) = 1 \right]$$

単位投入需要関数（unit input demand function）

$$z_i(\mathbf{p}) = \frac{\partial c(\mathbf{p})}{\partial p_i}$$

2.2　消費者

効用関数（utility function）

$$u = g(\mathbf{d}) = g(d_1, \cdots, d_n)$$

間接効用関数（indirect utility function）

$$v(\mathbf{p}, m) \equiv \max_{d_1,\cdots,d_n} \left[u(\mathbf{d}) | \sum_i p_i d_i = m \right]$$

支出関数（expenditure function）

$$e(\mathbf{p},u) \equiv \min_{h_1,\cdots,h_n} \left[\sum_i p_i h_i | g(\mathbf{h}) = u \right]$$

非補償需要関数（uncompensated demand function)、マーシャルの需要関数（Marshallian demand function）

$$d_i(\mathbf{p},m) = -\frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial p_i} \bigg/ \frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial m}$$

補償需要関数（compensated demand function)、ヒックスの需要関数（Hicksian demand function）

$$h_i(\mathbf{p},u) = \frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i}$$

3　通常の表現形式

注：この節の内容の導出方法は第 10.1 節で解説している。

第 3 節では通常の形式（normal form）で様々な関数を表現する。後に、第 5 節では calibrated share form による形式を用いて表現する。

3.1　CES 関数のケース

3.1.1　企業

生産関数

$$y = f(\mathbf{x}) = \left[\sum_i \beta_i (x_i)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{1}$$

単位費用関数

$$c(\mathbf{p}) = \left[\sum_i \beta_i^{\sigma} p_i^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{2}$$

単位投入需要関数

$$z_i(\mathbf{p}) = \left[\frac{\beta_i}{p_i} \right]^{\sigma} \left[\sum_j \beta_j^{\sigma} p_j^{1-\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \left[\frac{\beta_i c}{p_i} \right]^{\sigma} \tag{3}$$

3.1.2　消費者

効用関数

$$u = g(\mathbf{d}) = \left[\sum_i \beta_i^c (d_i)^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}} \right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}} \tag{4}$$

間接効用関数

$$v(\mathbf{p}, m) = g[\mathbf{d}(\mathbf{p}, m)] = \frac{m}{\left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} p_j^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}}} \tag{5}$$

支出関数

$$e(\mathbf{p}, u) = u \left[\sum_i (\beta_i^c)^{\sigma^c} p_i^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}} \tag{6}$$

非補償需要関数

$$d_i(\mathbf{p}, m) = \left[\frac{\beta_i^c}{p_i}\right]^{\sigma^c} \frac{m}{\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} p_j^{1-\sigma^c}} = v \left[\frac{\beta_i^c m}{p_i v}\right]^{\sigma^c} \tag{7}$$

補償需要関数

$$h_i(\mathbf{p}, u) = u \left[\frac{\beta_i^c}{p_i}\right]^{\sigma^c} \left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} p_j^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{\sigma^c}{1-\sigma^c}} = u \left[\frac{\beta_i^c e}{p_i u}\right]^{\sigma^c} \tag{8}$$

非補償需要の所得弾力性

$$\eta_i \equiv \frac{\partial \ln d_i(\mathbf{p}, m)}{\partial \ln m} = 1$$

補償需要の価格弾力性

$$\epsilon_{ij}^c \equiv \frac{\partial \ln h_i(\mathbf{p}, u)}{\partial \ln p_j} = -\sigma^c \delta_{ij} + \sigma^c \frac{(\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}}{\sum_k (\beta_k^c)^{\sigma^c} (p_k)^{1-\sigma^c}} = -\sigma^c \delta_{ij} + \sigma^c \theta_j \tag{9}$$

ただし、θ_i と δ_{ij} は以下のように定義される。

$$\theta_i \equiv \frac{p_i d_i}{m} \qquad \delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } j = i \\ 0 & \text{if } j \neq i \end{cases}$$

非補償需要の価格弾力性

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^u &\equiv \frac{\partial \ln d_i(\mathbf{p}, m)}{\partial \ln p_j} = \epsilon_{ij}^c - \eta_i \theta_j \\ &= -\sigma^c \delta_{ij} + (1 - \sigma^c) \frac{(\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}}{\sum_k (\beta_k^c)^{\sigma^c} (p_k)^{1-\sigma^c}} = -\sigma^c \delta_{ij} - (1 - \sigma^c) \theta_j \end{aligned} \tag{10}$$

3.2 Cobb-Douglas 関数のケース

3.2.1 企業

生産関数

$$y = f(\mathbf{x}) = \phi \prod_i (x_i)^{\alpha_i} \qquad \sum_i \alpha_i = 1 \tag{11}$$

単位費用関数

$$c(\mathbf{p}) = \frac{1}{\phi} \prod_i \left[\frac{p_i}{\alpha_i} \right]^{\alpha_i} \tag{12}$$

単位投入需要関数

$$z_i(\mathbf{p}) = \left[\frac{\alpha_i}{p_i} \right] \frac{1}{\phi} \prod_j \left[\frac{p_j}{\alpha_j} \right]^{\alpha_j} = \frac{\alpha_i}{p_i} c(\mathbf{p}) \tag{13}$$

3.2.2　消費者

効用関数

$$u = g(\mathbf{d}) = \phi^c \prod_i (d_i)^{\alpha_i^c} \qquad\qquad \sum_i \alpha_i^c = 1 \tag{14}$$

間接効用関数

$$v(\mathbf{p}, m) = g[\mathbf{d}(\mathbf{p}, m)] = m\phi^c \prod_i \left[\frac{\alpha_i^c}{p_i} \right]^{\alpha_i^c} \tag{15}$$

支出関数

$$e(\mathbf{p}, u) = u \frac{1}{\phi^c} \prod_i \left[\frac{p_i}{\alpha_i^c} \right]^{\alpha_i^c} \tag{16}$$

非補償需要関数

$$d_i(\mathbf{p}, m) = \frac{\alpha_i^c m}{p_i} \tag{17}$$

補償需要関数

$$h_i(\mathbf{p}, u) = u \left[\frac{\alpha_i^c}{p_i} \right] \frac{1}{\phi^c} \prod_j \left[\frac{p_j}{\alpha_j^c} \right]^{\alpha_j^c} = \frac{\alpha_i^c}{p_i} e(\mathbf{p}, u) \tag{18}$$

非補償需要の所得弾力性

$$\eta_i \equiv \frac{\partial \ln d_i(\mathbf{p}, m)}{\partial \ln m} = 1$$

補償需要の価格弾力性

$$\epsilon_{ij}^c \equiv \frac{\partial \ln h_i(\mathbf{p}, u)}{\partial \ln p_j} = -\delta_{ij} + \alpha_j^c$$

非補償需要の価格弾力性

$$\epsilon_{ij}^u \equiv \frac{\partial \ln d_i(\mathbf{p}, m)}{\partial \ln p_j} = -\delta_{ij}$$

3.3 Leontief 関数のケース

3.3.1 企業

生産関数

$$y = f(x) = \min\left\{\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2}, \cdots, \frac{x_n}{a_n}\right\} \tag{19}$$

単位費用関数

$$c(p) = \sum_i p_i a_i \tag{20}$$

単位投入需要関数

$$z_i(p) = a_i \tag{21}$$

3.3.2 消費者

効用関数

$$u = g(d) = \min\left\{\frac{d_1}{b_1}, \frac{d_2}{b_2}, \cdots, \frac{d_n}{b_n}\right\} \tag{22}$$

間接効用関数

$$v(p, m) = g(\mathbf{d}(p, m)) = \frac{m}{\sum_i p_i b_i} \tag{23}$$

支出関数

$$e(p, u) = u \sum_i p_i b_i \tag{24}$$

非補償需要関数

$$d_i(p, m) = \frac{b_i m}{\sum_j p_j b_j} \tag{25}$$

補償需要関数

$$h_i(p, u) = u \cdot b_i \tag{26}$$

非補償需要の所得弾力性

$$\eta_i = \frac{\partial \ln d_i(p, m)}{\partial \ln m} = 1$$

補償需要の価格弾力性

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{\partial \ln h_i(p, u)}{\partial \ln p_j} = 0$$

非補償需要の価格弾力性

$$\varepsilon_{ij}^u = \frac{\partial \ln d_i(p,m)}{\partial \ln p_j} = -\theta_j$$

4 パラメータのカリブレーション

注：この節の内容の導出方法は第 10.2 節で解説している。

ベンチマーク・データによるパラメータのカリブレーション。バー付きの変数はベンチマークの値を示す。

4.1 CES 関数のケース

$$\theta_i = \frac{\bar{p}_i \bar{x}_i}{\sum_j \bar{p}_j \bar{x}_j} = \frac{\bar{p}_i \bar{x}_i}{\bar{c}\bar{y}} = \frac{\bar{p}_i \bar{z}_i}{\sum_j \bar{p}_j \bar{z}_j} = \frac{\bar{p}_i \bar{z}_i}{\bar{c}} \qquad \theta_i^c = \frac{\bar{p}_i \bar{d}_i}{\sum_j \bar{p}_j \bar{d}_j} = \frac{\bar{p}_i \bar{d}_i}{\bar{m}} = \frac{\bar{p}_i \bar{d}_i}{\bar{e}} \tag{27}$$

$$\beta_i = \frac{(\bar{z}_i)^{\frac{1}{\sigma}} \bar{p}_i}{\bar{c}_i} = \theta_i (\bar{z}_i)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \qquad \beta_i^c = \frac{(\bar{d}_i/\bar{u})^{\frac{1}{\sigma^c}} \bar{p}_i}{\bar{e}/\bar{u}} = \theta_i^c \left(\bar{d}_i/\bar{u}\right)^{\frac{1-\sigma^c}{\sigma^c}} \tag{28}$$

4.2 Cobb-Douglas 関数のケース

$$\alpha_i = \frac{\bar{p}_i \bar{x}_i}{\sum_j \bar{p}_j \bar{x}_j} = \frac{\bar{p}_i \bar{x}_i}{\bar{c}\bar{y}} = \frac{\bar{p}_i \bar{z}_i}{\sum_j \bar{p}_j \bar{z}_j} = \frac{\bar{p}_i \bar{z}_i}{\bar{c}} \qquad \alpha_i^c = \frac{\bar{p}_i \bar{d}_i}{\sum_j \bar{p}_j \bar{d}_j} = \frac{\bar{p}_i \bar{d}_i}{\bar{m}} = \frac{\bar{p}_i \bar{d}_i}{\bar{e}}$$

$$\phi = \frac{\bar{y}}{\prod_i (\bar{x}_i)^{\alpha_i}} = \frac{1}{\prod_i (\bar{z}_i)^{\alpha_i}} = \frac{1}{\bar{c}} \prod_i \left[\frac{\bar{p}_i}{\alpha_i}\right]^{\alpha_i} \qquad \phi^c = \frac{\bar{u}}{\prod_i (\bar{d}_i)^{\alpha_i^c}} = \frac{\bar{u}}{\bar{e}} \prod_i \left[\frac{\bar{p}_i}{\alpha_i^c}\right]^{\alpha_i^c}$$

4.3 Leontief 関数のケース

$$\theta_i = \frac{\bar{p}_i \bar{x}_i}{\sum_j \bar{p}_j \bar{x}_j} \qquad a_i = \frac{\bar{x}_i}{\bar{y}}$$

$$\theta_i^c = \frac{\bar{p}_i \bar{d}_i}{\sum_j \bar{p}_j \bar{d}_j} \qquad b_i = \frac{\bar{d}_i}{\bar{u}}$$

5 Calibrated Share Form

注：この節の内容の導出方法は第 10.3 節で解説している。

5.1 CES 関数のケース

5.1.1 企業

生産関数

$$y = f(\mathbf{x}) = \bar{y}\left[\sum_i \theta_i \left(\frac{x_i}{\bar{x}_i}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{29}$$

単位費用関数

$$c(\mathbf{p}) = \bar{c}\left[\sum_i \theta_i \left(\frac{p_i}{\bar{p}_i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{30}$$

単位投入需要関数

$$z_i(\mathbf{p}) = \bar{z}_i \left[\frac{c/\bar{c}}{p_i/\bar{p}_i}\right]^{\sigma} \tag{31}$$

5.1.2 消費者

効用関数

$$u = g(\mathbf{d}) = \left[\sum_i \theta_i^c \left(\frac{d_i}{\bar{d}_i}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{32}$$

間接効用関数

$$v(\mathbf{p}, m) = g[\mathbf{d}(\mathbf{p}, m)] = m\frac{\bar{u}}{\bar{m}}\left[\sum_i \theta_i^c \left(\frac{p_i}{\bar{p}_i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{-1}{1-\sigma}} \tag{33}$$

支出関数

$$e(\mathbf{p}, u) = u\frac{\bar{e}}{\bar{u}}\left[\sum_i \theta_i^c \left(\frac{p_i}{\bar{p}_i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{34}$$

非補償需要関数

$$d_i(\mathbf{p}, m) = \bar{d}_i \frac{m}{\bar{m}}\left[\frac{\bar{p}_i}{p_i}\right]^{\sigma}\left[\sum_j \theta_j^c \left(\frac{p_j}{\bar{p}_j}\right)^{1-\sigma}\right]^{-1} \tag{35}$$

補償需要関数

$$h_i(\mathbf{p}, u) = \bar{h}_i \left[\frac{u}{\bar{u}}\right]^{1-\sigma}\left[\frac{e/\bar{e}}{p_i/\bar{p}_i}\right]^{\sigma} = \bar{h}_i \frac{u}{\bar{u}}\left[\frac{(e/u)/(\bar{e}/\bar{u})}{p_i/\bar{p}_i}\right]^{\sigma} \tag{36}$$

5.2 Cobb-Douglas 関数のケース

5.2.1 企業

生産関数

$$y = f(\mathbf{x}) = \bar{y} \prod_i \left[\frac{x_i}{\bar{x}_i} \right]^{\alpha_i} \qquad \sum_i \alpha_i = 1$$

単位費用関数

$$c(\mathbf{p}) = \bar{c} \prod_i \left[\frac{p_i}{\bar{p}_i} \right]^{\alpha_i}$$

単位投入需要関数

$$z_i(\mathbf{p}) = \bar{z}_i \left[\frac{c/\bar{c}}{p_i/\bar{p}_i} \right]$$

5.2.2 消費者

効用関数

$$u = g(\mathbf{d}) = \bar{u} \prod_i \left[\frac{d_i}{\bar{d}_i} \right]^{\alpha_i^c} \qquad \sum_i \alpha_i^c = 1$$

間接効用関数

$$v(\mathbf{p}, m) = g[\mathbf{d}(\mathbf{p}, m)] = m \frac{\bar{u}}{\bar{m}} \prod_i \left[\frac{\bar{p}_i}{p_i} \right]^{\alpha_i}$$

支出関数

$$e(\mathbf{p}, u) = u \frac{\bar{e}}{\bar{u}} \prod_i \left[\frac{p_i}{\bar{p}_i} \right]^{\alpha_i^c}$$

非補償需要関数

$$d_i(\mathbf{p}, m) = \frac{\alpha_i^c m}{p_i} = \frac{\bar{p}_i \bar{d}_i}{\bar{m}} \frac{m}{p_i}$$

補償需要関数

$$h_i(\mathbf{p}, u) = \bar{h}_i \left[\frac{e/\bar{e}}{p_i/\bar{p}_i} \right]$$

5.3 Leontief 関数のケース

5.3.1 企業

生産関数

$$y = \bar{y} \min \left\{ \frac{x_1}{\bar{x}_1}, \frac{x_2}{\bar{x}_2}, \cdots, \frac{x_n}{\bar{x}_n} \right\}$$

単位費用関数

$$c(\mathbf{p}) = \bar{c} \sum_i \theta_i \frac{p_i}{\bar{p}_i}$$

単位投入需要関数

$$z_i(\mathbf{p}) = \bar{z}_i$$

5.3.2 消費者

効用関数

$$u = \bar{u} \min \left\{ \frac{d_1}{\bar{d}_1}, \frac{d_2}{\bar{d}_2}, \cdots, \frac{d_n}{\bar{d}_n} \right\}$$

間接効用関数

$$v(\mathbf{p}, m) = g[\mathbf{d}(\mathbf{p}, m)] = m \frac{\bar{u}}{\bar{m}} \left[\sum_i \theta_i^c \left(\frac{p_i}{\bar{p}_i} \right) \right]^{-1}$$

支出関数

$$e(\mathbf{p}, u) = u \frac{\bar{e}}{\bar{u}} \left[\sum_i \theta_i^c \left(\frac{p_i}{\bar{p}_i} \right) \right]$$

非補償需要関数

$$d_i(\mathbf{p}, m) = \bar{d}_i \frac{m}{\bar{m}} \left[\sum_j \theta_i^c \left(\frac{p_j}{\bar{p}_j} \right) \right]^{-1}$$

補償需要関数

$$h_i(\mathbf{p}, u) = \bar{h}_i \frac{u}{\bar{u}}$$

6 CET 関数による表現

注：この節の内容の導出方法は第 10.4 節で解説している。

6.1 CET 関数とは？

生産関数や効用関数は投入や消費からどのように生産量、効用が生み出されるかを表している。これは、様々なものが、ある一つのものにどのように合成されるのかを表していると言える。逆にある一つのものが様々なものに分解されたり、配分されるようなケースもある。例えば、以下のようなケースである。

- 結合生産：一つの生産活動から複数の生産物が生み出されるようなケース。
- 生産物の国内向け供給と輸出向け供給の配分：生産されたものが国内市場と輸出市場に配分されるケース
- 労動（や資本）の部門間での配分：全体としての労動が様々な部門に対して配分されるケース

このような状況を表すのに、Constant Elasticity of Transformation 関数（変形の弾力性一定の関数、CET 関数）が利用されることが多い。例えば、ある生産活動から複数の生産物が生み出されるようなケースを考える。y を全体としての生産活動の水準、x_i を財 i の生産量としたとき、全体の生産活動 y が CET 関数に従って個々の生産物 x_i に配分されるとは次のような関係である。

$$y = g(x_1, \cdots, x_n) = \left[\sum_i \gamma_i (x_i)^{\frac{\eta+1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta+1}} \tag{37}$$

ただし、γ_i と η は外生的なパラメータであり、特に η を**「変形の弾力性」**と呼ぶ。

(37) 式を見ればすぐわかるように、CET 関数は CES 関数と非常によく似ており、CES 関数における代替の弾力性 σ を $\eta = -\sigma$ として置き換えたものにすぎない。η は $[0, +\infty)$ をとるパラメータであり、$\eta = 0$ のときは生産物の間に全く変形の可能性がなく、各生産物が固定的な比率で生産されることになる。つまり、

一方、$\eta \Rightarrow \infty$ のときには変形が自由におこなわれるので、結局

$$y = \sum_i x_i$$

となる。つまり、生産されたものがどの財にも変えれるので、各財を足し合わせた量が生産量ということになる。

CET 関数は CGE 分析では様々な部分で非常によく利用されるものであるので、CET 関数に関係する関数を以下にまとめておく。ただし、上で述べたように CET 関数の σ を $\sigma = -\eta$ として置き換えた形に等しいので、これまでの CES 関数に関することから導けるものが多い。

単位収入関数（unit revenue function）

$$r(\mathbf{p}) \equiv \max_{z_1, \cdots, z_n} \left[\sum_i p_i z_i | g(\mathbf{z}) = 1 \right]$$

CET 関数を利用する場合には、各財の配分は収入が最大になるように決定されると仮定される。よって、以上のような単位収入関数が定義できる。

単位供給関数（unit supply function）

$$z_i(\mathbf{p}) = \frac{\partial r(\mathbf{p})}{\partial p_i}$$

単位収入関数を価格で偏微分したものが「単位供給関数」 となる。これは収入を最大化するような供給量を表している。

6.2 特定化したケース

CET 関数を (37) 式のように特定化したケース

単位収入関数（unit revenue function）

$$r(\mathbf{p}) = \left[\sum_i (\gamma_i)^{-\eta} (p_i)^{1+\eta} \right]^{\frac{1}{1+\eta}}$$

単位供給関数（unit supply function）

$$z_i(\mathbf{p}) = \left[\frac{p_i}{\gamma_i} \right]^{\eta} \left[\sum_i (\gamma_i)^{-\eta} (p_i)^{1+\eta} \right]^{-\frac{\eta}{1+\eta}} = \left[\frac{p_i}{\gamma_i r} \right]^{\eta}$$

6.3 Calibration

$$\theta_i = \frac{\bar{p}_i \bar{z}_i}{\sum_j \bar{p}_j \bar{z}_j} = \frac{\bar{p}_i \bar{z}_i}{\bar{r}} \qquad\qquad \gamma_i = \frac{(\bar{z}_i)^{\frac{1}{\sigma}} \bar{p}_i}{\bar{r}_i} = \theta_i \left(\bar{z}_i \right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}$$

6.4 Calibrated Share Form

CET 関数

$$y = g(\mathbf{x}) = \left[\sum_i \theta_i \left(\frac{x_i}{\bar{x}_i} \right)^{\frac{\eta+1}{\eta}} \right]^{\frac{\eta}{\eta+1}}$$

単位収入関数

$$r(\mathbf{p}) = \left[\sum_i \theta_i \left(\frac{p_i}{\bar{p}_i} \right)^{1+\eta} \right]^{\frac{1}{1+\eta}}$$

単位供給関数

$$z_i(\mathbf{p}) = \bar{z}_i \left[\frac{p_i/\bar{p}_i}{r/\bar{r}} \right]^{\eta}$$

7 余暇を含んだ効用関数

注：この節の内容の導出方法は第 10.5 節で解説している。

効用が消費と余暇に依存するケース。

7.1 効用関数

効用関数

$$u = u(c, z) = \left[(\beta^c)(c)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + (\beta^z)(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{38}$$

ただし、c は消費量、z は余暇の量である。

予算制約式

$$pc = wl + n \tag{39}$$

ただし、p は消費の価格、w は賃金率、l は労動供給量、n は労動所得以外の所得である。消費額（支出額）は総所得（＝労働所得＋その他の所得）に等しいということ。

時間の制約式

$$z + l = \bar{l} \tag{40}$$

ただし、$\bar{l}$ は余暇と労動に利用できる総時間である。
(38) 式〜(40) 式より、家計の直面する行動は次のように表せる。

$$\max_{c,z} \ \left[u = u(c, z) \middle| pc = w(\bar{l} - z) + n \right] \tag{41}$$

これは通常の効用最大化問題と若干形式が異なっている。しかし、$m \equiv w\bar{l} + n$ と定義すると予算制約式を次のように書き換えることができる。

$$pc + wz = m \tag{42}$$

これにより、上の効用最大化問題は次のように表現できる。

$$\max_{c,z} \ \left[u = u(c, z) \middle| pc + wz = m \right]$$

これはこれまでの効用最大化問題と全く同じ形式であるので、これまでの結果をそのまま利用できる。ただし、これまでと違い、所得に当る m が外生的ではなく、賃金率 w に応じて変化するという点に注意して欲しい。また、m は形式上、所得にあたる変数であるが、実際の所得は m ではなく、$wl+n$ であることに注意。m は予算制約式の形式をわかりやすく変換するための仮想的な変数である。

7.2 需要関数等

(42) 式を制約とし、(38) 式を最大化する問題を解くと、余暇に対する需要を求めることができる。基本的には第 3 節の結果に当てはめればよい。

間接効用関数

$$\hat{v}(p,w,m) = \frac{m}{[(\beta^c)^\sigma (p)^{1-\sigma} + (\beta^z)^\sigma (w)^{1-\sigma}]^{\frac{1}{1-\sigma}}}$$
$$v(\mathbf{p},w) = \hat{v}(p,w,w\bar{l}+n) = \frac{w\bar{l}+n}{[(\beta^c)^\sigma (p)^{1-\sigma} + (\beta^z)^\sigma (w)^{1-\sigma}]^{\frac{1}{1-\sigma}}}$$

支出関数

$$e(\mathbf{p},w,u) = u\left[(\beta^c)^\sigma (p)^{1-\sigma} + (\beta^z)^\sigma (w)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \tag{43}$$

余暇に対する非補償需要量

$$\begin{aligned}
\hat{z}(p,w,m) &= \left[\frac{\beta^z}{w}\right]^\sigma \frac{m}{(\beta^c)^\sigma (p)^{1-\sigma} + (\beta^z)(w)^{1-\sigma}} = v\left[\frac{\beta^z m}{wv}\right]^\sigma \\
z(p,w) &= \hat{z}(p,w,w\bar{l}+n) \\
&= \left[\frac{\beta^z}{w}\right]^\sigma \frac{w\bar{l}+n}{(\beta^c)^\sigma (p)^{1-\sigma} + (\beta^z)(w)^{1-\sigma}} = v\left[\frac{\beta^z (w\bar{l}+n)}{wv}\right]^\sigma
\end{aligned}$$

余暇に対する補償需要量

$$z^c(p,w,u) = u\left[\frac{\beta^z}{w}\right]^\sigma \left[(\beta^c)^\sigma (p)^{1-\sigma} + (\beta^z)^\sigma (w)^{1-\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = u\left[\frac{\beta^z e}{wu}\right]^\sigma \tag{44}$$

非補償労動供給量（l）、補償労働供給量（l^c）

$$\begin{aligned}
l(p,w) &= \bar{l} - z(p,w) \\
l^c(p,w,u) &= \bar{l} - z^c(p,w,u)
\end{aligned}$$

非補償余暇需要の別表現

$$\hat{z}(p,w,m) = \hat{z}\left(1,\frac{w}{p},\frac{m}{p}\right) = \left[\frac{\beta^z}{w/p}\right]^\sigma \frac{\frac{w}{p}\bar{l} + \frac{n}{p}}{(\beta^c)^\sigma + (\beta^z)\left(\frac{w}{p}\right)^{1-\sigma}}$$

余暇需要（と労動供給）は実質賃金（w/p）と実質非労働所得（n/p）の関数として表現できることがわかる。

7.3 弾力性

補償余暇需要の賃金弾力性

$$\epsilon_z^c \equiv \frac{\partial \ln z^c(p,w,u)}{\partial \ln w} = \sigma \left[\frac{wz}{e} - 1\right] = \sigma \left[\frac{wz}{m} - 1\right] = \sigma(\theta_z - 1) \tag{45}$$

ただし、

$$\theta_z \equiv \frac{wz}{m}$$

非補償余暇需要の賃金弾力性

非補償余暇需要の賃金弾力性は次のように求められる。

$$\epsilon_z \equiv \frac{\partial \ln z(p,w)}{\partial \ln w} = \frac{\partial \ln \hat{z}(p,w,m)}{\partial \ln w} + \frac{\partial \ln \hat{z}(p,w,m)}{\partial \ln m}\frac{\partial \ln m}{\partial \ln w}$$

非補償余暇需要の賃金弾力性については、右辺第一項目で表される**「通常の価格変化の効果（代替効果と所得効果）」**に加えて[1)]、第二項目で表される**「賃金の変化で実際に所得が変化する効果」**も考える必要があることに注意。実際に計算すると次のようになる。

$$\epsilon_z = \sigma(\theta_z - 1) - \theta_z + \theta_{\bar{l}} = \sigma(\theta_z - 1) + \theta_l = \epsilon_z^c + \theta_l \tag{46}$$

ただし、

$$\theta_{\bar{l}} \equiv \frac{w\bar{l}}{m} \qquad\qquad \theta_l \equiv \frac{wl}{m}$$

$\sigma(\theta_z - 1)$ が代替効果（ϵ_z^c に等しい）、$-\theta_z$ が所得効果、$\theta_{\bar{l}}$ が所得が変化することを通じる効果である。

補償労動供給の賃金弾力性

$$\epsilon_L^c \equiv \frac{\partial \ln l^c(p,w,u)}{\partial \ln w} = \frac{\partial \ln l^c}{\partial \ln z^c}\frac{\partial \ln z^c}{\partial \ln w} = -\frac{z}{\bar{l} - z}\sigma(\theta_z - 1) = -\frac{z}{l}\sigma(\theta_z - 1)$$

非補償労動供給の賃金弾力性

$$\begin{aligned}\epsilon_L &\equiv \frac{\partial \ln l(p,w)}{\partial \ln w} = \frac{\partial \ln l}{\partial \ln z}\frac{\partial \ln z}{\partial \ln w} \\ &= -\frac{z}{\bar{l} - z}\left[\sigma(\theta_z - 1) + \theta_l\right] = -\frac{z}{l}\left[\sigma(\theta_z - 1) + \theta_l\right] \\ &= \epsilon_L^c - \theta_z\end{aligned}$$

1) 「代替効果」と「所得効果」については、ミクロ経済学のテキストを参照して欲しい。

余暇と消費の間の代替の弾力性と賃金弾力性の関係

$$\sigma = \frac{1}{1-\theta_z}\left[\epsilon_L \frac{\theta_l}{\theta_z} + \theta_l\right]$$

8　特殊要素（specific factor）がある生産

注：この節の内容の導出方法は第 10.6 節で解説している。

生産において特殊要素を想定する場合がある。通常、一般均衡モデルでは労働や資本などが生産要素として利用され、さらにそれらの生産要素は部門間で移動することが可能であると仮定されることが多いが、特殊要素（specific factor）を仮定することもある。**「特殊要素（specific factor）」**とは、ある部門のみで利用される生産要素のことである。例えば、農業部門のみで利用される生産要素として、「土地」が仮定されるというようなケースである。

特殊要素が仮定される場合、供給の価格弾力性の値を外生的に設定することで、特殊要素とその他の投入物の間の代替の弾力性をカリブレートするということがよくおこなわれる。以下で、その方法を説明する。

まず、生産関数に次のような関数を仮定する。

$$y = f(x, z)$$

ここで、y は生産量、x は非特殊要素の投入物の投入量、z は特殊要素の投入量である。さらに、f は CES 関数と仮定する。よって、生産関数は次のような形となる。

$$y = f(x, z) = \left[\beta_x (x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z (z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{47}$$

ただし、σ は x と z の間の代替の弾力性である。

ここで、y の供給の価格弾力性を ε^s とし、θ_z を次のように定義する。

$$\theta_z \equiv \frac{p_z z}{p_y y}$$

つまり、θ_z は費用に占める特殊要素への支払い額のシェアを表わすパラメータである。

このとき、次の関係が成立する。

$$\sigma = \varepsilon^s \frac{\theta_z}{1-\theta_z} \tag{48}$$

ベンチマークにおける供給の価格弾力性（ε^s）、及び θ_z の値を設定することで、この関係から σ の値をカリブレートすることができる。

9　技術進歩があるときの生産関数

以下では λ が技術水準（効率性）を表すパラメータである。λ が上昇することで、同じ水準の投入（消費）に対して、より多い生産量（効用）が実現することになる。ただし、全ての λ は初期時点では 1 の値をとるものとする。

9.1　通常の形式

9.1.1　CES 関数のケース

生産関数

$$y = f(\mathbf{x}) = \left[\sum_i \beta_i \left(\lambda_i x_i \right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

単位費用関数

$$c(\mathbf{p}) = \left[\sum_i \beta_i^{\sigma} \left(\frac{p_i}{\lambda_i} \right)^{1-\sigma} \right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

単位投入需要関数

$$z_i(\mathbf{p}) = \frac{1}{\lambda_i} \left[\frac{\beta_i \lambda_i}{p_i} \right]^{\sigma} \left[\sum_j \beta_j^{\sigma} \left(\frac{p_j}{\lambda_j} \right)^{1-\sigma} \right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} = \frac{1}{\lambda_i} \left[\frac{\beta_i c \lambda_i}{p_i} \right]^{\sigma}$$

9.1.2　Cobb-Douglas 関数のケース

生産関数

$$y = \phi \prod_i (\lambda_i x_i)^{\alpha_i} \qquad \sum_i \alpha_i = 1$$

単位費用関数

$$c(\mathbf{p}) = \frac{1}{\phi} \prod_i \left[\frac{p_i}{\lambda_i \alpha_i} \right]^{\alpha_i}$$

単位投入需要関数

$$z_i(\mathbf{p}) = \left[\frac{\alpha_i}{p_i} \right] \frac{1}{\phi} \prod_j \left[\frac{p_j}{\lambda_j \alpha_j} \right]^{\alpha_j} = \frac{\alpha_i}{p_i} c(\mathbf{p})$$

9.2 Calibrated Share Form

9.2.1 CES 関数のケース

生産関数

$$y = f(\mathbf{x}) = \bar{y}\left[\sum_i \theta_i \left(\frac{\lambda_i x_i}{\bar{x}_i}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

単位費用関数

$$c(\mathbf{p}) = \bar{c}\left[\sum_i \theta_i \left(\frac{p_i}{\lambda_i \bar{p}_i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

単位投入需要関数

$$z_i(\mathbf{p}) = \frac{\bar{z}_i}{\lambda_i}\left[\frac{c/\bar{c}}{p_i/(\bar{p}_i\lambda_i)}\right]^{\sigma}$$

9.2.2 Cobb-Douglas 関数のケース

生産関数

$$y = f(\mathbf{x}) = \bar{y}\prod_i \left[\frac{\lambda_i x_i}{\bar{x}_i}\right]^{\alpha_i} \qquad \sum_i \alpha_i = 1$$

単位費用関数

$$c(\mathbf{p}) = \bar{c}\prod_i \left[\frac{p_i}{\lambda_i \bar{p}_i}\right]^{\alpha_i}$$

単位投入需要関数

$$z_i(\mathbf{p}) = \bar{z}_i\left[\frac{c/\bar{c}}{p_i/\bar{p}_i}\right]$$

参考文献

Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green (1995). *Microeconomic Theory*. New York: Oxford University Press (cit. on p. 3).

Simon, C. P. and L. Blume (1994). *Mathematics for Economists*. New York: W. W. Norton Company (cit. on p. 3).

Varian, H. R. (1992). *Microeconomic Analysis*. 3rd. New York: W. W. Norton Company (cit. on p. 3).

奥野正寛・鈴村興太郎 (1985)『ミクロ経済学 I』, 岩波書店 (cit. on p. 3).

尾山大輔・安田洋祐 (2013)『[改訂版] 経済学で出る数学：高校数学からきちんと攻める』, 東京: 日本評論社 (cit. on p. 3).

10　導出

第 3 節から第 7 節の内容の導出方法についての説明。

10.1　第 3 節の導出

10.1.1　企業

まず、(2) 式の単位費用関数を (1) 式の生産関数から導出する手順について説明する。単位費用関数は次式で定義される。

$$c(\mathbf{p}) \equiv \min_{z_1,\cdots,z_n} \left[\sum_i p_i z_i | f(\mathbf{z}) = 1 \right]$$

この費用最小化問題のラグランジュアンは次式で与えられる。

$$\mathcal{L} = \sum_i p_i z_i - \lambda \left[f(\mathbf{z}) - 1 \right]$$

これより費用最小化の一階の条件は次式となる。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i} = p_i - \lambda \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} = 0 \qquad i = 1, \cdots, n \tag{49}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = - \left[f(\mathbf{z}) - 1 \right] = 0 \tag{50}$$

生産関数は (1) 式のように特定化されているので、上式中の $\partial f(\mathbf{z})/\partial z_i$ は次のような表現になる。

$$\frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} = \left[\sum_j \beta_j z_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_i z_i^{-\frac{1}{\sigma}}$$

これより、(49) 式と (50) 式の一階の条件は次のような表現になる。

$$p_i = \lambda \left[\sum_j \beta_j z_j^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_i z_i^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{51}$$

$$\left[\sum_i \beta_i z_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{1}{\sigma-1}} = 1 \tag{52}$$

これを解けば単位投入需要関数 $z_i(p)$（とラグランジュ未定乗数 λ）を求めることができる。以下、実際に求めてみる。

まず、(51) 式と (52) 式を組み合わせると次式を得る。

$$p_i = \lambda \beta_i z_i^{-\frac{1}{\sigma}} \tag{53}$$

これを z_i について解く。

$$z_i = \left[\frac{\lambda \beta_i}{p_i}\right]^{\sigma}$$

これを (52) 式に代入する。

$$\lambda = \left[\sum_i \beta_j^{\sigma} (p_j)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}}$$

これがラグランジュ未定乗数 λ の値である。こうして求めた λ を (53) 式に代入して、書き直すと

$$z_i(\mathbf{p}, m) = \left[\frac{\beta_i}{p_i}\right]^{\sigma} \left[\sum_j \beta_j^{\sigma} (p_j)^{1-\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}$$

となる。これが (3) 式の単位投入需要関数 $z_i(\mathbf{p})$ である。

さらに、この単位投入需要を $\sum_i p_i z_i$ という関係に代入することで、(2) 式の単位費用関数 $c(\mathbf{p})$ を導出できる。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{p}) &= \sum_i p_i z_i = \sum_i p_i \left[\frac{\beta_i}{p_i}\right]^{\sigma} \left[\sum_j \beta_j^{\sigma} (p_j)^{1-\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \\ &= \left[\sum_j \beta_j^{\sigma} (p_j)^{1-\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left[\sum_j \beta_j^{\sigma} (p_j)^{1-\sigma}\right] = \left[\sum_j \beta_j^{\sigma} (p_j)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned}$$

10.1.2 消費者

次に消費者側の関係式を導出する。消費者は予算制約の下で効用を最大化するように消費量を選択する。

$$\max_{d_1, \cdots, d_n} \left[u = g(\mathbf{d}) | \sum_i p_i d_i = m\right]$$

この効用最大化問題のラグランジュアンは次式で与えられる。

$$\mathcal{L} = g(\mathbf{d}) - \lambda \left[\sum_i p_i d_i - m\right]$$

これより効用最大化の一階の条件は次のように表現される。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_i} = \frac{\partial g(\mathbf{d})}{\partial d_i} - \lambda p_i = 0 \qquad i = 1, \cdots, n \tag{54}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\left[\sum_i p_i d_i - m\right] = 0 \tag{55}$$

効用関数 (4) 式の定義より

$$\frac{\partial g(\mathbf{d})}{\partial d_i} = \left[\sum_j \beta_j^c (d_j)^{\frac{\sigma^c - 1}{\sigma^c}}\right]^{\frac{1}{\sigma^c - 1}} \beta_i^c d_i^{-\frac{1}{\sigma^c}}$$

である。これを (54) 式に代入すると次式を得る。

$$\left[\sum_j \beta_j^c (d_j)^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}}\right]^{\frac{1}{\sigma^c-1}} \beta_i^c d_i^{-\frac{1}{\sigma^c}} = \lambda p_i \tag{56}$$

さらに、(56) 式を d_i について解く。

$$d_i = \left[\sum_j \beta_j^c (d_j)^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}}\right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}} \left[\frac{\beta_i^c}{\lambda p_i}\right]^{\sigma^c}$$

この d_i を (55) 式に代入し、書き換えると

$$\lambda^{\sigma^c} = \left[\sum_j \beta_j^c (d_j)^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}}\right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}} \left[\sum_i (\beta_i^c)^{\sigma^c} (p_i)^{1-\sigma^c}\right] m^{-1}$$

となる。この λ を (56) 式に代入し直す。

$$\left[\sum_j \beta_j^c (d_j)^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}}\right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}} (\beta_i^c)^{\sigma^c} m = \left[\sum_j \beta_j^c (d_j)^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}}\right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}} \left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right] (p_i)^{\sigma^c} d_i$$

これを d_i について解くことで、(7) 式の非補償需要関数を求めることができる。

$$d_i(\mathbf{p}, m) = \left[\frac{\beta_i^c}{p_i}\right]^{\sigma^c} \frac{m}{\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}} \tag{57}$$

(57) 式の非補償需要を (4) 式の効用関数に代入することで、(5) 式の間接効用関数を求めることができる。

$$\begin{aligned} v(\mathbf{p}, m) = g(\mathbf{d}(\mathbf{p}, m)) &= \left[\sum_i \beta_i^c \left[\left(\frac{\beta_i^c}{p_i}\right)^{\sigma^c} \frac{m}{\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}}\right]^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}}\right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}} \\ &= m \frac{\left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}}}{\left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right]} = \frac{m}{\left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}}} \end{aligned} \tag{58}$$

次、(8) 式の補償需要関数と (6) 式の支出関数を導出する。こちらは次の支出最小化問題から導出される。

$$\min_{h_1, \cdots, h_n} \left[\sum_i p_i h_i | g(\mathbf{h}) = u\right]$$

この支出最小化問題のラグランジュアンは次式となる。

$$\mathcal{L} = \sum_i p_i h_i - \lambda[g(\mathbf{h}) - u]$$

支出最小化の一階の条件は次の 2 式となる。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_i} = p_i - \lambda \frac{\partial g(\mathbf{h})}{\partial h_i} = 0 \qquad i = 1, \cdots, n \tag{59}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = g(\mathbf{h}) - u = 0 \tag{60}$$

効用関数の定義より、(59) 式、(60) 式は次のような表現になる。

$$p_i - \lambda \left[\sum_j \beta_j^c h_j^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}}\right]^{\frac{1}{\sigma^c-1}} \beta_i^c h_i^{-\frac{1}{\sigma^c}} = 0 \tag{61}$$

$$\left[\sum_j \beta_j^c h_j^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}}\right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}} = u \tag{62}$$

(61) 式、(62) 式を組み合わせると次式を得る。

$$u(\beta_i^c)^{\sigma^c} \lambda^{\sigma^c} = p_i^{\sigma^c} h_i$$

これを h_i について解く。

$$h_i = u \left[\frac{\beta_i^c \lambda}{p_i}\right]^{\sigma^c} \tag{63}$$

これを (62) 式へ代入して書き換えると、ラグランジュ未定乗数 λ を求めることができる。

$$\lambda = \left[\sum_i (\beta_i^c)^{\sigma^c} (p_i)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}}$$

この λ を (63) 式に代入して書き換える。

$$h_i(\mathbf{p}, u) = u \left[\frac{\beta_i^c}{p_i}\right]^{\sigma^c} \left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{\sigma^c}{1-\sigma^c}} \tag{64}$$

これが (8) 式の補償需要関数である。

さらに、この補償需要 (64) 式を $\sum_i p_i h_i$ に代入すれば、(6) 式の支出関数を導出できる。

$$\begin{aligned} e(\mathbf{p}, u) &= \sum_i p_i h_i = \sum_i p_i u \left[\frac{\beta_i^c}{p_i}\right]^{\sigma^c} \left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{\sigma^c}{1-\sigma^c}} \\ &= u \left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{\sigma^c}{1-\sigma^c}} \left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right] = u \left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}} \end{aligned} \tag{65}$$

この支出関数 (65) 式を使うと非補償需要関数を次のようにも表現できる。

$$h_i(\mathbf{p}, u) = u \left[\frac{\beta_i^c e(\mathbf{p}, u)}{p_i u}\right]^{\sigma^c}$$

10.1.3 別の導出方法

前節では、効用最大化問題から非補償需要関数、間接効用関数を導出し、支出最小化問題から補償需要関数、支出関数を導出した。しかし、非補償需要関数と補償需要関数、間接効用関数と支出関数の間には一定の関係が成立することから、どちらかを導出すれば、そこからもう一方を導出することができる。

まず、間接効用関数と支出関数の間には次の関係が成り立つ。

$$v(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = u \tag{66}$$

$$e(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = m \tag{67}$$

例えば、(66) 式と間接効用関数 (58) 式より

$$u = \frac{e(\mathbf{p}, u)}{\left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}}} \tag{68}$$

という関係が成り立つ。これを書き換えればそのまま支出関数となる。

$$e(\mathbf{p}, u) = u \left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}}$$

同様に、非補償需要関数と補償需要関数には次の関係が成り立つ。

$$d_i(\mathbf{p}, e(\mathbf{p}, u)) = h_i(\mathbf{p}, u) \tag{69}$$

$$h_i(\mathbf{p}, v(\mathbf{p}, m)) = d_i(\mathbf{p}, m) \tag{70}$$

やはりこの関係により、一方を求めればもう一方を簡単に導くことができる。例えば、(69) 式と (57) 式より、次の関係が成り立つ。

$$h_i(\mathbf{p}, u) = \left[\frac{\beta_i^c}{p_i}\right]^{\sigma^c} \frac{e(\mathbf{p}, u)}{\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}} = \left[\frac{\beta_i^c}{p_i}\right]^{\sigma^c} \frac{\left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}}}{\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}}$$

これを整理すれば、そのまま補償需要関数となる。

10.1.4 確認

Shephard の補題

まず、Shephard の補題が実際に成り立つか確認する。Shephard の補題とは

$$h_i(\mathbf{p}, u) = \frac{\partial e(\mathbf{p}, u)}{\partial p_i}$$

という関係、つまり支出関数の偏導関数が補償需要関数に等しいという関係であった[2)]。(65) 式を

2) ここでは消費の方の Shephard の補題を考えているが、生産における投入物のケース、つまり費用関数の偏導関数が投入需要関数になるというケースも同様である。

用いて計算する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial e(\mathbf{p},u)}{\partial p_i} &= u\frac{1}{1-\sigma^c}\left[\sum_j(\beta_j^c)^{\sigma^c}(p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{\sigma^c}{1-\sigma^c}}(1-\sigma^c)(\beta_i^c)^{\sigma^c}(p_i)^{-\sigma^c}\\ &= u\left[\frac{\beta_i^c}{p_i}\right]^{\sigma^c}\left[\sum_j(\beta_j^c)^{\sigma^c}(p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{\sigma^c}{1-\sigma^c}} = h_i(\mathbf{p},u)\end{aligned}$$

実際に Shephard の補題が成り立っていることがわかる。

Roy の恒等式

同様に、Roy の恒等式が成り立っているかどうか確認する。Roy の恒等式とは次の関係式であった。

$$d_i(\mathbf{p},m) = -\frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial p_i}\Bigg/\frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial m}$$

これを実際に計算してみる。まず、(58) 式より、

$$\begin{aligned}\frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial p_i} &= -m\left[\sum_j(\beta_j^c)^{\sigma^c}(p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{2-\sigma^c}{\sigma^c-1}}(\beta_i^c)^{\sigma^c}(p_i)^{-\sigma^c}\\ \frac{\partial v(\mathbf{p},m)}{\partial m} &= \left[\sum_j(\beta_j^c)^{\sigma^c}(p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{1}{\sigma^c-1}}\end{aligned}$$

という関係を得る。これより、

$$\begin{aligned}-\frac{v(\mathbf{p},m)}{p_i}\Bigg/\frac{v(\mathbf{p},m)}{m} &= m\left[\sum_j(\beta_j^c)^{\sigma^c}(p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{\frac{2-\sigma^c}{\sigma^c-1}}(\beta_i^c)^{\sigma^c}(p_i)^{-\sigma^c}\left[\sum_j(\beta_j^c)^{\sigma^c}(p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{-\frac{1}{\sigma^c-1}}\\ &= \left[\frac{\beta_i^c}{p_i}\right]^{\sigma^c}\frac{m}{\sum_j(\beta_j^c)^{\sigma^c}(p_j)^{1-\sigma^c}} = d_i(\mathbf{p},m)\end{aligned}$$

となる。やはり、Roy の恒等式も実際に成り立っていることが確認できた。

10.1.5　弾力性

需要の弾力性の値を求める。まず、(57) 式より非補償需要について次の関係が成り立つ。

$$\ln d_i(\mathbf{p},m) = \sigma^c\ln\beta_i^c - \sigma^c\ln p_i + \ln m - \ln\left[\sum_j(\beta_j^c)^{\sigma^c}(p_j)^{1-\sigma^c}\right] \tag{71}$$

同様に、(64) 式より補償需要について次式が成り立つ。

$$\ln h_i(\mathbf{p},u) = \ln u + \sigma^c\ln\beta_i^c + \sigma^c\ln e - \sigma^c\ln p_i - \sigma^c\ln u \tag{72}$$

(71) 式、(72) 式を基に弾力性を求める。まず自明ではあるが、(71) 式より、

$$\eta_i \equiv \frac{\partial \ln d_i(\mathbf{p}, m)}{\partial \ln m} = 1$$

となる。つまり、需要の所得弾力性の値は 1 となる。これは効用関数に homothetic な関数を仮定していることから導かれる当然の結果である。

次に、補償需要の価格弾力性を考える。(72) 式より、

$$\begin{aligned}\epsilon_{ii}^c \equiv \frac{\partial \ln h_i(\mathbf{p}, u)}{\partial \ln p_i} &= -\sigma^c + \sigma^c \frac{\partial \ln e}{\partial \ln p_i} \\ &= -\sigma^c + \sigma^c \frac{\partial \ln e}{\partial e} \frac{\partial e}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial \ln p_i} = -\sigma^c + \sigma^c \frac{p_i h_i}{e} \\ &= -\sigma^c + \sigma^c \theta_i\end{aligned}$$

となる。また、同様の手順で $j \neq i$ について以下が成り立つことを示せる。

$$\epsilon_{ij}^c \equiv \frac{\partial \ln h_i(\mathbf{p}, u)}{\partial \ln p_j} = \sigma^c \theta_j$$

以上より、補償需要の価格弾力性が (9) 式のように表現できることになる。

次に、非補償需要の価格弾力性を考える。(71) 式を用いると

$$\begin{aligned}\epsilon_{ii}^u \equiv \frac{\partial \ln d_i(\mathbf{p}, m)}{\partial \ln p_i} &= -\sigma^c - \left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}\right]^{-1} (\beta_i^c)^{\sigma^c} (1-\sigma^c)(p_i)^{-\sigma^c} p_i \\ &= -\sigma^c - (1-\sigma^c) \left[\frac{\beta_i^c}{p_i}\right]^{\sigma^c} \frac{m}{\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}} \frac{p_i}{m} \\ &= -\sigma^c - (1-\sigma^c) \frac{p_i d_i}{m} = -\sigma^c - (1-\sigma^c)\theta_i\end{aligned}$$

となる。同様に $j \neq i$ の場合には、

$$\epsilon_{ij}^u \equiv \frac{\partial \ln d_i(\mathbf{p}, m)}{\partial \ln p_j} = -(1-\sigma^c)\theta_j$$

となる。以上により、非補償需要の価格弾力性は (10) 式のような表現となる。

10.2 第 4 節の導出

ベンチマーク・データによるパラメータのカリブレーション方法についての説明。

10.2.1 CES 関数のケース

まず、(3) 式より

$$\beta_i = \frac{p_i z_i^{\frac{1}{\sigma}}}{c}$$

という関係が成立する。右辺はベンチマーク・データにより決定できる値からなるので、実際にベンチマーク値（バー付きの変数で表す）を代入してやればそれで β_i を決定できる。これがウェイト・パラメータ β_i のカリブレーションである。

$$\beta_i = \frac{\bar{p}_i \bar{z}_i^{\frac{1}{\sigma}}}{\bar{c}}$$

上の式を少し書き換えた次の関係を利用してもよい。

$$\beta_i = \theta_i z_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} = \theta_i \bar{z}_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} \tag{73}$$

以上が (28) 式の一つ目の値である。他のパラメータについても考え方は全く同じように求めていけばよい。

β_i^c については、(8) 式よりカリブレートできる。

$$\beta_i^c = \frac{(h_i/u)^{\frac{1}{\sigma^c}} p_i}{e/u} = \frac{(\bar{h}_i/\bar{u})^{\frac{1}{\sigma^c}} \bar{p}_i}{\bar{e}/\bar{u}}$$

あるいは、次の関係を利用するのでもよい。

$$\beta_i^c = \theta_i^c (h_i/u)^{\frac{1-\sigma^c}{\sigma^c}} = \theta_i^c (\bar{h}_i/\bar{u})^{\frac{1-\sigma^c}{\sigma^c}} \tag{74}$$

以上が、(28) の二つ目の値である。

10.2.2 Cobb-Douglas 関数のケース

Cobb-Douglas 関数では α_i と ϕ という 2 タイプのパラメータが出てくる。まず、α_i については、(13) 式を利用してカリブレートできる。

$$\alpha_i = \frac{p_i z_i}{c} = \frac{\bar{p}_i \bar{z}_i}{\bar{c}} \tag{75}$$

このカリブレートした (75) 式と (11) 式より、ϕ をカリブレートできる。

$$\phi = \frac{\bar{y}}{\prod_i (\bar{x}_i)^{\alpha_i}} \tag{76}$$

α_i^c は (17) 式によりカリブレートできる。

$$\alpha_i^c = \frac{p_i d_i}{m} = \frac{\bar{p}_i \bar{d}_i}{\bar{m}} \tag{77}$$

ϕ^c は (77) 式と (14) 式を使えばカリブレートできる。

$$\phi^c = \frac{\bar{u}}{\prod_i (\bar{d}_i)^{\alpha_i^c}} \tag{78}$$

10.3 第 5 節の導出

以下では、calibrated share form の表現を求めていく。

10.3.1 CES 関数のケース

生産関数： まず、生産関数の calibrated share form を求める。それには、(1) 式の生産関数に (73) 式でカリブレートした β_i の値を代入すればよい。

$$\begin{aligned} y &= \left[\sum_i \beta_i x_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \left[\sum_i \theta_i \bar{z}^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} x_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &= \left[\sum_i \theta_i \left(\frac{\bar{x}_i}{\bar{y}}\right)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} x_i^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} = \left[\sum_i \theta_i \bar{y}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \left(\frac{x_i}{\bar{x}_i}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \\ &= \bar{y}\left[\sum_i \theta_i \left(\frac{x_i}{\bar{x}_i}\right)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \end{aligned} \tag{79}$$

これが (29) 式である。

単位費用関数： 次に単位費用関数の calibrated share form を求める。Calibrated share form の単位費用関数の求め方は二つある。まず、(79) 式を基に費用最小化問題を解くという方法がある。もう一つは (2) 式の normal form の単位費用関数に (73) 式の β_i の値を代入するという方法である。どちらで求めてもよいが、ここでは後者の方法で求める。

実際に、(2) 式に (73) 式を代入して書き換えていく。

$$\begin{aligned} c(\mathbf{p}) &= \left[\sum_i \left[\theta_i \bar{z}_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right]^{\sigma} p_i^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \left[\sum_i \theta_i \theta_i^{\sigma-1} \bar{z}_i^{1-\sigma} p_i^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &= \left[\sum_i \theta_i \left(\frac{\bar{z}_i}{\theta_i}\right)^{1-\sigma} p_i^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} = \left[\sum_i \theta_i \left(\frac{\bar{c}\bar{z}_i}{\bar{p}_i \bar{z}_i}\right)^{1-\sigma} p_i^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &= \bar{c}\left[\sum_i \theta_i \left(\frac{p_i}{\bar{p}_i}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \end{aligned} \tag{80}$$

これが (30) 式の calibrated share form の単位費用関数である。

単位投入需要関数： Calibrated share form の単位投入需要関数を求めるには二つ方法がある。まず、通常の単位投入需要関数にカリブレートした β_i を代入して求めるという方法がある。第二に、calibrated share form の単位費用関数から Shephard の補題によって求めるという方法がある。ここでは前者の方法で求める。

(3) 式に (73) 式を代入する。

$$\begin{aligned} z_i(\mathbf{p}) &= \left[\frac{\theta_i \bar{z}_i^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}}{p_i}\right]^{\sigma} \left[\sum_j \left(\theta_j \bar{z}_j^{\frac{1-\sigma}{\sigma}}\right)^{\sigma} p_j^{1-\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \\ &= \bar{z}_i \left[\frac{\bar{p}_i}{\bar{c}p_i}\right]^{\sigma} \bar{c}^{\sigma} \left[\sum_j \theta_j \left(\frac{p_j}{\bar{p}_j}\right)^{1-\sigma}\right]^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \\ &= \bar{z}_i \left[\frac{\bar{p}_i}{\bar{c}p_i}\right]^{\sigma} c^{\sigma} \qquad \text{(80)式より} \\ &= \bar{z}_i \left[\frac{c/\bar{c}}{p_i/\bar{p}_i}\right]^{\sigma} \end{aligned} \tag{81}$$

これが (31) 式の calibrated share form の単位投入需要関数である。

効用関数： 次に calibrated share form の効用関数を求める。基本的な考え方は生産側のケースと全く同じである。やはり normal form の効用関数 (4) 式にカリブレートしたパラメータ (74) 式を代入すればよい。

$$
\begin{aligned}
u &= \left[\sum_i \theta_i^c \left(\frac{\bar{d}_i}{\bar{u}} \right)^{\frac{1-\sigma^c}{\sigma^c}} d_i^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}} \right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}} = \left[\sum_i \theta_i^c \bar{u}^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}} \left(\frac{d_i}{\bar{d}_i} \right)^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}} \right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}} \\
&= \bar{u} \left[\sum_i \theta_i^c \left(\frac{d_i}{\bar{d}_i} \right)^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}} \right]^{\frac{\sigma^c}{\sigma^c-1}}
\end{aligned}
$$

これが (32) 式である。

間接効用関数： これについても二つ導出方法がある。calibrated share form の効用関数から効用最大化問題を解いて導出するのでもよいし、normal form の間接効用関数にカリブレートしたパラメータを代入して求めてもよい。ここでは後者の方法をとる。normal form の間接効用関数 (5) 式に (74) 式を代入する。

$$
\begin{aligned}
v(\mathbf{p}, m) &= m \left[\sum_j (\beta_j^c)^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{-1}{1-\sigma^c}} = m \left[\sum_j \left[\theta_j \left(\frac{\bar{d}_j}{\bar{u}} \right)^{\frac{1-\sigma^c}{\sigma^c}} \right]^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{-1}{1-\sigma^c}} \\
&= m \left[\sum_j \theta_j \left(\frac{\theta_j \bar{u}}{\bar{d}_j} \right)^{\sigma^c-1} (p_j)^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{-1}{1-\sigma^c}} = m \left[\sum_j \theta_j \left(\frac{\bar{p}_j \bar{d}_j \bar{u}}{\bar{m} \bar{d}_j} \right)^{\sigma^c-1} (p_j)^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{-1}{1-\sigma^c}} \\
&= m \frac{\bar{u}}{\bar{m}} \left[\sum_j \theta_j \left(\frac{p_j}{\bar{p}_j} \right)^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{-1}{1-\sigma^c}}
\end{aligned}
$$

これが (33) 式である。

支出関数： 1) 「calibrated share form の効用関数＋費用最小化問題」で導出する、2) normal form の支出関数にカリブレートしたパラメータを代入する、3) 第 10.1.3 節の方法によって calibrated share form の間接効用関数から導出するという 3 つの方法がある。ここでは 2) の方法を用いる。

(6) 式に (74) 式を代入して書き換える。

$$
\begin{aligned}
e(\mathbf{p}, u) &= u \left[\sum_j \left[\theta_j^c \left(\frac{\bar{d}_j}{\bar{u}} \right)^{\frac{1-\sigma^c}{\sigma^c}} \right]^{\sigma^c} p_j^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}} = u \left[\sum_j \theta_j^c \left[\frac{\theta_j^c \bar{u}}{\bar{d}_j} \right]^{\sigma^c-1} p_j^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}} \\
&= u \left[\sum_j \theta_j^c \left[\frac{\bar{p}_j \bar{d}_j \bar{u}}{\bar{e} \bar{d}_j} \right]^{\sigma^c-1} p_j^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}} = u \frac{\bar{m}}{\bar{u}} \left[\sum_j \theta_j^c \left(\frac{p_j}{\bar{p}_j} \right)^{1-\sigma^c} \right]^{\frac{1}{1-\sigma^c}}
\end{aligned}
$$

これが (34) 式である。

非補償需要関数： normal form の非補償需要関数 (7) 式にカリブレートしたパラメータ (74) 式を代入する。

$$
\begin{aligned}
d_i(\mathbf{p}, m) &= \left[\frac{\theta_j^c (\bar{d}_i/\bar{u})^{\frac{1-\sigma^c}{\sigma^c}}}{p_i}\right]^{\sigma^c} \frac{m}{\sum_j \left[\theta_j^c (\bar{d}_j/\bar{u})^{\frac{1-\sigma^c}{\sigma^c}}\right]^{\sigma^c} (p_j)^{1-\sigma^c}} \\
&= \left[\frac{\bar{p}_i \bar{d}_i^{\frac{-1}{\sigma^c}} \bar{u}^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}}}{\bar{m} p_i}\right]^{\sigma^c} \frac{m}{\left(\frac{\bar{u}}{\bar{m}}\right)^{\sigma^c-1} \sum_j \theta_j^c \left(\frac{p_j}{\bar{p}_j}\right)^{1-\sigma^c}} \\
&= \bar{d}_i \left[\frac{\bar{p}_i}{p_i}\right]^{\sigma^c} \bar{m}^{-\sigma^c} \bar{u}^{\sigma^c-1} \bar{u}^{1-\sigma^c} \bar{m}^{\sigma^c-1} \frac{m}{\sum_j \theta_j^c \left(\frac{p_j}{\bar{p}_j}\right)^{1-\sigma^c}} \\
&= \bar{d}_i \left[\frac{m}{\bar{m}}\right] \left[\frac{\bar{p}_i}{p_i}\right]^{\sigma^c} \left[\sum_j \theta_j^c \left(\frac{p_j}{\bar{p}_j}\right)^{1-\sigma^c}\right]^{-1}
\end{aligned}
$$

これが (35) 式である。

補償需要関数： normal form の補償需要関数 (8) 式に (74) 式を代入する。

$$
\begin{aligned}
h_i(\mathbf{p}, u) &= u \left[\frac{\theta_i^c (\bar{h}_i/\bar{u})^{\frac{1-\sigma^c}{\sigma^c}} e}{p_i u}\right]^{\sigma^c} = u \left[\frac{\bar{p}_i \bar{h}_i \bar{h}_i^{\frac{1-\sigma^c}{\sigma^c}} \bar{u}^{\frac{\sigma^c-1}{\sigma^c}} e}{\bar{e} p_i u}\right]^{\sigma^c} \\
&= u \left[\frac{e/\bar{e}}{p_i/\bar{p}_i}\right]^{\sigma^c} \bar{d}_i \bar{u}^{\sigma^c-1} u^{-\sigma^c} = \bar{h}_i \left[\frac{u}{\bar{u}}\right]^{1-\sigma^c} \left[\frac{e/\bar{e}}{p_i/\bar{p}_i}\right]^{\sigma^c}
\end{aligned}
$$

これが (36) 式である。

10.3.2 Cobb-Douglas 関数のケース

ここでは、Cobb-Douglas 関数のケースの calibrated share form の表現を導出する（第 5.2 節の式の導出)。基本的な考え方については、CES 関数のときと全く同じである。

生産関数： (11) 式に (76) 式を代入する。

$$
y = \frac{\bar{y}}{\prod_i (\bar{x}_i)^{\alpha_i^c}} \prod_i (x_i)^{\alpha_i^c} = \bar{y} \prod_i \left[\frac{x_i}{\bar{x}_i}\right]^{\alpha_i^c}
$$

単位費用関数： (12) 式に (76) 式を代入する。

$$
c(\mathbf{p}) = \frac{\prod_i (\bar{x}_i)^{\alpha_i^c}}{\bar{y}} \prod_i \left[\frac{p_i}{\alpha_i^c}\right]^{\alpha_i^c} = \frac{\prod_i (\bar{x}_i)^{\alpha_i^c}}{\bar{y}} \prod_i \left[\frac{p_i \bar{c} \bar{y}}{\bar{p}_i \bar{x}_i}\right]^{\alpha_i^c} = \bar{c} \prod_i \left[\frac{p_i}{\bar{p}_i}\right]^{\alpha_i^c}
$$

単位投入需要関数： (3) 式に (76) 式を代入する。

$$
z_i(\mathbf{p}) = \frac{\bar{p}_i \bar{z}_i}{\bar{c}} \frac{c}{p_i} = \bar{z}_i \frac{c/\bar{c}}{p_i/\bar{p}_i}
$$

効用関数： (14) 式に (78) 式を代入する。

$$
u = \frac{\bar{u}}{\prod_i (\bar{d}_i)^{\alpha_i^c}} \prod_i (d_i)^{\alpha_i^c} = \bar{u} \prod_i \left[\frac{d_i}{\bar{d}_i}\right]^{\alpha_i^c}
$$

間接効用関数： (15) 式に (78) 式を代入する。

$$v(\mathbf{p},m)=m\frac{\bar{u}}{\prod_i(\bar{d}_i)^{\alpha_i^c}}\prod_i\left[\frac{\alpha_i^c}{p_i}\right]^{\alpha_i^c}=m\frac{\bar{u}}{\prod_i(\bar{d}_i)^{\alpha_i^c}}\prod_i\left[\frac{\bar{p}_i\bar{d}_i}{\bar{m}p_i}\right]^{\alpha_i^c}=m\frac{\bar{u}}{\bar{m}}\prod_i\left[\frac{\bar{p}_i}{p_i}\right]^{\alpha_i^c}$$

支出関数： (16) 式に (78) 式を代入する。

$$e(\mathbf{p},u)=u\frac{\prod_i(\bar{d}_i)^{\alpha_i^c}}{\bar{u}}\prod_i\left[\frac{p_i}{\alpha_i^c}\right]^{\alpha_i^c}=u\frac{\prod_i(\bar{d}_i)^{\alpha_i^c}}{\bar{u}}\prod_i\left[\frac{p_i\bar{e}}{\bar{p}_i\bar{d}_i}\right]^{\alpha_i^c}=u\frac{\bar{e}}{\bar{u}}\prod_i\left[\frac{p_i}{\bar{p}_i}\right]^{\alpha_i^c}$$

非補償需要関数： (17) 式に (78) 式を代入する。

$$d_i(\mathbf{p},m)=\frac{\bar{p}_i\bar{d}_i}{\bar{m}}\frac{m}{p_i}=\bar{d}_i\frac{m/\bar{m}}{p_i/\bar{p}_i}$$

補償需要関数： (18) 式に (78) 式を代入する。

$$h_i(\mathbf{p},u)=\frac{\bar{p}_i\bar{h}_i}{\bar{e}}\frac{e}{p_i}=\bar{h}_i\frac{e/\bar{e}}{p_i/\bar{p}_i}$$

10.4　第 6 節の導出

第 6 節の内容は

- CES 関数を CET 関数に置き換える。
- 費用（支出）最小化行動を収入最大化行動に置き換える。

ことによって、これまでの方法とほぼ同じ方法で導出可能であるので省略する。

10.5　第 7 節の導出

第 7 節における賃金弾力性の値の導出を説明する。

まず、補償余暇需要の賃金弾力性を考える。(44) 式より、補償余暇需要について次式が成り立つ。

$$\ln z^c(p,w,u)=\ln u+\sigma\ln\beta^z+\sigma\ln e-\sigma\ln w-\sigma\ln u$$

この関係より、補償余暇需要の賃金弾力性は次のように表現できる。

$$\epsilon_z^c=\frac{\partial\ln z^c}{\partial\ln w}=-\sigma+\sigma\frac{\partial\ln e}{\partial\ln w}=-\sigma+\sigma\frac{\partial\ln e}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial\ln w}$$

ここで、Shephard の補題より $\partial e(\mathbf{p},w,u)/\partial w=z^c$ であるので、上式は次式となる。

$$\epsilon_z^c=-\sigma+\sigma\frac{wz}{e}=-\sigma+\sigma\theta_z=\sigma(\theta_z-1)$$

これが (45) 式である。

次に、非補償余暇需要の賃金弾力性を考える。(43) 式より、非補償余暇需要について次の関係が成立する。

$$\ln z^u=\sigma\ln\beta^z-\sigma\ln w+\ln m-\ln\left[(\beta^c)^\sigma(p)^{1-\sigma}+(\beta^z)(w)^{1-\sigma}\right]$$

この関係を使って、非補償余暇需要の賃金弾力性を計算していく。

$$\begin{aligned}
\epsilon_z^u = \frac{\partial \ln z^u}{\partial \ln w} &= -\sigma - \left[(\beta^c)^\sigma (p)^{1-\sigma} + (\beta^z)(w)^{1-\sigma}\right]^{-1} (\beta^z)^\sigma (1-\sigma) w^{1-\sigma} + \frac{\partial \ln m}{\partial \ln w} \\
&= -\sigma - (1-\sigma)\left[\frac{\beta^z}{w}\right]^\sigma \frac{m}{(\beta^c)^\sigma (p)^{1-\sigma} + (\beta^z)(w)^{1-\sigma}} \frac{w}{m} + \frac{w\bar{l}}{w\bar{l}+n} \\
&= -\sigma - (1-\sigma)\frac{wz}{m} + \frac{w\bar{l}}{m} = -\sigma - (1-\sigma)\theta_z + \theta_{\bar{l}} \\
&= \sigma(\theta_z - 1) - \theta_z + \theta_{\bar{l}}
\end{aligned}$$

これが (46) 式である。第 7 節で説明したように、非補償余暇需要の賃金弾力性の計算では、通常の代替効果、所得効果に加えて、賃金の変化で所得が変化する効果が入ってくることに注意。

10.6 第 8 節の導出

y の供給の価格弾力性 ε^s は次のように表現される。

$$\varepsilon^s \equiv \frac{\partial \ln y}{\partial \ln p_y} = \frac{\partial \ln y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p_y}\frac{\partial p_y}{\partial \ln p_y} = \frac{1}{y} f_x(x,z)\frac{\partial x}{\partial p_y} p_y \tag{82}$$

ただし、$f_x(x,z) = \partial f(x,z)/\partial x$ である。上の式に $\partial f(x,z)/\partial z$ が現れないのは、z は特殊要素でその投入量は常に一定であるため $\partial f(x,z)/\partial z = 0$ となるためである。

変数 x についての利潤最大化の条件より、次式が成り立つ。

$$p_y f_x(x,z) = p_x \tag{83}$$

この (83) 式を全微分し、$dp_x = 0$ と置くと、次の関係が導出できる。

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = -\frac{f_x(x,z)}{p_y f_{xx}(x,z)} \tag{84}$$

ただし、$f_{xx}(x,z) \equiv \partial^2 f(x,y)/\partial x^2$ である。ここで、 (83) 式を利用すると、 (84) 式は次式となる。

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = -\frac{p_x}{p_y^2 f_{xx}(x,z)} \tag{85}$$

生産関数の定義式 (47) 式より、$f_x(x,z)$ は次のような表現になる。

$$f_x(x,z) = \left[\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right]^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_x(x)^{-\frac{1}{\sigma}}$$

同様に、$f_{xx}(x,z)$ は次式のような表現になる。

$$\begin{aligned}
f_{xx}(x,z) = &\left[\left(\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_x x^{-\frac{1}{\sigma}}\right]^2 \left(\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{-\frac{\sigma}{\sigma-1}} \frac{1}{\sigma} \\
&- \left[\left(\beta_x(x)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + \beta_z(z)^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \beta_x x^{-\frac{1}{\sigma}}\right] \frac{1}{\sigma x}
\end{aligned}$$

この式の [ ] 内は f_x に等しいので、p_x/p_y に等しい。また、生産関数の定義も利用すると上の式は次式に書き換えることができる。

$$f_{xx}(x,z) = \frac{p_x}{p_y}\frac{1}{\sigma}\left[\frac{p_x}{p_y}\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right] \tag{86}$$

ここで、

$$\theta_z \equiv \frac{p_z z}{p_y y}$$

と定義すると、(86) 式は次式となる。

$$f_{xx}(x,z) = -\frac{p_x}{p_y}\frac{\theta_z}{\sigma x}$$

この式を (85) 式に代入すると次式となる。

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = \frac{p_x}{p_y^2}\frac{p_y}{p_x}\frac{\sigma x}{\theta_z} = \frac{\sigma x}{p_y}\frac{1}{\theta_z}$$

これを (82) 式に代入すると次式となる。

$$\varepsilon^s = \sigma\frac{1-\theta_z}{\theta_z}$$

これを σ について解くと次式となる。

$$\sigma = \varepsilon^s\frac{\theta_z}{1-\theta_z}$$

これが (48) 式である。

11　履歴

- 2024-01-27: 特殊要素（specific factor）がある生産の場合のパラメータのカリブレーションについて説明した第 8 節を追加。
- 2023-04-30: 誤植の修正。
- 2022-07-06: 生産関数、効用関数が Leontief 関数のケースを追加。
- 2021-07-04: 誤植の修正。
- 2018-07-20: 説明の追加・修正。
- 2017-03-15: 説明の修正。
- 2015-02-22: CET 関数の説明の節を追加した。
- 2015-11-11: 誤植を修正。