Trabalho 2

- Victor Azadinho Miranda
- RA: 171042191

O Problema Chinês do Carteiro

Na teoria dos grafos, um ramo da matemática e da ciência da computação, o problema do carteiro chinês, o passeio do carteiro ou o problema de inspeção de rota é encontrar um caminho ou circuito fechado mais curto que visite cada borda de um grafo não direcionado (conectado). Quando o grafo tem um circuito Euleriano (uma caminhada fechada que cobre todas as arestas uma vez), esse circuito é uma solução ótima. Caso contrário, o problema de otimização é encontrar o menor número de arestas do grafo para duplicar (ou o subconjunto de arestas com o peso total mínimo possível) de modo que o multigrafo resultante tenha um circuito Euleriano. Pode ser resolvido em tempo polinomial.

O problema foi originalmente estudado pelo matemático chinês Kwan Mei-Ko em 1960, cujo artigo chinês foi traduzido para o inglês em 1962. O nome original "problema do carteiro chinês" foi cunhado em sua homenagem; diferentes fontes creditam a cunhagem tanto a Alan J. Goldman quanto a Jack Edmonds, ambos trabalhando no Escritório Nacional de Padrões dos EUA na época.

Uma generalização é escolher qualquer conjunto T de muitos vértices uniformes que devem ser unidos por um conjunto de arestas no grafo cujos vértices de grau ímpar são precisamente os de T. Tal conjunto é chamado de junção T. Este problema, o problema T-conjunto, também pode ser resolvido em tempo polinomial pela mesma abordagem que resolve o problema do carteiro.

Solução não direcionada e T-conjuntos

O problema de inspeção de rota não direcionada pode ser resolvido em tempo polinomial por um algoritmo baseado no conceito de T-conjunto. Seja T um conjunto de vértices em um grafo. Um conjunto de arestas J é chamado de T-conjunto se a coleção de vértices que têm um número ímpar de arestas incidentes em J for exatamente o conjunto T. Uma T-conjunto existe sempre que cada componente conectado do grafo contém um número par de vértices em T. O problema da junção T é encontrar uma junção T com o número mínimo possível de arestas ou o peso total mínimo possível.

Para qualquer T, a menor junção T (quando existe) consiste necessariamente em $\frac{1}{2}|T|$ caminhos que unem os vértices de T aos pares. Os caminhos serão tais que o comprimento total ou peso total de todos eles seja o menor possível. Em uma solução ótima, dois desses caminhos não compartilharão nenhuma aresta, mas podem ter vértices compartilhados. Uma junção T mínima pode ser obtida construindo um grafo completo nos vértices de T, com arestas que representam os caminhos mais curtos no grafo de entrada dado, e então encontrando uma correspondência perfeita de peso mínimo neste grafo completo. As arestas desse casamento representam caminhos no grafo original, cuja união forma a junção T desejada. A construção do grafo completo e, em seguida, a localização de uma correspondência nele podem ser feitas em etapas computacionais $O(n^3)$.

Para o problema de inspeção de rota, T deve ser escolhido como o conjunto de todos os vértices de grau ímpar. Pelas suposições do problema, o grafo inteiro está conectado (caso contrário, não existe nenhum passeio) e, pelo lema do aperto de mão, ele tem um número par de vértices ímpares, então sempre existe uma junção T. Dobrar as arestas de uma junção T faz com que o grafo dado se torne um multigrafo Euleriano (um grafo conectado em que cada vértice tem grau par), do qual segue que tem um passeio de Euler, um passeio que visita cada aresta do multigrafo exatamente uma vez. Este passeio será uma solução ideal para o problema de inspeção de rota.

Solução direcionada

Em um grafo direcionado, as mesmas idéias gerais se aplicam, mas técnicas diferentes devem ser usadas. Se o grafo direcionado é Euleriano, basta encontrar um ciclo de Euler. Se não for, deve-se encontrar T-conjuntos, o que, neste caso, envolve encontrar caminhos a partir dos vértices com um grau maior do que seu grau externo para aqueles com um grau externo maior do que seu grau de tal forma que eles fariam o grau interno de cada vértice é igual ao grau externo. Isso pode ser resolvido como uma instância do problema de fluxo de custo mínimo, em que há uma unidade de suprimento para cada unidade de excesso em grau e uma unidade de demanda para cada unidade de excesso de grau externo. Como tal, é solucionável em tempo $O(|V|^2|E|)$. Existe uma solução se e somente se o grafo fornecido estiver fortemente conectado.

Problema do carteiro com vento

O problema do carteiro com vento é uma variante do problema de inspeção de rota em que a entrada é um grafo não direcionado, mas onde cada aresta pode ter um custo diferente para percorrê-la em uma direção do que para percorrê-la na outra direção. Em contraste com as soluções para grafos direcionados e não direcionados, é NP-completo.

Bibliografia

Edmonds, J.; Johnson, E.L. (1973), "Matching Euler tours and the Chinese postman problem", Mathematical Programming, **5**: 88–124, doi:10.1007/bf01580113, S2CID 15249924

Pieterse, Vreda; Black, Paul E., eds. (September 2, 2014), "Chinese postman problem", Dictionary of Algorithms and Data Structures, National Institute of Standards and Technology

Guan, Meigu (1984), “On the windy postman problem”, Discrete Applied Mathematics, 9 (1): 41–46, doi:10.1016/0166-218X(84)90089-1, MR 0754427