1 Grafos Conexos

1.1 Definição

Um grafo é dito **conexo** se existir pelo menos um caminho entre cada par de vértices do grafo. Caso contrário, o grafo é chamado de desconexo.

Cada um dos subgrafos conexos maximais de um grafo desconexo é chamado de uma **componente** do grafo. Ou seja, uma componente é um subgrafo conexo que não esteja estritamente contido em outros subgrafos conexos.[1]

Dado um grafo qualquer, como determinar se o grafo é conexo?

1.1.1 Teorema

Um grafo $G(V, A)$ é desconexo se, e somente se, seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois conjuntos disjuntos e não-vazios, V_1 e V_2, de forma que não exista uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2.

Demonstração: [$\Rightarrow$] Suponhamos que G seja desconexo e mostremos que existe uma partição de V, V_1 e V_2, tal que não existe uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra extremidade em V_2.

Considere um vértice $v \in V$ qualquer. Forme o conjunto V_1 com todos os vértices de V que estejam ligados a v por um caminho. Como G é desconexo, V_1 não contém todos os vértices de G. Assim os vértices restantes formam um conjunto não-vazio V_2, e não existe nenhuma aresta de G com uma extremidade em V_1 e outra em V_2. Assim V_1 e V_2 formam a partição desejada.

[$\Leftarrow$] Suponhamos que exista uma partição de V, V_1 e V_2, tal que não existe uma aresta com uma extremidade em V_1, e outra extremidade em V_2 e mostraremos que G é desconexo.

Considere dois vértices arbitrários $v, w \in V$ tais que $v \in V_1$ e $w \in V_2$. Não pode existir nenhum caminho entre v e w, pois se existisse, haveria uma aresta com uma extremidade em V_1 e outra em V_2. Portanto se uma partição existe então o grafo e desconexo.

Cada vértice pode ser ligado por uma aresta a cada um dos outros vértices do grafo, isto é, aos outros $(n - 1)$. Isto nos dá $(n - 1)$ arestas. Como existem n vértices, teremos então $n(n - 1)$ arestas. No entanto, cada aresta interliga dois vértices e portanto está sendo considerado duas vezes. Assim, para obtermos o número correto de arestas é necessário dividir o valor que temos até o momento por 2. O número máximo de arestas é então:

$$n(n-1)/2$$

[1] Sejam S e S' tais que $S' \subset S$. S' é maximal em relação a uma propriedade P quando S' satisfaz P e não existe $S'' \supset S'$ que também satisfaça P.

1.1.2 Teorema

Seja G um grafo simples com n vértices. Se G possui k componentes, então o número m de arestas de G satisfaz

$$n - k \leq m \leq (n-k)(n-k+1)/2$$

Demonstração: Vamos provar que $m \geq n - k$ por indução sobre o número de arestas de G. É claro que o resultado é verdadeiro para um grafo nulo ($m = 0$). Suponha que a desigualdade é verdadeira para todo grafo com menos do que m_0 arestas, onde m_0 é um inteiro positivo. Vamos supor ainda, sem perda de generalidade, que G possui o menor número de arestas possível, no sentido de que a retirada de qualquer aresta de G aumenta o número de componentes em uma unidade. Neste caso, o grafo resultante teria os mesmos n vértices, $k+1$ componentes e $m_0 - 1$ arestas. Segue da hipótese de indução que

$$m_0 - 1 \geq n - (k+1) \Leftrightarrow m_0 \geq n - k$$

Agora mostremos que vale a segunda desigualdade, supondo, sem perda de generalidade, que cada componente de G é um grafo completo. Suponhamos que existem dois componentes C_i e C_j com n_i e n_j vértices, respectivamente, onde $n_i \geq n_j > 1$. Se trocarmos C_i e C_j por grafos completos com $n_i + 1$ e $n_j - 1$ vértices, então o número total de vértices permanece o mesmo, e o número de arestas é alterado para

$$\frac{(n_i+1)n_i - n_i(n_i-1)}{2} - \frac{n_j(n_j-1) - (n_j-1)(n_j-2)}{2} = n_i - n_j + 1 > 0$$

Segue que, para que o número máximo de arestas seja atingido, G deve consistir de um grafo completo com $n - (k-1)$ vértices e $k - 1$ vértices isolados.