1 Conceitos Iniciais

1.1 Definição

Seja $G(V, A)$ um grafo. Dada uma aresta $a = (v_i, v_j) \in A$, dizemos que:

- a) v_i e v_j são os extremos da aresta a;
- b) a aresta a é dita ser **incidente** nos vértices v_i e v_j;
- c) v_i e v_j são chamados de **vértices adjacentes**;
- d) se $v_i = v_j$ a aresta a é chamada de **loop** (ou **laço**);
- e) se existir uma aresta $f = (v_k, v_t)$ tal que $v_k = v_i$ e $v_j = v_t$, as arestas a e f são chamadas de **arestas paralelas** (ou **múltiplas**). Grafos que contém arestas paralelas, às vezes, são chamados de multi-grafos.

1.2 Definição

Um grafo é **simples** se não possui loops e/ou arestas paralelas.

1.3 Definição

Duas areas são ditas **adjacentes** se elas incidem no mesmo vértice.

1.4 Definição

O **grau** de um vértice $v, d(v)$, em um grafo sem loops é determinado pelo número de arestas incidentes em v. Caso haja loops, estas arestas contribuem com grau 2.

1.5 Definição

A **sequência de graus** de um grafo G é a sequência não-decrescente formada pelos graus dos vértices de G.

1.6 Definição

Dizemos que:

- a) Um vértice v é **isolado** se $d(v) = 0$.
- b) Um vértice v é **pendente** se $d(v) = 1$.
- c) Um grafo $G(V, A)$ é dito **nulo** se o conjunto de arestas A é vazio. É representado por N_n, onde n é o número de vértices do grafo.
- d) Um grafo $G(V, A)$ é dito **regular** se todos os seus vértices tem o mesmo grau.
- e) Um grafo $G(V, A)$ é dito **completo** se existe uma aresta entre cada par vértices. É representado por K_n, onde n é o número de vértices do grafo.
- f) Um grafo $G(V, A)$ em que $V = v_1, v_2, ..., v_n$ e $A = (V_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n)$ é dito ser um **caminho**. É representado por P_n.
- g) Um grafo $G(V, A)$ em que $V = v_1, v_2, ..., v_n$ e $A = (v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$ é dito ser um **ciclo** (ou **circuito**). É representado por C_n.
- h) Um grafo $G(V, A)$ é dito **valorado** (ou é chamado de **rede**) se são atribuídos valores para os vértices e/ou arestas.
- i) Um grafo $G(V, A)$ em que $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, e para toda aresta $(v, w) \in A$ tem-se $v \in V_1$ e $w \in V_2$ é dito ser um **grafo bipartido**.
- j) Um grafo bipartido $G(V_1 \cup V_2, A)$ é dito ser **bipartido completo** se $(v, w) \in A$ para todos $v \in V_1$ e $w \in V_2$. Neste caso, é representado por $K_{p,q}$, onde p é o número de vértices de V_1 e q é o número de vértices deV_2.
- k) Dado um grafo G, o seu complemento, representado por $\bar{G}$, é o grafo tal que $V(\bar{G}) = V(G)$ e $A(\bar{G}) = A(K_n)\ A(G)$, onde n é o número de vértices de G.

1.7 Proposição

Dado um grafo G com n vértices, $v_1, v_2, ..., v_n$ e m arestas, temos que:

- $\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$.

Por que este resultado é válido? Observe que cada aresta contribui com 2 graus na soma dos graus de todos os vértices, ou seja, cada aresta é contada duas vezes. Assim, a soma é igual a duas vezes o número de arestas.

1.8 Teorema

O número de vértices de grau ímpar em um grafo é sempre par.

Demonstração. Vamos dividir a soma em duas parcelas. Os vértices com grau par e os vértices com grau ímpar:

- $\sum_{i=1}^{n} d(v_1) = \sum_{v_1\ tem\ grau\ par} d(v_i) + \sum_{v_i\ tem\ grau\ mpar} d(v_i)$.

O lado esquerdo da equação é par. A primeira parcela do lado direito também é par, pois é a soma de números pares. Para que a igualdade seja válida, a segunda parcela também deve ser par:

- $\sum_{v_i\ tem\ grau\ mpar} d(v_i)$ é par.

Como cada parcela $d(v_i)$ é ímpar temos que ter um número par de elementos para que a soma seja um número par (lembre-se que um número ímpar é da forma $(2k + 1)$).