Домашняя работа №6

Шишацкий Михаил, 932

16.05.2020

Задача 2a. Задан неориентированный связный граф. Определена функция $c(v)$, равная количеству вершин, достижимых из данной при заданной ориентации графа. Найти максимальное значение $\min\limits_{v \in V} c(v)$ по всем ориентациям графа.

Решение. Согласно теореме Роббинса, любой связный неориентированный граф без мостов (рёберно 2-связный) можно ориентировать так, чтобы из любой вершины можно было добраться до всех остальных. Поэтому задача сводится к поиску всех компонент рёберной 2-связности в исходном графе. Для этого достаточно найти мосты за $O(m+n)$ в классической реализации. Затем запустим обход в глубину, запретив ему переход по мостам. Таким образом, мы покрасим соответствующие компоненты рёберной 2-связности (а также узнаем их размер) за $O(m+n)$. Заметим, что конденсация графа по найденным компонентам образует дерево, так как в противном случае по циклу можно было бы совместить несколько компонент в одну.

При любой ориентации этого дерева найдется компонента, из которой не исходит рёбер (например, согласно принципу Дирихле). А значит, ответ на задачу будет ограничен сверху размером этой компоненты.

Однако для каждой компоненты существует такая ориентация мостов, при которой из этой компоненты не будет исходящих рёбер (подвесим дерево за эту компоненту и ориентируем мосты из сына в родителя). Таким образом, можно найти компоненту рёберной 2-связности максимального размера и подвесить дерево за неё. Тогда из каждой вершины можно будет добраться хотя бы до всех вершин этой компоненты. Ответом будет размер этой компоненты.

Асимптотика работы алгоритма - $O(2m+2n) = O(m+n)$.

$\square$

Задача 7. В невзвешенном неориентированном графе для каждой вершины определить длину кратчайшего цикла, содержащего её.

Решение. Найдём кратчайший цикл для одной конкретной вершины:

Запустим из этой вершины BFS. Если в момент добавления соседей в очередь мы встретим уже посещённую вершину, мы обнаружим цикл. Первое такое "замыкание" с уже посещёнными даст нам цикл минимальной длины (обозначим эту длину за N). Такой цикл замкнётся через $\frac{N}{2}$ итераций BFS, т.к. мы равномерно отступаем от рассматриваемой вершины слева и справа по циклу. Понятно, что если длина этого цикла не минимальна, найдётся цикл, который замкнётся за меньшее количество итераций.

Если же в процессе работы BFS ни одного замыкания не произошло, через рассматриваемую вершину не проходит ни одного цикла. Также понятно, что нас интересуют только циклы без самопересечений, так как если выкинуть петлю, не содержащую рассматриваемую вершину, размер цикла уменьшится.

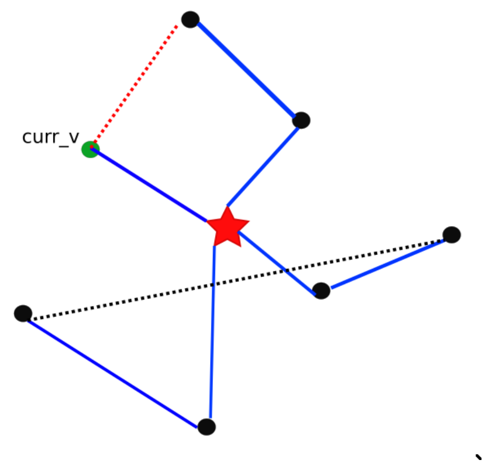

Рис. 1: Пример работы алгоритма

Асимптотика работы BFS – $O(n+m)$. Так как всего вершин n, ответ для них мы получим за $O(n(n+m))$.

$\square$