

На рисунке 1 изображен исходный граф №3

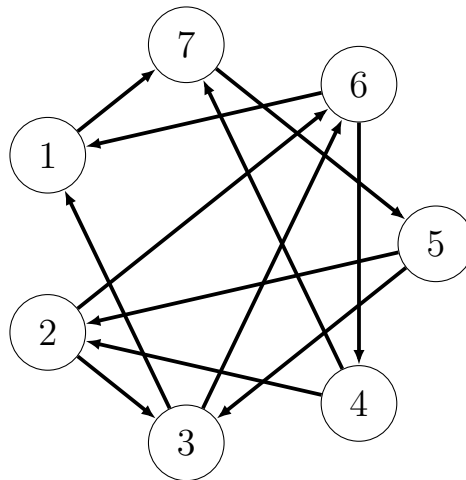


Рис. 1. Исходный граф №3

На рисунке 2 выбрано произвольное остовное дерево графа №3.

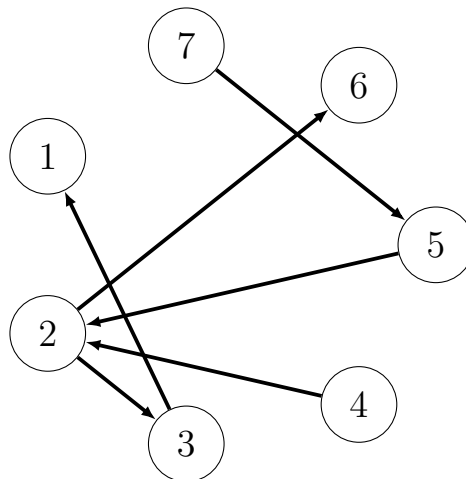


Рис. 2. Произвольное остовное дерево графа №3

Система фундаментальных циклов

Теперь, для всех фундаментальных циклов, порождаемых данным деревом, найдём характеристические векторы.

Всего в графе существует $12 - 7 + 1 = 6$ фундаментальных (базисных) циклов, т.к. мы имеем всего 12 дуг и 7 вершин в исходном графе.

Построим множество $\{\delta^k(\tau, \rho), (\tau, \rho)^k \in U^k \setminus U_T^k\}$ характеристических векторов относительно выбранного покрывающего дерева.

Соответствующая матрица базисных циклов будет иметь следующий вид:

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} (1,7) & (2,3) & (2,6) & (3,1) & (3,6) & (4,2) & (4,7) & (5,2) & (5,3) & (6,1) & (6,4) & (7,5) \end{matrix} \\ \begin{matrix} C(1,7) \\ C(3,6) \\ C(4,7) \\ C(5,3) \\ C(6,1) \\ C(6,4) \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}. \quad (1)$$

Вышеуказанная таблица может быть использована для определения базисных векторов (т.е. характеристических векторов базисных циклов) графа №3.

Пусть $C = \{(1, 7), (7, 5), (5, 3), (3, 1)\}$ — некоторый цикл в нашем графе №3. Тогда он может быть представлен в виде линейной комбинации базисных векторов.

Таблица 1. Характеристические векторы базисных циклов относительно U_T и характеристический вектор цикла C

(i, j)	$\delta_{ij}(1, 7)$	$\delta_{ij}(3, 6)$	$\delta_{ij}(4, 7)$	$\delta_{ij}(5, 3)$	$\delta_{ij}(6, 1)$	$\delta_{ij}(6, 4)$	$\delta_{ij}(C)$
$(1, 7)$	1	0	0	0	0	0	1
$(2, 3)$	1	1	0	-1	-1	0	0
$(2, 6)$	0	-1	0	0	1	1	0
$(3, 1)$	1	0	0	0	-1	0	1
$(3, 6)$	0	1	0	0	0	0	0
$(4, 2)$	0	0	-1	0	0	1	0
$(4, 7)$	0	0	1	0	0	0	0
$(5, 2)$	1	0	1	-1	0	0	0
$(5, 3)$	0	0	0	1	0	0	1
$(6, 1)$	0	0	0	0	1	0	0
$(6, 4)$	0	0	0	0	0	1	0
$(7, 5)$	1	0	0	0	0	0	1

$$\delta(C) = \delta_{1,7}(C)\delta(1, 7) + \delta_{3,6}(C)\delta(3, 6) + \delta_{4,7}(C)\delta(4, 7) + \delta_{5,3}(C)\delta(5, 3) + \delta_{6,1}(C)\delta(6, 1) +$$

$$+\delta_{6,4}(C)\delta(6,4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальные или базисные разрезы

Построим характеристические векторы базисных разрезов. Характеристический вектор произвольного разреза $CC(I')$ может быть представлен в виде линейной комбинации базисных разрезов, где $I' = \{1, 5, 6, 7\}$:

$$\begin{aligned} CC^+(I') &= \{(5, 2), (5, 3), (6, 4)\}, \\ CC^-(I') &= \{(2, 6), (3, 1), (3, 6), (4, 7)\}, \\ CC(I') &= \{(5, 2), (5, 3), (6, 4), -(2, 6), -(3, 1), -(3, 6), -(4, 7)\}. \end{aligned}$$

Таблица 2. Характеристические векторы относительно U_T

(i, j)	$\tilde{\delta}_{ij}(2, 3)$	$\tilde{\delta}_{ij}(2, 6)$	$\tilde{\delta}_{ij}(3, 1)$	$\tilde{\delta}_{ij}(4, 2)$	$\tilde{\delta}_{ij}(5, 2)$	$\tilde{\delta}_{ij}(7, 5)$	$\tilde{\delta}_{ij}(CC(I'))$
(1, 7)	-1	0	-1	0	-1	-1	0
(2, 3)	1	0	0	0	0	0	0
(2, 6)	0	1	0	0	0	0	-1
(3, 1)	0	0	1	0	0	0	-1
(3, 6)	-1	1	0	0	0	0	-1
(4, 2)	0	0	0	1	0	0	0
(4, 7)	0	0	0	1	-1	-1	-1
(5, 2)	0	0	0	0	1	0	1
(5, 3)	1	0	0	0	1	0	1
(6, 1)	1	-1	1	0	0	0	0
(6, 4)	0	-1	0	-1	0	0	1
(7, 5)	0	0	0	0	0	1	0

Тогда вектор разреза:

$$\begin{aligned}
\tilde{\delta}(CC(I')) &= \tilde{\delta}_{2,3}(CC(I'))\tilde{\delta}(2,3) + \tilde{\delta}_{2,6}(CC(I'))\tilde{\delta}(2,6) + \\
&+ \tilde{\delta}_{3,1}(CC(I'))\tilde{\delta}(3,1) + \tilde{\delta}_{4,2}(CC(I'))\tilde{\delta}(4,2) + \\
&+ \tilde{\delta}_{5,2}(CC(I'))\tilde{\delta}(5,2) + \tilde{\delta}_{7,5}(CC(I'))\tilde{\delta}(7,5) = \\
&= - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Поток в сети

В качестве источника возьмём вершину 1, а в качестве стока возьмём вершину 7. Тогда математическая модель потока будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
x_{1,7} - x_{3,1} - x_{6,1} &= -1, \\
x_{2,3} + x_{2,6} - x_{4,2} - x_{5,2} &= 2, \\
x_{3,1} + x_{3,6} - x_{2,3} - x_{5,3} &= 3, \\
x_{4,2} + x_{4,7} - x_{6,4} &= 4, \\
x_{5,2} + x_{5,3} - x_{7,5} &= 5, \\
x_{6,1} + x_{6,4} - x_{2,6} - x_{3,6} &= -6, \\
x_{7,5} - x_{1,7} - x_{4,7} &= -7.
\end{aligned}$$

Корневое дерево

Алгоритм 1 Процедура нахождения узлов поддеревы с корнем в узле i

```

 $k \leftarrow \text{depth}[i]$ 
 $j \leftarrow \text{thread}[i]$ 
while  $\text{depth}[j] > k$  do
     $j \leftarrow \text{thread}[j]$ 
end while

```

На рисунке 3 изображено корневое дерево графа №3 с корнем в узле 1.

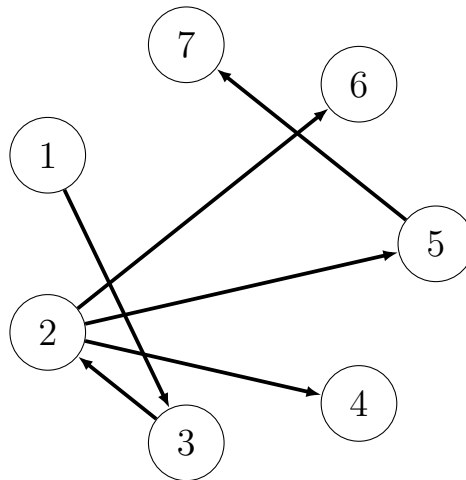


Рис. 3. Корневое дерево G_0 графа №3 с корнем в узле 1

Таблица 3. - списковые структуры для дерева G_0

Структура / Узел i	1	2	3	4	5	6	7
$pred = \{pred[i], i = \overline{1, V_0 } \}$	-1	3	1	2	2	2	5
$depth = \{depth[i], i = \overline{1, V_0 } \}$	0	2	1	3	3	3	4
$thread = \{thread[i], i = \overline{1, V_0 } \}$	3	4	2	5	7	1	6