第2章

2.1 測定演算子とPOVM

2.2.1. 射影測定

$|\psi\rangle$ …量子状態

$\hat{A} = \sum_k \alpha_k \hat{P}_k$ …物理量

$\hat{A}$のk番目の固有値

α_kに対応する固有空間への射影演算子

$\hat{P} = |k\rangle\langle k|$, $\hat{A}|k\rangle = \alpha_k|k\rangle$

$\hat{P}_k$は射影演算子

$$\Longrightarrow \begin{cases} \cdot\ \hat{P}_k^2 = \hat{P}_k & (1.11) \\ \cdot\ \sum_k \hat{P}_k = \hat{1}_S & (1.12) \end{cases}$$

← 完全性から

$\hat{1} = \sum_k |k\rangle\langle k| = \sum_k \hat{P}_k$ □

・α_kが得られる確率 $p(k)$

$$p(k) = |\langle k|\psi\rangle|^2 \qquad |\psi\rangle = \sum_k c_k|k\rangle,\ c_k = \langle k|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|k\rangle\langle k|\psi\rangle$$

$$= \langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle$$ ← ボルンの確率規則 (1.13)

・$|\psi\rangle$を$\hat{A}$で測定しα_kが得られた後の状態 $|\psi_k'\rangle$

$$|\psi_k'\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(k)}}\hat{P}_k|\psi\rangle \qquad (2.1)$$

〈射影公理〉
仮設

特に…

- α_kの固有空間が1次元
- $\hat{P}_k = |k\rangle\langle k|$

$$|\psi_k'\rangle = |k\rangle \qquad (2.3)$$

(射影測定後の状態ベクトル) = (測定結果に対する固有ベクトル)

$|\psi_k'\rangle$　　α_k　　$|k\rangle$

確率 q_i で状態が $|\psi_i\rangle$ $\longrightarrow$ $\hat{\rho} = \sum_i q_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$

確率	q_1	q_2	$\cdots$	q_n	$\cdots$
状態	$\|\psi_1\rangle$	$\|\psi_2\rangle$		$\|\psi_n\rangle$	$\cdots$

$$\left[\begin{array}{l} \hat{\rho} = \sum_i q_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \quad \cdots \text{量子状態} \\ \hat{A} = \sum_k \alpha_k \hat{P}_k \quad \cdots \text{物理量} \end{array}\right]$$

- 測定結果 α_k を~~与える~~得る確率 $p(k)$

$$p(k) = \sum_i q_i \langle\psi_i|\hat{P}_k|\psi_i\rangle$$

q_i：状態が $|\psi_i\rangle$ である確率

$\langle\psi_i|\hat{P}_k|\psi_i\rangle$：各状態 $|\psi_i\rangle$ を $\hat{A}$ で観測して α_k が得られる確率 (Born's rule)

$$= \sum_i q_i \langle\psi_i|\hat{P}_k \hat{1}|\psi_i\rangle$$

← 変!

$\{|l\rangle\}$ … 正規直交基底

$$= \sum_i q_i \langle\psi_i|\hat{P}_k \sum_l |l\rangle\langle l|\psi_i\rangle$$

$$= \sum_{i,l} \langle l|q_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\hat{P}_k|l\rangle$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\sum_i q_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \hat{P}_k\right] \quad (1.74)$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\hat{\rho}\hat{P}_k\right] \quad (1.$$

$$
\begin{aligned}
p(k) &= \sum_i q_i \langle \psi_i | \hat{P}_k | \psi_i \rangle \\
&= \sum_i q_i \langle \psi_i | \hat{1} \hat{P}_k | \psi_i \rangle \\
&= \sum_i q_i \langle \psi_i | \sum_l | l \rangle \langle l | \hat{P}_k | \psi_i \rangle \\
&= \sum_{i\,l} \langle l | \hat{P}_k | \psi_i \rangle \langle \psi_i | q_i | l \rangle \\
&\cancel{= \sum_i \mathrm{Tr}\left[\sum_r \hat{P}_k q_i \right.} \qquad (1.74) \\
&= \mathrm{Tr}\left[\hat{P}_k \sum_i q_i | \psi_i \rangle \langle \psi_i | \right] \\
&= \mathrm{Tr}\left[\hat{P}_k \hat{\rho} \right] \qquad (1.76)
\end{aligned}
$$

・測定後の状態 $\hat{\rho}'_k$

$$
|\psi'_k\rangle = \frac{1}{\sqrt{p(k)}} \hat{P}_k |\psi\rangle \qquad (2.1)
$$

$$
\hat{\rho} \xrightarrow[\text{obtain } \alpha_k]{\mathcal{A}} \hat{\rho}'_k = \sum_i q_i |\psi'_{ik}\rangle\langle\psi'_{ik}|
$$

射影公理

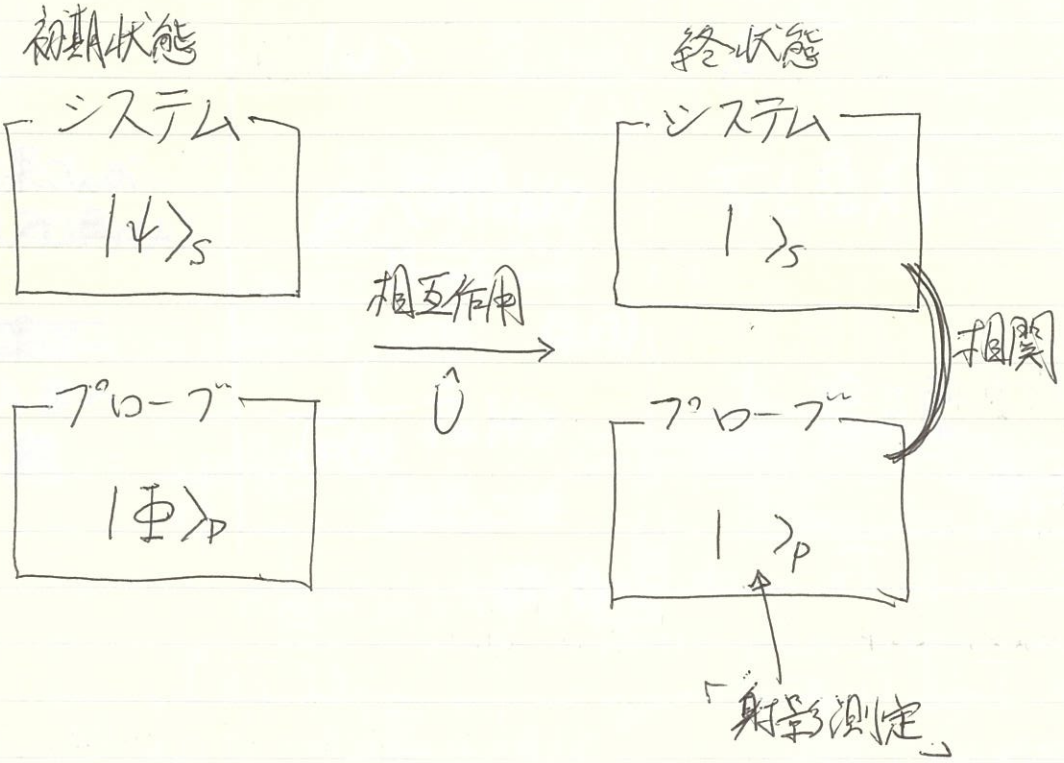
$$
\hat{P}_k^\dagger = \hat{P}_k
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i q_i \frac{1}{\sqrt{p(k)}} \hat{P}_k |\psi_i\rangle \frac{1}{\sqrt{p(k)}} \langle \psi_i | \hat{P}_k \\
&= \frac{1}{p(k)} \hat{P}_k \hat{\rho} \hat{P}_k \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

○ まとめ.

状態	$\lvert\psi\rangle$	$\hat{\rho}$
測定結果α_kが得られる確率$p(k)$	$\langle\psi\lvert\hat{P}_k\rvert\psi\rangle$ Born's rule (1.13)	$\mathrm{Tr}[\hat{P}_k\hat{\rho}]$
~~測定結果α~~ 測定した後の状態	$\frac{1}{\sqrt{p(k)}}\hat{P}_k\lvert\psi\rangle$ 射影公理 (2.1)	$\frac{1}{p(k)}\hat{P}_k\hat{\rho}\hat{P}_k$ (2.5)

2.1.2 間接測定モデル：簡単な場合



「射影測定」

関接的にシステムの状態を測定する。

ex. システム…原子

プローブ…レーザー光

○初期状態

システム:

$$|\psi\rangle_S = \sum_k c_k \underbrace{|\psi_k\rangle_S}_{} \qquad (2.7)$$

基底 $\{|\psi_k\rangle_S\}$

プローブ:

$$|\Phi\rangle_P$$

全系

$$|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P$$

○相互作用

$$|\psi_k\rangle_S|\Phi\rangle_P \xrightarrow{\hat{U}} |\psi_k\rangle_S|\Phi_k\rangle$$

$\hat{U}$によってプローブの状態がシステムの状態と1vs1に対応!

○終状態

$$\hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P = \sum_k c_k \hat{U}|\psi_k\rangle_S|\Phi\rangle_P \qquad (2.8)$$

$$= \underbrace{\sum_k c_k |\psi_k\rangle_S|\Phi_k\rangle_P}_{\text{entangled state.}} \qquad (2.9)$$

○ プローブの基底 $\{|\Phi_k\rangle_P\}$ を測定 → Born's rule

状態 $\hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P = \sum_k c_k |\psi_k\rangle_S |\Phi_k\rangle_P$ (2.9)

↓ 測定 → Born's rule $\langle\psi|\hat{P}_k|\psi\rangle$

$$p(k) = \langle\psi|_S\langle\Phi|_P \hat{U}^\dagger \; |\Phi_k\rangle_P\langle\Phi_k|_P \; \hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P$$

$$= \sum_{k'} c_{k'}^* \langle\psi_{k'}|_S\langle\Phi_{k'}|_P \; |\Phi_k\rangle_P\langle\Phi_k|_P \sum_{k''} c_{k''}|\psi_{k''}\rangle_S|\Phi_{k''}\rangle_P$$

$$= \left(\sum_{k'} c_{k'}^* \langle\psi_{k'}|_S\langle\Phi_{k'}|_P|\Phi_k\rangle_P\right)\left(\sum_{k''} c_{k''}|\psi_{k''}\rangle_S\langle\Phi_k|_P|\Phi_{k''}\rangle_P\right)$$

$$= \left(\sum_{k'} c_{k'}|\psi_{k'}\rangle_S\langle\Phi_k|_P|\Phi_{k'}\rangle_P\right)^\dagger\left(\sum_{k'} c_{k'}|\psi_{k'}\rangle_S\langle\Phi_k|_P|\Phi_{k'}\rangle_P\right)$$

$$= \left\|\sum_{k'} c_{k'}|\psi_{k'}\rangle_S \underbrace{\langle\Phi_k|_P|\Phi_{k'}\rangle_P}_{\text{直交}:\,\delta_{kk'}}\right\|^2$$

$$= \left\|\langle\Phi_k|_P \sum_{k'} c_{k'}|\psi_{k'}\rangle_S|\Phi_{k'}\rangle_P\right\|^2 \qquad (2.10)$$

$$= \left\|\sum_{k'} c_{k'}|\psi_{k'}\rangle_S \,\delta_{kk'}\right\|^2$$

$$= \left\|c_k|\psi_k\rangle_S\right\|^2$$

$$= |c_k|^2 .$$

cf. システムに対して測定 $|\psi\rangle_S = \sum_k c_k|\psi_k\rangle_S$

$|\psi\rangle_S$

$$p(k) = \langle\psi|_S|\psi_k\rangle_S\langle\psi_k|_S|\psi\rangle_S$$

$$= |c_k|^2 \longrightarrow \text{一致}$$

○ 測定後の状態 ― 射影公理

状態 $\hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P = \sum_k c_k |\psi_k\rangle_S |\Phi_k\rangle_P$

$\downarrow$ 測定 ― 射影公理 $\frac{1}{\sqrt{p(k)}}\hat{P}_k|\psi\rangle$

$\hat{1}_S \otimes |\Phi_k\rangle\langle\Phi_k|$

$$\frac{1}{\sqrt{p(k)}}\left(\hat{1}_S \otimes |\Phi_k\rangle_P\langle\Phi_k|_P\right)\hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p(k)}}\, |\Phi_k\rangle_P\langle\Phi_k|_P \sum_{k'} c_{k'}|\psi_{k'}\rangle_S |\Phi_{k'}\rangle_P$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p(k)}}\sum_{k'} c_{k'}|\psi_{k'}\rangle_S |\Phi_{k}\rangle_P \underbrace{\langle\Phi_k|_P|\Phi_{k'}\rangle_P}_{\text{直交}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p(k)}}\sum_{k'} c_{k'}|\psi_{k'}\rangle_S |\Phi_{k}\rangle_P \delta_{kk'}$$

$$= \underbrace{\frac{c_k}{\sqrt{p(k)}}}_{\eta}|\psi_k\rangle_S|\Phi_k\rangle_P.$$

$c_k = |c_k|e^{i\theta}$ とおく。 $c_k \in \mathbb{C}^1$ $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cancel{\frac{c_k}{|c_k|} = \begin{cases} 1 = e^{n\pi i} & c_k > 0 \\ -1 & c_k < 0 \end{cases}}$$

$$\frac{c_k}{|c_k|} = \frac{|c_k|e^{i\theta}}{|c_k|} = e^{i\theta}.$$

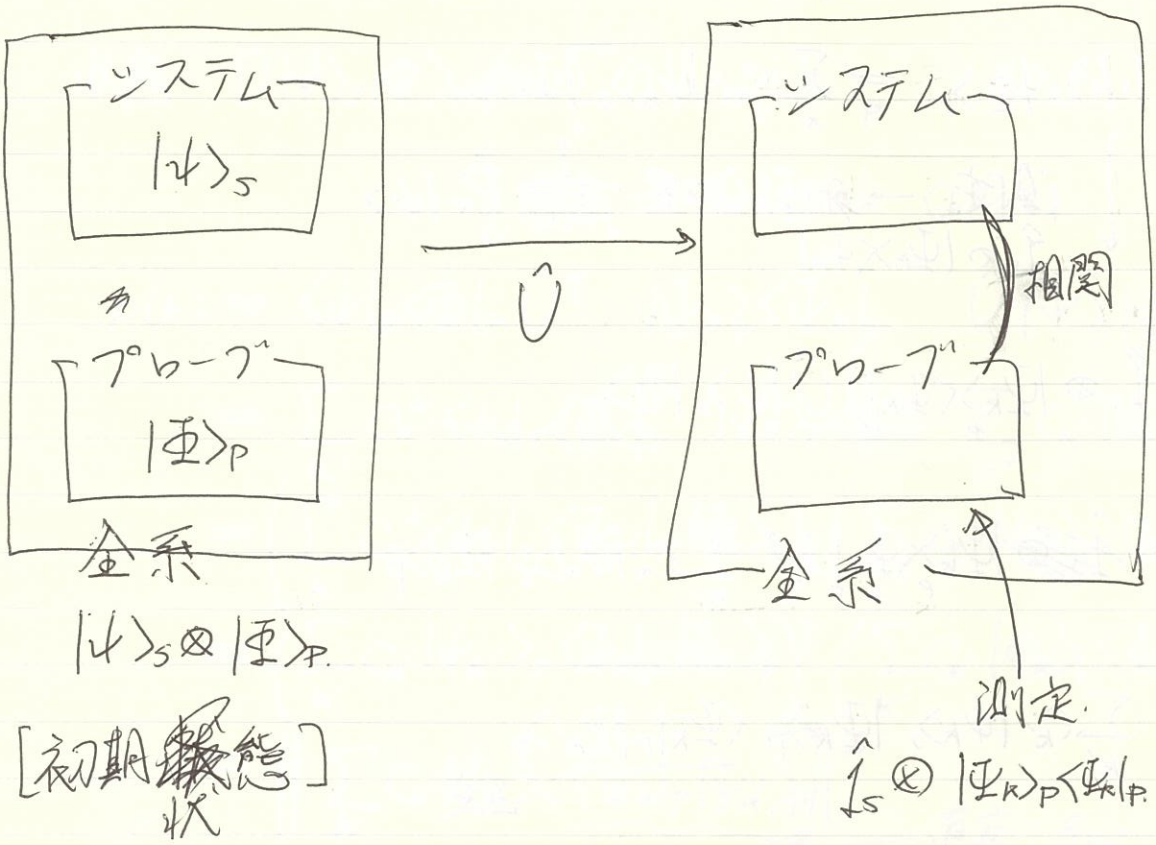
$$= \underbrace{e^{i\theta}}_{\text{global}}|\psi_k\rangle_S|\Phi_k\rangle_P$$

一致

cf. システム $|\psi\rangle_S$ の測定後の状態

$$\frac{1}{\sqrt{p(k)}}|\psi_k\rangle_S\langle\psi_k|\psi\rangle_S = \frac{c_k}{|c_k|}|\psi_k\rangle_S = e^{i\theta}|\psi_k\rangle_S$$

・測定に誤差がある場合



○ プローブに対してその基底 $\{|\Phi_k\rangle_P\}$ で射影測定を行い、その結果 k が得られる確率 $p(k)$

全系の終状態 $\hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P$

$|\Phi_k\rangle\langle\Phi_k|$ ↓ Born's rule

確率

$$p(k) = \langle\psi|_S\langle\Phi|_P \hat{U}^\dagger |\Phi_k\rangle_P\langle\Phi_k|_P \hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P$$

$$= \| \langle\Phi|_k \hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P \|^2 \qquad (2.12)$$

○ 測定後の状態

全系の測定直前の状態 $\hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P$

$\hat{1}_S \otimes |\Phi_k\rangle_P\langle\Phi_k|_P$ ↓ 射影公理 $\frac{1}{\sqrt{p(k)}}\hat{P}_k|\psi\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{p(k)}}|\Phi_k\rangle_P\langle\Phi_k|_P\hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P \qquad (2.13)$$

↓ 測定演算子

$$\hat{M}_k := \langle\Phi_k|_P\hat{U}|\Phi\rangle_P \qquad (2.14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{p(k)}}\hat{M}_k|\psi\rangle_S \otimes |\Phi_k\rangle_P \qquad (2.15)$$

○ 測定結果kを得る確率

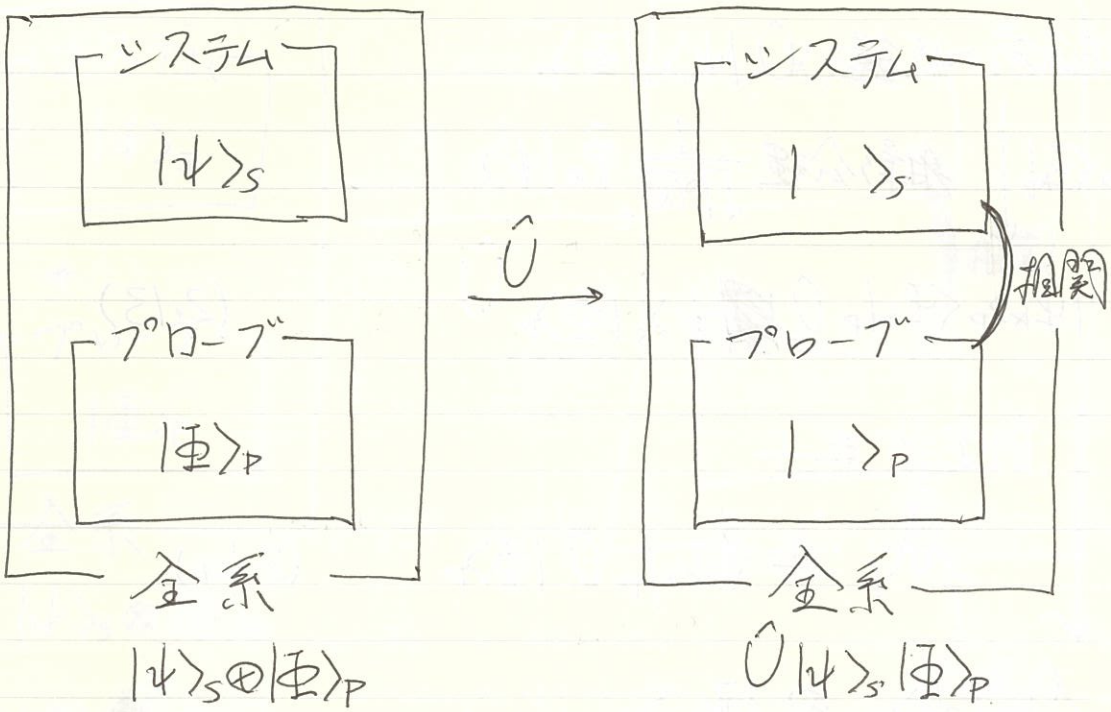
$$p(k) = \langle\psi|_S\langle\Phi|_P\hat{U}^\dagger|\Phi_k\rangle_P\langle\Phi_k|_P\hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P$$

$$= \langle\psi|_S\hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k|\psi\rangle_S \qquad \hat{E}_k = \hat{M}_k^\dagger\hat{M}_k \qquad (2.16)$$

$$= \langle\psi|_S\hat{E}_k|\psi\rangle_S \qquad (2.17)$$

POVM

○ まとめ.



・測定結果kを得る確率 $p(k)$

$$p(k) = \langle\psi|_S \underbrace{\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k}_{①} |\psi\rangle_S = \langle\psi|_S \underbrace{\hat{E}_k}_{②} |\psi\rangle_S \qquad (2.17)$$

・測定に伴うシステムの状態変化

$$|\psi\rangle_S \otimes |\Phi\rangle_P \xrightarrow[\text{時間発展}]{\hat{U}} \hat{U}|\psi\rangle_S|\Phi\rangle_P \xrightarrow[\text{測定}]{|\Phi\rangle_P\langle\Phi|_P} \frac{1}{\sqrt{p(k)}} \underbrace{\hat{M}_k}_{①} |\psi\rangle_S \otimes |\Phi\rangle_P$$

① Kraus 演算子で記述できる

② 確率は POVM で計算できる.

○ $\hat{M}_k$ と $\hat{E}_k$ の意味.

$$\hat{M}_k := \langle \Psi_k|_P \hat{U} |\Phi\rangle_P$$

・~~$\hat{E}_k$~~

・完全性条件

$$\sum_k \underbrace{\hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k}_{\hat{E}_k} = \sum_k \langle \Phi|_P \hat{U}^\dagger |\Psi_k\rangle_P \langle \Psi_k|_P \hat{U} |\Phi\rangle_P$$

$$= \langle \Phi|_P \hat{U}^\dagger \hat{U} |\Phi\rangle_P \quad \checkmark \quad \sum_k |\Psi_k\rangle_P \langle \Psi_k|_P = \hat{1}_P$$

$$\cancel{= \langle \Phi|_P |\Phi\rangle_P}$$

正規直交.

$$= \langle \Phi|_P \hat{1}_S \otimes \hat{1}_P |\Phi\rangle_P \quad \langle \Phi|_P \Phi\rangle_P = 1.$$

$$= \hat{1}_S \qquad (2.18)$$

つまり

$$\sum_k \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = \sum_k \hat{E}_k = \hat{1}_S \qquad (2.18), (2.19)$$

・測定結果を得る確率の和 = 1.

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle_S \langle\psi|_S$$

$$\sum_k p(k) \overset{(2.17)}{=} \sum_k \langle \psi|_S \hat{E}_k |\psi\rangle_S$$

$$\overset{(1.76)}{=} \sum_k \mathrm{Tr}[\hat{E}_k \hat{\rho}]$$

$$= \mathrm{Tr}\left[\sum_k \hat{E}_k \hat{\rho}\right]$$

$$\overset{(2.19)}{=} \mathrm{Tr}[\hat{\rho}]$$

$$\overset{(1.86)}{=} 1.$$

(2.19)は $\sum_k p(k) = 1$ を保証する.

○「誤差のない測定」と「射影測定」の違い.

仮定: 物理量 $\hat{A} = \sum_k \alpha_k \hat{P}_k$ を測定するために

間接測定を行った.

「システムとプローブを相互作用させ.
プローブに対して射影測定を行うこと.」

・誤差のない測定.

POVMに対する条件.

$\forall k$ について $\hat{E}_k = \hat{P}_k$ が成立する.

・射影測定

測定後の状態が測定結果に対する固有空間に射影されている.

Krauss演算子に対する条件

$\Longleftrightarrow \forall k \quad \hat{M}_k = \hat{P}_k$

$|\psi\rangle_s \propto \hat{M}_k|\psi\rangle_s = |\psi_k\rangle_s$

~~POVMに対する条件~~

$\forall k$ に対して $\hat{M}_k = \hat{P}_k$

$\Longrightarrow \forall k$ に対して $\hat{E}_k = \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k = \hat{P}_k^\dagger \hat{P}_k = \hat{P}_k^2 = \hat{P}_k$.

$\Longrightarrow$ 誤差のない測定.

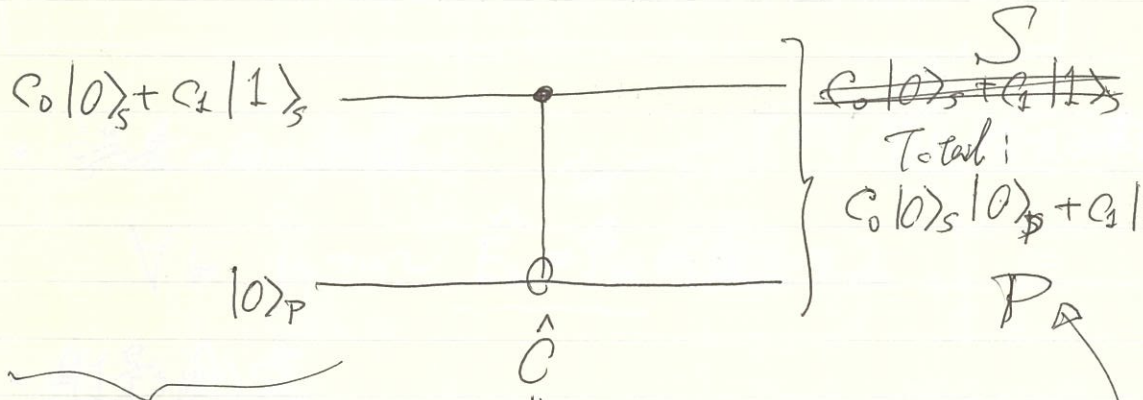
典型的な間接測定

○射影測定…　　$\hat{M}_k = \langle k|_P \hat{C} |\Phi\rangle_P$

$|\psi\rangle_S = c_0|0\rangle_S + c_1|1\rangle_S$　：システム

$|\Phi\rangle_P = |0\rangle_P$　：プローブ　の初期条件

C-NOT　：相互作用.



(2.22)

$$\hat{C} = |0\rangle_S\langle 0|_S \otimes \hat{1}_P + |1\rangle_S\langle 1|_S \otimes \hat{\sigma}_{x_P} \quad (2.21)$$

$c_0|0\rangle_S|0\rangle_P + c_1|1\rangle_S|0\rangle_P$

$\{|0\rangle, |1\rangle\}$

射影測定.

~~$|0\rangle\langle 0|, |1\rangle\langle 1|$~~

$$\hat{M}_k = \langle k|_P \hat{C} |\Phi\rangle_P$$

$$= \langle k|_P \left(|0\rangle_S\langle 0|_S \otimes \hat{1}_P + |1\rangle_S\langle 1|_S \otimes \hat{\sigma}_{x_P}\right) \underbrace{|0\rangle_P}_{\cancel{c_0|0\rangle_S + c_1|1\rangle_S}}$$

$$= |0\rangle_S\langle 0|_S \otimes \langle k|_P |0\rangle_P + |1\rangle_S\langle 1|_S \otimes \langle k|_P \underbrace{\hat{\sigma}_{x_P}|0\rangle_P}_{= |1\rangle_P}$$

- $k=0$　$\hat{M}_0 = |0\rangle_S\langle 0|_S = \hat{P}_{0,S}$
- $k=1$　$\hat{M}_1 = |1\rangle_S\langle 1|_S = \hat{P}_{1,S}$　　(2.23)

$$\hat{E}_0 = \hat{M}_0^\dagger \hat{M}_0 = \underbrace{|0\rangle_S\langle 0|_S}_{= \hat{P}_{0,S}}, \quad \hat{E}_1 = \hat{M}_1^\dagger \hat{M}_1 = \underbrace{|1\rangle_S\langle 1|_S}_{= \hat{P}_{1,S}}$$

$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ として.

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(1\ 0) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(0\ 1) = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$|0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(0\ 1) = \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

$$|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}(1\ 0) = \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$$

0 吸収型測定

・初期状態

システム: $c_0|0\rangle_s + c_1|1\rangle_s$

プローブ: $|0\rangle_p$

$$\begin{array}{c|c} |0\rangle\langle 0| & |1\rangle\langle 0| \\ \hline \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} & \\ \hline |0\rangle\langle 1| & |1\rangle\langle 1| \end{array}$$

・相互作用.

SWAP-gate: $|0\rangle_s|0\rangle_p \to |0\rangle_s|0\rangle_p$, $|1\rangle_s|0\rangle_p \to |0\rangle_s|1\rangle_p$ スワップ ~~ファップ~~

$\cancel{|0\rangle_s\langle 0|_s \otimes \hat{1}_p + |0\rangle_s\langle 1|_s \otimes |1\rangle_p\langle 0|_p}$

$$\hat{S} = |0\rangle_s\langle 0|_s \otimes |0\rangle_p\langle 0|_p + |1\rangle_s\langle 1|_s \otimes |1\rangle_p\langle 1|_p + |0\rangle_s\langle 1|_s \otimes |1\rangle_p\langle 0|_p + |1\rangle_s\langle 0|_s \otimes |0\rangle_p\langle 1|_p$$

・全系

$$(c_0|0\rangle_s + c_1|1\rangle_s)|0\rangle_p \xrightarrow{\hat{S}} \underline{c_0|0\rangle_s|0\rangle_p + c_1|1\rangle_s|1\rangle_p} \qquad (2.25)$$

$\{|0\rangle, |1\rangle\}$ measurement.

・trans op.

$$\hat{M}_k = \langle k|_p \hat{S}|0\rangle_p$$

$$= |0\rangle_s\langle 0|_s \underbrace{{}_p\langle k|0\rangle_p}_{\delta_{k0}} + |0\rangle_s\langle 1|_s \underbrace{{}_p\langle k|1\rangle_p}_{\delta_{k1}}$$

$$\hat{M}_0 = |0\rangle_s\langle 0|_s, \quad \underline{\hat{M}_1 = |0\rangle_s\langle 1|_s \neq \hat{P}_1}$$

$$= \hat{P}_0$$

→ 射影測定ではない.

・POVM

$$\hat{E}_0 = \hat{M}_0^\dagger \hat{M}_0 = |0\rangle_s\langle 0|_s = \hat{P}_0, \quad \hat{E}_1 = \hat{M}_1^\dagger \hat{M}_1 = |1\rangle\langle 0|0\rangle\langle 1| = |1\rangle\langle 1| = \hat{P}_1$$

→ 誤差のない測定.

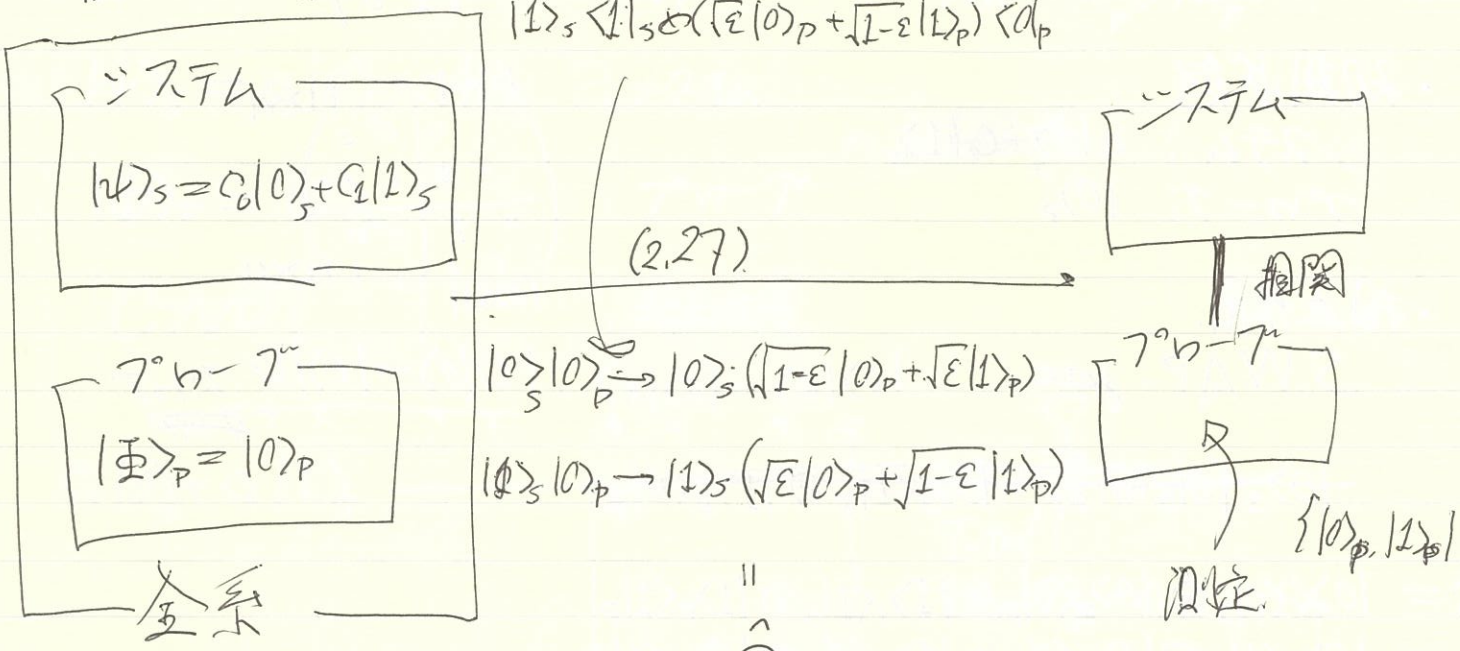
必ず真空状態で!

測定後 ~~$\hat{M}_k|\psi\rangle = |0\rangle$~~ $\hat{M}_k|\psi\rangle = c_1|0\rangle$ 「光子がプローブに吸収された」

○ 誤差のある測定

$|0\rangle_s\langle 0|_s \otimes (\sqrt{1-\varepsilon}|0\rangle_p + \sqrt{\varepsilon}|1\rangle_p)\langle 0|_p$

$|1\rangle_s\langle 1|_s \otimes (\sqrt{\varepsilon}|0\rangle_p + \sqrt{1-\varepsilon}|1\rangle_p)\langle 0|_p$



$(c_0|0\rangle_s + c_1|1\rangle_s)|0\rangle_p$

・終状態

$$(c_0\sqrt{1-\varepsilon}|0\rangle_s + c_1\sqrt{\varepsilon}|1\rangle_s)|0\rangle_p + (c_0\sqrt{\varepsilon}|0\rangle_s + c_1\sqrt{1-\varepsilon}|1\rangle_s)|1\rangle_p \qquad (2.28)$$

・Kraus op.

$$\hat{M}_0 = \langle 0|_p \hat{O} |0\rangle_p = \sqrt{1-\varepsilon}|0\rangle_s\langle 0|_s + \sqrt{\varepsilon}|1\rangle_s\langle 1|_s \neq \hat{P}_0$$

$$\hat{M}_1 = \langle 1|_p \hat{O} |0\rangle_p = \sqrt{\varepsilon}|0\rangle_s\langle 0|_s + \sqrt{1-\varepsilon}|1\rangle_s\langle 1|_s \neq \hat{P}_1 \qquad (2.29)$$

射影測定でない

・POVM

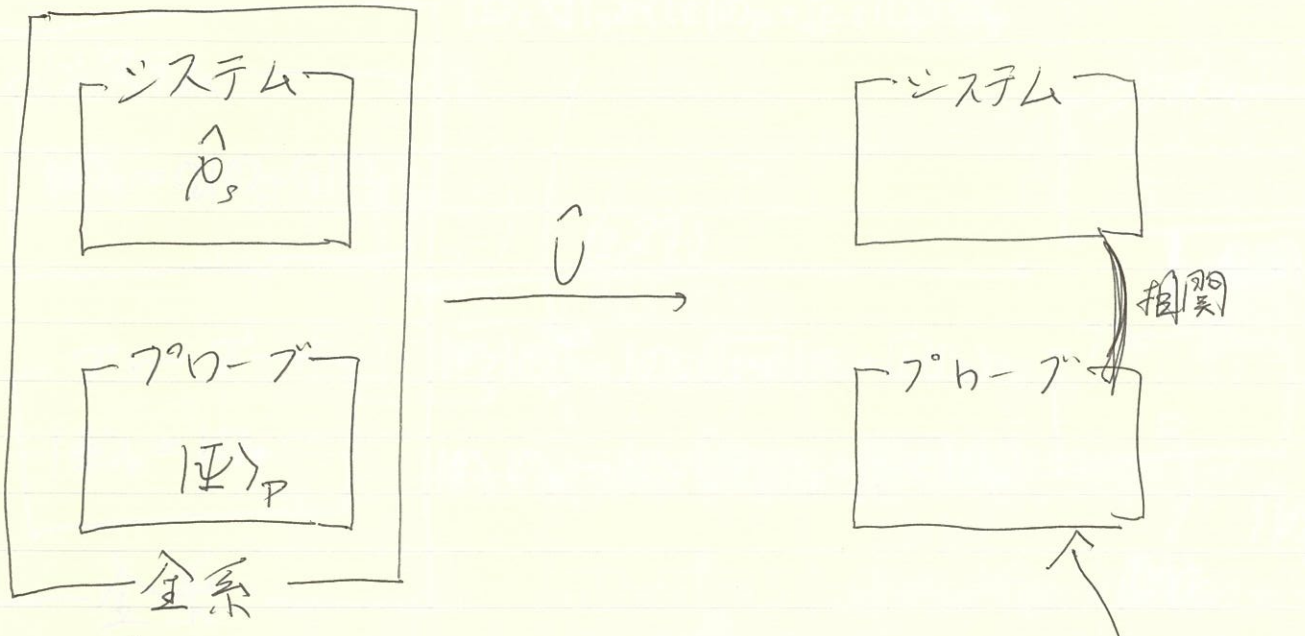
クロスタームがキャンセルされる

$$\hat{E}_0 = \hat{M}_0^\dagger \hat{M}_0 = \cancel{(1-\varepsilon)}(1-\varepsilon)|0\rangle_s\langle 0|_s + \varepsilon|1\rangle_s\langle 1|_s \neq \hat{P}_0$$

$$\hat{E}_1 = \hat{M}_1^\dagger \hat{M}_1 = \varepsilon|0\rangle_s\langle 0|_s + (1-\varepsilon)|1\rangle_s\langle 1|_s \neq \hat{P}_1 \qquad (2.30)$$

誤差のある測定

密度演算子による表示



$$\hat{\rho}_s \otimes |\Phi\rangle_p = \sum_i q_i |\phi_i\rangle_p \langle\phi_i|_p$$

・~~耕~~

・測定結果kを得る確率$p(k)$

(cf. 初期状態が $|\psi\rangle_s \otimes |\Phi\rangle_p$ の場合.

$$p(k) = \langle\psi|_s \hat{M}_k^\dagger \hat{M}_k |\psi\rangle_s = \langle\psi|_s \hat{E}_k |\psi\rangle_s \qquad (2.17)$$)

$$\hat{\rho}_p = \sum_i \underbrace{q_i}_{\text{状態}|\phi_i\rangle\text{となる確率が}q_i} \underbrace{|\phi_i\rangle_p \langle\phi_i|_p}_{\text{状態}|\phi_i\rangle_p\text{に式(2.17)と同様の操作を適用する.}}$$

$$p(k) \overset{(2.17)}{=} \sum_i q_i \langle \phi_i | \hat{E}_k | \phi_i \rangle_p$$

困ったら $\hat{1}$ を挿入

$$= \mathrm{Tr}[\hat{E}_k \hat{\rho}] \qquad (2.31)$$

・測定後の状態 $\hat{\rho}_k'$

$$\left(\text{cf.} \quad |\psi\rangle_s \longrightarrow |\psi_k'\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{p(k)}} \hat{M}_k |\psi\rangle_s \qquad (2.15) \right)$$

$$\hat{\rho} = \sum_i q_i |\phi_i\rangle_p \langle \phi_i|_p$$

$$\downarrow$$

$$\hat{\rho}_k' = \sum_i q_i |\phi_{ik}'\rangle_p \langle \phi_{ik}'|_p$$

$$= \sum_i q_i \frac{1}{\sqrt{p(k)}} \hat{M}_k |\phi_i\rangle_p \frac{1}{\sqrt{p(k)}} \langle \phi_i|_p \hat{M}^\dagger$$

$$= \frac{1}{p(k)} \hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}^\dagger \qquad (2.32)$$

・アンサンブル平均

測定後のシステムの状態

$$\hat{\rho}_k' = \frac{1}{p(k)} \hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger \qquad (2.32)$$

測定結果kを得る確率

$p(k)$

$$\downarrow \sum_k$$

アンサンブル平均したシステムの状態

$$\hat{\rho}_s' = \sum_k p(k) \hat{\rho}_k' = \underbrace{\sum_k \hat{M}_k \hat{\rho} \hat{M}_k^\dagger}_{\langle \rho' \rangle} \qquad (2.33)$$

1.3節 (1.122)に等しい

システムとプローブが相互作用した後
プローブに対して射影測定を
行わずに
プローブの部分トレースをとった状態
つまり システムの終状態 (1.119)

・Krans op. の非一意性

$\{|\Phi_k'\rangle\}$: プローブに対して射影測定する基底

$\hat{M}_k'$: 対応するKrans op.

$\| $

$\langle \Phi_k' | \hat{U} | \Phi \rangle$

$\updownarrow$

$\hat{M}_k = \langle \Phi_k | \hat{U} | \Phi \rangle$: $\{|\Phi_k\rangle\}$ で射影測定に対応するKrans op.

$$\sum_k \hat{M}_k' \hat{\rho}_s \hat{M}_k'^{\dagger}$$

$$= \sum_k \langle \Phi_k' |_p \hat{U} | \Phi \rangle_p \hat{\rho}_s \langle \Phi |_p \hat{U}^{\dagger} | \Phi_k' \rangle_p$$

$$= \sum_k \langle \Phi_k' |_p \hat{U} \big(\hat{\rho}_s \otimes \underbrace{|\Phi\rangle_p \langle \Phi|_p}_{\hat{\rho}_p} \big) \hat{U}^{\dagger} | \Phi_k' \rangle_p$$

時間発展後の全系の状態

$$\hat{\rho}' = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^{\dagger} = \hat{U} (\hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p) \hat{U}^{\dagger}$$

$$= \mathrm{Tr}_{\text{環境}p} [\hat{\rho}']$$

今度は $\{|\Phi_k\rangle_p\}$ を基底に選んで

$$= \sum_k \langle \Phi_k |_p \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^{\dagger} | \Phi_k \rangle_p$$

$$= \sum_k \hat{M}_k \hat{\rho}_s \hat{M}_k^{\dagger}$$

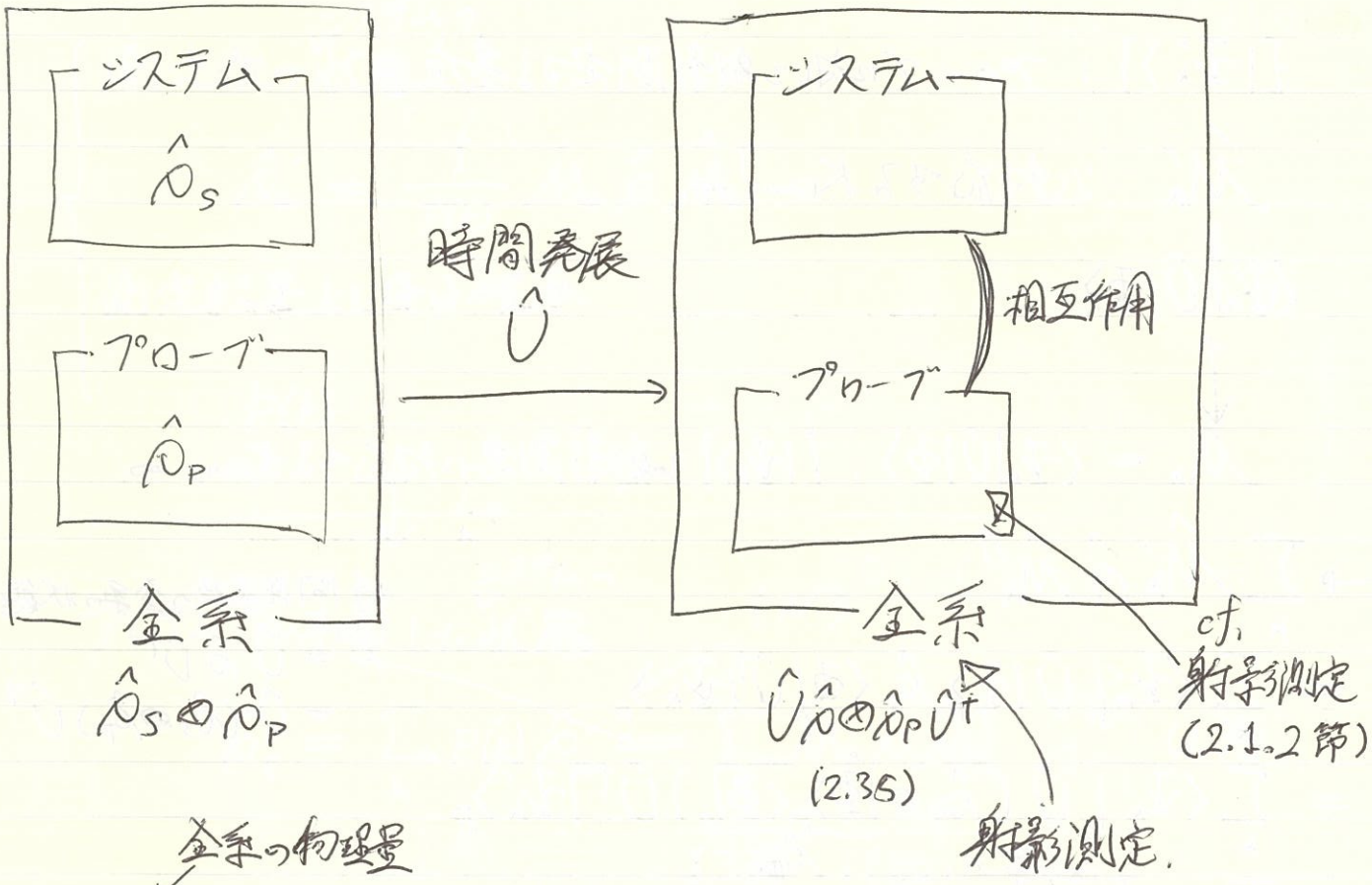
アンサンブル平均のレベルでは同じ時間発展 $\hat{\rho}_s \xrightarrow{\hat{U}} \hat{\rho}_s'$ を与える

つまり

$$\hat{\rho}_s' = \sum_k \hat{M}_k \hat{\rho}_s \hat{M}_k^{\dagger} = \sum_k \hat{M}_k' \hat{\rho}_s \hat{M}_k'^{\dagger}$$

「Krans op. の非一意性」 $\overset{\text{対応}}{\longleftrightarrow}$ 「プローブを射影測定するのに使う基底の任意性」

2.1.3. 間接測定モデルの一般化



全系の物理量

- $\hat{R} = \sum_k r_k \hat{P}_k^R$ ：$\hat{R}$のスペクトル分解

$\hat{R}$のk番目の固有値（非縮退）

r_kに対応する固有空間への射影演算子.

- $\hat{\rho}_P = \sum_l q_l |\Phi_l\rangle\langle\Phi_l|$ ：$\hat{\rho}_S$のスペクトル分解

- $\{|\Phi_m\rangle\}$ ：プローブの任意の基底.

○ 測定結果 k が得られる確率

$$\hat{\rho}_s = \sum_m p_m |\phi_m\rangle_s \langle\phi_m|_s$$ とする.

このとき全系は.

$$\hat{\rho} = \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p = \sum_{ml} p_m q_l |\phi_m\rangle_s |\Phi_l\rangle_p \langle\phi_m|_s \langle\Phi_l|_p .$$

$\hat{U}$ で時間発展した後の全系の状態は.

$$\hat{\rho}' = \hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger = \sum_{ml} \underbrace{p_m q_l \hat{U}|\phi_m\rangle_s |\Phi_l\rangle_p}_{\text{状態 } \hat{U}|\phi_m\rangle_s|\Phi_l\rangle \text{ が 確率 } p_m q_l \text{ で実現する.}} \langle\phi_m|_s \langle\Phi_l|_p \hat{U}^\dagger .$$

Born's rule より.
測定結果 k が得られる確率は

$$p(k) = \sum_{ml} p_m q_l \left(\langle\phi_m|_s \langle\Phi_l|_p \hat{U}^\dagger\right) \hat{P}_k^R \left(\hat{U}|\phi_m\rangle_s |\Phi_l\rangle_p\right)$$

$$= \sum_{ml} p_m q_l \langle\phi_m|_s \langle\Phi_l|_p \hat{U}^\dagger \underbrace{\hat{1}_s \otimes \hat{1}_p}\, \hat{P}_k^R \hat{U}|\phi_m\rangle_s |\Phi_l\rangle_p$$

$$= \sum_{ml} p_m q_l \langle\phi_m|_s \langle\Phi_l|_p \hat{U}^\dagger \sum_{m'l'} |\phi'_{m'}\rangle_s |\Phi'_{l'}\rangle_p \langle\phi'_{m'}|_s \langle\Phi'_{l'}|_p \hat{P}_k^R \hat{U}|\phi_m\rangle_s |\Phi_l\rangle_p$$

$$= \sum_{m'l'} |\phi'_{m'}\rangle_s |\Phi'_{l'}\rangle_p \hat{P}_k^R \hat{U} \left(\sum_m p_m |\phi_m\rangle_s \langle\phi_m|_s \otimes \sum_l q_l |\Phi_l\rangle_p \langle\Phi_l|_p\right) \hat{U}^\dagger \langle\phi'_{m'}|_s \langle\Phi'_{l'}|_p$$

$$= \underline{\mathrm{Tr}_{sp}\left[\hat{P}_k^R \hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \hat{U}^\dagger\right]} \quad (2.37)$$

○測定後の全系の状態

$$\hat{\rho}' = \hat{U}\,\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P\,\hat{U}^\dagger$$

$$\Big\downarrow \text{射影公理} \quad (2.5)$$

$$\cancel{\hat{\rho}'_k = \frac{1}{p(k)}\,\mathrm{Tr}_{SP}\left[\hat{P}_k^R\,\hat{U}\,\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P\,\hat{U}^\dagger\right]} \quad \cancel{(2.38)}$$

$$\cancel{\hat{\rho}'_k = \frac{1}{p(k)}\,\mathrm{Tr}}$$

$$\hat{\rho}'_k = \frac{1}{p(k)}\,\hat{P}_k^R\,\hat{U}\,\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P\,\hat{U}^\dagger\,\hat{P}_k^R \quad (2.38)$$

○測定後のシステムの状態

$$\Big\downarrow \text{部分トレース } \mathrm{Tr}_P$$

$$\hat{\rho}'_{k,S} = \frac{1}{p(k)}\,\mathrm{Tr}_P\left[\hat{P}_k^R\,\hat{U}\,\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P\,\hat{U}^\dagger\,\hat{P}_k^R\right] \quad (2.39)$$

○ (2.39) の書き換え

$$\hat{\rho}'_{k,s} = \frac{1}{p(k)} \mathrm{Tr}_p \left[\hat{P}^R_k \hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \hat{\rho}_p \hat{U}^\dagger \hat{P}^R_k \right]$$

$$= \frac{1}{p(k)} \sum_m \langle \Psi_m | \hat{P}^R_k \hat{U} \hat{\rho}_s \otimes \sum_l q_l |\Phi_l\rangle_p \langle \Phi_l|_p \hat{U}^\dagger \hat{P}^R_k |\Psi_m\rangle_p$$

$$= \frac{1}{p(k)} \sum_{lm} q_l \langle \Psi_m|_p \hat{P}^R_k \hat{U} \hat{\rho}_s \otimes |\Phi_l\rangle_p \langle \Phi_l|_p \hat{U}^\dagger \hat{P}^R_k |\Psi_m\rangle_p$$

$$= \frac{1}{p(k)} \sum_{lm} q_l \underbrace{\langle \Psi_m|_p \hat{P}^R_k \hat{U} |\Phi_l\rangle_p}_{} \hat{\rho}_s \underbrace{\langle \Phi_l|_p \hat{U}^\dagger \hat{P}^R_k |\Psi_m\rangle_p}_{}$$

$$\hat{M}_{ki} = \sqrt{q_l} \langle \Psi_m|_p \hat{P}^R_k \hat{U} |\Phi_l\rangle_p \qquad (2.41)$$

システムに作用する Kraus op. $\underline{(i = (l, m))}$

$$= \frac{1}{p(k)} \sum_i \hat{M}_{ki} \hat{\rho}_s \hat{M}^\dagger_{ki} \qquad (2.42)$$

量子測定の Kraus 表現. cf. (1.122)

読み出しされなかった情報に対してアンサンブル平均をとる.

「$\hat{R}$ の射影測定では情報を全てもれなく読みだすことのできない」ことを表す.

○ 測定後の状態のすべての測定結果に関するアンサンブル平均

$$\hat{\rho}'_s = \sum_k p(k) \hat{\rho}'_{k,s} = \sum_{ki} \hat{M}_{ki} \rho_s \hat{M}_{ki} \qquad (2.43)$$

○ (2.37)の書き直し

$$\cancel{p(k) = \mathrm{Tr}_{SP}\left[\hat{P}_k^R\, \hat{U}\, \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P\, \hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R\right]}$$

(1.110)

$$\cancel{= \mathrm{Tr}_S\left[\mathrm{Tr}_P\left[\hat{P}_k^P\, \hat{U}\, \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P\, \hat{U}^\dagger \hat{P}_k^P\right]\right]}$$

$$\cancel{= \mathrm{Tr}_S\left[\sum_m \langle \Psi_m |\, \hat{P}_k^P\, \hat{U}\, \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P\, \hat{U}^\dagger\, | \Psi_m \rangle\right]}$$

$$p(k) = \mathrm{Tr}_{SP}\left[\hat{P}_k^R\, \hat{U}\, \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P\, \hat{U}^\dagger\right]$$

射影op.の冪等条件 $(\hat{P}_k^R)^2 = \hat{P}_k^R$

$$= \mathrm{Tr}_{SP}\left[(\hat{P}_k^R)^2\, \hat{U}\, \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P\, \hat{U}^\dagger\right]$$

traceの巡回性 $\mathrm{Tr}[\hat{A}\hat{B}] = \mathrm{Tr}[\hat{B}\hat{A}]$

$$= \mathrm{Tr}_{SP}\left[\hat{P}_k^R\, \hat{U}\, \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P\, \hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R\right]$$

(1.110)

$$= \mathrm{Tr}_S\left[\mathrm{Tr}_P\left[\hat{P}_k^R\, \hat{U}\, \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P\, \hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R\right]\right]$$

(2.41)

$$= \mathrm{Tr}_S\left[\sum_i \hat{M}_{ki}\, \hat{\rho}_S\, \hat{M}_{ki}^\dagger\right]$$

トレースの巡回性

$$= \mathrm{Tr}_S\left[\underbrace{\left(\sum_i \hat{M}_{ki}^\dagger\, \hat{M}_{ki}\right)}_{\hat{E}_k \;=\; \text{POVM } \{\hat{E}_k\}\ (2.45)} \hat{\rho}_S\right]$$

$$= \mathrm{Tr}_S\left[\hat{E}_k\, \hat{\rho}_S\right] \qquad (2.46)$$

○ (2.45)の31表示

$$\hat{E}_k = \sum_i \hat{M}_{ki}^\dagger \hat{M}_{ki}$$

$$\hat{M}_{ki} = \sqrt{q_l}\,\langle \Psi_m|_P \hat{P}_k^R \hat{U} |\Phi_l\rangle_P$$

$$\cancel{= \sum_{lm} \sqrt{q_l}\,\langle \Psi_m|_P \hat{P}_k^R}$$

$$= \sum_{lm} \sqrt{q_l}\,\langle \Phi_l|_P \hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R |\Psi_m\rangle_P \sqrt{q_l}\,\langle \Psi_m|_P \hat{P}_k^R \hat{U} |\Phi_l\rangle_P$$

$$\cancel{= \sum_l q_l \langle \Phi_l|_P \hat{U}^\dagger (\hat{P}_k^R)^2 \hat{U} |\Phi_l\rangle_P}$$

$$\hat{1}_P = \sum_m |\Psi_m\rangle_P \langle \Psi_m|_P$$

$$\cancel{= \sum_l q_l \langle \Phi_l|_P \hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R \hat{U} |\Phi_l\rangle_P}$$

$$(\hat{P}_k^R)^2 = \hat{P}_k^R$$

$$\cancel{= \mathrm{Tr}_P [\hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R}$$

$\sum_m \langle m|_P \cdots |m\rangle_P$ の形にすると

$\langle \Psi_m|\hat{P}\hat{U}\hat{\rho}_P \hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R|\Psi_m\rangle$ Trとれば入れ替えられる

$$\cancel{= \sum_m \langle \Psi_m|_P \hat{\rho}_P \hat{U}^\dagger}$$

(2.41)

$$\hat{M}_{ki} = \sqrt{q_l}\,\langle \Psi_m|_P \hat{P}_k^R \hat{U} |\Phi_l\rangle_P$$

$$\hat{E}_k = \sum_i \hat{M}_{ki}^\dagger \hat{M}_{ki}$$

$$= \sum_{lm} \sqrt{q_l}\,\langle \Phi_l|_P \hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R |\Psi_m\rangle_P \sqrt{q_l}\,\langle \Psi_m|_P \hat{P}_k^R \hat{U} |\Phi_l\rangle_P$$

$$= \sum_l q_l \langle \Phi_l|_P \hat{U}^\dagger (\hat{P}_k^R)^2 \hat{U} |\Phi_l\rangle_P$$

$$\hat{1}_P = \sum_m |\Psi_m\rangle_P \langle \Psi_m|_P$$

$$= \sum_l q_l \langle \Phi_l|_P \hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R \hat{U} |\Phi_l\rangle_P$$

$$(\hat{P}_k^R)^2 = \hat{P}_k^R$$

$$= \mathrm{Tr}_P [\hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R \hat{U} \hat{\rho}_P]$$

(1.73), (1.76)

$$\sum_k \langle \phi_k|\hat{A}|\phi_k\rangle = \mathrm{Tr}[\hat{P}_k \hat{O}]$$

(2.47)

○ 完全性条件

$$\sum_{ki} \hat{M}_{ki}^{\dagger} \hat{M}_{ki} \qquad \hat{M}_{ki} = \sqrt{q_l}\, \langle \Psi_m |_P \hat{P}_k^R \hat{U} | \Phi_l \rangle_P$$

$$= \sum_{klm} \sqrt{q_l}\, \langle \Phi_l |_P \hat{U}^{\dagger} \hat{P}_k^R | \Psi_m \rangle_P \sqrt{q_l}\, \langle \Psi_m | \hat{P}_k^R \hat{U} | \Phi_l \rangle_P$$

$$= \sum_{kl} q_l \langle \Phi_l |_P \hat{U}^{\dagger} (\hat{P}_k^R)^2 \hat{U} | \Phi_l \rangle_P \qquad \hat{1}_P = \sum_m | \Psi_m \rangle_P \langle \Psi_m |_P$$

$$= \sum_{kl} q_l \langle \Phi_l |_P \hat{U}^{\dagger} \hat{P}_k^R \hat{U} | \Phi_l \rangle_P \qquad (\hat{P}_k^R)^2 = \hat{P}_k^R$$

$$= \sum_{kl} q_l \langle \Phi_l |_P \hat{U}^{\dagger} \hat{U} | \Phi_l \rangle_P \qquad \hat{1}_P = \sum_k \hat{P}_k^R \quad (1.12)$$

$$= \sum_l q_l \langle \Phi_l |_P \hat{1}_{SP} | \Phi_l \rangle_P$$

直交 → 1.

$$= \sum_l q_l \langle \Phi_l | \Phi_l \rangle_P \otimes \hat{1}_S$$

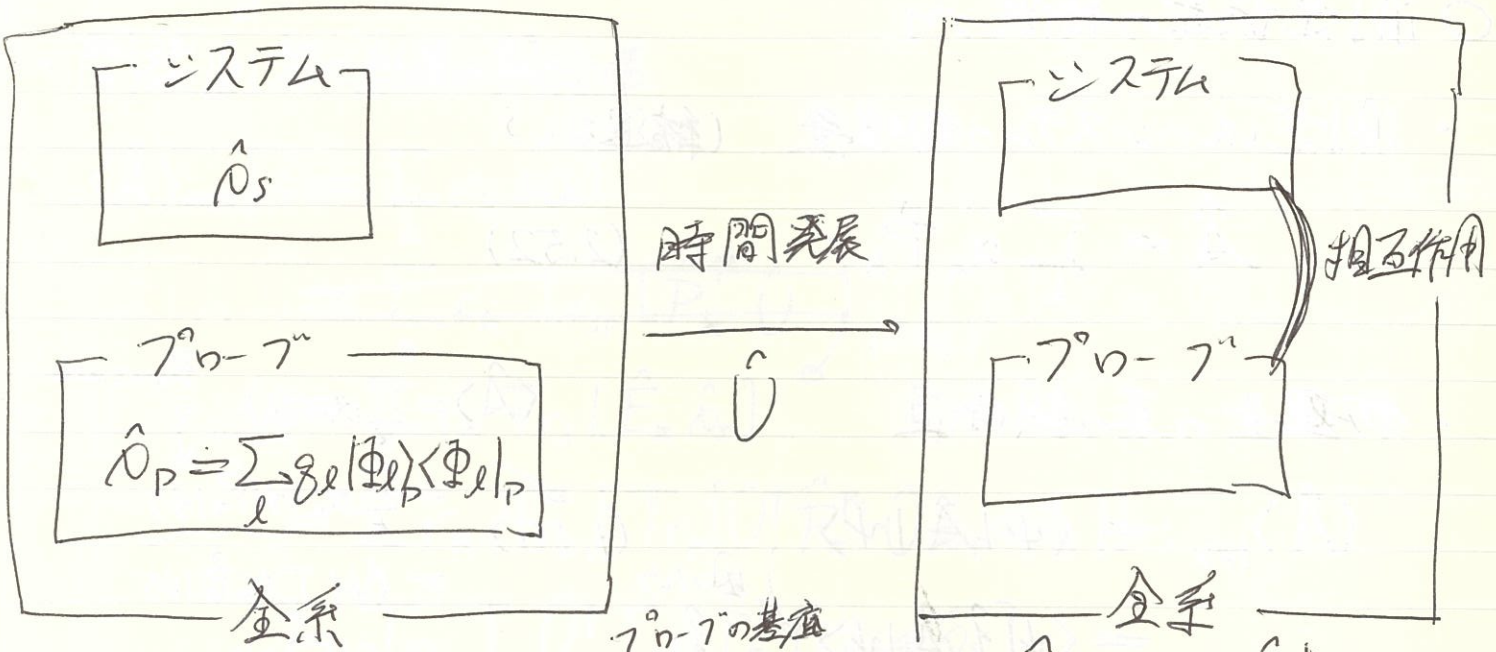
$$= \sum_l q_l \hat{1}_S$$

$$= \hat{1}_S \qquad (2.48)$$

つまり、

$$\sum_{ki} \hat{M}_{ki}^{\dagger} \hat{M}_{ki} = \underbrace{\sum_k \hat{E}_k = \hat{1}_S}_{\sum_k p(k) = 1 \text{ を保証}} \qquad (2.49), (2.50)$$

まとめ



プローブの基底 $\{|\Psi_m\rangle_P\}$

物理量

$$\hat{R} = \sum_k r_k \hat{P}_k^R$$

の射影測定

測定後の状態

全系 $\hat{\rho}'_k = \frac{1}{p(k)} \hat{P}_k^R \hat{U} \hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P \hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R$

システム $\hat{\rho}'_{k,S} = \frac{1}{p(k)} \sum_i \hat{M}_{ki} \hat{\rho}_S \hat{M}_{ki}^\dagger$ (2.42)

kを得る確率 $p(k)$

$$p(k) = \mathrm{Tr}_S[\hat{E}_k \hat{\rho}_S] \quad (2.46)$$

where $\hat{M}_{ki} \overset{(2.41)}{=} \sqrt{q_l} \langle \Psi_m|_P \hat{P}_k^R \hat{U} |\Phi_l\rangle_P$: Kraus op.

$\hat{E}_k \overset{(2.43)}{=} \sum_i \hat{M}_{ki}^\dagger \hat{M}_{ki}$: POVM

$\overset{(2.47)}{=} \mathrm{Tr}_P[\hat{U}^\dagger \hat{P}_k^R \hat{U} \hat{\rho}_P]$