Ex6.1 Nonsingular Curve which Is Birational but Not Isomorphic to $\mathbb{P}^1$.

Y を $\mathbb{P}^1$ と同型でない nonsingular rational curve とする．

(a) Y is isomorphic to an open subset of $\mathbb{A}^1$.

Cor6.12 を用いる．仮定より，$K(Y) \cong K(\mathbb{P}^1)$．$Y$ がある nonsingular projective curve と同型ならそれは $\mathbb{P}^1$ と同型になってしまう[1]したがって Y はある nonsingular projective curve $\bar{Y}$ の真の開部分集合と同型である．[2]再び Cor6.12 によって $\bar{Y} \equiv \mathbb{P}^1$ なので[3]，結局 Y は $\mathbb{P}^1$ の真の開部分集合と同型である．

$\mathbb{P}^1$ の真の開部分集合 U は $\mathbb{A}^1$ の開部分集合と同型であることを示す．$(a:b) \in \mathbb{P}^1 \setminus U$ と，$(a:b)$ と異なる点 $(c:d)$ を $ad - bc \neq 0$ であるように取る．

$$\begin{array}{rccc} f: & U & \to & \mathbb{P}^1 - \{(1:0)\} \\ & (x:y) & \mapsto & (dx - cy : bx - ay) = (u:v) \end{array}$$

$ad - bc \neq 0$ なのでこれは同型写像である．同型写像は同相写像であり，かつ $\operatorname{im} f \subseteq (\mathcal{Z}_p(v))^c \equiv \mathbb{A}^1$ なので，U は $\mathbb{A}^1$ の開部分集合と同型である．

(b) Y is affine.

(a) より $Y \equiv \mathbb{A}^1 \setminus \{P_1, \ldots, P_s\}$ となる $\{P_1, \ldots, P_s\}$ が存在する．この時 $f = (x - P_1) \cdots (x - P_s)$ とすれば，$Y \equiv \mathbb{A}^1 \setminus \mathcal{Z}_a(f)$．なので Lemma4.2 より Y は affine.

(c) $A(Y)$ is UFD.

$\mathbb{A}^2$ の coordinate variable を x, y とする．Lemma4.2 より，$A(Y) = k[x]_f$．Ati-Mac Prop3.11 より，局所化 $k[x]_f$ のイデアルはすべて拡大イデアルである．すなわち，$k[x]_f$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $k[x]_f$ のイデアル $\mathfrak{a}'$ が存在し，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}'$ の元を $x \mapsto x/1$ で写したもので生成される．$k[x]$ は PID だから，$k[x]_f$ も PID．PID ならば UFD であることは森田『代数概論』にもある．

Ex6.2 An Elliptic Curve

$f = y^2 - x^3 + x$ を考えよう．$Y = \mathcal{Z}_a(f) \subset \mathbb{A}^2$ とし，考える体 k の標数は 2 でないとする．また，$K = K(Y), A = A(Y), \bar{x} = x + (f), \bar{y} = y + (f)$ とする．

(a) Y :: nonsingular, and A :: integrally closed domain.

Y が nonsingular affine curve であることは次の連立方程式が解を持たないことと同値である．

$$y^2 - x^3 + x = -3x^2 + 1 = 2y = 0.$$

$\operatorname{char} k \neq 2$ なので，これは以下と同値．

$$x(x+1)(x-1) = -3x^2 + 1 = 0.$$

[1] Cor6.12 の (iii)≃(i).

[2] Cor6.12 の (iii)≃(ii).

[3] Cor6.12 の (iii)≃(i).

これは明らかに解を持たない．

さらに affine curve Y については以下のような同値な命題の列があるので，A が integrally closed domain であることがわかる．

$$\begin{aligned}
&Y :: \text{nonsingular affine curve} \\
\iff &{}^{\forall}P \in Y,\ \ \mathcal{O}_{P,Y} :: \text{regular local ring} \\
\iff &{}^{\forall}P \in Y,\ \ \mathcal{O}_{P,Y} :: \text{integrally closed domain} \\
\iff &Y :: \text{normal affine curve} \\
\iff &A(= A(Y)) :: \text{integrally closed domain}
\end{aligned}$$

Them 5.1, Them6.2, Ex3.17d を用いた．

(b) $k[\bar{x}]$ :: polynomial ring, and A is the integral closure of $k[\bar{x}]$ in K.

$\bar{x}$ が k 上超越的であることを示そう．仮に超越的でない，すなわち代数的であるとすると，多項式 $p(X) \in k[X]$ が存在して $p(\bar{x}) = 0$ となる．これは $p(x) \in (f)$ と同値．したがって $\mathcal{Z}_a(p) \subseteq \mathcal{Z}_a(f) = Y$ と同値である．仮に $p(x)$ の k における解の 1 つを α とすると，$p(x)$ が y を含まないので，以下が成り立つことが必要．

$$\mathcal{Z}_a(x - \alpha) \subseteq Y.$$

なので $y^2 - \alpha^3 + \alpha = 0$ が恒等式になる．しかしこれは不可能．よって $\bar{x}$ は k 上超越的であり，したがって $k[\bar{x}]$ は polynomial ring である．

$k[\bar{x}]$ は polynomial ring だから，$k[\bar{x}]$ は Y の任意の局所環に含まれる．Ati-Mac Cor5.22 より $k[\bar{x}]$ の integral closure は $k[\bar{x}]$ を含むすべての付値環の共通集合．Y は nonsingular であるから Them6.2 より Y の任意の局所環は付置環である．したがって以下が言える．

$$\text{the integral closure of } k[\bar{x}] = \bigcap_{P \in Y} A_{\mathfrak{m}_P} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)} A_{\mathfrak{m}}.$$

最右辺は Them3.2 の証明で述べられているように A に等しいから，$k[\bar{x}]$ の integral closure は A.

(c) Properties of the Norm.

A の自己準同型 σ を $\bar{x} \mapsto \bar{x}; \bar{y} \mapsto -\bar{y}$ で定義する．σ は明らかに $\sigma^2 = \mathrm{id}$ で，巡回群をなす．これを用いて norm N を $a \in A \mapsto a \cdot \sigma(a)$ と定義する．これは体拡大 $K/k(\bar{x})$ の norm（対論で用いられる）である．

σ で fix される元がなす A の部分環を考える．$\sigma(\bar{x}^m \bar{y}^n) = (-1)^n \bar{x}^m \bar{y}^n$ と $-1 \neq 1$ より，$\bar{y}$ の次数が偶数であるような単項式が fix される．よって，

$$A^{\langle \sigma \rangle} = k[\bar{x}, \bar{y}^2] = k[\bar{x}, \bar{x}^3 - \bar{x}] = k[\bar{x}].$$

$\sigma(N(a)) = \sigma(a) \cdot \sigma^2(a) = N(a)$ より, $\mathrm{im}\, N \subset k[\bar{x}]$．また $N(1) = 1 \cdot \sigma(1) = 1$, $N(ab) = ab \cdot \sigma(a)\sigma(b) = N(a)N(b)$ が成り立つ．

(d) The units of $A = k^{\times}$, and $\bar{x}, \bar{y}$ :: irreducible elements.

単元 $u \in A^{\times}$ をとる．(b) で示したことから，以下がわかる．

$$1 = N(uu^{-1}) = N(u)N(u^{-1}) \in k[\bar{x}].$$

したがって $N(u)$ は $k[\bar{x}]$ の単元であるが，すでに示したとおり $k[\bar{x}]$ は polynomial ring なので $N(u) = u \cdot \sigma(u) \in k^{\times}$．$\mathcal{Z}_a(N(u))$ を考えると，

$$\mathcal{Z}_a(N(u)) = \mathcal{Z}_a(u) \cup \mathcal{Z}_a(\sigma(u)) = \emptyset.$$

なので $\mathcal{Z}_a(u) = \emptyset$ であり，したがって $u \in k^{\times}$．

$\bar{x}$ が irreducible でないと仮定しよう．すると $\bar{x} = uv$ となる非単元 $u, v \in A \setminus k^{\times}$ がある．

$$u = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \quad \text{where} \quad \alpha, \beta \in A$$

とおこう．すると $(\alpha v - 1)\bar{x} + \beta v \bar{y} = 0$ が成り立つ．$v \in A$ は非単元だから $\alpha v \neq 1$．よって $\bar{x} = \frac{\beta v}{1 - \alpha v}\bar{y}$ となる．このことから Y は y 軸全体を含むか，または x 軸との交点は $(0, 0)$ のみとなるか，どちらかになる．しかし実際はどちらでもなく，矛盾．よって $\bar{x}$ は irreducible.

$\bar{y}$ が irreducible でないと仮定すると，同様にして以下にできる．

$$\bar{y} = \omega\bar{x} \quad \text{where} \quad \omega \in k(\bar{x}, \bar{y}).$$

これを f に代入すると，$\bar{x}(\bar{x}^2 + \omega^2\bar{x} - 1) = 0$ が得られる．Y は y 軸全体 ($= \mathcal{Z}_a(x)$) を含まないので

$$\bar{x}^2 + \omega^2\bar{x} - 1 = 0.$$

これは Y 上の任意の点で成り立つ方程式であるから Y は $x = 0$ となる点を持たない．しかし実際は $(0, 0) \in Y$ なので矛盾．

(e)　Y :: not rational curve.

A において，以下の等式が成り立つ．

$$\bar{y}^2 = \bar{y} \cdot \bar{y} = \bar{x} \cdot (\bar{x} - 1) \cdot (\bar{x} - 1).$$

$\bar{x}, \bar{y}$ は既約元であるから，これは $\bar{y}^2$ に 2 つの既約元分解を与えている．よって $A = A(Y)$ は UFD でなく，同時に Y は明らかに $\mathbb{P}^1$ と同型でない．これらのことから Ex6.1c より Y は rational でない．

Ex6.3　Give counterexample to Prop6.8.

■The Extension of Birational map between Nonsingular Projective Curves is Isomorphism.　この問題と Ex6.7 で用いるので明確に述べておく．Cor6.12 より，互いに birational な nonsingular projective curve は同型である．

これは Prop6.8 から直接示すこともできる．X, Y :: nonsingular projective curves, $\phi : X \xrightarrow{\cong} Y$ :: birational map とする．Cor4.5 から U :: open in X, V :: open in Y が存在して isomorphism $\phi|_U^V : U \xrightarrow{\equiv} V$ ができる．Prop6.8 から，ϕ には拡張が一意に存在する．これを variety と morphism の圏における可換図式にすると以下のようになる．

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[rr, leftrightarrow, "\phi|_U^V"] \arrow[dl] \arrow[dr, "\phi|_U"] & & V \arrow[dl] \arrow[dr, "(\phi^{-1})|_V"] & \\
X \arrow[rr, dashed, "\overline{\phi}"'] & & Y \arrow[rr, dashed, "\overline{\phi^{-1}}"'] & & X
\end{tikzcd}$$

すると U から右下の X へ向かう 2 つのパスが可換であることから，以下が成り立つ．

$$(\overline{\phi^{-1}} \circ \overline{\phi})|_U = (\phi^{-1})|_V \circ \phi|_U^V = \mathrm{id}_U.$$

Lemma4.1 から $\overline{\phi^{-1}} \circ \overline{\phi} = \mathrm{id}_X$ となる．$\overline{\phi} \circ \overline{\phi^{-1}} = \mathrm{id}_Y$ も同様に示すことができるので, $\overline{\phi}$ が isomorphism になることがわかった．

■If $\dim X \geq 2$.　自然数 $n \geq 3$ を固定する．$f = x_0^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right), X = \mathcal{Z}_p(f), P = (1:0:\cdots:0:1)$ とする．この時，$\dim X = n-1 \geq 2, P \in X$ である．まず $X - P$ から $H = \mathcal{Z}_p(x_n)$ への stereographic projection を ϕ とすると，これは全単射になる．

$$\begin{array}{cccc} \phi: & X - P & \to & H \\ & (a_0 : \cdots : a_n) & \mapsto & (a_0 - a_n : a_1 : \cdots : a_{n-1} : 0) \\ & (2b_0b_0 - \alpha : 2b_0b_1 : \cdots : 2b_0b_{n-1} : -\alpha) & \leftarrow\!\shortmid & (b_0 : \cdots : b_{n-1} : 0) \end{array}$$

ただし $\alpha = f(b_0, \ldots, b_{n-1}, 0)$ とした．Prop6.8 がこの場合にも成立したと仮定しよう．すると拡張 $\bar{\phi}: X \to H$ は全単射である．しかし ϕ がすでに全単射なので，P の $\bar{\phi}$ による像は別の点 P' の像でもある．すなわち $\bar{\phi}^{-1}(\bar{\phi}(P))$ は二点集合 $\{P, P'\}$ となる．これは $\bar{\phi}$ が単射であることに反する．

■If Y :: not projective variety.　$X = \mathbb{P}^1, P = (1:0), Y = \mathbb{A}^1$ としよう．すると $X - P$ と Y には $(a:b) \mapsto a/b \mapsto (a/b:1)$ という標準的な全単射が存在する．Prop6.8 がこの場合にも成立したと仮定すると，前段落と同様に矛盾が生じる．

Ex6.4　Make surjective morphism $\phi : Y \to \mathbb{P}^1$ from nonconstant rational function.

Y :: nonsingular projective curve とする．Y 上の任意の定数でない rational function $f = g/h$ に対して以下のように写像を定める．

$$\begin{array}{cccc} \phi: & Y & \to & \mathbb{P}^1 \\ & P & \mapsto & (1 : f(P)) = (h(P) : g(P)) \end{array}$$

多項式に多項式を代入したものは多項式だから，これが morphism であることは自明．

surjective であることを示そう．$(a:b) \in \mathbb{P}^1$ を任意に取る．$\phi(P) = (h(P):g(P)) = (a:b)$ とすると，

$$(ag - bh)(P) = 0.$$

となる．これを満たす P 全体が $\phi^{-1}(a:b)$ であり，$ag - bh$ は多項式であることから $\phi^{-1}(a:b)$ は高々有限集合である．$\phi^{-1}(a:b)$ が空でないことは次のようにわかる．$\phi^{-1}(a:b)$ が空であるとき $ag - bh$ は 0 でない定数 c である．$(a:b) \in \mathbb{P}^1$ なので $a \neq 0$ と仮定すると

$$g = (b/a)h + c.$$

g は斉次であるから $\deg(b/a)h = \deg c = 0$．しかしそうなると $\deg g = \deg h = 0$ となり，$f = g/h$ は定数であることになる．これは f のとり方に矛盾する．

Ex6.5　Subvariety which is nonsingular projective curve is closed subset.

X, Y :: (quasi-projective) variety, $X \subset Y \subset \mathbb{P}^n$ とする．X :: nonsingular projective curve であるときに X :: closed in Y であることを示そう．$\bar{X} = \mathrm{cl}_Y(X)$ とすると，これは nonsingular projective curve．したがって，X は $\bar{X}$ の開集合である．$\bar{X} = X$ を示そう．

埋め込み $i : X \to \bar{X}$ は $\bar{i} : \bar{X} \to \bar{X}$ へ拡張できる．しかし X は予め projective curve なので i は最初から morphism で，$i = \bar{i}$．よって $X = \mathrm{im}\, i^{-1} = \mathrm{im}\, \bar{i}^{-1} = \bar{X}$.

Ex6.6 Automorphisms of $\mathbb{P}^1$.

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 + \{\infty\}$ を考える．Fractional linear transformation of $\mathbb{P}^1$ を以下のような写像と定める．

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{where} \quad a,b,c,d \in k, ad-bc \neq 0.$$

Fractional linear transformation of $\mathbb{P}^1$ 全体を $PGL(1)$ と書く．

(a) $(ax+b)/(cx+d) \in PGL(1)$ induces an automorphism of $\mathbb{P}^1$.

$\frac{ax+b}{cx+d}$ の逆写像は $\frac{-dx+b}{cx-a}$ である．これらは明らかに $\mathbb{P}^1$ の定数でない rational function.（$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 + \{\infty\}$ と考えていることに注意．必要なら $x = u/v$ と斉次化せよ．）Ex6.4 より，$\mathbb{P}^1$ の automorphism が誘導される．

(b) $\operatorname{Aut}\mathbb{P}^1 \cong \operatorname{Aut} k(x)$.

$\phi \in \operatorname{Aut}\mathbb{P}^1$ を任意に取ると，以下のように $k(x)$ の自己同型写像が誘導される．

$$\begin{array}{cccc} \phi^*: & k(x) & \to & k(x) \\ & \dfrac{g}{h}(x) & \mapsto & \left(\dfrac{g}{h}\circ\phi\right)(x) \end{array}$$

これが自己同型であることは morphism の定義から明らか．

逆に $\psi \in \operatorname{Aut} k(x)$ を任意に取ると，以下のように $\mathbb{P}^1$ の自己同型写像が誘導される．

$$\begin{array}{cccc} \psi_*: & \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^1 \\ & a & \mapsto & (\psi(x))(a) \end{array}$$

$\psi(x) \in k(x)$ に注意．

(c) $\operatorname{Aut} k(x) = PGL(1)$, and then $\operatorname{Aut}\mathbb{P}^1 \cong PGL(1)$.

$k(x)$ の自己準同型は x の像で決定されることは明らか．そこで $\operatorname{Aut} k(x)$ のある元 ψ は x を $f/g \in k(x)$ に写すとしよう．この時，f, g は高々 1 次式でなくては ψ が inverse morphism を持たないことを示す．

$X = f/g$ としよう．

$$X = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0} \quad \text{where} \quad \{a_i\}, \{b_j\} \subset k.$$

分子分母の次数は高々 n であることに注意せよ．X の値が与えられた時，$\psi^{-1}(X)$ は以下の方程式の解集合である．

$$(a_n - Xb_n)x^n + (a_{n-1} - Xb_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 - Xb_0) = 0.$$

ψ が全単射ならば任意の X について $\psi^{-1}(X)$ は一点集合である．よって $n = 1$，すなわち $\operatorname{Aut} k(x) \subseteq PGL(1)$．逆の包含関係は明らかだから，主張が示せた．

Ex6.7 If $\mathbb{A}^1 - \{P_n\}_{n=1}^s \equiv \mathbb{A}^1 - \{Q_n\}_{n=1}^t$ then $s = t$. Converse?

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 + \{\infty\}$ と考えることで $\mathbb{A}^1 - \{P_i\} \equiv \mathbb{P}^1 - \{P_i, \infty\}$ が自然に得られる．なので同型写像 $\phi : \mathbb{A}^1 - \{P_n\}_{n=1}^s \xrightarrow{\equiv} \mathbb{A}^1 - \{Q_n\}_{n=1}^t$ から birational map $\phi' : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1$ が得られる．この birational map を拡張すると，Ex6.3 で述べたように，$\mathbb{P}^1$ の自己同型写像 $\bar{\phi}'$ が得られる．このことから主張が示される．

$$\bar{\phi}'(\{P_n\}_{n=1}^s) = \mathbb{P}^1 - \bar{\phi}'(\mathbb{P}^1 - \{P_n\}_{n=1}^s) = \mathbb{P}^1 - (\mathbb{P}^1 - \{Q_n\}_{n=1}^t) = \{Q_n\}_{n=1}^t.$$

逆を考える．ここまでの議論では $\mathbb{A}^1 - \{P_n\}_{n=1}^s \equiv \mathbb{A}^1 - \{Q_n\}_{n=1}^t$ の同型から $\mathbb{P}^1$ の自己同型を作った．しかも出来上がった自己同型は $\{P_n\}_{n=1}^s$ を $\{Q_n\}_{n=1}^t$ へ写すものであった．一方，Ex6.6 より $\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1 \cong PGL(1)$ であり，$PGL(1)$ の元は 3 点をどの 3 点に移すかで決定される．$\mathbb{A}^1$ は無限集合なので，$PGL(1)$ の任意の元で互いに写せないような $\{P_n\}_{n=1}^s, \{Q_n\}_{n=1}^s$ を選べる．[4] このような点達について同様の議論をすると矛盾が生じる．

[4] 具体的には，k を $\mathbb{C}$ に埋め込み，$\mathbb{A}^3$ を見る．$\{(P_m, Q_n, P_mQ_n)\}$ のうちのどの 4 点も同一平面上に乗らなければ良い．