以下での $(*)$ とは，次のもの:

- integral,
- separated,
- noetherian, and
- regular in codimention one.

また，$(\dagger)$ は次のもの: X :: noetherian scheme, $\mathcal{S}$ :: graded $\mathcal{O}_X$-algebra となっている．また，$d \in \mathbb{Z}, d \geq 0$ について，$\mathcal{S}_d$ :: homogeneous part of $\mathcal{S}$ を $U \mapsto \mathcal{S}(U)_d$．$X, \mathcal{S}$ は次をすべて満たす．

- $\mathcal{S}$ :: quasi-coherent.
- $\mathcal{S} = \bigoplus_{d\geq 0} \mathcal{S}_d$.
- $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$.
- $\mathcal{S}_1$ :: coherent $\mathcal{O}_X$-module.
- $\mathcal{S}$ :: locally generated by $\mathcal{S}_1$ as $\mathcal{O}_X$-algebra.

Ex7.1 Surjective Mophism between Invertible Sheaves is Isomorphic.

X :: locally ringed space, $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ :: invertible sheaves on X, $f : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ :: surjective mophism，とする．

■Proof 1. 任意の点 $x \in X$ をとり，$A = \mathcal{O}_{X,x}$ とおく．$f_x : \mathcal{L}_x \to \mathcal{M}_x$ は同型写像を合成することで $\phi : A \to A$ :: surjective A-morphism と同一視出来る．ϕ :: surjective より，$\phi(\alpha) = 1 \in A$ となる $\alpha \in A$ がとれる．また ϕ は A-module morphism だから，$\alpha\phi(1) = 1$．そこで $\psi : A \to A$ を $a \mapsto \alpha a$ と定義すれば，これが ϕ の逆写像になる．よって ϕ, f_x は同型．Prop1.1 から，f :: iso.

■Proof 2. Matsumura, Thm2.4 から分かる．これは NAK (or Nakayama's Lemma) からの帰結である．

注意 Ex7.1.1
$k(x)$ :: residue field と $f_x : \mathcal{L}_x \to \mathcal{M}_x$ をテンソルすると，$f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)}$ :: surjective $k(x)$-module morphism が得られる．よって $\ker(f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)}) = 0$．しかし，ここから NAK をつかって $\ker f_x = 0$ を導くことは出来ない．$k(x)$ が flat $\mathcal{O}_{X,x}$-module でなく，したがって $\ker(f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)})$ と $(\ker f_x) \otimes k(x)$ の間に同型があることが言えないからである．このことは flat $\implies$ torsion-free に気をつければすぐに分かる．同様の議論が f_x :: injective（と $\operatorname{coker} f_x$）の場合に出来ることにも気づくが，このときは $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2; 1 \mapsto 3$ という反例がある．

Ex7.2 Two Sets of Global Generators and Corresponding Morphisms.

k :: field, X :: scheme $/k$, $\mathcal{L}$ :: invertible sheaf on X, $S = \{s_0, \ldots, s_m\}, T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ :: global generators of $\mathcal{L}$．とする．ここで S, T は同じ線形（部分）空間 $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ を張るとする．また $n \leq m, d = \dim_k V$ とする．

S, T からそれぞれ Thm7.1 のように定まる morphism を ϕ_S, ϕ_T とする．ϕ_S が次のように分解できる

ことを示す．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi_T"] \arrow[rrrr, bend right, "\phi_S"'] & \operatorname{im}\phi_T \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^m - L \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}^n \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

ここで π, α はそれぞれ linear projection と automorphism である．

$X \to \mathbb{P}^n$ の morphism を考えることは，$k[y_0, \ldots, y_n]$ の元 $y_{0,\ldots,n}$ の変換を考えることと同じである．これは Thm7.1 の証明を観察すれば分かる．二つの k-linear map は ϕ_S^*, ϕ_T^* はそれぞれ，$y_i \mapsto s_i (i = 0, \ldots, n)$，$y_i \mapsto t_i (i = 0, \ldots, m)$ で定まっている．したがって問題は，$t_0, \ldots, t_m$ を $s_0, \ldots, s_n$ へ変換する projection と automorphism をつくる問題，と言い換えられる．

今，次のような $(m+1) \times (n+1)$ 行列 Q が存在する．

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}.$$

S, T が V の生成系であることから $\operatorname{rank} Q = \dim V =: d$．$Q$ は基本行列をいくつもかける（あるいは基本変形を繰り返し行う）ことにより，次の形に分解できる．

$$Q = LP_dR \quad \text{where} \quad L \in PGL(m, k), R \in PGL(n, k)$$

ただし行列 P_r $(r = 1, \ldots, n+1)$ は $r \times r$-identity matrix I_r をもちいて $P_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と定義される行列である．（TODO: P_d を P_{n+1} に交換しても問題ない？）L, P_{n+1}, R が誘導する morphism をそれぞれ $\beta, \tilde{\pi}, \alpha$ とすれば，α, β は automorphism であり，$\tilde{\pi}$ は projection である．

$$\mathbb{P}^m \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^m \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^m - L \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{P}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n$$

求める射はこの α と，$\pi = \beta \circ i \circ \tilde{\pi}$ である．また，$L = \mathcal{Z}_p(y_0, \ldots, y_n) \subseteq \mathbb{P}^m$ の次元は $m - (n+1)$ である．

Ex7.3 Morphism of $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ can be Decomposed into Common Ones.

$\phi : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^m$ を考える．$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ :: invertible sheaves の global generator をそれぞれ $\{x_0, \ldots, x_m\}, \{y_0, \ldots, y_n\}$ とする．

(a) $\operatorname{im}\phi = pt$ or $m \geq n$ and $\dim \operatorname{im}\phi = n$.

$s_i = \phi^*(x_i)$ $(i = 0, \ldots, m)$ とおくと，$s_0, \ldots, s_m$ は $\mathcal{L} := \phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$ の global generator である．$\mathcal{L}$ は $\mathbb{P}^n$ 上の invertible sheaf だから，Cor6.17 より，$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ となる $d \in \mathbb{Z}$ が存在する．Example7.8.3 同様，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ は $|d|$ 次斉次単項式で生成される．

■$m < n \implies \dim \operatorname{im}\phi = 0.$

■$m \geq n \implies \dim \operatorname{im}\phi = n.$

Ex7.4 If X Admits an Ample Invertible Sheaf, then X is Separated.

(a) Assumption of Thm7.6 $\Longrightarrow$ X :: separated.

A :: noetherian ring, X :: scheme of finite type $/A$ とする．$\mathcal{L}$ :: ample invertible sheaf on X が存在したとする．Thm7.6 から，immersion $i : X \to \mathbb{P}^n_A$ $(n > 0)$ が存在する．これは X から $\mathbb{P}^n_A$ の locally closed subscheme への isomorphism である．これに projection $\mathrm{pr} : \mathbb{P}^n_A = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A$ を合成したものは，quasi-projective.

$$X \xrightarrow{\sim} U \hookrightarrow Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A \xrightarrow{\mathrm{pr}} \operatorname{Spec} A$$

Z は $\mathbb{P}^n_A$ の closed subscheme, U は Z の open subscheme である．A, X についての仮定から $\operatorname{Spec} A, X$ :: noetherian scheme がわかる[†1] から，Thm4.9 より，この射 $X \to \operatorname{Spec} A$ は separated.

(b) There is No Ample Invertible Sheaf on ———:——— / a field k.

k :: field, X :: affine with doubled origin $/k$ とする．より詳細に，X は $X_1 = \operatorname{Spec} k[x_1], X_2 = \operatorname{Spec} k[x_2]$ を $U_1 = X_1 - \{O_1\}, U_2 = X_2 - \{O_2\}$ で貼りあわせたものとする．ただし $O_1 \in X_1, O_2 \in X_2$ は原点である．$X_i, U_i, O_i \quad (i = 1, 2)$ はすべて X の部分集合とみなす．また $U = X_1 \cap X_2 = X - \{O_1, O_2\}$ とする．明らかに $U = U_1 = U_2 \cong \mathbb{A}^1 - \{0\} = \operatorname{Spec} k[x_1, x_1^{-1}]$．また $x_1|_U = x_2|_U$.

■Plot. まず，X 上の invertible sheaf 全体 $\operatorname{Pic} X$ がどのようなものか調べる．これは $\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}$ となる．$n \in \mathbb{Z}$ に対応する $\operatorname{Pic} X$ の元を $\mathcal{L}_n$ とする．次に，generated by global section であるような invertible sheaf を考える．これは $\mathcal{L}_0 (= \mathcal{O}_X)$ しかない．すると任意の $m > 0, n \neq 0$ について

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \otimes (\mathcal{L}_n)^{\otimes m} &= \mathcal{L}_{mn} \neq \mathcal{L}_0. \\ \mathcal{L}_n \otimes (\mathcal{L}_0)^{\otimes m} &= \mathcal{L}_n \quad \neq \mathcal{L}_0. \end{aligned}$$

なので，どの invertible sheaf も ample でない．

■X :: noetherian integral scheme. $X_1, X_2 \cong \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[x_1]$ と reduced が local な性質であることから X :: noetherian reduced scheme. X :: irreducible も明らかだから，X :: noetherian integral scheme.

■$\operatorname{Pic} X \ni \mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$. $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X$ を任意にとる．X :: integral と Prop6.15 より，$\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$ となる $D \in \operatorname{CaCl} X$ が存在する．Prop6.13 の証明から D がどのような形のものか考えよう．Example 6.3.1, Cor 6.16 より，$\operatorname{Pic} X_1, \operatorname{Pic} X_2$．なので $\mathcal{L}|_{X_1} \cong \mathcal{O}_{X_1}, \mathcal{L}|_{X_2} \cong \mathcal{O}_{X_1}$ となる．Prop6.13 の証明から，D は次のような形をしている．

$$D = \{\langle X_1, f_1 \rangle, \langle X_2, f_2 \rangle\} \quad \text{where} \quad f_1 \in \Gamma(X_1, \mathcal{K}^*_{X_1}) = (k(x_1))^*, f_2 \in \Gamma(X_2, \mathcal{K}^*_{X_2}) = (k(x_2))^*.$$

■$D \sim \{\langle X_1, x_1^n \rangle, \langle X_2, 1 \rangle\}$. Cartier divisor の定義から，$U = X_1 \cap X_2$ において $f_1/f_2 \in \Gamma(U, \mathcal{O}^*_U)$ となっている．$U \subseteq X_1 = \operatorname{Spec} k[x_1]$ と考えると，$U = \operatorname{Spec} k[x_1]_{x_1} = \operatorname{Spec} k[x_1, x_1^{-1}]$．（$U \subseteq X_1$ と見れ

[†1] $f : X \to \operatorname{Spec} A$ が finite type ならば $f^{-1} \operatorname{Spec} A = X$ は finite affine open cover をもち，各 affine open cover は finitely generated A-algebra の Spec である．finitely generated A-algebra は A から noetherian を受け継ぐから，X :: noetherian.

ば $U = \operatorname{Spec} k[x_2, x_2^{-1}]$ であるが，どちらでも同じである．）そして

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*) = (k[x_1, x_1^{-1}])^* = \{\alpha x_1^n \mid \alpha \in k^*, n \in \mathbb{Z}\}.$$

であるから，$f_1/f_2 = \alpha x_1^n (\iff f_2/f_1 = (\alpha x_2^n)^{-1})$ と書ける．よって

$$D = \{\langle X_1, \alpha x_1^n f_2\rangle, \langle X_2, f_2\rangle\} \quad \text{where} \quad f_2 \in \Gamma(X_2, \mathcal{K}_{X_2}^*) = (k(x_2))^*.$$

再び X :: integral から，$\mathcal{K}_X$ は constant sheaf であり，したがって $f_2 \in K = \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ となる．なので $\{\langle X_1, f_2\rangle, \langle X_2, f_2\rangle\}$ は principal．加えて $\{\langle X_1, \alpha\rangle, \langle X_2, 1\rangle\} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ なので†2，結局 $D \sim \{\langle X_1, x_1^n\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}$.

■$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}$.　$n \in \mathbb{Z}$ に対し，次のように定める．

$$D_n = \{\langle X_1, x_1^n\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}, \quad \mathcal{L}_n = \mathcal{L}(D_n).$$

これは次の写像を定める．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \operatorname{CaCl} X \\ n & \mapsto & D_n \end{array}$$

明らかに $D_m + D_n = D_{m+n}, \mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{m+n}$ だから，これは加法群としての全射準同型．最後に，単射であることを見よう．$D_n = D_0$ ならば，

$$D_n = \{\langle X_1, x_1^n\rangle, \langle X_2, 1\rangle\} = \{\langle X_1, 1\rangle, \langle X_2, 1\rangle\} = D_0.$$

なので section の同値の定義から $x_1^n/1 \in \Gamma(X_1, \mathcal{O}_X^*) = k^*$．これは $n = 0$ を意味している．

■Globally Generated Invertible Sheaf on X.　$n \in \mathbb{Z}$ を任意にとり，$\{g_i\}_i \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L}_n)$ が $\mathcal{L}_n$ の global generators であるとしよう．$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}(D_n)$ だから，$\mathcal{L}_n|_{X_1}$ は x_1^n で generate され，$\mathcal{L}_n|_{X_2}$ は 1 で generate されている．特に後者から，$\mathcal{L}_n|_U$ は 1 で generate されている．したがって stalk で見れば，次のようになっている．

$$\begin{array}{lll} {}^\forall P \in X_2, \ \langle (g_i)_P\rangle_i = (\mathcal{L}_n)_P = \mathcal{O}_{X,P} & & \text{as } \mathcal{O}_{X,P}\text{-module.} \\ \langle (g_i)_{O_1}\rangle_i = (\mathcal{L}_n)_{O_1} = (x_1^n)_{O_1}\mathcal{O}_{X,O_1} & & \text{as } \mathcal{O}_{X,O_1}\text{-module.} \end{array}$$

これらを可換環に翻訳し，g_i を $g_i|_{X_2}, g_i|_U, g_i|_{X_1}$ の順に求めていく．$X_2 = \operatorname{Spec} k[x_2]$ だから，P に対応する素イデアル $\mathfrak{p} \subset k[x_2]$ がとれる．また，$g_i|_{X_2} \in \Gamma(X_2, \mathcal{O}_X) = k[x_2]$．$\mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}_{X_2,P} = k[x_2]_\mathfrak{p}$ であり，したがって $k[x_2]_\mathfrak{p}$-module として $\langle (g_i|_{X_1})_\mathfrak{p}\rangle = k[x_2]_\mathfrak{p}$．なので，次が成り立つ．

$${}^\forall\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[x_2], \quad {}^\forall i, \quad (g_i|_{X_2})_\mathfrak{p} \in (k[x_2]_\mathfrak{p})^* = k[x_2] \setminus \mathfrak{p}.$$

よって $g_i|_{X_2} \in (k[x_2])^* = k^*$ がわかる．特に $g_i|_U = \alpha \in k^*$ と書ける．変形して，$(g_i|_{X_1} - \alpha)|_U = 0$．（$\alpha \in \Gamma(X_1, \mathcal{O}_X^*)$ とみなしている．）$U = D(x_1) \subset \operatorname{Spec} k[x_1] = X_1$ なので，Lemma5.3 より，十分大きな $r > 0$ について $x_1^r(g_i|_{X_1} - \alpha) = 0$ on X_1．しかし $\Gamma(X_1, \mathcal{O}_X) = k[x_1]$ は domain なので結局 $g_i|_{X_1} = \alpha$ on X_1．$\langle (g_i)_{O_1}\rangle_i = (x_1^n)_{O_1}\mathcal{O}_{X,O_1}$ と合わせて $g_i|_{X_1} = x_1^n \in k^*$ が得られ，$n = 0$ となる．以上より，$\mathcal{L}_0$ のみが generated by global sections である．

†2 ここの部分は Prop6.13c を用いて

$$\mathcal{L}(\{\langle X_1, \alpha\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}) = \mathcal{O}_X = \mathcal{L}(\{\langle X_1, 1\rangle, \langle X_2, 1\rangle\})$$

故に $\{\langle X_1, \alpha\rangle, \langle X_2, 1\rangle\} = \{\langle X_1, 1\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}$，と理解しても良い．

■Another Proof: Globally Generated Invertible Sheaf on X. $n \in \mathbb{Z}$ をとり，$\{g_i\}_i \in \Gamma(X, \mathcal{L}_n)$ を $\mathcal{L}_n$ の global generator とする．local には $\mathcal{L}_n$ の generator は $x_1^n, 1$ で与えられており，$\{g_i\}_i$ 達も local には $x_1^n, 1$ と一致している．

$$\{g_i|_{X_1}\}_i = \{x_1^n, 1\} \subset \Gamma(X_1, \mathcal{K}_{X_1}^*/\mathcal{O}_{X_1}^*), \qquad \{g_i|_{X_2}\}_i = \{1\} \subset \Gamma(X_2, \mathcal{K}_{X_2}^*/\mathcal{O}_{X_2}^*)$$

となる．右から $\{g_i|_{X_2}\}_i, \{g_i|_U\}_i \subseteq k^*$ が直ちに得られる．なので前の証明と同様に $x_1^n \in k^*$ が分かり，よって $n = 0$.

■資料． 詰まったところでは次のページを参考にした: `https://math.stackexchange.com/questions/70042`.

Ex7.5 Ample and Very Ample are Inherted by Tensor Products.

Ex7.6 The Riemann-Roch Problem.

Ex7.7 Some Rational Surfaces.

Ex7.8 Sections of $\pi : \P(\mathcal{E}) \to X \leftrightarrow$ Quotient Invertible Sheaves of $\mathcal{E}$.

Ex7.9

Ex7.10 P^n-Bundles Over a Scheme.

Ex7.11 Different Sheaves of Ideals can Give Rise to Isomorphic Blow Up Schemes.

Ex7.12

Ex7.13 * A Complete Nonprojective Variety.

Ex7.14