1　射影曲線

1.1　射影空間

$\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\}$ において、$\mathbf{a}=(a_0,\dots,a_n)$, $\mathbf{b}=(b_0,\dots,b_n)$ に対し、以下のように同値関係を入れる (同値関係であることは自明)。

$$\mathbf{a}\sim\mathbf{b} \iff \exists\lambda\in k^{\times}\ s.t.\ \lambda\mathbf{a}=\mathbf{b}$$

そこで、n 次元射影空間を以下で定める。

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{A}^{n+1}\setminus\{0\})/\sim$$

点 $A\in\mathbb{P}^n$ に対し、その代表元として $\mathbf{a}=(a_0,\dots,a_n)$ をとる。このとき、$A=(a_0:\dots:a_n)$ と表し、a_i 達を A の斉次座標と呼ぶ。全ての a_i が 0 になる点は無い。

各 $i=0,1,\dots,n$ に対し、

$$\sqcup_i := \{(a_0:a_1:\dots:a_n)|a_i\neq 0\}\subset\mathbb{P}^n$$

このとき、$\mathbb{P}^n=\bigcup_{i=0}^n\sqcup_i$ となる。この $\{\sqcup_i\}_{i=0}^n$ をアフィン開被覆と呼ぶ。

補題 1. 各 i に対し、ϕ_i を

$$\begin{array}{rcl}\phi_i:\sqcup_i & \to & \mathbb{A}^n\\ (a_0:\dots:a_i:\dots:a_n) & \mapsto & (a_0/a_i,\dots,a_n/a_i)\end{array}$$

とおく。これは全単射で、

$$\begin{array}{rcl}\psi_i:\mathbb{A}^n & \to & \sqcup_i\\ (a_0,\dots,a_n) & \mapsto & (a_0:\dots:\underset{i\text{ 番目の要素}}{1}:\dots:a_n)\end{array}$$

がその逆写像である。

証明. 全単射の定義にしたがって調べれば良い。

∎

零点集合 $Z(X_i)=\{(a_0:a_1:\dots:a_n)|a_i=0\}$ を $\sqcup_i$ の無限遠超平面と言う。これはそれぞれ $\sqcup_i$ の補集合で、$\mathbb{A}^n\simeq\sqcup_i=\mathbb{P}^n\setminus Z(X_i)$ が成り立つ。零点集合はそれぞれ $\sqcup_i$ と無限遠で交わる。

1.2　射影曲線

定義 2 (射影曲線)**.** 体 k 上の斉次多項式 $F\in k[X,Y,Z]$ について、以下で定まる集合を射影曲線と呼ぶ。

$$C:=Z(F)=\{p\in\mathbb{P}^2:F(p)=0\}$$

$\deg C:=\deg F=d$ を C の次数と呼び、また、C を d 次曲線と呼ぶ。

これは well-defined である。なぜなら任意の点 $p \in \mathbb{P}^2$ と、任意の $\lambda \in k^\times$ について、$F(\lambda p) = (\lambda^{\deg F})F(p)$ だからである。したがって $F(p)=0$ の解集合は点 p の斉次座標のとり方によらない。これは F が斉次多項式であることから成り立つ。逆に、このように射影曲線 C が well-defined であるためには F は斉次多項式でなくてはならない。

命題 3. 2 点 $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{P}^2$ （ただし $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$）を通る直線はただ一つであり、[1] その定義多項式 $\bar{F}$ は以下で与えられる。

$$\bar{F} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

ここで $\mathbf{a} = (a_0 : a_1 : a_2), \mathbf{b} = (b_0 : b_1 : b_2)$ とした。

証明. 主張に有る $\bar{F}$ は $\mathbf{a}$ か $\mathbf{b}$ を代入すると同じ行を 2 つもつ行列式になるから、0 になる。また、$\bar{F}$ は一次斉次多項式である。したがって $\bar{F}$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を通る直線の定義多項式の一つである。以下、このような直線がただ一つであることを示す。

直線の定義多項式 F は 1 次斉次多項式だから、$F(X,Y,Z) = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$ のように表される。写像 ε を以下で定義する。

$$\begin{aligned} \varepsilon : \{\text{k 上の 1 次斉次多項式全体}\} &\to k^2 \\ F &\mapsto \begin{bmatrix} F(\mathbf{a}) \\ F(\mathbf{b}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ε で F を送った先が $\mathbf{0}$ であれば F は 2 点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を通る。すなわち、定義多項式は $\ker\varepsilon$ の元である。すでに述べたように、$\bar{F} \in \ker\varepsilon$ となっている。

ε で F を送った先をもう少し考えると、次のようになる。

$$F \mapsto \begin{bmatrix} F(\mathbf{a}) \\ F(\mathbf{b}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ から、$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{bmatrix} = 2$ である。したがって $\dim\ker\varepsilon = 3-2 = 1$ となる。つまり、$\ker\varepsilon$ は $\bar{F}$ を有る一つのパラメータで変化させたもの全体。実際、$\bar{F}$ を $k^\times$ 倍したものも $\ker\varepsilon$ の元である [2]。以上の議論から、$\ker\varepsilon$ の元は $k^\times$ 倍を除いて一意。したがって、2 点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を結ぶ直線 $Z(F)$ は一意。

∎

定義 4. $\mathbb{P}^2$ 内の直線全体のなす集合を $\check{\mathbb{P}}^2$ と書く。

$$\check{\mathbb{P}}^2 := \{Z(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) : (\alpha, \beta, \gamma) \in k^3 \setminus \{0\}\}$$

これを双対射影空間と呼ぶ。

実際、$\check{\mathbb{P}}^2 \ni Z(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) \mapsto (\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{P}^2$ は全単射。

問。素数 p について $\mathbb{P}^2_{\mathbb{F}_p}$ に含まれる直線は何本か。

[1] $\lambda\mathbf{a}, \mu\mathbf{b}$ も同じ 2 点を表すということを考えれば、これは自明ではない。

[2] $\bar{F}$ の X の係数だけ変化させても $\ker\varepsilon$ の元になる、といった可能性を排除するための議論だった。

1.3 多項式の斉次化・非斉次化

以下では k を体、$\mathbb{X} = (X_0, \ldots, X_n)$[3], $\mathbb{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$[4] とおく。

定義 5 (非斉次化)**.**

$$\begin{array}{rcl} \alpha : k[\mathbb{X}] & \to & k[\mathbb{Y}] \\ F(\mathbb{X}) & \mapsto & F(1, Y_1, \ldots, Y_n) \end{array}$$

これを X_0 に関する非斉次化と呼ぶ。

これは代入なので環の準同型写像である。

定義 6 (斉次化)**.**

$$\begin{array}{rcl} \beta : k[\mathbb{Y}] & \to & k[\mathbb{X}] \\ f(\mathbb{Y}) & \mapsto & X_0^{\deg f} f\left(\dfrac{X_1}{X_0}, \ldots, \dfrac{X_n}{X_0}\right) \end{array}$$

これを X_0 に関する斉次化と呼ぶ。

これは次に示すように準同型写像でない。

命題 7. $f \in k[\mathbb{Y}]$ に対して $\beta(f)$ は斉次多項式。さらに、f の斉次分解を $f = \sum_{k=0}^{d} f_k(\mathbb{X})$ とした時

$$\beta(f)(\mathbb{X}) = \sum_{k=0}^{d} X_0^{d-k} f_k(\mathbb{X}')$$

となる。ただし $d := \deg f$, $\mathbb{X}' = (X_1, \ldots, X_n)$[5] とした。

証明. 「さらに、」以降の主張から前半の主張は明らか。$f(\mathbb{Y}) = \sum_{0 \le k \le d} \sum_{|\mathbb{I}|=k} c_{\mathbb{I}} \mathbb{Y}^{\mathbb{I}}$ とする。$\beta(f)$ は次のようになる。

$$\begin{array}{rcl} \beta(f)(\mathbb{X}) & = & X_0^d \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \left(\sum_{|\mathbb{I}|=k} c_{\mathbb{I}} \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{i_n} \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} \left(\sum_{|\mathbb{I}|=k} X_0^{d-|\mathbb{I}|} \cdot c_{\mathbb{I}} \mathbb{X}'^{\mathbb{I}} \right) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{d} X_0^{d-k} f_k(\mathbb{X}') \end{array}$$

∎

[3] $(n+1)$ 個の不定元。
[4] n 個の不定元。
[5] X_0 を $\mathbb{X}$ から消した。

1.3.1 α, β の関係

証明は略すが、$\alpha(\beta(f)) = f$ が成り立つ。しかし $\beta(\alpha(F)) = F$ は一般に成立しない。

補題 8. 斉次多項式 $F \in k[\mathbb{X}]$ に対し、ある $e \geq 0$ が存在して次式が成り立つ。

$$F(\mathbb{X}) = X_0^e \cdot \beta(\alpha(F(\mathbb{X})))$$

証明. $d := \deg F$ として、

$$F(\mathbb{X}) = \sum_{|\mathbb{I}|=d} c_{\mathbb{I}} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}$$

と表せる。この時、

$$\alpha(F)(\mathbb{X}) = \sum_{|\mathbb{I}|=d} c_{\mathbb{I}} 1^{i_0} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$$

明らかに $\deg \alpha(F) \leq d$ なので、この差を e と置く。つまり $\deg \alpha(F) = d - e$ とする。すると $d - \sum_{1 \leq j \leq n} i_j = i_0$ より、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&X_0^e \cdot \beta(\alpha(F(\mathbb{X}))) \\
&\quad = X_0^e \left(X_0^{d-e} \sum_{|\mathbb{I}|=d} c_{\mathbb{I}} \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^{i_1} \cdots \left(\frac{X_n}{X_0}\right)^{i_n} \right) \\
&\quad = \left(\sum_{|\mathbb{I}|=d} c_{\mathbb{I}} X_0^{i_0} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \right) \\
&\quad = F(\mathbb{X})
\end{aligned}$$

等号が成立するのは $i_0 = 0 \implies c_{\mathbb{I}} = 0$ の時。

■

1.4 アフィン曲線の射影化

定義 9. 多項式 $f \in k[x, y]$ によって定まるアフィン曲線 $C := Z_a(f) \subset \mathbb{A}^2$ に対し、$Z_p(\beta(f)) \subset \mathbb{P}^2$ を C の射影化と呼ぶ。ただし、β は Z に関する斉次化、すなわち $\beta : f(x, y) \mapsto Z^{\deg f} f\left(\frac{X}{Z}, \frac{Y}{Z}\right)$ である。

定義 10. 斉次多項式 $F \in k[X, Y, Z]$ により定まる射影曲線 $C := Z_p(F)$ に対し、$Z_a(\alpha(F)) \subset \mathbb{A}^2$ をその $Z \neq 0$ のアフィン部分と呼ぶ。ただし α は Z に関する非斉次化、すなわち $\alpha : F(X, Y, Z) \mapsto F(x, y, 1)$ である。

アフィン部分には他に X に関するもの、Y に関するものがある。

命題 11. 斉次多項式 $F \in k[X, Y, Z]$ に対して、

$$Z_p(F) \cap \sqcup_c = \psi_c(Z_a(\alpha(F)))$$

ただし $\sqcup_c$ と ψ_c は補題 1 で定義したものである。

証明. $\sqcup_c \ni p = (a:b:1)$ をとる。

$$\begin{array}{rl} & p \in Z_p(F) \\ \Longleftrightarrow & F(a,b,1)=0 \\ \Longleftrightarrow & \alpha(F)(a,b)=0 \\ \Longleftrightarrow & \phi_c(p) \in Z_a(\alpha(F)) \\ \Longleftrightarrow & p \in \psi_c(Z_a(\alpha(F))) \end{array}$$

∎

補題 12. $f \in k[x,y]$ に対して、

$$\overline{\psi(Z_a(f))} = Z_p(\beta(f))$$

ただし、左辺は Zariski 位相での閉包である。

この補題は利用しないので証明もしない。

1.5 特異点

定義 13 (射影曲線の特異点)**.** 斉次多項式 F により定まる射影曲線 $C := Z_p(F)$ において、$p \in C$ が C の特異点であるとは、p を含むアフィン開被覆における C のアフィン部分が p に於いて特異点を持つことと定める。

したがって、$p \in C$ が C の特異点であるとは、$p \in \sqcup_i$ のとき、アフィン部分 $Z_a(\alpha(F))$ が $\phi_i(p)$ に於いて特異点を持つことである。

補題 14. p が $Z_p(F)$ の特異点である。 $\Longleftrightarrow$ $F_X(p) = F_Y(p) = F_Z(p) = 0$ [6)]

証明. $\sqcup_c \ni p = (a:b:1)$ をとり、$f := \alpha(F) = F(x,y,1)$ とおく。$C := Z_a(f)$ が特異点 p を持つとは、f の斉次分解 $\{f_k\}$ について $m_p(C) = \min\{k : f_k(p) = 0\} > 1$ ということ。したがって、

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

ここで $F_X(x,y,1) = f_x(x,y)$, $F_Y(x,y,1) = f_y(x,y)$ だったから、

$$F_X(a,b,1) = F_Y(a,b,1) = 0$$

が成り立つ。これは特異点の定義と同値。

さらにここでオイラーの公式

$$XF_X + YF_Y + ZF_Z = (\deg F)F$$

を用いると、

$$a \cdot F_X(p) + b \cdot F_Y(p) + 1 \cdot F_Z(p) = (\deg F)F(p) = 0$$

だから、$F_Z(a,b,1) = 0$ も出る。逆に、$F_X(p) = F_Y(p) = F_Z(p) = 0$ は明らかに $F_X(p) = F_Y(p) = 0$ を含む。

∎

6) F_X は斉次多項式 F を X について偏微分したものである。F_Y なども同様。

1.6 接線

定義 15 (射影曲線の接線)**.** 射影曲線 C の点 $p \in C$ における接線を、p を含むアフィン開被覆の $\phi(p)$ における接線の射影化として定める。

補題 16. 斉次多項式 F について、$p \in C := Z_p(F)$ が C の非特異点（単純点）であるとき、p における C の接線は次式で定まる。

$$F_X(p)X + F_Y(p)Y + F_Z(p)Z = 0$$

証明. $\sqcup_c \ni p = (a:b:1)$ をとり、$f := \alpha(F)$ とする。C の $\sqcup_c$ におけるアフィン部分 $Z_a(f)$ への $\phi_c(p)$ に於ける接線は次で定まる。

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) = 0$$

f の定義より、

$$F_X(a,b,1)(x-a) + F_Y(a,b,1)(y-b) = 0$$

これを斉次化すれば

$$F_X(a,b,1)(X-aZ) + F_Y(a,b,1)(Y-bZ) = 0$$

オイラーの公式を用いれば、結論が得られる。

例として $F = XZ - Y^2$ を取ると、これの点 $p = (a:b:c)$ における接線は $cX - 2bY + aZ = 0$ となる。標数 2 の体に於いては、$cX + aZ = 0$ となり、これは点 $(0:1:0)$ を常に通る。接線が定点を通る曲線を strange 曲線と呼ぶが、これは以下の定理の通り、かなり限られた状況のものしか無い。

定理 17 (Samuel)**.** 非特異射影曲線で strange のものは、直線（自明な場合）か標数 2 の 2 次曲線に限る。

証明は Hartshorn, IV, Theorem 3.9 にある。

1.7 直線との交点数

$A = (a_0:a_1:a_2), B = (b_0:b_1:b_2) \in \mathbb{P}^2$ とおく。A, B を通る直線 L のパラメータ表示として、

$$L : (X:Y:Z) = sA + tB = (sa_0 + tb_0 : sa_1 + tb_1 : sa_2 + tb_2)$$

をとる。斉次多項式 F に L のパラメータ表示を代入して得られる多項式を

$$\Phi(s,t) = F(sa_0 + tb_0, sa_1 + tb_1, sa_2 + tb_2)$$

と置く。

L 上の点 P は $(s_0,t_0) \neq (0,0)$ によって $P = s_0A + t_0B$ と表される。このとき、$C \cap L$ に於ける C と L の交点数を

$$I(C,L;P) = \max\{m : (s_0t - t_0s)^m | \Phi(s,t)\}$$

で定義する。これは well-defined である。

問　射影曲線 $C = Z(F)$ と直線 L に対して、$L \not\subset C$ とする。体 k が代数的閉包ならば、

$$\sum_{P \in C \cap L} I(C, L; P) = \deg F$$

となる。これを示せ。ヒントはテイラー展開。

命題 18. $P \in \mathbb{P}^2$ を含むアフィン開被覆での、C と L のアフィン部分を C_0, L_0 とすれば

$$I(C, L; P) = i(C_0, L_0; \phi(P))$$

が成立する。

証明. 定義の確認　適当に座標変換して $L = Z_p(Y), P = (0 : 0 : 1)$ とする。$f(x, y) = \alpha(F) = F(x, y, 1)$ と置けば、$C := Z_p(F)$ と L のアフィン部分は

$$C_0 := Z_a(f), L_0 := Z_a(y)$$

である。L_0 のパラメータ表示は $(x, y) = (t, 0)$ とすれば、$P = (0 : 0 : 1)$ に対応する点は $t = 0$ で与えられる。アフィン曲線の交点数の定義より、$i(C_0, L_0; \phi(P)) = \max\{k : t^k | f(t, 0)\}$

F の分解　ここで、F を Y の多項式として整理する。つまり、F を多項式環 $k[X, Z][Y]$ の元として見る。$d := \deg F$ とおき、$F_i \in k[X, Z]$ を i 次斉次多項式とする。

$$F = F_d(X, Z) + F_{d-1}(X, Z)Y + \cdots + F_0(X, Z)Y^d$$

すると、

$$f(t, 0) = F(t, 0, 1) = F_d(t, 1)$$

となるから、

$$i(C_0, L_0; \phi(P)) = \max\{k : t^k | F_d(t, 1)\}$$

となる。

Φ の表示を見る　一方 L のパラメータ表示として $(X, Y, Z) = (t : 0 : s)$ をとれば、$P(= (0 : 0 : 1))$ に対応するのは $(s_0, t_0) = (1, 0)$ が与える点。したがって $\Phi(s, t) = F(t, 0, s) = F_d(t, s)$ となり、あとは単なる計算で結論が得られる。

$$\begin{aligned} & I(C, L; P) \\ = \ & \max\{m : (s_0 t - t_0 s)^m | \Phi(s, t)\} \\ = \ & \max\{k : t^k | F_d(t, s)\} \\ = \ & \max\{k : t^k | F_d(t, 1)\} \\ = \ & i(C_0, L_0; \phi(P)) \end{aligned}$$

■

1.8 射影変換

正則行列 $A \in GL(3,k)$ による線形写像

$$\begin{array}{ccc} A:\mathbb{A}^3 & \to & \mathbb{A}^3 \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} & \mapsto & A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \end{array}$$

が定まる。任意の $\lambda \in k$ に対し、

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto A \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix}$$

となるので、正則行列 A によって

$$\begin{array}{ccc} \phi_A:\mathbb{P}^2 & \to & \mathbb{P}^2 \\ (a:b:c) & \mapsto & \psi_Z(A \cdot {}^t[a\ b\ c]) \end{array}$$

が定まる。これは well-defined である。

明らかに以下が成り立つ。

$$\begin{array}{rcl} \phi_E & = & id_{\mathbb{P}^2} \\ \phi_{AB} & = & \phi_A \circ \phi_B \ (\forall A, B \in GL(3,k)) \end{array}$$

下の式から正則行列 A について ϕ_A は全単射となり、

$$(\phi_A)^{-1} = \phi_{A^{-1}}$$

となる。特に射影変換全体

$$PGL(2,k) := \{\phi_A : A \in GL(3,k)\}$$

は群を成す。これを射影変換群と呼ぶ。

補題 19. 正則行列 A が定める射影変換 ϕ_A を考える。3 点 $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^2$ に対して、P_1, P_2, P_3 が同一直線上に有ることと $\phi_A(P_1), \phi_A(P_2), \phi_A(P_2)$ が同一直線上に有ることは同値。

証明. $P_i = (p_{i0} : p_{i1} : p_{i2}) \in \mathbb{P}^2$ に対して $\mathbf{p}_i = {}^t[p_{i0}, p_{i1}, p_{i2}]$ とおく。この時、アフィン空間に於いて 2 点を通る直線は行列式で書ける、という命題から、以下のように証明が出来る。

$$\begin{array}{cl} & P_1, P_2, P_3 \text{ が同一直線上に有る} \\ \Longleftrightarrow & \det[\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3] = 0 \\ \Longleftrightarrow & (\det A)(\det[\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3]) = 0 \\ \Longleftrightarrow & \det[A\mathbf{p}_1\ A\mathbf{p}_2\ A\mathbf{p}_3] = 0 \\ \Longleftrightarrow & \phi_A(P_1), \phi_A(P_2), \phi_A(P_2) \text{ が同一直線上に有る} \end{array}$$

$\blacksquare$

命題 20 (Four Points Lemma)**.** 4 点 $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{P}^2$ はどの 3 点も同一直線上にないとする。$O_1 = (1:0:0), O_2 = (0:1:0), O_3 = (0:0:1), O_4 = (1:1:1)$ とするとき、

$$\phi(P_i) = O_i \ (i = 1, 2, 3, 4)$$

となる射影変換はただ一つ存在する。

証明. P_i と $\mathbf{p}_i$ と前のように定める。$B' = [\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3]$ と置けば、P_i はどの 3 つも同一直線上にないので B' は正則。$B = (B')^{-1}$ と置くと、

$$B[\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3] = BB' = E$$

なので、$i = 1, 2, 3$ について $\phi_B(P_i) = O_i$ となる。

$\phi(P_4)$ を考える。そのために

$$B\mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{4} (\lambda_i \cdot B\mathbf{p}_i) \tag{1}$$

とする。この時、$\lambda_i \neq 0$ である。実際、例えば λ_1 とすると

$$\phi_B(P_2) = O_2, \ \phi_B(P_3) = O_3, \ \phi_B(P_4) = (0 : \lambda_2 : \lambda_3)$$

となり、これらは直線 $X = 0$ 上にある。補題よりこれは 3 点 P_2, P_3, P_4 が同一直線上に有ることと同値であり、したがって仮定に反する。そこで正則行列 A を

$$A = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & & \\ & 1/\lambda_2 & \\ & & 1/\lambda_3 \end{bmatrix} B$$

と置けば、ϕ_A が求める射影変換。実際に計算してみると、

$$\begin{aligned} \phi_A(P_1) = \psi_c(A\mathbf{p}_1) = (\lambda_1 : 0 : 0) \quad &= O_1 \\ \phi_A(P_2) = \psi_c(A\mathbf{p}_2) = (0 : \lambda_2 : 0) \quad &= O_2 \\ \phi_A(P_3) = \psi_c(A\mathbf{p}_3) = (0 : 0 : \lambda_3) \quad &= O_3 \\ \phi_A(P_4) = \psi_c(A\mathbf{p}_4) = (1 : 1 : 1) \quad &= O_4 \end{aligned}$$

もしも $A' \in GL(3, k)$ によって $\phi_{A'}(P_i) = O_i$ が成立したとする。この時ある定数 $\alpha \in k^\times$ によって $A = \alpha A'$ となることを示す。この時、0 でない定数 μ_i によって、

$$A'[\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3 \ \mathbf{p}_4] = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & \mu_4 \\ 0 & \mu_2 & 0 & \mu_4 \\ 0 & 0 & \mu_3 & \mu_4 \end{bmatrix}$$

と書ける。

$$\frac{1}{\mu_4} A'\mathbf{p}_4 = \frac{1}{\mu_1} A'\mathbf{p}_1 + \frac{1}{\mu_2} A'\mathbf{p}_2 + \frac{1}{\mu_3} A'\mathbf{p}_3$$

また、式 (1) の左に $\frac{1}{\mu_4}A'B'$ を掛けると、

$$\frac{1}{\mu_4}A'\mathbf{p}_4 = \frac{\lambda_1}{\mu_4}A'\mathbf{p}_1 + \frac{\lambda_2}{\mu_4}A'\mathbf{p}_2 + \frac{\lambda_3}{\mu_4}A'\mathbf{p}_3$$

仮定より、$A'\mathbf{p}_i$ は基底になっているから、係数が一致して

$$\frac{\lambda_i}{\mu_4} = \frac{1}{\mu_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

が成立する。したがって、

$$\mu_4 A[\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3] = A'[\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3]$$

と、$B' = [\mathbf{p}_1\ \mathbf{p}_2\ \mathbf{p}_3]$ が正則であることから、

$$\mu_4 A = A'$$

が成立する。よって $\phi_A = \phi_{A'}$ である。これで一意性が言えた。

∎

補題 21. 斉次多項式 $F \in k[X, Y, Z]$ により定まる射影曲線 $C := Z_p(F)$ を ϕ_A で写した像は

$$\phi_A(C) = Z(F \circ A^{-1})$$

さらに $\deg(\phi_A(C)) = \deg C$ である。

証明. 任意の $P \in \mathbb{P}^2$ に対して、以下のようになる。

$$P \in \phi_A(C) \iff \phi_A^{-1}(P) \in C \iff F(A^{-1}P) = 0 \iff P \in Z(F \circ A^{-1})$$

さらに、一般に行列 M について $\deg F \geq \deg(F \circ M)$ であることを用いて後半を証明する。

$$\underbrace{\deg(F \circ A^{-1}) \leq \deg F}_{M=A^{-1}} = \underbrace{\deg(F \circ A^{-1} \circ A) \leq \deg(F \circ A^{-1})}_{M=A}$$

∎

定義 22. F, G を斉次多項式とし、$C := Z(F), D := Z(G)$ とおく。C, D が射影同値であるとは、ある $A \in GL(3, k), \lambda \in k^\times$ によって

$$G = \lambda F \circ A^{-1}$$

となることである。

注意　k が代数的閉包であるときは $\lambda' = \lambda^{1/\deg F} \in k$ となるので、$F \circ (\lambda' A)^{-1} = \lambda F \circ A^{-1}$ が成り立つ。つまり、定数 λ を行列 A に纏めることが出来る。

例: 平行移動　アフィン空間における平行移動 $(x, y) \mapsto (x-a, y-b)$ を、射影化 ψ_Z によって射影変換にする。

$$\phi_A : (X : Y : Z) \mapsto (X - aZ : Y - bZ : Z)$$

このような射影変換 ϕ_A を与える正則行列 A を求めよう。

Four Points Lemma より、射影変換は 4 点の写った先が決まれば一意に定まる。4 点として $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ をとり、これを射影化してから ϕ_A で写す。するとその値から、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & -a \\ & 1 & -b \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

と定まる。