Ex6.1　Nonsingular Curve which Is Birational but Not Isomorphic to $\mathbb{P}^1$.

Y を $\mathbb{P}^1$ と同型でない nonsingular rational curve とする．rational は Ex4.4 で定義されていて，$\mathbb{P}^1$ と birational であることを意味する．したがって Them3.4 と Cor4.5 より $K := K(Y) \cong K(\mathbb{P}^1) = k[u,v]_{((0))}$．また，$Y$ が $\mathbb{P}^1$ と同型でないことから $\mathcal{O}(Y) =: R \neq k = \mathcal{O}(\mathbb{P}^1)$．$K(Y) \cong K(\mathbb{P}^1)$ の同型写像を用いて $R \subset K(\mathbb{P}^1)$ と考える．

(a)　Y is isomorphic to an open subset of $\mathbb{A}^1$.

$R \neq k$ より，Y 全体で定義される定数でない regular function $\alpha \in R \setminus k$ がとれる．

(b)　Y is affine.

(a) より $Y \equiv \mathbb{A}^1 \setminus \{P_1, \ldots, P_s\}$ となる $\{P_1, \ldots, P_s\}$ が存在する．この時 $f = (x - P_1) \cdots (x - P_s)$ とすれば，$Y \equiv \mathbb{A}^1 \setminus \mathcal{Z}_a(f)$．なので Lemma4.2 より Y は affine.

(c)　$A(Y)$ is UFD.

$\mathbb{A}^2$ の coordinate variable を x, y とする．Lemma4.2 より，$A(Y) = k[x]_f$．Ati-Mac Prop3.11 より，局所化 $k[x]_f$ のイデアルはすべて拡大イデアルである．すなわち，$k[x]_f$ の任意のイデアル $\mathfrak{a}$ に対して $k[x]_f$ のイデアル $\mathfrak{a}'$ が存在し，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}'$ の元を $x \mapsto x/1$ で写したもので生成される．$k[x]$ は PID だから，$k[x]_f$ も PID．PID ならば UFD であることは代数概論にもある．

Ex6.2　An Elliptic Curve

$f = y^2 - x^3 + x$ を考えよう．$Y = \mathcal{Z}_a(f) \subset \mathbb{A}^2$ とし，考える体 k の標数は 2 でないとする．また，$K = K(Y), A = A(Y), \bar{x} = x + (f), \bar{y} = y + (f)$ とする．

(a)　Y :: nonsingular, and A :: integrally closed domain.

Y が nonsingular affine curve であることは次の連立方程式が解を持たないことと同値である．

$$y^2 - x^3 + x = -3x^2 + 1 = 2y = 0.$$

$\operatorname{char} k \neq 2$ なので，これは以下と同値．

$$x(x+1)(x-1) = -3x^2 + 1 = 0.$$

これは明らかに解を持たない．

さらに affine curve Y については以下のような同値な命題の列があるので，A が integrally closed domain であることがわかる．

$$\begin{aligned}
&Y \text{ :: nonsingular affine curve}\\
\Longleftrightarrow\ &{}^\forall P \in Y,\ \ \mathcal{O}_{P,Y} \text{ :: regular local ring}\\
\Longleftrightarrow\ &{}^\forall P \in Y,\ \ \mathcal{O}_{P,Y} \text{ :: integrally closed domain}\\
\Longleftrightarrow\ &Y \text{ :: normal affine curve}\\
\Longleftrightarrow\ &A (= A(Y)) \text{ :: integrally closed domain}
\end{aligned}$$

Them 5.1, Them6.2, Ex3.17d を用いた．

(b) $k[\bar{x}]$ :: polynomial ring, and A is the integral closure of $k[\bar{x}]$ in K.

$\bar{x}$ が k 上超越的であることを示そう．仮に超越的でない，すなわち代数的であるとすると，多項式 $p(X) \in k[X]$ が存在して $p(\bar{x}) = 0$ となる．これは $p(x) \in (f)$ と同値．したがって $\mathcal{Z}_a(p) \subseteq \mathcal{Z}_a(f) = Y$ と同値である．仮に $p(x)$ の k における解の 1 つを α とすると，$p(x)$ が y を含まないので，以下が成り立つことが必要.

$$\mathcal{Z}_a(x - \alpha) \subseteq Y.$$

なので $y^2 - \alpha^3 + \alpha = 0$ が恒等式になる．しかしこれは不可能．よって $\bar{x}$ は k 上超越的であり，したがって $k[\bar{x}]$ は polynomial ring である．

$k[\bar{x}]$ は polynomial ring だから，$k[\bar{x}]$ は Y の任意の局所環に含まれる．Ati-Mac Cor5.22 より $k[\bar{x}]$ の integral closure は $k[\bar{x}]$ を含むすべての付値環の共通集合．Y は nonsingular であるから Them6.2 より Y の任意の局所環は付置環である．したがって以下が言える．

$$\text{the integral closure of } k[\bar{x}] = \bigcap_{P \in Y} A_{\mathfrak{m}_P} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A)} A_{\mathfrak{m}}.$$

最右辺は Them3.2 の証明で述べられているように A に等しいから，$k[\bar{x}]$ の integral closure は A.

(c) Properties of the Norm.

A の自己準同型 σ を $\bar{x} \mapsto \bar{x}; \bar{y} \mapsto -\bar{y}$ で定義する．σ は明らかに $\sigma^2 = \mathrm{id}$ で，巡回群をなす．これを用いて norm N を $a \in A \mapsto a \cdot \sigma(a)$ と定義する．これは体拡大 $K/k(\bar{x})$ の norm（対論で用いられる）である．

σ で fix される元がなす A の部分環を考える．$\sigma(\bar{x}^m \bar{y}^n) = (-1)^n \bar{x}^m \bar{y}^n$ と $-1 \neq 1$ より，$\bar{y}$ の次数が偶数であるような単項式が fix される．よって，

$$A^{\langle \sigma \rangle} = k[\bar{x}, \bar{y}^2] = k[\bar{x}, \bar{x}^3 - \bar{x}] = k[\bar{x}].$$

$\sigma(N(a)) = \sigma(a) \cdot \sigma^2(a) = N(a)$ より, $\mathrm{im}\, N \subset k[\bar{x}]$．また $N(1) = 1 \cdot \sigma(1) = 1$, $N(ab) = ab \cdot \sigma(a)\sigma(b) = N(a)N(b)$ が成り立つ．

(d) The units of $A = k^\times$, and $\bar{x}, \bar{y}$ :: irreducible elements.

単元 $u \in A^\times$ をとる．(b) で示したことから，以下がわかる．

$$1 = N(uu^{-1}) = N(u)N(u^{-1}) \in k[\bar{x}].$$

したがって $N(u)$ は $k[\bar{x}]$ の単元であるが，すでに示したとおり $k[\bar{x}]$ は polynomial ring なので $N(u) = u \cdot \sigma(u) \in k^\times$．$\mathcal{Z}_a(N(u))$ を考えると，

$$\mathcal{Z}_a(N(u)) = \mathcal{Z}_a(u) \cup \mathcal{Z}_a(\sigma(u)) = \emptyset.$$

なので $\mathcal{Z}_a(u) = \emptyset$ であり，したがって $u \in k^\times$.

$\bar{x}$ が irreducible でないと仮定しよう．すると $\bar{x} = uv$ となる非単元 $u, v \in A \setminus k^\times$ がある．

$$u = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y} \quad \text{where} \quad \alpha, \beta \in A$$

とおこう．すると $(\alpha v-1)\bar{x}+\beta v\bar{y}=0$ が成り立つ．$v \in A$ は非単元だから $\alpha v \neq 1$．よって $\bar{x}=\frac{\beta v}{1-\alpha v}\bar{y}$ となる．このことから Y は y 軸全体を含むか，または x 軸との交点は $(0,0)$ のみとなるか，どちらかになる．しかし実際はどちらでもなく，矛盾．よって $\bar{x}$ は irreducible.

$\bar{y}$ が irreducible でないと仮定すると，同様にして以下にできる．

$$\bar{y}=\omega\bar{x} \quad \text{where} \quad \omega \in k(\bar{x},\bar{y}).$$

これを f に代入すると，$\bar{x}(\bar{x}^2+\omega^2\bar{x}-1)=0$ が得られる．Y は y 軸全体 $(=\mathcal{Z}_a(x))$ を含まないので

$$\bar{x}^2+\omega^2\bar{x}-1=0.$$

これは Y 上の任意の点で成り立つ方程式であるから Y は y 軸と交わらない．しかし実際は交わるので矛盾．

(e) Y :: not rational curve.

A において，以下の等式が成り立つ．

$$\bar{y}^2=\bar{y}\cdot\bar{y}=\bar{x}\cdot(\bar{x}-1)\cdot(\bar{x}-1).$$

$\bar{x},\bar{y}$ は既約元であるから，これは $\bar{y}^2$ に 2 つの既約元分解を与えている．よって $A=A(Y)$ は UFD でなく，同時に Y は明らかに $\mathbb{P}^1$ と同型でない．これらのことから Ex6.1c より Y は rational でない．

Ex6.3 Give counterexample to Prop6.8.

■If $\dim X \geq 2$.

■If Y :: not projective variety.

Ex6.4 Make surjective morphism $\phi : Y \to \mathbb{P}^1$ from nonconstant rational function.

Y :: nonsingular projective curve とする．Y 上の任意の定数でない rational function $f=g/h$ に対して以下のように写像を定める．

$$\begin{array}{rccc} \phi: & Y & \to & \mathbb{P}^1 \\ & P & \mapsto & (1:f(P))=(h(P):g(P)) \end{array}$$

TODO: これが surjective morphism であることを示す．

Ex6.5 Subvariety of nonsingular projective curve is closed subset.

Ex6.6 Automorphisms of $\mathbb{P}^1$.

$\mathbb{P}^1=\mathbb{A}^1+\{\infty\}$ を考える．Fractional linear transformation of $\mathbb{P}^1$ を以下のような写像と定める．

$$x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{where} \quad a,b,c,d \in k, ad-bc \neq 0.$$

Fractional linear transformation of $\mathbb{P}^1$ 全体を $PGL(1)$ と書く．

(a) $(ax+b)/(cx+d) \in PGL(1)$ induces an automorphism of $\mathbb{P}^1$.

$\frac{ax+b}{cx+d}$ の逆写像は $\frac{-dx+b}{cx-a}$ である．これらは明らかに $\mathbb{P}^1$ の定数でない rational function.（$\mathbb{P}^1 = \mathbb{A}^1 + \{\infty\}$ と考えていることに注意．必要なら $x = u/v$ と斉次化せよ.）Ex6.4 より，$\mathbb{P}^1$ の automorphism が誘導される．

(b) $\operatorname{Aut}\mathbb{P}^1 \cong \operatorname{Aut} k(x)$.

$\phi \in \operatorname{Aut}\mathbb{P}^1$ を任意に取ると，以下のように $k(x)$ の自己同型写像が誘導される．

$$\begin{array}{cccc} \phi^*: & k(x) & \to & k(x) \\ & \dfrac{g}{h}(x) & \mapsto & \left(\dfrac{g}{h} \circ \phi\right)(x) \end{array}$$

これが自己同型であることは morphism の定義から明らか．

逆に $\psi \in \operatorname{Aut} k(x)$ を任意に取ると，以下のように $\mathbb{P}^1$ の自己同型写像が誘導される．

$$\begin{array}{cccc} \psi_*: & \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^1 \\ & a & \mapsto & (\psi(x))(a) \end{array}$$

$\psi(x) \in k(x)$ に注意.

(c) $\operatorname{Aut} k(x) = PGL(1)$, and then $\operatorname{Aut}\mathbb{P}^1 \cong PGL(1)$.

$k(x)$ の自己準同型は x の像で決定されることは明らか．そこで $\operatorname{Aut} k(x)$ のある元 ψ は x を $f/g \in k(x)$ に写すとしよう．この時，f, g は高々 1 次式でなくては ψ が inverse morphism を持たないことを示す.

$X = f/g$ としよう．

$$X = \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_n x^n + \cdots + b_0} \quad \text{where} \quad \{a_i\}, \{b_j\} \subset k, a_n \text{ or } b_n \neq 0.$$

必ずしも分子分母の次数は n でないが n 以下であることに注意せよ．X の値が与えられた時，$\psi^{-1}(X)$ は以下の方程式の解集合である．

$$(a_n - Xb_n)x^n + (a_{n-1} - Xb_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_0 - Xb_0) = 0.$$

ψ が全単射ならば任意の X について $\psi^{-1}(X)$ は一点集合である．よって $n = 1$，すなわち $\operatorname{Aut} k(x) \subseteq PGL(1)$．逆の包含関係は明らかだから，主張が示せた．

Ex6.7 If $\mathbb{A}^1 - \{P_1, \ldots, P_s\} \equiv \mathbb{A}^1 - \{Q_1, \ldots, Q_t\}$ then $s = t$. Converse?