

ゼミノート #4

Fibered Categories

七条彰紀

2018 年 12 月 30 日

1 Motivation : Fibered Categories

“family”あるいは“object on/over a base space”（例えば schemes over a scheme や sheaves on a scheme など）の抽象的な枠組が fibered category である．今後は fibered category が提供する枠組を sheaves on a site の貼り合わせや stack の定義の為に活用する．

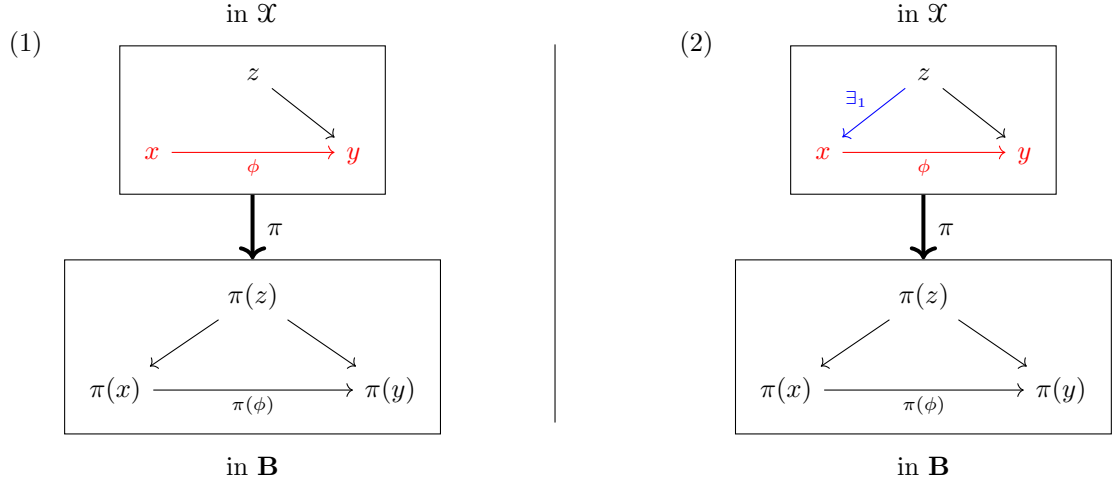
2 Definition : Fibered Categories

$\mathcal{X}, \mathbf{B} :: \text{category}$ と関手 $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{B}$ を考える．

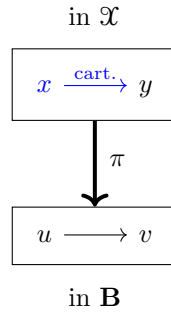
- π を projection あるいは fibration と呼ぶ．
- \mathcal{X} を fibered category と呼ぶ．
- $\pi(O) = P$ であるとき O は P の上にある (O is over P) という．

定義 2.1 (Cartesian Arrow, Cartesian Lifting, Cartesian Functor, Base Preserving Natural Transformation, [2] and [1])

- (i) 以下の性質 (Triangle Lifting という) を満たす \mathcal{X} の射 $\phi: x \rightarrow y$ を cartesian arrow という: (1) にあるような対象と射があるとき, (2) の様に射 $z \rightarrow y$ がただ一つ存在し, 可換となる.



- (ii) $y \in \mathcal{X}, u \rightarrow \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対し, 以下の図式を満たす^{†1} $x \in \mathcal{X}$ と cartesian arrow $:: x \rightarrow y \in \mathcal{X}$ を, cartesian lifting(or cleavage) of $u \rightarrow \pi(y)$ と呼ぶ.



- (iii) 任意の $y \in \mathcal{X}$ と $u \rightarrow \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対して cartesian lifting が存在する $\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{B}$ を fibered category という. fibered category over \mathbf{B} が成す圏を $\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ とする.
- (iv) 二つの fibered category $:: \pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{B}, \pi': \mathcal{X}' \rightarrow \mathbf{B}$ について, \mathcal{X} と \mathcal{X}' の間の射 (morphism of fibered categories, cartesian functor) とは, functor $:: g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ であって, π, π' と整合的^{†2}であり, cartesian arrow を cartesian arrow に写すもの.
- (v)

注意 2.2

少し圏論の言葉を整理しておく.

対象を 0-morphism (あるいは 0-cell) と呼ぶ時, 非負整数 $k \geq 0$ について, k -morphism (cell) は $(k-1)$ -

^{†1} すなわち, $\pi(x) = u, \pi(x \rightarrow y) = u \rightarrow \pi(y)$ を満たす.

^{†2} すなわち $\pi' \circ g = \pi$ を満たす.

morphism (cell) の間の射と定義できる. こうして k -morphism (cell) は階層を成す. そこで, ここで定義した性質を階層別にまとめると次のように成る.

arrow	arrow in a fibered category	(i) Cartesian Arrow, (ii) Cartesian Lifting
0-cell	fibered category	(iii) Existence of Cartesian Lifting
1-cell	functor between fibered categories	(iii) Morphism of Fibered Category
2-cell	nat. trans. between functors	(iv) Base-Preserving Natural Transformation

通常の圏同型を 1-iso と呼び $\stackrel{1}{\cong}$ と書く. この時, 階層ごとの iso/equiv は以下のようなものである.

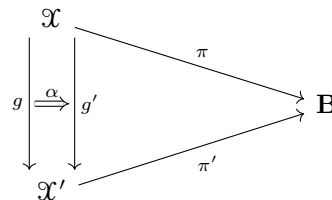
iso.	$x \cong y$	\iff	2 つの arrow $\phi: x \rightrightarrows y: \psi$ が存在し, $\psi \circ \phi = \text{id}_x, \phi \circ \psi = \text{id}_y$.
1-iso.	$x \stackrel{1}{\cong} y$	\iff	2 つの 1-cell $\phi: x \rightrightarrows y: \psi$ が存在し, $\psi \circ \phi = \text{id}_x, \phi \circ \psi = \text{id}_y$.
1-equiv.	$x \stackrel{1}{\simeq} y$	\iff	2 つの 1-cell $\phi: x \rightrightarrows y: \psi$ が存在し, $\psi \circ \phi \cong \text{id}_x, \phi \circ \psi \cong \text{id}_y$.
2-iso.	$x \stackrel{2}{\cong} y$	\iff	2 つの 2-cell $\phi: x \rightrightarrows y: \psi$ が存在し, $\psi \circ \phi = \text{id}_x, \phi \circ \psi = \text{id}_y$.
2-equiv.	$x \stackrel{2}{\simeq} y$	\iff	2 つの 2-cell $\phi: x \rightrightarrows y: \psi$ が存在し, $\psi \circ \phi \stackrel{1}{\cong} \text{id}_x, \phi \circ \psi \stackrel{1}{\cong} \text{id}_y$.

注意 2.3

Fib(B) は 2-category である. 2-category は 2-morphism (**Fib(B)** では natural transformation) に “vertical composition” と “horizontal composition” の二種類の合成が定まる圏である. 詳しくはこのノートでは触れない.

定義 2.4 (Base-Preserving Natural Transformation, HOM, Equivalence)

- (i) 二つの fibered category $:: \pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{B}, \pi': \mathcal{X}' \rightarrow \mathbf{B}$ の間の 2 つの射 $g, g': \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ と natural transformation $:: \alpha: g \rightarrow g'$ を考える.



任意の $x \in \mathcal{X}$ について, $\pi'(\alpha_x): \pi'(g(x)) \rightarrow \pi'(g'(x))$ が恒等射になるとき, α を base-preserving natural transformation という.

- (ii) $\mathcal{X}, \mathcal{X}' \in \mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ について, $\text{HOM}_{\mathbf{B}}(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ を次の圏とする.

Object. morphism of fibered category $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$.

Arrows. base-preserving natural transformation.

- (iii) morphism of fibered category $:: g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$ が equivalence of fibered category であるとは, 別の morphism $h: \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ が存在し, $h \circ g$ と $\text{id}_{\mathcal{X}}$, $g \circ h$ と $\text{id}_{\mathcal{X}'}$ の間に base-preserving isomorphism が存在すること^{†3}.

$$h \circ g \stackrel{2}{\cong} \text{id}_{\mathcal{X}}, g \circ h \stackrel{2}{\cong} \text{id}_{\mathcal{X}'}$$

二つの fibered category が equivalent であるとは, 二つの間に equivalence of fibered category が存

^{†3} 基本的には category of equivalence の定義と同じである.

在するということである。

注意 2.5

2-morphism (2-cell) を base-preserving natural transformation に制限した fibered category の圏を $\mathbf{Fib}^{\text{bp}}(\mathbf{B})$ とすると, HOM は $\text{Hom}_{\mathbf{Fib}^{\text{bp}}(\mathbf{B})}$ であるし, equivalence of fibered category は $\mathbf{Fib}^{\text{bp}}(\mathbf{B})$ での 2-iso である。

3 Examples : Fibered Categories

例 3.1

morphism of schemes $:: f: X \rightarrow Y$ を取る。この f に対し, f の pullback が成す圏 $\Pi(f)$ を考えることが出来る。以下のように定義する。

$$\begin{array}{l} \text{Object. pullback diagram} :: \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow f \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array} \\ \text{Arrow. pullback diagram と整合的な射の組 } (Z \rightarrow Z', P \rightarrow P'). \end{array}$$

$\Pi(f)$ から次のように projection が定まる。

$$\begin{array}{ccc} \pi: & \Pi(f) & \rightarrow \mathbf{Sch}/Y \\ & \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow f \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array} & \mapsto [Z \rightarrow Y] \end{array}$$

ここで注意したいのは, $\Pi(f)$ は pullback of f の同型類や代表ではなく, pullback of f 全てであることである。したがって $\pi: \Pi(f) \rightarrow \mathbf{Sch}/Y$ は pullback of f を選択公理無しに扱う枠組を与えている。

例 3.2

category $:: \mathbf{C}$ について, arrow category $:: \mathbf{C}^{\rightarrow}$ を以下で定める。

Object. \mathbf{C} の射 ($[x \rightarrow u]$ の様に表記する)。

$$\begin{array}{l} \text{Arrow. 射 } [x \rightarrow u] \rightarrow [y \rightarrow v] \text{ は次の図式を可換にする } x \rightarrow y, u \rightarrow v \text{ の組:} \\ \begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & y \\ \downarrow & & \downarrow \\ u & \longrightarrow & v \end{array} \end{array}$$

すると Cartesian Lifting は \mathbf{C} が pullback を持つことを意味し, Triangle Lifting は pullback の普遍性を意味する。

例 3.3

以下の関手は fibration である。

$$\begin{array}{ccc} \pi: & \mathbf{Sch}/X & \rightarrow \mathbf{Sch} \\ & [Y \rightarrow X] & \mapsto Y \end{array}$$

4 Propositions : Fibered Categories

命題 4.1 ([3] Prop3.4)

- (i) cartesian arrow の合成は cartesian arrow である.
- (ii) $\phi: x \rightarrow y, \psi: y \rightarrow z$ について, $\psi \circ \phi, \psi :: \text{cartesian arrow}$ ならば $\psi :: \text{cartesian arrow}$.

(証明). Triangle Lifting のみを用いて証明できる. 簡単なので証明は省略する. ■

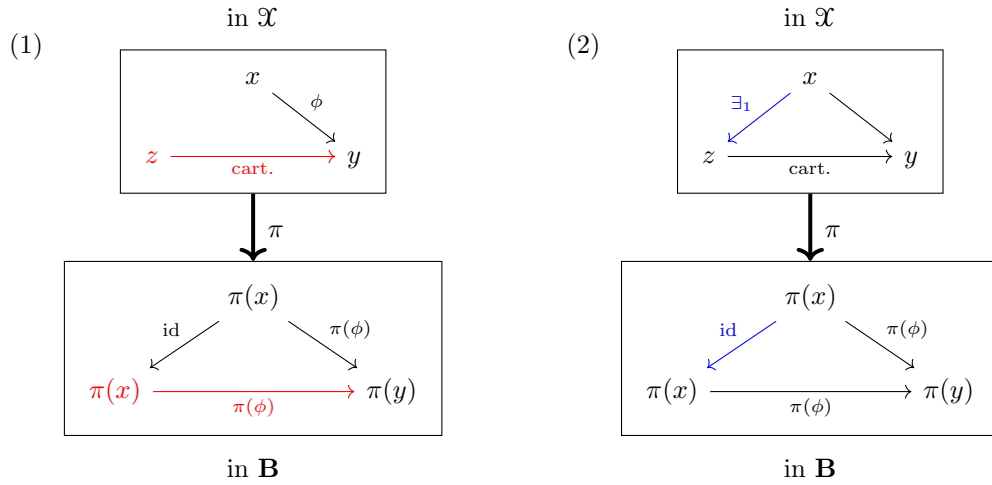
次の命題の証明は Cartesian Lifting と Triangle Lifting の使い方をよく示している.

命題 4.2

$\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{B}$ を fibered category over \mathbf{B} とする. \mathcal{X} の射 $x \rightarrow y$ は以下のような二つの射の合成 $x \rightarrow z \rightarrow y$ に分解できる.

- $x \rightarrow z :: \text{over } \text{id}_{\pi(x)}$.
- $z \rightarrow y :: \text{cartesian, over } \pi(x \rightarrow y)$.

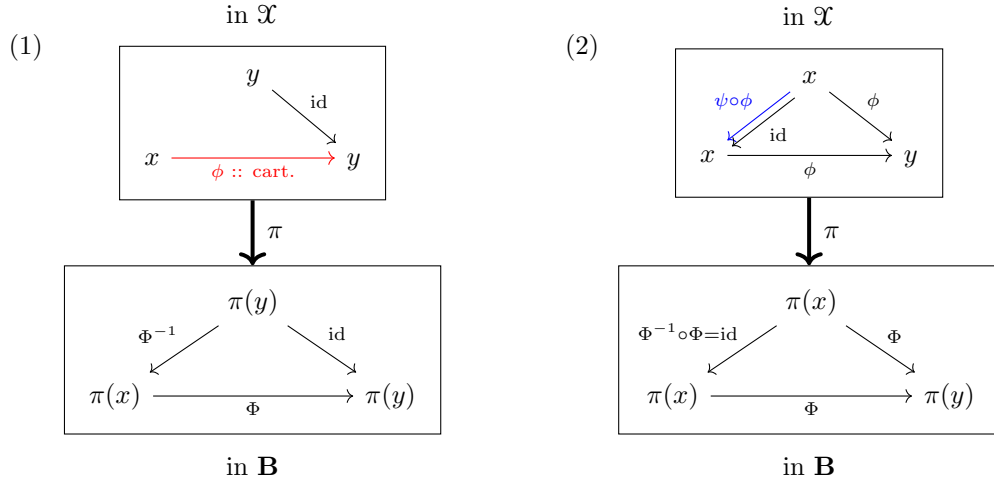
(証明). $\pi(\phi)$ の cartesian lifting として以下の図式 (1) の z と $z \rightarrow y$ を得る. さらに Triangle Lifting より図式 (2) の通り $\text{id}_{\pi(x)}$ 上の射 $x \rightarrow z$ を得る.



命題 4.3

$\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{B}$ を fibered category とする. \mathcal{X} の任意の cartesian morphism $\phi: x \rightarrow y$ について, $\phi :: \text{iso}$ と $\Phi := \pi(\phi) :: \text{iso}$ は同値.

(証明). 以下の図式 (1) に Triangle Lifting を用いれば, $\phi \circ \psi = \text{id}_y$ なる射 $\psi: y \rightarrow x$ を得る. さらに図式 (2) に於いて, $\phi \circ \text{id}_x = \phi = \phi \circ \psi \circ \phi$ と Triangle Lifting の一意性から $\psi \circ \phi = \text{id}_x$ を得る.



5 Fiber of Fibered Categories

5.1 Motivation

5.2 Definition

定義 5.1 (Fiber)

$\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{B}$ を fibered category とする. 任意の $b \in \mathbf{B}$ について, 以下で定める圏を \mathcal{X}_b あるいは $\mathcal{X}(b)$ と書き, fiber of π at (over) b と呼ぶ:

Object. $\pi(x) = b$ となる object $:: x \in \mathcal{X}$.

Arrow. $\pi(\phi) = \text{id}_b$ となる arrow $:: \phi \in \mathcal{X}$.

morphism of fibered category $:: g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ から fiber の間に誘導される射を $g_B: \mathcal{X}_B \rightarrow \mathcal{Y}_B$ と書く.

注意 5.2

標語的には次のように定義されている.

$$\mathcal{X}_b = \mathcal{X}(b) := \pi^{-1} \left(b \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \text{id} \end{array} \right)$$

また, morphism of schemes $:: f: X \rightarrow B$ の fiber が $f^{-1}(b)$ と表現されることと比較せよ.

\mathcal{X} は上で定義した fiber と cartesian lifting によって contravariant functor に成ることが予想される. しかしこれは一般には正しくない. 正確には, fibered category の fiber は一般に psuedo-functor となる. このことは後に証明する.

定義 5.3 (Psuedo-functor (weak 2-functor))

(以下の URL を参照せよ: <https://stacks.math.columbia.edu/tag/003G>.) 2-圏 \mathbf{C} から 2-圏 \mathbf{D} への psuedo-functor $:: F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ とは, \mathbf{C} の object を \mathbf{D} の object へ, \mathbf{C} の arrow を \mathbf{D} の arrow へ対応させるものであり, 以下を満たす.

かる．条件 (b) については，各 $f: c \rightarrow d, g: d \rightarrow e \in \mathbf{C}$ と各 $b \in \mathbf{B}$ について補題 (5.4) を用いれば $\mathcal{X}(g \circ f)(b) \cong \mathcal{X}(f) \circ \mathbf{B}(g)(b)$ が得られる．あとはこの同型が自然である（すなわち自然変換を定める）ことを確かめれば良い． ■

この事実は次のセミナーで用いる．

定理 5.6 (2-Yoneda Lemma (Fibered Yoneda Lemma))

$\pi: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{B} ::$ fibered category とする．以下のように関手を定める．

$$\begin{array}{ccc} Y: & \mathbf{B} & \rightarrow \mathbf{Fib}(\mathbf{B}) \\ & U & \mapsto \mathbf{B}/U \end{array}$$

ここで \mathbf{B}/U は例 (3.3) にあるとおり fibered category over \mathbf{B} である．

この時，圏同値 $\mathrm{HOM}_{\mathbf{U}}(Y(U), \mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}(U)$ が成り立つ．

(証明). (TODO) ■

注意 5.7

この定理から， $\mathcal{X}(U)$ を「空間」 \mathcal{X} の U -rational points と考えることが出来る．また，この定理から関手 Y が $U \in \mathbf{B}$ の fibered category over \mathbf{B} への「昇格」を与えていることが分かる．

系 5.8

圏同値 $U, V \in \mathbf{B}$ について $Y(U) \simeq Y(V)$ と $U \cong V$ は同値．

参考文献

- [1] Behrang Noohi. A quick introduction to fibered categories and topological stacks. <http://www.maths.qmul.ac.uk/~noohi/papers/quick.pdf>.
- [2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [3] Angelo Vistoli. Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008). <http://homepage.sns.it/vistoli/descent.pdf>.