Cantor-Bernstein-Schröder の定理

七条 彰紀

2020 年 3 月 13 日

以下で述べる証明は，[1] にある証明を徹底的に詳述したものである．教育的な証明とも言えるだろう．この証明の歴史については [2] の Part IV が参考になる．特に，ここでの証明は Chapter 35(pp.343-353) にある Tarski's Fixed-Point Theorem を応用したものに近いと思われる．

1 定理

定理 1.1 (表現 1)
集合 M, N についてそれぞれの濃度を $|M|, |N|$ のように表す．$|M| \leq |N|$ かつ $|M| \geq |N|$ ならば $|M| = |N|$ である．

定理 1.2 (表現 2)
M, N を集合とし，単射 $f : M \to N$ と単射 $g : N \to M$ があったとする．この時全単射 $h : M \to N$ が存在する．

表現 1 はこの定理を証明するモチベーションの出処がよく分かる．表現 2 からは定理が写像についての基本的な定理であることが分かる．

2 証明

この定理が述べているのは全単射 h の存在であるから，証明の方針は二つ有る．一つは別の存在定理の帰結として h の存在を示す方針，もう一つは全単射 h を実際に構成する方針である．このレポートでの証明は前者と後者の両方[†1]を使う．すなわち，ある集合の存在を示し，それを用いて写像 h を構成する．

2.1 準備.

単射 $f : M \to N$ と任意の部分集合 $S, T \subseteq M$ について以下が成り立つ．

$$f^{-1}(f(S)) = S, \quad f(M \setminus S) = N \setminus f(S), \quad f(S) \cap f(T) = f(S \cap T).$$

これらの命題は集合と写像について書いた本ならどれにでも書かれているようなものである．

[†1] なので証明の方針は三つある．

2.2　全単射 h の構成方法

$f, g^{-1} \colon M \to N$ とする．M から N への全単射 h を作る方法として，M の各元が M の部分集合 S に属すか属さないかによって M の元を送る先を $f(x)$ か $g^{-1}(x)$ にする方法がある．

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in S) \\ g^{-1}(x) & (x \in M \setminus S) \end{cases}$$

ただし $S \subset M$ は以下の 3 つの条件を満たす．

(a) $f(S) \cup g^{-1}(M \setminus S) = N$.

(b) $M \setminus S \subseteq g(N)$.

f は M 全体で定義されるが，像が N 全体とは限らない．一方 g^{-1} は M 全体で定義されるとは限らないが，像は N 全体である．この二つを組み合わせることで全単射が作れそうだ，というのがこの構成の着想である．しかし f, g^{-1} が互いをうまく補い合えるかどうかは自明でない．

2.3　写像 F

写像 F を以下のように定義する．

$$\begin{array}{cccc} F: & \mathcal{P}(M) & \to & \mathcal{P}(N) \\ & S & \mapsto & M \setminus g(N \setminus f(S)) \end{array}$$

そして $F(S_0) = S_0$ となる集合 S_0，すなわち F の不動点が存在すると仮定する．この時，以下のようにして (a),(b) が成立することが分かる．

$$\begin{aligned} & S_0 = M \setminus g(N \setminus f(S_0)) \\ \iff\ & M \setminus S_0 = g(N \setminus f(S_0)) \subseteq g(N) && \text{(b)} \\ \implies\ & g^{-1}(M \setminus S_0) = N \setminus f(S_0) \\ \implies\ & f(S_0) \cup g^{-1}(M \setminus S_0) = N && \text{(a)} \end{aligned}$$

したがって，我々は F の不動点 S_0 を構成すれば良い．

2.4　写像 F はどうやって着想されるのか

(a) $f(S) \cup g^{-1}(M \setminus S) = N$ に注目する．この式は g^{-1} を用いているが，これを取り除く方針で式変形をする．これは丁度直前の subsection における変形を逆転させたものである．

$$\begin{aligned} f(S_0) \cup g^{-1}(M \setminus S_0) &= N \\ g^{-1}(M \setminus S_0) &= N \setminus f(S_0) \\ M \setminus S_0 &= g(N \setminus f(S_0)) \\ S_0 &= M \setminus g(N \setminus f(S_0)) \end{aligned}$$

実際に上から下が示されるためには $f(S) \cap g^{-1}(M \setminus S) = \emptyset$（1 行目 $\implies$ 2 行目）と $g(g^{-1}(M \setminus S_0)) = M \setminus S_0$（2 行目 $\implies$ 3 行目）が必要である．さらに，(a) から (b) $M \setminus S \subseteq g(N)$ を示すことも出来ない．

しかし，最終的に現れる $S_0 = M \setminus g(N \setminus f(S_0))$ を「S_0 は不動点」と解釈することで，直前の subsection のような結果が得られる．示したい命題 (a) からはじめて荒っぽい式変形を行い着想を得る，という，数学者の仕事が見える証明である．

2.5　F の不動点

以上の議論から，我々は写像 F の不動点さえ求めれば全単射 h が構成できることがわかった．また，F について次が成り立つ．

$$^{\forall}I, J \subseteq M,\ \ I \subseteq J \implies F(I) \subseteq F(J)$$

これは次のように示せば良い．

$$\begin{aligned} & I \subseteq J \\ \Longrightarrow\ & f(I) \subseteq f(J) \\ \Longleftrightarrow\ & N \setminus f(I) \supseteq N \setminus f(J) \\ \Longrightarrow\ & g(N \setminus f(I)) \supseteq g(N \setminus f(J)) \\ \Longleftrightarrow\ & M \setminus g(N \setminus f(I)) \subseteq M \setminus g(N \setminus f(J)) \\ \Longleftrightarrow\ & F(I) \subseteq F(J) \end{aligned}$$

このことを用いて 2 つの証明を述べる．

2.6　F の不動点が存在することの証明 (非構成的)

Tarski's Fixed-Point Theorem を用いる．

2.7　F の不動点が存在することの証明 (構成的)

明らかに $M \supseteq F(M)$ なので，両辺を繰り返し F で写せば

$$M \supseteq F(M) \supseteq F^2(M) \supseteq \cdots .$$

が得られる．さて，以下の集合が F の不動点である．

$$S_0 = \bigcap_{i \geq 0} F^i(M) = M \cap F(M) \cap F(F(M)) \cap \cdots .$$

これが不動点であることは以下のように示される．

$$
\begin{aligned}
F(S_0) =& F\left(\bigcap_{i\geq 0} F^i(M)\right) \\
=& M \setminus g\left(N \setminus f\left(\bigcap_{i\geq 0} F^i(M)\right)\right) \\
=& M \setminus g\left(N \setminus \bigcap_{i\geq 0} f(F^i(M))\right) \\
=& M \setminus g\left(\bigcup_{i\geq 0} N \setminus f(F^i(M))\right) \\
=& M \setminus \bigcup_{i\geq 0} g(N \setminus f(F^i(M))) \\
=& \bigcap_{i\geq 0} M \setminus g(N \setminus f(F^i(M))) \\
=& \bigcap_{i\geq 0} F(F^i(M)) \\
=& \bigcap_{i\geq 1} F^i(M) \\
=& M \cap \bigcap_{i\geq 1} F^i(M) \\
=& \bigcap_{i\geq 0} F^i(M) \\
=& S_0
\end{aligned}
$$

$M \supseteq F(M) \supseteq \cdots$ の他に，f が単射であることを用いた．

参考文献

[1] マーティン・アイグナー（英語版），ギュンター・ツィーグラー（英語版）『天書の証明』蟹江幸博 訳，丸善出版，2012 年 9 月（原著 2002 年 12 月），縮刷版．

[2] Arie Hinkis (2013) “Proofs of the Cantor-Bernstein theorem. A mathematical excursion” Science Networks. Historical Studies 45, Springer Basel.