

この note では Hartshorne “Algebraic Geometry” p.61 にある sheaf property (3) を Identity Axiom と呼び、同じく (4) を Gluability Axiom と呼ぶ。これらの名称は Vakil “Foundations of Algebraic Geometry” にあるものである。

## Ex1.1 Constant Sheaf is Associated to Constant Presheaf.

$A ::$  abelian group,  $X ::$  topological space とする。任意の空でない開集合  $U \subseteq X$  について  $\mathcal{A}(U) = A$  とし, restriction map  $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  は  $\text{id}_A$  とする。この  $\mathcal{A}$  を constant presheaf と呼ぶ。 $\mathcal{A}$  に対応する sheaf を  $\mathcal{A}^+$  としよう。また, 開集合  $U \subseteq X$  に対し,  $\hat{\mathcal{A}} = \{f : U \rightarrow A \mid f :: \text{continus.}\}$  とおく。 $\mathcal{A}^+ = \hat{\mathcal{A}}$  を示そう。

$\mathcal{A}$  の germ を考える。明らかに  $\varinjlim_{P \in U} \mathcal{A}(U) = \varinjlim_{P \in U} A \cong A$ 。よって  $\mathcal{A}$  の germ は  $A$  の元と同一視出来る。すると,  $\mathcal{A}^+(U)$  の元  $s$  は, 以下の条件を満たすものである。

$$\forall P \in U, \quad P \in \exists V \subseteq U, \quad \exists a \in \mathcal{F}(V), \quad \forall Q \in V, \quad s(Q) = a_Q = a.$$

これは  $\mathcal{A}^+(U)$  の元  $s$  が locally constant な写像であることを言っている。locally constant であれば連続であることは自明 ( $\mathcal{A}^+(U) \supseteq \hat{\mathcal{A}}(U)$ )。逆に連続な section は  $s^{-1}(\{a\})$  が開集合になるので locally constant となる ( $\mathcal{A}^+(U) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(U)$ )。よって  $\mathcal{A}^+ = \hat{\mathcal{A}}$ 。

## Ex1.2 The Image/Kernel in a Sheaf/Stalk.

### (a) ASSERTION.

$\mathcal{F}'$  を  $\mathcal{F}$  の subsheaf だとする。この時, 以下の写像  $\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P} : \mathcal{F}'_P \rightarrow \mathcal{F}_P$  に依って  $\mathcal{F}'_P$  は  $\mathcal{F}_P$  の subgroup とみなせる。なお, germ は  $\sim_P$  についての同値類 (点ではなく集合) とみなす。 $\sim_P$  は「点  $P$  の開近傍において二つの section が一致する。」という同値関係である。

$$\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P}(s_P) = \left\{ \langle U, \sigma \rangle \mid \begin{array}{l} P \in U, \sigma \in \mathcal{F}(U), \\ P \in \exists V \subseteq U, \langle V, \sigma \rangle \in s_P. \end{array} \right\} / \sim_P$$

$\langle U, \sigma \rangle$  は本文 p.62 の記号である。以下,  $\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P}$  は適宜  $\iota$  と略す。 $s_P = t_P$  であるとき  $\iota(s_P) = \iota(t_P)$  であることは定義の “ $\langle V, \sigma \rangle \in s_P$ ” の部分から明らか。この写像が単射であることは以下のように示される。まず互いに異なる  $s_P, t_P \in \mathcal{F}'_P$  をとる。すると  $\langle U, \sigma \rangle \in s_P \setminus t_P$  が取れる。明らかに  $\langle U, \sigma \rangle \in \iota(s_P)$ 。この  $\langle U, \sigma \rangle$  について, 開集合  $U$  をより小さい  $U'$  に取り替えても  $\langle U, \sigma \rangle \in s_P \setminus t_P$  となる。これは  $s_P, t_P$  が  $\sim_P$  についての同値類だからである。したがって  $\langle *, \sigma \rangle$  は  $\iota(t_P)$  に属さない。以上から  $\iota(s_P) \neq \iota(t_P)$ 。

$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を morphisms of sheaves とする。以下の例では subsheaf の stalk  $(\ker \phi)_P$  と  $\ker \phi_P \subset \mathcal{F}_P$  が一致しない。まず  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  をどちらも実直線  $\mathbb{R}$  上の連続な関数がなす層 (変数は  $x$ ) とし,  $\phi(f) = f - x$  とする。この  $\phi$  で ramp function  $\text{ramp}(x) = [x \geq 0]x$  を写したものは  $\phi(\text{ramp})(x) = [x < 0](-x)$  となる。これは明らかに  $x = 1$  の近傍  $(0, 2)$  で 0 になるから,  $\langle (0, 2), \text{ramp} \rangle \in \ker \phi_P$ 。また, 近傍を  $(-2, 2)$  としても,  $\langle (0, 2), \text{ramp} \rangle \sim_P \langle (-2, 2), \text{ramp} \rangle \in \ker \phi_P$ 。しかし,  $\text{ramp}|_{(-2, 2)} \neq 0$  だから  $\text{ramp} \notin (\ker \phi)((-2, 2))$  となる。なので  $(\ker \phi)_P$  に  $\langle (-2, 2), \text{ramp} \rangle$  は入っていない。よって  $(\ker \phi)_P$  と  $\ker \phi_P$  は上で定義した  $\iota$  を介さなければ一致しない。しかし, この二つを  $\mathcal{F}_P$  の subgroup とみなせば, 一致しているということも出来る。Hartshorne はこの意味で  $(\ker \phi)_P = \ker \phi_P$  と主張している。

(b) Preparing.

Ati-Mac Ex2.19 から, 加群の direct limit は exact functor であることの証明は <https://math.stackexchange.com/questions/121122> などにある. このことを sheaf の exact sequence に用いたいが, 使えることは自明ではない. 実際,  $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$  が exact であっても, 加群の列  $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$  が完全であるとは限らないからである.

点  $P$  を任意の点とし,  $\ker \psi_P \subseteq \operatorname{im} \phi_P$  を示す. まず,  $\ker \psi_P$  から germ  $s_P$  をとる.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_P & \xrightarrow{\phi_P} & \mathcal{G}_P & \xrightarrow{\psi_P} & \mathcal{H}_P \\ & & s_P & \longmapsto & 0_P \\ & & \psi_P & & \end{array}$$

すると点  $P$  の開近傍  $U$  と, section  $\sigma \in \ker \psi_U = (\ker \psi)(U)$  が取れて,  $\sigma_P = s_P$  となる.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_P & \xrightarrow{\phi_P} & \mathcal{G}_P & \xrightarrow{\psi_P} & \mathcal{H}_P \\ & & s_P & \longmapsto & 0_P \\ & \uparrow & & & \uparrow \\ & \sigma & \longmapsto & & 0 \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\psi_U} & \mathcal{H}(U) \end{array}$$

仮定より,  $\sigma \in (\ker \psi)(U) = (\operatorname{im} \psi)(U)$ . なので,

$$(\operatorname{im}^{pre} \psi)_P = (\operatorname{im} \phi)_P \ni \sigma_P = s_P \in \ker \phi_P.$$

よって以下が得られる.

$$P \in \exists V \subseteq U, \sigma|_V \in (\operatorname{im}^{pre} \psi)(V) = \operatorname{im} \psi_V.$$

以上より,  $\sigma_P = s_P$  かつ  $\operatorname{im} \psi_V \ni \sigma|_V \in \ker \psi_V$ . あとは  $\phi_V(\tau) = \sigma|_V$  となる  $\tau \in \mathcal{F}(V)$  をとり, 図式の可換性を用いれば良い.

(c) Prooves.

(a)  $\forall P \in X, (\ker \phi)_P = \ker \phi_P, (\operatorname{im} \phi)_P = \operatorname{im} \phi_P$ .

(b)  $\phi :: \text{inj/surj} \iff \forall P \in X, \phi_P :: \text{inj/surj}$ .

(c)  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} :: \text{exact} \iff \forall P \in X, \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P \rightarrow \mathcal{H}_P :: \text{exact}$

■Proof of Half of (c). 以下が成り立つ.

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} :: \text{exact} \implies \forall P \in X, \mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{H}_P :: \text{exact}.$$

ただし  $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$  は位相空間  $X$  上の sheaf である. この命題は (c) の半分である.

■Proof of (a).  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  に対し,  $0 \rightarrow \ker \phi \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$  は exact. このことから  $0 \rightarrow (\ker \phi)_P \xrightarrow{i_P} \mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P$  は exact. よって  $\operatorname{im} i_P = \ker \phi_P$  が得られる. 明らかに  $i_P$  は injective だから,  $(\ker \phi)_P \cong \operatorname{im} i_P = \ker \phi_P$  となる. また,  $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \rightarrow \operatorname{im} \phi \rightarrow 0$  が exact であることから  $(\operatorname{im} \phi)_P \cong \operatorname{im} \phi_P$  も得られる.

■Proof of Remained Part of (c). 任意の点  $P \in X$  について,  $\mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{H}_P$  が exact であったとする. そこで任意の開集合  $U \subset X$  と, 任意の section  $s \in \mathcal{F}(U)$  を取る. 以下のように  $\text{im } \phi \subseteq \ker \phi$  が示される.

$$\begin{aligned}
& s \in (\text{im } \phi)(U) \\
& \implies \forall P \in U, \quad s_P \in (\text{im } \phi)_P = \text{im } \phi_P \\
& \iff \forall P \in U, \quad s_P \in \ker \phi_P \\
& \iff \forall P \in U, \quad P \in \exists V_P \subseteq U, \quad s|_{V_P} \in (\ker \phi)(V_P) \\
& \implies s \in (\ker \phi)(U)
\end{aligned}$$

最後の行で Glueability Axiom を用いた. この証明で  $\ker$  と  $\text{im}$  を交換すれば  $\text{im } \phi \supseteq \ker \phi$  も示され, よって  $\text{im } \phi = \ker \psi$  が得られる.

■Proof of (b).  $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  と  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$  に (c) を用いれば良い.

### Ex1.3 Surjectivity of Morphism is (Not) Local Property.

(a) Paraphrase of Surjectivity.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} : X \rightarrow A$ ,  $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  について  $\phi :: \text{surj}$  が以下の命題と同値であることを示す.

$$(*) \quad \forall U :: \text{open in } X, \quad \forall s \in \mathcal{G}(U), \quad \bigcup \exists U_i = U, \quad \exists t_i \in \mathcal{F}(U_i), \quad \forall i, \quad \phi(t_i) = s|_{U_i}.$$

$\phi :: \text{surj}$  ならば covering  $\{U_i\}$  として  $U$  をとり,  $\phi(t) = s$  となる  $t$  を  $t_i$  とすれば良い.

逆を示す. Ex1.2b より, 任意の  $P \in U$  について  $\phi_P :: \text{surj}$  であることを示せば良い. 仮定より  $P \in V \subseteq U$  となる  $V$  ((\* 中の  $U_i$ ) が存在し,  $\phi_P(t_P) = s|_V = s_P$  を満たす  $t_P \in \mathcal{F}(V) \subseteq \mathcal{F}_P$  が存在する. よって  $\phi_P :: \text{surj}$ .

(b) Give an Counterexample.

### Ex1.4 Induced Injective Sheaf Morphism.

(a) Injective Presheaf Morphism Induces Injective Sheaf Morphism.

以下は可換図式である.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}^+ & \xrightarrow{\phi^+} & \mathcal{G}^+ \\
\uparrow & \nearrow & \uparrow \\
\mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G}
\end{array}$$

これを stalk をとる関手  $\lim_{\rightarrow P \in U}$  で写すと, Prop-Def1.2 の直後に言及されている  $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_P^+$  から, 以下が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}_P^+ & \xrightarrow{\phi_P^+} & \mathcal{G}_P^+ \\
\parallel & \nearrow & \parallel \\
\mathcal{F}_P & \xrightarrow{\phi_P} & \mathcal{G}_P
\end{array}$$

この可換図式から  $\phi_P = \phi_P^+$ . よって Ex1.2b から  $\phi :: \text{inj} \iff \phi^+ :: \text{inj}$ .

(b) Natural Induced Map  $\text{im } \phi \rightarrow \mathcal{G}$  is Injective.

埋め込み写像  $\text{im}^{pre} \phi \hookrightarrow \mathcal{G}$  は injective なので、ここから誘導される  $\text{im } \phi \rightarrow \mathcal{G}$  も injective.

### Ex1.5 For Morphism of Shaves, iso=inj+surj.

$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を考える.  $\phi$  が iso であることと, 任意の点  $P$  で  $\phi_P$  が iso であることは同値. また,  $\phi$  が inj+surj であることと, 任意の点  $P$  で  $\phi_P$  が inj+surj であることは同値である. これらはそれぞれ Prop1.1 と Ex1.2 から理解する. よって  $\phi_P$  について iso=inj+surj を確かめれば必要十分.

■  $\phi_P :: \text{iso} \implies \phi_P :: \text{inj+surj}$ .  $\phi_P :: \text{iso}$  ならば,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{F}_P, \phi_P(x_1) = \phi_P(x_2) \implies \phi_P^{-1} \circ \phi_P(x_1) = x_1 = x_2 = \phi_P^{-1} \circ \phi_P(x_2)$$

すなわち  $\phi_P :: \text{inj}$ . 同時に

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \phi_P(\phi_P^{-1}(y)) = y$$

すなわち  $\phi_P :: \text{surj}$ .

■  $\phi_P :: \text{iso} \iff \phi_P :: \text{inj+surj}$ . まず  $\phi_P :: \text{surj}$  から以下が成り立つ.

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \exists x \in \mathcal{F}_P, \phi_P(x) = y.$$

この命題を満たす  $x \in \mathcal{F}_P$  は  $\phi_P :: \text{inj}$  からただひとつである.

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \exists! x \in \mathcal{F}_P, \phi_P(x) = y.$$

なので  $\phi_P^{-1}(y) = x$  と定めればこれは写像になる. なお,  $\phi_P$  でなく  $\phi$  で議論をすると, 構成した  $\phi$  の naturality を示す必要がある.

### Ex1.6 Short Exact Sequence of Sheaves.

(a) Natural Map  $q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}'$  Has  $\text{im } q = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$  and  $\ker q = \mathcal{F}'$ .

quotient sheaf の定義 (p.65) より, 任意の点  $P$  について  $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$ <sup>†1</sup>. よって  $q$  から誘導される  $q_P$  は  $\mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$  の自然な写像である.  $\text{im } q_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P, \ker q_P = \mathcal{F}'$  となるから, Ex1.2a より主張が得られる.

(b) If  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  is Exact, ...

仮定より,  $0 = \ker f, \text{im } f = \ker g, \text{im } g = \mathcal{F}''$ . よって  $f$  は inj で,  $f|_{\text{im } f} : \mathcal{F}' \rightarrow \text{im } f$  は surj+inj. なので Ex1.5 よりこれは iso であり,  $\mathcal{F}'$  は  $\text{im } f \subset \mathcal{F}$  と同型である. 続けて  $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  から誘導される  $g_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}''_P$  を考える. 定義より  $\mathcal{F}_P, \mathcal{F}''_P$  は abelian group (abelian group の圏での colimit) で,  $g_P$  はその morphism. だから abelian group の準同型定理からの帰結として  $\mathcal{F}_P/\ker g_P = (\mathcal{F}/\ker g)_P \cong \mathcal{F}''_P$  が得られる. Prop1.1 より  $\mathcal{F}'' \cong \mathcal{F}/\ker g = \mathcal{F}/\text{im } f \cong \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ .

<sup>†1</sup> これは sheafification functor  $sh_X : \mathbf{PSh}(X, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X, \mathcal{C})$  が forgetful functor の left adjoint functor であること, 及び left adjoint functor は colimit を保つことから得られる.

**Ex1.7**  $\text{im } \phi \cong \mathcal{F}/\ker \phi$ , and  $\text{coker } \phi \cong \mathcal{G}/\text{im } \phi$ .

$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  について考える.  $\text{im } \phi \cong \mathcal{F}/\ker \phi$  は以下の完全列に Ex1.6b を用いて得られる.

$$0 \rightarrow \ker \phi \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \text{im } \phi \rightarrow 0.$$

ただし  $i$  は埋め込み写像である.  $\text{coker } \phi \cong \mathcal{G}/\text{im } \phi$  は同様に以下の完全列から得られる.

$$0 \rightarrow \text{im } \phi \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{q} \text{coker } \phi \rightarrow 0.$$

ただし  $q$  は  $q^{pre} : \mathcal{G} \rightarrow \text{coker } \phi = \mathcal{G}/\text{im } \phi$  から誘導される写像. これが完全列であることは次のように示される. まず Ex1.6a を用いて stalk の完全列を得る.

$$0 \rightarrow \text{im } \phi_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{q_P} \text{coker } \phi_P = \mathcal{G}_P/\text{im } \phi_P \rightarrow 0.$$

Ex1.2a,c を用いて元の列が完全であることが示される.

**Ex1.8**  $\forall U \subset X, \Gamma(U, -) :: \text{left exact functor}$

以下を  $X \rightarrow A$  の sheaves がなす完全列とする.

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}''.$$

完全列なので  $0 = \ker f, \text{im } f = \ker g$ .  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}(U)$  で定義される functor  $\Gamma(U, -)$  により, この完全列は以下の列になる.

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{F}''(U).$$

これが完全列であることは  $0 = \ker f_U, \text{im } f_U = \ker g_U$  と同値.

まず  $\ker f$  を考えると, 定義より  $0 = (\ker f)(U) = \ker f_U$ . よって  $f_U :: \text{inj}$ . また,  $\Gamma(U, -)$  は functor だから

$$0 = \Gamma(U, g \circ f) = \Gamma(U, g) \circ \Gamma(U, f) = 0.$$

すなわち  $g_U \circ f_U = 0, \text{im } f_U \subseteq \ker g_U$ .

残るは逆の包含関係である. まず  $s \in \ker g_U \subseteq \mathcal{F}(U)$  を取る. Ex1.2a より, 任意の  $P \in U$  について  $\text{im } f_P = \ker g_P$ . なので任意の点  $P$  について  $s_P \in \text{im } f_P = \ker g_P$  であり,  $f_P(t_P) = s_P$  となる  $t_P \in \mathcal{F}'_P$  が存在する. そこで  $s_P, t_P$  の代表元  $\langle V_P, s|_{V_P} \rangle, \langle V_P, t^P|_{V_P} \rangle$  をとると  $f_{V_P}(t^P|_{V_P}) = s|_{V_P}$  となる. 同様に別の点  $Q \in U, t_Q = \langle V_Q, t^Q|_{V_Q} \rangle$  をとると,  $W_{PQ} := V_P \cap V_Q$  について

$$f_{W_{PQ}}(t^P|_{W_{PQ}}) = s|_{W_{PQ}} = f_{W_{PQ}}(t^Q|_{W_{PQ}}).$$

$0 = (\ker f)(W_{PQ}) = \ker f_{W_{PQ}}$  より  $f_{W_{PQ}}$  は inj. したがって  $t^P|_{W_{PQ}} = t^Q|_{W_{PQ}}$  が得られる. ( $P \in$  )  $W_{PQ}$  は  $U$  を被覆するから, Glueability Axiom より,  $t|_{W_{PQ}} = t^P|_{W_{PQ}} = t^Q|_{W_{PQ}}$  なる  $t \in \mathcal{F}'(U)$  が存在する. morphism と restriction の naturality により,

$$f_U(t)|_{W_{PQ}} = f_{W_{PQ}}(t|_{W_{PQ}}) = f_{W_{PQ}}(t^P|_{W_{PQ}}) = s|_{W_{PQ}}$$

となるから, Identity Axiom より  $f_U(t) = s$ . 以上より  $\text{im } f_U \supseteq \ker g_U$ .

## Ex1.9 Direct Sum.

sheaves  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : X \rightarrow \mathfrak{C}$  について,  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  を以下で定める.

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} : U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U).$$

ただし  $U :: \text{open in } X$ . これが presheaf であることは自明なので, sheaf であることを示す. 以下,  $U :: \text{open in } X$  とその開被覆  $\{U_i\}$  を固定する.

■  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  Satisfies Identity Axiom.  $s \oplus t \in \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$  が  $(s \oplus t)|_{U_i} = 0 \oplus 0 = 0$  を満たすとする. この仮定を論理式で書下すと,

$$\forall P \in U_i, (s \oplus t)(P) = s(P) \oplus t(P) = 0 \oplus 0.$$

abelian group の coproduct は product と同型だから, これは以下のように書き換えられる.

$$\forall P \in U_i, s(P) = 0 \wedge t(P) = 0.$$

これは  $s|_{U_i} = t|_{U_i} = 0$  と同値. なので  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  は sheaf であることから  $s = t = 0$ . すなわち  $s \oplus t = 0$ .

■  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  Satisfies Glueability Axiom.  $s_i \oplus t_i \in \mathcal{F}(U_i) \oplus \mathcal{G}(U_i)$  が存在し, 以下を満たすとする.

$$\forall i, j, (s_i \oplus t_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j \oplus t_j)|_{U_i \cap U_j}.$$

前段落と同様に書き換えて, 以下が得られる.

$$\forall i, j, s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \wedge t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j}.$$

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$  は sheaf であることから, 以下を満たす  $s \in \mathcal{F}(U_i), t \in \mathcal{G}(U_i)$  が存在する.

$$\forall i, s|_{U_i} = s_i \wedge t|_{U_i} = t_i.$$

この  $s, t$  について  $(s \oplus t)|_{U_i} = (s|_{U_i}) \oplus (t|_{U_i}) = s_i \oplus t_i$ .

■  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  is Coproduct in  $\mathbf{Sh}(X)$ . 以下の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} & \\ i \nearrow & \vdots & \nwarrow j \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} & \\ \searrow \forall f & \downarrow \exists^1 [f, g] & \swarrow \forall g \\ & \mathcal{Z} & \end{array}$$

ただし  $\mathcal{Z}, f, g$  は任意で,  $i, j$  はそれぞれ  $s \mapsto s \oplus 0, t \mapsto 0 \oplus t$  とする. すると  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  から  $\mathcal{Z}$  へ至る二つのパスをたどることで, この図式を可換にする  $[f, g]$  は以下のものしか無い事が理解する.

$$[f, g] : s \oplus t \mapsto f(s) + g(t).$$

$f, g$  は morphism of abelian group で  $f(s), g(t)$  は element of abelian group. だから, 例えば  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Z}$  の二つのパスは次の計算の通り可換になる.

$$[f, g] \circ i : s \mapsto s \oplus 0 \mapsto f(s) + g(0) = f(s) \leftarrow s : f$$

よって  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  は coproduct.

## Ex1.10 Direct Limit.

Ex1.8 の functor  $\Gamma(-, -)$ , sheafification functor  $sh_X$  と abelian category の direct limit  $\lim_{\rightarrow i}$  を用いて,  $\lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i$  を以下で定める.

$$\Gamma(-, \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i) = sh_X \lim_{\rightarrow i} \Gamma(-, \mathcal{F}_i).$$

ただし  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  は direct system である. これが  $\mathbf{Sh}(X)$  の direct limit であることを示す.

まず,  $\mathcal{L} : U \mapsto \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i(U)$  とおく. これは明らかに  $\mathbf{PSh}(X)$  における direct limit で<sup>†2</sup>,  $\mathcal{L}^+ = \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i$  を満たす. よって sheafification functor  $sh_X$  が direct limit を保つことを見れば良い. 次の可換図式は  $\mathcal{L}$  の UMP を表す.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & & \\ & \nwarrow \bar{f}_i & \\ & \mathcal{F}_i & \xrightarrow{f_i} \mathcal{G} \end{array}$$

ただし  $\mathcal{G}, f_i$  は任意. sheafification の UMP を  $\bar{f}_i : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{G}$  に用いて, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{L}^+ \\ & \nwarrow \bar{f}_i & \nearrow \bar{f}_i \\ & \mathcal{F}_i & \xrightarrow{f_i} \mathcal{G} \end{array}$$

よって  $f_i : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{G}$  に対して一意に  $\bar{f}_i : \mathcal{L}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  が存在する. これで  $\mathcal{L}^+ = \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i$  の UMP が示された.  $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_j$  との可換性は morphism を結合すれば容易に分かる.

(i) Another Proof.

sheafification functor  $sh_X : \mathbf{PSh}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$  が Forgetful Functor  $F : \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{PSh}(X)$  の left adjoint functor であることを用いる. これは R.Vakil “Foundations of Algebraic Geometry” Part I, 2.4.L などにある事実である. direct limit が colimit であることと, “Left Adjoint Preserves Colimits” より,

$$sh_X \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i \cong \lim_{\rightarrow i} sh_X \mathcal{F}_i \cong \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i.$$

## Ex1.11 Pre-Direct Limit on Noetherian Top.Sp. is Already a Sheaf.

sheaves  $\{\mathcal{F}^i\}_{i \in I}$  with morphisms  $f^{ij} : \mathcal{F}^i \rightarrow \mathcal{F}^j$  :: direct system とし,  $\mathbf{PSh}(X)$  における direct limit を  $\mathcal{L}$  で書く.  $X$  :: noetherian topological space であるとき,  $\mathcal{L}$  が予め sheaf であることを示す. 以下,  $U$  :: open in  $X$  と開被覆  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を任意にとり, 固定する.

$X$  :: noetherian より,  $X$  :: quasi-compact. なので集合  $\{U_\lambda\}$  から有限被覆  $\{U_j\}_{j \in J}$  が出来る.

## Ex1.12 Inverse Limit.

sheaves  $\{\mathcal{F}^i\}$  with morphisms  $f^{ij} : \mathcal{F}^i \rightarrow \mathcal{F}^j$  :: inverse system とし,  $\mathbf{PSh}(X)$  における inverse limit  $U \mapsto \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i(U)$  を  $\mathcal{L}$  で書く. このとき  $\mathcal{L}$  は  $\mathbf{Sh}(X)$  においても inverse limit であることを示す.

<sup>†2</sup>  $\mathbf{PSh}(X)$  が direct limit を持つことは abelian category  $\mathfrak{C}$  が direct limit を持つことによる.

$$\lim_{i \leftarrow} Fgt \mathcal{F}^i \cong Fgt \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i \cong \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i.$$

(i) Proof of  $Sh \dashv Fgt$ .

$F$  は object を変えない埋め込み写像なので、直ちに全単射  $\tilde{\eta}_{(-)} : (-) \leftrightarrow F(-) : \tilde{\epsilon}_{(-)}$  がとれる。これに sheafification の UMP を用いると以下の可換図式が得られる。

こうして  $\text{unit } \eta : \text{id}_{\mathbf{PSh}(X)} \rightarrow \text{FgtSh}$  と  $\text{counit } \epsilon : \text{ShFgt} \rightarrow \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$  が得られる. さらに, この二つの可換図式を組み合わせて, 以下の可換図式が作れる.

$$\begin{array}{ccc} Fgt & \xleftrightarrow{\tilde{\epsilon}} & \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \\ & \searrow \theta_{Fgt} & \nearrow \epsilon \\ & ShFgt & \end{array}$$

(1)  $\mathcal{F} \xrightarrow{\theta_{\mathcal{F}}} Sh\mathcal{F}$   $\downarrow g$   $Fgt\mathcal{G} \xrightarrow{\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}} \mathcal{G}$   $\downarrow \theta_{Fgt\mathcal{G}}$   $ShFgt\mathcal{G}$   $\uparrow \epsilon_{\mathcal{G}}$

(2)  $\mathcal{F} \xrightarrow{\theta_{\mathcal{F}}} Sh\mathcal{F}$   $\downarrow \bar{g}$   $Fgt\mathcal{G} \xrightarrow{\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}} \mathcal{G}$   $\downarrow \theta_{Fgt\mathcal{G}}$   $ShFgt\mathcal{G}$   $\uparrow \epsilon_{\mathcal{G}}$

(3)  $\mathcal{F} \xrightarrow{\theta_{\mathcal{F}}} Sh\mathcal{F}$   $\downarrow \bar{g}$   $Fgt\mathcal{G} \xrightarrow{\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}} \mathcal{G}$   $\downarrow \theta_{Fgt\mathcal{G}}$   $ShFgt\mathcal{G}$   $\uparrow \epsilon_{\mathcal{G}}$

---

<sup>†3</sup> “Right Adjoints Preserves Limits.”



をしたあとの可換図式が (3) である. UMP から,  $\theta_{FgtG}$  および  $\theta_{FgtG} \circ \bar{g}$  と共に可換な三角形をなす射は  $Sh(\bar{g})$  に等しい. よって  $Sh(\bar{g}) = \theta_{FgtG} \circ \bar{\epsilon}_G^{-1} \circ g$ . こうして  $g = \epsilon_G \circ Sh(\bar{g})$  が得られる.

以上では,  $g \in \text{Hom}(Sh\mathcal{F}, \mathcal{G})$  から  $\bar{g} \in \text{Hom}(\mathcal{F}, Fgt\mathcal{G})$  を作り,  $\bar{g}$  から  $g$  を復元した.  $f \in \text{Hom}(\mathcal{F}, Fgt\mathcal{G})$  から始めて議論を逆向きにたどれば,  $g$  と  $\bar{g}$  ( $f$  と  $\bar{f}$ ) が一対一に対応していることが分かる.

## Ex1.13 Espace Étale of a Presheaf.

### (i) Definition of Espace Étale.

$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X)$  に対し, espace étale of  $\mathcal{F} :: \text{Spé}(\mathcal{F})$  を以下のように定義する. まず, 集合として  $\text{Spé}(\mathcal{F}) = \bigsqcup_{P \in X} \mathcal{F}_P$  とおく. projection map  $:: \pi$  とその “section”  $:: \bar{s}$  を以下で定める. まず,  $\pi$  は以下のもの.

$$\begin{aligned} \pi : \text{Spé}(\mathcal{F}) &\rightarrow X \\ \mathcal{F}_P \ni g &\mapsto P. \end{aligned}$$

任意の  $U :: \text{open in } X$  と  $s \in \mathcal{F}(U)$  に対して  $\bar{s} : U \rightarrow \text{Spé}(\mathcal{F})$  を以下で定める.

$$\begin{aligned} \bar{s} : U &\rightarrow \text{Spé}(\mathcal{F}) \\ P &\mapsto s_P. \end{aligned}$$

この時,  $\pi \circ \bar{s} = \text{id}_U$ . すなわち,  $\bar{s}$  は  $U$  上で  $\pi$  の “section” である. そして  $\text{Spé}(\mathcal{F})$  に以下のような位相を入れる: 任意の  $U$  と任意の  $s$  について  $\bar{s}$  が連続であるような最強の位相. これはつまり  $\{\bar{s}\}$  についての終位相である.

### (ii) More References for Espace Étale.

Wikipedia の Sheaf のページ [https://www.wikiwand.com/en/Sheaf\\_\(mathematics\)#/The\\_.C3.A9tal.C3.A9\\_space\\_of\\_a\\_sheaf](https://www.wikiwand.com/en/Sheaf_(mathematics)#/The_.C3.A9tal.C3.A9_space_of_a_sheaf) (2017 年 3 月 30 日参照) に概略が書かれている. 詳細についての資料は以下の通り. まず, 一般の espace étalé (étale space) の categorical な定義が <https://ncatlab.org/nlab/show/etale+space> にある. Étale space の圏と sheaf の圏が圏同値であることの証明は Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk “Sheaves in Geometry and Logic” の §5-6, pp.83-90 にある. (この命題はこの本の p.90 Cor3 である.) 同様のことが “Etale cohomology course notes” <http://math.colorado.edu/~jonathan.wise/teaching/math8174-spring-2014/notes.pdf> の 7 Etale spaces and sheaves (p.24) にあるが, この note はミスが多いしわかりにくいのでおすすめしない.

### (iii) Proposition and Proof.

étale space over  $X$  をとって, その連続な section 全体をとる関手を  $\text{Sec} : \mathbf{Et}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$  とする. 逆に presheaf から étale space over  $X$  を作る関手を  $\text{Ét} : \mathbf{PSh}(X) \rightarrow \mathbf{Et}(X)$  とする. sheafification functor が  $Sh = \text{Sec} \circ \text{Ét}$  で定義できることを示す.

■Plan of Proof. 二つの写像を定める.  $\mathcal{F} :: \text{sheaf on } X$ ,  $E :: \text{étale space over } X$ ,  $U :: \text{open subset of } X$ ,  $P \in U$  とする.

$$\begin{array}{ccc}
\alpha_{\mathcal{F}} : & \mathcal{F} & \rightarrow \text{Sec}\acute{E}t\mathcal{F} \\
& \langle U, s \rangle & \mapsto \bar{s} \\
\beta : & \acute{E}t\text{Sec}E & \rightarrow E \\
& (\text{Sec}E)_P \ni \sigma_P & \mapsto \sigma(P)
\end{array}$$

$\langle U, s \rangle \in \mathcal{F}$  は  $s \in \mathcal{F}(U)$  という意味である． $\bar{s} : U \rightarrow \acute{E}t\mathcal{F}, \sigma : U \rightarrow E$  に注意．この  $\alpha, \beta$  が natural map かつ isomorphism であることが証明できるので，圏同値  $\mathbf{Et}(X) \simeq \mathbf{Sh}(X)$  が示せる．しかし我々の目的は sheafification の UMP であり，これには  $\alpha$  についてさえ示せば十分である．この証明は Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk “Sheaves in Geometry and Logic” pp.85-86 にある<sup>†4</sup>．

■  $\alpha :: \text{natural}$ .  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{PSh}(X)$  とする．

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{F}}} & \text{Sec}\acute{E}t\mathcal{F} \\
\downarrow \phi & & \downarrow \text{Sec}\acute{E}t\phi \\
\mathcal{G} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{G}}} & \text{Sec}\acute{E}t\mathcal{G}
\end{array}$$

$\text{Sec}\acute{E}t\phi$  は次のような，section を section へ写す写像である．

$$\text{Sec}\acute{E}t\phi : [P \mapsto *_P] \mapsto [P \mapsto *_P \mapsto \phi_P(*_P)].$$

したがって  $\mathcal{F} \rightarrow \text{Sec}\acute{E}t\mathcal{G}$  のどちらのパスでも  $s \mapsto [P \mapsto \phi_P(s_P) = (\phi(s))_P]$  と section を section へ写す写像になる．ただし  $P$  は  $X$  の点である．これで  $\alpha :: \text{natural}$  が示せた．

■  $\alpha :: \text{iso}$ . まず  $\alpha :: \text{inj}$  は Identity Axiom から容易に示されるので略す． $\alpha :: \text{surj}$  の証明は長い．まず  $U :: \text{open in } X, \sigma \in (\text{Sec}\acute{E}t\mathcal{F})(U)$  を任意に取る． $\sigma : U \rightarrow \acute{E}t\mathcal{F} = \bigcup_{P \in X} \mathcal{F}_P$  なので，以下が成り立つ．

$$\forall P \in U, P \in \exists V \subseteq U :: \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V), \sigma(P) = s_P (= \bar{s}(P) \in \mathcal{F}_P).$$

$\acute{E}t\mathcal{F}$  の位相は像位相であり，かつ  $\alpha(s) = \bar{s}$  は明らかに単射．なので  $\alpha(s)(V) = \bar{s}(V)$  は open である<sup>†5</sup>．しかも  $\sigma :: \text{continuous}$  だから， $\sigma(S) \subseteq \alpha(s)(V)$  なる  $P \in S \subseteq \sigma^{-1}(\alpha(s)(V)) :: \text{open}$  が存在する<sup>†6</sup>． $\sigma(S) \subseteq \alpha(s)(V)$  より直ちに以下が成り立つ．

$$\forall Q \in S, \exists Q' \in V, \mathcal{F}_Q \ni \sigma(Q) = \alpha(s)(Q') (= s_{Q'}) \in \mathcal{F}_{Q'}.$$

$\mathcal{F}_Q \cap \mathcal{F}_{Q'} \neq \emptyset$  ということなので  $Q = Q'$ ，よって  $\sigma|_S = \alpha(s)|_S$  が成り立つ．以上から，ある点で  $\sigma$  と  $\alpha(s)$  が一致するならば，その点の開近傍でも両者は一致する．さらに点  $P$  を様々にとることで， $S$  で  $U$  を被覆できることがわかる．開集合  $S \subseteq U$  において  $\sigma|_S = \alpha(s)|_S$ ，開集合  $T \subseteq U$  において  $\sigma|_T = \alpha(t)|_T$  であるとする．

$$\alpha(s)|_{S \cap T} = \sigma|_{S \cap T} = \alpha(t)|_{S \cap T}.$$

したがって  $\alpha :: \text{inj}$  から  $s|_{S \cap T} = t|_{S \cap T}$ ．こうして Glueability Axiom から， $\alpha(s)|_S = \alpha(f)|_S = \sigma|_S$  なる  $f \in \mathcal{F}(U)$  の存在が示せる．最後に Identity Axiom を用いて  $\alpha(f) = s$ ．これで  $\alpha :: \text{iso}$  が示せた．

<sup>†4</sup> この本では  $\alpha$  は  $\eta$  と書かれている．また，この本でいう cross-section は  $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$  なる section のこと． $s$  は  $\bar{s}$  のことである．その他，germ の記法などがだいぶ違うので注意．

<sup>†5</sup>  $\bar{s}$  の像位相において，開集合  $V$  の像が開集合であることは  $\bar{s}^{-1}(\bar{s}(V))$  が開集合であることと同値だが，単射性から， $\bar{s}^{-1}(\bar{s}(V)) = V$ ．

<sup>†6</sup> これは  $\epsilon$ - $\delta$  論法に似ている． $\sigma^{-1}(\alpha(s)(V))$  が開集合であるから，任意の点，特に  $P$  はこの集合の内点である．このことから開集合  $S$  が存在することは開集合のよく知られた性質である．

■UMP of Sheafification.  $Sh = SecEt$  とすると, これが sheafification functor となる. その UMP を見よう.  $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X), \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X)$  とする.  $\alpha : \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \rightarrow Sh$  の naturality から, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & Sh\mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\sim} & Sh\mathcal{G} \end{array}$$

$\alpha_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow Sh\mathcal{G} :: \text{iso}$  だから,  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  から  $Sh\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  が得られた. 次に, 以下で示す可換図式 (1) が与えられたとしよう. 全体を  $Sh$  で写し,  $Sh|_{\mathbf{Sh}(X)} \cong \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$  を用いて可換図式 (2) が得られる.

$$(1) \begin{array}{ccc} Sh\mathcal{F} & \xrightarrow[f]{g} & \mathcal{G} \\ \alpha_{\mathcal{F}} \uparrow & \nearrow \phi & \\ \mathcal{F} & & \end{array} \quad (2) \begin{array}{ccc} Sh\mathcal{F} & \xrightarrow[f]{g} & \mathcal{G} \\ \parallel & \nearrow Sh\phi & \\ Sh\mathcal{F} & & \end{array}$$

したがって  $f = g$ . 以上で existence & uniqueness が示せた.

## Ex1.14 Support.

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X), U :: \text{open in } X, s \in \mathcal{F}(U)$  をとる.  $\text{Supp } s = \{P \in U \mid s_P \neq 0\}$  としたとき, これが closed in  $U$  であることを示そう. そのために  $T = (\text{Supp } s)^c = \{P \in U \mid s_P = 0\}$  とし, これが open であることを示す.

$P \in T$  を任意に取る. すると  $s_P$  の代表元として  $\langle V_P, s \rangle$  ( $P \in V_P \subset U$ ) が取れる. 今  $s_P = 0$  なので,  $s|_{V_P} = 0$ . したがって  $V_P \subset T$  となる. 任意の  $P \in T$  についてこのように  $V_P$  が取れるので,  $T$  は open covering  $\{V_P\}_{P \in T}$  を持つ. よって  $T = \bigcup_{P \in T} V_P :: \text{open in } U$ .

$\text{Supp } \mathcal{F}$  は  $\{P \in X \mid \mathcal{F}_P \neq 0\}$  と定義される. これは closed とは限らない. 実際,  $\mathcal{F}$  の元を, なめらかな実関数に  $\text{bump}(x) = [x > 0]e^{-1/x}$ <sup>†7</sup> をかけたものとする,  $\text{Supp } \text{bump}(x) = [0, \infty), \text{Supp } \mathcal{F} = (0, \infty)$  となる. 後者は明らかに閉集合でない.

## Ex1.15 Sheaf $\mathcal{H}om$ .

$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X), U :: \text{open in } X$  とし,  $\mathcal{F}$  の  $U$  への restriction (p.65) を  $\mathcal{F}|_U$  で書く.  $U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$  で定まる presheaf  $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  が sheaf であることを示そう. 以下では  $U$  とその開被覆  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を任意にとりて固定する.

■ $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) :: \text{Abelian Group}$ .  $s, t \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$  について,  $s + t$  を以下で定める.

$$(s + t)(\sigma) = s(\sigma) + t(\sigma) \quad \text{where } V :: \text{open in } U, \sigma \in (\mathcal{F}|_U)(V).$$

単位元は  $\text{im } \mathcal{F}|_U$  の単位元を返す定値写像である. 単位元を以下では 0 と書く.

■ $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) :: \text{Presheaf}$ .  $U, V :: \text{open}$  かつ  $V \subseteq U$  とする.  $\text{res}_U^V : \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V)$  を以下のように定める.

$$\{\mathcal{F}|_U \ni \sigma|_U \mapsto \tau|_U \in \mathcal{G}|_U\} \mapsto \{\mathcal{F}|_V \ni \sigma|_V \mapsto \tau|_V \in \mathcal{G}|_V\}$$

これは  $\text{res}(\mathcal{F})_U^V : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  と  $\text{res}(\mathcal{G})_U^V : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V)$  の自然性から誘導される.

<sup>†7</sup>  $[True] = 1, [False] = 0$  とした. Iverson の記法である.  $\text{bump}(x)$  がなめらかであることは次の PDF を参照せよ: <https://andromeda.rutgers.edu/~loftin/diffal03/bump.pdf>.

■Identity Axiom.  $s \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$  をとる. この  $s$  が任意の  $\lambda$  について  $s|_{U_\lambda} = 0$  を満たすとする. さて,  $V :: \text{open in } U$  と  $\sigma \in \mathcal{F}(V)$  を任意に取る.  $\{V_\lambda\}$  を  $V_\lambda = V \cap U_\lambda$  で定めると, これは  $V$  の開被覆になる. 仮定より,  $s|_{V_\lambda}(\sigma) = s(\sigma)|_{V_\lambda} = 0$ . よって  $s(\sigma) \in \mathcal{G}(V)$  に Identity Axiom を用いることで  $s(\sigma)|_V = 0$  が示される.  $V, \sigma$  は任意なので, 結局以下が得られた.

$$\forall V :: \text{open in } U, \forall \sigma \in \mathcal{F}(V), s(\sigma) = 0.$$

すなわち,  $s$  は定値写像 0 である. 以上で Identity Axiom の成立が示された.

■Gluability Axiom. sections  $s_\lambda \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U_\lambda)$  をとる. これが任意の  $\lambda, \mu \in \Lambda$  について  $s_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = s_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}$  を満たすとしよう. この仮定は以下のように書ける.

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda, \forall \sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda \cap U_\mu), s_\lambda(\sigma) = s_\mu(\sigma).$$

そこで  $\lambda$  をひとつ取って固定し,  $\sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda)$  とする. さらに  $\{V_\mu\}_{\mu \in \Lambda}$  を  $V_\mu = U_\lambda \cap U_\mu$  で定める. この  $\{V_\mu\}$  は  $U_\lambda$  の開被覆である. すると最初の仮定と  $V_\mu \cap V_\nu = U_\lambda \cap (U_\mu \cap U_\nu) \subseteq U_\mu \cap U_\nu$  から以下が成り立つ.

$$\forall \mu, \nu \in \Lambda, s_\mu(\sigma)|_{V_\mu \cap V_\nu} = s_\nu(\sigma)|_{V_\mu \cap V_\nu}.$$

sections  $s_\mu(\sigma) \in \mathcal{G}(U_\lambda)$  に対して Gluability Axiom を用いて,  $s(\sigma)|_{V_\mu} = s_\mu(\sigma)|_{V_\mu}$  なる  $s(\sigma)$  の存在が言える. Identity Axiom から  $s(\sigma)|_{U_\lambda} = s_\mu(\sigma)|_{U_\lambda}$ . こうして, 以下を満たす  $s \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$  の像が各点  $\sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda)$  ごとに定義できる.

$$\forall \lambda \in \Lambda, \forall \sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda), s(\sigma)|_{U_\lambda} = s_\lambda(\sigma)|_{U_\lambda}.$$

簡潔にかけば,  $s|_{U_\lambda} = s_\lambda|_{U_\lambda}$ . よって Gluability Axiom の成立が示せた.

## Ex1.16 Flasque Sheaves.

$U, V :: \text{open in } X, V \subseteq U$  とする. restriction map  $\text{res}_U^V$  が surjective であるような  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$  を flasque<sup>†8</sup> sheaf と呼ぶ.

### (a) Constant Sheaf on Irreducible Top.Sp is Flasque.

$X :: \text{irreducible}$ ,  $A :: \text{abelian group}$ ,  $U, V :: \text{open in } X, V \subseteq U$  とする.  $\mathcal{A}$  を  $X$  から  $A$  への constant sheaf とすると, 定義より  $\mathcal{A}(V) = \{s : V \rightarrow A \mid s :: \text{continuous.}\}$ . そこで  $s \in \mathcal{A}(V)$  を一つとって固定する.  $s :: \text{continuous}$  という条件は次と同値

$$\forall a \subseteq A, s^{-1}(a) :: \text{open in } V.$$

$X :: \text{irreducible}$  であるとき,  $s \in \mathcal{F}(V)$  がどのようなものか考えよう.

■Case:  $\#A = 1$ . まず  $\#A = 1$ , すなわち  $A$  が自明な abelian group  $\{e\}$  であったとする. この時, 明らかに  $\mathcal{F}(V)$  は定値写像  $x \mapsto e$  のみからなる.  $\mathcal{F}(U)$  も同じ定値写像からなるので, この時 constant sheaf は flasque.

<sup>†8</sup> フランス語. フラスコのこと. 軟弱という意味. 発音は <https://ja.forvo.com/word/flasque/>.

■Case #A > 1.  $a \neq b$  が成り立つような  $a, b \in A$  を任意に取る. すると以下が成り立つ.

$$s^{-1}(\{a\}) \cap s^{-1}(\{b\}) = s^{-1}(\{a\} \cap \{b\}) = s^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

したがって  $X :: \text{irreducible}$  から  $s^{-1}(\{a\})$  or  $s^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ . 仮に任意の  $a \in A$  について  $s^{-1}(\{a\}) = \emptyset$  であったとすると  $s$  が写像にならない. したがって  $s^{-1}(\{a_s\}) \neq \emptyset$  となる  $a_s \in A$  がただひとつ存在する.  $s$  は写像なので  $s^{-1}(A) = V$  が成り立ち, したがって  $s$  はこのような  $a_s$  への定値写像である事が分かる. すると容易に  $s$  は  $U$  へ拡張できるので, この時も constant sheaf は flasque.

(b) If  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  is Exact and  $\mathcal{F}'$  is Flasque, then...

$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  が exact かつ  $\mathcal{F}'$  が flasque であったとする. この時, 任意の open set  $U$  について  $0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}''(U) \rightarrow 0$  は exact であることを示す.

(ここに証明を書いていたが, これは誤りであった.)

(i) Another Proof

次の PDF の Lemma2.12(p.10) がこの演習問題と同じ命題である: [http://www.math.mcgill.ca/goren/SeminarOnCohomology/Sheaf\\_Cohomology.pdf](http://www.math.mcgill.ca/goren/SeminarOnCohomology/Sheaf_Cohomology.pdf). 次の PDF の Lemma0.3(p.12) も同じ: <http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4215/v15/notes1.pdf>. どちらの証明でも Zorn's Lemma が用いられている.

(c) If  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  is Exact and  $\mathcal{F}', \mathcal{F}$  is Flasque, then  $\mathcal{F}''$  also.

$U, V :: \text{open in } X, V \subseteq U$  とする. (b) より, 以下の完全列が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(V) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}''(V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

証明は diagram chasing による.

- (1)  $s'' \in \mathcal{F}''(V)$  を任意に取る.
- (2)  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}''(V) :: \text{surj}$  から,  $g(\tilde{s})|_V = s''$  なる  $\tilde{s} \in \mathcal{F}(U)$  が取れる.
- (3) naturality から  $g(\tilde{s}|_V) = s'' = g(\tilde{s})|_V$ .

$s := g(\tilde{s}) \in \mathcal{F}''(U)$  とおけば  $s|_V = s''$ .

(d) If  $f : X \rightarrow Y$  is Conti. and  $\mathcal{F}$  is Flasque, then  $f_*\mathcal{F}$  is Flasque.

$U, V :: \text{open in } Y, V \subseteq U$  とする. このとき  $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$ . なので  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V) :: \text{surj}$  より  $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V)) :: \text{surj}$ .  $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$  だから,  $f_*\mathcal{F} :: \text{flasque}$ .

(e) Discontinuous Sections.

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$  とする．これに対し, discontinuous sections of  $\mathcal{F}$  と呼ばれる sheaf  $\mathcal{G}$  が以下のように作れる． $\pi$  は Ex1.13 の  $s_P \mapsto P$  なる写像である．

$$\mathcal{G} : U \mapsto \left\{ s : U \rightarrow \bigsqcup_{P \in U} \mathcal{F}_P \mid \pi \circ s = \text{id}_U \right\}$$

$\mathcal{G}$  が flasque sheaf であることと,  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  の自然な単射が存在することを示す．

■  $\mathcal{G} :: \text{sheaf}$ .  $\mathcal{G} :: \text{presheaf}$  は明らか．sheaf であることを示すため,  $U :: \text{open in } X$  とその open cover  $\{U_i\}_{i \in I}$  をとり, 固定する．任意の  $i \in I$  について  $s|_{U_i} = 0$  であるような  $s \in \mathcal{G}(U)$  が存在したとする． $\bigcup U_i = U$  より, 任意の点  $P \in U$  に対して  $s(P) = 0$ ．これは Identity Axiom の成立を意味する．同様に “ $\forall i, j, \forall P \in U_i \cap U_j,$  ” を “ $\forall P \in U,$  ” に書き換えるだけで, Glueability Axiom の成立が証明できる．

■  $\mathcal{G} :: \text{flasque}$ .  $V \subset U$  とする． $s \in \mathcal{G}(V)$  をとる．これは例えば以下のように拡張できる．

$$\bar{s}(P) = \begin{cases} s(P) & (P \in V) \\ 0 & (P \in U \setminus V) \end{cases}$$

■  $\alpha$  in Ex1.13 is injective. Ex1.13 の  $\alpha : s \mapsto [P \mapsto s_P]$  が injective であることは以下のように示される．ある  $s, t \in \mathcal{F}(U)$  について  $\alpha(s) = \alpha(t)$  が成立するとしよう．すると十分小さい open set  $(P \in) V_P (\subset U)$  が存在して,  $s|_{V_P} = t|_{V_P}$  となる．明らかに  $\{V_P\}_{P \in U}$  は  $U$  の open cover なので,  $s - t \in \mathcal{G}$  に Identity Axiom を用いて  $s = t$  が得られる．

## Ex1.17 Skyscraper Sheaves.

$X :: \text{topological space}, P \in X, A :: \text{abelian group}$  とする．sheaf  $i_P(A)$  を以下で定める．

$$i_P(A)(U) = \begin{cases} A & (P \in U) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

点  $P$  を含む最小の開集合を  $\{P\}^-$  と書く．

(a)  $(i_P(A))_Q = A$  is  $A$  if  $Q \in \{P\}^-$ , otherwise 0 .

$U$  を  $Q$  を含む極小の開集合とした時,  $(i_P(A))_Q$  は集合として  $\mathcal{F}(U)$  と一致する．したがって以下が成立する．

$$\begin{aligned} (i_P(A))_Q &= A \\ \iff \forall U \subset X, Q \in U \implies P \in U \\ \iff \forall U \subset X, P \in U^c \implies Q \in U^c. \end{aligned}$$

最後の行は対偶として得られた．一方, 点  $P$  を含む最小の開集合  $\{P\}^-$  は以下を満たす唯一の集合として特徴づけられる．

$$\forall U \subset X, P \in U^c \implies \{P\}^- \subseteq U^c$$

よって  $(i_P(A))_Q = A \iff Q \in \{P\}^-$  . 他の方は明らかに  $(i_P(A))_Q = 0$  となる．また, この特徴付けの対偶から  $U \cap \{P\}^- \neq \emptyset$  ならば  $P \in U$  .  $P \in U$  ならば  $P \in U \cap \{P\}^-$  なので逆も成立する．

(b)  $i_P(A)$  can be described as direct image.

abelian group  $A$  に伴う  $\{P\}^-$  上の constant sheaf を  $\mathcal{A}$  とする. すると  $i_P(\mathcal{A})$  は埋め込み写像  $i : \{P\}^- \hookrightarrow X$  の direct image  $i_*(\mathcal{A})$  に等しい. 実際, 開集合  $U$  について  $i_*(\mathcal{A})(U) = \mathcal{A}(i^{-1}(U)) = \mathcal{A}(U \cap \{P\}^-)$  であるから以下のようになる.

$$i_*(\mathcal{A})(U) \cong \begin{cases} A & (U \cap \{P\}^- \neq \emptyset) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

(a) で見たとおり  $U \cap \{P\}^- \neq \emptyset$  と  $P \in U$  は同値. よって  $i_*(\mathcal{A}) = i_P(A)$ . 特に,  $\{P\}^-$  はその最小性から irreducible なので, Ex1.16a,d と合わせれば  $i_P(A)$  は flasque であることが分かる.

### Ex1.18 Adjoint Property of $f^{-1}$ .

$X, Y$  を位相空間とし,  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  をそれぞれ  $X, Y$  上の sheaf とする.  $f : X \rightarrow Y$  を連続写像に対し,  $f^p\mathcal{G}$  を  $U \mapsto \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$  で定まる presheaf,  $f^{-1}\mathcal{G}$  を  $f^p\mathcal{G}$  の sheafification,  $(f_*\mathcal{F})(U') = \mathcal{F}(f^{-1}(U'))$  とおく. つまり,

$$f^p : \mathbf{Sh}(Y) \rightarrow \mathbf{PSh}(X), f^{-1} : \mathbf{Sh}(Y) \rightarrow \mathbf{Sh}(X), f_* : \mathbf{PSh}(X) \rightarrow \mathbf{PSh}(Y)$$

であり,  $f_*$  は sheaf を sheaf に写す functor である.

$\eta, \epsilon$  を定義して, この準備の後, sheaf  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  について  $\text{Hom}(f^p\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{F})$  を示す. その後,  $\text{Sh} \dashv \text{Fgt}$  を用いて  $\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{F})$  を示す.

■ Construction of  $\epsilon$ .  $\epsilon_{\mathcal{F}} : f^p f_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  を以下のように定義する.  $U :: \text{open in } X$  に対し,  $(f^p f_* \mathcal{F})(U)$  は次の direct system の direct limit である.

$$\left\{ \text{res}_{f^{-1}(V')}^{f^{-1}(W')} : \mathcal{F}(f^{-1}(V')) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(W')) \mid f(U) \subseteq W' \subseteq V' :: \text{open in } Y \right\}.$$

$U \subseteq f^{-1}(f(U))$  であるから, この direct system の各元  $\mathcal{F}(f^{-1}(V))$  から  $\mathcal{F}(U)$  への restriction map が存在する. この direct system から  $\mathcal{F}(U)$  への射から, direct system の普遍性に依って得られる射が  $(\epsilon_{\mathcal{F}})_U$  である.

■ Construction of  $\eta$ .  $\eta_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow f_* f^p \mathcal{G}$  を以下のように定義する.  $U' :: \text{open in } Y$  に対し,  $(f_* f^p \mathcal{G})(U')$  は次の direct system の direct limit である.

$$\left\{ \text{res}_{V'}^{W'} : \mathcal{G}(V') \rightarrow \mathcal{G}(W') \mid f(f^{-1}(U')) \subseteq W' \subseteq V' :: \text{open in } Y \right\}.$$

$f(f^{-1}(U')) \subseteq U'$  であるから, この direct system に  $\mathcal{G}(U')$  が属している. よって direct limit の定義から  $\mathcal{G}(U')$  から  $f_* f^p \mathcal{G}$  への射が存在し, これが  $(\eta_{\mathcal{G}})_{U'}$  である.

■ Construction of  $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}, \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ .  $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} : \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \leftrightarrow \text{Hom}(f^p\mathcal{G}, \mathcal{F}) : \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$  を構築する.  $\alpha \in \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$  から始める.

$$\begin{array}{ccc}
 (1) & (2) & (3) \\
 \mathcal{G} \xrightarrow{\alpha} f_*\mathcal{F} & \begin{array}{c} \mathcal{F} \\ \swarrow \bar{\alpha} \quad \searrow \epsilon_{\mathcal{F}} \\ f^p\mathcal{G} \xrightarrow{f^p\alpha} f^pf_*\mathcal{F} \end{array} & \begin{array}{c} \mathcal{F} \\ \swarrow \bar{\alpha} \quad \searrow \epsilon_{\mathcal{F}} \\ f^p\mathcal{G} \xrightarrow{f^p\alpha} f^pf_*\mathcal{F} \end{array} \\
 & \mathcal{G} \xrightarrow{\alpha} f_*\mathcal{F} & \begin{array}{c} \mathcal{G} \xrightarrow{\alpha} f_*\mathcal{F} \\ \eta_{\mathcal{G}} \downarrow \quad \downarrow \eta_{f_*\mathcal{F}} \\ f_*f^p\mathcal{G} \xrightarrow{f_*f^p\alpha} f_*f^pf_*\mathcal{F} \\ \swarrow f_*\bar{\alpha} \quad \searrow f_*\epsilon_{\mathcal{F}} \\ f_*\mathcal{F} \end{array}
 \end{array}$$

図式 (1) を  $f^p$  で写したものに,  $\mathcal{F}$  と  $\epsilon_{\mathcal{F}}$  を追加すると, 射の結合として  $\bar{\alpha}$  が得られる. これが図式 (2) であり,

$$\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\alpha) = \bar{\alpha} = \epsilon_{\mathcal{F}} \circ f^p\alpha \in \text{Hom}(f^p\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

と定義する. さらに (2) の上の三角形を  $f_*$  で写したものが図式 (3) の下の三角形である.  $\eta$  の自然性から,  $\eta$  を追加した図式 (3) も可換である. すると  $\bar{\alpha} \in \text{Hom}(f^p\mathcal{G}, \mathcal{F})$  から

$$\Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\bar{\alpha}) = f_*\bar{\alpha} \circ \eta_{\mathcal{G}} \in \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

が得られる.

■  $\Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \circ \Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} = \text{id}_{\text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})}$ . 今,  $\alpha$  から  $\Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\bar{\alpha}) = \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\alpha))$  が得られた. この二つが等しいことを示そう. これは  $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$  が単射であることを意味する. そのためには, 直前の図式 (3) における以下の path が  $\text{id}_{f_*\mathcal{F}}$  であることを示せば良い.

$$\begin{array}{c}
 f_*\mathcal{F} \\
 \downarrow \eta_{f_*\mathcal{F}} \\
 f_*f^pf_*\mathcal{F} \\
 \swarrow f_*\epsilon_{\mathcal{F}} \\
 f_*\mathcal{F}
 \end{array}$$

$f_*f^pf_*\mathcal{F}$  は  $f_*f^pf_*\mathcal{F}$  の sheafification である. 任意の  $U :: \text{open in } X$  について,  $(f^pf_*\mathcal{F})(U)$  は

$$\mathcal{D}_0 = \{\mathcal{F}(V) \mid V \supseteq f(f^{-1}(U))\}$$

の direct limit である. 写像についての基本的な事実から,  $U \supseteq f(f^{-1}(U))$  となる. つまり  $\mathcal{F}(U) \in \mathcal{D}_0$ . 図式  $\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{D}_0 \rightarrow (f^pf_*\mathcal{F})(U)$  を  $f_*$  で写せば,  $(f_*f^pf_*\mathcal{F})(U)$  が

$$\mathcal{D}_1 = \{\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \mid V \supseteq f(f^{-1}(U))\}$$

の direct limit であることがわかる. さらに  $V \supseteq f(f^{-1}(U))$  であるとき  $f^{-1}(V) \supseteq f^{-1}(f(f^{-1}(U))) = f^{-1}(U)$  だから,  $\mathcal{D}_1$  の任意の元から  $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{F}(U) \leftarrow \text{restriction map}$  が伸びる. 以上から, 以



下の図式が書ける．

$$\begin{array}{ccc}
 (f_* f^p f_* \mathcal{F})(U) & \xrightarrow{(\epsilon_{f_* \mathcal{F}})_U} & \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \\
 \uparrow & \searrow \text{res} & \uparrow \parallel \text{res}_{f^{-1}(U)}^{\mathcal{F}(f^{-1}(U))=\text{id}} \\
 \mathcal{D}_1 & \xrightarrow{\exists} & f_* \mathcal{F}(U)
 \end{array}$$

$\mathcal{D}_1$  から伸びる 2 本の射と整合的に  $(\epsilon_{f_* \mathcal{F}})_U$  が生えている．これはつまり上の図式で  $\mathcal{D}_1$  を頂点に持つ三角形が可換である，ということである． $f_* \mathcal{F}(U) \in \mathcal{D}_1$  に注目すれば，これは直ちに  $\epsilon_{f_* \mathcal{F}} \circ f_* \eta_{\mathcal{F}} = \text{id}$  を意味する．ここまでは  $f_* f^p f_* \mathcal{F}$  についての議論だったが，これを sheafification すれば最初の目的の等式が得られる．

■  $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \circ \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} = \text{id}_{\text{Hom}(f^p \mathcal{G}, \mathcal{F})}$ ．今度は  $\beta \in \text{Hom}(f^p \mathcal{G}, \mathcal{F})$  をとる． $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \circ \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\beta) = \beta$  を示そう．前段落及び前前段落と同様に図式を書く．

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{G} & \\
 \eta_{\mathcal{G}} \swarrow & & \searrow \bar{\beta} \\
 f_* f^p \mathcal{G} & \xrightarrow{f_* \beta} & f_* \mathcal{F}
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccc}
 & f^p \mathcal{G} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F} & \\
 \epsilon_{f^p \mathcal{G}} \uparrow & & & & \uparrow \epsilon_{\mathcal{F}} \\
 f^p f_* f^p \mathcal{G} & \xrightarrow{f^p f_* \beta} & f^p f_* \mathcal{F} & & \\
 & \nwarrow f^p \eta_{\mathcal{G}} & \nearrow f^p \bar{\beta} & & \\
 & f^p \mathcal{G} & & & 
 \end{array}$$

よって以下が  $\text{id}_{f^p \mathcal{G}}$  であることを示せば良いと分かる．

$$\begin{array}{ccc}
 & f^p \mathcal{G} & \\
 \epsilon_{f^p \mathcal{G}} \uparrow & & \\
 f^p f_* f^p \mathcal{G} & & \\
 & \nwarrow f^p \eta_{\mathcal{G}} & \\
 & f^p \mathcal{G} & 
 \end{array}$$

そこで次の図式を考える．

$$\begin{array}{ccccc}
 (f^p \mathcal{G})(U) & \xrightarrow{(f^p \eta_{\mathcal{G}})_U} & (f^p f_* f^p \mathcal{G})(U) & \xrightarrow{(\epsilon_{f^p \mathcal{G}})_U} & (f^p \mathcal{G})(U) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{D} & & \mathcal{D}' & & \mathcal{D}
 \end{array}$$

ただし  $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  は以下の direct system であり， $U \subseteq X$  及び  $V, W \subseteq Y$  はすべて開集合である．

$$\mathcal{D} = \{\mathcal{G}(V) \mid f(U) \subseteq V\}, \mathcal{D}' = \{\mathcal{G}(W) \mid f(U) \subseteq V, f(f^{-1}(V)) \subseteq W\}.$$

$V, W$  は open set である． $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$  は，実は等しい．なぜなら，初歩的な写像についての結果から，

$$[f(U) = f(f^{-1}(f(U))) \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq W] \wedge [f(f^{-1}(V)) \subseteq V]$$

が成り立つからである．前半は  $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{D}'$  を意味し，後半は  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$  を意味する．よって  $(f^p \mathcal{G})(U)$  が持つ UMP から，左の  $(f^p \mathcal{G})(U)$  から右の  $(f^p \mathcal{G})(U)$  への射は  $\text{id}$  である．

■  $\text{Hom}(f^p\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{F})$ . 以上で  $\text{Hom}(f^p\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{F})$  が示せた.  $Sh \dashv Fgt$  を用いると以下が示される.

$$\begin{aligned} & \text{Hom}(f^p\mathcal{G}, \mathcal{F}) \\ &= \text{Hom}(Sh f^p\mathcal{G}, \mathcal{F}) \\ &\cong \text{Hom}(f^p\mathcal{G}, Fgt\mathcal{F}) \\ &\cong \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*Fgt\mathcal{F}) \\ &= \text{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \end{aligned}$$

ここで,  $\mathcal{F}$  が sheaf であること, したがって  $\mathcal{F} = Fgt\mathcal{F}$  であることを用いた.

■  $\eta$  is Natural.

■  $\epsilon$  is Natural.

■  $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}, \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$  is Natural.

■ Bijection  $\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{F})$  is Natural.

## Ex1.19 Extending a Sheaf by Zero.

$X ::$  topological space,  $Z ::$  closed subset in  $X$ ,  $U = X \setminus Z$  とする. さらに  $i: Z \hookrightarrow X, j: U \hookrightarrow X$  を埋め込み写像とする.

(a)  $i_*\mathcal{F}$ : Extending  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(Z)$  by Zero Outside  $Z$ .

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(Z)$  とする.  $i$  は埋め込み写像なので, 開集合  $U$  について  $(i_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U \cap Z)$ .

点  $P$  の開近傍を考える.

■ Case:  $P \in Z^c$ .  $Z^c$  は開集合だから,  $P \in Z^c$  ならば, 開近傍  $V$  が存在して  $P \in V \subseteq Z^c$  となる. このとき,  $\mathcal{F}(Z \cap V) = \mathcal{F}(\emptyset) = 0$  となる. しかも  $\mathcal{F}(Z \cap V) = 0$  は十分小さいすべての  $U$  について成り立つ. したがって  $P$  の任意の開近傍  $V$  について次の図式が可換.

$$\begin{array}{ccc} & (i_*\mathcal{F})_P & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \mathcal{F}(Z \cap V) & \xrightarrow{i_* \text{res}_V^\emptyset} & 0 \end{array}$$

よって  $\mathcal{F}(Z \cap V) \rightarrow (i_*\mathcal{F})_P$  はゼロ写像しかなく,  $(i_*\mathcal{F})_P$  の UMP から  $(i_*\mathcal{F})_P = 0$ .

■ Case:  $P \in Z$ . 逆に  $P \in Z$  ならば, 点  $P$  の  $X$  における開近傍  $U$  から作られる  $Z \cap U$  は, 常に空でない  $P$  の開近傍. いつでも埋め込み射  $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(Z \cap V)$  が存在するので, 結局  $\mathcal{F}(V)$  ( $P \in V$ ) なる abelian group 全てから  $(i_*\mathcal{F})_P$  に射がのびている. よって  $(i_*\mathcal{F})_P = \mathcal{F}_P$ .

■ Conclusion. まとめると, 以下が成り立つ.

$$(i_*\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & (P \in Z) \\ 0 & (P \notin Z) \end{cases}$$

(b)  $j_! \mathcal{F} : \text{Extending } \mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(U) \text{ by Zero Outside } U$

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(U)$  とし,  $j_! \mathcal{F}$  を以下で定まる presheaf の sheafification とする.

$$(j_! \mathcal{F})^{pre}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & (V \subseteq U) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

sheafification で stalk は変わらないから,  $(j_! \mathcal{F})_P = (j_! \mathcal{F})_P^{pre}$ .

点  $P$  の開近傍を考えよう.

■Case:  $P \in U$ .  $U :: \text{open}$  なので, ある  $V :: \text{open}$  が存在して  $P \in V \subseteq U$  となる. このような  $V$  について  $(j_! \mathcal{F})^{pre}(V) = \mathcal{F}(V)$ .  $U$  より小さい任意の開近傍  $V$  については  $(j_! \mathcal{F})^{pre}(V) = \mathcal{F}(V)$  となる上,  $U$  より大きい任意の開近傍  $V$  から射  $\text{res}_V^{U \cap V} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  が生えている. よって  $(j_! \mathcal{F})_P^{pre} = \mathcal{F}_P$ .

■Case:  $P \in U^c$ . このとき, どのように  $P$  の開近傍  $V$  をとっても,  $P \in V$  かつ  $P \notin U$  なので  $V \not\subseteq U$ . したがって  $(j_! \mathcal{F})_P^{pre} = 0$  となる.

■Conclusion. まとめると, 以下が成り立つ.

$$(j_! \mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & (P \in U) \\ 0 & (P \notin U) \end{cases}$$

(c)  $0 \rightarrow j_!(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*(\mathcal{F}|_Z) \rightarrow 0$  is Exact.

Ex1.2c を応用する.  $P \in X$  を任意の点とする.  $P \in U \text{ exor } Z$  なので, それぞれの場合について考える.

■Case:  $P \in Z$ . この時,  $(j_!(\mathcal{F}|_U))_P = \mathcal{F}_P$ ,  $(i_*(\mathcal{F}|_Z))_P = 0$  となる. よって  $0 \rightarrow (j_!(\mathcal{F}|_U))_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P \rightarrow 0$  は  $0 \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow 0 \rightarrow 0$  に等しく, これは完全列.

■Case:  $P \in U$ . この時,  $(j_!(\mathcal{F}|_U))_P = 0$ ,  $(i_*(\mathcal{F}|_Z))_P = \mathcal{F}_P$  となる. よって  $0 \rightarrow (j_!(\mathcal{F}|_U))_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P \rightarrow 0$  は  $0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow 0$  に等しく, これは完全列.

## Ex1.20 Subsheaf with Supports.

$Z :: \text{closed in } X$ ,  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$  とする.  $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$  を以下で定める.

$$\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \mid \text{Supp}(s) \subseteq Z\}.$$

“ $\text{Supp}(s) \subseteq Z$ ” は “ $\forall P \in Z^c, s(P) = 0$ ” と同値である. また, 特に  $\text{Supp}(0) = \emptyset$  より,  $0 \in \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ .

(a) Presheaf  $V \mapsto \Gamma_{V \cap Z}(V, \mathcal{F}|_V)$  is a Sheaf.

Presheaf  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$  を

$$\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) : V \mapsto \Gamma_{V \cap Z}(V, \mathcal{F}|_V)$$

で定める. これが sheaf であることを示そう. 開集合  $V$  とその開被覆  $\{V_i\}_{i \in I}$  を任意にとる.

■Identity Axiom.  $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V)$  をとる. 任意の  $i \in I$  について  $s|_{V_i} = 0$  が成り立つとしよう. この時,  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$  の定義から,  $s \in \mathcal{F}(V)$  と  $\text{Supp}(s|_V) \subseteq V \cap Z$  が成り立つ.  $\mathcal{F}$  の identity axiom をもちいて,  $s|_V = 0$  が得られる.

■Gluability Axiom.  $s_i \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V_i)$  をとる. 任意の  $i, j \in I$  について  $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$  が成り立つとしよう. するとやはり  $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$  なので,  $\mathcal{F}$  の gluability axiom から,  $s|_{V_i} = s_i$  なる  $s \in \mathcal{F}(V)$  が存在する. あとは  $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V)$ , すなわち  $\text{Supp}(s) \subseteq V \cap Z$  を示せば良い. これは

$$\text{Supp}(s_i) = \text{Supp}(s|_{V_i}) = \text{Supp}(s) \cap V_i \subseteq V_i \cap Z$$

から  $\text{Supp}(s) = \bigcup (\text{Supp}(s) \cap V_i) \subseteq \bigcup (V_i \cap Z) = V \cap Z$  と計算できる.

(b) For  $U = X \setminus Z$ ,  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$  is Exact.

開集合  $U = X \setminus Z$  と  $j : U \hookrightarrow X$  について,  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$  が exact であることを示す. さらに,  $\mathcal{F} :: \text{flasque}$  ならば  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U) \rightarrow 0$  も exact であることを示す.

定義より,  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}), j_*(\mathcal{F}|_U)$  は以下のような集合である.

$$\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(V) \mid \forall Q \in U \cap V, s(Q) = 0\}, \quad j_*(\mathcal{F}|_U) = \mathcal{F}(U \cap V).$$

そこで写像  $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$  を以下で定義する.

$$\zeta(s)(Q) = [Q \in U \cap V]s(Q) \quad \text{where } V :: \text{open in } X, s \in \mathcal{F}(V), Q \in V.$$

ただし  $[Q \in U \cap V]$  は Iverson の記法である. (ここは指示関数を用いて  $\chi_{U \cap V}(Q)$  と書いても良い.) すると既に確認した  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$  の定義から,  $\ker \zeta = \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ . よって  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\zeta} j_*(\mathcal{F}|_U)$  は exact.

さらに  $\mathcal{F} :: \text{flasque}$  だと仮定する. すると,  $s \in \mathcal{F}(U \cap V)$  に対して  $s'|_{U \cap V} = s$  なる  $s' \in \mathcal{F}(V)$  が存在する. 明らかに  $\zeta(s') = s$  となるから, この時  $\zeta$  は全射. したがって  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U) \rightarrow 0$  も exact になる.

## Ex1.21 Some Examples of Sheaves on Varieties.

$k :: \text{algebraically closed field}$ ,  $X :: \text{variety over } k$  とする.  $\mathcal{O}_X$  を the sheaf of regular functions on  $X$  (Example 1.0.1) とする.

(a) The Sheaf of Ideals  $\mathcal{I}_Y$ .

$Y :: \text{closed in } X$  とする. 任意の  $U :: \text{open in } X$  について,  $\mathcal{I}_Y(U)$  を以下で定める.

$$\mathcal{I}_Y : U \mapsto \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid \forall P \in Y \cap U, f(P) = 0\}.$$

$\mathcal{I}_Y(U)$  は  $\mathcal{O}_X(U)$  のイデアルである. この時,  $\mathcal{I}_Y(\subseteq \mathcal{O}_X)$  が sheaf であることを示す.

(b) If  $Y :: \text{subvariety}$ , then  $\mathcal{O}_X \cong i_*(\mathcal{O}_Y)$ .

(c)

(d)

(e)

## Ex1.22 Glueing Sheaves.

$X :: \text{topological space}$ ,  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I} :: \text{open cover of } X$ ,  $\mathcal{F}_i \in \mathbf{Sh}(U_i)$  とする. この  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  に付随して, 同型写像  $\phi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$  が存在し,  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  with  $\{\phi_{ij}\}_{i,j \in I}$  が inverse system をな

すとする。この時、inverse limit  $\mathcal{F}$  の存在を示す。さらに、 $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{F}_i$  となることを示す。この命題は section でなく sheaf の Glueability Axiom と言える。

Prop1.1 を用いて仮定を書き換える。 $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  について、以下の同型がある。

$$\forall i, j \in I, \forall P \in U_i \cap U_j, (\mathcal{F}_i)_P \cong (\mathcal{F}_j)_P.$$

この時、sheaf  $\mathcal{F}$  が存在して、

$$\forall i \in I, \forall P \in U_i, \mathcal{F}_P = (\mathcal{F}|_{U_i})_P \cong (\mathcal{F}_i)_P$$

となることを示す。Ex1.19b の結果が結論によく似ているので、これを参考にする。

$\mathcal{F}$  を以下の presheaf の sheafification と定義する。

$$\mathcal{F}^{pre}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_i(V) & (\exists i \in I, V \subseteq U_i) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

もし  $V \subseteq U_i$  なる  $i$  が複数存在した時には、どれを選んでも構わない。その時  $V \subseteq U_i \cap U_j$  なる  $i, j \in I$  が存在し、 $i, j$  どちらを選んでも  $\mathcal{F}^{pre}(V)$  が  $\phi_{ij}$  を介して同型になるからである。そして Ex1.19b の証明から分かるように、 $(\mathcal{F}|_{U_i})_P = (\text{emb}_i^{U_i} \mathcal{F}_i)_P = (\mathcal{F}_i)_P$ 。ただし  $\text{emb}_i^{U_i} : U_i \hookrightarrow U$  は埋め込み写像である。