ゼミノート #3

Sheaves on a Site, continued.

七条彰紀

2018 年 11 月 6 日

1　Propositions : Sheaves.

定理 1.1
$\mathbf{C}$ :: site とする．忘却関手

$$Fgt\colon \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C}).$$

は left adjoint functor :: *Shff* を持つ．

注意 1.2
以下で述べる *Shff* の構成は "plus construction" と呼ばれる．Kay Werndli "Sheaves From Scratch" §3.5 では etale bundle という物を用いた構成をしている．

証明のために幾つか定義しておく．

定義 1.3 ([5], Tag 00W1)
$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ と，$X \in \mathbf{C}$ の cover :: $\mathcal{U} = \{U_i \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$ に対し，

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{equalizer of } \left[\ \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathcal{F}(U_i \times_X U_j)\ \right]$$

ここで二つの並行射はそれぞれ $\mathrm{res}^{U_i\times U_j}_{U_i}, \mathrm{res}^{U_i\times U_j}_{U_j}$ である．すなわち，ここにある並行射は sheaf の定義にあるものである．この diagram は圏 **Sets** の中のものなので，**index :: I が集合ならば**この equalizer は常に存在する．(H^0 という記号は，これが $\mathcal{F}$ の 0 次 Čech cohomology であることによる．)

直ちに分かるとおり，$\mathrm{Cov}(X)$ は細分を射として圏を成し，$H^0(-,\mathcal{F})$ は圏 $\mathrm{Cov}(X)$ から **Sets** への反変関手である．$\mathcal{F}^+$ は

$$\mathcal{F}^+(X) = \mathrm{colim}_{\mathcal{U}\in\mathrm{Cov}(X)} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{colim}(\mathrm{Cov}(X) \to^{H^0(-,\mathcal{F})} \mathbf{Sets}).$$

と定義される[†1]．任意の $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(X)$ について，常に標準的全射 $\iota_{\mathcal{U}}\colon H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \to \mathcal{F}^+(X)$ が存在する．

[†1] 定義から，$s, t \in \mathcal{F}^+(X)$ が等しいとは，以下が成り立つこと：s, t へそれぞれ写る $(\tilde{s}_U)_{U\in\mathcal{U}} \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}), (\tilde{t}_V)_{V\in\mathcal{V}} \in H^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ が存在し，$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ の共通のある細分 $\mathcal{W}$ において

$$(\tilde{s}_U|_W)_{\mathcal{W}\ni W\subseteq U\in\mathcal{U}} = (\tilde{t}_V|_W)_{\mathcal{W}\ni W\subseteq V\in\mathcal{V}}$$

となる．

$H^0(\{\mathrm{id}_X \colon X \to X\}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ であり，しかも任意の cover of X は id_X の細分であるから，X 毎に標準的な射 $\theta\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}^+(X)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(X) \arrow[rr, dashed, "\theta"] \arrow[d] \arrow[rrd, bend left=10] & & \mathcal{F}^+(X) \\
\mathcal{F}(X) \quad \in & \Big\{ H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[rr] \arrow[rru, bend right=10] & & H^0(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \Big\}_{\mathcal{U}, \mathcal{U}'} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

定義 1.4
presheaf :: $\mathcal{P} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ は以下を満たす時 separated であるという．

$$^\forall X \in \mathbf{C},\ \ ^\forall\{U_i \to X\}_i \in \mathrm{Cov}(X),\ \ \mathcal{P}(X) \to \prod_{i \in I} \mathcal{P}(U_i) :: \text{ inj.}$$

補題 1.5 (A)
site :: $\mathbf{C}$, presheaf :: $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ を考える．任意の $X \in \mathbf{C}, \mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(X), U_0 \in \mathcal{U}$ について，以下の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^+(X) \arrow[r, "\mathrm{res}_X^{U_0}"] & \mathcal{F}^+(U_0) \\
H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[u, "\iota_{\mathcal{U}}"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{U_0}"'] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{-90}{$\subseteq$}"] & \mathcal{F}(U_0) \arrow[u, "\theta"'] \\
\prod_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(U) &
\end{tikzcd}$$

(証明)．適当に $(\tilde{s}_U)_{U \in \mathcal{U}} \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ をとり，$s = \iota_{\mathcal{U}}\big((\tilde{s}_U)_{U \in \mathcal{U}}\big) \in \mathcal{F}^+(X)$ とする．

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "\mathrm{res}_X^{U_0}"] & s|_{U_0} \\
(\tilde{s}_U)_{U \in \mathcal{U}} \arrow[u] \arrow[r, "\prod \mathrm{res}_U^{U \times U_0}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{pr}_{U_0}"'] & (\tilde{s}_U|_{U \times U_0})_{U \in \mathcal{U}} \arrow[u] \\
 & \tilde{s}_{U_0} \arrow[u, "\prod \mathrm{res}_{U_0}^{U \times U_0}"] \arrow[uu, bend right=60, "\theta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^+(U) \arrow[r] & \mathcal{F}^+(U_0) \\
H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dr, bend right] & H^0(\mathcal{U} \times U_0, \mathcal{F}) \arrow[u] \\
 & \mathcal{F}(U_0) \arrow[u] \arrow[uu, bend right=60, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

$(\tilde{s}_U)_{U \in \mathcal{U}}$ から $(\tilde{s}_U|_{U \times U_0})_{U \in \mathcal{U}}$ への 2 本の射が一致するのは，$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ の定義から従う

$$\tilde{s}_U|_{U \times U_0} = \tilde{s}_{U_0}|_{U \times U_0}$$

が理由である． ∎

補題 1.6 (B)
任意の $X \in \mathbf{C}$ と $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathrm{Cov}(X)$ に対し，$\mathcal{U}, \mathcal{V}$ の共通の細分が存在する．

(証明)．具体的に

$$\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{U \times V \to U \to X \mid U \in \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{V}\} = \{U \times V \to V \to X \mid U \in \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{V}\}$$

と取れば良い． ∎

補題 1.7
site :: $\mathbf{C}$, presheaf :: $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について以下が成り立つ.

(a) $\mathcal{F}^+$ :: separated.
(b) $\mathcal{F}^+$ :: sheaf if $\mathcal{F}$ :: separated.
(c) $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ :: iso if $\mathcal{F}$ :: sheaf.
(d) $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ :: universal,

(証明).
■$\mathcal{F}^+$ **:: separated.** $X \in \mathbf{C}$ をとり，$s, t \in \mathcal{F}^+(X)$ をとる．ある cover of X :: $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(X)$ について

$$^\forall U \in \mathcal{U},\quad s|_U = t|_U$$

が成り立つと仮定して $s = t$ を示す.

まず，$\iota_{\mathcal{U}'}\big((\tilde{s}_{U'})_{U' \in \mathcal{U}'}\big) = s$ となる様に $\mathcal{U}' \in \mathrm{Cov}(X)$ と $(\tilde{s}_{U'}) \in H^0(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ をとる．$\mathcal{U}'$ を必要に応じて更に細かくとれば，t についても同様の $(\tilde{t}_{U'}) \in H^0(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ が存在するように出来る．さらに，$\mathcal{U}'$ を $\mathcal{U}$ の細分とする.

この時，補題 A と $\mathcal{U}'$ が $\mathcal{U}$ の細分であることと仮定から

$$s|_{U'} = \theta(\tilde{s}_{U'}) = \theta(\tilde{t}_{U'}) = s|_{U'} \ (\in \mathcal{F}^+(U')).$$

したがって $\mathcal{F}^+(U')$ の定義から，各 U' について以下のような条件を満たす $\mathcal{V}_{U'} \in \mathcal{V}(U')$ が存在する: $(\tilde{s}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}}, (\tilde{s}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}} \in H^0(\mathcal{V}_{U'}, \mathcal{F})$ であって

$$\iota\big((\tilde{s}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}}\big) = s|_{U'},\quad \iota\big((\tilde{t}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}}\big) = t|_{U'}$$

となるならば $(\tilde{s}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}} = (\tilde{t}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}}$ となる．これら $\mathcal{V}_{U'}$ 達を束ねて $\mathcal{U}'$ の細分 $\mathcal{V} = \{V \to U' \to U \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$ を得る．$(\tilde{s}_{U'}), (\tilde{t}_{U'})$ も細分して

$$\tilde{s} = (\tilde{s}_{U'}|_V)_{\mathcal{V} \ni V \subseteq U' \in \mathcal{U}'},\ \tilde{t} = (\tilde{t}_{U'}|_V)_{\mathcal{V} \ni V \subseteq U' \in \mathcal{U}'} \in H^0(\mathcal{U}^2, \mathcal{F})$$

を得る.

以上の議論から，各 U' について

$$^\forall U' \in \mathcal{U}',\ ^\forall V \in \mathcal{V},\ V \subseteq U' \implies \tilde{s}'_V = \tilde{t}'_V \in H^0(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}'$ の細分だから，これは結局 $\tilde{s} = \tilde{t}$ ということである．さらに，$\tilde{s}, \tilde{t}$ は $(\tilde{s}_{U'})_{U' \in \mathcal{U}'}, (\tilde{t}_{U'})_{U' \in \mathcal{U}'}$ の細分[†2]であり，したがって $\iota_{\mathcal{V}}(\tilde{s}) = s, \iota_{\mathcal{V}}(\tilde{t}) = t$．以上より，$s = t$.

■$\mathcal{F}^+$ **:: sheaf if** $\mathcal{F}$ **:: separated.** $\mathcal{F}$ :: separated 故に $\mathcal{F}(X) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ :: inj なので θ :: inj.

cover of X :: $\mathcal{U} = \{U_i \to X\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ と，以下を満たす元 $(s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}^+(U_i)$ をとる:

$$^\forall i, i' \in I,\quad s_i|_{U_i \times U_{i'}} = s_{i'}|_{U_i \times U_{i'}} \tag{$*$}$$

すると補題 A より，

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}) = s_i|_{U_{i,j}}$$

[†2] 被覆の細分に合わせた呼び方である．多分，$H^0(-, \mathcal{F})$ の元に用いるのは独自の用法.

となる $\{U_{i,j} \to U_i\} \in \mathrm{Cov}(U_i)$ と $\tilde{s}_{i,j} \in \mathcal{F}(U_{i,j})$ がとれる．各被覆の包含関係は以下の通り．

$$\begin{tikzcd}
U_{i,j} \times_X U_{i',j'} \arrow[r] \arrow[dr] & U_{i,j} \arrow[r] & U_i \arrow[r] & X \\
& U_i \times_X U_j \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$(*)$ から，

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}}) = s_i|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}} = s_{i'}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}} = \theta(\tilde{s}_{i',j'}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}}).$$

θ :: inj より，$\tilde{s}_{i,j}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}} = \tilde{s}_{i',j'}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}}$. したがって $(\tilde{s}_{i,j}) \in H^0(\{U_{i,j} \to U\}, \mathcal{F})$ であり，ここから $s \in \mathcal{F}^+(X)$ が得られる．最後に，各 i について

$$^\forall j,\quad \theta(s_{i,j}) = s|_{U_{i,j}} = (s|_{U_i})|_{U_{i,j}} = s_i|_{U_{i,j}}$$

なので，$\mathcal{F}$ :: separated より，$s|_{U_i} = s_i$.

■**$\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ :: iso if $\mathcal{F}$ :: sheaf.** $\mathcal{F}$ :: sheaf であるとき，定義から任意の $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(X)$ について $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$. なので θ :: iso.

■**$\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ :: universal.** $\mathit{Shff}(-) = ((-)^+)^+$ とすると，これが sheafification functor となる．その UMP を見よう．$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C}), \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ とする．$\theta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \to \mathit{Shff}$ の naturality から，次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathit{Shff}\,\mathcal{F} \arrow[d] \\
\mathcal{G} \arrow[r, "\sim"] & \mathit{Shff}\,\mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

$\theta_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{G} \to \mathit{Shff}\,\mathcal{G}$ :: iso だから，$\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ から $\mathit{Shff}\,\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が得られた．次に，以下で示す可換図式 (1) が与えられたとしよう．全体を Shff で写し，$\mathit{Shff}|_{\mathbf{Sh}(X)} \cong \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$ を用いて可換図式 (2) が得られる．

$$\text{(1)}\quad \begin{tikzcd}
\mathit{Shff}\,\mathcal{F} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{G} \\
\mathcal{F} \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{F}}"] \arrow[ur, "\phi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\text{(2)}\quad \begin{tikzcd}
\mathit{Shff}\,\mathcal{F} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{G} \\
\mathit{Shff}\,\mathcal{F} \arrow[u, equal] \arrow[ur, "\mathit{Shff}\,\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

したがって $f = g$. 以上で existence & uniqueness が示せた． ■

proof of Thm(1.1). 私のノート[†3] の Ex1.12 で θ の UMP(universal map property, [1]) から left adjointness を証明している． ■

命題 1.8
topos has small limits and small cocomplete.

(証明). 前半は small product と equalizer を構成すればよい．後半は $\mathit{Shff}\colon \mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathbf{Cat}C)$ が left adjoint functor 故に colimit と交換することを用いれば良い． ■

[†3] [2] ch.I sec.1 の演習問題への解答: https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section1_ex.pdf

以下の 2 つはセミナー内で将来証明を扱う.

定理 1.9 ([4] 4.1.2)
$X \to Y$ :: morphism of schemes とする.representable sheaf :: $\underline{X}$ は $\mathrm{Fppf}(Y)$ 上の sheaf である.したがって fppf topology より荒い位相を持つ site,特に big etale site :: $\mathrm{ET}(Y)$ でも sheaf である.

命題 1.10
任意の presheaf は colimit of representable sheaves として表現できる

(証明). 証明は(各点)左 Kan 拡張を用いて,

$$\mathcal{P} = (\mathrm{Lan}_y\, y)(\mathcal{P}) = \mathrm{colim}(y{\downarrow}\mathcal{P} \to^{\pi_1} \mathbf{C} \to^{y} \mathbf{PSh}(\mathbf{C})).$$

ここで $y\colon \mathbf{C} \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ は米田埋め込みである.([1] Prop8.10 でも同じ命題が証明されている.) ∎

注意 1.11
Kan 拡張についての資料をメモしておく.alg-d 氏の公開しているノートが日本語で読める上丁寧で,おすすめ.英語で書かれた Web にある資料では,Jan Pavlík "Kan Extensions in Context of Concreteness" [†4]もある.

以下はセミナー内でこれ以上現れないが,Topos theory の重要な定理である.

定理 1.12 (Giraud's theorem)
category :: $\mathbf{T}$ について,$\mathbf{T}$ が topos であることと $\mathbf{T}$ が以下のような圏であることは同値.

(G1) a locally small category with a small generating set,
(G2) with all finite limits,
(G3) with all small coproducts, which are disjoint, and pullback-stable,
(G4) where all congruences have effective quotient objects, which are also pullback-stable.

参考: https://ncatlab.org/nlab/show/Grothendieck+topos#Giraud.

2 Definitions : Points and Stalks.

以下は small/big etale site のみで使われるものである.

定義 2.1 (Geometric Point, Etale Neighborhood, [4] 1.3.15.)

(i) X :: scheme に対し,k :: separably closed field を用いて $\bar{x}\colon \mathrm{Spec}\, k \to X$ と表される射を geometric point と呼ぶ.
(ii) geometric point :: $\bar{x}\colon \mathrm{Spec}\, k \to X$ について,$\bar{x}$ の etale neighborhood とは $U \to X$ が etale である

[†4] http://arxiv.org/abs/1104.3542v1

ような以下の可換図式のことである．

$$\begin{tikzcd}
& U \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[ur] \arrow[r, "\bar{x}"'] & X
\end{tikzcd}$$

(iii) geometric point :: $\bar{x}\colon \operatorname{Spec} k \to X$ について，$\bar{x}$ の 2 つの etale neighborhood :: U_1, U_2 を考える．この時，U_1 と U_2 の間の射とは，以下の図式を可換にする morphism of schemes :: $\eta\colon U_1 \to U_2$ のことである．

$$\begin{tikzcd}
& U_1 \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr] & & U_2 \arrow[dl] \\
\operatorname{Spec} k \arrow[ur] \arrow[urrr] \arrow[rr] & & X &
\end{tikzcd}$$

注意 2.2
geometric point の定義に separabely closed field でなく algebraically closed field を用いることもある．

注意 2.3
より一般的な point of site の定義が存在する（[5] Tag 04JU）．これは etale か否かに依らず採用できる．しかしこの一般的な定義は複雑であるし，我々は small/big etale site しか扱わないので，我々は以上の定義のみ用いる．

定義 2.4 (Stalk, [4] 1.3.15.)
X :: scheme, $\mathcal{F} \in \mathrm{Et}(X)$ あるいは $\mathcal{F} \in \mathrm{ET}(X)$ とする．さらに $\bar{x}\colon \operatorname{Spec} k \to X$ :: geometric point とする．$\bar{x}$ に対して $\bar{x}$ の etale neighborhood が成す圏を $I_{\bar{x}}$ とする，

(i) $I_{\bar{x}}$ を用いて stalk of $\mathcal{F}$ at $\bar{x}$ を

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} := \varinjlim_{U \in I_{\bar{x}}} \mathcal{F}(U)$$

と定義する．

(ii) $U \in I_{\bar{x}}$ について，$\mathcal{F}(U)$ から $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ への標準的射がある．この射による $s \in \mathcal{F}(U)$ の像を $s_{\bar{x}}$ と表し，germ of s at $\bar{x}$ と呼ぶ．

3 Definitions : Morphism of Shaves.

定義 3.1 (Injective, Surjective)
（同値な条件を列挙したいので，命題 (5.2, 5.3) を参照せよ．）

4 Examples : Morphism of Shaves.

（良い例を見つけていない．）

5 Propositions : Morphism of Shaves.

定義 5.1 (Kernel, Image.)
（$\mathrm{im}\,\phi$ の categorical な定義は https://www.wikiwand.com/en/Image_(category_theory) 等にもある．）

命題 5.2
site :: $\mathbf{C}$ 上の sheaf of sets :: $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の間の morphism $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ をとる．ϕ について以下の 3 つは同値．

1. $^\forall U \in \mathbf{C},\quad \phi_U\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ :: inj,
2. $^\forall x$ :: geometric point, $\quad \phi_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ :: inj,
3. ϕ :: mono.

この同値な条件を満たす射 ϕ は injective であるという．

(証明)．morphism between sheaves on a scheme の場合と全く同じである． ∎

命題 5.3
$\mathbf{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前の命題と同様にとる．ϕ について以下の 4 つは同値．

1. $^\forall U \in \mathbf{C},\quad ^\forall s \in \mathcal{G}(U),\quad ^\exists\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U),\quad ^\exists t_i \in \mathcal{F}(U_i),\quad \phi_{U_i}(t_i) = s|_{U_i}$.
2. $^\forall x$ :: geometric point, $\quad \phi_x\colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ :: surj,
3. ϕ :: epi.

この同値な条件を満たす射 ϕ は surjective であるという．

(証明)．こちらも，morphism between sheaves on a scheme の場合と全く同じである．一つだけ証明しよう．

■**ϕ :: surj $\implies$ ϕ :: epi.** 以下の図式を考える．

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \mathcal{H}$$

さらに，$\alpha \circ \phi = \beta \circ \phi$ であると仮定する．示したいのは $\alpha = \beta$ である．したがって任意の $U \in \mathbf{C}$ 上の section :: $t \in \mathcal{G}(U)$ について $\alpha_U(t) = \beta_U(t)$ を示せば良い．仮定 ϕ :: surj より，t に対し，以下を満たす $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ と $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ がとれる．

$$\phi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i).$$

ここで $t|_{U_i}$ は射 $\mathcal{G}(U_i \to U)\colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(U_i)$ による t の像である．仮定より，

$$\alpha_{U_i} \circ \phi_{U_i}(s_i) = \alpha_{U_i}(t|_{U_i}) = \beta_{U_i}(t|_{U_i}) = \beta_{U_i} \circ \phi_{U_i}(s_i).$$

したがって $(\alpha_U(t))|_{U_i} = (\beta_U(t))|_{U_i}$ を得る．$\mathcal{H}$ :: sheaf，特に $\mathcal{H}$ :: separated presheaf なので $\alpha_U(t) = \beta_U(t)$． ∎

命題 5.4
$\mathbf{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前の命題と同様にとる．ϕ :: iso(=inj+surj) と ϕ :: epi+mono は同値．

(証明)．inj $\iff$ mono, surj $\iff$ epi は上のとおりなので，これらを単に合わせただけである． ∎

6 Definitions : Morphism of Topoi.

定義を 2 つ再掲する．

定義 6.1
T, T' :: topoi とする．morphism of topoi :: $f\colon T \to T'$ とは, 以下の 3 つの射 (2 functor and 1 isomorphism.) からなる．

$$f_*\colon T \to T', \quad f^*\colon T' \to T, \quad \phi\colon \mathrm{Hom}_T(f^*(-), -) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{T'}(-.f_*(-)).$$

定義 6.2
$f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を functor of sites とする．この時，$F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について

$$f_*F(-) := F(f(-))$$

とおくと，$f_*F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ が得られる．f :: continuous functor ならば，$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ に対し同様にして $f_*\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ が得られる．

これを用いた別の stalk の定義の仕方がある．

定義 6.3 (Stalk, another definition)
1 点からなる空間には一意に位相が入る．そこで一点空間上の sheaf が成す圏を pt と書く．

(i) point of topos $\mathbf{T}$ とは，morphism of topoi $x\colon pt \to \mathbf{T}$ のことである．
(ii) $\mathcal{F} \in \mathbf{T}$ と point :: $x\colon pt \to \mathbf{T}$ について，$\mathcal{F}_x := x^*\mathcal{F}$ を stalk of $\mathcal{F}$ at x と呼ぶ．
(iii) morphism of sheaves :: $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が isomorphism であることと $x^*f\colon x^*\mathcal{F} \to x^*\mathcal{G}$ が isomorphism であることが同値（特に x^*f :: iso ならば f :: iso）であるとき，$\mathbf{T}$ :: having enough points という．

7 Propositions : Topoi.

命題 7.1
$\mathbf{C}, \mathbf{C}$ :: site とする．$\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ は small category であると仮定する．

(i) $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を functor of sites とする．この時，functor :: $f_*\colon \mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ は left adjoint functor を持つ．
(ii) $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を continuous functor とする．この時，functor :: $f_*\colon \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ は left adjoint functor を持つ．

(証明). (ii) は (i) から従う．実際，$f_*\colon \mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ の left adjoint functor を f^p とすると，$f^* = \mathit{Shff}\, f^p$ と置けばこれが $f_*\colon \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ の left adjoint functor となる．証明は Shff :: left adjoint を用いて直接行えば良い．なので (i) のみ示す．

$f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ と $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について，$f_*\mathcal{F}$ は Kan 拡張の言葉（記号は [3] のもの）を用いて $(f^{op})^{-1}\mathcal{F}$ と書ける．ここで $f^{op}\colon \mathbf{C}^{op} \to (\mathbf{C}')^{op}$ は射の反転で得られる関手である．したがって，f_* の左随伴は左 Kan

拡張 $\mathrm{Lan}_{f^{op}}$ である．各点左 Kan 拡張を計算すると，

$$(\mathrm{Lan}_{f^{op}}\mathcal{F})(U) = \mathrm{colim}\left((U{\downarrow}f)^{op} = f^{op}{\downarrow}U \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{C}^{op} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Sets} \right).$$

ここで $U \downarrow f^{op}$ は Comma 圏で，π_1 は射影 $[f(V) \to U] \mapsto V$ である．$f^{op} \downarrow U$ は $\mathbf{C}^{op}$ の部分圏だから，特にこれは small colimit．$\mathbf{Sets}$ :: cocomplete なのでこの colimit は存在する． ∎

系 7.2

f_* は limit と交換し，f^* は colimit と交換する．

注意 7.3

実際に small となる有用な site となると，おそらく殆ど無い．実際，$\mathrm{ET}(X), \mathrm{Et}(X)$ は large である．しかし $\mathrm{Et}(X)$ :: essentially small (i.e. equivalent to small category) なので，適当に $\mathrm{Et}(X)$ の部分圏を取って，その上の category of presheaves が一致するように出来るかも知れない．なお，$\mathbf{Sch}/X$ は essentially small でさえ無い．

しかし，small でないと我々の議論は立ち行かなくなる．なので technical ではあるが，Grothendieck 宇宙の存在を仮定する（宇宙公理を仮定することと同値）などして任意の圏を small とする．

参考文献

[1] Steve Awodey. *Category Theory (Oxford Logic Guides)*. Oxford University Press, U.S.A., 2 edition, 8 2010.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[3] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2nd ed. 1978. softcover reprint of the original 2nd ed. 1978 edition, 2010.

[4] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[5] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.