

この note では Hartshorne “Algebraic Geometry” p.61 にある sheaf property (3) を Identity Axiom と呼び、同じく (4) を Glueability Axiom と呼ぶ。これらの名称は Vakil “Foundations of Algebraic Geometry” にあるものである。

Ex1.1 Constant Sheaf is Associated to Constant Presheaf.

$A ::$ abelian group, $X ::$ topological space とする。任意の空でない開集合 $U \subseteq X$ について $\mathcal{A}(U) = A$ とし, restriction map $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ は id_A とする。この \mathcal{A} を constant presheaf と呼ぶ。 \mathcal{A} に対応する sheaf を \mathcal{A}^+ としよう。また, 開集合 $U \subseteq X$ に対し, $\hat{\mathcal{A}} = \{f : U \rightarrow A \mid f :: \text{continus.}\}$ とおく。 $\mathcal{A}^+ = \hat{\mathcal{A}}$ を示そう。

\mathcal{A} の germ を考える。明らかに $\varinjlim_{P \in U} \mathcal{A}(U) = \varinjlim_{P \in U} A \cong A$ 。よって \mathcal{A} の germ は A の元と同一視出来る。すると, $\mathcal{A}^+(U)$ の元 s は, 以下の条件を満たすものである。

$$\forall P \in U, \quad P \in \exists V \subseteq U, \quad \exists a \in \mathcal{F}(V), \quad \forall Q \in V, \quad s(Q) = a_Q = a.$$

これは $\mathcal{A}^+(U)$ の元 s が locally constant な写像であることを言っている。locally constant であれば連続であることは自明 ($\mathcal{A}^+(U) \supseteq \hat{\mathcal{A}}(U)$)。逆に連続な section は $s^{-1}(\{a\})$ が開集合になるので locally constant となる ($\mathcal{A}^+(U) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(U)$)。よって $\mathcal{A}^+ = \hat{\mathcal{A}}$ 。

Ex1.2 The Image/Kernel in a Sheaf/Stalk.

(a) ASSERTION.

\mathcal{F}' を \mathcal{F} の subsheaf だとする。この時, 以下の写像 $\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P} : \mathcal{F}'_P \rightarrow \mathcal{F}_P$ に依って \mathcal{F}'_P は \mathcal{F}_P の subgroup とみなせる。なお, germ は \sim_P についての同値類 (点ではなく集合) とみなす。 \sim_P は「点 P の開近傍において二つの section が一致する。」という同値関係である。

$$\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P}(s_P) = \left\{ \langle U, \sigma \rangle \mid \begin{array}{l} P \in U, \sigma \in \mathcal{F}(U), \\ P \in \exists V \subseteq U, \langle V, \sigma \rangle \in s_P. \end{array} \right\} / \sim_P$$

$\langle U, \sigma \rangle$ は本文 p.62 の記号である。以下, $\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P}$ は適宜 ι と略す。 $s_P = t_P$ であるとき $\iota(s_P) = \iota(t_P)$ であることは定義の “ $\langle V, \sigma \rangle \in s_P$ ” の部分から明らか。この写像が単射であることは以下のように示される。まず互いに異なる $s_P, t_P \in \mathcal{F}'_P$ をとる。すると $\langle U, \sigma \rangle \in s_P \setminus t_P$ が取れる。明らかに $\langle U, \sigma \rangle \in \iota(s_P)$ 。この $\langle U, \sigma \rangle$ について, 開集合 U をより小さい U' に取り替えても $\langle U, \sigma \rangle \in s_P \setminus t_P$ となる。これは s_P, t_P が \sim_P についての同値類だからである。したがって $\langle *, \sigma \rangle$ は $\iota(t_P)$ に属さない。以上から $\iota(s_P) \neq \iota(t_P)$ 。

$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を morphisms of sheaves とする。以下の例では subsheaf の stalk $(\ker \phi)_P$ と $\ker \phi_P \subset \mathcal{F}_P$ が一致しない。まず \mathcal{F}, \mathcal{G} をどちらも実直線 \mathbb{R} 上の連続な関数がなす層 (変数は x) とし, $\phi(f) = f - x$ とする。この ϕ で ramp function $\text{ramp}(x) = [x \geq 0]x$ を写したものは $\phi(\text{ramp})(x) = [x < 0](-x)$ となる。これは明らかに $x = 1$ の近傍 $(0, 2)$ で 0 になるから, $\langle (0, 2), \text{ramp} \rangle \in \ker \phi_P$ 。また, 近傍を $(-2, 2)$ としても, $\langle (0, 2), \text{ramp} \rangle \sim_P \langle (-2, 2), \text{ramp} \rangle \in \ker \phi_P$ 。しかし, $\text{ramp}|_{(-2, 2)} \neq 0$ だから $\text{ramp} \notin (\ker \phi)((-2, 2))$ となる。なので $(\ker \phi)_P$ に $\langle (-2, 2), \text{ramp} \rangle$ は入っていない。よって $(\ker \phi)_P$ と $\ker \phi_P$ は上で定義した ι を介さなければ一致しない。しかし, この二つを \mathcal{F}_P の subgroup とみなせば, 一致しているということも出来る。Hartshorne はこの意味で $(\ker \phi)_P = \ker \phi_P$ と主張している。

(b) Preparing.

Ati-Mac Ex2.19 から, 加群の direct limit は exact functor であることの証明は <https://math.stackexchange.com/questions/121122> などにある. このことを sheaf の exact sequence に用いたいが, 使えることは自明ではない. 実際, $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ が exact であっても, 加群の列 $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$ が完全であるとは限らないからである.

点 P を任意の点とし, $\ker \psi_P \subseteq \operatorname{im} \phi_P$ を示す. まず, $\ker \psi_P$ から germ s_P をとる.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_P & \xrightarrow{\phi_P} & \mathcal{G}_P & \xrightarrow{\psi_P} & \mathcal{H}_P \\ & & s_P & \longmapsto & 0_P \\ & & \psi_P & & \end{array}$$

すると点 P の開近傍 U と, section $\sigma \in \ker \psi_U = (\ker \psi)(U)$ が取れて, $\sigma_P = s_P$ となる.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_P & \xrightarrow{\phi_P} & \mathcal{G}_P & \xrightarrow{\psi_P} & \mathcal{H}_P \\ & & s_P & \longmapsto & 0_P \\ & \uparrow & & & \uparrow \\ & \sigma & \longmapsto & & 0 \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\phi_U} & \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\psi_U} & \mathcal{H}(U) \end{array}$$

仮定より, $\sigma \in (\ker \psi)(U) = (\operatorname{im} \psi)(U)$. なので,

$$(\operatorname{im}^{pre} \psi)_P = (\operatorname{im} \phi)_P \ni \sigma_P = s_P \in \ker \phi_P.$$

よって以下が得られる.

$$P \in \exists V \subseteq U, \sigma|_V \in (\operatorname{im}^{pre} \psi)(V) = \operatorname{im} \psi_V.$$

以上より, $\sigma_P = s_P$ かつ $\operatorname{im} \psi_V \ni \sigma|_V \in \ker \psi_V$. あとは $\phi_V(\tau) = \sigma|_V$ となる $\tau \in \mathcal{F}(V)$ をとり, 図式の可換性を用いれば良い.

(c) Prooves.

(a) $\forall P \in X, (\ker \phi)_P = \ker \phi_P, (\operatorname{im} \phi)_P = \operatorname{im} \phi_P$.

(b) $\phi :: \text{inj/surj} \iff \forall P \in X, \phi_P :: \text{inj/surj}$.

(c) $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} :: \text{exact} \iff \forall P \in X, \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{G}_P \rightarrow \mathcal{H}_P :: \text{exact}$

■Proof of Half of (c). 以下が成り立つ.

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} :: \text{exact} \implies \forall P \in X, \mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{H}_P :: \text{exact}.$$

ただし $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ は位相空間 X 上の sheaf である. この命題は (c) の半分である.

■Proof of (a). $\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ に対し, $0 \rightarrow \ker \phi \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ は exact. このことから $0 \rightarrow (\ker \phi)_P \xrightarrow{i_P} \mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P$ は exact. よって $\operatorname{im} i_P = \ker \phi_P$ が得られる. 明らかに i_P は injective だから, $(\ker \phi)_P \cong \operatorname{im} i_P = \ker \phi_P$ となる. また, $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \rightarrow \operatorname{im} \phi \rightarrow 0$ が exact であることから $(\operatorname{im} \phi)_P \cong \operatorname{im} \phi_P$ も得られる.

■Proof of Remained Part of (c). 任意の点 $P \in X$ について, $\mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{H}_P$ が exact であったとする. そこで任意の開集合 $U \subset X$ と, 任意の section $s \in \mathcal{F}(U)$ を取る. 以下のように $\text{im } \phi \subseteq \ker \phi$ が示される.

$$\begin{aligned}
& s \in (\text{im } \phi)(U) \\
& \implies \forall P \in U, \quad s_P \in (\text{im } \phi)_P = \text{im } \phi_P \\
& \iff \forall P \in U, \quad s_P \in \ker \phi_P \\
& \iff \forall P \in U, \quad P \in \exists V_P \subseteq U, \quad s|_{V_P} \in (\ker \phi)(V_P) \\
& \implies s \in (\ker \phi)(U)
\end{aligned}$$

最後の行で Glueability Axiom を用いた. この証明で \ker と im を交換すれば $\text{im } \phi \supseteq \ker \phi$ も示され, よって $\text{im } \phi = \ker \psi$ が得られる.

■Proof of (b). $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ と $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow 0$ に (c) を用いれば良い.

Ex1.3 Surjectivity of Morphism is (Not) Local Property.

(a) Paraphrase of Surjectivity.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} : X \rightarrow A, \phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ について $\phi :: \text{surj}$ が以下の命題と同値であることを示す.

$$(*) \quad \forall U :: \text{open in } X, \quad \forall s \in \mathcal{G}(U), \quad \bigcup \exists U_i = U, \quad \exists t_i \in \mathcal{F}(U_i), \quad \forall i, \quad \phi(t_i) = s|_{U_i}.$$

$\phi :: \text{surj}$ ならば covering $\{U_i\}$ として U をとり, $\phi(t) = s$ となる t を t_i とすれば良い.

逆を示す. Ex1.2b より, 任意の $P \in U$ について $\phi_P :: \text{surj}$ であることを示せば良い. 仮定より $P \in V \subseteq U$ となる V ((* 中の U_i) が存在し, $\phi_P(t_P) = s|_V = s_P$ を満たす $t_P \in \mathcal{F}(V) \subseteq \mathcal{F}_P$ が存在する. よって $\phi_P :: \text{surj}$.

(b) Give an Counterexample.

Ex1.4 Induced Injective Sheaf Morphism.

(a) Injective Presheaf Morphism Induces Injective Sheaf Morphism.

以下は可換図式である.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}^+ & \xrightarrow{\phi^+} & \mathcal{G}^+ \\
\uparrow & \nearrow & \uparrow \\
\mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G}
\end{array}$$

これを stalk をとる関手 $\lim_{\rightarrow P \in U}$ で写すと, Prop-Def1.2 の直後に言及されている $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_P^+$ から, 以下が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}_P^+ & \xrightarrow{\phi_P^+} & \mathcal{G}_P^+ \\
\parallel & \nearrow & \parallel \\
\mathcal{F}_P & \xrightarrow{\phi_P} & \mathcal{G}_P
\end{array}$$

この可換図式から $\phi_P = \phi_P^+$. よって Ex1.2b から $\phi :: \text{inj} \iff \phi^+ :: \text{inj}$.

(b) Natural Induced Map $\text{im } \phi \rightarrow \mathcal{G}$ is Injective.

埋め込み写像 $\text{im}^{pre} \phi \hookrightarrow \mathcal{G}$ は injective なので、ここから誘導される $\text{im } \phi \rightarrow \mathcal{G}$ も injective.

Ex1.5 For Morphism of Shaves, iso=inj+surj.

$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を考える. ϕ が iso であることと, 任意の点 P で ϕ_P が iso であることは同値. また, ϕ が inj+surj であることと, 任意の点 P で ϕ_P が inj+surj であることは同値である. これらはそれぞれ Prop1.1 と Ex1.2 から理解する. よって ϕ_P について iso=inj+surj を確かめれば必要十分.

■ $\phi_P :: \text{iso} \implies \phi_P :: \text{inj} + \text{surj}$. $\phi_P :: \text{iso}$ ならば,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{F}_P, \phi_P(x_1) = \phi_P(x_2) \implies \phi_P^{-1} \circ \phi_P(x_1) = x_1 = x_2 = \phi_P^{-1} \circ \phi_P(x_2)$$

すなわち $\phi_P :: \text{inj}$. 同時に

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \phi_P(\phi_P^{-1}(y)) = y$$

すなわち $\phi_P :: \text{surj}$.

■ $\phi_P :: \text{iso} \iff \phi_P :: \text{inj} + \text{surj}$. まず $\phi_P :: \text{surj}$ から以下が成り立つ.

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \exists x \in \mathcal{F}_P, \phi_P(x) = y.$$

この命題を満たす $x \in \mathcal{F}_P$ は $\phi_P :: \text{inj}$ からただひとつである.

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \exists! x \in \mathcal{F}_P, \phi_P(x) = y.$$

なので $\phi_P^{-1}(y) = x$ と定めればこれは写像になる. なお, ϕ_P でなく ϕ で議論をすると, 構成した ϕ の naturality を示す必要がある.

Ex1.6 Short Exact Sequence of Sheaves.

(a) Natural Map $q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ Has $\text{im } q = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ and $\ker q = \mathcal{F}'$.

quotient sheaf の定義 (p.65) より, 任意の点 P について $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$ ^{†1}. よって q から誘導される q_P は $\mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$ の自然な写像である. $\text{im } q_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P, \ker q_P = \mathcal{F}'$ となるから, Ex1.2a より主張が得られる.

(b) If $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ is Exact, ...

仮定より, $0 = \ker f, \text{im } f = \ker g, \text{im } g = \mathcal{F}''$. よって f は inj で, $f|_{\text{im } f} : \mathcal{F}' \rightarrow \text{im } f$ は surj+inj. なので Ex1.5 よりこれは iso であり, \mathcal{F}' は $\text{im } f \subset \mathcal{F}$ と同型である. 続けて $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$ から誘導される $g_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}''_P$ を考える. 定義より $\mathcal{F}_P, \mathcal{F}''_P$ は abelian group (abelian group の圏での colimit) で, g_P はその morphism. だから abelian group の準同型定理からの帰結として $\mathcal{F}_P/\ker g_P = (\mathcal{F}/\ker g)_P \cong \mathcal{F}''_P$ が得られる. Prop1.1 より $\mathcal{F}'' \cong \mathcal{F}/\ker g = \mathcal{F}/\text{im } f \cong \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.

^{†1} これは sheafification functor $sh_X : \mathbf{PSh}(X, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X, \mathcal{C})$ が forgetful functor の left adjoint functor であること, 及び left adjoint functor は colimit を保つことから得られる.

Ex1.7 $\text{im } \phi \cong \mathcal{F}/\ker \phi$, and $\text{coker } \phi \cong \mathcal{G}/\text{im } \phi$.

$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ について考える. $\text{im } \phi \cong \mathcal{F}/\ker \phi$ は以下の完全列に Ex1.6b を用いて得られる.

$$0 \rightarrow \ker \phi \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \text{im } \phi \rightarrow 0.$$

ただし i は埋め込み写像である. $\text{coker } \phi \cong \mathcal{G}/\text{im } \phi$ は同様に以下の完全列から得られる.

$$0 \rightarrow \text{im } \phi \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{q} \text{coker } \phi \rightarrow 0.$$

ただし q は $q^{pre} : \mathcal{G} \rightarrow \text{coker } \phi = \mathcal{G}/\text{im } \phi$ から誘導される写像. これが完全列であることは次のように示される. まず Ex1.6a を用いて stalk の完全列を得る.

$$0 \rightarrow \text{im } \phi_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{q_P} \text{coker } \phi_P = \mathcal{G}_P/\text{im } \phi_P \rightarrow 0.$$

Ex1.2a,c を用いて元の列が完全であることが示される.

Ex1.8 $\forall U \subset X, \Gamma(U, -) :: \text{left exact functor}$

以下を $X \rightarrow A$ の sheaves がなす完全列とする.

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}''.$$

完全列なので $0 = \ker f, \text{im } f = \ker g$. $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}(U)$ で定義される functor $\Gamma(U, -)$ により, この完全列は以下の列になる.

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{F}''(U).$$

これが完全列であることは $0 = \ker f_U, \text{im } f_U = \ker g_U$ と同値.

まず $\ker f$ を考えると, 定義より $0 = (\ker f)(U) = \ker f_U$. よって $f_U :: \text{inj}$. また, $\Gamma(U, -)$ は functor だから

$$0 = \Gamma(U, g \circ f) = \Gamma(U, g) \circ \Gamma(U, f) = 0.$$

すなわち $g_U \circ f_U = 0, \text{im } f_U \subseteq \ker g_U$.

残るは逆の包含関係である. まず $s \in \ker g_U \subseteq \mathcal{F}(U)$ を取る. Ex1.2a より, 任意の $P \in U$ について $\text{im } f_P = \ker g_P$. なので任意の点 P について $s_P \in \text{im } f_P = \ker g_P$ であり, $f_P(t_P) = s_P$ となる $t_P \in \mathcal{F}'_P$ が存在する. そこで s_P, t_P の代表元 $\langle V_P, s|_{V_P} \rangle, \langle V_P, t^P|_{V_P} \rangle$ をとると $f_{V_P}(t^P|_{V_P}) = s|_{V_P}$ となる. 同様に別の点 $Q \in U, t_Q = \langle V_Q, t^Q|_{V_Q} \rangle$ をとると, $W_{PQ} := V_P \cap V_Q$ について

$$f_{W_{PQ}}(t^P|_{W_{PQ}}) = s|_{W_{PQ}} = f_{W_{PQ}}(t^Q|_{W_{PQ}}).$$

$0 = (\ker f)(W_{PQ}) = \ker f_{W_{PQ}}$ より $f_{W_{PQ}}$ は inj. したがって $t^P|_{W_{PQ}} = t^Q|_{W_{PQ}}$ が得られる. ($P \in$) W_{PQ} は U を被覆するから, Glueability Axiom より, $t|_{W_{PQ}} = t^P|_{W_{PQ}} = t^Q|_{W_{PQ}}$ なる $t \in \mathcal{F}'(U)$ が存在する. morphism と restriction の naturality により,

$$f_U(t)|_{W_{PQ}} = f_{W_{PQ}}(t|_{W_{PQ}}) = f_{W_{PQ}}(t^P|_{W_{PQ}}) = s|_{W_{PQ}}$$

となるから, Identity Axiom より $f_U(t) = s$. 以上より $\text{im } f_U \supseteq \ker g_U$.

Ex1.9 Direct Sum.

sheaves $\mathcal{F}, \mathcal{G} : X \rightarrow \mathfrak{C}$ について, $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ を以下で定める.

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} : U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U).$$

ただし $U :: \text{open in } X$. これが presheaf であることは自明なので, sheaf であることを示す. 以下, $U :: \text{open in } X$ とその開被覆 $\{U_i\}$ を固定する.

■ $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ Satisfies Identity Axiom. $s \oplus t \in \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ が $(s \oplus t)|_{U_i} = 0 \oplus 0 = 0$ を満たすとする. この仮定を論理式で書下すと,

$$\forall P \in U_i, (s \oplus t)(P) = s(P) \oplus t(P) = 0 \oplus 0.$$

abelian group の coproduct は product と同型だから, これは以下のように書き換えられる.

$$\forall P \in U_i, s(P) = 0 \wedge t(P) = 0.$$

これは $s|_{U_i} = t|_{U_i} = 0$ と同値. なので \mathcal{F}, \mathcal{G} は sheaf であることから $s = t = 0$. すなわち $s \oplus t = 0$.

■ $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ Satisfies Glueability Axiom. $s_i \oplus t_i \in \mathcal{F}(U_i) \oplus \mathcal{G}(U_i)$ が存在し, 以下を満たすとする.

$$\forall i, j, (s_i \oplus t_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j \oplus t_j)|_{U_i \cap U_j}.$$

前段落と同様に書き換えて, 以下が得られる.

$$\forall i, j, s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \wedge t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j}.$$

\mathcal{F}, \mathcal{G} は sheaf であることから, 以下を満たす $s \in \mathcal{F}(U_i), t \in \mathcal{G}(U_i)$ が存在する.

$$\forall i, s|_{U_i} = s_i \wedge t|_{U_i} = t_i.$$

この s, t について $(s \oplus t)|_{U_i} = (s|_{U_i}) \oplus (t|_{U_i}) = s_i \oplus t_i$.

■ $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ is Coproduct in $\mathbf{Sh}(X)$. 以下の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} & \\ i \nearrow & \vdots & \nwarrow j \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} & \\ \searrow \forall f & \downarrow \exists^1[f, g] & \swarrow \forall g \\ & \mathcal{Z} & \end{array}$$

ただし \mathcal{Z}, f, g は任意で, i, j はそれぞれ $s \mapsto s \oplus 0, t \mapsto 0 \oplus t$ とする. すると \mathcal{F}, \mathcal{G} から \mathcal{Z} へ至る二つのパスをたどることで, この図式を可換にする $[f, g]$ は以下のものしか無い事が理解する.

$$[f, g] : s \oplus t \mapsto f(s) + g(t).$$

f, g は morphism of abelian group で $f(s), g(t)$ は element of abelian group. だから, 例えば $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Z}$ の二つのパスは次の計算の通り可換になる.

$$[f, g] \circ i : s \mapsto s \oplus 0 \mapsto f(s) + g(0) = f(s) \leftarrow s : f$$

よって $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ は coproduct.

Ex1.10 Direct Limit.

Ex1.8 の functor $\Gamma(-, -)$, sheafification functor sh_X と abelian category の direct limit $\lim_{\rightarrow i}$ を用いて, $\lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i$ を以下で定める.

$$\Gamma(-, \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i) = sh_X \lim_{\rightarrow i} \Gamma(-, \mathcal{F}_i).$$

ただし $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ は direct system である. これが $\mathbf{Sh}(X)$ の direct limit であることを示す.

まず, $\mathcal{L} : U \mapsto \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i(U)$ とおく. これは明らかに $\mathbf{PSh}(X)$ における direct limit で^{†2}, $\mathcal{L}^+ = \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i$ を満たす. よって sheafification functor sh_X が direct limit を保つことを見れば良い. 次の可換図式は \mathcal{L} の UMP を表す.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & & \\ & \nwarrow \bar{f}_i & \\ & \mathcal{F}_i & \xrightarrow{f_i} \mathcal{G} \end{array}$$

ただし \mathcal{G}, f_i は任意. sheafification の UMP を $\bar{f}_i : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{G}$ に用いて, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{L}^+ \\ & \nwarrow \bar{f}_i & \nearrow \bar{f}_i \\ & \mathcal{F}_i & \xrightarrow{f_i} \mathcal{G} \end{array}$$

よって $f_i : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{G}$ に対して一意に $\bar{f}_i : \mathcal{L}^+ \rightarrow \mathcal{G}$ が存在する. これで $\mathcal{L}^+ = \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i$ の UMP が示せた. $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_j$ との可換性は morphism を結合すれば容易に分かる.

(i) Another Proof.

sheafification functor $sh_X : \mathbf{PSh}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$ が Forgetful Functor $F : \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{PSh}(X)$ の left adjoint functor であることを用いる. これは R.Vakil “Foundations of Algebraic Geometry” Part I, 2.4.L などにある事実である. direct limit が colimit であることと, “Left Adjoint Preserves Colimits” より,

$$sh_X \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i \cong \lim_{\rightarrow i} sh_X \mathcal{F}_i \cong \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i.$$

Ex1.11 Pre-Direct Limit on Noetherian Top.Sp. is Already a Sheaf.

sheaves $\{\mathcal{F}^i\}_{i \in I}$ with morphisms $f^{ij} : \mathcal{F}^i \rightarrow \mathcal{F}^j$:: direct system とし, $\mathbf{PSh}(X)$ における direct limit を \mathcal{L} で書く. X :: noetherian topological space であるとき, \mathcal{L} が予め sheaf であることを示す. 以下, U :: open in X と開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を任意にとり, 固定する.

X :: noetherian より, X :: quasi-compact. なので集合 $\{U_\lambda\}$ から有限被覆 $\{U_j\}_{j \in J}$ が出来る.

Ex1.12 Inverse Limit.

sheaves $\{\mathcal{F}^i\}$ with morphisms $f^{ij} : \mathcal{F}^i \rightarrow \mathcal{F}^j$:: inverse system とし, $\mathbf{PSh}(X)$ における inverse limit $U \mapsto \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i(U)$ を \mathcal{L} で書く. このとき \mathcal{L} は $\mathbf{Sh}(X)$ においても inverse limit であることを示す.

^{†2} $\mathbf{PSh}(X)$ が direct limit を持つことは abelian category \mathfrak{C} が direct limit を持つことによる.

$$\lim_{i \leftarrow} Fgt \mathcal{F}^i \cong Fgt \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i \cong \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i.$$

(i) Proof of $Sh \dashv Fgt$.

F は object を変えない埋め込み写像なので、直ちに全単射 $\tilde{\eta}_{(-)} : (-) \leftrightarrow F(-) : \tilde{\epsilon}_{(-)}$ がとれる。これに sheafification の UMP を用いると以下の可換図式が得られる。

こうして $\text{unit } \eta : \text{id}_{\mathbf{PSh}(X)} \rightarrow \text{FgtSh}$ と $\text{counit } \epsilon : \text{ShFgt} \rightarrow \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$ が得られる. さらに, この二つの可換図式を組み合わせて, 以下の可換図式が作れる.

$$\begin{array}{ccc} Fgt & \xleftrightarrow{\tilde{\epsilon}} & \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \\ & \searrow \theta_{Fgt} & \nearrow \epsilon \\ & ShFgt & \end{array}$$

(1) $\mathcal{F} \xrightarrow{\theta_{\mathcal{F}}} Sh\mathcal{F}$ $\downarrow g$ $Fgt\mathcal{G} \xrightarrow{\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}} \mathcal{G}$ $\downarrow \theta_{Fgt\mathcal{G}}$ $ShFgt\mathcal{G}$ $\uparrow \epsilon_{\mathcal{G}}$

(2) $\mathcal{F} \xrightarrow{\theta_{\mathcal{F}}} Sh\mathcal{F}$ $\downarrow \bar{g}$ $Fgt\mathcal{G} \xrightarrow{\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}} \mathcal{G}$ $\downarrow \theta_{Fgt\mathcal{G}}$ $ShFgt\mathcal{G}$ $\uparrow \epsilon_{\mathcal{G}}$

(3) $\mathcal{F} \xrightarrow{\theta_{\mathcal{F}}} Sh\mathcal{F}$ $\downarrow \bar{g}$ $Fgt\mathcal{G} \xrightarrow{\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}} \mathcal{G}$ $\downarrow \theta_{Fgt\mathcal{G}}$ $ShFgt\mathcal{G}$ $\uparrow \epsilon_{\mathcal{G}}$

^{†3} “Right Adjoints Preserves Limits.”

をしたあとの可換図式が (3) である. UMP から, θ_{FgtG} および $\theta_{FgtG} \circ \bar{g}$ と共に可換な三角形をなす射は $Sh(\bar{g})$ に等しい. よって $Sh(\bar{g}) = \theta_{FgtG} \circ \bar{\epsilon}_G^{-1} \circ g$. こうして $g = \epsilon_G \circ Sh(\bar{g})$ が得られる.

以上では, $g \in \text{Hom}(Sh\mathcal{F}, \mathcal{G})$ から $\bar{g} \in \text{Hom}(\mathcal{F}, Fgt\mathcal{G})$ を作り, \bar{g} から g を復元した. $f \in \text{Hom}(\mathcal{F}, Fgt\mathcal{G})$ から始めて議論を逆向きにたどれば, g と \bar{g} (f と \bar{f}) が一対一に対応していることが分かる.

Ex1.13 Espace Étale of a Presheaf.

(i) Definition of Espace Étale.

$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X)$ に対し, espace étale of \mathcal{F} $\text{Spé}(\mathcal{F})$ を以下のように定義する. まず, 集合として $\text{Spé}(\mathcal{F}) = \bigsqcup_{P \in X} \mathcal{F}_P$ とおく. projection map π とその “section” \bar{s} を以下で定める. まず, π は以下のもの.

$$\begin{aligned} \pi : \text{Spé}(\mathcal{F}) &\rightarrow X \\ s \in \mathcal{F}_P &\mapsto P. \end{aligned}$$

任意の $U :: \text{open in } X$ と $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\bar{s} : U \rightarrow \text{Spé}(\mathcal{F})$ を以下で定める.

$$\begin{aligned} \bar{s} : U &\rightarrow \text{Spé}(\mathcal{F}) \\ P &\mapsto s_P. \end{aligned}$$

この時, $\pi \circ \bar{s} = \text{id}_U$. すなわち, \bar{s} は U 上で π の “section” である. そして $\text{Spé}(\mathcal{F})$ に以下のような位相を入れる: 任意の U と任意の s について \bar{s} が連続であるような最強の位相. これはつまり $\{\bar{s}\}$ についての終位相である.

(ii) More References for Espace Étale.

Wikipedia の Sheaf のページ [https://www.wikiwand.com/en/Sheaf_\(mathematics\)#/The_.C3.A9tal.C3.A9_space_of_a_sheaf](https://www.wikiwand.com/en/Sheaf_(mathematics)#/The_.C3.A9tal.C3.A9_space_of_a_sheaf) (2017 年 3 月 30 日参照) に概略が書かれている. 詳細についての資料は以下の通り. まず, 一般の espace étalé (étale space) の categorical な定義が <https://ncatlab.org/nlab/show/etale+space> にある. Étale space の圏と sheaf の圏が圏同値であることの証明は Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk “Sheaves in Geometry and Logic” の §5-6, pp.83-90 にある. (この命題はこの本の p.90 Cor3 である.) 同様のことが “Étale cohomology course notes” <http://math.colorado.edu/~jonathan.wise/teaching/math8174-spring-2014/notes.pdf> の 7 Etale spaces and sheaves (p.24) にあるが, この note はミスが多いしわかりにくいのでおすすめしない.

(iii) Proposition and Proof.

X 上の étale space をとって, その連続な section 全体をとる関手を $\text{Sec} : \mathbf{Et}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$ とする. 逆に presheaf から étale space を作る関手を $\acute{E}t : \mathbf{PSh}(X) \rightarrow \mathbf{Et}(X)$ とする. sheafification functor が $Sh = \text{Sec}\acute{E}t$ で定義できることを示す.

■ Plan of Proof. 二つの写像を定める.

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)} && \rightarrow && \text{Sec}\acute{E}t \\ & s \in \mathcal{F}(U) && \mapsto && [\bar{s} : P \mapsto s_P] \\ \\ \beta : \quad & \acute{E}t\text{Sec} && \rightarrow && \text{id}_{\mathbf{Et}(X)} \\ & P \times [\sigma : U \rightarrow \text{id}_{\mathbf{Et}(X)}] && \mapsto && \sigma(P) \end{aligned}$$

ただし U は任意の X の開集合で、 P は U の任意の点である。この α, β が natural map かつ isomorphism であることが証明できるので、圏同値 $\mathbf{Et}(X) \simeq \mathbf{Sh}(X)$ が示せる。しかし我々の目的は sheafification の UMP であり、これには α についてさえ示せば十分である。この証明は Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk “Sheaves in Geometry and Logic” pp.85-86 にある^{†4}。

■ $\alpha :: \text{natural}$. $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{PSh}(X)$ とする。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{F}}} & \text{Sec}\acute{E}t\mathcal{F} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \text{Sec}\acute{E}t\phi \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{G}}} & \text{Sec}\acute{E}t\mathcal{G} \end{array}$$

$\text{Sec}\acute{E}t\phi$ は次のような、section を section へ写す写像である。

$$\text{Sec}\acute{E}t\phi : [P \mapsto *_P] \mapsto [P \mapsto *_P \mapsto \phi_P(*_P)].$$

したがって $\mathcal{F} \rightarrow \text{Sec}\acute{E}t\mathcal{G}$ のどちらのパスでも $s \mapsto [P \mapsto \phi_P(s_P) = (\phi(s))_P]$ と section を section へ写す写像になる。ただし P は X の点である。これで $\alpha :: \text{natural}$ が示せた。

■ $\alpha :: \text{iso}$. まず $\alpha :: \text{inj}$ は Identity Axiom から容易に示されるので略す。 $\alpha :: \text{surj}$ の証明は長い。まず $U :: \text{open in } X, \sigma \in (\text{Sec}\acute{E}t\mathcal{F})(U)$ を任意に取る。すると $\text{Sec}\acute{E}t$ の定義から、以下が成り立つ。

$$\forall P \in U, P \in \exists V \subseteq U :: \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V), \sigma(P) = s_P.$$

$\acute{E}t\mathcal{F}$ の位相は像位相であり、かつ $\alpha(s) = \bar{s}$ は明らかに単射。なので $\alpha(s)(V) = \bar{s}(V)$ は open である^{†5}。しかも $\sigma :: \text{continuous}$ だから、 $\sigma(S) \subseteq \alpha(\sigma)(V)$ なる $P \in S \subseteq \sigma^{-1}(\alpha(\sigma)(V)) :: \text{open}$ が存在する^{†6}。直ちに以下が成り立つ。

$$\forall Q \in S, \exists Q' \in V, \mathcal{F}_Q \ni \sigma(Q) = s_{Q'}.$$

明らかに $Q = Q'$ ，すなわち $\sigma|_S = \alpha(s)|_S$ が成り立つ。点 P を様々に取ることで、 S で U を被覆できることがわかる。 $s \& S$ と $t \& T$ の二組について

$$\alpha(s)|_{S \cap T} = \sigma|_{S \cap T} = \alpha(t)|_{S \cap T}.$$

したがって $\alpha :: \text{inj}$ から $s|_{S \cap T} = t|_{S \cap T}$ 。こうして Glueability Axiom から、 $\alpha(s)|_S = \alpha(f)|_S = \sigma|_S$ なる $f \in \mathcal{F}(U)$ の存在が示せる。最後に Identity Axiom を用いて $\alpha(f) = s$ 。これで $\alpha :: \text{iso}$ が示せた。

■ UMP of Sheafification. $Sh = \text{Sec}\acute{E}t$ とすると、これが sheafification functor となる。その UMP を見よう。 $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X), \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X)$ とする。 $\alpha : \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \rightarrow Sh$ の naturality から、次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & Sh\mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\sim} & Sh\mathcal{G} \end{array}$$

^{†4} この本では α は η と書かれている。また、この本でいう cross-section は $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$ なる section のこと。 \bar{s} は s のことである。その他、germ の記法などがだいぶ違うので注意。

^{†5} \bar{s} の像位相において、開集合 V の像が開集合であることは $\bar{s}^{-1} \circ \bar{s}(V)$ が開集合であることと同値だが、単射性から、この集合は V に等しい。

^{†6} これは ϵ - δ 論法に似ている。 $\sigma^{-1}(\alpha(\sigma)(V))$ が開集合であるから、任意の点、特に P はこの集合の内点である。このことから開集合 S が存在することは自明である。

$\alpha_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow \text{Sh}\mathcal{G} :: \text{iso}$ だから, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ から $\text{Sh}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が得られた. 次に, 以下で示す可換図式 (1) が与えられたとしよう. 全体を Sh で写し, $\text{Sh}|_{\mathbf{Sh}(X)} \cong \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$ を用いて可換図式 (2) が得られる.

$$(1) \begin{array}{ccc} \text{Sh}\mathcal{F} & \xrightarrow[\phi]{f} & \mathcal{G} \\ \alpha_{\mathcal{F}} \uparrow & \nearrow & \\ \mathcal{F} & & \end{array} \quad (2) \begin{array}{ccc} \text{Sh}\mathcal{F} & \xrightarrow[\text{Sh}\phi]{f} & \mathcal{G} \\ \parallel & \nearrow & \\ \text{Sh}\mathcal{F} & & \end{array}$$

したがって $f = g$. 以上で existence & uniqueness が示せた.

Ex1.14 Support.

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X), U :: \text{open in } X, s \in \mathcal{F}(U)$ をとる. $\text{Supp } s = \{P \in U \mid s_P \neq 0\}$ としたとき, これが closed in U であることを示そう. そのために $T = (\text{Supp } s)^c = \{P \in U \mid s_P = 0\}$ とし, これが open であることを示す.

$P \in T$ を任意に取る. すると s_P の代表元として $\langle V_P, s \rangle$ ($P \in V_P \subset U$) が取れる. 今 $s_P = 0$ なので, $s|_{V_P} = 0$. したがって $V_P \subset T$ となる. 任意の $P \in T$ についてこのように V_P が取れるので, T は open covering $\{V_P\}_{P \in T}$ を持つ. よって $T = \bigcup_{P \in T} V_P :: \text{open in } U$.

$\text{Supp } \mathcal{F}$ は $\{P \in X \mid \mathcal{F}_P \neq 0\}$ と定義される. これは closed とは限らない. 実際, \mathcal{F} の元を, なめらかな実関数に $\text{bump}(x) = [x > 0]e^{-1/x}$ ^{†7} をかけたものとする, $\text{Supp } \text{bump}(x) = [0, \infty), \text{Supp } \mathcal{F} = (0, \infty)$ となる. 後者は明らかに閉集合でない.

Ex1.15 Sheaf $\mathcal{H}om$.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X), U :: \text{open in } X$ とし, \mathcal{F} の U への restriction(p.65) を $\mathcal{F}|_U$ で書く. $U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ で定まる presheaf $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ が sheaf であることを示そう. 以下では U とその開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を任意にとつて固定する.

■ $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) :: \text{Abelian Group}$. $s, t \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ について, $s + t$ を以下で定める.

$$(s + t)(\sigma) = s(\sigma) + t(\sigma) \text{ where } V :: \text{open in } U, \sigma \in (\mathcal{F}|_U)(V).$$

単位元は $\text{im } \mathcal{F}|_U$ の単位元を返す定値写像である. 単位元を以下では 0 と書く.

■ $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) :: \text{Presheaf}$. $U, V :: \text{open}$ かつ $V \subseteq U$ とする. $\text{res}_U^V : \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V)$ を以下のように定める.

$$\{\mathcal{F}|_U \ni \sigma|_U \mapsto \tau|_U \in \mathcal{G}|_U\} \mapsto \{\mathcal{F}|_V \ni \sigma|_V \mapsto \tau|_V \in \mathcal{G}|_V\}$$

これは $\text{res}(\mathcal{F})_U^V : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ と $\text{res}(\mathcal{G})_U^V : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V)$ の自然性から誘導される.

■ Identity Axiom. $s \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ をとる. この s が任意の λ について $s|_{U_\lambda} = 0$ を満たすとする. さて, $V :: \text{open in } U$ と $\sigma \in \mathcal{F}(V)$ を任意に取る. $\{V_\lambda\}$ を $V_\lambda = V \cap U_\lambda$ で定めると, これは V の開被覆になる. 仮定より, $s|_{V_\lambda}(\sigma) = s(\sigma)|_{V_\lambda} = 0$. よって $s(\sigma) \in \mathcal{G}(V)$ に Identity Axiom を用いることで $s(\sigma)|_V = 0$ が示される. V, σ は任意なので, 結局以下が得られた.

$$\forall V :: \text{open in } U, \forall \sigma \in \mathcal{F}(V), s(\sigma) = 0.$$

すなわち, s は定値写像 0 である. 以上で Identity Axiom の成立が示された.

^{†7} $[True] = 1, [False] = 0$ とした. Iverson の記法である. $\text{bump}(x)$ がなめらかであることは次の PDF を参照せよ: <https://andromeda.rutgers.edu/~loftin/diffal03/bump.pdf>.

■Gluability Axiom. sections $s_\lambda \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U_\lambda)$ をとる. これが任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $s_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = s_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ を満たすとしよう. この仮定は以下のように書ける.

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda, \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda \cap U_\mu), \quad s_\lambda(\sigma) = s_\mu(\sigma).$$

そこで λ をひとつ取って固定し, $\sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda)$ とする. さらに $\{V_\mu\}_{\mu \in \Lambda}$ を $V_\mu = U_\lambda \cap U_\mu$ で定める. この $\{V_\mu\}$ は U_λ の開被覆である. すると最初の仮定と $V_\mu \cap V_\nu = U_\lambda \cap (U_\mu \cap U_\nu) \subseteq U_\mu \cap U_\nu$ から以下が成り立つ.

$$\forall \mu, \nu \in \Lambda, \quad s_\mu(\sigma)|_{V_\mu \cap V_\nu} = s_\nu(\sigma)|_{V_\mu \cap V_\nu}.$$

sections $s_\mu(\sigma) \in \mathcal{G}(U_\lambda)$ に対して Gluability Axiom を用いて, $s(\sigma)|_{V_\mu} = s_\mu(\sigma)|_{V_\mu}$ なる $s(\sigma)$ の存在が言える. Identity Axiom から $s(\sigma)|_{U_\lambda} = s_\mu(\sigma)|_{U_\lambda}$. こうして, 以下を満たす $s \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ の像が各点 $\sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda)$ ごとに定義できる.

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda), \quad s(\sigma)|_{U_\lambda} = s_\lambda(\sigma)|_{U_\lambda}.$$

簡潔にかけば, $s|_{U_\lambda} = s_\lambda|_{U_\lambda}$. よって Gluability Axiom の成立が示せた.

Ex1.16 Flasque Sheaves.

$U, V :: \text{open in } X, V \subseteq U$ とする. restriction map res_U^V が surjective であるような $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$ を flasque^{†8} sheaf と呼ぶ.

(a) Constant Sheaf on Irreducible Top.Sp is Flasque.

$X :: \text{irreducible}, A :: \text{abelian group}, U, V :: \text{open in } X, V \subseteq U$ とする. \mathcal{A} を X から A への constant sheaf とすると, 定義より $\mathcal{A}(V) = \{s : V \rightarrow A \mid s :: \text{continuous.}\}$. そこで $s \in \mathcal{A}(V)$ を一つとって固定する. $s :: \text{continuous}$ という条件は次と同値

$$\forall a \in A, \quad s^{-1}(a) :: \text{open in } V.$$

$X :: \text{irreducible}$ であるとき, $s \in \mathcal{F}(V)$ がどのようなものか考えよう.

■Case: $\#A = 1$. まず $\#A = 1$, すなわち A が自明な abelian group $\{e\}$ であったとする. この時, 明らかに $\mathcal{F}(V)$ は定値写像 $x \mapsto e$ のみからなる. $\mathcal{F}(U)$ も同じ定値写像からなるので, この時 constant sheaf は flasque.

■Case $\#A > 1$. $a \neq b$ が成り立つような $a, b \in A$ を任意に取る. すると以下が成り立つ.

$$s^{-1}(\{a\}) \cap s^{-1}(\{b\}) = s^{-1}(\{a\} \cap \{b\}) = s^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

したがって $X :: \text{irreducible}$ から $s^{-1}(\{a\})$ or $s^{-1}(\{b\}) = \emptyset$. 仮に任意の $a \in A$ について $s^{-1}(\{a\}) = \emptyset$ であったとすると s が写像にならない. したがって $s^{-1}(\{a_s\}) \neq \emptyset$ となる $a_s \in A$ がただひとつ存在する. s は写像なので $s^{-1}(A) = V$ が成り立ち, したがって s はこのような a_s への定値写像である事が分かる. すると容易に s は U へ拡張できるので, この時も constant sheaf は flasque.

^{†8} フランス語. フラスコのこと. 軟弱という意味. 発音は <https://ja.forvo.com/word/flasque/>.

(b) If $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ is Exact and \mathcal{F}' is Flasque, then...

$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ が exact かつ \mathcal{F}' が flasque であったとする。この時、任意の open set U について $0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}''(U) \rightarrow 0$ は exact であることを示す。

(ここに証明を書いていたが、これは誤りであった。)

(i) Another Proof

次の PDF の Lemma2.12(p.10) がこの演習問題と同じ命題である: http://www.math.mcgill.ca/goren/SeminarOnCohomology/Sheaf_Cohomology.pdf. 次の PDF の Lemma0.3(p.12) も同じ: <http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4215/v15/notes1.pdf>. どちらの証明でも Zorn's Lemma が用いられている。

(c) If $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ is Exact and $\mathcal{F}', \mathcal{F}$ is Flasque, then \mathcal{F}'' also.

$U, V ::$ open in X , $V \subseteq U$ とする。(b) より、以下の完全列が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(V) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}''(V) \longrightarrow 0 \end{array}$$

証明は diagram chasing による。

- (1) $s'' \in \mathcal{F}''(V)$ を任意に取る。
- (2) $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}''(V) :: \text{surj}$ から、 $g(\tilde{s})|_V = s''$ なる $\tilde{s} \in \mathcal{F}(U)$ が取れる。
- (3) naturality から $g(\tilde{s}|_V) = s'' = g(\tilde{s})|_V$ 。

$s := g(\tilde{s}) \in \mathcal{F}''(U)$ とおけば $s|_V = s''$ 。

(d) If $f : X \rightarrow Y$ is Conti. and \mathcal{F} is Flasque, then $f_*\mathcal{F}$ is Flasque.

$U, V ::$ open in Y , $V \subseteq U$ とする。このとき $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$ 。なので $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V) :: \text{surj}$ より $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V)) :: \text{surj}$ 。 $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ だから、 $f_*\mathcal{F} :: \text{flasque}$ 。

(e) Discontinuous Sections.

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$ とする。これに対し、discontinuous sections of \mathcal{F} と呼ばれる sheaf \mathcal{G} が以下のように作れる。 π は Ex1.13 の $s_P \mapsto P$ なる写像である。

$$\mathcal{G} : U \mapsto \left\{ s : U \rightarrow \bigsqcup_{P \in U} \mathcal{F}_P \mid \pi \circ s = \text{id}_U \right\}$$

\mathcal{G} が flasque sheaf であることと、 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ の自然な単射が存在することを示す。

■ $\mathcal{G} :: \text{sheaf}$. $\mathcal{G} :: \text{presheaf}$ は明らか。sheaf であることを示すため、 $U ::$ open in X とその open cover $\{U_i\}_{i \in I}$ をとり、固定する。任意の $i \in I$ について $s|_{U_i} = 0$ であるような $s \in \mathcal{G}(U)$ が存在したとする。 $\bigcup U_i = U$ より、任意の点 $P \in U$ に対して $s(P) = 0$ 。これは Identity Axiom の成立を意味する。同様

に “ $\forall i, j, \forall P \in U_i \cap U_j,$ ” を “ $\forall P \in U,$ ” に書き換えるだけで, Glueability Axiom の成立が証明できる.

■ $\mathcal{G} :: \text{flasque.}$ $V \subset U$ とする. $s \in \mathcal{G}(V)$ をとる. これは例えば以下のように拡張できる.

$$\bar{s}(P) = \begin{cases} s(P) & (P \in V) \\ 0 & (P \in U \setminus V) \end{cases}$$

■ α in Ex1.13 is injective. Ex1.13 の $\alpha : s \mapsto [P \mapsto s_P]$ が injective であることは以下のように示される. ある $s, t \in \mathcal{F}(U)$ について $\alpha(s) = \alpha(t)$ が成立するとしよう. すると十分小さい open set $(P \in) V_P (\subset U)$ が存在して, $s|_{V_P} = t|_{V_P}$ となる. 明らかに $\{V_P\}_{P \in U}$ は U の open cover なので, $s - t \in \mathcal{G}$ に Identity Axiom を用いて $s = t$ が得られる.

Ex1.17 Skyscraper Sheaves.

$X :: \text{topological space, } P \in X, A :: \text{abelian group}$ とする. sheaf $i_P(A)$ を以下で定める.

$$i_P(A)(U) = \begin{cases} A & (P \in U) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

点 P を含む最小の閉集合を $\{P\}^-$ と書く.

(a) $(i_P(A))_Q = A$ if $Q \in \{P\}^-$, otherwise 0 .

U を Q を含む極小の開集合とした時, $(i_P(A))_Q$ は集合として $\mathcal{F}(U)$ と一致する. したがって以下が成立する.

$$\begin{aligned} (i_P(A))_Q &= A \\ \iff \forall U \subset X, Q \in U \implies P \in U \\ \iff \forall U \subset X, P \in U^c \implies Q \in U^c. \end{aligned}$$

最後の行は対偶として得られた. 一方, 点 P を含む最小の閉集合 $\{P\}^-$ は以下を満たす唯一の集合として特徴づけられる.

$$\forall U \subset X, P \in U^c \implies \{P\}^- \subseteq U^c$$

よって $(i_P(A))_Q = A \iff Q \in \{P\}^-$. 他の方は明らかに $(i_P(A))_Q = 0$ となる. また, この特徴付けの対偶から $U \cap \{P\}^- \neq \emptyset$ ならば $P \in U$. $P \in U$ ならば $P \in U \cap \{P\}^-$ なので逆も成立する.

(b) $i_P(A)$ can be described as direct image.

abelian group A に伴う $\{P\}^-$ 上の constant sheaf を \mathcal{A} とする. すると $i_P(\mathcal{A})$ は埋め込み写像 $i : \{P\}^- \hookrightarrow X$ の direct image $i_*(\mathcal{A})$ に等しい. 実際, 開集合 U について $i_*(\mathcal{A})(U) = \mathcal{A}(i^{-1}(U)) = \mathcal{A}(U \cap \{P\}^-)$ であるから以下のようになる.

$$i_*(\mathcal{A})(U) \cong \begin{cases} A & (U \cap \{P\}^- \neq \emptyset) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

(a) で見たとおり $U \cap \{P\}^- \neq \emptyset$ と $P \in U$ は同値. よって $i_*(\mathcal{A}) = i_P(A)$. 特に, $\{P\}^-$ はその最小性から irreducible なので, Ex1.16a,d と合わせれば $i_P(A)$ は flasque であることが分かる.

Ex1.18 Adjoint Property of f^{-1} .

X, Y を位相空間とし, \mathcal{F}, \mathcal{G} をそれぞれ X, Y 上の sheaf とする. $f : X \rightarrow Y$ を連続写像に対し, $f^p \mathcal{G}$ を $U \mapsto \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$ で定まる presheaf, $f^{-1} \mathcal{G}$ を $f^p \mathcal{G}$ の sheafification, $(f_* \mathcal{F})(U') = \mathcal{F}(f^{-1}(U'))$ とおく. つまり,

$$f^p : \mathbf{Sh}(Y) \rightarrow \mathbf{PSh}(X), f^{-1} : \mathbf{Sh}(Y) \rightarrow \mathbf{Sh}(X), f_* : \mathbf{PSh}(X) \rightarrow \mathbf{PSh}(Y)$$

であり, f_* は sheaf を sheaf に写す functor である.

η, ϵ を定義して, この準備の後, sheaf \mathcal{F}, \mathcal{G} について $\mathrm{Hom}(f^p \mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, f_* \mathcal{F})$ を示す. その後, $Sh \dashv Fgt$ を用いて $\mathrm{Hom}(f^{-1} \mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, f_* \mathcal{F})$ を示す.

■ Construction of ϵ . $\epsilon_{\mathcal{F}} : f^p f_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ を以下のように定義する. $U :: \text{open in } X$ に対し, $(f^p f_* \mathcal{F})(U)$ は次の direct system の direct limit である.

$$\left\{ \mathrm{res}_{f^{-1}(V')}^{f^{-1}(W')} : \mathcal{F}(f^{-1}(V')) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(W')) \mid f(U) \subseteq W' \subseteq V' :: \text{open in } Y \right\}.$$

$U \subseteq f^{-1}(f(U))$ であるから, この direct system の各元 $\mathcal{F}(f^{-1}(V))$ から $\mathcal{F}(U)$ への restriction map が存在する. この direct system から $\mathcal{F}(U)$ への射から, direct system の普遍性に依って得られる射が $(\epsilon_{\mathcal{F}})_U$ である.

■ Construction of η . $\eta_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow f_* f^p \mathcal{G}$ を以下のように定義する. $U' :: \text{open in } Y$ に対し, $(f_* f^p \mathcal{G})(U')$ は次の direct system の direct limit である.

$$\left\{ \mathrm{res}_{V'}^{W'} : \mathcal{G}(V') \rightarrow \mathcal{G}(W') \mid f(f^{-1}(U')) \subseteq W' \subseteq V' :: \text{open in } Y \right\}.$$

$f(f^{-1}(U')) \subseteq U'$ であるから, この direct system に $\mathcal{G}(U')$ が属している. よって direct limit の定義から $\mathcal{G}(U')$ から $f_* f^p \mathcal{G}$ への射が存在し, これが $(\eta_{\mathcal{G}})_{U'}$ である.

■ Construction of $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}, \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$. $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} : \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F}) \leftrightarrow \mathrm{Hom}(f^p \mathcal{G}, \mathcal{F}) : \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ を構築する. $\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F})$ から始める.

(1)

$$\mathcal{G} \xrightarrow{\alpha} f_* \mathcal{F}$$

(2)

(3)

図式 (1) を f^p で写したものに, \mathcal{F} と $\epsilon_{\mathcal{F}}$ を追加すると, 射の結合として $\bar{\alpha}$ が得られる. これが図式 (2) であり,

$$\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\alpha) = \bar{\alpha} = \epsilon_{\mathcal{F}} \circ f^p \alpha \in \mathrm{Hom}(f^p \mathcal{G}, \mathcal{F})$$

と定義する．さらに (2) の上の三角形を f_* で写したものが図式 (3) の下の三角形である． η の自然性から， η を追加した図式 (3) も可換である．すると $\bar{\alpha} \in \text{Hom}(f^p \mathcal{G}, \mathcal{F})$ から

$$\Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\bar{\alpha}) = f_* \bar{\alpha} \circ \eta_{\mathcal{G}} \in \text{Hom}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F})$$

が得られる．

■ $\Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \circ \Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} = \text{id}_{\text{Hom}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F})}$ ．今， α から $\Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\bar{\alpha}) = \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\alpha))$ が得られた．この二つが等しいことを示そう．これは $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ が単射であることを意味する．そのためには，直前の図式 (3) における以下の path が $\text{id}_{f_* \mathcal{F}}$ であることを示せば良い．

$$\begin{array}{c} f_* \mathcal{F} \\ \downarrow \eta_{f_* \mathcal{F}} \\ f_* f^p f_* \mathcal{F} \\ \swarrow f_* \epsilon_{\mathcal{F}} \\ f_* \mathcal{F} \end{array}$$

$f_* f^p f_* \mathcal{F}$ は $f_* f^p f_* \mathcal{F}$ の sheafification である．任意の $U :: \text{open in } X$ について， $(f^p f_* \mathcal{F})(U)$ は

$$\mathcal{D}_0 = \{\mathcal{F}(V) \mid V \supseteq f(f^{-1}(U))\}$$

の direct limit である．写像についての基本的な事実から， $U \supseteq f(f^{-1}(U))$ となる．つまり $\mathcal{F}(U) \in \mathcal{D}_0$ ．図式 $\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{D}_0 \rightarrow (f^p f_* \mathcal{F})(U)$ を f_* で写せば， $(f_* f^p f_* \mathcal{F})(U)$ が

$$\mathcal{D}_1 = \{\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \mid V \supseteq f(f^{-1}(U))\}$$

の direct limit であることがわかる．さらに $V \supseteq f(f^{-1}(U))$ であるとき $f^{-1}(V) \supseteq f^{-1}(f(f^{-1}(U))) = f^{-1}(U)$ だから， \mathcal{D}_1 の任意の元から $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_* \mathcal{F}(U) \leftarrow \text{restriction map}$ が伸びる．以上から，以下の図式が書ける．

$$\begin{array}{ccc} (f_* f^p f_* \mathcal{F})(U) & \xrightarrow{(\epsilon_{f_* \mathcal{F}})_U} & \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \\ \uparrow \text{res} & \nwarrow (f_* \eta_{\mathcal{F}})_U & \parallel \text{res}_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(U)} = \text{id} \\ \mathcal{D}_1 & \supseteq & f_* \mathcal{F}(U) \end{array}$$

\mathcal{D}_1 から伸びる 2 本の射と整合的に $(\epsilon_{f_* \mathcal{F}})_U$ が生えている．これはつまり上の図式で \mathcal{D}_1 を頂点に持つ三角形が可換である，ということである． $f_* \mathcal{F}(U) \in \mathcal{D}_1$ に注目すれば，これは直ちに $\epsilon_{f_* \mathcal{F}} \circ f_* \eta_{\mathcal{F}} = \text{id}$ を意味する．ここまでは $f_* f^p f_* \mathcal{F}$ についての議論だったが，これを sheafification すれば最初の目的の等式が得られる．

■ $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \circ \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} = \text{id}_{\text{Hom}(f^p \mathcal{G}, \mathcal{F})}$. 今度は $\beta \in \text{Hom}(f^p \mathcal{G}, \mathcal{F})$ をとる. $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \circ \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(\beta) = \beta$ を示そう. 前段落及び前前段落と同様に図式を書く.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{G} & \\
 \eta_{\mathcal{G}} \swarrow & & \searrow \bar{\beta} \\
 f_* f^p \mathcal{G} & \xrightarrow{f_* \beta} & f_* \mathcal{F}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & f^p \mathcal{G} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F} & \\
 \epsilon_{f^p \mathcal{G}} \uparrow & & & & \uparrow \epsilon_{\mathcal{F}} \\
 f^p f_* f^p \mathcal{G} & \xrightarrow{f^p f_* \beta} & f^p f_* \mathcal{F} & & \\
 \swarrow f^p \eta_{\mathcal{G}} & & \searrow f^p \bar{\beta} & & \\
 & f^p \mathcal{G} & & &
 \end{array}$$

よって以下が $\text{id}_{f^p \mathcal{G}}$ であることを示せば良いと分かる.

$$\begin{array}{ccc}
 & f^p \mathcal{G} & \\
 \epsilon_{f^p \mathcal{G}} \uparrow & & \\
 f^p f_* f^p \mathcal{G} & \xleftarrow{f^p \eta_{\mathcal{G}}} & f^p \mathcal{G}
 \end{array}$$

そこで次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccccc}
 (f^p \mathcal{G})(U) & \xrightarrow{(f^p \eta_{\mathcal{G}})_U} & (f^p f_* f^p \mathcal{G})(U) & \xrightarrow{(\epsilon_{f^p \mathcal{G}})_U} & (f^p \mathcal{G})(U) \\
 \uparrow \mathcal{D} & & \uparrow \mathcal{D}' & & \uparrow \mathcal{D}
 \end{array}$$

ただし $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ は以下の direct system であり, $U \subseteq X$ 及び $V, W \subseteq Y$ はすべて開集合である.

$$\mathcal{D} = \{\mathcal{G}(V) \mid f(U) \subseteq V\}, \mathcal{D}' = \{\mathcal{G}(W) \mid f(U) \subseteq V, f(f^{-1}(V)) \subseteq W\}.$$

V, W は open set である. $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ は, 実は等しい. なぜなら, 初歩的な写像についての結果から,

$$[f(U) = f(f^{-1}(f(U))) \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq W] \wedge [f(f^{-1}(V)) \subseteq V]$$

が成り立つからである. 前半は $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{D}'$ を意味し, 後半は $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}'$ を意味する. よって $(f^p \mathcal{G})(U)$ が持つ UMP から, 左の $(f^p \mathcal{G})(U)$ から右の $(f^p \mathcal{G})(U)$ への射は id である.

■ $\text{Hom}(f^p \mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}, f_* \mathcal{F})$. 以上で $\text{Hom}(f^p \mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}, f_* \mathcal{F})$ が示せた. $Sh \dashv Fgt$ を用いると以下が示される.

$$\begin{aligned}
 & \text{Hom}(f^p \mathcal{G}, \mathcal{F}) \\
 &= \text{Hom}(Sh f^p \mathcal{G}, \mathcal{F}) \\
 &\cong \text{Hom}(f^p \mathcal{G}, Fgt \mathcal{F}) \\
 &\cong \text{Hom}(\mathcal{G}, f_* Fgt \mathcal{F}) \\
 &= \text{Hom}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F})
 \end{aligned}$$

ここで, \mathcal{F} が sheaf であること, したがって $\mathcal{F} = Fgt \mathcal{F}$ であることを用いた.

■ η is Natural.

■ ϵ is Natural.

■ $\Phi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}, \Psi_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ is Natural.

■ Bijection $\text{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{F})$ is Natural.

Ex1.19 Extending a Sheaf by Zero.

X :: topological space, Z :: closed subset in X , $U = X \setminus Z$ とする. さらに $i : Z \hookrightarrow X, j : U \hookrightarrow X$ を埋め込み写像とする.

(a) $i_*\mathcal{F}$: Extending $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(Z)$ by Zero Outside Z .

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(Z)$ とする. i は埋め込み写像なので, 開集合 U について $(i_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U \cap Z)$.

点 P の開近傍を考える.

■ Case: $P \in Z^c$. Z^c は開集合だから, $P \in Z^c$ ならば, 開近傍 V が存在して $P \in V \subseteq Z^c$ となる. このとき, $\mathcal{F}(Z \cap V) = \mathcal{F}(\emptyset) = 0$ となる. しかも $\mathcal{F}(Z \cap V) = 0$ は十分小さいすべての U について成り立つ. したがって P の任意の開近傍 V について次の図式が可換.

$$\begin{array}{ccc} & (i_*\mathcal{F})_P & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ \mathcal{F}(Z \cap V) & \xrightarrow{i_* \text{res}_V^\emptyset} & 0 \end{array}$$

よって $\mathcal{F}(Z \cap V) \rightarrow (i_*\mathcal{F})_P$ はゼロ写像しかなく, $(i_*\mathcal{F})_P$ の UMP から $(i_*\mathcal{F})_P = 0$.

■ Case: $P \in Z$. 逆に $P \in Z$ ならば, 点 P の X における開近傍 U から作られる $Z \cap U$ は, 常に空でない P の開近傍. いつでも埋め込み射 $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(Z \cap V)$ が存在するので, 結局 $\mathcal{F}(V)$ ($P \in V$) なる abelian group 全てから $(i_*\mathcal{F})_P$ に射がのびている. よって $(i_*\mathcal{F})_P = \mathcal{F}_P$.

■ Conclusion. まとめて, 以下が成り立つ.

$$(i_*\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & (P \in Z) \\ 0 & (P \notin Z) \end{cases}$$

(b) $j_!\mathcal{F}$: Extending $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(U)$ by Zero Outside U

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(U)$ とし, $j_!\mathcal{F}$ を以下で定まる presheaf の sheafification とする.

$$(j_!\mathcal{F})^{\text{pre}}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & (V \subseteq U) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

sheafification で stalk は変わらないから, $(j_!\mathcal{F})_P = (j_!\mathcal{F})_P^{\text{pre}}$.

点 P の開近傍を考えよう.

■ Case: $P \in U$. U :: open なので, ある V :: open が存在して $P \in V \subseteq U$ となる. このような V について $(j_!\mathcal{F})^{\text{pre}}(V) = \mathcal{F}(V)$. U より小さい任意の開近傍 V については $(j_!\mathcal{F})^{\text{pre}}(V) = \mathcal{F}(V)$ となる上, U より大きい任意の開近傍 V から射 $\text{res}_V^{U \cap V} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ が生えている. よって $(j_!\mathcal{F})_P^{\text{pre}} = \mathcal{F}_P$.

■Case: $P \in U^c$. このとき, どのように P の開近傍 V をとっても, $P \in V$ かつ $P \notin U$ なので $V \not\subseteq U$.
したがって $(j_! \mathcal{F})_P^{pre} = 0$ となる.

■Conclusion. まとめると, 以下が成り立つ.

$$(j_! \mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & (P \in U) \\ 0 & (P \notin U) \end{cases}$$

(c) $0 \rightarrow j_!(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*(\mathcal{F}|_Z) \rightarrow 0$ is Exact.

Ex1.2c を応用する. $P \in X$ を任意の点とする. $P \in U \text{ exor } Z$ なので, それぞれの場合について考える.

■Case: $P \in Z$. この時, $(j_!(\mathcal{F}|_U))_P = \mathcal{F}_P, (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P = 0$ となる. よって $0 \rightarrow (j_!(\mathcal{F}|_U))_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P \rightarrow 0$ は $0 \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow 0 \rightarrow 0$ に等しく, これは完全列.

■Case: $P \in U$. この時, $(j_!(\mathcal{F}|_U))_P = 0, (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P = \mathcal{F}_P$ となる. よって $0 \rightarrow (j_!(\mathcal{F}|_U))_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P \rightarrow 0$ は $0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow 0$ に等しく, これは完全列.

Ex1.20 Subsheaf with Supports.

$Z :: \text{closed in } X, \mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$ とする. $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ を以下で定める.

$$\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \mid \text{Supp}(s) \subseteq Z\}.$$

“ $\text{Supp}(s) \subseteq Z$ ” は “ $\forall P \in Z^c, s(P) = 0$ ” と同値である. また, 特に $\text{Supp}(0) = \emptyset$ より, $0 \in \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$.

(a) Presheaf $V \mapsto \Gamma_{V \cap Z}(V, \mathcal{F}|_V)$ is a Sheaf.

Presheaf $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ を

$$\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) : V \mapsto \Gamma_{V \cap Z}(V, \mathcal{F}|_V)$$

で定める. これが sheaf であることを示そう. 開集合 V とその開被覆 $\{V_i\}_{i \in I}$ を任意にとる.

■Identity Axiom. $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V)$ をとる. 任意の $i \in I$ について $s|_{V_i} = 0$ が成り立つとしよう. この時, $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ の定義から, $s \in \mathcal{F}(V)$ と $\text{Supp}(s|_V) \subseteq V \cap Z$ が成り立つ. \mathcal{F} の identity axiom をもちいて, $s|_V = 0$ が得られる.

■Gluability Axiom. $s_i \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V_i)$ をとる. 任意の $i, j \in I$ について $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ が成り立つとしよう. するとやはり $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ なので, \mathcal{F} の gluability axiom から, $s|_{V_i} = s_i$ なる $s \in \mathcal{F}(V)$ が存在する. あとは $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V)$, すなわち $\text{Supp}(s) \subseteq V \cap Z$ を示せば良い. これは

$$\text{Supp}(s_i) = \text{Supp}(s|_{V_i}) = \text{Supp}(s) \cap V_i \subseteq V_i \cap Z$$

から $\text{Supp}(s) = \bigcup (\text{Supp}(s) \cap V_i) \subseteq \bigcup (V_i \cap Z) = V \cap Z$ と計算できる.

(b) For $U = X \setminus Z$, $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$ is Exact.

開集合 $U = X \setminus Z$ と $j : U \hookrightarrow X$ について, $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$ が exact であることを示す. さらに, $\mathcal{F} :: \text{flasque}$ ならば $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U) \rightarrow 0$ も exact であることを示す.

定義より, $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}), j_*(\mathcal{F}|_U)$ は以下のような集合である.

$$\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(V) \mid \forall Q \in U \cap V, s(Q) = 0\}, \quad j_*(\mathcal{F}|_U) = \mathcal{F}(U \cap V).$$

そこで写像 $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$ を以下で定義する.

$$\zeta(s)(Q) = [Q \in U \cap V]s(Q) \quad \text{where } V :: \text{open in } X, s \in \mathcal{F}(V), Q \in V.$$

ただし $[Q \in U \cap V]$ は Iverson の記法である. (ここは指示関数を用いて $\chi_{U \cap V}(Q)$ と書いても良い.) すると既に確認した $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ の定義から, $\ker \zeta = \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$. よって $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\zeta} j_*(\mathcal{F}|_U)$ は exact.

さらに $\mathcal{F} :: \text{flasque}$ だと仮定する. すると, $s \in \mathcal{F}(U \cap V)$ に対して $s'|_{U \cap V} = s$ なる $s' \in \mathcal{F}(V)$ が存在する. 明らかに $\zeta(s') = s$ となるから, この時 ζ は全射. したがって $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U) \rightarrow 0$ も exact になる.

Ex1.21 Some Examples of Sheaves on Varieties.

$k :: \text{algebraically closed field}$, $X :: \text{variety over } k$ とする. \mathcal{O}_X を the sheaf of regular functions on X (Example 1.0.1) とする.

(a) The Sheaf of Ideals \mathcal{I}_Y .

$Y :: \text{closed in } X$ とする. 任意の $U :: \text{open in } X$ について, $\mathcal{I}_Y(U)$ を以下で定める.

$$\mathcal{I}_Y : U \mapsto \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid \forall P \in Y \cap U, f(P) = 0\}.$$

$\mathcal{I}_Y(U)$ は $\mathcal{O}_X(U)$ のイデアルである. この時, $\mathcal{I}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ が sheaf であることを示す.

(b) If $Y :: \text{subvariety}$, then $\mathcal{O}_X \cong i_*(\mathcal{O}_Y)$.

(c)

(d)

(e)

Ex1.22 Glueing Sheaves.

$X :: \text{topological space}$, $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I} :: \text{open cover of } X$, $\mathcal{F}_i \in \mathbf{Sh}(U_i)$ とする. この $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ に付随して, 同型写像 $\phi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$ が存在し, $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ with $\{\phi_{ij}\}_{i,j \in I}$ が inverse system をなすとする. この時, inverse limit \mathcal{F} の存在を示す. さらに, $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{F}_i$ となることを示す. この命題は section でなく sheaf の Glueability Axiom と言える.

Prop1.1 を用いて仮定を書き換える. $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$ について, 以下の同型がある.

$$\forall i, j \in I, \quad \forall P \in U_i \cap U_j, \quad (\mathcal{F}_i)_P \cong (\mathcal{F}_j)_P.$$

この時, sheaf \mathcal{F} が存在して,

$$\forall i \in I, \quad \forall P \in U_i, \quad \mathcal{F}_P = (\mathcal{F}|_{U_i})_P \cong (\mathcal{F}_i)_P$$

となることを示す. Ex1.19b の結果が結論によく似ているので, これを参考にする.

\mathcal{F} を以下の presheaf の sheafification と定義する.

$$\mathcal{F}^{pre}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_i(V) & (\exists i \in I, V \subseteq U_i) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

もし $V \subseteq U_i$ なる i が複数存在した時には, どれを選んでも構わない. その時 $V \subset U_i \cap U_j$ なる $i, j \in I$ が存在し, i, j どちらを選んでも $\mathcal{F}^{pre}(V)$ が ϕ_{ij} を介して同型になるからである. そして Ex1.19b の証明から分かるように, $(\mathcal{F}|_{U_i})_P = (\text{emb}_!^{U_i} \mathcal{F}_i)_P = (\mathcal{F}_i)_P$. ただし $\text{emb}^{U_i} : U_i \hookrightarrow U$ は埋め込み写像である.