

ゼミノート #4

Deformation Theory

七条彰紀

2018 年 8 月 5 日

1 Automorphism Group of Stable Curve

[5] 3.A, [7] §1 を参照する.

$C, D ::$ stable curves of genus g over a scheme S の間の isomorphism group の scheme としての構造を与える. この scheme を $\text{Isom}(C, D)$ と書く. そして $\text{Aut}(C) = \text{Isom}(C, C)$ と定義し, これの scheme としての特徴を調べる.

$\text{Isom}(C, D)$ の特徴付けをするため, 次の関手を考える.

$$\begin{aligned} \text{Isom}_S(C, D) : (\text{Scheme over } \mathbb{C}) &\rightarrow (\text{Set}) \\ S' &\mapsto \{ C \times_{\mathbb{C}} S' \rightarrow D \times_{\mathbb{C}} S' :: S' \text{-isomorphism} \} \end{aligned}$$

$\iota \in \text{Isom}(C, D)(S')$ から得られる ι^* は $\omega_{C \times S'/S'}^\circ = \iota^*(\omega_{D \times S'/S'}^\circ)$ を満たす. また \otimes と交換する (すなわち Picard 群の間の準同型である. [3] Ex II.6.8). このことから $\text{Isom}(C, D)$ が適当な r をとると $PGL(r+1)$ の部分群として書けることが分かる.

もう少し詳しく $\text{Isom}(C, D)$ を書く. $n \geq 3$ を整数とする. 次のように r, d をとる.

$$r+1 = h^0((\omega_{C/\mathbb{C}}^\circ)^{\otimes n}) = (2n-1)(g-1), \quad d = \deg(\omega_{C/\mathbb{C}}^\circ)^{\otimes n} = 2n(g-1).$$

すると [3] II.7 より, C, D は $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$ の次数 d , arithmetic genus g の closed curve とみなせる (\mathbb{P}^r に埋め込める). なので Hilbert scheme $:: \mathcal{H} = \mathcal{H}_{d,g,r}$ の点として扱うことが出来る. ここで次のように射を定める.

$$\begin{aligned} \mu : PGL(r+1) &\rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ \alpha &\mapsto (\alpha \cdot [C], [D]) \end{aligned}$$

すると, $\text{Isom}(C, D)$ は $\mu^{-1}(\Delta)$ によって表現される^{†1}. これを group scheme over $\mathbb{C} :: \text{Isom}(C, D)$ とする.

scheme over $\mathbb{C} :: X$ について少々一般の理論を述べる. $\mathbb{I} = \text{Spec } \mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ とおく (ref. [5] 1). [3] Ex II.2.8 より, $t \in \underline{X}(\mathbb{I})$ は X の \mathbb{C} -rational point $:: x$ と $T_x(X) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathcal{T}_x$ の元に対応する. ここで \mathcal{T} は tangent sheaf $:: \mathcal{T} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ のことである. [5] という regular vector field とは \mathcal{T} の section のこと (と思われる).

^{†1} Δ は $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ の diagonal set. $\mu^{-1}(\Delta)$ は

$$\Delta \cap \text{im } \mu = \{(\alpha \cdot [C], [D]) \mid \alpha \cdot [C] = [D]\}$$

の $PGL(r+1)$ への逆像なので, この点と C, D の間の同型と対応することが分かるだろう.

定理 1.1

$C ::$ stable curve of genus $g \geq 2$ について,

$$\mathrm{Ext}^0(\Omega_C, \mathcal{O}_C) = H^0(C, \mathcal{T}_C) = \mathcal{T}_C(C) = 0.$$

(証明). [7] §1.

$\pi: \tilde{C} \rightarrow C$ を normalization of C とする. また \tilde{C} の connected component の個数を ν , それぞれの genus を g_i ($i = 1, \dots, \nu$) とする.

今, $D \in \mathcal{T}_C(C)$ は pullback $:: \pi^*: \mathcal{T}_{\tilde{C}} \rightarrow \pi^* \mathcal{T}_C$ によって^{†2}. $\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ C の double point に π で対応する点 (point laying over double point, plodp) で 0 になるような regular vector field $:: \tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ に対応する (TODO). このような \tilde{D} は 0 しかないことを確かめれば, $\mathcal{T}_C(C) = 0$ がわかる.

主張 1.2

1 点 $P \in \tilde{C}$ で $\tilde{D}_P = 0$ ならば, $\tilde{D} = 0$ である.

(証明). $C ::$ reduced connected scheme に注意する. $P \in C$ において $\tilde{D} \in \mathcal{T}_C(C)$ が $\tilde{D}_P = 0$ を満たすでしょう. C の irreducible affine open cover $:: \mathfrak{U}$ をとり, $P \in U$ なる $U = \mathrm{Spec} A \in \mathfrak{U}$ をとって固定する. すると $C ::$ reduced より $A ::$ integral domain. $\tilde{D}|_U \in \mathcal{T}_C(U)$ が $P \in U$ で 0 になるのだから, 次が成立する.

$$\exists u \in A - \mathfrak{p}_P, \quad u \cdot (\tilde{D}|_U) = 0.$$

$A ::$ integral より, これは $\tilde{D}|_U = 0$ を意味する. U と交わる irreducible affine open subset of $C :: V \in \mathfrak{U}$ についても, $\tilde{D}|_{U \cap V} = 0$ なので $\tilde{D}|_V = 0$. $C ::$ connected なので, このように V を取り続けることで, 全ての $V \in \mathfrak{U}$ について $\tilde{D}|_V = 0$ であることがわかる. sheaf の Identity Axiom から, C 全体で $t = 0$. ■

したがって我々は \tilde{C} の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつこと示せば良い.

$\mathcal{T}_{\tilde{C}} = \mathcal{H}om(\Omega_{\tilde{C}/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$ なので, $\mathcal{T}_{\tilde{C}}$ に対応する divisor は $K_{\tilde{C}}$. $\deg K_{\tilde{C}} = 2\tilde{g} - 2$ なので, $\tilde{g} > 1$ ならば $\deg(-K_{\tilde{C}}) < 0$. したがって [3] Lemma IV.1.2 から $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\tilde{C}, \mathcal{T}_{\tilde{C}}) = 0$. すなわち $\mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C}) = 0$. なので以下では $\tilde{g}_i = 0, 1$ とする.

$\tilde{g}_i = 0, 1$ であるとき, \tilde{C} の各 connected component は必ず plodp をもつ. 実際, genus formula で $\delta = 0$ とすると

$$g = \sum_i (\tilde{g}_i - 1) + 1 \geq 2$$

したがって $\sum_i (\tilde{g}_i - 1) > 0$ ということになる. しかし仮定から $\tilde{g}_i - 1 \leq 0$ なので, $\delta > 0$. すなわち C は必ず node をもつ. \tilde{C} の各 component は smooth であることと C が connected であることも踏まえて考えると, \tilde{C} の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつことが分かる. (この辺りは [7] Lemma1.4 で詳しく述べられている). ■

別証明として [4] Prop27.4 がある.

命題 1.3

任意の閉点 $P \in \mathrm{Aut}(C)$ について, $\mathcal{O}_{\mathrm{Aut}(C), P} \cong \mathbb{C}$. 特に $\mathrm{Aut}(C) ::$ reduced scheme.

^{†2} $R ::$ ring, $A, B ::$ ring over R とする. 一般に, k -homomorphism $:: \phi: A \rightarrow B$ があるとき, $D \in \mathrm{Der}_R(B)$ は $\phi^*: D \mapsto D \circ \phi$ によって $\mathrm{Der}_R(A)$ へ写すことができる.

(証明). $X = \text{Aut}(C)$ は group scheme over \mathbb{C} であるから, X のある点での local な性質は transition を用いて単位元 e での性質と言い換えられる. なので $A := \mathcal{O}_{X,e}$ のみを考える. $X :: \text{group scheme over } \mathbb{C}$ より $e :: \mathbb{C}\text{-rational point}$ なので, A が体ならばそれは $\mathbb{C}(= A/\mathfrak{m}_A)$ と同型である. よって我々は A が体であることのみ示せば良い.

上記の定理 (1.1) から, $\mathcal{T}_C(C) = 0$. これは $C \times \mathbb{I}$ の \mathbb{I} -automorphism は自明なものしか無いことを意味する (後述). さらに $\text{Aut}(C)$ の定義から, これは射 $\mathbb{I} \rightarrow \text{Aut}(C)$ としては自明なものしか存在しないことを意味する. さらに [3] Ex II.2.8 より, これは $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 = 0$ を意味する. 中山の補題から $\mathfrak{m}_A = 0$. よって A は体である. ■

2 Definitions of Deformations and (Uni-)Versal Deformation.

定義 2.1 (\mathbb{C} -pointed scheme [8] §1.2.1)

scheme $:: Y$ と \mathbb{C} -rational point $:: y_0 \in Y$ の組を \mathbb{C} -pointed scheme を呼び, (Y, y_0) と書く.

morphism of \mathbb{C} -pointed schemes $:: (S, s_0) \rightarrow (T, t_0)$ とは, morphism of schemes $:: \phi : S \rightarrow T$ であって, $\phi(s_0) = t_0$ を満たすもののこと.

定義 2.2 (Deformation of Scheme [8] §1.2.1, [5] §3.B) (i) deformation of X とは, 以下のような pullback diagram のことである. ψ から $X \cong \mathcal{X} \times_Y \mathbb{C}$ が誘導される.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \xi \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow \text{flat, surj.} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{s} & Y \end{array}$$

$A' :: \text{local artinian ring with } A'/\text{Nil}(A') \cong \mathbb{C}$ を用いて $Y = \text{Spec } A'$ と書ける場合, これは abstract lifting of X to A' とも呼ばれる ([9] 4.2).

(ii) 上の deformation of $X :: \xi$ について, S のことを ξ の parameter space, \mathcal{X} を ξ の total space と呼ぶ.

(iii) 任意の scheme $:: X$ と \mathbb{C} -pointed scheme $:: (S, s_0)$ に対して, S が parameter space であるような deformation of X が存在する:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \times_{\mathbb{C}} S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{s} & S \end{array}$$

これを product family または trivial family と呼ぶ.

(iv) morphism of \mathbb{C} -pointed schemes $:: (T, t_0) \rightarrow (S, s_0)$ は, parameter space が S である deformation $:: \xi$ から base change によって次の deformation を誘導する.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathcal{X} \times_S T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & T \end{array}$$

これを元の deformation の $f : (T, t_0) \rightarrow (S, s_0)$ による pullback と呼び, $f^*\xi$ と書く (このノート 独自?).

(v) isomorphism of deformations of $X :: \xi \rightarrow \eta$ とは、以下の可換図式が成立する同型 $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}, S \cong T$ のこと。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & \mathcal{Y} \\
 & & & \nearrow & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X} & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{Y} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad} & S & \xrightarrow{\cong} & T
 \end{array}$$

isomorphism of parameter spaces $:: (S, s_0) \rightarrow (T, t_0)$ と deformation から誘導される deformation は元の deformation と同型である。

定義 2.3 (Universal Deformation, [5] 3.B, [4] §15)

universal deformation for X とは、次の性質を満たす deformation of $X :: \xi$ (parameter space $:: S$): 任意の deformation of $X :: \eta$ (parameter space $:: T$) にたいし、morphism of pointed schemes $:: f : T \rightarrow S$ が一意に存在し、 $f^*\xi \cong \eta$ となる。

Universal Deformation は、次の関手の表現対象であると言える。

$$\mathbf{Sch}/\mathbb{C} \ni S \mapsto \{\text{Deformation of } X\}.$$

したがって全ての Deformation は universal deformation から得られる。しかし、当然ながらというべきか、universal deformation は殆どの場合で存在しない。そこで universal deformation への要求を

- $S' \rightarrow S$ を locally about S' にとるものとし、
- $U \rightarrow S$ の一意性は要求しない

と弱める。一意 (uni-) ではないので、これを versal deformation と呼ぶ。

定義 2.4 (Versal Deformation)

(versal deformation の定式化が見つからないので保留。見つけた限りでは versal deformation for scheme は次で意義する formal deformation でのみ定義されている。[1] では versal deformation for (complex) manifold が定義されているのみである。)

定義 2.5 (First Order Deformation)

$D = \mathbb{C}[x]/(x^2), \epsilon = x \bmod (x^2)$ とする。 $\mathbb{I} = \text{Spec } D$ の唯一の閉点を 0 で表す。 $(\mathbb{I}, 0)$ 上の deformation を、first order deformation (or infinitesimal deformation) と呼ぶ。

注意 2.6

$X :: \text{stable curve of genus } g$ とする。 first order deformation $:: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{I}$ は、moduli space の定義から、 $0 \in \mathbb{I}$ を $[X] = [\mathcal{X}_0] \in \overline{\mathcal{M}}_g$ へ写す $\mathbb{I} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_g$ に対応する。そしてこの射は、既に知られている通り Zariski tangent space at $[X] :: T_{[X]}$ の元に対応する。よって X の first order deformation から $T_{[X]}$ の元への対応がある。この対応は一対一であろうか？

補題 2.7

次の first order deformation of X を考える.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{X} \\ \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{0} & \mathbb{I} \end{array}$$

この時, ψ は closed imm. かつ同相写像である.

(証明). まず $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{I}$ が closed imm. であり, closed imm. が stable under base extension であることから, ψ も closed imm. また closed imm. ならば finite である ([3] Ex II.5.5b). ψ が homeomorphism であることは local on codomain(target) なもの^{†3}なので, $\mathcal{X} :: \text{affine}$ と仮定して証明すれば十分.

以上から, $\mathcal{X} = \text{Spec } A, X = \text{Spec } R, R :: A\text{-algebra, finitely generated as module}$ と仮定して良い. また, $\psi :: \text{closed imm.}$ であるから, $A \cong R/I$ なる $I :: \text{ideal of } R$ が存在する. また仮定から $A \otimes_D \mathbb{C} \cong R$ かつ $A :: \text{flat } D\text{-module.}$ そこで以下の D -module 完全列に $\otimes_D R$ とする.

$$0 \longrightarrow \epsilon D \longrightarrow D \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

すると次のように成る.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\epsilon D) \otimes_D R & \longrightarrow & D \otimes_D R & \longrightarrow & \mathbb{C} \otimes_D R \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \end{array}$$

よって $(\epsilon D) \otimes_D R$ 同様 I は nilpotent ideal (i.e. $I^2 = 0$).

$X = \text{Spec } R$ の閉集合として

$$\mathcal{X} = \text{Spec } A = V(I) = V(I^2) = V((0)) = X$$

なので $\text{im } \psi = \mathcal{X}$. $\psi :: \text{closed imm.}$ なので, これで $\psi :: \text{homeo}$ が証明できた. ■

定義 2.8 (Restriction of First Order Deformation)

上の命題にある first order deformation of X について, $U :: \text{open subset of } X$ をとる. locally ringed space $:: (\psi(U), \mathcal{O}_{\mathcal{X}}|_{\psi(U)})$ を $\mathcal{X}|_U$ と書く.

3 First Order Deformation of a Nonsingular Variety.

補題 3.1

$A :: \text{ring}, X = \text{Spec } A$ とする. この時, first order deformation of $X :: \mathcal{X}$ も affine scheme である.

(証明). [3] Ex II.3.1 への回答でもある.

$\mathcal{I} = \ker(X \hookrightarrow \mathcal{X})$ とし, $\mathcal{F} :: \text{quasi-coherent sheaf on } X$ とする. 今, 補題 (2.7) の証明から $\mathcal{I}^2 = 0$ が得られる. また, 明らかに $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_X$. したがって次の SES(short exact sequence) が存在する.

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^d\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

^{†3} local on codomain に考えれば, 特に全単射性が示せる.

次の LES が誘導される.

$$\begin{aligned}
0 &\longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) \\
&\longrightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) \\
&\dots
\end{aligned}$$

sheaf cohomology は abelian group の cohomology として構成されており, module structure とは無関係に定まっている. そして X と \mathcal{X} は homeo. したがって

$$H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) = H^i(X, \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) = 0.$$

最後の等号は $\mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X ::$ quasi-coherent \mathcal{O}_X -module と [3] Thm III.3.7 から得られる.

$d = 1 (\implies \mathcal{I}^{d+1} = 0)$ からはじめて d についての帰納法により

$$H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F}) = H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) = 0 \ (i > 0).$$

よって LES から $H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F}) = 0 (i > 0)$. [3] Thm III.3.7 から $\mathcal{X} ::$ affine. ■

補題 3.2 ([8] Thm1.2.4)

$X ::$ affine, nonsingular, finite type scheme over a field k とする. この時, X の first order deformation は自明な deformation $:: X \times_k \text{Spec } D$ しか存在しない.

(証明). 上の補題から, deformation of $X = \text{Spec } A$ は affine. そこで $\mathcal{X} = \text{Spec } B$ とする.

$$\begin{array}{ccc}
B & \twoheadrightarrow & A \\
f \uparrow & \text{p.b.} & \uparrow \\
D & \twoheadrightarrow & k
\end{array}$$

$f ::$ flat と, f の唯一の fiber $:: X = \text{Spec } A$ が smooth であることから, [3] Thm III.10.2 より $f ::$ smooth.

次の commutative diagram を考える.

$$\begin{array}{ccc}
B & \twoheadrightarrow & A \\
f \uparrow & \circlearrowleft & \uparrow \text{ mod } \epsilon A \\
D & \longrightarrow & A \otimes_k D
\end{array}$$

$f :: (\epsilon D)$ -smooth over D なので, 図式を可換にする射 $\phi : B \rightarrow A \otimes_k D$ が存在する. 以下の主張から $\phi ::$ iso なので, 任意の deformation of $X :: \text{Spec } B$ は自明な deformation $:: \text{Spec } A \otimes_k D = X \times \mathbb{I}$ と同型である. ■

主張 3.3 ([8] Lemma A.4)

$R ::$ ring, $I ::$ ideal of R , $F, G :: R$ -module, $G ::$ flat, $f : F \rightarrow G ::$ homomorphism of R -modules.

$I ::$ nilpotent とし, 誘導される homomorphism $f \otimes_R \text{id}_{R/I} : F/IF \rightarrow G/IF$ が同型であるとする. この時, $f ::$ iso.

(証明). $C = \text{coker } f$ とする. 完全列 $F \rightarrow G \rightarrow C \rightarrow 0$ に $\otimes_R(R/I)$ を作用させる.

$$F/IF \longrightarrow G/IG \longrightarrow C/IC \longrightarrow 0$$

仮定から $C/IC = 0$. 今 $I :: \text{nilpotent}$ なので $I \subset \text{Jac}(R)$. したがって中山の補題から $C = 0$. すなわち $f :: \text{surj.}$

$K = \ker f$ とする. 完全列 $0 \rightarrow K \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow 0$ に $\otimes_R(R/I)$ を作用させる.

$$0 \longrightarrow K/IK \longrightarrow F/IF \longrightarrow G/IG \longrightarrow 0$$

今, $G :: \text{flat}$ から $\text{Tor}_R(G, R/I) = 0$. なのでこの SES から誘導される $\text{Tor}_R(-, R/I)$ の LES を考えると, $K \otimes (R/I) \cong K/IK = 0$ が得られる. 再び中山の補題から $K = 0$. よって $f :: \text{inj.}$ ■

補題 3.4 ([8] Lemma1.2.6)

任意の k -algebra A について, 次の群同型がある.

$$\left\{ \begin{array}{l} D\text{-automorphism of } A \otimes_k D \\ \text{inducing identity on } A \end{array} \right\} \cong \text{Der}_k(A).$$

D -automorphism of $A \otimes_k D$ のことを infinitesimal automorphism と呼ぶ.

(証明). 仮定から automorphism of $A \otimes_k D = A[\epsilon]$ は D -module homomorphism で, $\text{mod } \epsilon A \otimes (\epsilon D)$ を合成すると identity になる. したがって次のように書ける.

$$\theta(x) = x + \epsilon D(x).$$

θ が積を保つことと D -module homo. であることから, $D : A \otimes D \rightarrow A :: D\text{-derivation.}$

$\Omega_{A \otimes_k D/D} \cong \Omega_{A/k} \otimes_k D$ に注意すると, θ と $\text{Der}_k(A)$ の対応が分かる. この対応が群準同型であることは明らか. ■

定理 3.5 ([8] Prop1.2.9)

$X :: \text{separated nonsingular scheme of finite type over } k$ とする. 特に, $X :: \text{nonsingular (abstract) variety over } K$ であればよい. この時, first order deformation of X の同値類は $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元と一対一に対応する.

(証明). $\mathcal{X} :: \text{first order deformation of } X$ を任意の取る. そして affine open cover of $X :: \{U_i\}_{i \in I}$ を任意に取る. この cover についての Čech cohomology を考えていく.

今, $\mathcal{X}|_{U_i} :: \text{first order deformation of } U_i$. 定理 (3.2) より, $\theta_i : U_i \times_k \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{X}|_{U_i}$ が得られる. これを用いて, 各 $i, j \in I$ について

$$\theta_{ij} = \theta_i^{-1} \circ \theta_j : U_{ij} \times \mathbb{I} \rightarrow U_{ij} \times \mathbb{I}$$

が得られる. ただし $U_{ij} = U_i \cap U_j$ (以降の U_{ijk} など同様). 補題 (3.4) から, これは $d_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{T}_X)$ に対応する.

θ_{ij} は貼り合わせることが出来るのだから, Gluing Lemma を参照すれば $\theta_{ij}\theta_{jk}\theta_{ik}^{-1} = \text{id}_{U_{ijk} \times \mathbb{I}}$ が得られる. 補題 (3.4) の準同型で写せば,

$$d_{ij} + d_{jk} - d_{ik} = 0$$

すなわち Čech 1-cocycle condition が得られる.

first order deformation of X が 2 つあり, その間に同型があるとしよう: $\Psi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$. \mathcal{X}' について θ'_{ij}, d'_{ij} を \mathcal{X} 同様に定める. 次の infinitesimal automorphism を考える.

$$\alpha_i = \theta'_i \circ \Psi|_{U_i} \circ \theta_i : U_i \times \mathbb{I} \rightarrow \mathcal{X}|_{U_i} \rightarrow \mathcal{X}'|_{U_i} \rightarrow U_i \times \mathbb{I}.$$

α_i に $a_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{T}_X)$ が対応しているとする. 計算すると $(\alpha_i|_{U_{ij}})^{-1} \theta'_{ij}(\alpha_j|_{U_{ij}}) = \theta_{ij}$ が得られる. すなわち,

$$d'_{ij} - d_{ij} = a_i - a_j.$$

よって $\{d_{ij}\}$ の同値類と $\{d'_{ij}\}$ の同値類は $\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X)$ の中で等しい.

以上より, \mathcal{X} から $\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元への対応は単射的である. 逆に $\{d_{ij}\}$ から $\{\theta_{ij}\}$ の対応, θ_{ij} による $U_i \times \mathbb{I}$ の貼り合わせへと手順を遡れば, $\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元と first order deformation of X への対応が全射だと分かる.

最後に, [3] Thm III.4.5 から $\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X) \cong H^1(X, \mathcal{T}_X)$. ■

4 Extension of Sheaves

4.1 Definitions

定義 4.1 (Extension of Sheaves) (i) $\mathcal{F}, \mathcal{G} :: \mathcal{O}_X$ -module on ringed space X とする. extension of \mathcal{F} by \mathcal{G} とは, 次のような完全列のこと.

$$(\mathcal{E}, \iota, \kappa) : 0 \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{\kappa} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

(ii) $(\mathcal{E}, \iota, \kappa) \rightarrow (\mathcal{E}', \iota', \kappa') ::$ homomorphism of extensions of \mathcal{F} by \mathcal{G} とは, 次の図式を可換にする homomorphism of sheaves $:: \phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ のこと.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathcal{E} & & & \\ & & \nearrow \iota & \downarrow \phi & \searrow \kappa & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\ & & \searrow \iota' & \downarrow \phi & \nearrow \kappa' & & \\ & & & \mathcal{E}' & & & \end{array}$$

(iii) $f : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$ と $(\mathcal{E}, \iota, \kappa) ::$ extension of \mathcal{F} by \mathcal{G} について, $\mathcal{E}f^* ::$ pullback of \mathcal{F} by \mathcal{G} を次で定める. これが extension of \mathcal{F}' by \mathcal{G} になっていることは簡単に確かめられる. まず, sheaf としては $\mathcal{E}f^*$ は

$$\mathcal{E}f^* = \{\langle U, e \oplus x' \rangle \in \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}' \mid \kappa_U(e) = f_U(x')\}.$$

$\iota_{\mathcal{E}f^*}, \kappa_{\mathcal{E}f^*}$ は次で定める.

$$\begin{aligned} \iota_{\mathcal{E}f^*} : \mathcal{G} &\rightarrow \mathcal{E}f^*; & \langle U, y \rangle &\mapsto \langle U, \iota(y) \oplus 0 \rangle \\ \kappa_{\mathcal{E}f^*} : \mathcal{E}f^* &\rightarrow \mathcal{F}'; & \langle U, e \oplus x' \rangle &\mapsto \langle U, y' \rangle \end{aligned}$$

定義を終えた後に, $\mathcal{E}f^*$ が実際に pullback of f and κ であることを示す.

(iv) $g : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ と $(\mathcal{E}, \iota, \kappa) ::$ extension of \mathcal{F} by \mathcal{G} について, $g_*\mathcal{E} ::$ pushout of \mathcal{F} by \mathcal{G} を次で定める. これが extension of \mathcal{F} by \mathcal{G}' になっていることは簡単に確かめられる. まず, sheaf としては $g_*\mathcal{E}$ は次の準同型の cokernel である.

$$\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}' \oplus \mathcal{E}; \quad \langle U, y \rangle \mapsto \langle U, g_U(y) \oplus (-\iota_U(y)) \rangle.$$

$\iota_{g_*\mathcal{E}}, \kappa_{g_*\mathcal{E}}$ は次で定める.

$$\begin{aligned}\iota_{g_*\mathcal{E}} : \mathcal{G}' &\rightarrow g_*\mathcal{E}; & \langle U, y' \rangle &\mapsto \langle U, [y', 0] \rangle \\ \kappa_{g_*\mathcal{E}} : g_*\mathcal{E} &\rightarrow \mathcal{F}; & \langle U, [y', e] \rangle &\mapsto \kappa_U(e)\end{aligned}$$

定義を終えた後に, $g_*\mathcal{E}$ が実際に pushout of g and ι であることを示す.

extension of \mathcal{F} by \mathcal{G} が成す集合を $E(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ と書く.

定理 4.2

$\mathcal{F}, \mathcal{G} :: \mathcal{O}_X$ -modules on ringed scheme X とする. この時, extension of \mathcal{F} by $\mathcal{G} :: \mathcal{E} : 0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$ から誘導される boundary map

$$d_{\mathcal{E}} : \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{G}') \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}')$$

は, $g \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ を $g_*\mathcal{E}$ の同型類に写す. 特に,

$$\Phi : E(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \ni \mathcal{E} \mapsto d_{\mathcal{E}}(\text{id}_{\mathcal{G}}) \in \text{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$$

は全単射である.

「特に」以降は特に有名で, 例えば [3] ExIII.6.1 に証明の方針が述べられているし, 加群の場合の類似の結果としては [10] pp.259-264 に詳しい証明がある.

定義 4.3(1) split extension of \mathcal{F} by \mathcal{G} を $0_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ あるいは単に 0 と書く.

$$0_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} : 0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

(2) $(\mathcal{E}, \iota, \kappa) ::$ extension of sheaves について, $-\mathcal{E} := (\mathcal{E}, -\iota, \kappa)$ と定める.

(3) (The Baer sum) $(\mathcal{E}, \iota, \kappa), (\mathcal{E}', \iota', \kappa') ::$ extensions of \mathcal{F} by \mathcal{G} に対し, $\mathcal{E} + \mathcal{E}'$ を以下のように定める.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota \oplus \iota'} & \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' & \xrightarrow{\kappa \oplus \kappa'} & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \nabla & & \downarrow \text{p.o.} & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow \text{p.b.} & & \uparrow \Delta \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{E} + \mathcal{E}' & \longrightarrow & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \end{array}$$

ただし $\Delta : a \mapsto (a, a), \nabla : (a, b) \mapsto a + b$.

4.2 Propositions.

補題 4.4

以下の図式が可換であり, 各行は完全であるとする.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{F}' \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow f \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \end{array}$$

この時, \mathcal{P} は pullback of f and κ .

(証明). 以下, $x \in \mathcal{X}$ と書いたら, x は適当な開集合 U 上の \mathcal{X} の section $:: x \in \mathcal{X}(U)$ を意味する. 各射に次のように名前を付ける.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathcal{X} & & & & \\
 & & \searrow \alpha & & & & \\
 & & \beta & & & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \mathcal{P} & \xrightarrow{\bar{\kappa}} & \mathcal{F}' \longrightarrow 0 \\
 & & \parallel & & \downarrow \bar{f} & & \downarrow f \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

■ $\phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}$ の構成. 任意の $x \in \mathcal{X}$ をとり, これに対して $y \in \mathcal{P}$ を以下のように定める.

1. $x' \in \mathcal{P}$ を $\bar{\kappa}(x') = \alpha(x)$ なるものとする.
 $\bar{\kappa} :: \text{surj}$ ゆえ x' が存在することに注意.
2. $t' \in \mathcal{G}$ を $\iota(t') = \beta(x) - \bar{f}(x')$ なるものとする.
 $\beta(x) - \bar{f}(x') \in \ker \kappa = \text{im } \iota$ ゆえ t' が存在することに注意.
3. $p = x' + \bar{\iota}(t')$ とする.

こうして得られる写像 $x \mapsto p$ が $\phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}$ を与える.

可換性を確認しよう.

$$\begin{aligned}
 \bar{\kappa}(\psi(x)) &= \bar{\kappa}(x') + \bar{\kappa}(\bar{\iota}(t')) = \bar{\kappa}(x') = \alpha(x), \\
 \bar{f}(\psi(x)) &= \bar{f}(x') + \bar{f}(\bar{\iota}(t')) = \bar{f}(x') + \iota(t') = \bar{f}(x') + \beta(x) - \bar{f}(x') = \beta(x).
 \end{aligned}$$

■ $\phi :: \text{well-defined}$. $x = 0$ の時 $\phi(x) = 0$ であることを見れば十分. $x = 0$ ならば $\bar{\kappa}(x') = 0$ すなわち $x' \in \ker \bar{\kappa} = \text{im } \bar{\iota}$. なので, $\bar{\iota}(h) = x'$ となる $h \in \mathcal{G}$ がとれる.

$$\iota(t') = \beta(0) - \bar{f}(x') = -\bar{f}\bar{\iota}(h) = \iota(-h).$$

$\iota :: \text{inj}$. より $t' = -h$. したがって

$$p = x' + \bar{\iota}(t') = \bar{\iota}(h) + \bar{\iota}(-h) = 0.$$

■ $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}$ の一意性. 最後に $\phi, \phi': \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{E}f^*$ が同じ可換性を持つと仮定して $\psi = \phi - \phi' = 0$ を示す. 仮定から $\bar{\kappa}\psi = 0, \bar{f}\psi = 0$ が成立する. まず前者から

$$\text{im } \psi \subseteq \ker \bar{\kappa} = \text{im } \bar{\iota}$$

なので任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して $g \in \mathcal{G}$ が存在し, $\bar{\iota}(g) = \psi(x)$ となる. 図式の可換性から次が成立する.

$$\iota(g) = \bar{f}\bar{\iota}(g) = \bar{f}\psi(x) = 0.$$

行の完全性から ι は単射なので $g = 0$. 任意の x に対して $\psi(x) = \bar{\iota}(g) = \bar{\iota}(0) = 0$. すなわち $\psi = 0$. ■

補題 4.5

以下の図式が可換であり、各行は完全であるとする。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow g & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{F} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

この時、 \mathcal{P} は pushout of g and ι .

(証明). 各射に次のように名前を付ける。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow g & & \downarrow \bar{g} & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \xrightarrow{\bar{\iota}} & \mathcal{P} & \xrightarrow{\bar{\kappa}} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\
 & & & \searrow \beta & & \searrow \alpha & \\
 & & & & & & \mathcal{X}
 \end{array}$$

■ $\mathcal{P} = \bar{g}(\mathcal{E}) + \bar{\iota}(\mathcal{G}')$. $p \in \mathcal{P}$ を任意に取る。

1. $\kappa(e) = \bar{\kappa}(p)$ となる $e \in \mathcal{E}$ をとる. $\kappa :: \text{surj.}$ ゆえ e が存在することに注意.
2. $\bar{\iota}(g') = p - \bar{g}(e)$ となる $g' \in \mathcal{G}'$ をとる. $p - \bar{g}(e) \in \ker \bar{\kappa} = \text{im } \bar{\iota}$ ゆえ g' が存在することに注意.

すると $p = \bar{g}(e) + \bar{\iota}(g')$ となる. 実際,

$$\bar{g}(e) + \bar{\iota}(g') = \bar{g}(e) + (p - \bar{g}(e)) = p.$$

■ $\phi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ の構成. $p \in \mathcal{P}$ に対して, $p = \bar{g}(e) + \bar{\iota}(g')$ となる $e \in \mathcal{E}, g' \in \mathcal{G}'$ をとる. これを元に $\phi(p) = \alpha(e) + \beta(g')$ とする. すると明らかに $\phi \circ \bar{g} = \alpha, \phi \circ \bar{\iota} = \beta$ が成立する. ϕ が well-defined なら module homomorphism になることは明らか.

■ $\phi :: \text{well-defined.}$ $(p =) \bar{g}(e) + \bar{\iota}(g') = 0$ となる $e \in \mathcal{E}, g' \in \mathcal{G}'$ をとる. $\alpha(e) + \beta(g') = 0$ となることを示せば良い. まず, $0 = \bar{\kappa}(\bar{g}(e) + \bar{\iota}(g')) = \kappa(e)$. したがって $e \in \ker \kappa = \text{im } \iota$ であり, $\iota(h) = e$ を満たす $h \in \mathcal{G}$ が存在する.

$$0 = \bar{g}(e) + \bar{\iota}(g') = \bar{g}\iota(h) + \bar{\iota}(g') = \bar{\iota}(g(h) + g').$$

$\bar{\iota} :: \text{inj}$ より $g(h) + g' = 0$. よって

$$\alpha(e) + \beta(g') = \alpha\iota(h) + \beta(-g(h)) = 0.$$

■ $\phi :: \text{unique.}$ $\phi' : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$ も ϕ と同様の条件を満たすとする. $\mathcal{P} = \bar{\iota}(\mathcal{G}') + \bar{g}(\mathcal{E})$ なので,

$$\phi'(p) = \phi'(\bar{g}(e) + \bar{\iota}(g')) = \alpha(e) + \beta(g') = \phi(p).$$

■

補題 4.6

$g, g' : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ と, extension of \mathcal{F} by \mathcal{G} をとる.

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

以下が成り立つ.

- (a) $0_*\mathcal{E} = 0_{\mathcal{F}, \mathcal{G}'}$,
- (b) $g_*(-\mathcal{E}) = -g_*\mathcal{E}$,
- (c) $g_*\mathcal{E} + g'_*\mathcal{E} = (g + g')_*\mathcal{E}$.

(証明).

■proof of (a). 以下の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow 0 & & \downarrow i_2 \circ \kappa & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \xrightarrow{i_1} & \mathcal{G}' \oplus \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \end{array}$$

よって pushout の一意性から $0_*\mathcal{E} \cong \mathcal{G}' \oplus \mathcal{F} = 0_{\mathcal{F}, \mathcal{G}'}$.

■proof of (b). 以下の可換図式を見よ.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{(-1)} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{E} \xrightarrow{\kappa} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \xrightarrow{=} & \mathcal{G}' & \longrightarrow & g_*(-\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \end{array}$$

(-1) は同型であることと, $g \circ (-1) = (-1) \circ g$ から, 以下も可換図式.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{=} & \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{E} \xrightarrow{\kappa} \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow g & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G}' & \xrightarrow{(-1)} & \mathcal{G}' & \longrightarrow & g_*(-\mathcal{E}) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \end{array}$$

よって pushout の一意性から $g_*(-\mathcal{E}) \cong -g_*\mathcal{E}$. また $g_*(\mathcal{E}) \cong (-g)_*\mathcal{E}$ も分かる.

■proof of (c).

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta & & \downarrow \Delta \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota \oplus \iota} & \mathcal{E} \oplus \mathcal{E} & \xrightarrow{\kappa \oplus \kappa} & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\ & & \parallel & & \uparrow \text{p.b.} & & \uparrow \Delta \downarrow \text{pr}_1 \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} & \longrightarrow & (\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^* & \longrightarrow & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \end{array}$$

今, この図式は可換であり, 各行は完全列である. $(\kappa \oplus \kappa) \circ \Delta = \Delta \circ \kappa$ なので, pullback $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^*$ の普遍

性から, 図式を可換に保つ $\phi = \langle \Delta, \kappa \rangle : \mathcal{E} \rightarrow (\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^*$ が存在する.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\iota} & \mathcal{E} & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{F} \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \Delta & & \downarrow & & \downarrow \Delta \\
& & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} & & \mathcal{E} & & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \\
& & \parallel & & \downarrow \phi & & \downarrow \text{pr}_1 \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} & \longrightarrow & (\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^* & \longrightarrow & \mathcal{F} \longrightarrow 0
\end{array}$$

右の縦の射は合成すると恒等射. したがって左の四角形は pushout diagram. pushout の一意性から一意性から $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^* \cong \Delta^*\mathcal{E}$.

このことから求める同型が得られる.

$$\begin{aligned}
g_*\mathcal{E} + g'_*\mathcal{E} &= \nabla_*(g_*\mathcal{E} \oplus g'_*\mathcal{E})\Delta^* \\
&= \nabla_*(g \oplus g')_*(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^* \\
&= (\nabla_*(g \oplus g')_*\Delta_*)\mathcal{E} \\
&= (\nabla \circ (g \oplus g') \circ \Delta)_*\mathcal{E} \\
&= (g + g')_*\mathcal{E}.
\end{aligned}$$

(2 つめの等号は自明.)

補題 4.7

$\mathcal{F}, \mathcal{G} :: \mathcal{O}_X$ -modules on ringed scheme $:: X$ とする. この時, $E(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ には加法群の構造が定まる.

(証明). $0_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}$ が Bear sum についての単位元である:

$$\mathcal{E} + 0 = \text{id}_*\mathcal{E} + 0_*\mathcal{E} = (\text{id} + 0)_*\mathcal{E} = \text{id}_*\mathcal{E} = \mathcal{E}.$$

$-\mathcal{E}$ が逆元である:

$$\mathcal{E} + (-\mathcal{E}) = \text{id}_*\mathcal{E} + (-\text{id})_*\mathcal{E} = (\text{id} - \text{id})_*\mathcal{E} = 0_*\mathcal{E} = 0.$$

演算 $+$ は可換:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}' = \nabla_*(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}')\Delta^* = \nabla_*(\mathcal{E}' \oplus \mathcal{E})\Delta^* = \mathcal{E}' + \mathcal{E}.$$

結合律が成り立つ:

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + \mathcal{E}_3 \\
&= \nabla_*((\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \oplus \mathcal{E}_3)\Delta^* \\
&= \nabla_*(\nabla \oplus \text{id})_*((\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2) \oplus \mathcal{E}_3)(\Delta \oplus \text{id})^*\Delta^* \\
&= \nabla_*(\text{id} \oplus \nabla)_*(\mathcal{E}_1 \oplus (\mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{E}_3))(\text{id} \oplus \Delta)^*\Delta^* \\
&= \nabla_*(\mathcal{E}_1 \oplus (\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3))\Delta^* \\
&= \mathcal{E}_1 + (\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3).
\end{aligned}$$

補題 4.8

全単射 $\Phi : E(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ は加法群の間の同型である.

(証明). 最初に次のことに注意する: $f + f' = \nabla \circ (f \oplus f') \circ \Delta$. したがって $\text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ の加法は次のように定まる.

$$+ : \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^{\oplus 2} = \text{Hom}(\mathcal{F}^{\oplus 2}, \mathcal{G}^{\oplus 2}) \xrightarrow{(\circ \Delta)} \text{Hom}(\mathcal{F}^{\oplus 2}, \mathcal{G}) \xrightarrow{(\nabla \circ)} \text{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

ここから $\text{Ext}^1(-, \mathcal{G})$ の間の射が誘導され, それぞれ ∇_*, Δ^* に対応することを見る. (TODO) ■

5 First Order Deformation of a Local Complete Intersection.

この節は 5.15 を証明するための必要最低限の定義と命題のまとめである. 元の命題と比較して, このノートでは X を \mathbb{C} 上のものに限定し, defoemation も一般の local artinian ring ではなく $D = \mathbb{C}[\epsilon]$ に限定している. したがって formal deformation([9] 6.1), abstract lifting([9] 4.2), first order deformation が一致している.

以下, この節では X を以下のようなものとする ([9] Hypotheses 4.1). この条件を (\dagger) と呼ぶ.

- flat,
- generically smooth,
- local complete intersection,
- finite type

scheme over \mathbb{C} .

特に stable curve over \mathbb{C} はこれらの条件を満たす.

“local complete intersection”の定義を改めて書き下しておく.

定義 5.1 ((local) complete intersection [9] p.21, [3] p.185)

X :: scheme of finite type over \mathbb{C} が complete intersection であるとは次が成立すること: X は P :: smooth scheme over \mathbb{C} ([3] III.10) に埋め込まれ, さらに ideal sheaf :: $\ker(X \hookrightarrow P)$ が $\text{codim}(P, X)$ 個の global section で生成されること ([3] p.121).

X :: scheme of finite type over \mathbb{C} が locally complete intersection であるとは \mathcal{U} :: open covering of X が存在し, 任意の $U \in \mathcal{U}$ が complete intersection であること.

議論は, $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$, $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$, $e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ の対応の連鎖である. これらはいずれも first order deformations :: $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ の「差」を表現する量である. ここでの「差」の意味を理解するには, 最初に命題 (5.11), (5.12) のステートメントを見るのが良い. そして自明な first order deformation of X :: $X \times D$ と与えられた first order deformation の「差」である $e(\mathcal{X}, X \times D)$ によって first order deformation of X を分類する (定義 5.14).

定義 5.2

\mathcal{M} :: flat scheme of finite type over D とし, $M = \mathcal{M}_0$ (fiber of $\mathcal{M} \rightarrow \text{Spec } D$ at 0) とする. $X \subseteq M$ に対し, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{M}$ であるような deformation of X :: \mathcal{X} を, X の embedded deformation (in \mathcal{M}) と呼ぶ.

X :: affine scheme of finite type over \mathbb{C} とすると, 明らかに $X \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$:: closed embedding が存在する. \mathcal{X} :: first order deformation of X も補題 (3.1) より affine scheme of finite type over D . したがって (\dagger) を満たすならば

定理 5.3

$X \subseteq M$ が (\dagger) を満たす時, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{M} ::$ first order deformation of X も local complete intersection である.

5.1 $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

定義 5.4

$X ::$ **complete intersection** over \mathbb{C} embedded in P とする. この ideal sheaf を $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_P$ とする. $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 ::$ first order deformation of X とすると, $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1 ::$ embedded in P となる. そこで ideal sheaf をそれぞれ $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{O}_P$ とする. first order deformation of X の定義から, $\mathcal{I}_i/\epsilon\mathcal{I}_i \cong \mathcal{I}$ ($i = 1, 2$).

写像 $\mathcal{I} \rightarrow (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ を以下のように定める. まず, $\langle U, f \rangle \in \mathcal{I}$ に対し,

$$\langle U, \tilde{f}_i \rangle \bmod \epsilon\mathcal{I}_i = \langle U, f \rangle \quad (i = 1, 2)$$

となる $\langle U, \tilde{f}_i \rangle$ が存在する. そこで

$$\langle U, f \rangle \mapsto \langle U, \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 \rangle \bmod (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{I} \in (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_P/\mathcal{I}) = (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$$

と写す. これは \tilde{f}_i のとり方に依らず, well-defined. この写像を $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1)$ と書く.

以下の \mathbb{C} -module としての同型があるため, $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ を以下のいずれの集合の元ともみなす.

$$\begin{aligned} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{I}, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \\ & \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \\ & \cong H^0(X, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\wedge) \\ & \cong (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\wedge) \\ & \cong H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\wedge) \end{aligned}$$

命題 5.5 ([9] Prop2.8a,b,c,d,e)

$P' ::$ flat scheme of finite type over D , $P = P'_0$, $X ::$ **complete intersection** embedded in P とする.

- (a) $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = 0 \iff \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$.
- (b) $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) + \nu(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) = \nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3)$.
- (c) $\nu(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1) = -\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.
- (d) 任意の $\mathcal{X} ::$ first order deformation of X , 任意の $\nu \in H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^\wedge)$ に対し, $\mathcal{Y} ::$ first order deformation of X が存在して, $\nu = \nu(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ となる.
- (e) $U ::$ open subset of X について, $\nu(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U) = \nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)|_U : (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)|_U \rightarrow (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$.

(証明). (d) のみ証明する. 他は自明であろう.

$\mathcal{I} ::$ ideal sheaf of X , $\mathcal{I}' ::$ ideal sheaf of \mathcal{X} とし, sheaf of ideal $:: \mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_{P'}$ を次のように定める. ただし $\mathcal{I}_P = \ker(P \hookrightarrow P')$. sheaf の section は全て open subset in $P' :: U$ 上のものである. (これが sheaf of ideal であることは自明.)

$$\mathcal{J} = \{ \tilde{f}' \in \mathcal{O}_{P'} \mid \tilde{f}' \bmod \epsilon\mathcal{I}_P =: f \in \mathcal{I} \text{ and } \exists f' \in \mathcal{I}', (f' - \tilde{f}') \bmod \epsilon\mathcal{I} = v_U(f) \}$$

\mathcal{J} で定まる P の subscheme $:: \mathcal{Y}$ が X の deformation であることを示す. これは自然な全射 $(\times \epsilon) : \mathcal{J}/\epsilon\mathcal{J} \rightarrow \epsilon\mathcal{J}$ が単射 (したがって同型) であることを示せば良い ([9] Lemma 2.6). (TODO) ■

5.2 $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

補題 5.6

$X ::$ **complete intersection** over \mathbb{C} embedded in P とし, ideal sheaf は $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_P$ であるとする. この時, $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 ::$ locally free sheaf of rank $n := \dim X$.

(証明). local な問題なので, $x \in X \subset P$ での $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ の stalk が free module であることを示す. $A := \mathcal{O}_{P,x}$ とし, $I := \mathcal{I}_x$ を生成する regular sequence を x_1, \dots, x_r とする. [2] Lemma A.6.1 より (この文献の証明は同値な命題 [6] Thm16.2 のものより美しい), graded ring として $(A/I)[t_1, \dots, t_r] \cong \bigoplus_{d \geq 0} (I^d/I^{d+1})$. 1 次成分の同型から $(A/I)^{\oplus r} \cong I/I^2$. ■

補題 5.7 (First Fundamental Exact Sequence)

$X ::$ **complete intersection** over \mathbb{C} embedded in P とし, ideal sheaf は $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_P$ であるとする. この時, 以下は exact.

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{d} (\Omega_{P/\mathbb{C}})|_X \longrightarrow \Omega_{X/\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

すなわち, $(\Omega_{P/\mathbb{C}})|_X ::$ extension of $\Omega_{X/\mathbb{C}}$ by $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$.

(証明). よく知られている通り, 最初の射が単射であることを示しさえすれば良い.

$\mathcal{K} = \ker d$ とすると, $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. したがって $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ 同様 \mathcal{K} も locally free. 一方, [3] ThmII.8.17(2) の証明より d は irreducible point の近傍で injective. したがって $\text{Supp } \mathcal{K} ::$ support of \mathcal{K} は $\text{Sing } X :: X$ の singular points である. X についての仮定からこれは離散集合で, すなわち開集合を含まない. もし $\mathcal{K}_x \neq 0$ ならば, \mathcal{K} は trivialization open cover を持たないので, $\mathcal{K} ::$ locally free に反する. よって $\mathcal{K} = \ker d = 0$. ■

定義 5.8

$U \subseteq X ::$ **complete intersection** over \mathbb{C} embedded in P とする. $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 ::$ first order deformation of X について,

$$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U) := \nu(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U)_* ((\Omega_{P/\mathbb{C}})|_U) = (\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)|_U)_* ((\Omega_{P/\mathbb{C}})|_U)$$

を extension of $\Omega_{U/\mathbb{C}}$ by $(\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$ として定める.

補題 5.9

$U \subseteq X ::$ **affine complete intersection** over \mathbb{C} embedded in P とする. この時 $X ::$ finite type over \mathbb{C} なので $U \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n ::$ closed embedding が存在する. $\mathcal{U} ::$ first order deformation of U ^{†4} について, $U \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ の拡張 $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathbb{A}_D^n$ が存在する.

(証明). [9] Lemma 4.8. ■

補題 5.10

$U \subseteq X ::$ **affine complete intersection** over \mathbb{C} embedded in P とする. $P_1, P_2, P_3 ::$ nonsingular affine scheme over \mathbb{C} と $U \hookrightarrow P_i$ が与えられているとする. $\mathcal{P}_i = P_i \times_{\mathbb{C}} D$ への U の lifting (first order deformation) $:: \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{P}_i$ を任意にとり, 対応する extension of $\Omega_{U/\mathbb{C}}$ by $(\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$ を \mathcal{E}_i とする.

^{†4} 補題 (3.1) よりこれも affine.

この時同型 $\alpha_{j,i} : \mathcal{E}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_j$ が存在し, cocycle condition $:: \alpha_{1,3} = \alpha_{1,2} \circ \alpha_{2,3}$ が成立する.

(証明). [9] p.24. ■

したがって $\{U_i\} ::$ open affine, complete intersection covering of X について, $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1|_{U_i}, \mathcal{X}_2|_{U_i})$ の貼り合わせる事が出来^{†5}, こうして $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ を得る.

命題 5.11 ([9] Prop4.9a,b,c,f)

$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 ::$ first order deformations of X とする.

- (a) $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \cong 0_{\Omega_{X/\mathbb{C}}, (\epsilon D) \otimes \mathcal{O}_X}$.
- (b) $\mathcal{E}(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1) = -\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.
- (c) $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) + \mathcal{E}(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) \cong \mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3)$.
- (d) 任意の $\mathcal{E} ::$ extension of $\Omega_{X/\mathbb{C}}$ by $(\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ と任意の $\mathcal{X} ::$ first order deformation of X に対し,

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

なる $\mathcal{Y} ::$ first order deformation of X が存在する.

(d) を命題 (5.12) の後に証明する. 他は命題 (5.5) の対応する命題と補題 (4.6) から得られる.

命題 5.12 ([9] Prop3.9, Prop4.10) (a) $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 ::$ first order deformation of X とする. この時, splittings of

$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ と isomorphisms $:: \mathcal{X}_1 \cong \mathcal{X}_2$ の間に一対一対応がある. さらにこの対応を通して, extensions の加法と同型の合成が対応する^{†6}.

- (b) また, $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 ::$ extension of sheaves とする. この時 splittings of $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ と isomorphisms $:: \mathcal{E}_1 \cong \mathcal{E}_2$ の間に一対一対応がある.

命題 (5.11)(d) の証明. まず $\{X_\alpha\}_\alpha$ を X の affine open cover とし, $\mathcal{X}_\alpha = \mathcal{X}|_{X_\alpha}$ とおく. $\mathcal{X} ::$ finite type over \mathbb{C} なので, うまく cover を取れば $\mathcal{X}_\alpha \hookrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ が存在するように出来る. この embedding に対応する conormal bundle of X_α を \mathcal{C}_α とする. すると以下の SES が存在する.

$$E : 0 \longrightarrow \mathcal{C}_\alpha \longrightarrow \Omega_{\mathbb{A}^{n_\alpha}}|_{X_\alpha} \longrightarrow \Omega_{X_\alpha} \longrightarrow 0$$

この extension を $E := \Omega_{\mathbb{A}^{n_\alpha}}|_{X_\alpha}$ と略す. ここから Ext の LES が誘導される.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_\alpha}}(\mathcal{C}_\alpha, (\epsilon D) \otimes \mathcal{O}_{X_\alpha}) \xrightarrow{d_E} \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X_\alpha}}^1(\Omega_{X_\alpha}, (\epsilon D) \otimes \mathcal{O}_{X_\alpha}) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{X_\alpha}}^1(\Omega_{\mathbb{A}^{n_\alpha}}|_{X_\alpha}, (\epsilon D) \otimes \mathcal{O}_{X_\alpha}) = 0$$

右の $= 0$ は [3] Prop III.6.7, Prop III.6.3, Thm III.3.7 から得られる. したがって $d_E :: \mathrm{surj}$.

なので定理 (4.2) より, $f_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \rightarrow (\epsilon D) \otimes \mathcal{O}_{X_\alpha}$ と同型 $(f_\alpha)_* E \cong \mathcal{E}|_{X_\alpha}$ が存在する. 一方命題 (5.5) より, $f_\alpha = \nu(\tilde{\mathcal{X}}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ を満たす first order deformation of $X_\alpha :: \tilde{\mathcal{X}}_\alpha \subseteq \mathbb{A}_D^{n_\alpha}$ が存在する.

こうして得られる $\{\mathcal{X}_\alpha\}_\alpha$ を貼り合わせる. 証明には命題 (5.12) を利用する. (TODO) ■

^{†5} 次のことに注意して上の二つの補題を使う: restriction of sheaves to open subset は left adjoint functor であるから, pushout of extensions (colimit) を保つ, よって $V \subseteq U$ について

$$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U)|_V \cong (\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)|_V)_*(\Omega_{P/\mathbb{C}}|_V) \cong \nu(\mathcal{X}_1|_V, \mathcal{X}_2|_V)_*(\Omega_{P/\mathbb{C}}|_V).$$

^{†6} すなわち $\phi_1 : \mathcal{X}_1 \cong \mathcal{X}_2, \phi_2 : \mathcal{X}_2 \cong \mathcal{X}_3$ について, $\phi_2 \phi_1 : \mathcal{X}_1 \cong \mathcal{X}_3$ は $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3)$ に対応する.

5.3 $e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

定義 5.13

$T^i(X) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^i(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ とおく. $\mathcal{X} ::$ first order deformation of X に対し,

$$e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in \text{Ext}^1(\Omega_{X/\mathbb{C}}, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \cong (\epsilon D) \otimes T^1(X) \cong T^1(X) \cong \text{Hom}((\epsilon D)^*, T^1(X))$$

を, $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ に対応する元とする (4.2).

補題 (4.8) より, 命題 (5.11), (5.12) と同様の命題が $e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ についても性質する.

定義 5.14 (Kodaira-Spencer class/map, [9])

$T^i(X) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^i(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ とおく. $\mathcal{X} ::$ first order deformation of X に対し,

$$k_{\mathcal{X}} = e(\mathcal{X}, X \times D) \in T^1(X) \cong \text{Hom}((\epsilon D)^*, T^1(X))$$

とおく. この $k_{\mathcal{X}}$ を Kodaira-Spencer class of \mathcal{X} と呼ぶ. 対応する写像 $K_{\mathcal{X}} : (\epsilon D)^*, T^1(X)$ を Kodaira-Spencer map of \mathcal{X} と呼ぶ.

5.4 Complete Classification.

定理 5.15

First order deformation of X の同値類と $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ の元は一対一に対応する. (cf. [9] Prop 6.12)

(証明). 命題 (5.11), (5.12) より, $\mathcal{X} \mapsto k_{\mathcal{X}}$ がこの対応を与えることは明らか. ■

系 5.16

$X ::$ nonsingular and have finite dimention ならば, First order deformation of X の同値類と $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元は一対一に対応する.

(証明). 仮定より, $\Omega_{X/\mathbb{C}} ::$ locally free sheaf of finite rank. したがって [3] PropIII.6.7, Prop II.6.3 から次の同型が成立する.

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_X \otimes \Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X) \cong \text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(\mathcal{O}_X, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{O}_X) \cong H^1(X, \mathcal{T}_X)$$

■

6 Two Examples of Other Deformation Theories

deformation theory の対象は scheme の他にもある. 例えば, 次の二つがある.

Deformation of a coherent sheaf $:: F$ on a scheme X , over a fixed scheme

$\mathcal{X} ::$ deformation of X over (S, s_0) とする. deformation of F over X とは, $\mathcal{F} ::$ flat coherent sheaf on \mathcal{X} と homomorphism $:: \phi : \mathcal{F} \rightarrow F$ の組であって, 誘導される射

$$\phi \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} 1_{\mathcal{O}_X} : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{O}_X \rightarrow F$$

が同型であるもの. (ref. [4] §7, p.53)

Deformation of a map $f : X \rightarrow Y$ with both X and Y fixed

$X, Y ::$ scheme, $(S, s_0) :: \mathbb{C}$ -pointed scheme, $f : X \rightarrow Y ::$ morphism とする. Deformation of a map $f : X \rightarrow Y$ with both X and Y fixed とは morphism $:: \bar{f} : X \times S \rightarrow Y \times S$ であって, $\bar{f}|_{X \times \{s_0\}} = f$ であるもの. (ref. [5]p.93)

それぞれ, first order deformation が成す空間が分かっている.

定理 6.1 ([4] Thm2.7)

$X ::$ scheme over \mathbb{C} , $F ::$ coherent sheaf on X とする. この時, F の first order deformation とは, $\mathcal{F} ::$ coherent sheaf on $\mathcal{X} = X \times_{\mathbb{C}} D$ と homomorphism $:: \phi : \mathcal{F} \rightarrow F$ の組であって誘導される射 $\phi \otimes_D 1_{\mathbb{C}} : \mathcal{F} \otimes \mathbb{C} \rightarrow F$ が同型であるものとする.

この時, first order deformation of F over \mathcal{X} の同型類と $\text{Ext}_{\mathcal{O}_X}^1(F, F)$ の元とが, 一対一対応する.

系 6.2 ([4] Prop2.6)

上の定理で F を invertible sheaf に限定すると, first order deformation of F over $\mathcal{X} = X \times D$ の同型類は $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の元と一対一対応する.

(証明). 系 (5.16) の証明と全く同様. ■

定理 6.3

$X, Y ::$ fixed scheme, $f : X \rightarrow Y$ をとる. この時, first order deformation of a map f with both X and Y fixed の同型類と, $H^0(X, f^* \mathcal{T}_Y)$ の元とが一対一対応する.

こちらについては詳しい文献が見つからない. しかし, “Deformation of a map $f : X \rightarrow Y$ with only Y fixed” については, 解析的な場合について [1] §8 で述べられている.

7 Functor of Artin Rings - Abstract Deformation Theory

3つの圏を次のように定める. $L ::$ local noetherian \mathbb{C} -algebras with residue field \mathbb{C} とする.

$(\text{LA})_L$: the category of local artinian L -algebras with residue field \mathbb{C} .

$(\text{CLN})_L$: the category of complete local noetherian L -algebras with residue field \mathbb{C} .

$(\text{LN})_L$: the category of local noetherian L -algebras with residue field \mathbb{C} .

$L = \mathbb{C}$ の時は添字を略す. (ref. [8] p.1)

$(\text{LA})_L \subset (\text{CLN})_L \subset (\text{LN})_L$ という包含関係があることに注意.

定義 7.1 ([8] §2.2)

以下のような functor を functor of artin rings と呼ぶ.

$$F : (\mathrm{LA})_L \rightarrow (\mathrm{Sets}).$$

ここで $L \in (\mathrm{CLN})$.

$F(\mathbb{C})$ が 1 元集合 (singleton) ならば, F は特に predeformation functor と呼ばれる.

F が functor

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{CLN})_L}(R, -) \quad R \in (\mathrm{CLN})_L$$

と同型である時, $F :: \text{prorepresentable}$ と言う.

定義 7.2 ([8] §2.2)

(TODO)

predeformation functor $:: F$ が (semi)universal formal element を持つか, ということについては, 以下の定理が大変有用である. 逆に以下の定理が predeformation functor を考える重要性を示している.

定理 7.3 ([8] Thm 2.3.2, p.56)

(TODO)

参考文献

- [1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, and Phillip Griffiths. *Geometry of Algebraic Curves: Volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 2011 edition, 4 2011.
- [2] William Fulton. *Intersection Theory*. Springer, 2nd ed. 1998 edition, 7 1998.
- [3] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.
- [4] Robin Hartshorne. *Deformation Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2010 edition, 12 2009.
- [5] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.
- [6] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge University Press, revised edition, 5 1989.
- [7] David Mumford Pierre Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.
- [8] Edoardo Sernesi. *Deformations of Algebraic Schemes (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 11 2010.
- [9] Angelo Vistoli. The deformation theory of local complete intersections. <https://arxiv.org/abs/alg-geom/9703008>.
- [10] 志甫淳. 層とホモロジー代数 (共立講座 - 数学の魅力). 共立出版, 1 2016.