

定義 0.1. 写像 $F : M \rightarrow N$ が滑らかな写像とは、各点 $x \in M$, x の周りの座標近傍 (U, ϕ) , $F(x)$ の周りの座標近傍 (V, ψ) について、 $\psi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ が C^∞ 級であること.

定義 0.2. 多様体 M のアトラスを \mathcal{A} とする.

$$\begin{aligned} C^\infty(M) &= \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ is smooth.}\} \\ &= \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x \in M, \exists (U, \phi) \in \mathcal{A}, [x \in U] \wedge [f \circ \phi^{-1} \text{ is smooth.}]\}. \end{aligned}$$

$a \in M$ に対し、この部分空間 $Z_a(M)$ を以下で定める.

$$\begin{aligned} Z_a(M) &= \{f \in C^\infty(M) \mid f \text{ の } a \text{ での微分が } 0.\} \\ &= \{f \in C^\infty(M) \mid \exists (U, \phi) \in \mathcal{A}, [a \in U] \wedge [(D(f \circ \phi^{-1}))_{\phi(a)} = \mathbf{0}]\}. \end{aligned}$$

そして $T_a^*(M) = C^\infty(M)/Z_a(M)$, $T_a(M) = \text{Hom}_{\mathbb{R}\text{-Vec}}(T_a^*(M), \mathbb{R})$ とおく.