1 アフィン曲線

1.1 アフィン空間

定義 1 (アフィン空間 (大雑把な定義)). 体 k について、

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n_k = k^n$$

を k 上の n 次元アフィン空間 (Affine space) と呼ぶ。

1.2 アフィン曲線

定義 2. $f \in k[x,y] - 0$ に対して、その零点集合

$$C = Z(f) = \{p \in \mathbb{A}^2 | f(p) = 0\}$$

をアフィン曲線と呼ぶ。この曲線 C を他には

$$C : f = 0 \text{ in } \mathbb{A}^2$$

と書く。

他に次の用語を導入する。

C の定義多項式: f

C の定義方程式: f=0

f の $k[x,y]$ に於ける既約分解を以下のようにする。

$$f = cf_1^{e_1} \cdots f_i^{e_i} \cdots f_n^{e_n}$$
$$(c \in k,\ f_i : k[x,y] \text{ の既約元},\ e_i \geq 1)$$

このとき、$C = \cup_{i=1}^n Z(f_i)$ となる。

証明.

$$\begin{aligned} & p \in C \\ \iff & f(p) = 0 \\ \iff & c \prod f_i(p) = 0 \end{aligned}$$

k は整域なので、

$$\begin{aligned} \iff & \exists i, f_i(p) = 0 \\ \iff & \exists i, p \in Z(f_i) \\ \iff & p \in \cup_{i=1}^n Z(f_i) \end{aligned}$$

∎

このようにして得られた $C_i = Z(f_i)$ 達を C の既約成分、$C = \cup C_i$ を C の既約分解と呼ぶ。また、f が既約多項式の時は C を既約曲線と呼ぶ。$\deg C = \deg f$ とし、$d = \deg f$ の時には C を d 次曲線と呼ぶ。

1.2.1 重複度

以下、$C: f=0$ in $\mathbb{A}^2$ とする。今、

$$f=\sum_{i,j} a_{ij}x^iy^j \ (a_{ij}\in k)$$

とする。$p_0=(a,b)\in\mathbb{A}^2$ について、

$$x=(x-a)+a, y=(y-b)+b$$

を代入して $(x-a),(y-b)$ についてまとめると、f は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} f_k &= \sum_{i+j=k} c_{ij}(x-a)^i(y-b)^j \\ f &= \sum_k f_k \end{aligned}$$

この表示を f の p_0 におけるテイラー展開と呼ぶ。

1.2.2 偏微分

一般の体 k について偏微分を定義できる。ここでは $\mathbb{A}^n$ を考える。

定義 3 (偏微分)**.**

$$f=\sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1\ldots i_n}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\in k[x_1,\ldots,x_n]$$

に対して、f の偏微分を、

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\sum i_j\cdot a_{i_1\ldots i_n}(x_1^{i_1}\cdots x^{i_j-1}\cdots x_n^{i_n})$$

と定義する。

標数 0 の体については、次が成り立つ。

$$c_{i_1\ldots i_n}=\frac{1}{i_1!\ldots i_n!}f_{x_{i_1}^{i_1}\cdots x_{i_n}^{i_n}}(p_0)=\frac{1}{i_1!\ldots i_n!}\frac{\partial^{i_1+\cdots+i_n}f}{\partial x_{i_1}^{i_1}\ldots\partial x_{i_n}^{i_n}}(p_0)$$

ただし $c_{i_1\ldots i_n}$ は f を $(x_1-p_0^{(1)}),(x_2-p_0^{(2)}),\ldots$ の多項式として表した時の係数であることに注意。特に $n=2$ の時は次のよう。

$$c_{i_1\ldots i_n}=\frac{1}{i!j!}f_{x^iy^j}(p_0)=\frac{1}{i!j!}\frac{\partial^{i+j}f}{\partial x^i\partial y^j}(p_0)$$

1.3 接線と特異点

点 $p_0 := (a,b)$ とおく。他の点は p で表す。

定義 4 (C の p に於ける重複度)**.** $m_p(C) = \min\{k : f_k(p) \neq 0\}$

$m = m_p(C)$ のとき、p を C の m 重点と呼ぶ。
再び 2 次元アフィン空間を考える。$f_0 = c_{00} = f(p)$ から、

$$m_p(C) > 0 \iff f(p) = 0 \iff p \in C$$

が成り立つ。
$p = (x,y) \in C$ とする。

$$f_1(p) = f_x(p_0)(x-a) + f_y(p_0)(y-b) = c_{01}(x-a) + c_{10}(y-b)$$

よって、

$$m_p(C) = 1 \iff f_1(p) \neq 0 \iff f_x(p) \neq 0 \text{ or } f_y(p) \neq 0$$

。

定義 5 (単純点と特異点)**.** $m_p(C) = 1$ の時 p を C の単純点、$m_p(C) > 1$ の時 p を C の特異点と呼ぶ。

単純点 p における C の接線は定義方程式 $f_1 = 0$ で定められる。これを

$$T_p(C) = Z(f_1) \subset \mathbb{A}^2$$

と書く。
p が特異点の時はどうだろうか。以下では $m = m_p(C) \geq 2$ とする。このとき、

$$f = \underbrace{f_0 + \cdots + f_{m-1}}_{=0} + f_m + f_{m+1} + \ldots$$

となっている。実は k が代数閉体ならば、f_m は次のように x, y の一次式の積に分解される（後に示す）。つまり、

$$f_m(x) = \prod_{i=1}^{e} (\alpha_i(x-a) + \beta_i(y-b))^{m_i}$$

$$\alpha_i, \beta_i \in k,\ m_i \geq 1,\ \sum_{i=1}^{e} m_i = m$$

と表すことが出来る。α_i, β_i は単数倍で等しいものをまとめられるので、

$$\begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \alpha_j & \beta_j \end{vmatrix} \neq 0\ (i \neq j)$$

として良い（？）。
この時、e 本の直線 $\alpha_i(x-a) + \beta_i(y-b) = 0$ を p における C の接線とする。また、m_i をその重複度と呼ぶ。

定義 6. $m = e$ (i.e. $\forall i, m_i = 1$) の時、p を C の通常特異点 (ordinary singular point) と呼ぶ。通常 2 重点を結節点と呼ぶ。

1.4　斉次多項式

k を体とする。$f \in k[X_1, \dots, X_n] = k[\mathbb{X}]$ は、

$$f = \sum c_{i_0 \dots i_n} X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n} = \sum c_{\mathbb{I}} \mathbb{X}^{\mathbb{I}} \ (\mathbb{I} = (i_0, \dots, i_n))$$

と表される。$\mathbb{X}^{\mathbb{I}}$ を単項式、$|\mathbb{I}| = i_0 + \cdots + i_n$ をその次数と呼ぶ。$f(\neq 0)$ のに現れる次数が全て等しい時、f を斉次多項式と呼ぶ。

$$f = \sum_{d \geq 0} \left(\sum_{|\mathbb{I}|=d} c_{\mathbb{I}} \mathbb{X}^{\mathbb{I}} \right)$$

() 内を f_d と置けば $f = \sum_{d \geq 0} f_d$ となる。f_d はそれぞれ d 次の斉次多項式。そこで、この表示を f の斉次分解と呼ぶ。

次の補題は 2 次斉次多項式と 1 変数多項式が同型であることを言っている。

補題 7. $F(x, y) \in k[x, y]$ を d 次の斉次多項式とする。$f(t) = F(1, t) \in k[t]$ とおくと、以下が成り立つ。

$$F(x, y) = x^d f(\frac{y}{x})$$

証明.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sum a_{ij} x^i y^j \\ f(t) &= \sum a_{ij} t^j \\ f\left(\frac{y}{x}\right) &= \sum a_{ij} x^{-j} y^j \end{aligned}$$

$F(x, y)$ は d 次の斉次多項式だから $i + j = d$。よって、

$$x^d f\left(\frac{y}{x}\right) = \sum a_{ij} x^i y^j$$

∎

命題 8. $F(x, y) \in k[x, y]$ を d 次の斉次多項式とする。k が代数的閉包の時、$F(x, y)$ は次の形に分解される。

$$f_m(x) = \prod_{i=1}^{e} (\alpha_i (x - a) + \beta_i (y - b))^{d_i}$$

$$(\alpha_i, \beta_i \in k, \ d_i \geq 1, \ \sum_{i=1}^{e} d_i = d)$$

証明. $f(t) = F(1, t)$ とおく。$\bar{k} = k$ だから、$f(t)$ は一次式に分解される。

$$f(t) = c \prod_{i=1}^{l} (t - \gamma_i)$$

$$(\gamma_i \in k, c \in k^{\times})$$

ただし $l=\deg f$。先ほどの補題より、以下の様にして命題が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&F(x,y)\\
&\quad = x^d f\left(\frac{y}{x}\right)\\
&\quad = cx^d \prod_{i=1}^{l}\left(\frac{y}{x}-\gamma_i\right)\\
&\quad = cx^{d-l}\prod_{i=1}^{l}(y-\gamma_i x)\\
&\quad = (1\cdot x+0\cdot y)^{d-l}\prod_{i=1}^{l}\left(c^{\frac{1}{l}}y-c^{\frac{1}{l}}\gamma_i x\right)
\end{aligned}$$

∎

命題 9. $F(x,y)\in k[x,y]$ を d 次の斉次多項式とする。$(\lambda,\mu)\in k^2,(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ に対して、

$$F(\lambda,\mu)=0 \iff (\lambda y-\mu x)|F(x,y)$$

証明. ($\Longleftarrow$) は自明なので ($\Longrightarrow$) を示す。

λ,μ の両方が同時に 0 になることは無いので、$\lambda\neq 0$ とする。$\mu\neq 0$ としても以降の文字をただ置き換えれば証明が出来る。

$$\begin{aligned}
&F(\lambda,\mu)=0\\
\iff\ & \lambda^d F\left(1,\frac{\mu}{\lambda}\right)=0\\
\iff\ & f\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)=0\\
\iff\ & \exists g\in k[t]\ s.t.\ f\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)=\left(t-\frac{\mu}{\lambda}\right)g\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)\\
& \text{以下、行頭には } \exists g \text{ があると思え。補題から次が成り立つ。}\\
\iff\ & F(x,y)=x^d f(t)=x^d\left(\frac{y}{x}-\frac{\mu}{\lambda}\right)g\left(\frac{y}{x}\right)\\
\iff\ & F(x,y)=\frac{1}{\lambda}(\lambda y-\mu x)\cdot x^{d-1}g\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}$$

ここで、$\deg g=\deg f-1\leq \deg F-1=d-1$。よって $x^{d-1}g\left(\frac{y}{x}\right)\in k[x,y]$（$x$ の指数は全て 0 以上)。

∎

1.5 直線との交点数

$C=Z(f), f\in k[x,y]\setminus\{0\}, p=(a,b)\in C$ とする。p を通る直線 L に対して、C と L との p における交点数 $i(C,L;p)$ を以下のとおり定める。

定義 10. 直線 L のパラメータ表示を以下のようにおく。

$$L:(x,y)=(a+\lambda t, b+\mu t)$$
$$(\lambda,\mu\in k, (\lambda,\mu)\neq(0,0))$$

このとき、交点数 $i(C,L;p)$ は、次のよう。

$$i(C,L;p):=\operatorname{ord}_t f(a+\lambda t,b+\mu t):=\max\{d:t^d|f(a+\lambda t,b+\mu t)\}$$

$p\in L$ なので $i(C,L;p)\geq 1$。さらに、この定義は L のパラメータ表示によらないことが示せる。

命題 11. C を曲線、L を点 $p\in C$ を通る直線とする。

$$i(C,L;p)\geq m_p(C)$$

特に、次が成り立つ。

$$i(C,L;p)>m_p(C) \iff \text{L は p に於ける C の接線の一つ}$$

証明. 座標全体を平行移動して $p=(0,0)$ とする。このとき L のパラメータ表示は、

$$L:(x,y)=(\lambda t,\mu t)$$
$$(\lambda,\mu\in k, (\lambda,\mu)\neq(0,0))$$

となる。$m:=m_p(C)$ とおくと、p における f のテイラー展開は以下の様。

$$f=\sum_{k\geq m}\left(\sum_{i+j=k}c_{ij}x^iy^j\right)$$

L 上の点では、

$$\begin{aligned} f &= \sum_{k\geq m}x^k\left(\sum_{i+j=k}c_{ij}\lambda^i\mu^j\right)\\ &= \sum_{k\geq m}x^k f_k(\lambda,\mu)\end{aligned}$$

$k\geq m$ から、$i(C,L;p)\geq m$。さらに、$i(C,L;p)>m \iff f_m(\lambda,\mu)=0$ だから、斉次因数定理より次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & f_m(\lambda,\mu)=0\\ \iff & (\lambda y-\mu x)|f_m(\lambda,\mu)\\ \iff & Z(\lambda y-\mu x)\text{ は } f \text{ の接線の一つ（接線の定義を見よ）}\\ \iff & L \text{ は } f \text{ の接線の一つ}\end{aligned}$$

∎