1 Lemma 4.1

1.1 “We may assume that $Y \subset \mathbb{P}^n$ for some n”

affine, quasi-affine は $(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (1, a_1, \ldots, a_n)$ という写像で $\mathbb{P}^n$ へ埋め込める．この写像が同相写像であることは Prop 2.2 で示されているので，irreducible は反映される．

1.2 $\Delta = \mathcal{Z}_p(\{x_i y_j = x_j y_i\})$

$P, Q \in \mathbb{P}^n$ が $P = Q$ を満たすとき，以下が成り立つ．

$$^{\exists}\lambda \in k^{\times}, \quad ^{\forall}i, \quad p_i = \lambda q_i$$

なので $\lambda = p_j/q_j$ とすれば，分母を払って $p_i q_j = p_j q_i$ が得られる．最後の式は $q_j = 0$ でも成立する．

1.3 $(\phi \times \psi)(X) \subseteq \Delta$

$q = \phi \times \psi$ とすると，これは morphism なので連続．$q(U) \subseteq \Delta$ なので $U \subset q^{-1}(\Delta)$ が成り立ち，Δ が閉なので $q^{-1}(\Delta)$ も閉．U は X で dense なので

$$X = \mathrm{cl}_X(U) \subseteq \mathrm{cl}_X(q^{-1}(\Delta)) = q^{-1}(\Delta).$$

よって $q(X) = (\phi \times \psi)(X) \subseteq \Delta$.

2 $Y(\subseteq X)$ :: open affine subset, $K(X) \cong K(Y)$.

以下の同型写像がある．

$$\begin{array}{cccc} \kappa : & K(X) & \to & K(Y) \\ & \langle U, f\rangle & \mapsto & \langle U \cap Y, f\rangle \\ & \langle V, g\rangle & \leftarrow\!\shortmid & \langle V, g\rangle \end{array}$$

これが同型写像であることは，X が irreducible であることから来ている．Y が何らかの affine variety と同型であることから，$K(Y)$ は Them3.2 に従う．