# ゼミノート #4.5
# Fibered Categories, continued

七条彰紀

2018 年 11 月 25 日

## 1 Grothendieck Construction

今，fibered category から fiber として psuedo-functor を構成した．実はこの逆が出来る．

**定義 1.1** (Grothendieck Construction, [3], [2])
psuedo-functor :: $P\colon \mathbf{B} \to \mathbf{Cat}/\mathbf{B}$ について，以下のように圏 $\int P$ を定義する．

> Object. $b \in \mathbf{B}$ と $x \in P(b)$ の組 $(b, x)$.
> Arrow. $\phi\colon b \to b'$ と $\Phi\colon P(\phi)(x) \to x'$ の組 $(\phi, \Phi)$.

射の合成は $(\psi, \Psi) \circ (\phi, \Phi) = (\psi \circ \phi, \Phi \circ P(\psi)(\Phi))$ で与えられる．

この圏によって以下の関手が定まる．

$$\begin{array}{cccc} \displaystyle\int : & \left\{\begin{matrix}\text{psuedo-functor} \\ \mathbf{B} \to \mathbf{Cat}\end{matrix}\right\} & \to & \mathbf{Fib}(\mathbf{B}) \\ & P & \mapsto & \displaystyle\int P \end{array}$$

**例 1.2**
$\underline{S}$ は $\mathbf{Sch}/S$ に対応する．$F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$ は $\coprod_{c \in \mathbf{C}} F(c)$ に対応する．

**注意 1.3**
David I. Spivak “Category theory for scientists”によると，Grothendieck Construction を最初に構成したのは Grothendieck ではない．例えば MacLane が以前から扱っている．

**定理 1.4** (Grothendieck Construction give Category Equivalence)
Grothendieck Construction

$$\int : \left\{\begin{matrix}\text{psuedo-functor} \\ \mathbf{B} \to \mathbf{Cat}\end{matrix}\right\} \to \mathbf{Fib}(\mathbf{B})$$

は圏同値である．

(証明). P. T. Johnstone “Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium vol.1 (Oxford Logic Guides 43)” に証明がある（この文献で言う cloven fibered category が我々の定義する fibered category である）． ∎

# 2 Category Fibered in Groupoids/Sets

## 2.1 Motivation

Category Fibered in Groupoids は「綺麗すぎる」fibered category であるが，我々が研究する範囲では珍しいものではない．

## 2.2 Definition

**定義 2.1** (Groupoid)
任意の射が同型射である圏を groupoid と呼ぶ．

**注意 2.2**
群は対象がただ一つで任意の射が同型であるものとみなせるため，groupoid にはこの名前がある．

群以外の極めて単純な groupoid として，集合を射が恒等射しかない圏（離散圏）とみなしたものがある．そのため，逆に恒等射しか無い圏も set と呼ぶ．

**定義 2.3** (Category fibered in groupoids/sets)
$\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．任意の $b \in \mathbf{B}$ について，$\pi$ の $b$ における fiber$\mathbf{X}(b)$ が groupoid (set) であるとき，$\mathbf{X}$ を category fibered in groupoids (sets) と呼ぶ．

category fibered in groupoids は次のように定義しても同値である．

**定義 2.4** (Category fibered in groupoid (Another Definition))
任意の射が cartesian である fibered category を category fibered in groupoids と呼ぶ．すなわち，以下の 2 条件が成立する圏 $\mathbf{X}$ と関手 $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ を category fibered in groupoids と呼ぶ．

(i) 以下の図式 (1) において，上の箱と下の箱が $\pi$ で対応し，下の箱にある図式が可換であるとする．この時，図式 (2) のように上の箱にある図式を可換にし，$\pi$ での対応を保つ射 $z \to x$ がただ一つ存在する．

(1)

in $\mathbf{X}$

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dr] & \\ x \arrow[rr] & & y \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} & \pi(z) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \pi(x) \arrow[rr] & & \pi(y) \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

(2)

in $\mathbf{X}$

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dl, "\exists_1"'] \arrow[dr] & \\ x \arrow[rr] & & y \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} & \pi(z) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \pi(x) \arrow[rr] & & \pi(y) \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

(ii) $y \in \mathbf{X}, u \to \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対し，以下の図式を満たす[†1]$x \in \mathbf{X}$ と射 $x \to y \in \mathbf{X}$が存在する．

$$\begin{tikzcd} \text{in } \mathbf{X} \\ x \arrow[r] & y \arrow[d, "\pi"] \\ u \arrow[r] & v \\ \text{in } \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

# 3 Splittings of fibered categories

（ここで扱おうと思ったが，今は扱うモチベーションがないので後回しにする．）

# 4 Fiber Product of Category Fibered in Groupoids

（ここで扱おうと思ったが，今は扱うモチベーションがないので後回しにする．）

# 5 Equivalence of Fibered Categories

Fibered category の一般論の最後に，この直後に扱うことと成る Equivalence を扱う．

この節では fibered categories :: $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}, \pi'\colon \mathbf{X}' \to \mathbf{B}$ と，これらの間の射 $g\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ を考える．

## 5.1 Definition

**定義 5.1** (Equivalence)

$g$ が equivalence of fibered categories であるとは，別の射 $h\colon \mathbf{X}' \to \mathbf{X}$ が存在し，$g \circ h, h \circ g$ がそれぞれ恒等関手と base-preserving isomorphic であるということである．

この時，$\mathbf{X} \simeq \mathbf{X}'$ と書き，$h$ は psuedo-inverse of $g$ と呼ばれる．

**注意 5.2**

比較すれば分かるとおり，equivalence of fibered categories は，通常の圏同値の定義に “base-preserving” という条件が追加されただけである．

## 5.2 Propositions

**命題 5.3**

fibered とは限らない圏 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ とその間の関手 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ について，$F$ が圏同値であることは以下の 2 条件が同時に成立することと同値．

[†1] すなわち，$\pi(x) = u, \pi(x \to y) = u \to \pi(y)$ を満たす．

Fully Faithfulness.

任意の $c, c' \in \mathbf{C}$ について，

関手 $F$ が与える class の対応 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), F(c'))$ は全単射である．

Essential Surjectivity.

任意の $d \in \mathbf{D}$ について，$F(c) \cong d$ となる対象 $c \in \mathbf{C}$ が存在する．

(証明). [1] Prop7.26 を参照せよ． ∎

**命題 5.4** ([3] Prop3.1.18, 3.1.10)
$b \in \mathbf{B}$ について，$g$ を $\mathbf{X}(b)$ に制限して得られる関手を $g_b \colon \mathbf{X}(b) \to \mathbf{X}'(b)$ とする．

(a) $g$ :: fully faithful $\iff$ 任意の $b \in \mathbf{B}$ について，$g_b$ :: fully faithful.

(b) $g$ :: equivalence $\iff$ 任意の $b \in \mathbf{B}$ について，$g_b$ :: equivalence.

(証明). (TODO) ∎

## 参考文献


[1] Steve Awodey. *Category Theory (Oxford Logic Guides)*. Oxford University Press, U.S.A., 2 edition, 8 2010.

[2] Behrang Noohi. A quick introduction to fibered categories and topological stacks. `http://www.maths.qmul.ac.uk/~noohi/papers/quick.pdf`.

[3] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.