

# ゼミノート #2

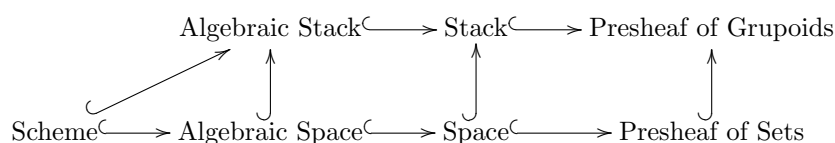
## Sites and Sheaves

七条彰紀

2018 年 10 月 26 日

### 1 Motivation.

scheme, stack 等には以下のような包含関係がある.



最終的にセミナーを通じて我々が定義したいのは algebraic stack であるが, 今回はそれよりも定義が簡素な “space” を定義する. 先に space の定義文を示そう.

**定義 1.1** (Space, [1] p.26)

$S :: \text{scheme}$  とする. Space over  $S$  (or  $S$ -space) とは, big etale site over  $S$  上にある, 集合の sheaf である.

ここに現れる “big etale site” と “big etale site 上の sheaf” を以下で定義する. さらに sheaf の射について幾つか定義をすれば, algebraic space まで定義できる.

定義だけでは space の local は性質を調べる手段がないため, 次回は「高次版の sheaf の貼り合わせ」と呼べる “Descent theory” を学ぶ.

### 2 Definitions : Sites.

以下で導入する Grothendieck topology は, 「Sheaf を定義するのに必要な位相空間の定義を抽出し, 圏論的に一般化したもの」である.  $X :: \text{topological space}$  とし, sheaf on  $X$  の定義を見なおしてみよう. すると, sheaf on  $X$  は次に挙げるもののみに用いて定義されていると分かる.

1.  $X$  の開部分集合と包含写像が成す圏.
2. 開部分集合  $U \subseteq X$  の open covering.
3. 同じく  $U$  の open covering  $:: \{U_i\}_i$  が与えられたときの族  $\{U_i \cap U_j\}_{i,j}$

そこで次のように定義する.

**定義 2.1** (Grothendieck Topology)

$\mathbf{C} :: \text{category}$  について、 $\mathbf{C}$  上の Grothendieck topology は任意の  $X \in \mathbf{C}$  に  $\mathbf{C}$  の射の集まり  $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  の集まり (collection of collections) を対応させる  $\text{Cov}$  で構成される。さらに、 $\text{Cov}$  は以下を満たすように要請される。

- (a)  $X' \rightarrow X :: \text{iso}$  ならば  $\{X' \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X)$ .
- (b)  $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U), V \rightarrow U \in \mathbf{C}$  について、 $\{U_i \times_U V \rightarrow V\} \in \text{Cov}(V)$ .
- (c)  $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \text{Cov}(U)$  をとり、さらに各  $i$  について  $\{V_{i,j} \rightarrow U_i\}_j \in \text{Cov}(U_i)$  をとる。  
この時、合成も  $\text{Cov}$  に入っている： $\{V_{i,j} \rightarrow U_i \rightarrow U\}_{i,j} \in \text{Cov}(U)$ .

## 注意 2.2

ここで「集合」ではなく「集まり」という言葉を用いたのは、これらが集合ではない可能性があるからである。この問題（圏論でもしばしば現れる）を取り扱うためには、2つの解決策がある。1つ目は Grothendieck の宇宙公理  $U$  を ZFC 公理系に加えた ZFCU 公理系で議論を行うことである。もう1つは真のクラスを扱える NBG 公理系で議論を行うことである。

後者の方針を採用する場合は、Grothendieck topology の定義で現れた「集まりの集まり」という言葉に注意が必要である。というのも、たとえ NBG 公理系でも、真のクラスを要素に持つ真のクラスは許されていないからである。この問題を解決するには以下のように  $\text{Cov}$  を定義すれば良い（以下のように書き換えれば良いという事がわかれば十分なので、実際に以下の定義を採用することはない）：

全ての  $U \in \mathbf{C}$  について  $\text{Cov}(U)$  は codomain が  $U$  である射のクラスである。任意の要素  $[V \rightarrow U] \in \text{Cov}(U)$  についてこの要素を含む  $\text{Cov}(U)$  の部分クラス  $\{U_i \rightarrow U\}_i \subset \text{Cov}(U)$  が存在し、以下が成立する。（以下略）。

$\text{Cov}$  の元には大抵、以下の条件が課される。

## 定義 2.3 ((Jointly) Surjective Family)

ある圏の射の集まり  $\{U_i \rightarrow U\}_i$  について、

$$\bigsqcup_i U_i \rightarrow U$$

が surjective である時、（同値な条件として、 $\text{im}(U_i \rightarrow U)$  の set-theoretic union が  $U$  に等しい時、）この集まり  $\{U_i \rightarrow U\}$  を (jointly) surjective family という。

## 定義 2.4 (Site)

圏  $\mathbf{C}$  と  $\mathbf{C}$  上の Grothendieck topology  $:: \text{Cov}$  の組を site と呼ぶ。site に対し、その部分である圏を the underlying category と呼ぶ。しばしば  $\text{Cov}$  を略して  $\mathbf{C}$  のみで site を表す。

## 定義 2.5 (Localized Site.)

site  $:: \mathbf{C}$  と  $X \in \mathbf{C}$  について、localized site  $:: \mathbf{C}/X$  を以下のように定義する。

$\mathbf{C}/X$  の underlying category は slice category  $:: \mathbf{C}/X$  である。したがって対象は  $\mathbf{C}$  内の  $X$  への射である。Grothendieck topology  $:: \text{Cov}$  は、

$$\{[U_i \rightarrow X] \rightarrow [U \rightarrow X]\}_i \in \text{Cov}([U \rightarrow X]) \implies \{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U).$$

のように定められる。

## 定義 2.6 (Diagrams (or Comma Site).)

$\Delta :: \text{category}$ ,  $\mathbf{C} :: \text{site}$ ,  $F: \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{C} :: \text{functor}$  とする. この時 site  $:: \mathbf{C}_F$  を以下のように定める.

まず underlying category は  $(\text{id}_{\mathbf{C}} \downarrow F)$  である. したがって対象は  $X \rightarrow F(\delta)$  ( $\delta \in \Delta$ ) である.  $\text{Cov}$  は以下のように定める.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X'_i & \xrightarrow{f_i^b} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\delta_i) & \xrightarrow{F(f_i)} & F(\delta) \end{array} \right\} \in \text{Cov}([X \rightarrow F(\delta)]) \implies f_i: \delta \rightarrow \delta_i :: \text{iso. and } \{f_i^b: X'_i \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X).$$

**定義 2.7** (Continuous Functor.)

$\mathbf{C}, \mathbf{C}' :: \text{sites}$  とする.  $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}' :: \text{functor}$  が continuous とは, 以下の 2 つが成立すること:

1. 任意の  $X \in \mathbf{C}$  と  $\{U_i \rightarrow X\}_i \in \text{Cov}_{\mathbf{C}}(X)$  について,

$$\{f(U_i) \rightarrow f(X)\}_i \in \text{Cov}_{\mathbf{C}'}(f(X))$$

となる.

2.  $\mathbf{C}$  の任意の射  $X_1 \rightarrow Y, X_2 \rightarrow Y$  について, fiber product  $:: X_1 \times_Y X_2$  が  $\mathbf{C}$  に存在するならば,

$$f(X_1 \times_Y X_2) \cong f(X_1) \times_{f(Y)} f(X_2).$$

**注意 2.8**

後に示すように, continuous functor はよくあるケースで category of sheaves on site の間の関手を誘導する. これは scheme の間の continuous map が category of sheaves on scheme の間の関手 (e.g. inverse image functor, direct image functor) を定めるのと同じである.

### 3 Examples : Sites.

#### 3.1 Site.

**例 3.1** (Classical topology.)

$X :: \text{topological space}$  とし,  $O(X)$  を以下のような圏とする.

対象  $X$  の開集合.

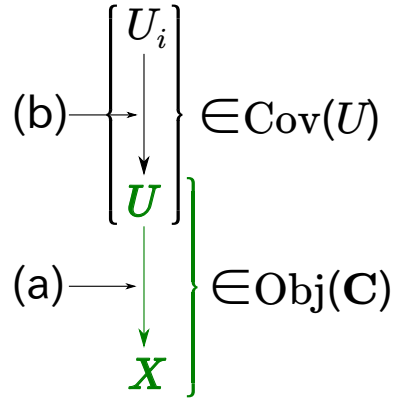
射 包含射.

この時,  $U \in O(X)$  の covering  $:: \text{Cov}(U)$  を,  $U$  への包含射のみから成る jointly surjective family の集合<sup>†1</sup> とする.

以上で定まる site  $:: (O(X), \text{Cov})$  は通常の topology を Grothendieck topology の枠組の中で再現している.

以下で主に用いるのは,  $\mathbf{C}$  が slice category  $:: \mathbf{Sch}/X$  ( $X \in \mathbf{Sch}$ ) の部分圏であるような site である.  $X \in \mathbf{Sch}$  に対して, このような site は underlying category ( $\subset \mathbf{Sch}/X$ ) と Grothendieck topology ( $\text{Cov}$ ) からなるから, 以下の図の (a)  $U \rightarrow X$ , (b)  $U_i \rightarrow U$  がどのようなものであるか定めれば定義できる.

<sup>†1</sup> 包含射の個数は高々  $2^{\#X}$  以下の濃度なので, family の集まりは集合.



すなわち，以下の未完成な定義文をテンプレートとする，一連の定義文の群がある．

**定義 3.2** (\*\* site)

$X :: \text{scheme}$  について，圏  $\mathbf{C}$  を以下で定める．

対象 (a) である射  $U \rightarrow X$ ．

射 二つの対象の間の射  $[U \rightarrow X] \rightarrow [U' \rightarrow X]$  は， $X$ -morphism  $:: U \rightarrow U'$ ．

$[U \rightarrow X] \in \mathbf{C}$  に対して， $\text{Cov}(U)$  を (b) である射の集まり  $\{U_i \rightarrow U\}_i$  であって jointly surjective family であるものの集まりとする．

以上の  $\mathbf{C}$  と  $\text{Cov}$  からなる site を \*\* site of  $X$  と呼ぶ．

Grothendieck topology の定義から分かるとおり，性質 (b) が stable under base change & composition

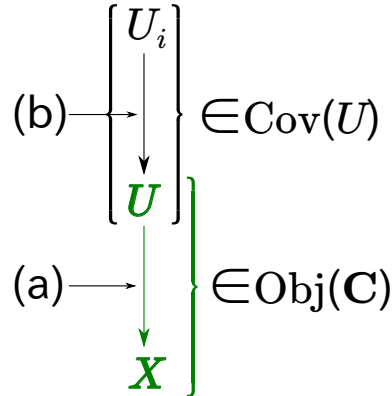
であれば、以上のテンプレートは site の定義文と成る.

### 定義 3.3

以上の定義文テンプレートを用いて, (a), (b) と各 site の定義を以下のように対応させる. (a) が “–” とある箇所は「 $\mathbf{Sch}/X$  の任意の射」を意味する. さらに, “open inclusion” は Zariski 開集合の間にある包含射のことである (したがって small Zariski site の underlying category には Zariski 開集合しか無い).

***	small Zariski	big Zariski	small etale	big etale
(a)	open immersion	–	etale	–
(b)	open immersion	open immersion	etale	etale
***	lissee-etale	smooth	fppf	fpqc
(a)	smooth	smooth	–	–
(b)	etale	smooth	flat&locally of finite presentation	flat&quasi-compact

図の再掲:



### 注意 3.4

“fppf” は “fidèlement plate de présentation finie” (仏語) すなわち “faithfully flat and of finite presentation” の略である. flat& locally of finite presentation ならば実際にこのように成る. 同様に “fpqc” は “fidèlement plat et quasi-compact” (仏語) すなわち “faithfully flat and quasi-compact” の略である.

### 定義 3.5

\*\*\* site of  $X$  の記号を以下のように定める.

***	small Zariski	big Zariski	small etale	big etale
名前	$\text{Zar}(X)$	$\text{ZAR}(X)$	$\text{Et}(X)$	$\text{ET}(X)$
***	lissee-etale	smooth	fppf	fpqc
名前	$\text{Lis-Et}(X)$	$\text{Sm}(X)$	$\text{Fppf}(X)$	$\text{Fpqc}(X)$

[2] では big Zariski site of  $X$  を  $(\mathbf{Sch}/X)_{\text{Zariski}}$  などと書く.

## 3.2 Continuous Functor.

### 例 3.6

$X, X' ::$  topological space について,  $O(X), O(X') ::$  classical site,  $f: X \rightarrow X' ::$  continuous map とする. この時,  $f^{-1}: O(X') \rightarrow O(X) ::$  continuous functor. ( $f$  は必ずしも continuous functor でないことに注意.)

### 注意 3.7

$f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}' ::$  functor between sites が continuous であるための条件を再掲する.

1. 任意の  $X \in \mathbf{C}$  と  $\{U_i \rightarrow X\}_i \in \text{Cov}_{\mathbf{C}}(X)$  について,

$$\{f(U_i) \rightarrow f(X)\}_i \in \text{Cov}_{\mathbf{C}'}(f(X))$$

となる.

2.  $\mathbf{C}$  の任意の射  $X_1 \rightarrow Y, X_2 \rightarrow Y$  について, fiber product  $:: X_1 \times_Y X_2$  が  $\mathbf{C}$  に存在するならば,

$$f(X_1 \times_Y X_2) \cong f(X_1) \times_{f(Y)} f(X_2).$$

例と照らし合わせると, 1 つめの条件は  $f^{-1}$  が開集合を開集合に写すことに対応し, 2 つめの条件は  $f^{-1}$  が  $\cap$  と交換することに対応する.

### 例 3.8

従属関係

$$\text{open immersion} \implies \text{etale} \implies \text{fppf}$$

があるから, inclusion map  $:: \text{Zar}(X) \hookrightarrow \text{ET}(X) \hookrightarrow \text{Fppf}(X)$  はそれぞれ continuous.

### 例 3.9

flat morphism  $:: f: X \rightarrow Y$  をとり,  $f$  による pullback functor を  $P_f$  とする. (TODO: 要確認.)

## 4 Definitions : Sheaves.

定義 4.1 (Sheaf, Topos, Morphism of Topoi.)

- (i) site  $:: S$  上の presheaf とは, functor  $:: \mathcal{F}: S^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$  のことである.
- (ii) 射影  $U \times_B V \rightarrow U$  を presheaf  $:: \mathcal{F}$  で写した射を  $\text{res}_U^{U \times_B V}$  と書く.
- (iii) presheaf on  $S :: \mathcal{F}$  が sheaf であるとは, 以下の図式が equalizer diagram であるということ.

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

ここで右の並行射は  $\text{res}_{U_i}^{U_i \times U_j}, \text{res}_{U_j}^{U_i \times U_j}$  である.

- (iv) Site  $:: S$  上の, 圏  $\mathbf{C}(= \mathbf{Sets}, \text{Rings}, \text{AbGrp}, \dots)$  への presheaf の圏を  $\mathbf{PSh}(S, \mathbf{C})$ , sheaf の圏を  $\mathbf{Sh}(S, \mathbf{C})$  と書く.  $\mathbf{C} = \mathbf{Sets}$  の場合は略して  $\mathbf{Sh}(S), \mathbf{PSh}(S)$  と書く.
- (v) morphism of sheaves  $:: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  とは, natural transformation のことである.

- (vi)  $T :: \text{category}$  が topos であるとは, category of sheaves of sets on a site と圏同値であるということである.
- (vii)  $T, T' :: \text{topoi}$  とする. morphism of topoi  $:: f: T \rightarrow T'$  とは, 以下の 3 つの射 (2 functor and 1 isomorphism.) からなる.

$$f_*: T \rightarrow T', \quad f^*: T' \rightarrow T, \quad \phi: \text{Hom}_T(f^*(-), -) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{T'}(-.f_*(-)).$$

#### 注意 4.2

上で定義した sheaf of sets と同様に, sheaf of abelian groups, sheaf of rings, ... が定義できる. これらはそれぞれ sheaf of sets の圏  $:: \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, \mathbf{Sets})$  における abelian group objects, ring objects, ... と定義される.

#### 注意 4.3

“Topos” はギリシャ語で「場 (place)」を意味する. ギリシャ語なので複数形は “topoi”.

$X :: \text{scheme}$  について,  $X$  に関する topos を  $X_{et}, X_{ET}, \dots$  などと書く. 著者 (例えば [2]) によってはこれらの記号を  $\mathbf{Sch}/X$  を underlying category とする site に用いる. しかし “Grothendieck’s insight is that the basic object of study is the topos, not the site.” (M.Olsson “Stacks”) というということから, topos に site より簡単な記号を与えるのは理解できることである.

#### 定義 4.4 (Direct Image Functor.)

$f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$  を functor of sites とする. この時,  $F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$  について

$$f_*F(-) := F(f(-))$$

とおくと,  $f_*F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$  が得られる.  $f :: \text{continuous functor}$  ならば,  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$  に対し同様にして  $f_*\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$  が得られる.

#### 定義 4.5 (Ringed Topos.)

- (i)  $T :: \text{topos}$  と  $T$  の ring object  $:: \Lambda$  を合わせて ringed topos と呼ぶ.
- (ii) morphism of ringed topoi  $:: (f, f^\#): (T, \Lambda) \rightarrow (T', \Lambda')$  は,
  - morphism of topoi  $:: f = (f_*, f^*, \phi): T \rightarrow T'$  と,
  - morphism of ring in  $T' :: f^\#: \Lambda' \rightarrow f_*\Lambda$
の組である.

## 5 Examples : Sheaves.

### 例 5.1

$X :: \text{scheme}$  と,  $\mathbf{Sch}/X$  の部分圏を underlying category とする site  $:: \mathbf{C}$  (e.g. small/big Zariski site) について,  $\underline{X}(-) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$  で functor  $:: \underline{X}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$  を定める. この時,  $\underline{X} :: \text{presheaf on } \mathbf{C}$ . 特に, 後に示すとおり, fppf topology より荒い位相 (e.g. Zariski, smooth, etale, ...) で sheaf となる.

### 例 5.2 (Constant (Pre)sheaf.)

$\mathbf{C} :: \text{site}$  とし, 以下のように presheaf on  $\mathbf{C} :: \mathcal{F}$  を定める.

$$\mathcal{F}: \emptyset \neq U \mapsto \mathbb{R}, \quad \emptyset \mapsto \{0\}.$$

constant presheaf on a scheme が sheaf でないのと全く同じ理由で、この  $\mathcal{F}$  は sheaf でない。具体的には  $U \in \mathbf{C}$  が連結でない scheme ならば、 $U_1 \sqcup U_2 = U$  なる covering を取ると、定義にある diagram が equalizer diagram にならない。

### 例 5.3

$S :: \text{scheme}$  について、 $\mathbf{Sch}/S$  上の presheaf を

$$\mathcal{O}_S: [X \rightarrow S] \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

で定める。この sheaf は “structure sheaf of  $S$ ” と呼ばれ、 $\underline{A}_S^1$  と同型。

## 参考文献

- [1] Toms L.Gmez. Algebraic stacks. <https://arxiv.org/abs/math/9911199v1>, 1999.
- [2] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.