scheme や scheme morphism の性質の定義は `section3_text.pdf` にまとめたので参照すること．同じ PDF で B-fin.gen. scheme などの独自の用語を定義している．`http://stacks.math.columbia.edu/tag/01T0` も参照すると良い．

記法について．$\mathrm{Spec}\, A_f = D_A(f)$ と書く．

Ex3.1 Definition(s) of Locally of Finite Type Morphism.

補題 Ex3.1.1 (Nike's Lemma)**.** X :: scheme, $U, V \subseteq X, U = \mathrm{Spec}\, A, V = \mathrm{Spec}\, B$ かつ $U \cap V \neq \emptyset$ とする．この時，任意の点 $P \in U \cap V$ に対し，$a \in A, b \in B$ であって

$$P \in D_A(a) = D_B(b) \subset U \cap V$$

となるものがある．系として Prop2.2 より $A_a \cong B_b$ が得られる．

(証明)．適当に $a \in A, b \in B$ をとり，

$$P \in D_B(b) \subseteq D_A(a) \subseteq U \cap V$$

としよう．$X = \mathrm{Spec}\, B, X_f = D_B(b), \bar{b} = b|_{D_A(a)} \in A_a$ として Ex2.16a を用いると，

$$D_B(b) = D_A(a) \cap D_B(b) = \mathrm{Spec}(A_a)_{\bar{b}}.$$

なので，あとは $(A_a)_{\bar{b}}$ を調べれば良い．

$(A_a)_{\bar{b}}$ の元は以下のように書ける．

$$\frac{u/a^m}{\bar{b}^n} = \frac{u}{a^m \bar{b}^n} \quad (m, n \in \mathbb{N}; u \in A).$$

$\bar{b} \in A_a$ なので $a^N \bar{b} = a' \in A$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在する．

$$\frac{ua^{nN}}{a^m a^{nN} \bar{b}^n} = \frac{ua^{nN}}{a^m a'^n}.$$

仮に $m \geq n$ とすると

$$\frac{ua^{nN}}{a^m a'^n} = \frac{ua^{m-n+nN}}{(aa')^m}$$

$m \leq n$ でも同様に分子分母に a'^{n-m} をかければ，$(A_a)_{\bar{b}}$ の元は $A_{aa'}$ の元として書ける．逆に $A_{aa'}$ の元を $(A_a)_{\bar{b}}$ の元として書くことは直ちに出来る．よって $(A_a)_{\bar{b}} = A_{aa'}$.

以上より，$\alpha = aa' \in A, b \in B$ について $D_B(b) = D_A(\alpha)$. ∎

補題 Ex3.1.2 (Preimage of POS[†1] is POS.)**.** $f : X \to Y$ :: scheme morphism. $\mathrm{Spec}\, B \subseteq Y, f^{-1} \mathrm{Spec}\, B = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Spec}\, C_i$ とする．この時，以下が成立する．

$$^\forall b \in B, \quad ^\exists \{c_i (\in C_i)\}, \quad f^{-1} D_B(b) = \bigcup_{i \in I} D_{C_i}(c_i).$$

(証明)．$U = \mathrm{Spec}\, B, V_i = \mathrm{Spec}\, C_i$ とする．すると f の制限により scheme morphism $f|_{V_i} : V_i \to U$ が得られる．これは $V_i \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ という写像で，したがって逆写像は $(f|_{V_i})(S) = f^{-1}(S) \cap V_i$ であることに注意．structure sheaf の間の射を考えると，以下が得られる．

$$\phi_i = \left((f|_{V_i})^\#\right)_U : B = \mathcal{O}_U(U) \to (f|_{V_i})_* \mathcal{O}_{V_i}(U) = C_i.$$

[†1] Principle Open Set

ここで Prop2.2 を用いた．Prop2.3 から，ϕ_i は $f|_{V_i} : V_i \to U$ に 1-1 対応し，特に topological space として

$$f|_{V_i}(\mathfrak{p}) = \phi_i^{-1}(\mathfrak{p}) \quad (\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} C_i)$$

が成り立つ．このことから以下が得られる．

$$f^{-1}(D_B(b)) \cap V_i = (f|_{V_i})^{-1} D_B(b) = D_{C_i}(\phi_i(b)).$$

最左辺と最右辺を $\bigcup_{i \in I}$ すれば主張が示せる． ∎

補題 Ex3.1.3. $f \in A$ とする．有限生成 A_f 代数は有限生成 A 代数でもある．

(証明)．変数の数は問題にならないので 1 変数で証明する．（つまり以下で $A_f[x]$ を多変数にしても構わない．）有限生成 A_f 代数 B には $A_f[x]$ からの全射が存在する．$A_f[x]$ には $A[x, y]$ から次のような全射が存在する．

$$y \mapsto 1/f$$

これが全射であることは，

$$ay^n x^m \mapsto (a/f^n) x^m \in A_f[x]$$

のように分かる．あとはこの写像が A 準同型（代入写像）であることに注意すれば良い．よって $A[x, y] \to A_f[x] \to B$ という全射が存在する． ∎

以下の命題を示す．

$$\begin{aligned} &{}^{\exists}\{B_i\}_{i \in I}, \quad \left[Y = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec} B_i \right] \wedge \left[{}^{\forall} i \in I, \quad f^{-1}(\operatorname{Spec} B_i) :: \text{locally } B_i\text{-fin.gen. scheme} \right] \\ \iff &{}^{\forall} \operatorname{Spec} A \subseteq X, \quad f^{-1}(\operatorname{Spec} A) :: \text{locally } A\text{-fin.gen. scheme} \end{aligned}$$

下から上は自明である．上から下を示そう．

$U = \operatorname{Spec} A \subset X, V_i = \operatorname{Spec} B_i$ とする．$U \cap V_i$ の各点 P に対し，

$$P \in D_{B_i}(b_{ij}) = D_A(a_{ij}) \subseteq U \cap V_i$$

であるような $b_{ij} \in B_i, a_{ij} \in A$ が取れる．P を動かせば，このようにして U が被覆できる．

$$U = \bigcup_{i,j} D_{B_i}(b_{ij}) = \bigcup_{i,j} D_A(a_{ij}).$$

仮定より，各 V_i は $\{\operatorname{Spec} C_{ik}\}_{i,k}$ で被覆され，これらの C_{ik} は有限生成 B_i 代数[†2]であるようにとれる．

Lemma (Preimage of POS is POS) より，$c_{ijk} \in C_{ik}$ が存在し，以下のようになる．

$$f^{-1} U = \bigcup_{i,j} f^{-1} D_{B_i}(b_{ij}) = \bigcup_{i,j} \bigcup_{k} D_{C_{ik}}(c_{ijk}).$$

$D_{C_{ik}}(c_{ijk}) = \operatorname{Spec}(C_{ik})_{c_{ijk}}$ であり，$(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 $(B_i)_{b_{ij}}$ 代数．これは有限生成代数の定義から存在する全射 $B[x_1, \ldots, x_n] \to C_{ik}$ の両辺を局所化[†3]すれば分かる．$(B_i)_{b_{ij}} \cong A_{a_{ij}}$（Nike's Lemma の最後の文）と最後の Lemma より，$(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 A 代数．

以上より，$f^{-1} \operatorname{Spec} A$ は $\operatorname{Spec}(C_{ik})_{c_{ijk}}$ で被覆され，各 $(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 A 代数である．

[†2] $\phi_{ik} = \left((f|_{\operatorname{Spec} C_{ik}})^{\#}\right)_{\operatorname{Spec} B_i}$ で代数とみなす．

[†3] C_{ik} が ϕ_{ik} による B_i 代数であることと $c_{ijk} = \phi_{ik}(b_{ij})$ を用いて計算する．

Ex3.2 Definition(s) of Quasi-Compact Morphism.

以下を示す.

$$
\begin{aligned}
&{}^{\exists}\{B_i\}_{i\in I},\quad \left[Y=\bigcup_{i\in I}\operatorname{Spec}B_i\right]\wedge\left[{}^{\forall}i\in I,\quad f^{-1}(\operatorname{Spec}B_i)::\text{ quasi-compact.}\right]\\
\iff &{}^{\forall}\operatorname{Spec}A\subseteq Y,\quad f^{-1}(\operatorname{Spec}A)::\text{ quasi-compact.}
\end{aligned}
$$

まず $\operatorname{Spec}A=\bigcup_{i,j}D_{B_i}(b_{ij})$ となるように b_{ij} をとる．Ex2.13b より $\operatorname{Spec}A$ は quasi-compact だから b_{ij} は有限個でよい．$f^{-1}\operatorname{Spec}B_i$ は open subscheme だから，$f^{-1}\operatorname{Spec}B_i=\bigcup_{i,k}\operatorname{Spec}C_{ik}$ なる C_{ik} がある．仮定より $f^{-1}\operatorname{Spec}B_i$ は quasi-compact であるから C_{ik} は有限個．これに Ex3.1 の中で示した Lemma (Preimage of POS is POS) を用いると以下のようになる.

$$
f^{-1}\operatorname{Spec}A=\bigcup_{i,j}f^{-1}D_{B_i}(b_{ij})=\bigcup_{i,j}\bigcup_{k}D_{C_{ik}}(c_{ijk}).
$$

確認したとおり組 (i,j,k) は高々有限の組み合わせしか無い．Ex2.13 の証明にあるとおり，$D_{C_{ik}}(c_{ijk})$ は quasi-compact だから，$f^{-1}\operatorname{Spec}A$ は quasi-compact な開集合の有限和．よって $f^{-1}\operatorname{Spec}A$ も quasi-compact.

Ex3.3 Definition(s) of Finite Type Morphism.

(a) Finite Type = Locally Finite Type+Quasi-Compact.

定義より明らか.

(b) Another Definition of Finite Type Morphism.

Ex3.1 の弱い形である.

(c) If f :: Finite Type and Any $\operatorname{Spec}A\subseteq f^{-1}(\operatorname{Spec}B)$, A :: Fin.Gen B-Alg.

Ex3.4 Definition(s) of Finite Morphism.

Ex3.1 と同様に証明できる.

Ex3.5 Finite/Quasi-Finite Morphism.

$f:X\to Y$ が quasi-finite morphism であるとは，任意の点 $y\in Y$ について $f^{-1}(y)$ が有限集合であるという事である.

(a) Finite $\Longrightarrow$ Quasi-Finite.

(b) Finite $\Longrightarrow$ Closed.

(c) Give an Example of morphism that is Surjective, Finite-Type, Quasi-Finite BUT NOT Finite.

Ex3.6 Function Field.

X :: integral scheme とし，$\mathcal{O}_{X,\zeta}$ が体であることと，任意の affine open subset $\operatorname{Spec} A$ について $\mathcal{O}_{X,\zeta} \cong \operatorname{Quot}(A)$ であることを示す．

$\zeta \in X$ を generic point としよう．$\{\zeta\}$ は X で dense な 1 点集合だから，任意の開集合に含まれる．だから $\operatorname{Spec} A$ :: affine open subset をどのように取ってもよい．$\mathcal{O}_{X,\zeta} = (\mathcal{O}_X|_{\operatorname{Spec} A})_\zeta = A_\zeta$ であり，$A = \mathcal{O}_X|_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A)$ が integral であることから，$\zeta = (0) \in \operatorname{Spec} A$．以上から

$$\mathcal{O}_{X,\zeta} = (\mathcal{O}_X|_{\operatorname{Spec} A})_\zeta = A_\zeta = A_{(0)} = \operatorname{Quot}(A)$$

が得られる．

Ex3.7 Dominant, Generically Finite Morphism of Finite Type of Integral Schemes.

Ex3.8 Normalization.

scheme が normal であるとは，その任意の局所環が integrally closed domain である，という意味である．X :: integral scheme とする．$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ に対し，$\tilde{A}$ を A の integral closure, $\tilde{U} = \operatorname{Spec} \tilde{A}$ とする．

(a) $\{\tilde{U}\}$ can be glued.

Ati-Mac Prop5.1 をつかう．

(b) $\tilde{X}$ has a UMP.

(c) X :: finite type $\Longrightarrow$ $\tilde{X} \to X$ :: finite.

Ex3.9 The Topological Space of a Product.

(a) $\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \cong \mathbb{A}^2_k$ but $\mathbb{A}^2_k \neq \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k$ as sets.

$\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[x]$ として $\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k$ を考える．

■$\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \cong \mathbb{A}^2_k$. $\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \cong \operatorname{Spec} k[x] \otimes_k k[y]$ かつ，$k[x] \otimes_k k[y] \cong k[x,y]$(Ch I, Ex3.18 の解答を参照．) なので明らか．

■$\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \neq \mathbb{A}^2_k$ as sets. $\operatorname{Spec} k[x,y]$ は $(y - x^2)$ のような点 (generic point of a variety) を含むが，$\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k$ にこれに対応する点はない．

(b) Describe $\operatorname{Spec} k(s) \otimes_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k(t)$.

$\operatorname{Spec} k(s) \otimes_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k(t) \cong \operatorname{Spec} k(s) \otimes_k k(t)$ である．$k(s) \otimes_k k(t)$ の元は 0 でなければ単元である．実際，$f, g, f', g' \neq 0$ であるとき，

$$\frac{f(s)}{g(s)} \otimes \frac{f'(t)}{g'(t)} \cdot \frac{g(s)}{f(s)} \otimes \frac{g'(t)}{f'(t)} = 1 \otimes 1 = 1.$$

よって $k(s) \otimes_k k(t)$ は体で，$\operatorname{Spec} k(s) \otimes_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k(t)$ は 1 点 scheme.

Ex3.10 Fibres of a Morphism.

(a) $\operatorname{sp}(X_y) \approx f^{-1}(y)$.

(i) Affine Case

$\phi : B \to A, f : X = \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B = Y$ とし，A を ϕ で B 代数とみなす．$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B, S = B - \mathfrak{p}$ とすると，$A \otimes_B k(\mathfrak{p})$ は以下のようになる．なお，以下で $\phi(\mathfrak{p})$ から生成されるイデアルを $I_\mathfrak{p} = \phi(\mathfrak{p})A = \langle \phi(\mathfrak{p}) \rangle, T = \overline{\phi(S)}$ と置く．

$$\begin{aligned} & A \otimes_B \frac{S^{-1}B}{S^{-1}\mathfrak{p}} \\ =& A \otimes \bar{S}^{-1}\left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right) \\ \cong& A \otimes \frac{B}{\mathfrak{p}} \otimes S^{-1}B \\ \cong& \frac{A}{\phi(\mathfrak{p})A} \otimes S^{-1}B \\ \cong& T^{-1}\left(\frac{A}{I_\mathfrak{p}}\right) \end{aligned}$$

途中で Ati-Mac Cor3.4, Prop3.5, Ex2.2 を使った．

Ati-Mac Prop1.1, 3.11 より，$T^{-1}\left(\frac{A}{I_\mathfrak{p}}\right)$ の素イデアルは，A の素イデアルであって，$I_\mathfrak{p}$ を含み，T と共通部分を持たないものに対応する．

$$\operatorname{Spec} T^{-1}\left(\frac{A}{I_\mathfrak{p}}\right) \approx \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid I_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \wedge \phi(S) \cap \mathfrak{q} = \emptyset.\}$$

同相であることは以下のように一般論から分かる．まず，任意のイデアル $\mathfrak{a} \subseteq A$ について $\operatorname{Spec} \frac{A}{\mathfrak{a}}$ は $\operatorname{Spec} A$ の閉集合 $V(\mathfrak{a})$ と同相である[†4]．また任意の積閉集合 $S \subseteq A$ について $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ は $\operatorname{Spec} A$ の部分集合と同相[†5]．よって $\operatorname{Spec} T^{-1}\left(\frac{A}{I_\mathfrak{p}}\right)$ は $V(I_\mathfrak{p})$ の部分集合と同相である．

一方，$f^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\}$．なので $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ についての命題

$$I_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \wedge T \cap \bar{\mathfrak{q}} = \emptyset \iff f(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} \quad (*)$$

が示されれば証明が完了する．ただし $\bar{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{q}}{I_\mathfrak{p}}$.

まず $\mathfrak{p} \not\supseteq \ker \phi$ だとしよう．すると $S \cap \ker \phi \neq \emptyset$ なので，$\phi(S) \ni 0$．任意の $\mathfrak{q}$ について $\mathfrak{q} \ni 0$ なので，

$$T \cap \bar{\mathfrak{q}} \supseteq \overline{\phi(S) \cap \mathfrak{q}} \supseteq \overline{\{0\}}.$$

[†4] $V(\mathfrak{a}) \cap V(I) \leftrightarrow V\left(\frac{\mathfrak{a}+I}{\mathfrak{a}}\right)$ なので同相.

[†5] みなす時の対応は $\mathfrak{p}S^{-1}A \leftrightarrow P \cap A$ である.

よって $(*)$ の左辺は常に偽．同じ条件の下で (*) の右辺が偽になることは明らかなので，$\mathfrak{p} \not\supseteq \ker\phi \implies (*)$ が言えた．

続いて $\mathfrak{p} \supseteq \ker\phi$ だとしよう．この時 $I_{\mathfrak{p}} = \phi(\mathfrak{p})$ となる[†6]．$\phi(S) = \phi(B - \mathfrak{p})$ だから，

$$
\begin{aligned}
& \phi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q} \wedge T \cap \bar{\mathfrak{q}} = \emptyset \\
\implies & \phi(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q} = \phi(\mathfrak{p}) \wedge \overline{\phi(B - \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q}} = \emptyset \\
\implies & \phi(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q} = \phi(\mathfrak{p}) \wedge \phi(B - \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q}) = \emptyset \\
\implies & \phi(B) \cap \mathfrak{q} = (\phi(\mathfrak{p}) \cup \phi(B - \mathfrak{p})) \cap \mathfrak{q} = (\phi(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q}) \cup (\phi(B - \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q}) = \phi(\mathfrak{p}) \\
\iff & \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}.
\end{aligned}
$$

最後の行で準同型定理を用いた．逆に $\mathfrak{p} = \phi^{-1}(\mathfrak{q})$ ならば $\phi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q}$ は明らか．同様に $\phi^{-1}(A - \mathfrak{q}) = B - \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = B - \mathfrak{p}$ より $\phi(B - \mathfrak{p}) \subseteq A - \mathfrak{q}$ も得られる．最後に $T \cap \bar{\mathfrak{q}} = \emptyset$ を示す．これは以下と同値である．

$$\not\exists x \in \mathfrak{q}, y \in \phi(B - \mathfrak{p}), \quad x - y \in \mathfrak{p}.$$

このような x, y が存在すると仮定する．$x - y \in \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \phi(B)$ なので $x - (x - y) = y \in \mathfrak{q}$．仮定と合わせて $y \in \mathfrak{q} \cap \phi(B - \mathfrak{p})$ を得るが，$\mathfrak{q} \cap \phi(B - \mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q} \cap (A - \mathfrak{q}) = \emptyset$ なので，矛盾が生じた．以上より $\mathfrak{p} \supseteq \ker\phi \implies (*)$ が言えた．

(ii) General Case.

Y の y を含む affine open subset $\tilde{Y}$ をとる．すると $f^{-1}\tilde{Y}$ も open afine covering をもつので，それを $f^{-1}\tilde{Y} = \bigcup X_i$ とする．$f : X \to Y$ を制限して $f|_{X_i} : X_i \to Y_i$ とする．すると Them3.3 の証明の Step6,7 より，X_y は

$$(X_y)_i := X_i \times_{\tilde{Y}} \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{\tilde{Y},y}/\mathfrak{m}_{\tilde{Y},y})$$

の貼り合わせ[†7]．$\operatorname{sp} X_y$ は $\operatorname{sp}(X_y)_i$ の張り合わせで，Affine Case での議論により $\operatorname{sp}(X_y)_i \approx (f|_{X_i})^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap X_i$．よって $\operatorname{sp} X_y = \bigcup_i (f^{-1}(y) \cap X_i) = f^{-1}(y)$．位相空間としては $(f|_{X_{ij}})^{-1}(y) \xrightarrow{\approx} \operatorname{sp}(X_y)_{ij} \to \operatorname{sp} X_y$ を使って貼り合わせる．

(b) Another Solution of (b).

Ch.I Ex3.18(Product of Affine Varieties) で使った補題を少し変形したものと，中国剰余定理を用いる．

補題 Ex3.10.1. I, J をそれぞれ $k[s][t](= k[s,t]), k[s]$ のイデアルとする．この時，以下が成り立つ．

$$\frac{k[s][t]}{I} \otimes_{k[s]} \frac{k[s]}{J} \cong \frac{k[s][t]}{I + J^e}$$

ただし，$\frac{k[s][t]}{I}, \frac{k[s]}{J}$ はそれぞれ $f \mapsto f \bmod I, f \mapsto f \bmod J$ で $k[s]$ 代数とみなす．

[†6] $\phi : B \to A$ について $\ker\phi \subseteq \mathfrak{b} \subseteq B$ としよう．$B/\ker\phi \cong \operatorname{im}\phi$ の同型射は $b \bmod \ker\phi \mapsto \phi(b)$ なので，これに $\mathfrak{b}$ を入れれば $\mathfrak{b}/\ker \cong \phi(\mathfrak{b})$ となる．$\ker\phi \subseteq \mathfrak{b}$ より左辺はイデアルだから右辺もイデアル．

[†7] ここで，$y \notin Y_i$ である場合は $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y_i,y}/\mathfrak{m}_{Y_i,y}) \to Y_i$ が無い．これで大丈夫なのか気になる．$\mathcal{O}_{Y_i,y} = \varinjlim_{y \in V \subseteq Y_i} \mathcal{O}_Y(V)$ は $y \notin Y_i$ の時 $\{0\}$ の direct limit なので 0（零環）となる．したがって $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y_i,y}/\mathfrak{m}_{Y_i,y}) \to Y_i$ は零写像から誘導される物になり，$(X_y)_{ij} = X_{ij} \times_{Y_i} \emptyset = 0$ となる．以上から，$y \in Y_i$ かどうか気にせず上のように述べて問題ない．

(証明). $\pi_1 : k[s][t] \to \frac{k[s][t]}{I}, \pi_2 : k[s] \to \frac{k[s]}{I}$ を標準的全射とする．すると $\pi_1 \otimes_{k[s]} \pi_2$ も全射である．$\kappa : k[s][t] \to k[s][t] \otimes_{k[s]} k[s]$ を標準的同型だとすると，以下は全射である．

$$\kappa \circ \pi_1 \otimes_{k[s]} \pi_2 : k[s][t] \to k[s][t] \otimes_{k[s]} k[s] \to k[s][t] \otimes k[s] \to \frac{k[s][t]}{I} \otimes_{k[s]} \frac{k[s]}{J}$$

これの ker を計算すると $I + J^e$ となり，準同型定理により主張が得られる． ∎

これをつかって (b) を計算していく．

■At $y = (s-a) \in Y \quad (a \neq 0)$. $\phi(y) = (\bar{t}^2 - a) = (\bar{t} - \sqrt{a}) \cap (\bar{t} + \sqrt{a})$ だから，(a) から以下が成り立つ．

$$\mathrm{sp}(X_y) \approx f^{-1}(y) = f^{-1}V(y) = V(\phi(\mathfrak{a})) = \{(\bar{t} - \sqrt{a}), (\bar{t} + \sqrt{a})\}.$$

$k(y) = B_y/yB_y \cong (B/y)_{\bar{y}}$ だが，$B/y \cong k$ は体だから $k(y) = k$．$X_y = \operatorname{Spec} A \otimes_B B/y$ なので補題が使える．

$$\begin{aligned}\frac{k[s,t]}{(s-t^2)} \otimes_{k[s]} \frac{k[s,u]}{(s-a,u)} \cong& \frac{k[s,t,u]}{(s-t^2, s-a, u)} \\ \cong& \frac{k[t]}{(t^2-a)} \\ =& \frac{k[t]}{(t-\sqrt{a}) \cap (t+\sqrt{a})} \\ \cong& \frac{k[t]}{(t-\sqrt{a})} \oplus \frac{k[t]}{(t+\sqrt{a})} \\ \cong& k \times k\end{aligned}$$

途中で中国剰余定理を使った．このことから $X_y = \operatorname{Spec}(k \times k)$ で，各点での剰余体は k.

■At $y = (s) \in Y$.

$$\begin{aligned}\frac{k[s,t]}{(s-t^2)} \otimes_{k[s]} \frac{k[s,u]}{(s,u)} \cong& \frac{k[s,t,u]}{(s-t^2, s, u)} \\ \cong& \frac{k[t]}{(t^2)}\end{aligned}$$

$\frac{k[t]}{(t^2)}$ は $(t) \bmod (t^2)$ を唯一の極大イデアルとする局所環なので，Ex2.3b より $\operatorname{Spec} \frac{k[t]}{(t^2)}$ は 1 点空間．また，non-reduced scheme である．

■At $y = (0) = \eta \in Y$. $(B/\eta)_\eta = B_{(0)} = k(s)$ なので $k(\eta) = k(s)$．$S = k[s] - \{0\}$ とすると以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\frac{k[s,t]}{(s-t^2)} \otimes_{k[s]} S^{-1}k[s] \cong& \bar{S}^{-1} \frac{k[s,t]}{(s-t^2)} \\ \cong& \frac{S^{-1}k[s,t]}{S^{-1}(s-t^2)} \\ \cong& \frac{k(s)[t]}{(t^2-s)}\end{aligned}$$

$t^2 - s$ は $k(s)$ 係数既約多項式だから，この環は体．なので $X_y = \operatorname{Spec} \frac{k(s)[t]}{(t^2-s)}$ は 1 点空間である．しかも剰余体は $k(s) = k(y)$ の 2 次拡大体.

Ex3.11 Closed Subschemes.

(a) Closed Immersions are Stable under Base Extension.

(b) * Closed Subscheme of Affine Scheme is Determined by a Suitable Ideal.

$X = \operatorname{Spec} A$ とその closed subscheme Y を考える．$Y = X$ ならば主張は自明なので $Y \subsetneq X$ とする．

(c) The Smallest Subscheme Structure on a Closed Subset.

(d) The Scheme-Theoretic Image of f.

Ex3.12 Closed Subschemes of $\operatorname{Proj} S$.

Ex3.13 Properties of Morphisms of Finite Type.

Ex3.14 The Closed Points of Scheme of Finite Type over a Field.

Ex3.15 Geometrically Irreducible/Reduced/Integral Schemes.

k :: field, X :: scheme of finite type over k．この時 X は $\operatorname{Spec} \frac{k[x_1,\dots,x_n]}{I}$ という形の open affine subscheme で被覆できる．以下ではこの被覆のうちの一つの open affine subscheme を取って考察をする．$R = \frac{k[x_1,\dots,x_n]}{I}$ としておく．また，$X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \bar{k}$ を $X \times_k \bar{k}$ と略す．

(a) Geometrically Irreducible.

以下の条件の同値性を示す．

(i) $X \times_k \bar{k}$ is irreducible.
(ii) $X \times_k k_s$ is.
(iii) $X \times_k K$ is, for every extension field K of k.

ただし k_s は k の分離閉包で，$\bar{k}$ の部分体である．これらのいずれか（したがって全部）が成り立つ X は geometrically irreducible である，という．

(iii) $\Longrightarrow$ (i),(ii) は明らか．また，一般の位相空間 T について以下が成り立つ．（TODO:check）

$$T :: \text{irreducible} \iff {}^{\exists}\{U_i\} :: \text{open cover of } T,\ \ {}^{\forall}i,j,\ \ U_i \cap U_j \neq \emptyset \wedge U_i :: \text{irreducible}.$$

よって，(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) を affine case で確かめれば十分である．Ati-Mac Ex1.19 より，これは更に，次の 3 つの条件が同値であることだと言い換えられる．

(i) $\operatorname{Nil}(R \otimes_k \bar{k})$ is a prime ideal.
(ii) $\operatorname{Nil}(R \otimes_k k_s)$ is.
(iii) $\operatorname{Nil}(R \otimes_k K)$ is, for every extension field K of k.

(b) Geometrically Reduced.

以下の条件の同値性を示す．

(i) $X \times_k \bar{k}$ is reduced.

(ii) $X \times_k k_p$ is.

(iii) $X \times_k K$ is, for every extension field K of k.

ただし k_p は k の完全閉包で，$\bar{k}$ の部分体である．これらのいずれか（したがって全部）が成り立つ X は geometrically reduced である，という．

(iii) $\Longrightarrow$ (i),(ii) は明らか．また，Ex2.3a より，reduced という性質は local な性質であるから，一般の scheme S について以下が成り立つ．

$$S :: \text{reduced} \iff {}^{\exists}\{U_i\} :: \text{open cover of } S, \ \ {}^{\forall}i, \ \ \mathcal{O}_S(U_i) :: \text{reduced}.$$

よって，(i) $\Longrightarrow$ (iii) を affine case で確かめれば十分である．これは affine case では更に言い換えられる．

(i) $\mathrm{Nil}(R \otimes_k \bar{k}) = 0$

(ii) $\mathrm{Nil}(R \otimes_k k_s) = 0$.

(iii) $\mathrm{Nil}(R \otimes_k K) = 0$, for every extension field K of k.

(c) Geometrically Integral.

$X \times_k \bar{k}$ が integral であるとき X は geometrically integral であるという．**integral** scheme だが geometrically irreducible でない，または geometrically reduced でない例を作る．

Ex3.16 Noetherian Induction.

Ex3.17 Zariski Spaces.

X :: topological space について，X が noetherian かつ X の任意の irreducible closed subset がただひとつの generic point を持つとき，X は Zariski space であるという．

(a) X :: Noetherian Scheme $\Longrightarrow$ $\mathrm{sp}(X)$ :: Zariski Space.

Ex2.9 より明らか．

(b) Minimal Nonempty Closed Subset of a Zariski Space = One Point Set.

X :: Zariski Space,M :: minimal nonempty closed subset of X とする．この時，M :: irreducible である．実際，$M = Z_0 \cup Z_1$ と空でない閉集合の和へ分解できるならば $Z_0, Z_1 \subsetneq M$ となり，minimality に反するからである．また，Ch I, Ex1.7 より M は Noetherian．なので $g \in M$ :: generic point が存在する．$M - \{g\}$ が空でないと仮定し，$\not{g} \in M - \{g\}$ をとる．$\mathrm{cl}_X(\{\not{g}\}) \subseteq M$ であるが，M は極小な閉集合だから $\mathrm{cl}_X(\{\not{g}\}) = M$．これは M の generic point として $g, \not{g}$ の二つが取れることを意味し，generic point の唯一性に矛盾する．

(c) Zariski Space is a T_0-Space.

互いに異なる 2 点 $x, y \in X$ をとる．これらのうち一方を含み，もう一方を含まない閉集合が存在することを示す．まず，一般の空間における閉包作用素の性質より，以下が成り立つ．

$$\mathrm{cl}_X(\{x, y\}) = \mathrm{cl}_X(\{x\}) \cup \mathrm{cl}_X(\{y\}).$$

左から順に C_{xy}, C_x, C_y とする．

■C_{xy} :: not irreducible.　$\{x\} \subseteq C_y$ ならば $C_x \subseteq \mathrm{cl}_X(C_y) = C_y$ となる．よって $C_{xy} = C_y$ が導かれる．しかし C_y :: irreducible [†8] だから，これは矛盾．したがって $x \notin C_y$．逆に $y \notin C_x$ も得られる．

■C_{xy} :: irreducible.　C_x, C_y は空でない閉集合だから，C_{xy} が irreducible であったとすると，C_x, C_y のいずれかは C_{xy} と一致している．なので x, y のどちらか一方は C_{xy} の generic point である．x がその generic point だと仮定しよう．$\{x\} \subseteq C_y$ であれば $C_{xy} = \mathrm{cl}_X(C_y) = C_y$ となるから，$\{x\} \subseteq C_y$ から y が C_{xy} の generic point であることが導かれる．これは generic point の唯一性に反するから，$x \notin C_y$．

(d) The Generic Point of Irreducible Zariski Space is in Any Open Subset of That.

X :: irreducible Zariski space, g :: generic point of X とおく．g を含まない空でない開集合 U が存在したと仮定する．すると $g \in U^c$ であり，U^c は真の閉部分集合である．これは $\mathrm{cl}_X(\{g\}) \subseteq \mathrm{cl}_X(U^c) \subsetneq X$ を意味するので，矛盾．

(e) Specialization.

X :: Zariski space とし，X の点に以下のように順序を入れたものを Σ とする．

$$x_1 \geq x_0 \iff x_1 \rightsquigarrow x_0 \iff \mathrm{cl}_X(\{x_1\}) \ni x_0.$$

これは半順序集合をなす (CHECK)．$x_1 \rightsquigarrow x_0$ であるとき x_0 は x_1 の specialization という．逆に x_1 は x_0 の generization だという．

(i) The Minimal/Maximal Elements of Σ.

Σ の極小元 x は以下を満たす点である．

$$\not\exists y \in \Sigma,\quad x \neq y \wedge \mathrm{cl}_X(\{x\}) \ni y.$$

つまり x は $\{x\}$ が閉集合であるような点である．よって x は closed point.

次に x を Σ の極大元だとする．これは以下を満たす．

$$\not\exists y \in \Sigma,\quad x \neq y \wedge \mathrm{cl}_X(\{y\}) \ni x.$$

x を含む irreducible component の generic point を g とする．$y \neq g$ であるとき $\mathrm{cl}_X(\{y\}) \ni g$ は generic point の唯一性に反するから，g は Σ の極大元である．逆に，任意の元 $x \neq g$ に対し，$\mathrm{cl}_X(\{g\}) \ni x$ が成立する．結局，x がその generic point（すなわち $x = g$）であるときかつその時に限り，x は Σ の極大元となる．

[†8] $\mathrm{cl}_X(\{x\})$ が x を含む最小の閉集合であることから，$\mathrm{cl}_X(\{x\})$ は x を含む真の部分閉集合を持たない．よって $\mathrm{cl}_X(\{x\}) = Z_0 \cup Z_1$ ならば，Z_0, Z_1 のどちらか一方は真の部分閉集合になり得ない．

(ii) Closed/Open Subset is Stable under Specialization/Generization.

$S \subseteq X$ に対し,

$$S_S = \{y \in X \mid {}^{\exists}x \in S,\ \ x \rightsquigarrow y.\}, \quad S_G = \{x \in X \mid {}^{\exists}y \in S,\ \ x \rightsquigarrow y.\}$$

とおく. $x \rightsquigarrow x$ なので $S \subseteq S_S, S_G$ となる.

■S :: closed $\implies$ $S_S = S$. $S \supseteq S_S$ を示せば良い. これは以下と同値.

$${}^{\forall}x \in S,\ \ {}^{\forall}y \in X,\ \ \mathrm{cl}_X(\{x\}) \ni y \implies y \in S$$

これは以下から示せる.

$$\{x\} \subseteq S \implies \mathrm{cl}_X(\{x\}) \subseteq \mathrm{cl}_X(S) = S$$

■S :: open $\implies$ $S_G = S$. $S \supseteq S_G$ を示せば良い. これは以下と同値.

$${}^{\forall}y \in S,\ \ {}^{\forall}x \in X,\ \ \mathrm{cl}_X(\{x\}) \ni y \implies x \in S$$

これの対偶は以下のようになる.

$${}^{\forall}y \in S,\ \ {}^{\forall}x \in X,\ \ x \in S^c \implies y \notin \mathrm{cl}_X(\{x\}) \subseteq \mathrm{cl}_X(S^c) = S^c$$

これは明らかに成立する ($y \in S$ に注意).

(f) X :: Noetherian Topological Space $\implies$ $t(X)$ :: Zariski Space.

$t(X)$ は X の irreducible closed subsets であり, $t(X)$ の閉集合は X の閉集合 Y を用いて $t(Y)$ と表せる集合である.

■X :: Noetherian $\implies$ Irreducible Subset in $t(X)$ has Unique Generic Point. $Y \subseteq X$ が closed だとし, さらに $t(Y) \subseteq t(X)$ が irreducible closed subset だとする. $t(Y)$ の点は X の irreducible closed subset だから, X :: Noetherian より, $t(Y)$ は極小元 $G \subseteq Y$ をもつ. $G \in t(Z)$ すなわち $G \in t(Y \cap Z)$ ならば $Y \cap Z = Y$ すなわち $Y \subseteq Z$, ということを示せば, G :: generic point が得られる.

■X :: Noetherian $\implies$ $t(X)$ :: Noetherian. 以下を使う.

$${}^{\forall}Y, Z :: \text{open in } X,\ \ Y \subsetneq Z \iff t(Y) \subsetneq t(Z).$$

これは次のように示される. まず ($\implies$) は, $z \in Z - Y$ とすると, $\mathrm{cl}_X(z) \in t(Z) - t(Y)$ となることから得られる. $\mathrm{cl}_X(z) \in t(Y)$ ならば $z \in \mathrm{cl}_X(z) \subseteq Y$ だが, $z \notin Y$ なのでこれはありえない. また ($\impliedby$) は, $t(Z) - t(Y)$ の極小元を考えれば得られる. その極小元を M とし, $m \in M$ とすると $\mathrm{cl}_X(m) \subseteq M$. M の極小性から等号が成り立つ. もし $m \in Y$ ならば $\mathrm{cl}_X(m) \subseteq Y$ かつ $\mathrm{cl}_X(m) \notin t(Y)$ となり, これはありえない. 今示したことから, 以下の同値が得られ, $t(X)$ :: Noetherian が示せる.

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots \iff t(X_0) \supsetneq t(X_1) \supsetneq \dots$$

ただし $X_0, X_1, \dots$ は X の閉集合である.

Ex3.18　Constructible Sets.

X :: Zariski topological space の部分集合族 $\mathfrak{F}_X$ を，以下のように定める．

(1) 任意の開集合は $\mathfrak{F}_X$ に属す．

(2) $\mathfrak{F}_X$ の有限個の元の共通部分は $\mathfrak{F}_X$ に属す．

(3) $\mathfrak{F}_X$ の元の補集合は $\mathfrak{F}_X$ に属す．

(4) 以上の操作を繰り返して得られる集合のみが $\mathfrak{F}_X$ の元である．

$\mathfrak{F}_X$ の元を X の constructible subset と呼ぶ．ひとつの Zariski space しか扱わない時は $\mathfrak{F}_X$ を $\mathfrak{F}$ と略す．

(a)　$\mathfrak{F}$={ Finite Disjoint Union of Locally Closed Subsets.} $=: \mathfrak{L}$

補題 Ex3.18.1. $Z \subseteq X$ :: finite union of locally closed then Z :: finite **disjoint** union of locally closed.

(証明). $Z = \bigcup_{i=1}^{r} C_i \cap O_i$ が disjoint union であるためには，$\bigcup_{i=1} C_i$ が locally closed subset の disjoint union で書ければ十分であることに注意する[†9]．実際，$\bigcup_{i=1} C_i = \bigcup_{j=1}^{s} D_j \cap V_j$ となったとする．

$$W_j = \bigcup_{i;\ C_i \cap D_j \cap V_j = D_j \cap V_j} O_i$$

とおくと，$C_i \cap D_j \cap V_j = D_j \cap V_j$ or $\emptyset$（以下の構成から分かる）から $\bigcup_i C_i \cap D_j \cap V_j \cap O_i = D_j \cap V_j \cap W_j$．これより以下が得られる．

$$\begin{aligned} Z &= \bigcup_{i=1}^{r} \left(\bigsqcup_{j=1}^{s} D_j \cap V_j \cap C_i \right) \cap O_i \\ &= \bigcup_{i=1}^{r} \bigcup_{j=1}^{s} D_j \cap V_j \cap C_i \cap O_i \\ &= \bigcup_{j=1}^{s} \bigcup_{i=1}^{r} D_j \cap V_j \cap C_i \cap O_i \\ &= \bigsqcup_{j=1}^{s} D_j \cap (V_j \cap W_j). \end{aligned}$$

$\bigcup_{i=1} C_i$ を locally closed subset の disjoint union で書く．$n = 1, \ldots, r$ に対し，

$$\Sigma_n = \{(i_1, \ldots, i_n) \mid i_1 < \cdots < i_n \wedge i_1, \ldots i_n \in \{1, \ldots, r\}\}$$

とおく．これは要素数 $\binom{r}{n-r}$ の有限集合である．さらに $\sigma = (i_1, \ldots, i_n) \in \Sigma_n$ に対して $C_\sigma = C_{i_1} \cap C_{i_n}$ とする．以下は明らかに locally closed.

$$K_\sigma = C_\sigma \cap \left(\bigcup_{m=n+1}^{r} \bigcup_{\tau \in \Sigma_m} C_\tau \right)^c$$

これらは disjoint である．実際に $\sigma \in \Sigma_n, \sigma' \in \Sigma_{n'}$ を考えてみる．$n < n'$ ならば明らかに disjoint. $n = n'$ のとき，例えば $\sigma = (i_1, \ldots, i_n), \sigma' = (i'_1, \ldots, i_n), i'_1 < i_1$ に対して $\sigma \cap \sigma' = (i'_1, i_1, \ldots, i_n)$ とすると，$C_\sigma \cap C_{\sigma'} = C_{\sigma \cap \sigma'}$ となる．$\sigma \cap \sigma' \in \Sigma_{n+1}$ なのでやはり disjoint. ∎

[†9] $[D_j \cap (V_j \cap W_j)] \cap [D_k \cap (V_k \cap W_k)] = ([D_j \cap V_j] \cap [D_k \cap V_k]) \cap (W_j \cap W_k) = \emptyset$

$\mathfrak{L}$ の元は，以下のように書ける．

$$\bigsqcup_{i=1}^{r}(C_i \cap O_i) \text{ where } \{C_i\}_{i=1}^{r}, \{O_i\}_{i=0}^{r} :: \text{closed,open subsets of } X.$$

$\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{L}$ は

$$\bigsqcup_{i=1}^{r} C_i \cap O_i = \left(\bigcap_{i=1}^{r}(C_i^c)^c \cap O_i\right)^c$$

から明らか．

$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$ を示すために，induction by construct of constructible subset を行う．開集合全体を $\mathfrak{F}_0$ とし，これらの元に (2),(3) の操作を $n(\geq 0)$ 回繰り返して得られる集合族を $\mathfrak{F}_n$ とする．任意の n について $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{L}$ であることを示す．(1) $\mathfrak{F}_0$ の元，すなわち開集合は明らかに $\mathfrak{L}$ に属す．以下，$\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{L}$ と仮定して，数学的帰納法により $\mathfrak{F}_{n+1} \subseteq \mathfrak{L}$ を示す．(2) $\mathfrak{F}_n$ の 2 個の元は $\mathfrak{L}$ に属す．それらの共通部分は $\mathfrak{F}_{n+1}$ に属すが，これは以下のように書ける．

$$\left(\bigsqcup_{i=1}^{r}(C_i \cap O_i)\right) \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{s}(D_i \cap P_i)\right) = \bigsqcup_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} (C_i \cap D_j) \cap (O_i \cap P_j).$$

よって $\mathfrak{F}_n$ の有限個の元の共通部分は $\mathfrak{L}$ に属す．(3) $\mathfrak{F}_n$ の元は $\mathfrak{L}$ に属す．その補集合は

$$\bigcap_{i=1}^{r}(C_i^c \cup O_i^c) = \bigcup_{1 \leq i,j \leq r} (C_i^c \cap O_j^c)$$

これは locally closed subset の union だから，Lemma より，$\mathfrak{L}$ に属す．以上より，任意の n について $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{L}$ である．まとめて，$\mathfrak{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{L}$

(b) Dense Constructible Subset In Irreducible Zariski Space.

constructible subset が dense なのはそれが generic point ζ を含むときに限る．これを示そう．(a) から constructible subset Z は以下のように書ける．

$$Z = \bigsqcup_{i=1}^{r}(C_i \cap O_i) \text{ where } \{C_i\}_{i=1}^{r}, \{O_i\}_{i=0}^{r} :: \text{closed,open subsets of } X.$$

Ex3.17d より，各 O_i は ζ を含む．なのですべての C_i が ζ を含まない時に限り Z は ζ を含まない．この時，$\zeta \notin \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ なので $\bigcup_{i=1}^{r} C_i$ は真の閉部分集合である．$C_i \cap O_i \subseteq C_i$ より

$$\mathrm{cl}_X(Z) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} C_i \subsetneq X$$

よって $\zeta \notin Z$ ならば Z は dense でない．

また，constructible subset Z が dense ならば，ある i について $\zeta \in C_i \cap O_i$ となる．しかも $\zeta \in C_i$ より $C_i = X$．よって $C_i \cap O_i = O_i \subseteq Z$ となり，Z は X の開集合を含む．

(c) $S \subseteq X$ :: Closed $\iff$ S :: Constructible And Stable Under Specialization.

($\Longrightarrow$) は constructible subset の定義と Ex3.17e から得られる．($\Longleftarrow$) を示す．

$Z = \bigsqcup_{i \in I_0} C_i \cap O_i$ をとり，$\bigcup_{i \in I_0} C_i$ を (X の)irreducible components に分解して $\bigcup_{i \in I_0} C_i = \bigcup_{(i,j) \in I_1} K_{ij}$ とする（X :: noetherian と Ch.I Prop1.5 を用いた）．更に，$K_{ij} \cap O_i \neq \emptyset$ となる

$(i,j) \in I_1$ を選び出して I_2 とする．この時 $Z = \bigcup_{(i,j)\in I_2} K_{ij} \cap O_i$ となる．さて，K_{ij} は irreducible なので $K_{ij} \cap O_i$ は K_{ij} の generic point ζ_{ij} を含む．Z が stable under specialization ならば以下が成り立つ．

$$\bigcup_{(i,j)\in I_2} K_{ij} = \bigcup_{(i,j)\in I_2} \mathrm{cl}_X(\{\zeta_{ij}\}) \subseteq Z \subseteq \bigcup_{(i,j)\in I_2} K_{ij}$$

よって $Z = \bigcup_{(i,j)\in I_2} K_{ij}$ となり，これは閉集合．

(d) If $f : X \to Y$ :: Continuous Map then $f^{-1}(\mathfrak{F}_Y) = \mathfrak{F}_X$.

すべて基本的な位相空間の結果である．(1) U :: open in Y について $f^{-1}(U)$ :: open in X．(2) $Z, W \in \mathfrak{F}_Y$ について $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$. (3) $Z \in \mathfrak{F}_Y$ について $f^{-1}(Z^c) = (f^{-1}(Z))^c$.

Ex3.19 Chevalley's Theorem on Constructible Set.

Ex3.20 Dimension.

Ex3.21 Spec of D.V. Ring Gives Counterexample for Ex3.20a,d,e.

Ex3.22 Dimension of the Fibres of a Morphism.

Ex3.23 $t(V \times W) = t(V) \times_{\mathrm{Spec}\, k} t(W)$.