

## Ex5.1 The Dual of Locally Free Module Sheaf.

$(X, \mathcal{O}_X)$  を ringed space とし,  $\mathcal{E}$  を有限階数の locally free  $\mathcal{O}_X$ -module とする. また,  $\mathcal{E}$  の双対を  $\check{\mathcal{E}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$  で定める. ( $\mathcal{H}om$  は Ex1.15 で定義されている.)  $\mathcal{E}^{\vee\vee}$  も同様である.

### 補題 Ex5.1.1

$\mathcal{F} :: \mathcal{O}_X$ -module,  $x \in X$  とする. このとき,  $x$  に対して  $n > 0$  が存在して

$$(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}))_x \cong (\mathcal{F}_x)^{\oplus n} \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_x).$$

(証明). Ex5.7 の内容は使う.  $U :: \text{open in } X$  を十分小さく取れば  $\mathcal{E}|_U$  は free module になる. したがって以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} & (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}))(U) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^{\oplus n}, \mathcal{F}|_U) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}|_U)^{\oplus n} \\ &\cong (\mathcal{F}|_U)^{\oplus n} \\ &= \varinjlim_{W \supseteq U} (\mathcal{F}(W))^{\oplus n} \end{aligned}$$

(TODO: 4 行目が怪しい) 最後で  $\bigoplus$  と  $\varinjlim$  が可換であることを用いた. このことから以下を得る.

$$\varinjlim_{U \ni x} \varinjlim_{W \supseteq U} (\mathcal{F}(W))^{\oplus n} = \varinjlim_{W \ni x} (\mathcal{F}(W))^{\oplus n} = (\mathcal{F}_x)^{\oplus n}.$$

あとは  $\mathcal{O}_{X,x}$ -module の同型から最後の同型を得る.

$$(\mathcal{F}_x)^{\oplus n} \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}((\mathcal{O}_{X,x})^{\oplus n}, \mathcal{F}_x) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_x).$$

■

$\mathcal{O}_X$ -homomorphism を構成し, それが stalk で module の射として isomorphism になっていることを確認する.

(a)  $\mathcal{E}^{\vee\vee} \cong \mathcal{E}$ .

写像  $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee}$  を以下のように定める.

$$(\Phi_U(s))_V(\phi) = \phi(s|_V) \quad \text{where } U, V :: \text{open in } X, V \subseteq U, s \in \mathcal{E}(U), \phi \in \check{\mathcal{E}}(V).$$

これが  $\mathcal{O}_X$ -homomorphism であることは明らか.  $x \in X$  を任意にとると,  $\Phi_x$  は以下ようになる.

$$\Phi_x(s_x)(\phi_x) = \phi_x(s_x) \quad \text{where } s_x \in \mathcal{E}_x, \phi_x \in \check{\mathcal{E}}_x$$

補題より,  $\check{\mathcal{E}}_x, (\mathcal{E}^{\vee\vee})_x$  が計算できる.

$$\check{\mathcal{E}}_x \cong \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)_x \cong (\mathcal{E}_x)^*, \quad (\mathcal{E}^{\vee\vee})_x \cong \text{Hom}(\check{\mathcal{E}}_x, \mathcal{O}_{X,x}) = (\mathcal{E}_x)^{**}.$$

ただし,  $(\mathcal{E}_x)^*$  は  $\mathcal{E}_x$  の  $\mathcal{O}_{X,x}$ -module としての双対である.  $(\mathcal{E}_x)^*$  は free module だから, 上記の同型が成り立つ. 上記の  $\Phi_x : \mathcal{E}_x \rightarrow (\mathcal{E}^{\vee\vee})_x \cong (\mathcal{E}_x)^{**}$  が同型写像であることはよく知られている. よって Prop1.1 より,  $\Phi$  も同型.

(b) For any  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \check{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$ .

写像  $\Psi$  を以下で定める.

$$\begin{aligned} \Psi_U : \quad \check{\mathcal{E}}(U) \otimes \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U) \\ \phi_U \otimes f &\mapsto [\mathcal{E}(V) \ni s \mapsto \phi_V(s) \cdot f|_V \in \mathcal{F}(V)] \end{aligned}$$

ただし  $U, V$  は  $X$  の開集合で  $V \subseteq U$  を満たし,  $[\ ]$  内は  $\mathcal{E}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  の写像の定義である. この  $x \in X$  における stalk は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \Psi_x : \quad \text{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{O}_{X,x}) \otimes \mathcal{F}_x &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_x) \\ \phi_x \otimes f_x &\mapsto [\mathcal{E}_x \ni s_x \mapsto \phi_x(s_x) \cdot f_x \in \mathcal{F}_x] \end{aligned}$$

(c) For any  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G}))$

$U :: \text{open in } X$  を任意に取る. テンソル積の定義 (普遍性) より, 以下が成り立つ.

$$\text{Hom}(\mathcal{E}(U) \otimes \mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}(U), \text{Hom}(\mathcal{E}(U), \mathcal{G}(U)))$$

テンソル積と  $\text{Hom}$  は  $\mathcal{O}_X(U)$ -module としてのものである. あとは

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{E}(U), \mathcal{G}(U)) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G})(U)$$

を示せば良い. (TODO: 主張自体が怪しい.) これは以下の写像で得られる.

$$\begin{aligned} \Theta_U : \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G})(U) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{E}(U), \mathcal{G}(U)) \\ \phi : \mathcal{E}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U &\mapsto \phi_U : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \end{aligned}$$

これは  $x \in U$  について  $\Theta_x : \phi_x \mapsto \phi_x$  を与えるから, 同型写像.

(d) Projection Formula.

$f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$  を ringed space の morphism とし,  $\mathcal{F}$  を  $\mathcal{O}_X$ -module,  $\mathcal{E}$  を finite rank locally free  $\mathcal{O}_Y$ -module とする. すると  $f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \cong f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}$  という自然同型がある. これを示す.

米田の補題を用いて証明する.  $\mathcal{G}$  を任意の  $\mathcal{O}_Y$ -module とする.

$$\begin{aligned} &\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{E})) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{E}) && (\text{Ex1.18}) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{E}^{\sim\sim}) && (a) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes (f^*\check{\mathcal{E}})^{\sim}) && (?) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\check{\mathcal{E}}, \mathcal{F})) && (b) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G} \otimes f^*\check{\mathcal{E}}, \mathcal{F}) && (c) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}), \mathcal{F}) && (?) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}, f_*\mathcal{F}) && (\text{Ex1.18}) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H}om(\check{\mathcal{E}}, f_*\mathcal{F})) && (c) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{E}^{\sim\sim} \otimes f_*\mathcal{F}) && (b) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}) && (a) \end{aligned}$$

$\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{E}}^\vee, f^*\mathcal{E}$  が finite rank locally free module であることは容易に分かる。残すは以下の2つの主張である。

主張 Ex5.1.2

$$f^*\check{\mathcal{E}}^\vee \cong (f^*\check{\mathcal{E}})^\vee.$$

(証明).  $U :: \text{open in } X$  をとる.

$$\begin{aligned} (f^*\check{\mathcal{E}})^\vee &= \mathcal{H}om(f^{-1}\check{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_X) \\ &= f^{-1}\mathcal{H}om(\check{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_X) \\ &= f^{-1}\check{\mathcal{E}}^\vee \otimes \mathcal{O}_X \end{aligned}$$

ここで  $\mathcal{H}om(f^{-1}*, *) \cong f^{-1}\mathcal{H}om(*, *)$  とした。TODO: どう示す。 ■

主張 Ex5.1.3

$$f^*\mathcal{G} \otimes f^*\check{\mathcal{E}} \cong f^*(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}).$$

(証明).

$$\begin{aligned} &f^*\mathcal{G} \otimes f^*\check{\mathcal{E}} \\ &= (f^{-1}\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) \otimes (f^{-1}\check{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{O}_X) \\ &\cong (f^{-1}\mathcal{G} \otimes f^{-1}\check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ &\cong f^{-1}(\mathcal{G} \otimes f^{-1}\check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ &\cong f^{-1}f^{-1}(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ &= f^{-1}(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ &= f^*(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}) \end{aligned}$$

ここで  $f^{-1}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \cong (f^{-1}\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$  を用いた。 ■

## Ex5.2 Module Sheaves over the Spec of a D.V.R.

$R :: \text{D.V.R.}, X = \text{Spec } R, K = \text{Quot}(R)$  とおく。  $X$  は2点空間  $\{\zeta, \mathfrak{m}\}$  ( $\zeta = (0)$ ) であり、開集合系は  $\{\emptyset, \{\zeta\}, X\}$  である。

(a)  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{F} \leftrightarrow \rho : M \otimes_R K \rightarrow L$ .

$\mathcal{F} :: \mathcal{O}_X$ -module をとる。  $\mathcal{O}_X(\{\zeta\}) = K, \mathcal{O}_X(X) = R$ <sup>†1</sup> だから、  $\mathcal{F}$  は  $K$ -module  $L = \mathcal{F}(\{\zeta\})$  と  $R$ -module  $M = \mathcal{F}(X)$  と、以下の図式を可換にする restriction map  $\tilde{\rho}$  で与えられる。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & L \\ \uparrow & \tilde{\rho} & \uparrow \\ R & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & K \end{array}$$

<sup>†1</sup>  $\mathcal{O}_X(\{\zeta\})$  は affine scheme の sheaf の定義から分かる。つまり、  $\mathcal{O}_X(\{\zeta\})$  の元は  $\{\zeta\} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\zeta} = K$  の写像であって local には  $R$  の元の分数で書けるものである。  $\{\zeta\}$  は1点集合だから、これは  $\zeta \mapsto f/g \in K$  なる写像全体を取れば良い。  $\mathcal{O}_X(\{\zeta\})$  と  $K$  に集合としての全単射だけでなく同型もあることは自明であろう。一般に、点  $x \in X$  について  $\{x\}$  が開集合ならば  $\mathcal{F}(\{x\}) \cong \mathcal{F}_x$ 。

ここで  $l: R \rightarrow K = R_{(0)}$  は標準的な局所化写像である。したがって  $L$  も  $R$ -module とみなせて、以下の図式にある  $\rho: m \otimes x \mapsto \tilde{\rho}(m) \cdot x$  が得られる。

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_R K & & \\ \uparrow & \searrow \rho & \\ M & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & L \\ \uparrow & & \uparrow \\ R & \xrightarrow{l} & K \end{array}$$

逆に  $\rho: M \otimes_R K \rightarrow L$  があるとき、 $\tilde{\rho} = \rho|_{M \otimes R}$  とすれば  $\tilde{\rho}: M \rightarrow L$  が得られる。

(b)  $\mathcal{F} :: \text{quasi-coherent} \iff \rho :: \text{isomorphism}$ .

■  $\implies$ .  $\mathcal{F} :: \text{quasi-coherent}$  のとき、 $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$  とすると、Prop5.1a から  $\mathcal{F} = \tilde{M}$ .  $\tilde{M}$  の定義から、restriction map  $\tilde{\rho}$  は次のようなものである。

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}: M &\rightarrow \tilde{M}(\{\zeta\}) \\ m &\mapsto [\zeta \mapsto m/1 \in M_\zeta] \end{aligned}$$

こうして  $\rho$  が定まる。

$$\begin{aligned} \rho: M \otimes K &\rightarrow \tilde{M}(\{\zeta\}) \\ m \otimes x &\mapsto [\zeta \mapsto x(m/1) \in M_\zeta] \end{aligned}$$

逆写像が  $[\zeta \mapsto m/s] \mapsto m \otimes (1/s)$  (この逆写像が加群準同型かつ well-defined map であることは容易に分かる) で定まるからこれは同型である。

■  $\longleftarrow$ . 仮定より、

$$\mathcal{F}(X) = M, \quad \mathcal{F}(\{\zeta\}) = L \cong M \otimes K \cong M_\zeta \cong \tilde{M}(\{\zeta\})$$

なので  $\mathcal{F} = \tilde{M}$ .

### Ex5.3 $\tilde{\square}$ and $\Gamma(X, \square)$ are Adjoint Pair.

$A :: \text{ring}$ ,  $X = \text{Spec } A$  とする。この時、 $\tilde{\square}$  と  $\Gamma(X, \square)$  は adjoint である。すなわち、任意の  $M :: A\text{-module}$ ,  $\mathcal{F} :: \mathcal{O}_X\text{-module}$  について、

$$\text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathcal{F}).$$

写像  $\Phi: \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathcal{F})$  を次のように定める。  $U :: \text{open in } X$  に対し、 $\tilde{M}(U)$  の元  $s$  は

$$\begin{aligned} \sigma: U &\rightarrow M_u \\ u &\mapsto m/s \end{aligned}$$

のような写像である。この元  $\sigma$  を  $\alpha \in \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$  によって以下のように写す。

$$\begin{aligned} (\Phi(\alpha))_U: \tilde{M}(U) &\rightarrow \mathcal{F}(U) \\ \sigma &\mapsto \bar{\alpha}(\sigma)|_U \end{aligned}$$

ただし  $A_u$ -module homomorphism  $\alpha_{(u)}$  を  $m/s \mapsto \alpha(m)/s$  で定めた.

TODO:  $A$ -module homomorphism  $\alpha \in \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$  に対し,  $A_x$ -module homomorphism  $\tilde{M}_x \rightarrow \mathcal{F}_x$  は  $m/s \mapsto \alpha(m)_x/s$  で定まる. これを貼り合わせれば良い.

## Ex5.4 The Original Definition of (Quasi-)Coherent Sheaves.

■quasi-coherent  $\iff$  cokernel of free sheaves locally.  $\mathcal{F} ::$  sheaf on  $X$  が quasi-coherent ならば, 任意の open affine subset  $U = \text{Spec } A$  について  $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$  となる  $A$ -module  $M$  が存在する (Prop5.4).  $M$  は cokernel of free module として表現できる (Ati-Mac Prop2.3 の証明を参照せよ) から, 完全列  $0 \rightarrow A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0$  に対して functor  $\tilde{\phantom{x}}$  を用いれば  $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$  は cokernel of free sheaves で表現できる事が得られる<sup>†2</sup>. 逆は free sheaf が quasi-coherent であることと Prop5.7 より従う.

■coherent  $\iff$  cokernel of finite rank free sheaves locally.  $X$  が Noetherian で  $\mathcal{F}$  が coherent ならば, 任意の open affine subset  $U = \text{Spec } A$  について  $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$  となる finitely generated  $A$ -module  $M$  が存在する (Prop5.4).  $\tilde{M}$  が finite rank free sheaf であることは quasi-coherent の場合と同様. 逆は finite rank free sheaf が coherent であることと Prop5.7 より従う.

## Ex5.5 Is $f_*\mathcal{F}$ Coherent?

(a) An Example that  $\mathcal{F}$  is Coherent but  $f_*\mathcal{F}$  is NOT Coherent.

材料は次の通り.

$$A = \mathbb{C}, \quad B = \mathbb{C}[x], \quad X = \text{Spec } A = \text{Spec } \mathbb{C}, \quad \mathcal{F} = \tilde{\mathbb{C}} = \mathcal{O}_X.$$

明らかに  $\mathcal{F}$  は coherent  $\mathcal{O}_X$ -module である (Example 5.2.1).  $f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$  を標準的埋込み  $A \hookrightarrow B$  から誘導されるものとする, Prop5.1e より

$$f_*\mathcal{F} \cong (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x])^{\sim} \cong (\mathbb{C}[x])^{\sim} = \tilde{B}$$

となる.  $B = \mathbb{C}[x]$  は明らかに finitely generated  $A$ -module でない.

(b) Closed Immersion is a Finite Morphism.

$f : X \rightarrow Y ::$  closed immersion をとる.  $Y$  の open affine subset  $U = \text{Spec } A$  をとり,  $V = f^{-1}(U)$  とすると,  $f|_V : V \rightarrow \text{Spec } A$  は closed immersion になっている. Cor5.10 (あるいは Ex3.11b) より  $V \cong \text{Spec } A/\mathfrak{a}$  となるイデアル  $\mathfrak{a}$  が存在する.

以上から任意の open affine subset  $U = \text{Spec } A \subseteq Y$  に対し  $V = f^{-1}(U) = \text{Spec } A/\mathfrak{a}$  かつ  $B ::$  finitely generated  $A$ -module ( $1 + \mathfrak{a}$  で生成される) なので  $f ::$  finite.

(c) If  $X, Y ::$  noetherian schemes,  $f : X \rightarrow Y ::$  finite and  $\mathcal{F} ::$  coherent on  $X$ , then  $f_*\mathcal{F} ::$  coherent.

$f ::$  finite から, 任意の affine open subset  $\text{Spec } B \subset Y$  に対して  $f^{-1} \text{Spec } B$  は affine scheme  $\text{Spec } A$  であり, かつ  $A ::$  finitely generated  $B$ -module である.  $U = \text{Spec } A, V = \text{Spec } B$  としておこう.

<sup>†2</sup> Ex5.3 から  $\tilde{\phantom{x}}$  は left adjoint なので direct sum (colimit) と可換であることに注意.

Prop5.4 より,  $\mathcal{F}|_{\text{Spec } A} = \tilde{M}$  なる finitely generated  $A$ -module  $M$  が存在する.  $f|_U : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$  だから Prop5.1 から

$$(f_*\mathcal{F})|_V \cong f_*(\mathcal{F}|_U) \cong f_*\tilde{M} \cong (M \otimes_B A).$$

(一番左の同型は任意の  $V$  の開集合上での section を見れば良い.) 今  $M, B$  は共に finitely generated  $A$ -module だから,  $f_*\tilde{M}$  も finitely generated  $\mathcal{O}_V$ -module.  $V$  は任意の affine open subset としていたから,  $f_*\mathcal{F} :: \text{coherent}$ .

## Ex5.6 Support.

(a)  $\text{Supp } m = V(\text{Ann}(m))$ .

$A :: \text{ring}$ ,  $M :: A\text{-module}$ ,  $X = \text{Spec } A$  とおく. さらに  $\mathcal{F} = \tilde{M}$  とする.  $m \in M = \Gamma(X, \mathcal{F})$  について,  $\text{Supp } m = \{\mathfrak{p} \in X \mid m_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$  を考える.  $\text{Ann } m = \{a \in A \mid am = 0\}$  とする.

$$m_{\mathfrak{p}} = 0 \iff \exists a \in A - \mathfrak{p}, \quad am = 0$$

だから,  $m_{\mathfrak{p}} \neq 0$  となるのは  $(A - \mathfrak{p}) \cap \text{Ann } m = \emptyset$  であるとき, すなわち  $\text{Ann } m \subseteq \mathfrak{p}$  となっているときである. よって  $\text{Supp } m = V(\text{Ann } m)$ .

(b) If  $X :: \text{Noetherian}$  and  $M :: \text{Finitely Generated}$ , then  $\text{Supp } \mathcal{F} = V(\text{Ann } M)$ .

Prop5.1 から  $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$ .  $M$  の生成元全体を  $G$  とすると, 以下のようになる.

$$M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \iff \exists g \in G, \quad g_{\mathfrak{p}} \neq 0 \iff \exists g \in G, \quad \mathfrak{p} \supseteq \text{Ann } g \iff \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{g \in G} \text{Ann } g.$$

$\text{Ann } M = \bigcap_{g \in G} \text{Ann } g$  は明らか. よって  $\text{Supp } \mathcal{F} = V(\text{Ann } M)$ .

(c) The Support of a Coherent Sheaf on a Noetherian Scheme is Closed.

$\mathcal{F}|_U$  が finitely generated module ならば  $\text{Supp } \mathcal{F}|_U :: \text{closed}$ . このような開集合  $U$  は有限個で十分だから  $\text{Supp } \mathcal{F}$  が閉集合の有限和となり, したがって閉集合である.

(d)  $\Gamma_a(M) \cong \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ .

(e)  $\mathcal{F} :: (\text{Quasi-})\text{Coherent} \implies \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) :: (\text{Quasi-})\text{Coherent}$ .

## Ex5.7 A Sheaf is Locally Free $\iff$ Its Stalks are Free.

$(X, \mathcal{O}_X)$  を noetherian ringed space とし,  $\mathcal{F}$  を coherent sheaf とする.

(a)  $\mathcal{F}_x :: \text{free} \implies \mathcal{F}|_U$  is free for a  $x \in U :: \text{open in } X$ .

$\mathcal{F} :: \text{coherent}$  より,  $\mathcal{F}|_U = \tilde{M}$  となる  $U = \text{Spec } A :: \text{open in } X$  と  $M :: \text{finitely generated } A\text{-module}$  が存在する.  $M$  の generator が  $n$  個あるとすると, finite rank free module  $A^{\oplus n}$  の generator を  $M$  の generator に写す surjective module homomorphism  $f$  によって exact sequence が出来る.

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow A^{\oplus n} \xrightarrow{f} M \longrightarrow \text{coker } f = 0 \longrightarrow 0$$

この exact sequence を functor  $\tilde{\square}$  で写し  $x$  での stalk をとると, Prop5.2, 5.1 から, 再び exact sequence が得られる.

$$0 \longrightarrow \ker f_x \longrightarrow (A_x)^{\oplus n} \xrightarrow{f_x} M_x \longrightarrow \operatorname{coker} f_x = 0 \longrightarrow 0$$

今  $(\mathcal{F}|_U)_x = \tilde{M}_x = M_x$  だから,  $f$  の作り方から  $f_x :: \text{iso.}$  よって  $\ker f_x = 0$ . したがって十分小さな開集合  $(x \in) V (\subseteq U)$  をとれば  $\ker f|_V = 0$  となる.  $f :: \text{iso on } V$  ということになるから,  $\Gamma(V, \mathcal{F}|_V) \cong A^{\oplus n}$ ,  $\mathcal{F}|_V \cong (A^{\oplus n})^\sim$ .

(b)  $\mathcal{F} :: \text{locally free} \iff \mathcal{F}_x \text{ are free } \mathcal{O}_{X,x}\text{-modules for all } x \in X.$

$\implies$  は定義から,  $\impliedby$  は (a) から明らか.

(c)  $\mathcal{F} :: \text{invertible} \iff \exists \mathcal{G} :: \text{coherent}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X.$

■  $\implies$ .  $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{F}}$  とおくと, Ex5.1b から

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{O}_X.$$

■  $\impliedby$ .  $x \in X$  を任意にとり, stalk をみる.  $\mathcal{F}, \mathcal{G} :: \text{coherent}$  だから,  $\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x$  は finitely generated  $\mathcal{O}_{X,x}$ -module と同型である.

$$M_x \otimes N_x \cong \mathcal{O}_{X,x}.$$

$\{\text{id}_{\mathcal{O}_{X,x}}\} = \text{Hom}(M_x \otimes N_x, *) \cong \text{Hom}(M_x, \text{Hom}(N_x, *))$  だから  $M_x \cong \mathcal{O}_{X,x}$  (?). (a) から  $\tilde{M} \cong \mathcal{O}_X$  が得られる. よって  $\mathcal{F}$  は invertible.

Ex5.8  $\phi(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x).$

$X :: \text{noetherian scheme}, \mathcal{F} :: \text{coherent sheaf on } X$  とする.

$$\phi(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x), \quad k(x) = \mathcal{O}_x / \mathfrak{p}_x$$

という関数を考えよう. Ati-Mac Ex2.1 から  $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x) \cong \mathcal{F}_x / \mathfrak{p}_x \mathcal{F}_x$ .

(a)  $\phi :: \text{upper semi-continuous}.$

任意の  $n \in \mathbb{Z}$  について  $\phi^{-1}(\mathbb{Z}_{\geq n}) :: \text{closed in } X$  を示す.  $\mathcal{F}|_U$  が  $A = \mathcal{O}_X(U)$  と置いた時 finitely generated  $A$ -module  $M$  を用いて  $\tilde{M}$  と書けるような  $U :: \text{open in } X$  をとる. このような  $U$  で  $X$  を被覆できるから,  $U \cap \phi^{-1}(\mathbb{Z}_{\geq n}) :: \text{closed in } U$  を示せば十分である.

Prop5.1 から  $x \in U$  について  $\mathcal{F}_x \cong M_x$ . 完全列  $0 \rightarrow \mathfrak{m}_x M_x \rightarrow M_x \rightarrow M_x / \mathfrak{m}_x M_x \rightarrow 0$  と,  $\mathfrak{m}_x = 0$  in  $k(x)$  を考えれば,  $\phi(x) = \dim_{k(x)} M_x$  と分かる.  $M$  の最小の生成元集合を  $G$  とおくと,  $\dim_{k(x)} M_x$  は  $g_x \neq 0$  であるような  $g \in G$  の個数に等しい. そこで次の集合をとる.

$$\bigcup_{G_n \subseteq G} \bigcap_{g \in G_n} \text{Supp } g \subseteq U$$

この集合の点では  $n$  個以上の  $g \in G$  が 0 にならず,  $\phi(x) \geq n$  となる. ただし  $\bigcup_{G_n \subseteq G}$  は丁度  $n$  個の元を持つ  $G$  の部分集合  $G_n$  すべてを渡る. Ex5.6a より,  $g \in G$  について  $\text{Supp } g :: \text{closed}$  で,  $G$  は有限だから, これは閉集合である.

(b) If  $\mathcal{F} :: \text{locally free}$  and  $X :: \text{connected}$  then  $\phi :: \text{constant}$ .

$\mathcal{F} :: \text{locally free}$  から,  $U :: \text{open in } X$  について,  $A_U = \mathcal{O}_X(U)$  とおくと  $\mathcal{F}|_U = (A_U^{\oplus n_U})^\sim$  となる  $n_U$  が存在する. したがって  $U$  においては  $\phi$  の値は常に  $n_U$  である. この  $n_U$  を  $\text{rank } \mathcal{F}|_U$  と書くことにする.

さて,  $U \subseteq V$  ならば,  $\mathcal{F}|_U = (\mathcal{F}|_V)|_U = ((A_V^{\oplus n_V})^\sim)|_U$  なので  $\text{rank } \mathcal{F}|_U = \text{rank } \mathcal{F}|_V$ . ここから一般に,  $U \cap V \neq \emptyset$  ならば  $\text{rank } \mathcal{F}|_U = \text{rank } \mathcal{F}|_V$  だと分かる. このことを元に次の同値関係を考える.

$$U \sim V \iff \exists W_1, \dots, W_s :: \text{open in } X, U \cap W_1, W_1 \cap W_2, \dots, W_s \cap V \neq \emptyset.$$

$U \sim V$  ならば  $\text{rank } \mathcal{F}|_U = \text{rank } \mathcal{F}|_V$  であることは今や明らか.  $X :: \text{connected}$  より, この同値関係による  $X$  の開集合の同値類はただひとつ. よって  $\phi :: \text{constant}$ .

(c) If  $X :: \text{reduced}$  and  $\phi :: \text{constant}$  then  $\mathcal{F} :: \text{locally free}$ .

$\mathcal{F}|_U = \tilde{M}$  となるような  $U :: \text{affine open in } X$ ,  $M :: \text{finitely generated } A\text{-module}$  ( $A := \mathcal{O}_X(U)$ ) をとる.  $X :: \text{reduced noetherian scheme}$  より  $A :: \text{reduced noetherian ring}$ .

点  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A = U$  をとり,  $n = \phi(\mathfrak{p})$  とする. 次の完全列を考える.

$$0 \longrightarrow \ker \iota_{\mathfrak{p}} \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}^{\oplus n} \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

$A^{\oplus n}$  の標準基底を  $\{e_i\}_{i=1}^n$  とすると,  $\iota$  は  $e_i \mapsto g_i$  なるものである.  $k(\mathfrak{p}) :: \text{field}$  は平坦だから,  $\otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p})$  は完全列を保つ.

$$0 \longrightarrow (\ker \iota_{\mathfrak{p}}) \otimes k(\mathfrak{p}) \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}^{\oplus n} \otimes k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{p}} \otimes 1} M_{\mathfrak{p}} \otimes k(\mathfrak{p}) \longrightarrow 0.$$

$n = \dim_{k(\mathfrak{p})} A_{\mathfrak{p}}^{\oplus n} \otimes k(\mathfrak{p}) = \dim_{k(\mathfrak{p})} M_{\mathfrak{p}} \otimes k(\mathfrak{p})$  と  $\dim_{k(\mathfrak{p})}$  の加法性から,  $(\ker \iota_{\mathfrak{p}}) \otimes k(\mathfrak{p}) = 0$ . 変形すると  $\ker \iota_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} \ker \iota_{\mathfrak{p}} = 0$ .  $\ker \iota_{\mathfrak{p}}$  は  $A_{\mathfrak{p}}$ -module だったから, 中山の補題より  $\ker \iota_{\mathfrak{p}} = 0$ .

$\iota : A^{\oplus n} \rightarrow M$  を, 生成元を生成元へ写す標準的全射とする. もし  $\ker \iota \neq 0$  ならば,  $\ker \iota_{\mathfrak{p}} \neq 0$  であるような  $\mathfrak{p}$  がとれる (by  $A :: \text{reduced?}$ ). ((a)での議論と  $\phi :: \text{constant}$  から,  $M$  の生成元の任意の点での局所化は常に non-zero.) しかし上での議論から常に  $\ker \iota_{\mathfrak{p}} = 0$  だから,  $\ker \iota = 0$ . よって  $M :: \text{free module}$ .

## Ex5.9 Quasi-Finitely Generated Graded $S$ -Modules.

## Ex5.10 Saturated Ideals and Closed Sub-Schemes.

$S = A[x_0, \dots, x_n]$ ,  $X = \text{Proj } S$  とおく. 既に homogeneous ideal  $I \subset S$  が  $X$  の closed subscheme を定めること (Ex3.12), 逆に  $X$  の closed subscheme はこのように定まることを示した (5.16). homogeneous ideal  $I \subset S$  に対し, その saturation を以下で定める.

$$\bar{I} = \{s \in S \mid \forall i = 0, \dots, n, \exists n \geq 0, x_i^n s \in I\}$$

$I = \bar{I}$  の時,  $I$  は saturated ideal であると言われる.  $S$  の saturated ideal と  $X$  の closed subscheme の間に一対一対応があることを示そう.



### Ex5.11 The Segre Embedding.

$S, T$  を  $S_0 = T_0 = A$  であるような graded ring とする. ( $S, T$  は  $A$ -module である.) これらの Cartesian product  $S \times_A T$  を  $\bigoplus_{d \geq 0} S_d \otimes_A T_d$  とする.  $X = \text{Proj } S, Y = \text{Proj } T$  の時,  $\text{Proj}(S \times_A T) = X \times_A Y$  であること, 加えて  $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S \times_A T)}(1) \cong (\text{pr}_1^* \mathcal{O}_X(1)) \otimes (\text{pr}_2^* \mathcal{O}_Y(1))$  となることを示す.

### Ex5.12 Very Ample Invertible Sheaves.

### Ex5.13 The $d$ -uple Embedding.

$S$  :: graded ring とし,  $S_0$ -algebra として  $S_1$  で生成されているとする. この  $S$  と正整数  $d > 0$  に対して

$$S_n^{(d)} := S_{nd}, \quad S^{(d)} := \bigoplus_{n \geq 0} S_n^{(d)}$$

とおく.  $\text{Proj } S^{(d)} \cong \text{Proj } S$  を示そう.

仮定より  $S_1$  が  $S$  を  $S_0$ -algebra として生成する. また, 明らかに  $S_1^{(d)} = S_d$  が  $S^{(d)}$  を  $S_0$ -algebra として生成する. そこで  $g_0 \in S_1$  を適当にとる. すると  $f \in S_1$  について  $S_{(f)} = S_{(ff_0^{d-1})}^{(d)}$  が簡単に分かる.

$$\frac{a}{f^n} = \frac{a \cdot f_0^{n(d-1)}}{f^n \cdot f_0^{n(d-1)}}.$$

ここで  $a, f^n \in S_n, a f_0^{n(d-1)}, f^n f_0^{n(d-1)} \in S_n^{(d)}$  に注意する. 逆に  $f' \in S_1^{(d)}$  をとると,  $f \setminus f'$  であるような  $f \in S_1$  について  $S_{(f)} = S_{(f')}^{(d)}$  となる. したがって次が分かる.

$$\forall f \in S_1, f' \in S_1^{(d)}, f \setminus f' \implies \text{Spec } S_{(f)} = \text{Spec } S_{(f')}^{(d)}.$$

$S$  の生成元  $f \in S_1$  (resp.  $S^{(d)}$  の生成元  $f' \in S_1^{(d)}$ ) を様々に取れば  $\text{Spec } S_{(f)}$  (resp.  $\text{Spec } S_{(f')}^{(d)}$ ) で  $\text{Proj } S$  (resp.  $\text{Spec } S^{(d)}$ ) を被覆できる ( $S_1$  の  $n$  個の元の積全体で  $S_1^{(d)}$  は生成されるから  $f'$  に対応する  $f$  は常に存在すると考えて良い). よって  $\text{Proj } S \cong \text{Proj } S^{(d)}$ .

$S_1$  の  $n$  個の元の積  $f'$  をとり,  $f \setminus f'$  となる  $f \in S_1$  をとる.  $X_{(f')} = \text{Spec } S_{(f')}^{(d)}$  上の  $\mathcal{O}(1)$  の元

$$h \cdot \frac{a'}{f'^n} \quad (a' \in S_n^{(d)}, h \in S_1^{(d)})$$

は, 分子分母に  $(f/f')^n$  をかければ直ちに

$$h \cdot \frac{a}{f^n} \quad (a \in S_n, h \in S_d)$$

と読み替えられる. よって  $\mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f')}^{(d)}}(1) = \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}}(d)$ ,  $\mathcal{O}_{\text{Spec } S^{(d)}}(1) = \mathcal{O}_{\text{Spec } S}(d)$ .

### Ex5.14 The $d$ -uple Embedding is Projectively Normal.

これは ch I, Ex3.17b で私が考察したことの Scheme における一般化である.

$A$  :: ring,  $S_A^r = A[x_0, \dots, x_r]$ ,  $X$  :: closed subscheme of  $\mathbb{P}_A^r = \text{Proj } S_A^r$  とおく.  $i: X \rightarrow \mathbb{P}_A^r$  を埋め込みとし,  $\mathcal{I}_X = \ker i^\#$  とおく. さらに  $n \in \mathbb{Z}$  に対して以下のように定義する (p.50, p.117, p.118).

$$S_A^r(n) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} (S_A^r)_{d+n}, \quad \mathcal{O}_X(n) = (S_A^r(n))^\sim, \quad \mathcal{I}_X(n) = \mathcal{I}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n), \quad \Gamma_*(\mathcal{I}_X) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{I}_X(d))$$

Ex3.12, Cor5.12 より,  $I = \Gamma_*(\mathcal{I}_X), S(X) = S_A/I$  とおくと  $X \cong \text{Proj } S(X)$  となる. また,  $X$  が normal であるとは, 任意の点で  $X$  の local ring が integrally closed であることで,  $X$  が projectively normal であるとは,  $S(X)$  が integrally closed であることである.

以下  $k ::$  integrally closed field,  $X ::$  connected normal closed subscheme of  $\mathbb{P}_k^r$  とし,  $S = S(X)$  とする.  $X$  の  $d$ -uple embedding(Ex5.13) が十分大きな  $d > 0$  について projectively normal であることを示す.

(a)  $S ::$  domain and  $S' := \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = \bar{S}$ .

■  $S ::$  not domain  $\implies \exists f \in S_+, S_{(f)} ::$  not domain.  $S ::$  not domain と仮定し,  $ab = 0$  となる  $a, b \in S - \{0\}$ , 及びゼロ因子でない元  $f \in S_1$  をとる (?). (次数さえ揃えれば  $f \in S_+$  でよい. しかし面倒なので  $f \in S_1$  をとる.) すると任意の  $r > 0$  について  $f^r a, f^r b \neq 0$  なので  $\frac{a}{f^{\deg a}}, \frac{b}{f^{\deg b}} \in S_{(f)}$  は 0 でない. しかしこの 2 元は明らかに  $S_{(f)}$  のゼロ因子である. したがって  $S ::$  not domain ならば  $S_{(f)} ::$  not domain.

■  $X ::$  integral scheme.  $X ::$  integral scheme ならば, 任意の  $f \in S_+$  について  $\mathcal{O}_X(D_+(f)) = S_{(f)} ::$  domain. したがって前段落より  $S ::$  domain とわかる. なので  $X ::$  integral scheme を示す. まず  $X ::$  normal より, 任意の  $x \in X$  について  $\mathcal{O}_{X,x} ::$  integral. なので Ex2.3a より  $X ::$  reduced. 次の段落で証明するとおり  $X ::$  irreducible もわかる. Prop1.1 から  $X ::$  integral scheme. (以上の証明から,  $X ::$  normal scheme  $\implies X ::$  disjoint union of integral schemes が分かる.)

■  $X ::$  irreducible.  $X$  が二つ以上の異なる irreducible component を持っていたとして, それぞれ  $C_1, C_2$  とする.  $X ::$  connected より,  $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$  であるようにとれる. そこで  $x \in C_1 \cap C_2$  をとると,  $\mathcal{O}_{X,x}$  は integrally closed になり得ない. 実際,  $x \in \text{Spec } R = U$  を affine open subset とすると,  $U$  は二つの異なる irreducible component  $U \cap C_1, U \cap C_2$  をもつから,  $R$  はこれらに対応する 2 つの極小素イデアル  $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$  をもつ.  $x$  に対応する素イデアル  $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p}_1) \cap V(\mathfrak{p}_2)$  での局所化によって  $R$  の極小素イデアルが消えることはないから, 結局  $R_{\mathfrak{q}} \cong \mathcal{O}_{X,x}$  は二つの極小素イデアルをもつ. これは  $\mathcal{O}_{X,x} ::$  integral domain に反する. よって  $X ::$  irreducible.

■  $\mathcal{J}_x$  の元.  $\mathcal{J} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(n)$  とおくと  $S' = \Gamma(X, \mathcal{J})$  とみなせる. 点  $x \in X$  をとり,  $\mathcal{J}_x$  を考えよう. direct sum と stalk (どちらも direct limit) は可換だから,

$$\mathcal{J}_x = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{O}_X(n))_x = \bigoplus_{n \geq 0} (S(n))_x.$$

各  $(S(n))_x$  は次のような集合である.

$$(S(n))_x = (S(n))_{(\mathfrak{p}_x)} = \left\{ \frac{a}{f} \mid d \geq 0, f \in (S - \mathfrak{p}_x)_d, a \in (S(n))_d = S_{d+n} \right\}.$$

ただし  $\mathfrak{p}_x$  は点  $x$  に対応する  $S$  の斉次素イデアルである.  $n \geq 0$  だから

$$\mathcal{J}_x = \left\{ \frac{a}{f} \in S_{\mathfrak{p}_x} \mid f :: \text{homogeneous, } \text{ord } a \geq \deg f \right\}.$$

ここでの  $\deg, \text{ord}$  は  $S$  に付与されているものである. ただし  $\text{ord } a$  は  $a$  が持つ斉次成分の次数で最低のものである.  $\text{Quot}(\mathcal{J}_x) = \text{Quot}(S)$  も分かる.

■  $\mathcal{J}_x ::$  integrally closed.  $\mathcal{J}_x ::$  integrally closed であることを示すため, 次の等式を考える.

$$(*) \quad \left( \frac{a}{f} \right)^r + c_{r-1} \left( \frac{a}{f} \right)^{r-1} + \cdots + c_0 = 0 \quad \text{where } a/f \in \text{Quot}(S), \{c_i\}_{i=0}^{r-1} \subset \mathcal{J}_x.$$

$d = \deg a/f \geq 0$  を示すために,  $d < 0$  と仮定する. すると十分大きな  $s \in \mathbb{N}$  をとって (\*) に  $(a/f)^s$  をかけることにより, 各項の次数  $\deg c_i + (i+s)d$  を有限負に出来る. しかし  $\deg 0 = -\infty$  なので等式 (\*) が成立しなくなってしまう. よって  $d \geq 0$ .  $S_{(\mathfrak{p}_x)} :: \text{integrally closed}$  を利用して  $\mathcal{J}_x :: \text{integrally closed}$  を示すために, 等式 (\*) に手を加える. まず,  $\deg a/f = d = 0$  だったとすると,  $a/f$  が負の斉次成分を持つことはないで,  $a$  は斉次である. なので係数から 0 次斉次成分を取り出しても正しい等式となる. (ch I, Thm3.4 で同様の操作を行った.)  $d > 0$  ならば  $a/f$  の代わりに, より次数が大きい  $(a/f)^t$  ( $t > 0$ ) を考える (あるいは  $(a/f)^r t$  を両辺にかける) ことで, 各  $i$  について  $\deg c_{r-i} \leq id$  と仮定出来る. その上で  $s \in (S - \mathfrak{p}_x)_1$  をとり<sup>†3</sup>, 等式 (\*) の両辺に  $s^{-rd}$  を両辺にかけて, 0 次斉次成分を取り出しても正しい等式となる.

$$\left(\frac{a_d}{s^d f}\right)^r + \left(\frac{c_{r-1}}{s^d}\right)_0 \left(\frac{a_d}{s^d f}\right)^{r-1} + \cdots + \left(\frac{c_0}{s^d}\right)_0 = 0$$

各項の 0 次斉次成分が  $\frac{(c_i a^i)_0}{s^{rd} f^{r-1}}$  でなく上のように取れるのは,  $\frac{c_i}{s^{d(r-i)}}$  と  $\frac{a}{a^d f}$  の斉次成分がどちらも 0 以下のものしか無いことに拠る. 0 以下の整数同士を加えて 0 になるのは 0 同士の和のみ, ということである. 以上の操作により,  $a_d/s^d f$  及び係数の次数は 0 になる. 特に, 係数はその分子・分母が共に斉次元となるから  $S_{(\mathfrak{p}_x)}$  の元となる. このことから  $f :: \text{homogeneous}$  <sup>†4</sup>, したがって  $a_d/u^d f \in S_{((0))}$  が分かり,  $S_{(\mathfrak{p}_x)} :: \text{integrally closed}$  より  $f \in S - \mathfrak{p}_x$ . まとめて,  $a/f \in \mathcal{J}_x$ . よって  $\mathcal{J}_x :: \text{integrally closed}$ .

■  $S' :: \text{integrally closed}$ . Thm5.19 の証明後半から,  $S' = \Gamma(X, \mathcal{J}) \subseteq \bar{S}$ . そこで  $a/f \in \bar{S} \subseteq \text{Quot } S$  をとって考える. もし  $f$  が単元でなければ  $f \in \mathfrak{p}_x$  なる  $x \in X$  がとれる. この時,  $\{c_i\} \subseteq S \subseteq \mathcal{J}_x$  より (\*) が成立している. なので  $\mathcal{J}_x :: \text{integrally closed}$  より  $a/f \in \mathcal{J}_x \subseteq S_{\mathfrak{p}_x}$ . しかし  $f \in \mathfrak{p}_x$  なので, これはありえない.

(b)  $S_d = S'_d$  for all sufficiently large  $d$ .

$S$  が Ex5.9 の仮定を満たすことは明らか.  $\tilde{S} = \mathcal{O}_X$  なので, Ex5.9c から  $S \approx S' = \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ .

(c)  $S^{(d)}$  is integrally closed for sufficiently large  $d$ .

(b) より,  $d$  を十分大きく取れば,  $S_{nd} = S'_{nd}$  ( $n \geq 0$ ) となる ( $S_0 = k = \bar{k} = S'_0$  に注意). なので, この  $d$  について, 斉次環  $S^{(d)} = \bigoplus_{n \geq 0} S_{nd}$  は  $S'$  の部分環である.  $S^{(d)}$  の元を係数に持つ多項式が  $\text{Quot}(S^{(d)})$  に根を持っていたとする.

$$\left(\frac{f}{g}\right)^r + c_{r-1} \left(\frac{f}{g}\right)^{r-1} + \cdots + c_0 = 0 \quad \text{where } f, g \in S^{(d)}, \{c_i\}_{i=0}^{r-1} \subset S^{(d)}.$$

$S^{(d)} \subset S'$  かつ (a) から  $S'$  は integrally closed なので,  $h := f/g \in S'$ . 上の等式で  $(f/g)^r = h^r$  を移項してみると,  $\deg c_i$  が  $d$  の倍数であることから,  $\deg h^r = r \deg h$  も  $d$  の倍数だと分かる.  $r$  はいくらでも大きくできるから,  $r$  と  $d$  が互いに素であるようにすれば,  $\deg h$  が  $d$  の倍数であることが得られる. 以上から  $h = f/g \in S^{(d)}$  であり,  $S^{(d)} :: \text{integrally closed}$ .

<sup>†3</sup>  $\mathfrak{p}_x$  が  $S_1$  全体を含むことはない. そうなれば  $S_+ \subseteq \mathfrak{p}_x$  となるが, これは  $\text{Proj } S$  の定義からありえない. なので  $s \in (S - \mathfrak{p}_x)_1$  がとれる.

<sup>†4</sup> 変形前の等式で  $\deg a/f = 0$ , 係数  $\in S_{(\mathfrak{p}_x)}$  とする. 等式の両辺に  $f^r$  を掛けて  $a^r$  を移項する:  $\frac{u_{r-1}}{v_{r-1}} a^{r-1} f + \cdots + \frac{u_0}{v_0} f^r = -a^r$ .  $f = f_n + \cdots + f_m$  ( $n > m$ ) と斉次分解出来た時, 両辺の  $mr$  次斉次成分をとると  $\frac{u_0}{v_0} f_m^r = 0$  なので  $S :: \text{domain}$  より  $u_0 = 0$ . 両辺を  $a$  で割って同様の手順を踏むと, 帰納的にすべての係数が 0 になってしまうので,  $m = n$ .

(d)  $X :: \text{projectively normal} \iff X :: \text{normal and } \Gamma(\mathbb{P}_A^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^r}(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$  is surj.

$X \subseteq \mathbb{P}_A^r :: \text{connected closed subscheme}$  とする.  $X :: \text{projectively normal}$  と,  $X :: \text{normal}$  かつ自然な写像  $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$  が  $n \geq 0$  の時全射であること, が同値であることを示す.

■  $\implies$ .  $X :: \text{projectively normal}$  の時, 定義から  $S = \bar{S}$  なので, (a) 後半から  $S \cong S' = \Gamma(X, \mathcal{I})$ .  $x \in X$  とすると,  $\mathcal{O}_{X,x} = S_{(\mathfrak{p}_x)} = \mathcal{I}_x$  であり, (a) 後半の証明から  $\mathcal{I}_x :: \text{integrally closed}$ . また closed immersion の定義から全射  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \rightarrow \mathcal{O}_X$  が存在する. homomorphism of graded rings の定義を考えれば, 全射が  $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$  に遺伝することが分かる.

■  $\impliedby$ .  $S_A^r(n) = \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = S(n)$  が全射かつ  $X :: \text{normal}$  とする. すると直ちに全射  $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$  が得られる. Ex5.9 より, 全射  $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \rightarrow \mathcal{O}_X$  が存在し,  $\mathcal{I}_X$  の定義から, この  $\ker$  が  $I$  である. Prop5.13 より  $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \cong S_A^r$  なので,  $S = S_A^r/I \cong \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S'$ . (a) 後半から, これは integrally closed. ( $k :: \text{integrally closed field}$  は (c) でのみ使われている.)

## Ex5.15 Extension of Coherent Sheaves.

$X :: \text{noetherian scheme}$ ,  $U :: \text{open in } X$ ,  $\mathcal{F} :: \text{coherent sheaf on } U$  とする. この時,  $\mathcal{F}' :: \text{coherent sheaf on } X$  であって  $\mathcal{F}'|_U = \mathcal{F}$  となるものが存在する. つまり Noetherian Scheme の開集合上の coherent sheaf は拡張できる. これをいくつかの段階に分けて証明する.

## Ex5.16 Tensor Operations on Sheaves.

$(X, \mathcal{O}_X) :: \text{ringed space}$ ,  $\mathcal{F} :: \mathcal{O}_X\text{-module}$  とする.

(a) If  $\mathcal{F} :: \text{locally free } \mathcal{O}_X\text{-module}$  then  $T^r(\mathcal{F}), S^r(\mathcal{F}), \bigwedge^r(\mathcal{F}) :: \text{locally free}$ .

Prop5.1, 5.2 (まとめたものが Cor5.5) と,  $M :: \text{free } A\text{-module}$  に対して  $T^r(M), S^r(M), \bigwedge^r(M) :: \text{free modules}$  となることから,  $T^r(\mathcal{F}), S^r(\mathcal{F}), \bigwedge^r(\mathcal{F}) :: \text{locally free}$  が分かる.

また, それぞれの rank も計算できる.  $\text{rank } M = n$  ( $M \cong A^{\oplus n}$ ) とする.

$$\text{rank } T^r(M) = \text{rank} \left( \bigotimes_{i=1}^r A^{\oplus n} \right) = n^r.$$

$\text{rank } S^r(M)$  は  $r$  個の一次独立な元を  $n$  個の基底 ( $A^{\oplus n}$  の基底) からとる重複組み合わせの総数に等しい.

$$\text{rank } S^r(M) = H_r^n = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}.$$

$\text{rank } \bigwedge^r(M)$  は  $r$  個の一次独立な元を  $n$  個の基底 ( $A^{\oplus n}$  の基底) からとる (重複なし) 組み合わせの総数に等しい.

$$\text{rank } \bigwedge^r(M) = C_r^n = \binom{n}{r}.$$

(b) the multiplication map induces  $\bigwedge^r \mathcal{F} \cong (\bigwedge^{n-r} \mathcal{F})^\vee \otimes \bigwedge^n \mathcal{F}$ .

$M :: \text{locally free } A\text{-module}$  とし,  $M$  の基底を  $x_1, \dots, x_n$  とする.

■Notation.  $S = \{1, \dots, n\}$  とし,  $I \subseteq S$  に対して  $x_I = \bigwedge_{i \in I} x_i$  とする. ただし,  $i \in I$  は小さいものから取る. 例えば  $I = \{3, 2, 5\}$  なら  $x_I = x_2 \wedge x_3 \wedge x_5$  である.  $x_\emptyset = 1 \in A$  としておく. また  $\text{sgn } I = \pm 1$  を  $x_I \wedge x_{I^c} = (\text{sgn } I)x_S$  で定める.

■→.  $\bigwedge^n M = Ax_S \cong A$  が分かる.  $\bigwedge M$  の multiplication map は次のものである.

$$\begin{aligned} \mu: \bigwedge^r M \otimes \bigwedge^{n-r} M &\rightarrow \bigwedge^n M \cong A \\ x_I \otimes x_J &\mapsto x_I \wedge x_J. \end{aligned}$$

ただし  $I, J \subset S$  は  $\#I = r, \#J = n - r$  を満たす. 定義より  $I \cap J \neq \emptyset$  ならば  $\mu(x_I, x_J) = 0$ ,  $I \cap J = \emptyset$  ならば  $\mu(x_I, x_J)$  は  $\text{sgn } I = \pm 1 \in A$  へ写る. そこで,  $I \subseteq S, x_I \in \bigwedge^r M$  に対し,  $\mu(x_I, *) \otimes (x_{I^c} \wedge x_I)$  を  $x_I$  の像とする. 以上で  $\bigwedge^r M$  全体からの写像が出来た.

■←.  $\phi \otimes x_S \in (\bigwedge^{n-r} M)^\vee \otimes \bigwedge^n M$  の像を次のように定める.

$$\sum_{I \subseteq S, \#I = n-r} (\text{sgn } \sigma_I) \phi(x_I) x_{I^c}.$$

ただし  $S_n$  は  $n$  次対称群である.

■isomorphism であること.  $\mu(x_I, x_J) \neq 0$  となるのは  $J = I^c$  の時のみ. なので  $x_I$  の像  $\mu(x_I, *) \otimes (x_{I^c} \wedge x_I)$  の像は  $(\text{sgn } I)^2 x_I = x_I$ . 逆に  $\phi \otimes x_S$  の像  $\sum_I (\text{sgn } I) \phi(x_I) x_{I^c}$  の像は,  $\phi = \sum_I (\text{sgn } I) \phi(x_I) \mu(x_{I^c}, *)$  ゆえに  $\phi \otimes x_S$ .

## Ex5.17 Affine Morphisms.

Scheme morphism  $f: X \rightarrow Y$  が affine morphism であるとは,  $\text{Spec } A \in \mathcal{U}$  ならば  $f^{-1}(\text{Spec } A)$  も affine であるような  $Y$  の affine cover  $\mathcal{U}$  が存在する, ということである.

(a)  $f: X \rightarrow Y :: \text{affine} \iff \text{for any } \text{Spec } A \subseteq Y \ f^{-1} \text{Spec } A :: \text{affine}.$

$\Leftarrow$  は明らか.  $\Rightarrow$  を示す.  $\text{Spec } A \subseteq Y$  をとり,  $U = \text{Spec } A, V = f^{-1} \text{Spec } A$  とおく.  $f|_V: V \rightarrow \text{Spec } A$  だけを考えれば十分なので  $f: X \rightarrow \text{Spec } A = Y$  とする. Ex3.1 の解答で証明した “Nike’s Lemma” (と Ex2.13b;  $\text{sp}(Y) :: \text{quasi-compact}$ ) を使うと,  $\bigcup_{i=1}^r D_A(a_i) = Y$  かつ  $f^{-1} D_A(a_i) :: \text{affine}$  となる  $\{a_i\}_{i=1}^r \subset A$  が存在することが分かる.

$f^{-1} D_A(a_i) = \text{Spec } B_i$  としよう. さらに  $\phi = f_Y^\# : A = \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X) = B$  とする. Ex3.1 で証明した別の補題 “Preimage of POS is POS” を使うと,  $f^{-1} D_A(a_i) = D_{B_i}(b_i)$  となる  $b_i \in B_i$  が存在する事が分かる.  $\bigcup_{i=1}^r D_A(a_i) = Y$  より  $(a_1, \dots, a_r) = (1) = A$  だから,  $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_r)) = (1) = B$ . “Preimage of POS is POS” の証明 ( $b_i$  の定め方) から,  $X_{\phi(a_1)} = D_{B_i}(b_i) :: \text{affine}$ . 以上から Ex2.17b より  $f^{-1} \text{Spec } A :: \text{affine}$ .

(b) An affine morphism is quasi-compact and separated.  $\text{finite} \implies \text{affine}$

finite morphism が affine morphism であることは定義から明らか. affine morphism ならば quasi-compact (定義は Ex3.2) であることは Ex2.13b から分かる. affine morphism ならば separated であることは, Cor4.6f と Prop4.1 から.

(c)  $\mathbf{Spec} \mathcal{A}$ .

$Y :: \text{scheme}$ ,  $\mathcal{A} :: \text{quasi-coherent sheaf of } \mathcal{O}_Y\text{-algebra}$  とする. この時, 以下のような  $X :: \text{scheme}$ ,  $f : X \rightarrow Y$  が一意に存在する: 任意の affine open subset  $U \subseteq V \subseteq Y$  について,  $f^{-1}U \cong \mathbf{Spec} \mathcal{A}(U)$  であり,  $f^{-1}U \hookrightarrow f^{-1}V$  が restriction map  $\mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{A}(U)$  に対応する. この  $X$  を  $\mathbf{Spec} \mathcal{A}$  で表す.

■ **Construct  $X$ .** Gluing Lemma(Ex2.12) を用いて  $X$  を構成する. 貼り合わせるの  $\mathbf{Spec} \mathcal{A}(\mathbf{Spec} R)$  である.  $V, W :: \text{affine open subset of } Y$  に対し,  $U_V = \mathbf{Spec} \mathcal{A}(V), U_W = \mathbf{Spec} \mathcal{A}(W)$  とする. 2つの restriction map  $\text{res}_V, \text{res}_W : \mathcal{A}(V), \mathcal{A}(W) \rightarrow \mathcal{A}(V \cap W)$  から誘導される写像  $i_V, i_W : \mathbf{Spec} \mathcal{A}(V \cap W) \rightarrow U_V, U_W$  をとる.  $U_{V,W} = \text{im } i_V, U_{W,V} = \text{im } i_W$  とおくと, open immersion の定義に沿って  $U_{V,W}, U_{W,V} :: \text{open in } U_V, U_W$  が確かめられる. ( $\mathcal{O}_{U_V}|_{U_{V,W}} \cong \mathcal{O}_{\mathbf{Spec} \mathcal{A}(V \cap W)}$  となる.) 以上の設定で gluing が出来ることは明らか.  $f$  は Ex2.12 にある isomorphism  $(\psi_V)^{-1} : \psi_V(U_V) \rightarrow U_V$  を貼り合わせれば良い.

■  $X$  satisfies the additional condition.  $V, W :: \text{affine open subset of } Y$  をとる.  $V \subseteq W$  の時,  $f^{-1}V \rightarrow f^{-1}W$  は  $i_W : \mathbf{Spec} \mathcal{A}(V \cap W) = \mathbf{Spec} \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathbf{Spec} \mathcal{A}(W)$  に対応し,  $i_W$  は定義から  $\text{res}_W$  に対応する.

■ **Uniqueness.**

(d)  $f : X \rightarrow Y :: \text{affine} \iff \mathcal{A} \cong f_* \mathcal{O}_X :: \text{quasi-coherent } \mathcal{O}_Y\text{-algebra and } X \cong \mathbf{Spec} \mathcal{A}$ .

■  $\implies$ .  $\mathcal{A} = f_* \mathcal{O}_X$  とおく.  $U = \mathbf{Spec} \mathcal{A} \subseteq Y$  とすると,  $f^{-1}U :: \text{affine}$  だから  $f^{-1}U = \mathbf{Spec} \mathcal{O}_X(f^{-1}U) = \mathbf{Spec} \mathcal{A}(U)$ . また,  $\mathbf{Spec} \mathcal{A}(U) = f^{-1}U \hookrightarrow f^{-1}V = \mathbf{Spec} \mathcal{A}(V)$  は直ちに  $\text{res}_V^U : \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{A}(U)$  を誘導する. したがって (c) より  $X \cong \mathbf{Spec} \mathcal{A}$ . また, 任意の  $U :: \text{affine open subset in } Y$  について,  $\mathcal{A}(U)$  は  $f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow f_* \mathcal{O}_X(U) = \mathcal{A}(U)$  によって  $\mathcal{O}_Y(U)$ -algebra とみなすことが出来る. よって  $\mathcal{A} :: \text{quasi-coherent } \mathcal{O}_Y\text{-algebra}$ .

■  $\impliedby$ .  $\mathcal{A} :: \text{quasi-coherent } \mathcal{O}_Y\text{-algebra}$  ならば, (c) から  $\mathbf{Spec} \mathcal{A}$  が存在する.  $\mathbf{Spec} \mathcal{A}$  の定義から  $f : \mathbf{Spec} \mathcal{A} \rightarrow Y$  は affine.  $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$  を考えると,  $U = \mathbf{Spec} \mathcal{A} \subseteq Y$  について  $f^{-1}U \cong \mathbf{Spec} \mathcal{A}(U)$  だから  $\mathcal{O}_X(f^{-1}U) = (f_* \mathcal{O}_X)(U) \cong \mathcal{A}(U)$ . このような  $U$  で  $Y$  を被覆できるから,  $\mathcal{A} \cong f_* \mathcal{O}_X$ .

(e)  $\{ \text{quasi-coherent } \mathcal{O}_X\text{-modules} \} \leftrightarrow \{ \text{quasi-coherent } \mathcal{A}\text{-modules} \}$ .

$f : X \rightarrow Y$  を affine morphism とし,  $\mathcal{A} = f_* \mathcal{O}_X$  とおく. (b) と Prop5.8c より,  $\mathcal{F} :: \text{quasi-coherent } \mathcal{O}_X\text{-module}$  について  $f_* \mathcal{F} :: \text{quasi-coherent } \mathcal{A}\text{-module}$  が得られる.

逆に,  $\mathcal{M} :: \text{quasi-coherent } \mathcal{A}\text{-module}$  をとる.  $U = \mathbf{Spec} \mathcal{A} :: \text{open in } Y$  をとると,  $f^{-1}U :: \text{affine}$  なので  $f^{-1}U = V = \mathbf{Spec} B$  とする. この時,  $\mathcal{M}|_U \cong \tilde{M}$  となる  $B$ -module ( $B = \mathcal{A}(U)$ ) が存在する.  $\phi = f_U^\# : A \rightarrow B$  によって  $M$  を  $A$ -module とみなしたものを  ${}_A M$  と書くことにして,  $\tilde{M}|_U = ({}_A M)^\sim$  とおく. こうして  $\tilde{M}$  を構成する<sup>†5</sup>.  $({}_A M) \otimes_A B \cong M$  が容易にわかるから, Prop5.2 から  $f_*(\tilde{M}|_U) \cong \mathcal{M}|_U$ .  ${}_A (M \otimes_A B) \cong M$  も同様にわかるから,  $f_*(\widetilde{\mathcal{M}|_U}) \cong \mathcal{M}|_U$ .  $\square$  と  $f_*$  が functorial であることは Prop5.2 で述べられているとおりである. 以上で主張が示せた.

<sup>†5</sup> つまるところ  $\tilde{M} = f^* \mathcal{M}$  であるが, 上の構成は  $\mathcal{M}$  が  $\mathcal{O}_X$ -module でないという点で Prop5.2 の内容と異なる.

## Ex5.18 Vector Bundles.