

Ex4.1 Finite Morphism is Proper.

$f: X \rightarrow Y$ を finite だとする. Cor4.8f と Ex3.4 より, X, Y が affine scheme である場合について調べれば十分である.

$X = \text{Spec } A, Y = \text{Spec } B$ とすると, $A ::$ finitely generated B -module. なので特に $X ::$ Noetherian scheme. 任意の $R ::$ valuation ring をとり, $K = \text{Quot } R$ とする. 今, 以下の可換図式が成り立っているとすると,

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K & \longrightarrow & \text{Spec } A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec } R & \longrightarrow & \text{Spec } B \end{array}$$

これに対応して, 以下の環の可換図式が成り立つ. Prop2.3 より, 二つの可換図式は一対一に対応している.

$$\begin{array}{ccc} K & \xleftarrow{u} & A \\ \uparrow & & \uparrow \phi \\ R & \xleftarrow{v} & B \end{array}$$

$A ::$ integral / B から $v(B) \subseteq u(A) ::$ integral ring extension が得られる^{†1}. $v(B) \subseteq R$ と合わせて, $u(A) (\subseteq K) ::$ initegral / R . R が付値環であることから, R は K 上整閉. よって $u(A) \subseteq R$. このことから $u: A \rightarrow R$ の存在が得られる. さらに, $R \rightarrow K$ が単射であることからこのような射はただひとつ. 図式の一対一対応から, $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } A$ の射がただひとつ存在することがわかった.

Ex4.2

$U ::$ dense in X とし, 以下の可換図式で $f, g :: S$ -morphism は $f|_U = g|_U$ を満たすとする.

$$\begin{array}{ccccc} & U & & & \\ & \downarrow & & & \\ X & \xrightarrow{h} & Y \times_S Y & \xleftarrow{\Delta} & Y \\ & \searrow g & & \nearrow & \\ Y & \xrightarrow{f} & S & \xleftarrow{\Delta} & Y \end{array}$$

$U \rightarrow X \rightarrow Y = Y \rightarrow Y \times_S Y$ とたどると, $\Delta(f(U)) = h(U)$ が得られる. $f(U) \subseteq Y$ から $h(U) \subseteq \Delta(Y)$. さらに次の計算から $h(X) \subseteq \Delta(Y)$ が得られる.

$$h(X) = h(\text{cl}_X(U)) \subseteq \text{cl}_Y(h(U)) \subseteq \text{cl}_Y(\Delta(Y)) = \Delta(Y).$$

最後の等号で $Y ::$ separated / S を用いた. 可換図式にある $Y \times_S Y \rightarrow Y$ の射を pr_1, pr_2 とする. $h(X) \subseteq \Delta(Y)$ から以下が得られる.

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, f(x) = \text{pr}_1 \circ h(x) = \text{pr}_1 \circ \Delta(y) = y = \text{pr}_2 \circ \Delta(y) = \text{pr}_2 \circ h(x) = g(x).$$

よって topological space の射として $f = g$.

さらに scheme の射として $f = g$ であることを示す.

^{†1} $a \in A$ をとると, $a^n + \phi(b_{n-1})a^{n-1} + \cdots + \phi(b_0) = 0$ となる $n > 0$ と $b_i \in B$ が存在する. 両辺を u で写すと, $u \circ \phi = v$ より $u(a)^n + v(b_{n-1})u(a)^{n-1} + \cdots + v(b_0) = 0$.

主張 **Ex4.2.1.** $V :: \text{open in } Y$ を任意に取る. $\bar{V} = f^{-1}V \cap U = g^{-1}V \cap U (\neq \emptyset)$ とする. 任意の $s \in \mathcal{O}_Y(V)$ に対し $s|_{\bar{V}} = 0$ ならば $s = 0$.

$f|_U = g|_U$ から $(f^\#(s) - g^\#(s))|_{\bar{V}} = 0$ が直ちに得られる. なので, この主張が示されれば $f^\#(s) - g^\#(s) = 0$ すなわち $f^\# = g^\#$ が得られる.

(証明). $V :: \text{affine}$ の場合に調べれば十分なので $V = \text{Spec } A$ とする. $\mathfrak{p} \in \bar{V}$ を任意にとると, $s|_{\bar{V}} = 0$ より $s_{\mathfrak{p}} = 0$. これは $s = 0$ in $A_{\mathfrak{p}}$ を意味する. したがって次が成り立つ.

$$\exists t \notin \mathfrak{p}, \quad st = 0 \in \mathfrak{p}.$$

よって $s \in \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in V(s)$ となる. $\mathfrak{p} \in \bar{V}$ は任意にとっていたので $\bar{V} \subseteq V(s)$. \bar{V} は $V = \text{Spec } A$ で dense だから, 両辺の閉包をとって $V = V(s)$. すなわち $s = 0$. ■

Ex4.3 $X :: \text{Separated over an Affine Scheme } S$.

$S :: \text{affine scheme}$, $X :: \text{separated scheme } /S$, $U, V :: \text{affine open subscheme of } X$ とする. 以下が fiber product であれば, 主張が示せる.

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \Delta \\ U \times_S V & \longrightarrow & X \times_S X \end{array}$$

実際, $\Delta :: \text{closed immersion}$ と Ex3.11a より $U \cap V \rightarrow U \times_S V$ は closed immersion. $U \times_S V :: \text{affine}$ と Ex3.11b より $U \cap V :: \text{affine}$.

Ex4.4 "The Image of a Proper Scheme is Proper."

Ex4.5 Center of Valuation Ring of K/k .

$X :: \text{integral scheme of finite type over a field } k$, $K :: \text{function field of } K$ とする. 定義から, $X = \bigcup_{i=1}^r \text{Spec } A_i$ となる $\{A_i\}_{i=1}^r :: \text{integral finitely generated } k\text{-algebras}$ が存在する. $U_i = \text{Spec } A_i$ としておく.

K/k の valuation ring R が $x \in X$ を center に持つとは, R が $\mathcal{O}_{X,x}$ を dominate するということである. 言い換えれば, injection $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow R$ が存在し, これが local ring homomorphism であるということである.

(a) If $X :: \text{separated}/k$ then any valuation of K/k has at most one center.

R を K/k の任意の valuation ring とする. 以下の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec } R & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

f は与えられたもの, $\text{Spec } K \rightarrow X$ は $\text{Spec } K$ (1 点空間) を X の 1 点 x へ写す埋め込み写像 (Ex2.7, Lemma4.4), $\text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } R$ も埋め込み写像である^{†2}. $X :: \text{noetherian scheme}$ だから,

^{†2} 「埋め込み写像である」は, それぞれ包含関係 $k(x) \subseteq K, R \subseteq K$ から誘導されている, という意味で書いた.

この時、図式を可換にする $\text{Spec } R \rightarrow X$ の射 i が高々一つある (Thm4.3). 加えて、 i と同じ条件を満たす射と R の center は一対一に対応する (Lemma4.4). すなわち、 R の center は高々一つ.

(b) If $X :: \text{proper}/k$ then any valuation of K/k has just one center.

この場合、Thm4.7 より、 i は丁度一つある. ほかは (a) と全く同じ.

(c) The Converses of (a) and (b).

Ex2.7 と Lemma4.4 を使うのだと思う.

(d) Generalization of ch I, 3.4a.

$X :: \text{proper}/k$ かつ $k :: \text{algebraically closed}$ とする. この時 $G := \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ であることを示す. $a \in k \implies a \in G$ ($k \subseteq G$) は明らかなので、 $a \notin k \implies a \notin G$ を示せば十分である. そのために、 $a \notin k$ かつ $a \in G$ となる元が存在すると仮定しよう.

$k[a^{-1}] \subseteq R \subsetneq K$ なる valuation ring R すべての共通部分は、Thm4.11 より K における整閉包 $\overline{k[a^{-1}]}$ である. 下で示すように、これは a を含まない. したがって $a^{-1} \in R, a \notin R$ であるような valuation ring R が存在する. a^{-1} は R の単元でないから $a^{-1} \in \mathfrak{m}_R$. 一方、 $a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \subseteq K$ から、任意の $x \in X$ について $a \in \mathcal{O}_{X,x}$. よって $(a \in) \mathcal{O}_{X,x} \subseteq R$ ならば $a \cdot a^{-1} = 1 \in \mathfrak{m}_R$ となり、不合理. したがって R はいかなる点も center に持たない. これは (b) に反する.

主張 Ex4.5.1.

$$a \notin \overline{k[a^{-1}]}.$$

(証明). $a \in K$ が $k[a^{-1}]$ 上整ならば、以下のような零でない多項式 f が存在する.

$$f \in k[a^{-1}][X], \deg f = d > 0, f(a) = a^d + c_{d-1}a^{d-1} + \cdots + c_0 = 0.$$

最後の等式の両辺に $a^{-d} \in k[a^{-1}]$ をかける.

$$a^{-d}f(a) = 1 + c_{d-1}a^{-1} + \cdots + c_0a^{-d} = 0.$$

$c_i \in k[a^{-1}]$ だから、この等式は $f'(a^{-1}) = 0$ を満たす零でない多項式 $f' \in k[X]$ が存在すること、すなわち a^{-1} が k 上代数的であることを意味する (等式において、 a^{-1} についての最高次係数は k の元であることに注意). しかし $a \notin k = \bar{k}$ だからこれはありえない. ■

Ex4.6 $f :: \text{proper morphism of affine varieties}/k$. Then $f :: \text{finite}$.

$f : X \rightarrow Y$ を考える. $X, Y :: \text{affine variety} / k$ より、 X, Y は $A, B :: \text{affine domain} / k$ を用いて $X = \text{Spec } A, Y = \text{Spec } B$ と書ける. f から誘導される環準同型を $\phi : B \rightarrow A$ とする. $A, B :: \text{affine domain} / k$ から特に X, Y は Noetherian である. また、 $f :: \text{finite type}$ より $A :: \text{finitely generated } B\text{-algebra}$. よって、 $f :: \text{finite}$ であるためには $\phi :: \text{integral}$ すなわち $A :: \text{integral} / \phi(B)$ を示せば十分である.

$K = \text{Quot}(\phi(B))$ とし、 R を $\phi(B) \subseteq R \subset K$ であるような任意の valuation ring とする. Thm4.7

から以下の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} K & \xleftarrow{\quad} & A \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow \phi \\ R & \xleftarrow{\quad} & B \end{array}$$

$A \rightarrow R \rightarrow K = A \rightarrow K$ かつ右辺が埋め込みであることから $A \rightarrow R$ は埋め込みである. すなわち $(\phi(B) \subseteq) A \subseteq R$. R のとり方と Thm4.11 より, $A \subseteq \overline{\phi(B)}$. よって $A :: \text{integral} / \phi(B)$.

Ex4.7 Schemes Over \mathbb{R}

Ex4.8 Let $\wp :: \text{Property of Morphisms of Schemes}$

Ex4.9 Composition of Projective Morphisms is Projective

Ex4.10 Chow's Lemma.

Ex4.11 Describe Valuative Criteria of Separatedness and Properness.

Ex4.12 Examples of Valuation Rings.

(a) If $K/k :: \text{function field of dim}=1$, then every valuation ring of K/k is discrete.

K に対応する nonsingular projective curve を \tilde{C} (cf. ch I, Cor6.12) とし, $C = t(\tilde{C})$ を C に対応する scheme とする (Prop 2.6). これは projective integral scheme/ k , 特に proper & integral scheme of finite type / k (Prop4.10). C 上の irreducible closed subset は C と closed point しか無いから, C の点は $\zeta :: \text{generic point}$ と closed point しかない.

主張 **Ex4.12.1** (claim 1). $K = \mathcal{O}_{C,\zeta} = K(\tilde{C})$.

(証明). Prop2.6 の証明を見ると, \mathcal{O}_C は sheaf of regular functions on \tilde{C} である. なので $K(\tilde{C}), \mathcal{O}_{C,\zeta}$ の定義から両者は一致する. ■

主張 **Ex4.12.2** (claim 2). $x \in C :: \text{closed point}$ について $\mathcal{O}_{C,x} :: \text{DVR}$.

(証明). $\mathcal{O}_C :: \text{sheaf of regular functions on } \tilde{C}$ から, $\mathcal{O}_{C,x} = \mathcal{O}_{\tilde{C},x}$. これが DVR であることは ch I, Prop6.7 の証明中程にもあるし, ch I, Thm6.2 と Dedekind domain の定義の下の方からも分かる. ■

K/k の (K ではない) 任意の valuation ring R を考える. $C :: \text{proper \& integral scheme of finite type /}k$, Ex4.5b と claim 1 より, R が $\mathcal{O}_{C,x}$ を dominate するような点 $x \in C$ が一つあることが言える. $\mathcal{O}_{C,x} \subseteq R \neq K$ から, $x :: \text{closed point}$. さらに claim 2 から, R は少なくとも一つの DVR を dominate すると言える. valuation ring の極大性から $\mathcal{O}_{C,x} = R :: \text{DVR}$.