# ゼミノート #11.5
# Artin Stack の presentation についての短い概要

七条彰紀

2019 年 7 月 24 日

## 目次



一般に artin stack は algebraic space の groupoid の商として表現することが出来る．これを presentation of an artin stack と呼ぶ．このことについて，基本的な定義と命題をまとめておく．（ほとんど [3] の和訳程度になるだろう．）

ちなみに，

## Stacks Project[3] の記法について

[3] section 88.16, 88.17 と chapter 72 に presentation of an artin stack についての命題が書かれているが，これらだけで読むと良く分からない記法が有るので，意味をまとめた．

- algebraic space :: $F$ について $\mathcal{S}_F$ は $F$ から grothandieck construction で得られる stack を意味する ([3] 04M7).
- 自然変換の間の演算 $*$ は horizontal composition で $\circ$ は vertical composition ([3] 044T).

## 1 Algebraic Groupoid Space

**定義 1.1** ([2], p.80, [1] 2.4.3, https://en.wikipedia.org/wiki/Groupoid_object)
圏 $\mathbf{C}$ を finite fiber product を持つ圏とする．圏 $\mathbf{C}$ の対象 $X_0, X_1$ と，次の 5 つの射の組 :: $(X_0, X_1, s, t, c, e, i)$ を考える．（この組をしばしば $(X_0, X_1, s, t)$ や $X_0 \rightrightarrows_t^s X_1$ と略す．）

| | |
|---|---|
| **source and target** | $s, t\colon X_1 \to X_0$ |
| **composition** | $c\colon X_1 \times_{t,X_0,s} X_1 \to X_1$ |
| **identity** | $e\colon X_0 \to X_1,$ |
| **inversion** | $i\colon X_1 \to X_1.$ |

これらが次を満たす時，groupoid in $\mathbf{C}$ と呼ぶ．なお，以下では $\times_{s,X_0,t}, \times_{s,X_0,\mathrm{id}}, ..$ 等を $\times$ と略す．

(A)
- $s \circ e = t \circ e = \mathrm{id}_{X_0}$
- $s \circ m = s \circ \mathrm{pr}_0$
- $t \circ m = t \circ \mathrm{pr}_1$

ここで $\mathrm{pr}_i\colon X_1 \times_{t,X_0,s} X_1 \to X_1$ は射影．

(B) (Associativity) $m \circ (\mathrm{id}_{X_1} \times m) = m \circ (m \times \mathrm{id}_{X_1})$, $\quad m \circ (\mathrm{id}_{X_1} \times m) = m \circ (m \times \mathrm{id}_{X_1})$,

(C) (Identity) $m \circ (e \circ s, \mathrm{id}_{X_1}) = m \circ (\mathrm{id}_{X_1}, e \circ t) = \mathrm{id}_{X_1}$

(D) (Inverse)
- $i \circ i = \mathrm{id}_{X_1}$
- $s \circ i = t,\ t \circ i = s$
- $m \circ (\mathrm{id}_{X_1}, i) = e \circ s,\ m \circ (i, \mathrm{id}_{X_1}) = e \circ t$
- $m \circ (\mathrm{id}_{X_1}, i) = e \circ s,\ m \circ (i, \mathrm{id}_{X_1}) = e \circ t$

**定義 1.2**
$B$ :: algebraic space over a scheme $S$ とする．algebraic space over $B$ の圏における groupoid 対象を，単に groupoid in algebraic spaces over $B$ という．

groupoid in algebraic spaces over $B$ には $(U, R, s, t, c, e, i)$ ( $(U, R, s, t), U \rightrightarrows_t^s R$ ) という記号が使われることが多い．

## 2 Quotients of Algebraic Space by Groupoid

**定義 2.1**
任意の scheme over $B$ :: $T$ について，組 $(U(T), R(T), s_T, t_T, c_T, e_T, i_T)$ から次の様に圏 $\{U(T)/R(T)\}$（あるいは $[U/_pR]$ と書く）が構成できる．

Object

$U(T)$ の元

Arrow

$u, u' \in U(T)$ について，$\mathrm{Hom}_{\{U/R\}(T)}(u, u') = \{\xi \in R(T) \mid s(\xi) = u, t(\xi) = u'\}$.

Identity Morphism

対象 $u \in U(T)$ の identity morphism は $e_T(u) \in R(T)$.

Composition of Morphisms

射 :: $\xi\colon u \to u', \eta\colon u' \to u''$ の合成 $\eta \circ \xi$ は $(\eta, \xi) \in R(T) \times_{s_T, U(T), t_T} R(T)$ の $c_T$ による像.

Inverse Morphism

射 $\xi\colon u \to u'$ の逆射は $i_T(\xi) \in R(T)$.

関手 $\{U(-)/T(-)\}\colon \mathbf{Sch}/B \to (\mathbf{Groupoids})$ を Grothendieck construction で fibered category にしたものを $\{U/R\}$ と書く．さらにこれを stackification したものを $[U/R]$ と書き，quotient stack of $U$ by $R$ と呼ぶ.

一般に quotient stack は algebraic stack でない.

なお，組 $(U, R, s, t, c, e, i)$ が groupoid in algebraic spaces over $B$ であることは，以下で構成する圏 $\{U(T)/R(T)\}$ が groupoid となることと同値である.

## 3 Artin Stack から Presentation of an Artin Stack へ

artin stack over a scheme $S$ :: $\mathcal{X}$ と atlas :: $f\colon U \to \mathcal{X}$ をとる．この時, $R := U \times_{\mathcal{X}} U$ が $(s := \mathrm{pr}_1, t = \mathrm{pr}_2$ とすれば)groupoid になっている．特に atlas が smooth であるから，$s, t\colon R \to U$ が smooth になっている.

**定理 3.1** ([3] 04T4, 04T5)
artin stack over a scheme $S$ :: $\mathcal{X}$ と atlas :: $f\colon U \to \mathcal{X}$ をとる．すると groupoid space :: $(U, R, s, t, c, i)$ が構成できる．さらに標準的な射 :: $f_{can}\colon [U/R] \to \mathcal{X}$ が存在し，これが圏同値となる.

証明の準備として以下の補題を置く.

**補題 3.2** ([3] 04T4 (1)–(3))
artin stack over a scheme $S$ :: $\mathcal{X}$ と atlas :: $f\colon U \to \mathcal{X}$ をとる．この時，fiber product に関する次の命題が成り立つ.

(i) $R := U \times_{f, \mathcal{X}, f} U$ :: algebraic space.

(ii) 標準的圏同型 $U \times_{\mathcal{X}} U \times_{\mathcal{X}} U = R \times_U R$ が成り立つ.

(iii) $U \times U \times U$ の第 0 成分と第 2 成分から $R$ への射影 :: $\mathrm{pr}_{0,2}$ は (ii) の同型により射 $\mathrm{pr}_{0,2}\colon R \times R \to R$ を誘導する.

**補題 3.3** ([3] 04T4 (4), 04T5 (1))
この時，groupoid :: $(U, R, s, t, c, i)$ が構成できる．より詳しく，$R, s, t, c, i$ を次のようにすれば良い.

- $R := U \times_{f, \mathcal{X}, f} U$,
- $s := \mathrm{pr}_0\colon R \to U$,
- $t := \mathrm{pr}_1\colon R \to U$,
- $c := \mathrm{pr}_{0,2}\colon R \times R \to R$,
- $e\colon U \ni u \mapsto (u, u, \mathrm{id}_{f(u)}) \in R$,
- $i\colon R \ni (u, u', \alpha) \mapsto (u', u, \alpha^{-1}) \in R$,

fiber product of stacks の構成から，$R$ の対象は $U(T)$ $(T \in \mathbf{Sch}/S)$ の二つの対象 :: $u, u'$ と $\mathcal{X}$ 内の同型

$\alpha\colon f(u) \to f(u')$ からなる 3 つ組であることに注意．また，$s, t$ :: smooth にも注意．

**補題 3.4** ([3] 04T4 (5))
$f\colon U \to \mathcal{X}$ から標準的な射 :: $f_{can}\colon [U/R] \to \mathcal{X}$ が誘導される．

(証明)．([3] 04T4) の証明内，“This proves that Groupoids in Spaces, Lemma 044U applies”で始まる段落に $f_{can}$ の具体的な構成が記述されている． ∎

## 参考文献


[1] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[3] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2019.