

定義 0.1

教科書及びこのメモでは scheme についての仮定 (*) を次で定める. この条件 (*) を満たす scheme では Weil divisor が定義できる.

- integral,
- separated,
- noetherian, and
- regular in codimension one.

最後の条件の定義は次のよう. $X :: \text{scheme}$ に対し, $X^{(1)}$ を $\text{codim}(\text{cl}_X(\{z\}, X)) = 1$ なる点 $z \in X$ の全体とする. (Weil divisor 全体は free abelian group $\mathbb{Z}^{(X^{(1)})}$ と表現できる.) X が “regular in codimension one” であるとは, 任意の $z \in X^{(1)}$ に対し $\mathcal{O}_{X,z} :: \text{integrally closed domain}$ であるということ.

さらに強く, codimension one とは限らない点 $x \in X$ において $\mathcal{O}_{X,x} :: \text{UFD}$ であるとき, X は locally factorial であるという (Prop6.11). locally factorial になる十分条件のひとつは $X :: \text{regular}$ である (Remark 6.11.1A).

定義 0.2

$X :: \text{scheme}$ 上の $\mathcal{F} :: \text{sheaf}$ について定義する.

\mathcal{F} が invertible であるとは, X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在し, $\mathcal{F}|_{U_\lambda} \cong \mathcal{O}_X$ が成り立つということである.

\mathcal{F} が generated by global sections であるとは, $G \subseteq \Gamma(X, \mathcal{F})$ が存在し, 任意の点 $x \in X$ について $\mathcal{F}_x :: \mathcal{O}_{X,x}$ -module が $G_x = \{g_x \mid g \in G\}$ で生成されるということである. G のことを global generator of \mathcal{F} と呼ぶ.

\mathcal{F} が locally generated by $\{\langle U, g_U \rangle\}_U (\subseteq \mathcal{F})$ とは, $\mathcal{F}|_V :: \text{sheaf on } V$ が generated by global sections $\{\langle U \cap V, g_U|_{U \cap V} \rangle\}_U$, になるということ. $\{\langle U, g_U \rangle\}$ のことを local generator of \mathcal{F} と呼ぶ.

Weil/Cartier divisor の定義は難しくないで改めて書かない.

1 Cartier Divisor \leftrightarrow Weil Divisor.

■ Weil divisor \leftarrow Cartier divisor. Prop6.11 の前半から. この対応は (*) を満たすならば成立する. $\{\langle U_i, f_i \rangle\}_i$ を Cartier Divisor とすると, $X :: \text{integral}$ から \mathcal{K} は K の constant sheaf. なので $z \in X^{(1)}$ について $v_z(f_i|_{\text{cl}_{U_i}(x)})$ が定まる. したがって $\sum_{z \in X^{(1)}} \sum_i v_z(f_i|_{\text{cl}_{U_i}(x)}) \text{cl}_X(z)$ とすればよい. (この対応を EGA IV では cyc と呼んでいる.)

■ Weil divisor \rightarrow Cartier divisor. Prop6.11 の後半から. この対応は X が (*) を満たし, かつ locally factorial であるならば成立する. $D :: \text{Weil divisor}$ とし, 詳しく $D = \sum_{z \in X^{(1)}} n_z \text{cl}_X(z)$ とする. 点 $x \in X$ をとり, $T_x = \text{Spec } \mathcal{O}_{X,x}$ とする.

$$D_x = D|_{T_x} = \sum_{z \in X^{(1)} \cap T_x} n_z \text{cl}_{T_x}(z)$$

(記法は EGA ch.IV, p.274 より借用した.) は T_x 上の Weil divisor であり, $X :: \text{nonsingular projective curve}$ より (Remark 6.11.1A) $\mathcal{O}_x :: \text{UFD}$. なので Prop6.2 より, $D_x = (f_x)$ なる $f_x \in K$ が存在する (つまり principal divisor). よって $D \cap U_x = f_x|_{U_x}$ となる x の近傍 U_x が存在する. これをまとめて, $\{\langle U_x, f_x \rangle\}_x$

が Cartier divisor になる。(ここは U.Görtz, T.Wedhorn “Algebraic Geometry I” pp.306-309 も参考になる。基本的に EGA ch.IV の翻訳ではあるが, Hartshorne の記法に近い。)

2 Cartier Divisor \leftrightarrow Invertible Subsheaf of \mathcal{K} .

$D ::$ Cartier divisor は X の被覆 $\{U_i\}_i$ と $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X)$ で表現される。ただし, $f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$ となっている。

対応は Prop6.13 で証明されている。

■Cartier Divisor \rightarrow Invertible Subsheaf of \mathcal{K} . $\{\langle U_i, f_i \rangle\}_i$ で表現される $D ::$ Cartier divisor に対して, $\mathcal{L}(D) ::$ subsheaf of \mathcal{K} を, $\mathcal{O}_{U_i} \ni 1 \mapsto f_i^{-1}$ で定まる準同型の像として定める。(\mathcal{L} の local generator は $\{\langle U_i, f_i \rangle\}_i$ である。)

■Cartier Divisor \leftarrow Invertible Subsheaf of \mathcal{K} . X の開被覆 $\{U_i\}$ が存在し, \mathcal{L} の local generator が $\{\langle U_i, g_i \rangle\}_i$ だとする。この時, $\{\langle U_i, g_i^{-1} \rangle\}_i$ が Cartier divisor を定める。

3 Morphism to $\mathbb{P}^n \leftrightarrow$ Invertible Sheaf & Global Generators.

対応が存在することは Thm7.1 による。また, $\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_A^n}(1) = (A[x_0, \dots, x_n](1))^\sim$ とする。これの generator は x_0, \dots, x_n である。

定義 3.1

$f: X \rightarrow Y ::$ morphism of schemes, $\mathcal{F} :: \mathcal{O}_X$ -module とする。 $\eta_{\mathcal{F}}: \mathcal{F} \rightarrow f^*f_*\mathcal{F}$ を adjoint pair $f^* \dashv f_*$ の unit とする。 $V ::$ open in Y について, $(\eta_{\mathcal{F}})_V: \mathcal{F}(V) \rightarrow f^*f_*\mathcal{F}(V)$ を f^* と書く。

この定義は教科書には書かれていない。私は Daniel Murfet の lecture note ^{†1} を参照した。

■Morphism to $\mathbb{P}^n \rightarrow$ Invertible Sheaf & Global Generators. $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ を Spec A -morphism (p.78) とする。 ϕ に対し, $\phi^*(\mathcal{O}(1))$ は invertible sheaf であり, $\phi^*(x_0), \dots, \phi^*(x_n)$ がその global generator である。

■Morphism to $\mathbb{P}^n \leftarrow$ Invertible Sheaf & Global Generators. 上の対応の逆も成り立つ。 $\mathcal{L} ::$ invertible sheaf, $G \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L}) ::$ global generator ($\#G = n$) に対し, $\mathcal{L} \cong \phi^*(\mathcal{O}(1)), G = \{\phi^*(x_i)\}_{i=1}^n$ であるような $\phi: X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ が存在する。

4 Ample Sheaf.

定義 4.1

$\mathcal{L} ::$ invertible sheaf on noetherian scheme X が ample sheaf であるとは, 任意の $\mathcal{F} ::$ coherent sheaf on X に対して十分大きいすべての n で $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ が generated by global section になるということである。

^{†1} <http://therisingsea.org/notes/Section2.7-ProjectiveMorphisms.pdf>

5 Linear System.

$k ::$ algebraically closed field, $X ::$ nonsingular projective variety over k , $K ::$ function field of X とする。この時は、次の対応関係が成り立つ。

■ Cartier Divisor \leftrightarrow Weil Divisor. Prop6.11 に証明がある。詳細は上に書いたとおり。

■ $\text{CaCl } X \cong \text{Pic } X$. Prop6.15 にある。

また、この状況では次の事実が成り立つ (5.19): 任意の $\mathcal{L} ::$ invertible sheaf on X について, $\Gamma(X, \mathcal{L}) ::$ finite dimensional k -vector space.

■ Linear System \rightarrow Invertible Sheaf. $\mathfrak{d} ::$ linear system の元はすべてある $D_0 ::$ Cartier divisor on X と linear equivalent である。なので上の段落にある $\text{CaCl } X \cong \text{Pic } X$ より, \mathfrak{d} の任意の元は $\mathcal{L} \in \text{Pic } X ::$ invertible sheaf に対応する。

■ Nonzero Global Section of $\mathcal{L} \rightarrow$ Effective Cartier Divisor. $\mathcal{L} ::$ invertible sheaf on X , $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}) ::$ nonzero global section of \mathcal{L} とする。 $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$ となる任意の開集合 U について, この同型写像を $\phi^{(U)} : \mathcal{L}|_U \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_U$ とする。すると明らかに $\phi_U(s|_U) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ 。なのでこうして得られる $\{U, \phi_U^{(U)}(s|_U)\}$ は effective Cartier divisor を定めている。 $\phi^{(U)}$ のとり方には $\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$ の分だけ自由度があるが, これは結局同じ Cartier divisor を定めている。

■ Complete Linear System $|D_0| \approx$ Nonzero Global Sections of $\mathcal{L}(D_0)$. Complete Linear System $|D_0|$ は, ある与えられた divisor D_0 と線形同値なすべての effective divisor の集合である。Prop7.7 より, $|D_0|$ の任意の元は $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}(D_0)) - \{0\}$ を用いて $(s)_0$ と書ける。 $k^* = \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ の分だけ自由度があるから, 結局 $|D_0|$ は $(\Gamma(X, \mathcal{L}(D_0)) - \{0\})/k^*$ と同型である。(X の様子を表す divisor から線形空間という比較的わかりやすいものが取り出せた。) Thm5.19 より, $\Gamma(X, \mathcal{L}(D_0))$ は finite dimensional k -vector space であることに注意。

定義 5.1

$D ::$ Weil divisor on X が $D = \sum_{x \in X^{(1)}} n_x \text{cl}_X(x)$ と書けたとする。この時,

$$\text{Supp } D = \bigcup_{x \in X^{(1)}, n_x \neq 0} \text{cl}_X(x) \subseteq X$$

とする。これは閉集合の有限和なので閉集合。 $\mathfrak{d} ::$ linear system on X について, $\bigcap_{D \in \mathfrak{d}} \text{Supp } D$ の点を base point と呼び, この集合が空ならば \mathfrak{d} は base point free と呼ばれる。

6 Global (or Relative) Projective Space **Proj** (or Proj).

■Assumption (†). $X ::$ noetherian scheme, $\mathcal{S} ::$ graded \mathcal{O}_X -algebra とする. また, $d \in \mathbb{Z}, d \geq 0$ について, $\mathcal{S}_d ::$ homogeneous part of \mathcal{S} を $U \mapsto \mathcal{S}(U)_d$ で定める. 次のように仮定する.

- $\mathcal{S} ::$ quasi-coherent.
- $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_d$.
- $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$.
- $\mathcal{S}_1 ::$ coherent \mathcal{O}_X -module.
- $\mathcal{S} ::$ locally generated by \mathcal{S}_1 as \mathcal{O}_X -algebra.

下の二つから, 任意の $d \geq 0$ についても $\mathcal{S}_d ::$ coherent であることが分かる.

■Construction of **Proj**. X, \mathcal{S} を (†) を満たす scheme, graded \mathcal{O}_X -algebra とする. 任意の affine open subset $U = \text{Spec } A \subseteq X$ をとる. $\mathcal{S}_0(U) = \mathcal{O}_X(U) = A$ に注意する. $\mathcal{S} ::$ quasi-coherent なので, $\mathcal{S}|_U = \tilde{M}$ となる $M :: A$ -algebra が存在する. $D_+(g)$ ($g \in M_+ \otimes A_f = (M \otimes A_f)_+$) での section を見ると, 次式の最後の等号が分かる.

$$\text{Proj } \mathcal{S}(U) = \text{Proj } M = \text{Proj } M \otimes_A A = \text{Proj } M \times_{\text{Spec } A} \text{Spec } A.$$

なので, 次の fiber product の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} (\text{Proj } \mathcal{S}(U)) \times_U U & \xrightarrow{\pi_U} & U \\ \text{pr} \downarrow & & \parallel \\ \text{Proj } \mathcal{S}(U) & \longrightarrow & U. \end{array}$$

このように, $\text{Proj } \mathcal{S}(U) = (\text{Proj } \mathcal{S}(U)) \times_U U$ からの projection map として π_U を定める. $f \in A, U_f = \text{Spec } A_f \subseteq U$ とすると, Thm3.3 の証明より次が得られる.

$$\pi_U^{-1}(U_f) = (\text{Proj } \mathcal{S}(U)) \times_U U_f = \text{Proj } M \otimes A_f = \text{Proj } M_f = \text{Proj } \mathcal{S}(U_f).$$

$\mathcal{S}(U_f) = M_f = \mathcal{S}(U)_f$ に注意. これら (と私が書いた Ex3.1 の解答にある道具たち) を使うと, $U, V ::$ open affine subset in X について $\pi_U^{-1}(U \cap V) \cong \pi_V^{-1}(U \cap V)$ となることがわかる. したがって $\text{Proj } \mathcal{S}(U)$ と π_U の張り合わせが可能であり, こうして **Proj** $\mathcal{S}, \pi : \text{Proj } \mathcal{S} \rightarrow X$ が構成できる. $\mathcal{O}_{\text{Proj } \mathcal{S}(U)}(1)$ 達も貼りあわせて, $\mathcal{O}(1)$ を得る.