

ゼミノート #3

Sheaves on Sites, continued.

七条彰紀

2018 年 10 月 18 日

1 Propositions : Sheaves.

定理 1.1

$\mathbf{C} :: \text{site}$ とする. 忘却関手

$$Fgt: (\text{Category of Sheaves on } \mathbf{C}) \rightarrow (\text{Category of Presheaves on } \mathbf{C}).$$

は left adjoint functor $:: Sh$ を持つ.

(証明). ■

命題 1.2

$X :: \text{scheme}$ とする. representable sheaf $:: \underline{X}$ は fppf topology を備える site 上で sheaf である.

(証明). ■

定理 1.3

命題 1.4

任意の presheaf は colimit of representable sheaves として表現できる (Kan 拡張に関連して得られる.).

(証明). ■

2 Definitions : Points and Stalks.

以下は small/big etale site のみで使われるものである.

定義 2.1 (Geometric Point, Etale Neighborhood, [1] 1.3.15.)

- (i) $X :: \text{scheme}$ に対し, $k :: \text{separably closed field}$ を用いて $\bar{x}: \text{Spec } k \rightarrow X$ と表される射を geometric point と呼ぶ.
- (ii) geometric point $:: \bar{x}: \text{Spec } k \rightarrow X$ について, \bar{x} の etale neighborhood とは $U \rightarrow X$ が etale である

ような以下の可換図式のことである.

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k & \xrightarrow{\bar{x}} & X \end{array}$$

- (iii) geometric point $:: \bar{x}: \mathrm{Spec} k \rightarrow X$ について, \bar{x} の 2 つの etale neighborhood $:: U_1, U_2$ を考える. この時, U_1 と U_2 の間の射とは, 以下の図式を可換にする morphism of schemes $:: \eta: U_1 \rightarrow U_2$ のことである.

$$\begin{array}{ccccc} & & U_1 & \xrightarrow{\eta} & U_2 \\ & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

注意 2.2

geometric point の定義に separably closed field でなく algebraically closed field を用いることもある.

注意 2.3

より一般的な point of site の定義が存在する ([2] Tag 04JU). これは etale か否かに依らず採用できる. しかしこの一般的な定義は複雑であるし, 我々は small/big etale site しか扱わないので, 我々は以上の定義のみ用いる.

定義 2.4 (Stalk, [1] 1.3.15.)

$X :: \text{scheme}$, $\mathcal{F} \in \mathrm{Et}(X)$ あるいは $\mathcal{F} \in \mathrm{ET}(X)$ とする. さらに $\bar{x}: \mathrm{Spec} k \rightarrow X :: \text{geometric point}$ とする. \bar{x} に対して \bar{x} の etale neighborhood が成す圏を $I_{\bar{x}}$ とする,

- (i) $I_{\bar{x}}$ を用いて stalk of \mathcal{F} at \bar{x} を

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} := \varinjlim_{U \in I_{\bar{x}}} \mathcal{F}(U)$$

と定義する.

- (ii) $U \in I_{\bar{x}}$ について, $\mathcal{F}(U)$ から $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ への標準的射がある. この射による $s \in \mathcal{F}(U)$ の像を $s_{\bar{x}}$ と表し, germ of s at \bar{x} と呼ぶ.

3 Definitions : Morphism of Shaves.

定義 3.1 (Injective, Surjective)

定義 3.2 (Representable Morphism.)

4 Examples : Morphism of Shaves.

5 Propositions : Morphism of Shaves.

命題 5.1

inj/surj/iso at stalk.

参考文献

- [1] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [2] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.