スキーム・代数的空間・代数的スタックの別定義

七条 彰紀

2020 年 3 月 1 日

概要

可換環の圏から出発して，スキーム，代数的空間，代数的スタックをチャート付き層あるいはチャート付きスタックとして定義する．「チャート付き対象」は多様体やスキームと言った対象の定義の様式を一般化したものである．それぞれチャート付き対象の様式での定義を述べた後，それらが通常使われる定義と同値であることを述べる．読者はすでにスキーム，代数的空間，代数的スタックの定義を熟知しているものとする．

1　思想：チャート付き幾何的対象

多様体は通常，以下のように定義される．

定義 1.1 (多様体 (manifold) の開被覆)
位相空間 X を考える．

(i) 位相空間の射 $f\colon X \to Y$ が**開埋め込み** (open immersion) であるとは，
- $f(X)$ が位相空間 Y の開部分集合であり，
- かつ f から誘導される射 $X \to f(X)$ が同相射である，

ということ．

(ii) 位相空間の射の族 $\{u_i\colon U_i \to X\}_{i\in I}$ が開被覆であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して $x \in u_i(U_i)$ なる $i \in I$ が存在するということ．

定義 1.2 (ユークリッド空間によるチャート付き位相空間としての実多様体)
位相空間 X が m 次元実多様体であるとは，ユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の開部分集合からの射からなる開被覆 $\{U_i \to X\}_{i\in I}$ が存在するということ．

一方，スキームはアフィンスキームによる開被覆を持つ局所環付き空間として定義されるのであった．

定義 1.3 (局所環付き空間 (locally ringed space) の開被覆)
局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ を考える．

(i) 局所環付き空間の射 $(f, f^{\#})\colon (X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)$ が**開埋め込み** (open immersion) であるとは，
- $f(X)$ が位相空間 Y の開部分集合であり，
- かつ f から誘導される射 $X \to f(X)$ が同相射であり，
- かつ層の射 $f^{\#}|_{f(X)}\colon \mathcal{O}_Y|_{f(X)} = \mathcal{O}_{f(X)} \to \mathcal{O}_X$ が同型射である，

ということ．

(ii) 局所環付き空間の射の族 $\{(u_i, u_i^{\#}) \colon (U_i, \mathcal{O}_{U_i}) \to (X, \mathcal{O}_X)\}_{i\in I}$ が開被覆であるとは，任意の点 $x \in X$ に対して $x \in u_i(U_i)$ なる $i \in I$ が存在するということ．

定義 1.4 (アフィンスキームによるチャート付き局所環付き空間としてのスキーム)
局所環付き空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ がスキームであるとは，アフィンスキームからの射からなる開被覆 $\{\operatorname{Spec} R_i \to (X, \mathcal{O}_X)\}_{i\in I}$ が存在するということ．

ここに共通して見られるのは，多様体とスキームはどちらも「既によく知られている幾何的対象で被覆できる種類の幾何的対象」である，ということである．このような幾何的対象は [Lin16] で圏論的に取り扱われていて，**チャート付き対象** (charted object) と呼ばれている．

多様体は特別な位相空間，スキームは特別な局所環付き空間として定義されている．一方，代数的空間と代数的スタックはそれぞれ特別な層，特別なスタックとして定義される．スキームも特別な層として，可換環の圏から構成することが出来る．この際に古典的な意味の位相空間は必要でない．そして代数的空間と代数的スタックもチャート付き対象の形で定義することが出来る．

2　環の景

単位的可換環（以下，環）の圏を $\mathbf{Ring}$ と書く．もちろんこの圏には零環が属す．非可換環は扱わない．

圏 $\mathbf{Ring}^{\mathrm{op}}$ の射の性質として開埋め込み，fppf 射，fpqc 射を定義する．環と加群の定義，モノ射，エピ射，（忠実）平坦，（形式的に）滑らかな・不分岐・エタールな射，有限表示射の定義は既知とする．

定義 2.1 (環の開埋め込み射)
環の射（準同型）$\phi \colon R' \to R$ を考える．環の射 $\phi \colon R' \to R$ が平坦，モノ，有限表示であるとき ϕ は開埋め込みであるという．

通常の意味の開埋め込みとこの定義の関係は [Sta19] 025G を参照せよ．

定義 2.2 (合併的に全射; jointly surjective)
$\mathbf{Ring}^{\mathrm{op}}$ の射の族 $\{\phi_i \colon S_i \to R\}_{i\in I}$ が合併的に全射であるとは，誘導される位相空間の射 $\coprod_{i\in I} \operatorname{Spec} S_i \to \operatorname{Spec} R$ が全射であるということ．言い換えれば，任意の素イデアル $\mathfrak{p}$ について $\phi_i^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ となる添字 $i \in I$ と素イデアル $\mathfrak{q}$ が存在するということ．

定義 2.3 (環の Zariski / 平滑 / エタール / fppf 景)
$\mathbf{Ring}^{\mathrm{op}}$ に次のように Grothendieck 位相を定義する．

記号 μ を表 (1) にあるいずれかの組とする．圏 $\mathbf{Ring}^{\mathrm{op}}$ の対象 R に対して，μ である $\mathbf{Ring}^{\mathrm{op}}$ の射の集合 $\{S_i \to R\}_i$ であって合併的に全射であるものを全体のクラスを $\operatorname{Cov}(R)$ とする．

以上で定まる景の名前と記号は表 (1) のとおりとする．$\operatorname{Cov}(R)$ の元はこの景における R の被覆と呼ばれる．

注意 2.4
平坦な環の射 $\phi \colon S \to R$ について次が同値であることに注意．

- ϕ は忠実平坦である．

表 1　環の景の名前，記号，対象の種類，被覆の種類

名前	記号	μ
Zariski 大景	$\mathbf{Ring}_{\mathrm{ZAR}}$	開埋め込み射
平滑 大景	$\mathbf{Ring}_{\mathrm{SM}}$	平滑 (smooth) 射
エタール大景	$\mathbf{Ring}_{\mathrm{ET}}$	エタール射
fppf 大景	$\mathbf{Ring}_{\mathrm{FPPF}}$	平坦かつ局所有限表示な射
fpqc 大景	$\mathbf{Ring}_{\mathrm{FPQC}}$	平坦射

- ϕ から誘導される射 $\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} S$ は全射である．

したがって環 $R \in \mathbf{Ring}$ の $\mathbf{Ring}_{\mathrm{FPQC}}$ における被覆 $\{S_i \to R\}_{i \in I}$ について，ここから誘導される射 $\prod_{i \in I} S_i \to R$ は忠実平坦である．上で定義した景の被覆はいずれも平坦な射から成るので，いずれの景でも同様にして忠実平坦射が得られる．

定義 2.5
$\mathbf{Ring}$ 上の前層の圏を $\mathbf{PShv}(\mathbf{Ring}^{\mathrm{op}}) = \mathbf{Set}^{\mathbf{Ring}^{\mathrm{op}}}$ と書く．景 $\mathcal{S}$ 上の層の圏を $\mathbf{Shv}(\mathcal{S})$ と書く．

定義 2.6 (表現可能関手)
環 $R \in \mathbf{Ring}^{\mathrm{op}}$ について，関手 $\underline{R}$ を次のように定義する．

$$\begin{array}{cccc} \underline{R}\colon & \mathbf{Ring}^{\mathrm{op}} & \to & \mathbf{Set} \\ \underline{\text{対象}}\mathbf{:} & S & \mapsto & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}^{\mathrm{op}}}(S, R) \\ \underline{\text{射}}\mathbf{:} & \psi & \mapsto & (\circ\psi) \end{array}$$

この関手 $\underline{R}$ を環 R で表現される関手という．

補題 2.7
任意の環 $A \in \mathbf{Ring}^{\mathrm{op}}$ について，関手 $\underline{A}\colon \mathbf{Ring}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ は景 $\mathbf{Ring}_{\mathrm{ZAR}}, \mathbf{Ring}_{\mathrm{ET}}, \mathbf{Ring}_{\mathrm{SM}}, \mathbf{Ring}_{\mathrm{FPPF}}$ 上の層である．

(証明). [Sta19] 023P を参照せよ． ∎

定義 2.8
環で表現される $\mathbf{Ring}_{\mathrm{FPPF}}$ 上の層をアフィンスキームと呼ぶ．

3　スキーム，代数的空間，代数的スタック

3.1　表現可能な射による被覆

定義 3.1
表現可能な層，射表現可能な射の性質

定義 3.2

層の射による被覆

3.2 スキーム

定義 3.3 (チャート付き層としてのスキーム)

命題 3.4
スキームの景 $\mathbf{Ring}_{\mathrm{ZAR}}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z})$ は $\mathbf{Ring}_{\mathrm{ZAR}}$ と同型

3.3 代数的空間

定義 3.5 (チャート付き層としての代数的空間)

命題 3.6
代数的空間の diagonal map は表現可能

3.4 代数的スタック

定義 3.7 (チャート付きスタックとしての代数的スタック)

命題 3.8
代数的スタックの diagonal map は表現可能

4 考えられる変種

参考文献

[Lin16] Low Zhen Lin. "Categories of Spaces Built from Local Models". University of Cambridge, June 20, 2016. 261 pp.

[Sta19] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. 2019. URL: `https://stacks.math.columbia.edu`.