実数集合 $\mathbb{R}$ のコンパクト集合

七条 彰紀

2018 年 1 月 30 日

1　準備

補題 1.1
コンパクト空間の閉部分集合はコンパクト．

(証明)．$C \subseteq X$ で X はコンパクトだとする．C の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をとると，$\{C^c \cup U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆になる．X がコンパクトであることから，以下を満たす有限部分集合 $\Lambda_f \subseteq \Lambda$ が存在する．

$$C \subseteq X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda_f} (C^c \cup U_\lambda).$$

よって $C \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda_f} U_\lambda$. ∎

補題 1.2
ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合．

(証明)．X がハウスドルフ空間で，$C \subseteq X$ はコンパクトだとする．C^c の任意の点が内点であること，すなわち C^c の任意の点が C^c に含まれる開近傍を持つことを示そう．

$x \in C^c$ と $y \in C$ を任意に取ると，X がハウスドルフであることから，以下を満たす開集合 $U_y, V_y \subset X$ がとれる．

$$x \in U_y, \quad y \in V_y, \quad U_y \cap V_y = \emptyset.$$

この時 $C = \bigcup_{y\in C} V_y$．C はコンパクトだから，$y_1, \ldots, y_r \in C$ を適当に選ぶことで $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} V_{y_i}$ とできる．$U_{y_i} \subseteq (V_{y_i})^c$ から，

$$U = \bigcap_{i=1}^{r} U_{y_i}$$

とおけば $x \in U$ かつ $U \subseteq C^c$. ∎

注意 1.3
このノートでは以下を公理として認める．
(カントールの公理あるいは区間縮小法の原理) 閉区間の減少列 $\mathbb{R} \supset I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \cdots$ が任意に与えられた時，$\bigcap_{i\in\mathbb{N}} I_i \neq \emptyset$.

2　主定理

定理 2.1
$\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合は有界閉集合.

(証明). $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合 C を考える.

$$C \subset \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, +n)$$

という開被覆を考えると，C がコンパクトであることから，この内の有限個で C は被覆できる.

$$C \subset (-n_1, +n_1) \cup (-n_2, +n_2) \cup \cdots \cup (-n_r, +n_r).$$

$N = \max_{1 \leq i \leq r} n_i$ とすれば $C \subset (-N, +N)$. ∎

定理 2.2
$\mathbb{R}$ の有界閉集合はコンパクト.

証明を二つ述べる.

(証明). 補題 1.1 から，有界閉区間 $[a, b]$　$(a, b \in \mathbb{R}, a < b)$ がコンパクトであることを示せば十分である. $[a, b]$ がコンパクトでないとすると，有限部分被覆を持たない $[a, b]$ の開被覆 $\mathfrak{U}$ が存在する.

これは $[a_0, b_0] = [a, b]$ からはじめて $\{[a_k, b_k]\}_{k \geq 0}$ を次のように作る. すなわち，$[a_k, b_k]$ が構成されている時，$[a_{k+1}, b_{k+1}]$ は

$$\left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}\right], \left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k\right]$$

のうちで，$\mathfrak{U}$ の有限部分で被覆できないものである. こうして出来る $[a, b]$ の閉部分集合鎖

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supsetneq [a_1, b_1] \supsetneq \dots$$

は無限に伸ばすことが出来る(特に任意の $k \geq 0$ について $[a_k, b_k]$ は空でない). 実際, $\left[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}\right], \left[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k\right]$ の両方が $\mathfrak{U}$ の有限部分で被覆できるのであれば，前者，後者を覆い尽くす有限部分被覆を合わせて，$[a_k, b_k]$ が $\mathfrak{U}$ の有限部分で被覆できる. これを繰り返すと，結局 $\mathfrak{U}$ は $[a, b]$ の有限部分被覆をもつということになってしまう.

こうして出来た閉区間列の幅は $0 < |a_k - b_k| \leq \frac{|a-b|}{2^k}$ の様に縮小していく. したがって注意 1.3 で述べたカントールの公理から，$c \in \bigcap_{k \geq 0} [a_k, b_k] \subseteq [a, b]$ がとれる. $\mathfrak{U}$ は $[a, b]$ の開被覆だから，$c \in U$ なる $U \in \mathfrak{U}$ が存在する. U は開集合だから，十分小さい $\varepsilon > 0$ について

$$(-\varepsilon + c, c + \varepsilon) \subseteq U$$

とできる. ε に対して，整数 N を $\frac{|a-b|}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つものとすれば，次のようになる.

$$[a_N, b_N] \subseteq (-\varepsilon + c, c + \varepsilon) \subseteq U.$$

これは $[a_k, b_k]$ のとり方（$[a_k, b_k]$ は U の有限部分で被覆できない）に反する. ∎

(証明). 閉区間 $[a,b]$ $(a<b)$ を考えれば十分であることは 1 つめの証明と変わらない. $[a,b]$ の任意の開被覆 $\mathfrak{U}$ をとる. 明らかに, $\mathfrak{U}$ は $[a,x]$ $(x\in[a,b])$ の開被覆でもある. そこで I を以下のように取る.

$$I=\{x\in[a,b]\mid \mathfrak{U}\text{ は }[a,x]\text{ の有限部分被覆をもつ }\}.$$

$b\in I$ が我々の目標である.

$c\in I$ を任意に取ると, $\mathfrak{U}$ は $[a,b]$ の被覆であることから $c\in U\in\mathfrak{U}$ なる U が存在する. U が開集合であることから, 十分小さい $2\varepsilon>0$ について

$$[-\varepsilon+c,c+\varepsilon]\subsetneq(-2\varepsilon+c,c+2\varepsilon)\subseteq U.$$

$\mathfrak{U}$ がもつ $[a,c]$ の有限開被覆に U を付け加えると, $[-\varepsilon+c,c+\varepsilon]\cap[a,b]\subset I$ が分かる. すなわち, I の任意の点は $[a,b]$ の位相で閉近傍をもつ.

以上から直ちに I が $[a,b]$ の開集合であることが分かる. また, I が閉集合であることも, 次の様に考えれば分かる. l を I の集積点としよう. 集積点の定義から, l の開近傍 $U\in\mathfrak{U}$ は I と交わる. 開近傍の閉包を取れば, これは任意の l の閉近傍と言い換えても良いことが分かる. この閉近傍を十分小さく取れば $[c,l]\subset I$ の様に出来る. これを I の点 c の閉近傍と見れば, 前段落から $l\in I$ が得られる.

よって I は $[a,b]$ の閉かつ開な部分集合. $a\in I$ から $I\neq\emptyset$ で, しかも $[a,b]$ は連結だから, $I=[a,b]$. ∎