# 第3章
# Fibered Categories

七条彰紀

2020年3月17日

## 目次

# 1 Fibered Categories.

## 1.1 Motivation.

"family" あるいは "object on/over a base space"（例えば schemes over a scheme や sheaves on a scheme など）の抽象的な枠組が fibered category である．今後は fibered category が提供する枠組を sheaves on a site の貼り合わせや stack の定義の為に活用する．

## 1.2 Definitions.

$\mathcal{X}, \mathbf{B}$ :: category と関手 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を考える．

- $\pi$ を projection あるいは fibration と呼ぶ.
- $\mathcal{X}$ を fibered category と呼ぶ.
- $\pi(O) = P$ であるとき $O$ は $P$ の上にある ($O$ is over $P$) という．

**定義 1.1** (Cartesian Arrow, Cartesian Lifting, Cartesian Functor, Base Preserving Natural Transformation, [Ols16] and [Noo12])

(i) 以下の性質（Triangle Lifting という）を満たす $\mathcal{X}$ の射 $\phi\colon x \to y$ を cartesian arrow という: (1) にあるような対象と射があるとき，(2) の様に射 $z \to y$ がただ一つ存在し，可換と成る.

in $\mathcal{X}$

(1)

$$\begin{tikzcd}
 & z \arrow[dr] & \\
x \arrow[rr, "\phi"'] & & y
\end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(z) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\pi(x) \arrow[rr, "\pi(\phi)"'] & & \pi(y)
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

in $\mathcal{X}$

(2)

$$\begin{tikzcd}
 & z \arrow[dl, "\exists_1"'] \arrow[dr] & \\
x \arrow[rr, "\phi"'] & & y
\end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd}
 & \pi(z) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\pi(x) \arrow[rr, "\pi(\phi)"'] & & \pi(y)
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

(ii) $y \in \mathcal{X}, u \to \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対し，以下の図式を満たす[†1]$x \in \mathcal{X}$ と cartesian arrow :: $x \to y \in \mathcal{X}$ を，cartesian lifting(or cleavage) of $u \to \pi(y)$ と呼ぶ.

in $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\text{cart.}"] & y
\end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[r] & v
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

(iii) 任意の $y \in \mathcal{X}$ と $u \to \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対して cartesian lifting が存在する $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category という．fibered category over $\mathbf{B}$ が成す圏を $\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ とする．

(iv) 二つの fibered category :: $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}, \pi'\colon \mathcal{X}' \to \mathbf{B}$ について，$\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}'$ の間の射 (morphism of fibered categories, cartesian functor) とは，functor :: $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ であって，$\pi, \pi'$ と整合的[†2]であり，cartesian arrow を cartesian arrow に写すもの．

(v)

**注意 1.2**
少し圏論の言葉を整理しておく．

対象を 0-morphism（あるいは 0-cell）と呼ぶ時，非負整数 $k \geq 0$ について，$k$-morphism (cell) は $(k-1)$-morphism (cell) の間の射と定義できる．こうして $k$-morphism (cell) は階層を成す．そこで，ここで定義した性質を階層別にまとめると次のように成る．

| arrow | arrow in a fibered category | (i) Cartesian Arrow, (ii) Cartesian Lifting |
|---|---|---|
| 0-cell | fibered category | (iii) Existence of Cartesian Lifting |
| 1-cell | functor between fibered categories | (iii) Morphism of Fibered Category |
| 2-cell | nat. trans. between functors | (iv) Base-Preserving Natural Transformation |

通常の圏同型を 1-iso と呼び $\overset{1}{\cong}$ と書く．この時，階層ごとの iso/equiv は以下のようなものである．

| iso. | $x \cong y$ | $\iff$ | 2 つの arrow $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$. |
|---|---|---|---|
| 1-iso. | $x \overset{1}{\cong} y$ | $\iff$ | 2 つの 1-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$. |
| 1-equiv. | $x \overset{1}{\simeq} y$ | $\iff$ | 2 つの 1-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi \cong \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi \cong \mathrm{id}_y$. |
| 2-iso. | $x \overset{2}{\cong} y$ | $\iff$ | 2 つの 2-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$. |
| 2-equiv. | $x \overset{2}{\simeq} y$ | $\iff$ | 2 つの 2-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi \overset{1}{\cong} \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi \overset{1}{\cong} \mathrm{id}_y$. |

**注意 1.3**
$\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ は 2-category である. 2-category は 2-morphism ($\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ では natural transformation) に “vertical composition” と “horizontal composition” の二種類の合成が定まる圏である．詳しくはこのノートでは触れない．

**定義 1.4** (Base-Preserving Natural Transformation, HOM, Equivalence)

(i) 二つの fibered category :: $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}, \pi'\colon \mathcal{X}' \to \mathbf{B}$ の間の 2 つの射 $g, g'\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ と natural transformation :: $\alpha\colon g \to g'$ を考える．

[†1] すなわち，$\pi(x) = u, \pi(x \to y) = u \to \pi(y)$ を満たす．
[†2] すなわち $\pi' \circ g = \pi$ を満たす．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[dd, bend right, "g"'] \arrow[dd, bend left, "g'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] \arrow[drr, "\pi"] & & \\
& & \mathbf{B} \\
\mathcal{X}' \arrow[urr, "\pi'"'] & &
\end{tikzcd}
$$

任意の $x \in \mathcal{X}$ について，$\pi'(\alpha_x) \colon \pi'(g(x)) \to \pi'(g'(x))$ が恒等射になるとき，$\alpha$ を base-preserving natural transformation という．

(ii) $\mathcal{X}, \mathcal{X}' \in \mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ について，$\mathrm{HOM}_{\mathbf{B}}(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ を次の圏とする．

Object. morphism of fibered category $\mathcal{X} \to \mathcal{X}'$.

Arrows. base-preserving natural transformation.

(iii) morphism of fibered category :: $g \colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ が equivalence of fibered category であるとは，別の morphism $h \colon \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ が存在し，$h \circ g$ と $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$，$g \circ h$ と $\mathrm{id}_{\mathcal{X}'}$ の間に base-preserving isomorphism が存在すること[†3].

$$h \circ g \overset{2}{\cong} \mathrm{id}_{\mathcal{X}}, g \circ h \overset{2}{\cong} \mathrm{id}_{\mathcal{X}'}.$$

二つの fibrered category が equivalent であるとは，二つの間に equivalence of fibered category が存在するということである．

**注意 1.5**

2-morphism (2-cell) を base-preserving natural transformation に制限した fibered category の圏を $\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ とすると，HOM は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})}$ であるし，equivalence of fibered category は $\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ での 2-iso である．

## 1.3 Examples.

**例 1.6**

morphism of schemes :: $f \colon X \to Y$ を取る．この $f$ に対し，$f$ の pullback が成す圏 $\Pi(f)$ を考えることが出来る．以下のように定義する．

Object. pullback diagram :: 
$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\
Z \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}
$$

Arrow. pullback diagram と整合的な射の組 $(Z \to Z', P \to P')$.

$\Pi(f)$ から次のように projection が定まる．

[†3] 基本的には category of equivalence の定義と同じである．

$$\begin{array}{cccc} \pi\colon & \Pi(f) & \to & \mathbf{Sch}/Y \\ & \begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & X \\ \big\downarrow & \text{p.b.} & \big\downarrow f \\ Z & \longrightarrow & Y \end{array} & \mapsto & [Z \to Y] \end{array}$$

ここで注意したいのは，$\Pi(f)$ は pullback of $f$ の同型類や代表ではなく，pullback of $f$ 全てであることである．したがって $\pi\colon \Pi(f) \to \mathbf{Sch}/Y$ は pullback of $f$ を選択公理無しに扱う枠組を与えている．

**例 1.7**
category :: $\mathbf{C}$ について，arrow category :: $\mathbf{C}^{\to}$ を以下で定める．

Object. $\mathbf{C}$ の射（$[x \to u]$ の様に表記する）．

Arrow. 射 $[x \to u] \to [y \to v]$ は次の図式を可換にする $x \to y, u \to v$ の組: $\begin{array}{ccc} x & \dashrightarrow & y \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ u & \dashrightarrow & v \end{array}$ .

すると Cartesian Lifting は $\mathbf{C}$ が pullback を持つことを意味し，Triangle Lifting は pullback の普遍性を意味する．

**例 1.8**
以下の関手は fibration である．

$$\begin{array}{cccc} \pi\colon & \mathbf{Sch}/X & \to & \mathbf{Sch} \\ & [Y \to X] & \mapsto & Y \end{array}$$

## 1.4 Propositions.

**命題 1.9** ([Vis07] Prop3.4)

(i) cartesian arrow の合成は cartesian arrow である．

(ii) $\phi\colon x \to y, \psi\colon y \to z$ について，$\psi \circ \phi, \psi$ :: cartesian arrow ならば $\psi$ :: cartesian arrow.

(証明). Triangle Lifting のみを用いて証明できる．簡単なので証明は省略する． ∎

次の命題の証明は Cartesian Lifting と Triangle Lifting の使い方をよく示している．

**命題 1.10**
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category over $\mathbf{B}$ とする．$\mathcal{X}$ の射 $x \to y$ は以下のような二つの射の合成 $x \to z \to y$ に分解できる．

- $x \to z$ :: over $\mathrm{id}_{\pi(x)}$.
- $z \to y$ :: cartesian, over $\pi(x \to y)$.

(証明). $\pi(\phi)$ の cartesian lifting として以下の図式 (1) の $z$ と $z \to y$ を得る．さらに Triangle Lifting により図式 (2) の通り $\mathrm{id}_{\pi(x)}$ 上の射 $x \to z$ を得る．

(1)

in $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "\phi"] & \\ z \arrow[rr, "\text{cart.}"'] & & y \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} & \pi(x) \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\pi(\phi)"] & \\ \pi(x) \arrow[rr, "\pi(\phi)"'] & & \pi(y) \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

(2)

in $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "\exists_1"'] \arrow[dr] & \\ z \arrow[rr, "\text{cart.}"'] & & y \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} & \pi(x) \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\pi(\phi)"] & \\ \pi(x) \arrow[rr, "\pi(\phi)"'] & & \pi(y) \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

∎

**命題 1.11**

$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．$\mathcal{X}$ の任意の cartesian morphism :: $\phi\colon x \to y$ について，$\phi$ :: iso と $\Phi := \pi(\phi)$ :: iso は同値．

(証明). 以下の図式 (1) に Triangle Lifting を用いれば，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$ なる射 $\psi\colon y \to x$ を得る．さらに図式 (2) に於いて，$\phi \circ \mathrm{id}_x = \phi = \phi \circ \psi \circ \phi$ と Triangle Lifting の一意性から $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x$ を得る．

(1)

in $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ x \arrow[rr, "\phi\ ::\ \text{cart.}"'] & & y \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} & \pi(y) \arrow[dl, "\Phi^{-1}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ \pi(x) \arrow[rr, "\Phi"'] & & \pi(y) \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

(2)

in $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, shift right, "\psi\circ\phi"'] \arrow[dl, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\phi"] & \\ x \arrow[rr, "\phi"'] & & y \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} & \pi(x) \arrow[dl, "\Phi^{-1}\circ\Phi=\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ \pi(x) \arrow[rr, "\Phi"'] & & \pi(y) \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

∎

## 2 Cleavage

Cartesian lifting は普遍性 (Triangle Lifting) で特徴づけられている．なので同型を除いて一意であるが，厳密な意味で一意であるというものではない．どの Cartesian lifting を用いるか選んだものが Cleavage（分

裂，劈開）．これは Fibered category :: $\mathcal{X}$ の Cartesian arrow の class を成す．Cleavage と fibration (resp. Fibered category) を併せたものを Cloven fibration (resp. Cloven fibered category) と呼ぶ．選択公理によって，我々は常に Fibration を Cloven fibration にできる．

## 2.1 Split Fibration

Cleavage は Cartesian arrow の class であると書いたが，この class が圏を成すと綺麗である．そのような Cleavage を選べる Fibration を Split fibration と呼ぶ．

**定義 2.1** ([Ols16])
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ :: fibered category とする．splitting of $\pi$ とは，以下を満たす subcategory :: $\mathbf{S} \subset \mathcal{X}$ のことである．

(i) $\mathbf{S}$ は $\mathcal{X}$ の任意の対象を持つ．

(ii) $\mathbf{S}$ の任意の射は cartesian.

(iii) 任意の $\mathbf{B}$ の射 $f\colon U \to V$ と $V$ 上の対象 $v \in \mathcal{X}$ について，$f$ 上の射 $u \to v$ がただ一つ存在する．（すなわち，cartesian lifting が一意に存在する．）

この時，組 $(\mathcal{X}, \mathbf{S})$ を split fibered category と呼ぶ．

任意の Fibration は Split fibration とは限らないが，Split fibration と圏同値である．

**定理 2.2**
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ :: fibered category とする．この時，split fibered category over $\mathbf{B}$ :: $(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbf{S})$ が存在し，圏同値 $\tilde{\mathcal{X}} \simeq \mathcal{X}$ が成立する．

(証明)．ここでは圏と部分圏 $(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbf{S})$ 及び関手 $\Phi\colon \tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ を構成するにとどめる．（TODO: これらがそれぞれ split fibered category over $\mathbf{B}$ と equivalence であることはここでは確認しない．）

以下のように $\tilde{\mathcal{X}}$ を構成する．

Objects. object :: $U \in \mathbf{B}$ と morphism of fibered category :: $u\colon \mathbf{B}/U \to \mathcal{X}$ の組 $(U, u)$.
Arrows. 射 $(V, v) \to (U, u)$ は $\mathbf{B}$ の射 $g\colon V \to U$ と base-preserving isomorphism :: $\alpha\colon v \to u \circ g$ の組 $(g, \alpha)$.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{B}/V \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right=60, "v"', ""{name=V}] & \mathbf{B}/U \arrow[r, "u"] & \mathcal{X} \\
\end{tikzcd}$$

まず projection functor が以下のように定まる．

$$\begin{array}{cccc}
\tilde{\pi}\colon & \tilde{\mathcal{X}} & \to & \mathbf{B} \\
 & (U, u) & \mapsto & U
\end{array}$$

この関手によって fibered category の構造が入る．

さらに次の関手によって equivalence が与えられる．

$$
\begin{array}{cccc}
\Phi\colon & \tilde{\mathcal{X}} & \to & \mathcal{X} \\
 & (U,u) & \mapsto & u(\mathrm{id}_U)
\end{array}
$$

これが equivalence であることは 2-Yoneda Lemma による．

最後に，splitting of $\tilde{\pi}$ :: $\mathbf{S}$ が次で定められる．

> Objects. $\tilde{\mathcal{X}}$ と同じ．
>
> Arrows. $\tilde{\mathcal{X}}$ の射で，$(g, \mathrm{id})$ と表されるもの．すなわち，射 $(V,v) \to (U,u)$ は $\mathbf{B}$ の射 $g\colon V \to U$ であって $v = u \circ g$ であるもの．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{B}/V \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right=60, "v"'] & \mathbf{B}/U \arrow[r, "u"] \arrow[d, phantom, "\|"] & \mathcal{X} \\
 & {} &
\end{tikzcd}
$$

■

**定義 2.3**

圏 $\mathbf{B}$ に対し，

- Cloven fibration over $\mathbf{B}$ の圏を $\mathbf{cFib}(\mathbf{B})$,
- Split fibration over $\mathbf{B}$ の圏を $\mathbf{sFib}(\mathbf{B})$

と書く．それぞれ忘却関手 $\mathbf{sFib}(\mathbf{B}) \to \mathbf{cFib}(\mathbf{B}), \mathbf{cFib}(\mathbf{B}) \to \mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ をもつ．

# 3 Fiber of Fibered Categories

## 3.1 Motivation

## 3.2 Definition

**定義 3.1** (Fiber)

$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．任意の $b \in \mathbf{B}$ について，以下で定める圏を $\mathcal{X}_b$ あるいは $\mathcal{X}(b)$ と書き，fiber of $\pi$ at (over) $b$ と呼ぶ:

> Object. $\pi(x) = b$ となる object :: $x \in \mathcal{X}$.
>
> Arrow. $\pi(\phi) = \mathrm{id}_b$ となる arrow :: $\phi \in \mathcal{X}$.

morphism of fibered category :: $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ から fiber の間に誘導される射を $g_B\colon \mathcal{X}_B \to \mathcal{Y}_B$ と書く．

**注意 3.2**
標語的には次のように定義されている．

$$\mathcal{X}_b = \mathcal{X}(b) := ``\pi^{-1}\left( b \circlearrowleft \mathrm{id} \right)"$$

また，morphism of schemes :: $f\colon X \to B$ の fiber が $f^{-1}(b)$ と表現されることと比較せよ。

$\mathcal{X}$ は上で定義した fiber と cartesian lifting によって contravariant functor に成ることが予想される．しかしこれは一般には正しくない．正確には，fibered category の fiber は一般に psuedo-functor となる．このことは後に証明する．

**定義 3.3** (Psuedo-functor (weak 2-functor))
（以下の URL を参照せよ: `https://stacks.math.columbia.edu/tag/003G`.）2-圏 $\mathbf{C}$ から 2-圏 $\mathbf{D}$ への psuedo-functor :: $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ とは，$\mathbf{C}$ の object を $\mathbf{D}$ の object へ，$\mathbf{C}$ の arrow を $\mathbf{D}$ の arrow へ対応させるものであり，以下を満たす．

(a) 任意の $c \in \mathbf{C}$ について 2-isomorphism $\alpha_c\colon F(\mathrm{id}_c) \to \mathrm{id}_{F(c)}$ が存在する．

(b) 任意の $f\colon c \to d, g\colon d \to e \in \mathbf{C}$ について 2-isomorphism $\alpha_{g,f}\colon F(g \circ f) \to F(g) \circ F(f)$ が存在する．

(c) $f\colon x \to y, g\colon y \to z, h\colon z \to w$ について以下の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "F(f)"] \arrow[r, bend right, "F(f)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_{F(f)}"] & F(y) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "F(\mathrm{id})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha_y"] & F(y) \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "F(f)"] \arrow[r, bend right, "F(f)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha_{\mathrm{id}_y, f}"] & F(y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r] \arrow[r, bend left] \arrow[rrr, bend left] & F(y) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & F(z) \arrow[r] & F(w) \end{tikzcd}$$

## 3.3 Propositions

**補題 3.4**
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．任意の $\mathbf{B}$ の射 $f\colon b \to b'$ と $x \in \mathcal{X}(b')$ について，$f$ と $x$ に対する cartesian lifting は，同型を除いて一意に存在する．

(証明)．存在は fibered category の定義から明らか．一意性は cartesian lifting が普遍性を持つことを Triangle Lifting を用いて示せば良い． ∎

**補題 3.5**
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．このとき，fiber of $\pi$ は psuedo-functor である．

(証明)．$b \in \mathbf{B}$ について，$\mathcal{X}(b)$ は既に既に定義した．$\mathbf{B}$ の射 $\phi\colon b' \to b$ について，関手 $\mathcal{X}(\phi)\colon \mathcal{X}(b) \to \mathcal{X}(b')$ は次のように定められる．まず $u \in \mathcal{X}(b)$ について，$\mathcal{X}(\phi)(u)$ は $\phi$ による $u$ の pullback :: $\phi^*u$ (cartesian lifting of $\phi$) である．次に $\mathcal{X}(b)$ の射 $\lambda\colon u \to v$（$\mathcal{X}(b)$ の定義から $\pi(\lambda) = \mathrm{id}$ を満たす）について，下の図式に triangle lifting を用いて $\phi^*u \to \phi^*v$ を得る．

in $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} \phi^*u \arrow[r] \arrow[dr, bend left] & u \arrow[d, "\lambda"] \\ \phi^*v \arrow[r] & v \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} b' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, bend left] & b \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ b' \arrow[r, "\phi"'] & b \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

定義 (3.3) にある条件 (a) については，各 $b \in \mathbf{B}$ について，命題 (1.11) を用いれば同型の存在が分かる．条件 (b) については，各 $f\colon c \to d, g\colon d \to e \in \mathbf{C}$ と各 $b \in \mathbf{B}$ について補題 (3.4) を用いれば $\mathcal{X}(g \circ f)(b) \cong \mathcal{X}(f) \circ \mathbf{B}(g)(b)$ が得られる．あとはこの同型が自然である（すなわち自然変換を定める）ことを確かめれば良い． ∎

この事実は次のセミナーで用いる．

**定理 3.6** (2-Yoneda Lemma (Fibered Yoneda Lemma))
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ :: fibered category とする．以下のように関手を定める．

$$\begin{array}{rccc} Y\colon & \mathbf{B} & \to & \mathbf{Fib}(\mathbf{B}) \\ & U & \mapsto & \mathbf{B}/U \end{array}$$

ここで $\mathbf{B}/U$ は例 (1.8) にあるとおり fibered category over $\mathbf{B}$ である．

この時，圏同値 $\mathrm{HOM}_{\mathbf{U}}(Y(U), \mathcal{X}) \to \mathcal{X}(U)$ が成り立つ．

(証明)．(TODO) ∎

**注意 3.7**
この定理から，$\mathcal{X}(U)$ を「空間」$\mathcal{X}$ の $U$-rational points と考えることが出来る．また，この定理から関手 $Y$ が $U \in \mathbf{B}$ の fibered category over $\mathbf{B}$ への「昇格」を与えていることが分かる．

**系 3.8**
圏同値 $U, V \in \mathbf{B}$ について $Y(U) \simeq Y(V)$ と $U \cong V$ は同値.

## 4 Grothendieck Construction

今，fibered category から fiber として psuedo-functor を構成した．実はこの逆が出来る．

**定義 4.1** (Grothendieck Construction, [Ols16], [Noo12])
psuedo-functor :: $P\colon \mathbf{B} \to \mathbf{Cat}/\mathbf{B}$ について，以下のように圏 $\int P$ を定義する．

Object. $b \in \mathbf{B}$ と $x \in P(b)$ の組 $(b, x)$.
Arrow. $\phi\colon b \to b'$ と $\Phi\colon P(\phi)(x) \to x'$ の組 $(\phi, \Phi)$.

射の合成は $(\psi, \Psi) \circ (\phi, \Phi) = (\psi \circ \phi, \Phi \circ P(\psi)(\Phi))$ で与えられる．
この圏によって以下の関手が定まる．

$$\begin{array}{cccc} \displaystyle\int : & \left\{ \begin{array}{c} \text{psuedo-functor} \\ \mathbf{B} \to \mathbf{Cat} \end{array} \right\} & \to & \mathbf{sFib}(\mathbf{B}) \\ & P & \mapsto & \displaystyle\int P \end{array}$$

**例 4.2**
scheme :: $S$ について，representable functor :: $\underline{S}$ は $\mathbf{Sch}/S$ に対応する．

**例 4.3**
presheaf of set :: $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ は $\coprod_{c \in \mathbf{C}} F(c)$ に対応する．

**注意 4.4**
David I. Spivak “Category theory for scientists” によると，Grothendieck Construction を最初に構成したのは Grothendieck ではない．例えば MacLane が以前から扱っている．

**定義 4.5** (weak/strict 2-equivalence)
関手 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が weak 2-equivalence であるとは，以下が成り立つこと: 逆向きの関手 $\mathbf{C} \leftarrow \mathbf{D}\colon G$ と二つの自然変換 $\alpha\colon GF \to \mathrm{id}_{\mathbf{C}}, \beta\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$ が存在し，

- 各 $c \in \mathbf{C}, d \in \mathbf{D}$ について $\alpha_c, \beta_d$ は同型であり，
- 射 $\phi \in \mathrm{Arr}(\mathbf{C}), \psi \in \mathrm{Arr}(\mathbf{D})$ について $\alpha_\phi, \beta_\psi$ も同型.

$\alpha_\phi, \beta_\psi$ が恒等射であるときは strict 2-equivalence という．

**定理 4.6** (Grothendieck Construction give Category Equivalence)
Grothendieck Construction

$$\int : \left\{ \begin{matrix} \text{psuedo-functor} \\ \mathbf{B} \to \mathbf{Cat} \end{matrix} \right\} \to \mathbf{cFib}(\mathbf{B})$$

は strict 2-equivalence である．また，このあとに忘却関手 $\mathbf{cFib}(\mathbf{B}) \to \mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ を続けると，weak 2-equivalence となる．

(証明). [Vis07] §3.1.3 に詳しい証明がある．あるいは，P. T. Johnstone "Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium vol.1 (Oxford Logic Guides 43)" に証明がある． ∎

**注意 4.7**
$\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ と "anafunctor" の圏が strict 2-equivalence である，という述べ方もあるようだが，"anafunctor" を用いる理由が特に無いので，このノートでは導入しない．

**注意 4.8**
この定理から，psuedo-functor の理論と fibered category の理論は殆ど同じ，と言える．また，今後現れる stack などは psuedo-functor に対して定義され，一見，fibered category の理論は扱う必要性がなくなる．

しかし実際には，fibered category の方が psuedo-functor より構成しやすい，あるいは全体の性質を理解しやすいという面がある．また技術的な有利としては，fibered category は cleavage（例えば pullback, fiber product 等）を選択する必要がなく，例えば，pullback の貼り合わせ（貼り合わせの際には同型での変形が必要に成る）を自然に扱うことが出来る[†4]．

また，直観としては，fibered category は family である．ここから得られる fiber は正に fiber of family である．そのため fibered category は大域的，psuedo-functor は局所的だと考えられる．

(TODO: あとで分かったらもっと追記する．)

# 5 Category Fibered in Groupoids/Sets

## 5.1 Motivation

Category Fibered in Groupoids は「綺麗すぎる」fibered category であるが，我々が研究する範囲では珍しいものではない．

## 5.2 Definition

**定義 5.1** (Groupoid)
任意の射が同型射である圏を groupoid と呼ぶ．

**注意 5.2**

[†4] もう少し具体的な例としては，trivial family の貼り合わせで出来る locally trivial family も扱える．詳しい例は私の Deformation Theory に関するノートを読んで欲しい．

群は対象がただ一つで任意の射が同型であるものとみなせるため，groupoid にはこの名前がある．

群以外の極めて単純な groupoid として，集合を射が恒等射しかない圏（離散圏）とみなしたものがある．そのため，逆に恒等射しか無い圏も set と呼ぶ．

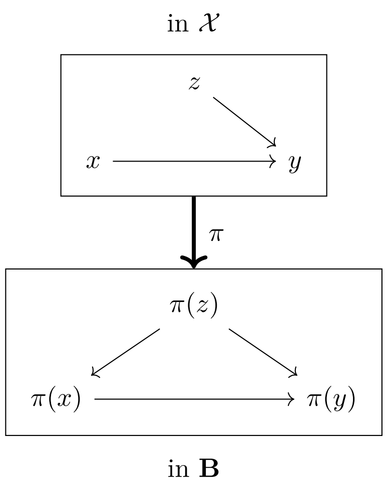
**定義 5.3** (Category fibered in groupoids/sets)
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．任意の $b \in \mathbf{B}$ について，$\pi$ の $b$ における fiber$\mathcal{X}(b)$ が groupoid (set) であるとき，$\mathcal{X}$ を category fibered in groupoids (sets) と呼ぶ．

category fibered in groupoids は次のように定義しても同値である．

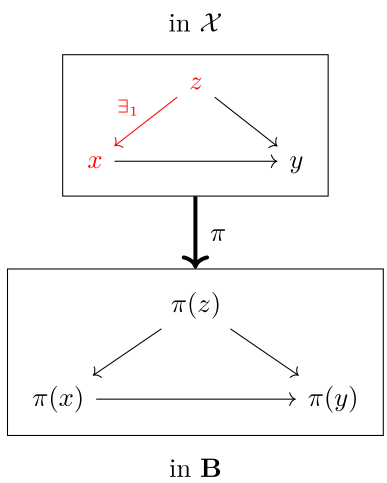
**定義 5.4** (Category fibered in groupoid (Another Definition))
任意の射が cartesian である fibered category を category fibered in groupoids と呼ぶ．すなわち，以下の 2 条件が成立する圏 $\mathcal{X}$ と関手 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を category fibered in groupoids と呼ぶ．

(i) 以下の図式 (1) において，上の箱と下の箱が $\pi$ で対応し，下の箱にある図式が可換であるとする．この時，図式 (2) のように上の箱にある図式を可換にし，$\pi$ での対応を保つ射 $z \to x$ がただ一つ存在する．

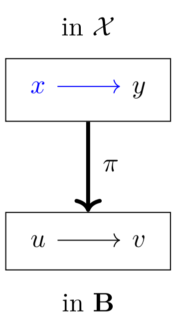
(1)




(2)




(ii) $y \in \mathcal{X}, u \to \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対し，以下の図式を満たす[†5]$x \in \mathcal{X}$ と射 $x \to y \in \mathcal{X}$が存在する．



(証明). [Sta19] 003V[†6]. ∎

# 6 Equivalence of Fibered Categories

Fibered category の一般論の最後に，この直後に扱うことと成る Equivalence を扱う．
この節では fibered categories :: $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}, \pi'\colon \mathcal{X}' \to \mathbf{B}$ と，これらの間の射 $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ を考える．

## 6.1 Definition

**定義 6.1** (Equivalence)
$g$ が equivalence of fibered categories であるとは，別の射 $h\colon \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ が存在し，$g \circ h, h \circ g$ がそれぞれ恒等関手と base-preserving isomorphic であるということである．
この時，$\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}'$ と書き，$h$ は psuedo-inverse of $g$ と呼ばれる．

**注意 6.2**
比較すれば分かるとおり，equivalence of fibered categories は，通常の圏同値の定義に “base-preserving” という条件が追加されただけである．

## 6.2 Propositions

**命題 6.3**
fibered とは限らない圏 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ とその間の関手 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ について，$F$ が圏同値であることは以下の 2 条件が同時に成立することと同値．

Fully Faithfulness.
任意の $c, c' \in \mathbf{C}$ について，
関手 $F$ が与える class の対応 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), F(c'))$ は全単射である．

Essential Surjectivity.
任意の $d \in \mathbf{D}$ について，$F(c) \cong d$ となる対象 $c \in \mathbf{C}$ が存在する．

(証明). [Awo10] Prop7.26 を参照せよ． ∎

**命題 6.4** ([Ols16] Prop3.1.18, 3.1.10)
$b \in \mathbf{B}$ について，$g$ を $\mathcal{X}(b)$ に制限して得られる関手を $g_b\colon \mathcal{X}(b) \to \mathcal{X}'(b)$ とする．

(a) $g$ :: fully faithful $\iff$ 任意の $b \in \mathbf{B}$ について，$g_b$ :: fully faithful.
(b) $g$ :: equivalence $\iff$ 任意の $b \in \mathbf{B}$ について，$g_b$ :: equivalence [†7].

[†5] すなわち，$\pi(x) = u, \pi(x \to y) = u \to \pi(y)$ を満たす．
[†6] https://stacks.math.columbia.edu/tag/003V

(証明). いずれも $\Longrightarrow$ は自明なので $\Longleftarrow$ を示す.

(i) の証明の概略は以下の通り. まず $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c'), \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), F(c'))$ を

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c') = \coprod_{h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(\pi(c), \pi(c'))} \left\{ \begin{matrix} \text{morphisms } c \to c', \\ \text{over } h \end{matrix} \right\},$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), F(c')) = \coprod_{h \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(\pi(c), \pi(c'))} \left\{ \begin{matrix} \text{morphisms } F(c) \to F(c'), \\ \text{over } h \end{matrix} \right\}$$

と分解する. そして各 $h$ について session 4 の命題 4.2 (射は cartesian arrow と id に写る射の合成に分解できる) を用いる. すると各成分について全単射を構成できる.

(TODO: proof of (ii)) ∎

# 参考文献


[Awo10] Steve Awodey. *Category Theory*. 2nd ed. Oxford Logic Guides. Oxford University Press, U.S.A., Aug. 2010.

[Noo12] Behrang Noohi. *A Quick Introduction to Fibered Categories and Topological Stacks*. Augast 23, 2012. URL: http://www.maths.qmul.ac.uk/~noohi/papers/quick.pdf.

[Ols16] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks*. American Mathematical Society Colloquium Publications 62. Amer Mathematical Society, Apr. 2016. ISBN: 978-1-4704-2798-6. URL: https://doi.org/10.1365/s13291-017-0172-7.

[Sta19] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. 2019. URL: https://stacks.math.columbia.edu.

[Vis07] Angelo Vistoli. "Notes on Grothendieck Topologies, Fibered Categories and Descent Theory". In: (May 24, 2007). arXiv: math/0412512. URL: http://arxiv.org/abs/math/0412512 (visited on 02/15/2020).


†7 こちらは通常の圏同値