ゼミノート #8
Algebraic-ness of Spaces and Stacks

七条彰紀

2019 年 1 月 9 日

affine scheme, scheme. algebraic space, algebraic stack という貼り合わせの連なりを意識した定義をした後，algebraic stack が scheme の貼り合わせとして定義できることを示す．algebraic space と algebraic stack の定義は全く平行に行われる．そのことが分かりやすい記述を志向する．

1 Fiber Product of Fibered Categories

$\mathbf{B}$ :: category とする．この時，$\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ は以下のような圏であった．

> Objects: fibered categories over $\mathbf{B}$.
> Arrows: base-preserving natural transtormation.

新たに圏 $\mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ を以下のように定義する．

> Objects: categories fibered in groupoids(CFG) over $\mathbf{B}$.
> Arrows: base-preserving natural transtormation.

重要なのは次の存在命題である．

命題 1.1 ([1] p.10)
$\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ と $\mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ は fibered product を持つ．

(証明). $\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ の射 $F\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}$ と $F\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ をとり，F, G の fiber product を実際に構成する．

■圏 $\mathbf{P}$ の構成　圏 $\mathbf{P}$ を以下のように定義する．

Objects: 以下の 4 つ組

(i) $b \in \mathbf{B}$,
(ii) $x \in \mathfrak{X}(b)$,
(iii) $y \in \mathfrak{Y}(b)$,
(iv) $\mathfrak{Z}$ の恒等射上の同型射 $\alpha\colon Fx \to Gy$.

Arrows:

射 $(b, x, y, \alpha) \to (b', x', y', \alpha')$ は，二つの射 $\phi_{\mathfrak{X}}\colon x \to x', \phi_{\mathfrak{Y}}\colon y \to y'$ であって以下を満たすもの:

$\phi_{\mathfrak{X}}, \phi_{\mathfrak{Y}}$ は同じ射 $b' \to b$ 上の射で，以下の可換図式を満たすもの．

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F\phi_{\mathfrak{X}}"'] & Gy \arrow[d, "G\phi_{\mathfrak{Y}}"] \\ Fx' \arrow[r, "\alpha'"'] & Gy' \end{tikzcd}$$

■Cartesian Lifting in P. この圏は $\pi\colon (b,x,y,\alpha) \mapsto b$ によって fibered category と成る．$f\colon b' \to b$ の $\xi = (b,x,y,\alpha)$ に関する Cartesian Lifting :: $f^*\xi \to \xi$ は次のように定義される．

$$\chi_\xi = (f^*x \xrightarrow{\chi_x} x, f^*y \xrightarrow{\chi_y} y)\colon f^*\xi = (b', f^*x, f^*y, \bar{\alpha}) \to \xi.$$

ここで $\chi_x\colon f^*x \to x$ は f の x に関する Cartesian Lifting である．χ_y も同様．さらに $\bar{\alpha}$ は以下の Triangle Lifting で得られる射である[†1]．

in $\mathfrak{Z}$

$$\boxed{\begin{tikzcd} Ff^*x \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "F\chi_x"'] & Gf^*y \arrow[d, "G\chi_y"] \\ Fx \arrow[r, "\alpha"'] & Gy \end{tikzcd}}$$

$$\Big\downarrow \pi_{\mathfrak{Z}}$$

$$\boxed{\begin{tikzcd} b' \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "f"'] & b' \arrow[d, "f"] \\ b \arrow[r, "\mathrm{id}"] & b \end{tikzcd}}$$

in **B**

fibered category の間の射は cartesian arrow を保つので $F\chi_x, G\chi_y$ も cartesian．したがって Triangle Lifting が出来る．$\bar{\alpha}$ が同型であることは Triangle Lifting の一意性を用いて容易に証明できる．また，この可換図式から χ_ξ が **P** の射であることも分かる．

■$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ が category fibered in groupoids(CFG) ならば P も CFG $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ が CFG ならば **P** も CFG となる．実際，$\phi_{\mathfrak{X}}\colon x \to x'$ と $\phi_{\mathfrak{Y}}\colon y \to y'$ の両方が cartesian ならば $(\phi_{\mathfrak{X}}, \phi_{\mathfrak{Y}})\colon (b,x,y,\alpha) \to (b', x', y', \alpha')$ は cartesian である．

■P からの射影写像． 定義から明らかに $\mathrm{pr}_1\colon \mathbf{P} \to \mathfrak{X}, \mathrm{pr}_2\colon \mathbf{P} \to \mathfrak{Y}$ が定義できる．射の定義にある可換図式は，以下の A が natural transformation であることを意味している．

$$\begin{array}{rccc} A\colon & F\,\mathrm{pr}_1 & \to & G\,\mathrm{pr}_2 \\ & (F\,\mathrm{pr}_1)((b,x,y,\alpha)) = Fx & \mapsto & \alpha(Fx) = \alpha((F\,\mathrm{pr}_1)((b,x,y,\alpha))) \end{array}$$

A が base-preserving であることは α が恒等射上のもの (i.e. $\pi_{\mathfrak{Z}}(\alpha) = \mathrm{id}$) であることから，isomorphism であることは α が同型であることから示される．

[†1] $f^*\alpha\colon f^*Fx \to f^*Gy$ とは異なる．同型 $Ff^*x \to F^*Fx, Gf^*y \to f^*Gy$ と $f^*\alpha\colon Fx \to Gy$ を合成しても $\bar{\alpha}$ は得られる．

■**P :: fiber product.** 今，$\mathscr{W} \in \mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ と射 $S\colon \mathscr{W} \to \mathfrak{X}, T\colon \mathscr{W} \to \mathscr{Y}$ 及び base-preserving isomorphism :: $\delta\colon FS \to GT$ をとる．base-preserving なので，任意の $w \in \mathscr{W}$ について $\pi_{\mathfrak{Z}}(FS(w)) = \pi_{\mathfrak{Z}}(GT(w))$．そこで次のように関手が定義できる．

$$\begin{array}{llcl} H\colon & \mathscr{W} & \to & \mathbf{P} \\ \textbf{Object} & w & \mapsto & (\pi_{\mathfrak{Z}}(FS(w)), Sw, Tw, \delta_w) \\ \textbf{Arrow} & [\phi\colon w \to w'] & \mapsto & (S\phi\colon Sw \to Sw', T\phi\colon Tw \to Tw') \end{array}$$

このように置くと，$S = \mathrm{pr}_1 H, T = \mathrm{pr}_2 H$ となる．逆に $S \cong \mathrm{pr}_1 H', T \cong \mathrm{pr}_2 H'$ となる関手 $H'\colon \mathscr{W} \to \mathbf{P}$ は H と同型に成ることが直ちに分かる． ■

注意 1.2

session4 命題 4.5 より，CFG の恒等射上の射は同型射である．したがって $\alpha\colon Fx \to Gy$ に課せられた条件は，$\mathfrak{Z}$ が CFG ならば一つしか無い．

例 1.3

representable fibered category の fiber product.

我々が扱うのは stack であるから，stack という性質が fiber product で保たれていて欲しいが，果たしてそうなる．

命題 1.4 ([2] Prop 4.6.4)

$\mathfrak{X}, \mathscr{Y}, \mathfrak{Z}$ :: stack over $\mathbf{C}$ とし，morphism of stacks :: $F\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}, G\colon \mathscr{Y} \to \mathfrak{Z}$ をとる．この時，F, G についての fiber product :: $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Z}} \mathscr{Y}$ は stack である．

(証明). $\mathscr{P} = \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Z}} \mathscr{Y}$ とおく．$U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i\colon U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ を任意にとり，$\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathscr{P}(U) \to \mathscr{P}(\mathcal{U})$ を計算する．

■$\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$. $\xi = (b, x, y, \alpha)$ をとり，$\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$ を計算する．まず $\{\phi_i^*\xi\}_i$ は既に詳しく説明した．注意が必要なのは同型 $\sigma_{ij}\colon \mathrm{pr}_2^* \phi_i^*\xi \to \mathrm{pr}_1^* \phi_j^*\xi$ である．可換性は以下の図式から分かる．

in $\mathfrak{X}$

$$\begin{tikzcd}
F\,\mathrm{pr}_2^*\,\phi_j^* x \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "\sigma_{ij}^x"'] & G\,\mathrm{pr}_2^*\,\phi_j^* y \arrow[d, "\sigma_{ij}^y"] \\
F\,\mathrm{pr}_1^*\,\phi_i^* x \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] \arrow[d] & G\,\mathrm{pr}_1^*\,\phi_i^* y \arrow[d] \\
Fx \arrow[r, "\alpha"'] & Gy
\end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi_{\mathfrak{X}}$$

$$\begin{tikzcd}
b' \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & b' \arrow[d, equal] \\
b' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\phi_j \circ \mathrm{pr}_2"'] & b' \arrow[d, "\phi_i \circ \mathrm{pr}_1"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

■$\epsilon_{\mathcal{U}}(\kappa)$. (TODO)

∎

2 Representable Morphism

注意 2.1

以下，S :: scheme とし，$\mathbf{Sch}/S$ 上の site を $\mathbf{C}$ と書く（$(\mathbf{Sch}/S)_\tau$ といった表記も見かける）．また，stack といえば stack in groupoid に限る．

注意 2.2

scheme :: S は $\mathbf{Sch}/S$ によって stack とみなす．また，sheaf:: $\mathcal{F}$ は Grothendiek construction :: $\int \mathcal{F}$ によって stack とみなす．

定義 2.3 (Representable by Scheme/Space)

stack :: $\mathfrak{X}$ が representable by scheme (resp. algebraic space) であるとは，ある scheme :: X (resp. space $\mathcal{X}$) が存在し，$\mathfrak{X} \cong X = \mathbf{Sch}/X$ (resp. $\mathfrak{X} \cong \mathcal{X} = \int \mathcal{X}$) であるということ．

定義 2.4 (Representability of Morphism of Spaces/Stacks)

(i) morphism of spaces :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が representable(by scheme) であるとは，任意の S-scheme :: U と $\mathbf{C}$ の射 $U \to \mathcal{Y}$ について，fiber product :: $U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$（これは space）が representable by scheme であるということ．

(ii) morphism of stacks :: $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ が representable(by algebraic space) であるとは，任意の S-space :: U と $\mathbf{C}$ の射 $U \to \mathfrak{Y}$ について，fiber product :: $U \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$ （これは stack）が representable by algebraic space であるということ．

補題 2.5
morphism of stacks :: $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ が representable by algebraic space であることは，任意のS-scheme :: U と射 $U \to \mathcal{Y}$ について，fiber product :: $U \times_{\mathcal{Y}} \mathfrak{X}$ （これは stack）が representable by algebraic space であることと同値.

（TODO: algebraic space 定義の前に現れている．）

3 Property of Representable Space/Stack/Morphism

定義 3.1

(i) $\mathcal{P}$ を scheme の性質であって，local for etale topology であるものとする．この時，representable stack :: $\mathcal{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathcal{X}$ を represent する algebraic space (resp. scheme) が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(ii) $\mathcal{P}$ を morphism of scheme の性質であって，local on the target かつ stable under base change であるものとする（ここの部分は [2] と [1]&[3] で異なる）．この時，representable morphism of algebraic stacks :: $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，任意の $U \in \mathbf{C}$ と射 $U \to \mathcal{Y}$ について，$\mathrm{pr}\colon \mathfrak{X} \times_{\mathcal{Y}} U \to U$ （に対応する morphism of algebraic spaces）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

4 Diagonal Map

定義 4.1 (Diagonal Map)
$\mathfrak{X}/S$（すなわち射 $\mathfrak{X} \to S$）の diagonal map :: Δ とは，以下の可換図式に収まる射のことである．

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\
& \mathfrak{X} \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

命題 4.2
$\mathscr{F}$ :: stack on $\tau(S)$ 以下は同値である．

(i) $\Delta\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ :: representable.

(ii) 任意の scheme :: U について，$U \to \mathfrak{X}$ :: representable.

(iii) 任意の scheme :: U, V と射 $U \to \mathfrak{X}, V \to \mathfrak{X}$ について $U \times_{\mathfrak{X}} V$ :: representable.

(証明)．(TODO) ∎

5 Algebraic-ness

5.1 Definition

定義 5.1 (Algebraic Space)
S :: scheme とし，$\mathcal{X}$ を space over S（すなわち big etale site $\mathrm{Et}(S)$ 上の sheaf）とする．$\mathcal{X}$ が algebraic であるとは，次が成り立つということである．

(i) diagonal morphism :: $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が representable である．

(ii) scheme :: U からの etale surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ が存在する．

定義 5.2 (Algebraic Stack)
[[2], [3]] S :: scheme, $\mathfrak{X}$ を stack in groupoid over S（すなわち big etale site $\mathrm{Et}(S)$ 上の stack in groupoid）とする．$\mathfrak{X}$ が algebraic であるとは，次が成り立つということである．

(i) diagonal morphism :: $\Delta\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ が representable である．

(ii) algebraic space :: U からの etale surjective morphism :: $U \to \mathfrak{X}$ が存在する．

ここに現れる $U \to \mathfrak{X}$ は $\mathfrak{X}$ の atlas と呼ばれる．

注意 5.3
以上で定義したものはいわゆる “Deligne-Mumford stack” の直接の一般化である．通常は上記に加えて Δ に quasi-compact, separated という条件を課す．（ただし，実際に Deligne と Mumford が DM stack を導入したとされる [3] での定義は上と全く同じである．）Δ :: quasi-compact, separated かつ $U \to \mathfrak{X}$ に smooth のみ要求するものは “Artin stack” と呼ばれる．

注意 5.4
stack :: $\mathfrak{X}$ への algebraic space からの射 $U \to \mathfrak{X}$ が存在すれば，algebraic space の定義より，scheme から $\mathfrak{X}$ への射が存在する．surjective, etale, smooth などの性質は合成について安定なので，algebraic stack の定義の二つ目の条件は「scheme :: U からの……」と書き換えられる．

6 Property of Space/Stack/Morphism of Them

定義 6.1 ([3] p.100, Local Property for the topology.)
S :: scheme とし，$(\mathbf{Sch}/S)$ 上の site :: $\mathbf{C}$ を考える．X, Y :: scheme とし，$\{\phi_i\colon X_i \to X\} \in \mathrm{Cov}(X), \{\psi_i\colon Y_i \to Y\} \in \mathrm{Cov}(Y)$ を任意に取る．

(i) P を scheme の性質とする．P が local for the topology であるとは，以下が成り立つということ:
X が P であることは，全ての U_i が P であることと同値．

(ii) P を scheme の射の性質とする．P が local on the source であるとは，以下が成り立つということ:
$f\colon X \to Y$ が P であることは，全ての $f \circ \phi_i$ が P であることと同値．

(iii) P を scheme の射の性質とする．P が local on the target であるとは，以下が成り立つということ:

$f\colon X \to Y$ が P であることは，全ての $\mathrm{pr}_2\colon X \times_Y Y_i \to Y_i$ が P であることと同値．

(iv) ([2] 5.1.3) P を scheme の射の性質とする．以下が全て成り立つ時，P は stable であると呼ばれる．
- 任意の同型は P.
- P は，射の合成で保たれる．
- P は，任意の $\mathbf{C}$ の射による base change で保たれる．
- local on the target.

(v) ([1] 2.5) P を scheme の射の性質とする．以下が全て成り立つ時，P は local on the source and target であると呼ばれる．: 任意の以下の可換図式について，f が P であることは f' が P であることと同値．

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & Y' \times X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

ただし $X' \to Y' \times X, Y' \to Y$ は，Artin (resp. DM) stack を考えているならば smooth (resp. etale) and surjective である．

注意 6.2
local on the source and target は，$\mathrm{ET}(S)$ を考えているならば次と同値: 任意の以下の可換図式について，f が P であることは f' が P であることと同値．

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

ただし $X' \to Y' \times X, Y' \to Y$ は etale, surjective morphism である．

補題 6.3
ある atlas :: U が local for etale topology な性質を持つならば，任意の altas がその性質を持つ．

定義 6.4 (Property of Algebraic Stacks)

(i) $\mathcal{P}$ を scheme の性質であって，local for etale topology であるものとする．この時，algebraic stack :: $\mathfrak{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathfrak{X}$ の atlas が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(ii) algebraic stack :: $\mathfrak{X}$ が quasi-compact [†2]であるとは，$\mathfrak{X}$ の atlas が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(iii) $\mathcal{P}$ を morphism of scheme の性質であって，local on the source and target であるものとする．この時，morphism of algebraic stacks :: $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，以下の可換図式にある f'（に対応する morphism of algebraic spaces）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & Y' \times \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ & Y' \arrow[r] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

ただし $X' \to Y' \times \mathfrak{X}, Y' \to \mathcal{Y}$ は，Artin (resp. DM) stack を考えているならば smooth (resp. etale) and surjective である．

[†2] 明らかに，これは local for etale topology ではない．

例 6.5 (i) local on the source and target である性質の例: flat, smooth, etale, unramified, normal, locally of finite type, locally of finite presentation.

参考文献

[1] Tomàs L. Gòmez. Algebraic stacks. https://arxiv.org/abs/math/9911199v1.

[2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[3] David Mumford Pierre Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.