Ex5.1 Which equation defines which curve in Figure 4 ?

(a) $x^2 = x^4 + y^4$.

Tacnode.

(b) $xy = x^6 + y^6$.

Node.

(c) $x^3 = y^2 + x^4 + y^4$.

Cusp.

(d) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4$.

Triple point.

Ex5.2 Which equation defines which curve in Figure 5 ?

(a) $xy^2 = z^2$.

Pinch point.

(b) $x^2 + y^2 = z^2$.

Conical double point.

(c) $xy + x^3 + y^3 = 0$.

Double line.

Ex5.3 Multiplicities.

(a) $\mu_P(Y) = 1 \iff P$ is a nonsingular point of Y.

$r = \mu_P(Y)$，$P = (0,0)$ とおく．まず，P が Y の nonsingular point である事の必要十分条件は，以下が成り立つことである．

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(P) & \frac{\partial f}{\partial y}(P)\end{bmatrix} = \dim \mathbb{A}^2 - r = 2 - r.$$

最左辺を見ると，これは 0 or 1．最右辺を見ると，$r = \mu_P(Y) > 0$ より $2 - r = 1$．よって $r = 1$ が必要．

また，$r = 1$ の時，その最低次の成分は $f_1 = ax + by$ と書ける．（ただし $(a,b) \in k^2 \setminus \{(0,0)\}$.）そして最左辺は以下のように計算できる．

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(P) & \frac{\partial f}{\partial y}(P)\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}(a + ((x,y) \text{ の元}))(0,0) & (b + ((x,y) \text{ の元}))(0,0)\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}.$$

これは a or $b \neq 0$ から 1 だと分かる．よって主張が示された．

(b) Find the multiplicity of each of the singular points in (Ex. 5.1) above.

いずれの曲線も原点が特異点であり，重複度は以下の様.

(a) Tacnode 2.
(b) Node 2.
(c) Cusp 2.
(d) Triple point 3.

Ex5.4 Intersection Multiplicity.

$Y = \mathcal{Z}_a(f), Z = \mathcal{Z}_a(g) \subset \mathbb{A}^2$ とし，$P \in Y \cap Z$ をとる．P は平行移動によって $(0,0)$ に出来る．この時，$(Y \cdot Z)_P := \operatorname{length} \mathcal{O}_{P,\mathbb{A}^2}/(f,g) = \operatorname{length}(k[x,y])_{(x,y)}/(f,g)$ と定義する．ただし，環は $\mathcal{O}_{P,\mathbb{A}^2}$ 加群とみなす．また，$\mathbb{P}^2$ の curve については適切な open affine subset を取ることで同様に $\mu_P(Y), (Y \cdot Z)_P$ を定義する．

(a) $\mu_P(Y) \cdot \mu_P(Z) \leq (Y \cdot Z)_P < \infty$.

$F := (k[x,y])_{(x,y)}/(f,g)$ とおく．

■$(Y \cdot Z)_P < \infty$. 主張は F が組成列を持つことと同値．Ati-Mac Prop6.8 と Them8.5 より，これは F がネーター環でありかつ $\dim F = 0$ であることと同値である．$k[x,y]$ がネーター的であることから F はネーター的なので，あとは $\dim F = 0$ を示せば良い．これは以下のように幾何的に示される．F の素イデアルは原点を含む $Y \cap Z$ の部分多様体に対応する．しかし $Y \cap Z$ は Ex2.8 などから，各 irreducible component は点．なので F の素イデアルは（冗長に言えば）原点を含む点に対応し，そのような点は原点しかない．すなわち，F の素イデアルは極大イデアル (x,y) しか無い．よって $\dim F = 0$.

■$\mu_P(Y) \cdot \mu_P(Z) \leq (Y \cdot Z)_P$. (f,g) を考えると，これの零点集合は有限集合だから，準素イデアル分解をすれば有限個の極大イデアルのベキに分解される．原点に対応する極大イデアルについて考えれば，特に $(f,g) \subseteq (x,y)^r$ （TODO: $\left(\mathfrak{m}_P^i/(f)\right) \cap \left(\mathfrak{m}_P^j/(g)\right) \subset F$ を示せれば OK.）

(b) If $P \in Y$, then for almost all lines L thurough P, $(L \cdot Y)_P = \mu_P(Y)$.

平行移動により $P = (0,0)$ とする．今，$(u:v) \in \mathbb{P}^2$ をとると，P を通る全ての直線は $(x,y) = (u,v)t$ の様にパラメータ表示できる．逆に，P を通る直線はこの様に $\mathbb{P}^2$ の点と対応する．ただし t は変数であり，k を渡る．（多分 $f_r(1,v) \cdot f_r(u,1) = 0$ でない点 $(u:v)$ では等式が成り立つ.）

(c) Y :: curve of degree d in $\mathbb{P}^2$, L :: line in $\mathbb{P}^2$, then $(L \cdot Y) := \sum (L \cdot Y)_P = d$.

Ex5.5 Give a nonsingular curve of degree d in $\mathbb{P}^2$ over a field k of characteristic p.

■原点で非特異な曲線の例. d 次斉次既約多項式 $f \in k[x_0,x_1,x_2]_d$ をとる．この f が定義する curve を X としよう．点 $P \in X$ をとり，P がアフィン開被覆 U_i に入っているとしよう．さらに $X_i := X \cap U_i$

とする．ひとまず，原点で非特異な曲線を考える．$\mathcal{O}_{P,X}$ は $\mathcal{O}_{P,X_i}$ と同型なので，$\mathcal{O}_{P,X_i}$ が regular local ring であるような f を取れば良い．さらに X_i は affine variety であるから，Ex5.3 より，f の非斉次化 $\alpha_i(f)$ の multiplicity が 1 であることが原点で非特異であるための必要十分条件．そのような f としては次のようなものが取れる．

$$f = x_0 x_1^{d-1} + x_1 x_2^{d-1} + x_2 x_0^{d-1}.$$

■任意の点で非特異であることの必要十分条件． これが任意の点で非特異であることを見よう．f は変数の交換について不変なので $\alpha_0(f)$ のみ考えれば十分．そのヤコビ行列を計算すると以下の様．

$$J = \begin{bmatrix} (d-1)x_1^{d-2} + x_2^{d-1} \\ (d-1)x_1 x_2^{d-2} + 1 \end{bmatrix}$$

明らかに $\operatorname{rank} J = 0$ or 1．そして nonsingular であることと $\operatorname{rank} J = 1$ は同値なので，$\operatorname{rank} J \neq 0$ を示せば良い．そのためには，以下の連立方程式が解 (a, b) を持つと仮定して矛盾が導かれれば良い．

$$a^{d-1} + ab^{d-1} + b = 0 \tag{0.1}$$

$$(d-1)a^{d-2} + b^{d-1} = 0 \tag{0.2}$$

$$(d-1)ab^{d-2} + 1 = 0 \tag{0.3}$$

場合分けをする．

■$d - 1 = 0 \vee a = 0 \vee b = 0 \implies \operatorname{rank} J \neq 0.$ (0.3) が $1 = 0$ となってしまうので矛盾．

■$d - 1 \neq 0 \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0 \implies \operatorname{rank} J \neq 0.$ (0.2) より，$a^{d-1} = -\frac{1}{d-1}ab^{d-1}$．これと $b \neq 0$ を (0.1) に用いて $\frac{d-2}{d-1}ab^{d-2} + 1 = 0$．$d - 2 = 0$ とすると直ちに $1 = 0$ と矛盾が出るので，$d - 2 \neq 0$ としよう．すると (0.3) と $ab^{d-2} = -\frac{d-1}{d-2}$ を用いて，次が得られる．

$$\frac{(d-1)^2}{d-2} = 1.$$

$d \in \mathbb{Z}$ がこの方程式を満たすことはなく，これで矛盾が生じた．

以上で主張が示された．

Ex5.6 Blowing Up Curve Singularities.

点 $O := (0, 0)$ とする．また，V_0, V_1 を以下のように定義する．

$$V_0 := \{(x, y) \times (1 : v) \mid y = vx\},\ V_1 := \{(x, y) \times (u : 1) \mid uy = x\} \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$$

これらは $\mathbb{A}^2$ の O における blowing up を被覆する．

(a) Blowing up of the cusp or the node of Ex5.1 at O is nonsingular.

■Blowing up of $Y = \mathcal{Z}_a(y^2 + x^4 + y^4 - x^3)$ at O. Y の V_0, V_1 における strict transform はそれぞれ以下の様．

$$\begin{aligned} \tilde{Y} \cap V_0 =& \mathcal{Z}_a(v^4x^2 + x^2 + v^2 - x, y - vx) \\ \tilde{Y} \cap V_1 =& \mathcal{Z}_a(u^4y^2 - u^3y + y^2 + 1, uy - x) \end{aligned}$$

まず $\tilde{Y} \cap V_0$ のヤコビ行列を計算する．

$$J_0 = \begin{bmatrix} -vx & y - v & y - x \\ 0 & 2v^4x + 2x - 1 & 4v^3x^2 + 2v \end{bmatrix}$$

この行列を 2 つの行ベクトルに分解すると，それらは $\tilde{Y}\cap V_0$ 上の任意の点で線形独立.[1]よって $\operatorname{rank} J_0 = \dim \operatorname{im} J_0 = 2$. $\tilde{Y}\cap V_0$ は 3 次元空間内の 1 次元多様体なので nonsingular. 同様に $\tilde{Y}\cap V_1$ のヤコビ行列を計算すると以下のようになり，やはり $\tilde{Y}\cap V_1$ が nonsingular であることが分かる.[2]

$$J_1 = \begin{bmatrix} uy & u-x & y-x \\ 0 & 2u^4y-u^3+2y & 4u^3y^2-3u^2y \end{bmatrix}$$

■Blowing up of $Z=\mathcal{Z}_a(x^6+y^6-xy)$ at O. Z の V_0, V_1 における strict transform はそれぞれ以下の様.

$$\begin{aligned}\tilde{Z}\cap V_0 =& \mathcal{Z}_a(-v^6x^4+x^4+v, y-vx)\\ \tilde{Z}\cap V_1 =& \mathcal{Z}_a(u^6y^4+y^4-u, uy-x)\end{aligned}$$

それぞれヤコビ行列は次のよう.

$$J_0 = \begin{bmatrix} -vx & y-v & y-x \\ 0 & -4v^6x^3+4x^3 & -6v^5x^4+1 \end{bmatrix}, J_1 = \begin{bmatrix} uy & u-x & y-x \\ 0 & 4u^6y^3+4y^3 & 6u^5y^4-1 \end{bmatrix}$$

$\tilde{Z}\cap V_0$ の定義多項式より，J_0 では $x=0$ or $v=0 \implies x=y=v=0$ が成り立つ．なので $\tilde{Z}\cap V_0$ の任意の点で $\operatorname{rank} J_0 = 2$. J_1 でも同様のことが成り立つので，これらは nonsingular である.

(b) Blowing Up at a Node.

既約多項式 $f \in k[x,y]$ で定義される $Y := \mathcal{Z}_a(f)$ について，点 $P\in Y$ が node (ordinary double point) であるとは，P における f のテイラー展開の最低次斉次部分 f_r について，$r=2$ であり，かつ f_r が互いに異なる一次多項式の積として書けることを言う.

Y について $O=(0,0)$ が node であるとしよう．すると 2 次斉次部分 f_2 は以下のように書ける.

$$f_2 = (ax-by)(cx-dy) \text{ where } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-bc \neq 0$$

where の条件は二つの一次多項式が定義する直線が互いに異なることを意味する．2 次より高次な成分はまとめて $\sum_{i+j>2} c_{ij}x^iy^j$ と書くことにする．この Y を O で blowing up して得られる strict transform $\tilde{Y}$ が例外曲線に 2 点で交わることを示す．blowing up の計算結果は以下の通り.

$$\begin{aligned}\tilde{Y}\cap V_0 =& \mathcal{Z}_a\left((a-bv)(c-dv)+\sum_{i+j>2} c_{ij}v^jx^{i+j-2}, y-vx\right)\\ \tilde{Y}\cap V_1 =& \mathcal{Z}_a\left((au-b)(cu-d)+\sum_{i+j>2} c_{ij}u^iy^{i+j-2}, uy-x\right)\end{aligned}$$

どちらも例外曲線 $E := \{(0,0)\times(u:v)\}$ とは 2 点 $P_1=(0,0)\times(b:a), P_2=(0,0)\times(d:c)$ で交わる．例外曲線上の点に於ける $\tilde{Y}\cap V_0$ のヤコビ行列は以下の様.

$$J_0((0,0)\times(u:v)) = \begin{bmatrix} 0 & -v & 0 \\ 0 & \sum_{i+j=3}(i+j-2)c_{ij}v^j & 2bdv-(ad+bc) \end{bmatrix}$$

$2bdv-(ad+bc)$ に $a-bv=0, c-dv=0$ を用いると，どちらの場合も $ad-bc$ となる．これは a,b,c,d の取り方から非零なので，ヤコビ行列のランクは 2 点 P_1, P_2 において 2. よって $\tilde{Y}\cap V_0$ は $\phi^{-1}(O)=\{P_1,P_2\}$ において nonsingluar である．$\tilde{Y}\cap V_1$ についての計算は同様なので略す.

---

[1] 1 列目を見ると，線形従属になるには $x=0$ or $v=0$ が必要と分かる．定義多項式から，$x=0 \implies y=v=0$ と $v=0 \implies y=x(x-1)=0$ であることに注意.

[2] $\tilde{Y}\cap V_1$ の定義多項式得られる $y\neq 0$ と $u=0 \implies x=y^2-1=0$ を用いる.

(c) Blowing up of tacnode of Ex5.1 at O has a node.

$Y = \mathcal{Z}_a(x^4 + y^4 - x^2)$ とする．この Y を O で blowing up して得られる strict transform は以下の通り．

$$\begin{aligned}\tilde{Y} \cap V_0 =& \mathcal{Z}_a\Big((1+v^4)x^2 - 1, y - vx\Big)\\ \tilde{Y} \cap V_1 =& \mathcal{Z}_a\Big(\Big((u^4+1)y - u\Big)\Big((u^4+1)y + u\Big), uy - x\Big)\end{aligned}$$

$\phi^{-1}(O) = \{(0,0) \times (0:1)\}$ であり，この点で $\tilde{Y} \cap V_1$ は 2 つの接線を持つ．よって $(0,0) \times (0:1)$ は $\tilde{Y}$ の node である．

(d) O on $\mathcal{Z}_a(y^3 - x^5)$ is a triple point, and blowing up O gives rise to a double point.

$f = y^3 - x^5, Y = \mathcal{Z}_a(f)$ とする．$O \in Y$ は明らか．$\mu_O(Y) = 3$ なので Ex5.3 より O は singular point，特に triple point である．Y の O における strict transform は以下の通り．

$$\begin{aligned}\tilde{Y} \cap V_0 =& \mathcal{Z}_a(v^3 - x^2, y - vx)\\ \tilde{Y} \cap V_1 =& \mathcal{Z}_a(1 - u^5y^2, uy - x)\end{aligned}$$

$\tilde{Y} \cap E = \{(0,0) \times (1:0)\}$ であり，$\tilde{Y} \cap V_0$ の表式から，これは O に double point（詳しく言うと cusp）を持つ．この cuspidal curve $v^3 - x^2$ が blowing up で nonsingular になることは Ex4.10 から明らか．

Ex5.7 Cone of a nonsingular plane curve of degree > 1.

$f = \sum_{l+m+n=d} c_{lmn} x^l y^m z^n$ を nonsingular な既約 d 次斉次多項式とし，さらに $d(= \deg f) > 1$ とする．$Y = \mathcal{Z}_p(f), X = \mathcal{Z}_a(f)$ とおき，$\tilde{X}$ を X の strict transform としよう．さらに $O = (0,0,0)$ としておく．

(a) X has just one singular point, namely O.

Ex5.3 と $\deg f > 1$ から O が X の singular point であることは明らか．

O 以外の X の点 P が nonsingular であることを示そう．$P = (a,b,c)$ かつ $c \neq 0$ とする．示すべきことは P におけるヤコビ行列のランクが 0 でない，すなわち

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = \frac{\partial f}{\partial z}(P) = 0$$

とはなりえないということである．

$(a:b:c)$ が属す affine open subset $Y \cap U_2$ は $g = \alpha_2(f)$ で定義される．Y は nonsingular だから $Y \cap U_2$ も nonsingular であり，したがって g のヤコビ行列のランクは 0 でない．計算するとヤコビ行列は次のよう．

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{bmatrix}(a/c, b/c) = c^{-(d-1)}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix}(a,b,c) \neq \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$$

よって $\frac{\partial f}{\partial x}(P) = \frac{\partial f}{\partial y}(P) = 0$ となることはない．

(b) $\tilde{X}$ is nonsingular.

$\mathbb{A}^3$ の blowing up $Bl_O(\mathbb{A}^3)$ の affine cover は次のよう．

$$\begin{aligned} V_0 =&\{(x,y,z)\times(1:t:u) \mid xt=y, xu=z, yu=tz\} \\ V_1 =&\{(x,y,z)\times(s:1:u) \mid x=sy, xu=sz, yu=z\} \\ V_2 =&\{(x,y,z)\times(s:t:1) \mid xt=sy, x=sz, y=tz\} \end{aligned}$$

これを用いて $\tilde{X}$ を計算する．

$$\begin{aligned} \tilde{X}\cap V_0 =&\mathcal{Z}_a\left(\sum_{l+m+n=d} c_{lmn}t^m u^n\right)\cap V_0 = \mathcal{Z}_a(f(1,t,u))\cap V_1 \\ \tilde{X}\cap V_1 =&\mathcal{Z}_a\left(\sum_{l+m+n=d} c_{lmn}s^l u^n\right)\cap V_1 = \mathcal{Z}_a(f(s,1,u))\cap V_1 \\ \tilde{X}\cap V_2 =&\mathcal{Z}_a\left(\sum_{l+m+n=d} c_{lmn}s^l t^m\right)\cap V_2 = \mathcal{Z}_a(f(s,t,1))\cap V_2 \end{aligned}$$

$Y=\mathcal{Z}_p(f)$ が nonsingular であることから $Y\cap U_i=\mathcal{Z}_a(\alpha_i(f))$ も nonsingular．$\tilde{X}$ が nonsingular であることは，その対称性から，$\tilde{X}\cap V_i$ のうち一つが nonsingular であることを見れば十分．例えば $\tilde{X}\cap V_2$ のヤコビ行列は以下の様になる．

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_s & g_t \\ t-sy & xt-s & 0 & xt-y & x-sy \\ -sz & 0 & x-s & x-z & 0 \\ 0 & -tz & y-t & 0 & y-z \end{bmatrix}$$

ただし $g=f(s,t,1)$ である．5 次元空間内の 2 次元多様体を考えているので，この行列のランクが常に 3 であれば良い．一番上の行は $\mathbf{0}$ となることがないので，この条件は下 3 行がなす小行列のランクが常に 2 であることと同値．さらにこれは V_2 が nonsingular であることと同値である．V_2 は写像 $(z,s,t)\mapsto(sz,tz,z)\times(s:t:1)$ によって $\mathbb{A}^3$ と同型であるから V_2 は nonsingular．まとめて，$\tilde{X}\cap V_2$ が nonsingular であることが導かれる．

(c) $\phi^{-1}(O)\equiv Y$.

$\phi^{-1}(O)$ は $\tilde{X}$ と例外曲線の交わりであるから，p.28 にある考察の (2) より，$\tilde{X}$ と $O\times\mathbb{P}^2$ の共通部分である．（V_0,V_1,V_2 の表示を見てもこのことはわかる．）したがって上の計算から次がわかる．

$$\phi^{-1}(O)=\{(0,0,0)\times(s:t:u)\mid f(s,t,u)=0\}\equiv\{(s:t:u)\mid f(s,t,u)=0\}=\mathcal{Z}_p(f)=Y.$$

Ex5.8 Condition for projective nonsingular variety expressed by Jacobian matrix.

$f_1,\dots,f_t\in k[x_0,\dots,x_n]$ を斉次多項式とし，$Y=\mathcal{Z}_p(f_1,\dots,f_t)$ とする．Y のヤコビ行列を $J(P)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(P)\right]$ とおく．さらに $J_i(P)=\left[\frac{\partial \alpha_i(f)}{\partial x_i}(P)\right]$ としておく．

■$\mathrm{rank}\, J(P)$ is independent of the homogeneous coordinates chosen for P. 多重指数 γ を用いて $f = \sum_{|\gamma|=d} c_\gamma x^\gamma$ とおく．するとその偏微分は以下のようになる．

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{|\gamma|=d} \gamma_i c_\gamma x^{(\gamma_0,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_n)}$$

$|\gamma| = d$ ならば常に $|(\gamma_0,\ldots,\gamma_i-1,\ldots,\gamma_n)| = d-1$ であるから，$\frac{\partial f}{\partial x_i}$ は $d-1$ 次斉次多項式．以下が成り立つ．

$$^\forall\lambda \in k^\times,\quad J(\lambda P) = \lambda^{\sum_{j=1}^{t}(\deg f_j - 1)} \cdot J(P).$$

したがって $\mathrm{rank}\, J(\lambda P) = \mathrm{rank}\, J(P)$．

■Pass to affine U_i containing P. P を固定し，P を含むアフィン開被覆 U_i をひとつ選ぶ．仮に $i = 0$ であったとしよう．$i \neq 0$ であっても以下の議論は同様である．$\mathcal{O}_{P,Y} \cong \mathcal{O}_{P,Y\cap U_0}$ なので，P で Y が nonsingular であることと P で $Y \cap U_0$ が nonsingular であることは同値である．$Y \cap U_0$ は $\{\alpha_0(f_j)\}_{j=1}^t$ で定義されるから，P で Y が nonsingular であることと $\mathrm{rank}\, J_0(P) = n - \dim Y$ は同値である．

■$\mathrm{rank}\, J_i(P) = \mathrm{rank}\, J(P)$. さて，$J_0(P)$ は次のような行列である．

$$J_0(P) = \begin{bmatrix} \partial_{x_0}\alpha_0(f_1) & \partial_{x_1}\alpha_0(f_1) & \ldots & \partial_{x_n}\alpha_0(f_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_0}\alpha_0(f_t) & \partial_{x_1}\alpha_0(f_t) & \ldots & \partial_{x_n}\alpha_0(f_t) \end{bmatrix}(P) = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{x_1}\alpha_0(f_1) & \ldots & \partial_{x_n}\alpha_0(f_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \partial_{x_1}\alpha_0(f_t) & \ldots & \partial_{x_n}\alpha_0(f_t) \end{bmatrix}(P)$$

また，$i \neq 0$ の時，一般の $f = \sum_{|\gamma|=d} c_\gamma x^\gamma$ について以下が成り立つ．

$$\partial_{x_i}\alpha_0(f)(p_1,\ldots,p_n) = \sum_{|\gamma|=d} \gamma_i c_\gamma \cdot 1^{\gamma_0} \cdot p_1^{\gamma_1} \cdots p_i^{\gamma_i - 1} \cdots p_n^{\gamma_n} = \alpha_0(\partial_{x_i} f)(p_1,\ldots,p_n)$$

したがって $J_0(P)$ は以下のようになる．ただしここでの ϕ_0 は Prop2.2 のものである．

$$J_0(P) = \begin{bmatrix} 0 & \partial_{x_1} f_1 & \ldots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \partial_{x_1} f_t & \ldots & \partial_{x_n} f_t \end{bmatrix}(\phi_0(P))$$

そこで $J_0(P)$ の i 列目に p_i をかけて 0 列目へ足すと，Euler's lemma : $\sum x_i \partial_{x_i} f = (\deg f) \cdot f$ から次のようになる．これは基本変形であるからランクは変わらない．

$$\mathrm{rank}\, J_0(P) = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} \deg f_1 \cdot f_1 - \partial_{x_0} f_1 & \partial_{x_1} f_1 & \ldots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \deg f_t \cdot f_t - \partial_{x_0} f_t & \partial_{x_1} f_t & \ldots & \partial_{x_n} f_t \end{bmatrix}(\phi_0(P))$$

$P \in Y = \mathcal{Z}_p(f_1,\ldots,f_t)$ としていたから，$f_j(\phi_0(P)) = 0$．さらに第一列を -1 倍（基本変形）して，次を得る．

$$\mathrm{rank}\, J_0(P) = \mathrm{rank} \begin{bmatrix} \partial_{x_0} f_1 & \partial_{x_1} f_1 & \ldots & \partial_{x_n} f_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_0} f_t & \partial_{x_1} f_t & \ldots & \partial_{x_n} f_t \end{bmatrix}(\phi_0(P)) = \mathrm{rank}\, J(\phi_0(P)) = \mathrm{rank}\, J(P)$$

最後の等号は $\mathrm{rank}\, J(\lambda P) = \mathrm{rank}\, J(P)$ から来ている．

Ex5.9 Irreducibitity and Jacobi Matrix.

$F \in k[x_0, x_1, x_2]^h$ をとり，$X = \mathcal{Z}_p(F)$ とする．以下の条件が成立することと，F が irreducible かつ nonsingular であることは同値である．

$$^\forall P \in X, \quad ^\exists i, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) \neq 0.$$

F が irreducible かつ nonsingular ならば上の条件が成り立つことは Ex5.8 より明らか．逆を背理法を用いて示そう．これが以下の条件を満たすとしよう．

$$\left[^\forall P \in X, \quad ^\exists i, \quad \frac{\partial F}{\partial x_i}(P) \neq 0 \right] \wedge F :: \text{not irreducible}$$

F :: not irreducible という条件から，二つの斉次既約多項式 f, g と斉次多項式 h が存在して $F = fgh$ と表せる．[3] Ex3.7 より，二つの curve の交わり $\mathcal{Z}_p(f) \cap \mathcal{Z}_p(g)$ は空でないので，点 P を取ることが出来る．$F = fgh$ の両辺の偏微分を計算する．

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(P) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) \cdot g(P) \cdot h(P) + f(P) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(P) \cdot h(P) + f(P) \cdot g(P) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i}(P)$$

仮定より，ある i について左辺は 0 でない．しかし，右辺は $f(P) = g(P) = 0$ より 0．よって矛盾が生じ，主張が示された．nonsingular であることはやはり Ex5.8 より得られる．

Ex5.10 Zariski Tangent Space

X :: variety, $P \in X$, $\mathfrak{m}$ :: the maximal ideal of $\mathcal{O}_{P,X}$ とする．k-vector space としての $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ の双対空間 $T_P(X) = \mathrm{Hom}_{k\text{-Vec}}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, k)$ を Zariski Tangent Space と呼ぶ．

(a) $\dim T_P(X) \geq \dim X$ with equality iff P is nonsingular.

Them5.1 後半から $\dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 + \mathrm{rank}\, J = n$ なので $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ は有限次元．なのでその双対空間とは次元が等しい．（大抵の線形代数の教科書に書かれている事実である．）このことと Them5.1, Prop5.2A から主張が得られる．

(b) morphism $\phi : X \to Y$ induces k-linear map $T_P(\phi) : T_P(X) \to T_{\phi(P)}(Y)$.

Ex3.3 より，ϕ から準同型 $\phi^* : \mathcal{O}_{\phi(P),Y} \to \mathcal{O}_{P,X}$ が得られる．したがってそれぞれの極大イデアルを $\mathfrak{m}_Y, \mathfrak{m}_X$ とすると，以下の準同型が得られる．

$$\begin{array}{cccc} \psi_P : & \mathfrak{m}_Y/\mathfrak{m}_Y^2 & \to & \mathfrak{m}_X/\mathfrak{m}_X^2 \\ & x + \mathfrak{m}_Y^2 & \mapsto & \phi^*(x) + \mathfrak{m}_X^2 \end{array}$$

これが well-defined であることは ϕ^* が local ring homomorphism [4]であることから得られる．この準同型 ψ_P は k の元を $k + \mathfrak{m}_X^2$ の元へ写す．実際，ϕ^* は $x \in k$ を $(x \circ \phi) + \mathfrak{m}_X^2$ へ写すが，x は定数写像なので $x \circ \phi = x$．なので ψ_P は k-vector space 間の線形写像と見ることができる．反変関手 $\mathrm{Hom}_{k\text{-Vec}}(-, k)$ で ψ_P を写せば求める線形写像が得られる．

---

[3] f, g をそれぞれ $f = f_s + \cdots + f_S, g = g_t + \cdots + g_T$ と斉次分解すると，$fg = f_s g_t + \cdots + f_S g_T$ となり，少なくとも $f_s g_t, f_S g_T$ は残る．なので fg が斉次多項式であることと $s = S, t = T$ すなわち f, g がそれぞれ斉次多項式であることは同値．

[4] $\psi_P(\mathfrak{m}_Y) \subseteq \mathfrak{m}_X$ を満たす局所環の準同型．

(c) If $\phi : (t^2, t) \mapsto t^2$, then $T_O(\phi)$ =zero map.

（念の為．$O = (0,0)$ である．）$k[x,y]/(x-y^2) \cong k[t,t^2]$ は明らか．（b の解答で定義した）ψ_O は次のよう．

$$\begin{array}{cccc} \psi_O : & \dfrac{(x)}{(x^2)} & \to & \dfrac{(t,t^2)}{(t^2,t^3,t^4)} \\ & f(x)+(x^2) & \mapsto & [f(t^2)](t^2,t)+(t^2,t^3,t^4) \end{array}$$

ψ_O は $(x)/(x^2)$ の生成元 $x + (x^2)$ を $t^2 + (t^2,t^3,t^4) = 0 + (t^2,t^3,t^4)$ へ写すので zero map．$\mathrm{Hom}_{k\text{-Vec}}(-,k)$ は zero map を zero map へ写すので，主張が示された．

Ex5.11 The Elliptic Quartic Curve in $\mathbb{P}^3$

$Y := \mathcal{Z}_p(\{x^2 - xz - yw, yz - xw - zw\}), Y' = \mathcal{Z}_p(y^2 - x^3 + xz^2)$ とおく．さらに点 $P = (0:0:0:1)$ から平面 $w = 0$ への projection を ϕ とする．$P' = (1:0:-1)$ としておく．

■$Y \setminus P \equiv Y' \setminus P'$ by ϕ　$Q' \in \mathbb{P}^3 \setminus P'$ を取ると，

$$\phi^{-1}(Q') = \{(a:b:c:w) \mid w \in k\} \subset \mathbb{P}^3.$$

そこで $\phi^{-1}(Q') \cap Y$ を考える．$\phi^{-1}(Q') \cap Y$ は以下の連立方程式で定義される閉集合である．

$$(a^2 - ac) + (-b)w = 0, (bc) + (-a-c)w = 0.$$

行列で書き換えれば次のよう．

$$\begin{bmatrix} a^2 - ac & -b \\ bc & -a-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

この係数行列を $M(Q')$ とする．

$\mathrm{null}\, M = 1$ の時かつその時のみ $\phi^{-1}(Q') \cap Y$ は 1 点（アフィン空間で考えれば 1 直線）となる．これは ϕ は単射になることを意味する．M の第 2 列は $Q' \neq P'$ なので $\mathbf{0}$ でない．したがって $\mathrm{null}\, M = 1$ or 2 であり，$\mathrm{null}\, M = 2 \iff \det M \neq 0$ なので $\det M(Q') = 0$ であれば良い．

$$[Q' = (a:b:c) \in \mathbb{P}^3 \setminus P'] \wedge [\det M(Q') = b^2 - a^3 + ac^2 = 0] \iff Q' \in Y' \setminus P'.$$

以上より ϕ は $Y \setminus P$ から $Y' \setminus P'$ への単射．

$Q' \in Y' \setminus P'$ ならば連立方程式は解 $w = \frac{a^2-ac}{-b} = \frac{bc}{-a-c}$ を持つから，$\phi|_{Y \setminus P}$ に対して逆写像が作れる．すなわち，ϕ は $(a:b:c) \in Y' \setminus P'$ を以下のように写す同型写像である．

$$(a:b:c) \in Y' \setminus P' \mapsto \left(a:b:c:\frac{a^2-ac}{-b}\right) \in Y \setminus P \mapsto (a:b:c) \in Y' \setminus P'$$

(a) Y :: irreducible nonsingular curve.

まず Ex5.8 より，Y' が特異点を持つのは以下が成立するとき．

$$^\exists(x:y:z) \in \mathbb{P}^2,\ \ y^2 - x^3 + xz^2 = -3x^2 + z^2 = 2y = 2xz = 0.$$

しかし連立方程式を解くと $(x:y:z) = (0:0:0)$ となり不合理なのでこれは成立しない．よって Y' は特異点を持たない．また，上の条件が成り立たないことから Ex5.9 が利用できて，Y' は irreducible であることが得られる．

$Y' \setminus P'$ は Y' が irreducible であることから dense かつ irreducible な開集合である．すでに見たように $Y \setminus P \equiv Y' \setminus P'$ なので，$Y \setminus P$ も dense かつ irreducible な開集合．したがって Ex1.6 より $\mathrm{cl}(Y \setminus P) = Y$ は irreducible な閉集合．

また，Y' が nonsingular であることと $Y \setminus P \equiv Y' \setminus P'$ から Y の P 以外の点が nonsingular であることもわかる．P についても Ex5.8 を利用して nonsingular であることが確かめられ，まとめて Y が nonsingular であることが得られる．

Ex5.12　Quadric Hypersurface

体 k の標数は 2 でないとする．また，2 次斉次多項式 $f \in k[x_0, \ldots, x_n]_2$ を取る．

(a)　f can be brought into the form $x_0^2 + \cdots + x_r^2$ by linear change of variables.

体 k の標数は 2 でないという仮定から，f を対称行列が定める二次形式と見ることができる．あとは $\mathbb{C}$ 上の二次形式と全く同様の方法で $a_0x_0^2 + \cdots + a_nx_n^2$ の形にすることができる．この内 $a_i \neq 0$ なる i が $r+1$ 個あるとすると，変数を適当に交換して $a_0x_0^2 + \cdots + a_rx_r^2$ $(0 \leq i \leq r$ について $a_i \neq 0)$ とできる．最後に k は代数閉体なので $x_i \mapsto a_i^{-1/2}x_i$ $(0 \leq i \leq r)$ と写すことができて，これで $x_0^2 + \cdots + x_r^2$ になった．

(b)　f :: irreducible $\iff$ $r \geq 2$.

(a) の変数変換は線形なものだから既約性を変化させない．よって $x_0^2 + \cdots + x_r^2$ について既約性を考えれば良い．

まず，$r < 2$ ならば f は x_0^2 または $x_0^2 + x_1^2$ だから明らかに f :: not irreducible.

逆に f :: not irreducible すると，$\deg f = 2$ であるから，f は 2 つの 1 次斉次多項式に分解できることになる．（斉次多項式に分解できることは Ex5.9 の footnote を見よ．）したがって f に線形変数変換を行うことで y_0y_1 の形になり，さらに $y = z_0 + iz_1, y_1 = z_0 - iz_1$ と変数変換することで $z_0^2 + z_1^2$ となる．よって $r < 2$.

(c)　Assume $r \geq 2$, and let $Q = \mathcal{Z}_p(f)$. In this time $Z := \operatorname{Sing} Q$ is linear variety of dimention $n - r - 1$.

$f = x_0^2 + \cdots + x_r^2$, $r \geq 2$ なので f は irreducible であり $\partial_{x_i} f = 2x_i$．また，$\dim Q = n - 1$ である．Ex5.8 より，$\operatorname{Sing} Q$ は次で定義される．

$$\operatorname{Sing} Q = \mathcal{Z}_p(\{\partial_{x_i} f + (f)\}_{0 \leq i \leq r}) = \mathcal{Z}_p(\{x_i + (f)\}_{0 \leq i \leq r}).$$

$\deg f = 2 > 1 = \deg x_i$ なので各 $x_i + (f)$ は 0 でない．Ex2.11 の証明から，k 上線形独立な $r+1$ 個の元は $n - (r+1)$ 次元の linear variety を定義する．よって $\dim \operatorname{Sing} Q = n - r - 1$．特に，$\operatorname{Sing} Q$ は次のような集合である．

$$\operatorname{Sing} Q = \{(0 : \cdots : 0 : p_{r+1} : \cdots : p_n)\} \cap Q \subset \mathbb{P}^{n-r-1}.$$

(d)　Q is a cone with axis $Z (= \operatorname{Sing} Q)$ over a nonsingular quadric hypersurface Q'.

主張するところは，Q は Z の点と Q' の点を結ぶすべての直線の集合として表せるということである．

$Z \subset \mathbb{P}^n, Q' \subset \mathbb{P}^r$ とする．$A = (a_0 : \cdots : a_r : 0 : \cdots : 0) \in Q'$, $B = (0 : \cdots : 0 : b_{r+1} : \cdots : b_n) \in Z$ をとり，以下のように定める．

$$P(\mu, \nu) = \mu A + \nu B = (\mu a_0 : \cdots : \mu a_r : \nu b_{r+1} : \cdots : \nu b_n) \text{ where } \mu, \nu \in k^\times$$

これは A, B を結ぶ直線のパラメータ表示である．任意の A, B と任意の μ, ν について $P(\mu, \nu) \in Q$ すなわち $f(P(\mu, \nu)) = 0$ であるような Q' を見つけよう．f には $\{x_i\}_{i=0}^r$ しかないから，$f(P(\mu, \nu)) = f(\mu A)$．したがって $f(P(\mu, \nu)) = 0 \iff f(A) = 0 \implies A \in Q$．なので

$$Q' = \{(p_0 : \cdots : p_r : 0 : \cdots : 0)\} \cap Q \subset \mathbb{P}^n$$

とすれば良い．これは $f = x_0^2 + \cdots + x_r^2$ で定まる $\mathbb{P}^r$ の nonsingular hypersurface を $\mathbb{P}^n$ に埋め込んだものである．

以上で Q は cone with axis Z over Q' 全体を含むことがわかった．逆の包含関係を示そう．$P = (p_0 : \cdots : p_r : p_{r+1} : \cdots : p_n) \in Q$ を任意にとる．この時 $A = (p_0 : \cdots : p_r : 0 : \cdots : 0), B = (0 : \cdots : 0 : p_{r+1} : \cdots : p_n)$ とすると，明らかに $P = A + B$ かつ $A \in Q', B \in Z$．よって Q は cone with axis Z over Q' に一致する．

Ex5.13 The Set of Non-normal Points of a Variety is a Proper Closed Subset of That.

■前提． Y :: variety とし，$\mathrm{Nor}(Y)$ を Y の normal point 全体とする．Y の各 open affine subset について normal point 全体が空でない開集合をなすことが示せれば十分だから，Y は affine だと仮定する．$A = A(Y), K = K(Y)$ としておこう．

■非空開集合 U の定義． Them3.9 より，A の K における整閉包 $\bar{A}$ は有限生成 A 加群で，かつ有限生成 k 代数である．($\mathrm{Quot}(\bar{A}) = K$ なので $\bar{A}$ は整閉である．) A 加群としての $\bar{A}$ の生成元を $\{g_i\}_{i=1}^n \subset K$ としよう．Y の部分集合 U を以下のように定める．

$$U = \{P \in Y \mid \{g_i\}_{i=1}^n \subset \mathcal{O}_{P,Y}\} = \{P \in Y \mid \bar{A} \subset \mathcal{O}_{P,Y}\} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{Z}_a(s_i)^c.$$

3 つの表示が同値であることは明らか．ただし s_i は g_i を $K = \mathrm{Quot}(A)$ の元としてみた時の分母である．Y が irreducible であることと最左辺の表示から U は非空開集合であることがわかる．$\mathrm{Nor}(Y) = U$ を示す．

■$U \subseteq \mathrm{Nor}(Y)$． まず $P \in U$ を考える．このとき $A \subset \bar{A} \subset \mathcal{O}_{P,Y} \subset K$．点 P に対応する A の極大イデアル $\mathfrak{m}_P$ でこれらすべてを局所化すると，次が得られる．

$$\mathcal{O}_{P,Y} = A_{\mathfrak{m}_P} \subseteq \bar{A}_{\mathfrak{m}_P} \subseteq \mathcal{O}_{P,Y} \subset K.$$

よって $\mathcal{O}_{P,Y} = \bar{A}_{\mathfrak{m}_P}$．$\bar{A}$ は A の整閉包なので Ati-Mac Prop5.12 から $\bar{A}_{\mathfrak{m}_P}$ は K で整閉．よって $\mathcal{O}_{P,Y}$ は整閉．

■$U^c \subseteq \mathrm{Nor}(Y)^c$． $P \notin U$ とすると，少なくともひとつの g_i は $\mathcal{O}_{P,Y}$ に属さない．そのような i を 1 つとって fix する．$g_i \in \bar{A}$ ということは g_i は A 上整であることを意味する．$A \subset \mathcal{O}_{P,Y}$ なので g_i は $\mathcal{O}_{P,Y}$ 上整でもある．しかし先に述べたように $g_i \notin \mathcal{O}_{P,Y}$ なので，$\mathcal{O}_{P,Y}$ は整閉でない．

Ex5.14 Analytically Isomorphic Singularities.

(a) If $P \in Y, Q \in Z$ are analytically isomorphic plane curve singularities, then $\mu_P(Y) = \mu_Q(Z)$.

multiplicity μ は $\mathbb{A}^2$ 内の curve に対して定義されるので，$Y, Z \subset \mathbb{A}^2$ とする．Y, Z を定義する既約多項式を f, g としておこう．定義より $\mathcal{O}_{P,Y}, \mathcal{O}_{Q,Z}$ はどちらも regular local ring でなく，その完備化は互いに同型である．

$\mathfrak{m}'_P, \mathfrak{m}'_Q$ をそれぞれ点 P, Q に対応する $k[x,y]$ の極大イデアルとする．さらに $\mathfrak{m}_P, \mathfrak{m}_Q$ をそれぞれ $\mathcal{O}_{P,Y}, \mathcal{O}_{Q,Z}$ の極大イデアルとしよう．P についてまず考える．原点に対応する $k[x,y]$ の極大イデアル (x,y) のべき乗 $(x,y)^n = (x^n, x^{n-1}y, \ldots, xy^{n-1}, y^n)$ などを考えれば，$\mu_P(Y) \geq n \iff f \in (\mathfrak{m}_P)^n \iff (f) \subset (\mathfrak{m}_P)^n$ がわかる．なので次のような鎖が考えられる．

$$0 \subsetneq (f) \subsetneq (\mathfrak{m}'_P)^r \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{m}'_P \subsetneq k[x,y].$$

ただし $r = \mu_P(Y)$ とした．これを $\mathcal{O}_{P,Y}$ に写すと次のようになる．$(\mathfrak{m}'^n_P/(f))_{\mathfrak{m}_P} = \mathfrak{m}^n_P$ に注意せよ．

$$0 \subsetneq (\mathfrak{m}_P)^r \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{m}_P \subsetneq \mathcal{O}_{P,Y}.$$

これらを完備化すると次のよう．

$$0 \subsetneq (\hat{\mathfrak{m}}_P)^r \subsetneq \cdots \subsetneq \hat{\mathfrak{m}}_P \subsetneq \hat{\mathcal{O}}_{P,Y}.$$

（Ati-Mac Prop 5.14&5.15 から．）この鎖の長さ（$\subsetneq$ の個数）は r であり，作り方から，$(\hat{\mathfrak{m}}_P)^n$ を項とする鎖はこれ以上伸ばせない．一方，$\hat{\mathcal{O}}_{P,Y}$ についても同様の鎖が作れる．その鎖の長さは $\mu_Q(Z)$ であり，仮定 $\mathcal{O}_{P,Y} \cong \mathcal{O}_{Q,Z}$ から，$\mu_Q(Z) = r = \mu_P(Y)$．（この証明は組成列云々は言っていない．Krull の交叉定理参照．）

(b) Generalizing the example in the text (5.6.3).

$f = f_r + f_{r+1} + \ldots, g = g_s + g_{s+1} + \ldots, h = h_t + h_{t+1} + \cdots \in k[[x,y]]$ とする．ただし $(-)_i$ はそれぞれ i 次斉次成分である．$f_r = g_s h_t$ かつ g_s, h_t が共通の一次因子を持たない時，$f = gh$ とできることを示す．

帰納的に g_{s+i}, h_{t+i} を定める．$i = 0$ の場合については与えられているので，$0 \leq i < d$ については g_{s+i}, h_{t+i} が定まっているとしよう．gh の $r + d$ 次斉次成分は次のよう．

$$\sum_{i+j=r+d} g_i h_j = g_s h_{t+d} + g_{s+1} h_{t+d-1} + \cdots + g_{s+d-1} h_{t+1} + g_{s+d} h_t.$$

これが f_{r+d} と等しくなるように g_{s+d}, h_{t+d} を取る．したがって以下の等式が成立すれば良い．

$$g_s h_{t+d} + g_{s+d} h_t = f_{r+d} - (g_{s+1} h_{t+d-1} + \cdots + g_{s+d-1} h_{t+1}).$$

両辺共に $r + d$ 次斉次式．右辺が (g_s, h_t) の元であれば証明は完成するのでこのことを示そう．$r + d > 0$ より，両辺共に非単元なので，そのためには (g_s, h_t) が極大イデアル (x, y) であれば十分である．

g_s, h_t を $k[x,y]$ の元と見ると，これらが生成するイデアル $(g_s, h_t) \subset k[x,y]$ に対応する閉集合は $\mathcal{Z}_a(g_s) \cap \mathcal{Z}_a(h_t) = \{(0,0)\}$ である．なぜなら $\mathcal{Z}_a(g_s), \mathcal{Z}_a(h_t)$ はどちらも原点を通る何本かの直線の和集合であり，g_s, h_t が共通の一次因子を持たないことから，$\mathcal{Z}_a(g_s), \mathcal{Z}_a(h_t)$ が同じ直線を含まないからである．零点定理から $\sqrt{(g_s, h_t)} = (x, y)$ なので $x^n = \alpha_x g_s + \beta_x h_t, y^m = \alpha_y g_s + \beta_y h_t$ なる

$m,n \in \mathbb{N}, \alpha_*, \beta_* \in k[x,y]$ が存在する．舞台を $k[[x,y]]$ に写すと，$(x,y) \subset k[[x,y]]$ の元はべき根が存在する[5)]ので，$x,y \in (g_s,h_t) \subset k[[x,y]]$ が言える．よって $(g_s,h_t) = (x,y)$.

(c) Two ordinary double (resp. triple) points are analytically isomorphic, but two ordinary 4-fold points.

$f \in k[x,y], Y = \mathcal{Z}_a(f) \subset \mathbb{A}^2, P = (0,0), r = \mu_P(Y)$ とする．f の r 次斉次部分 f_r は常に 1 次式に分解されるが，それが r 個の互いに異なる一次式に分解されるとしよう．この時 P は ordinary r-fold point と呼ばれる．

■Case of $r=2$. (b) より，$f \in k[[x,y]]$ は $g,h \in k[[x,y]]$ を用いて $f = gh$ と分解できる．$r = 1+1$ より，$\operatorname{ord} g = \operatorname{ord} h = 1$．座標変換によって $g(0,x) \neq 0, h(y,0) \neq 0$ とすれば[6)]，Weierstrass preparation theorem より，$g = u(x - a(y)), h = v(y - b(x))$ なる $u,v \in k[[x,y]]^\times, a,b \in [[x,y]]$ が存在する．したがって $x \mapsto g, y \mapsto h$ なる写像は $x \mapsto a, y \mapsto b$ という逆写像を持つ．どちらも morphism だから，任意の ordinary double point における局所環は $k[[x,y]]/(xy)$ と同型である．

■Case of $r=3$. 今 $\operatorname{ord} f = 3$ だから，(b) より，$f \in k[[x,y]]$ は $f_1,f_2,f_3 \in k[[x,y]]$ を用いて $f = f_1f_2f_3$ と分解できる．前段落と同様に，適切な線形変換を行った後には $f_1 = u_1(x - g_1(y)), f_2 = u_2(y - g_2(x))$ なる $u_1,u_2 \in k[[x,y]]^\times, g_1,g_2 \in [[x,y]]$ が存在する．さて，この時，以下のような写像を考えよう．

$$x \mapsto v_1f_1, y \mapsto v_2f_2, x+y \mapsto f_3.$$

この写像が適切に定義出来るような単元 $v_1,v_2 \in k[[x,y]]^\times$ は存在する．実際，写像が適切に定義されるには $v_1f_1 + v_2f_2 = f_3$ が成立すれば十分．$\operatorname{ord} f_i = 1$ と，f_i の最低次項達が互いに異なる（つまり線形独立な）一次式であることを利用すると，最低次項から順に v_1,v_2 を決定できる．どちらも morphism だから，任意の ordinary double point における局所環は $k[[x,y]]/(xy(x+y))$ と同型である．

■Case of $r=4$. $r=3$ の場合の証明のうち，v_1,v_2 の最低次（これは非零定数）を決定する部分を考える．この部分は，線形独立な 2 つの 1 次多項式は，適切に線型結合すれば任意の一次多項式に出来る，ということを用いていた．短く言えば，$k[x,y]_1$ は k 上の 2 次元ベクトル空間をなす，ということを用いていた．$r=4$ の場合は同様の証明を行おうとすると 3 つのベクトルの線型結合で別のベクトルを表すことになる．（TODO）

Ex5.15 The Homogeneous Polynomials In $k[x,y,z]_d$ And Points In $\mathbb{P}^N$.

$d \in \mathbb{N}$ に対し，$N = \binom{d+2}{2} - 1$ とする．この時，斉次多項式 $f \in k[x,y,z]_d$ の係数はちょうど $N+1$ 個あるから，f を $\mathbb{P}^N$ の点に対応させることができる．d 次単項式 $x^ly^mz^n$ に順に番号をつけ，$\{M_i\}_{i=0}^N$ としておく．また，$M_i = x^{l_i}y^{m_i}z^{n_i}$ としておく．

(a) There is 1-1 correspondance between $P \in \mathbb{P}^N$ and $\mathcal{Z}_p(f) \subset \mathbb{P}^2$ if not f have square.

まず 0 でない多項式 $f = \sum_{i=0}^N p_iM_i \in k[x,y,z]$ で定まる algebraic set $\mathcal{Z}_p(f)$ をとる．$\lambda \in k^\times$ に対して $\mathcal{Z}_p(\lambda f) = \mathcal{Z}_p(f)$ なので，この algebraic set は $P = (p_0 : \cdots : p_N)$ に対応する．

5) $(1+x)^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{Q})$ はマクローリン展開が存在し，(x,y) の元は他の形式的べき級数と合成できる．
6) Perturbation.

一方，$P=(p_0:\cdots:p_N)\in\mathbb{P}^N$ を取ると，$f=\sum_{i=0}^N p_iM_i$ が定義する閉集合が P に対応する．しかしこれは一対一とは限らない．もし f が定数でない多項式 g,h を用いて $f=g^2h$ と表せたとすると，$f=g^2h$ と gh は明らかに係数が異なる（次数も異なる）が，同じ algebraic set を定義する．このことは零点定理から直ちに得られる．なので f が多重因子を持たない時かつその時のみ P は $\mathcal{Z}_p(f)$ と一対一対応する．

(b) The nonsingular irreducible curves of degree d corresponds nonempty open set.

$p_0,\ldots,p_N$ を不定元とし，$P=(p_0,\ldots,p_N), f_P(x,y,z)=\sum_{i=0}^N p_iM_i$ とする．この時，$\partial_x f_P=\sum_{i=0}^N l_ip_i\cdot x^{-1}M_i$ は $d-1$ 次斉次多項式であり，$\partial_y f_P,\partial_z f_P$ も同様に $d-1$ 次斉次多項式．そこで Them5.7 を 4 つの斉次多項式 $f_P,\partial_x f_P,\partial_y f_P,\partial_z f_P$ に対して用いる．[7] すると，$\{p_i\}_{i=0}^N$ を変数に持つ斉次多項式 $g_1,\ldots,g_t$ が存在し，次が成り立つ．

$$\mathcal{Z}_p(\{f_P,\partial_x f_P,\partial_y f_P,\partial_z f_P\})\neq\emptyset \iff P\in\mathcal{Z}_p(\{g_1,\ldots,g_t\}).$$

$Z=\mathcal{Z}_p(\{g_1,\ldots,g_t\})$ とする．

$J_P(Q)$ を点 Q における f_P のヤコビ行列とすると，明らかに次が成り立つ．

$$P\in Z \iff {}^\exists Q\in\mathcal{Z}_p(f_P),\quad J_P(Q)=\mathbf{0}.$$

$J_P(Q)$ は 1x3 行列（あるいは 3x1 行列）だから rank $J_P(Q)=0$ or 1 であり，$J_P(Q)=\mathbf{0}$ は rank $J_P(Q)=0$ と同値．さらに $\dim f_P=2-1=1$ だから，（Ex5.8 と）Ex5.9 より $P\notin Z$ は $\mathcal{Z}_p(f_P)$ が nonsingular かつ irreducible であることと同値．よって the nonsingular irreducible curves of degree d は open set Z^c に対応する．この Z^c は Ex5.5 で存在を示した nonsingular curve に対応する点を持つので空でない．

[7] Them5.7 中の a_{ij} は $a_{0j}=p_j,a_{1j}=l_jp_j,a_{2j}=m_jp_j,a_{3j}=n_jp_j$ となる．