命題 0.1. $A=k[x,y]$ とする互いに素な多項式 $f,g\in A$ に対し，$\mathcal{Z}_a(\{f,g\})=\{P_1,\dots,P_N\}$ とする．更にイデアル (f,g) の最短準素イデアル分解 $\bigcap_{i=1}^N\mathfrak{q}_i$ を一つ固定し，$\sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{m}_i$ としておく．同時に $\mathcal{Z}_a(\mathfrak{m}_i)=\{P_i\}$ となるように番号をつけておく．この時，以下が成り立つ．

$$\frac{A}{(f,g)}\cong\bigoplus_{i=1}^N\left(\frac{A}{\mathfrak{q}_i}\right)_{\mathfrak{m}_i}.$$

(証明)．以下，Prop*.*や Cor*.*は Atiyah-Macdonald "Introduction to Commutative Algebra"での命題番号である．まず，$(f,g)=\bigcap_{i=1}^N\mathfrak{q}_i$ が最短準素イデアル分解であることから $i=j\iff\mathfrak{p}_i\subseteq\mathfrak{m}_j$ となることに注意する．以下のようにして $\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_j=(1)\quad(i\neq j)$ が示される．

$$\begin{aligned}&\sqrt{\mathfrak{q}_i+\mathfrak{q}_j}\\=&\sqrt{\sqrt{\mathfrak{q}_i}+\sqrt{\mathfrak{q}_j}}\\=&\sqrt{\mathfrak{m}_i+\mathfrak{m}_j}\\=&\mathcal{I}_a(\mathcal{Z}_a(\mathfrak{m}_i)\cap\mathcal{Z}_a(\mathfrak{m}_j))\\=&\mathcal{I}_a(\{P_i\}\cap\{P_j\})\\=&\mathcal{I}_a(\emptyset)\quad(\text{by }i\neq j)\\=&(1)\end{aligned}$$

$\sqrt{\mathfrak{a}}=(1)\iff\mathfrak{a}=(1)$ より結論が得られる．使ったのは Ex1.13 である．

このことから，以下の直和分解が得られる．

$$\frac{A}{(f,g)}=\frac{A}{\bigcap_{i=1}^N\mathfrak{q}_i}\cong\bigoplus_{i=1}^N\left(\frac{A}{\mathfrak{q}_i}\right)$$

これは Prop1.10 から直ちに理解る．[1]最後に，$\sqrt{\mathfrak{q}_i}=\mathfrak{m}_i,\dim A/\mathfrak{q}_i=\dim\mathcal{Z}_a(\mathfrak{q}_i)=0$ より $A/\mathfrak{q}_i$ は $\mathfrak{m}_i$ を唯一の素イデアルに持つ局所環である．なので局所化しても変わらず，$A/\mathfrak{q}_i\cong(A/\mathfrak{q}_i)_{\mathfrak{m}_i}$．これで最初の主張が示せた． ∎

証明は (f,g) に属す素イデアルが極大イデアルであることしか使っていないから，一般の n 次元空間の 2 曲線についても同様の証明が出来る．また，この命題のうち，$(A/\mathfrak{q}_i)_{\mathfrak{m}_i}$ は $\mathcal{O}_{P_i,\mathbb{A}^2}/(f,g)$ に等しい．curve の交わりを考える場合は $\mathrm{length}_{\mathcal{O}_{P_i,\mathbb{A}^2}}=\dim_k$（左辺はベクトル空間の次元）だから，$\dim_k A/(f,g)=\sum_{i=1}^N i(C,D;P_i)$ となる．ただし $C=\mathcal{Z}_a(f),D=\mathcal{Z}_a(g)$ とした．

以上のことはすべて Affine Space での事なので，Bézout's Theorem との関連を見出すことは無意味である．証明を Projective Space に拡張することもできない．実際，Projective Space では $\sqrt{\mathfrak{m}_i+\mathfrak{m}_j}=S_+(=\bigoplus_{d>0}S_d)$ なので，最初の直和分解さえ得られない．

---

[1] 元の命題は環 $A/(f,g)$ とそのイデアル $\mathfrak{a}_i=\mathfrak{q}_i/(f,g)$ について書かれていることに注意．