

集合論と位相空間論における有用で基礎的な事実のリスト

七条 彰紀

平成 31 年 8 月 2 日

基礎的な集合論・位相空間論を一通り学び終えてより発展的な命題を扱っていても、時々「アレが使えると思うんだけど、正確な命題を忘れてしまったな」ということがある。以下ではそういった事柄を列挙する。いずれも、証明は集合論・位相空間論を一通り学び終えていれば簡単なものである。

以下、 X, Y, \dots 等の大文字は集合あるいは位相空間とし、 f, g, \dots 等小文字はそれらの間の写像とする。

1 集合論

1.1 射

写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を考える。

1. 合成 $g \circ f$ が全射ならば g も全射。

2. 合成 $g \circ f$ が単射ならば f も単射。

また、部分集合に関しては次も成立する。

1. f が単射ならば、 X の任意の部分集合 S について $f^{-1}(f(S)) = S$ 。

2. f が全射ならば、 Y の任意の部分集合 T について $f(f^{-1}(T)) = T$ 。

2 位相空間論

2.1 射

写像 $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ を考える。

1. 写像 f が連続であることと $f(\text{cl}_X(A)) \subseteq \text{cl}_Y(f(A))$ が成立することは同値。

2.2 閉包 cl

位相空間の部分集合 A, B と部分集合の族 $\{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について次が成立する.

$$\text{cl}(A \cap B) \subseteq \text{cl}(A) \cap \text{cl}(B), \quad \text{cl}\left(\bigcap S_\lambda\right) \subseteq \bigcap \text{cl}(S_\lambda) \quad (1)$$

$$\text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B), \quad \text{cl}\left(\bigcup S_\lambda\right) \supseteq \bigcup \text{cl}(S_\lambda) \quad (2)$$