第 3 章
Fibered Categories

七条彰紀

2019 年 7 月 21 日

目次

1	Fibered Categories.	2
1.1	Motivation.	2
1.2	Definitions.	2
1.3	Examples.	5
1.4	Propositions.	6
2	Cleavage	7
2.1	Split Fibration	7
3	Fiber of Fibered Categories	9
3.1	Motivation	9
3.2	Definition	9
3.3	Propositions	10
4	Grothendieck Construction	11
5	Category Fibered in Groupoids/Sets	12
5.1	Motivation	12
5.2	Definition	12
6	Equivalence of Fibered Categories	14
6.1	Definition	14
6.2	Propositions	14

1 Fibered Categories.

1.1 Motivation.

“family”あるいは “object on/over a base space”（例えば schemes over a scheme や sheaves on a scheme など）の抽象的な枠組が fibered category である．今後は fibered category が提供する枠組を sheaves on a site の貼り合わせや stack の定義の為に活用する．

1.2 Definitions.

$\mathcal{X}, \mathbf{B}$ :: category と関手 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を考える．

- π を projection あるいは fibration と呼ぶ．
- $\mathcal{X}$ を fibered category と呼ぶ．
- $\pi(O) = P$ であるとき O は P の上にある (O is over P) という．

定義 1.1 (Cartesian Arrow, Cartesian Lifting, Cartesian Functor, Base Preserving Natural Transformation, [3] and [2])

(i) 以下の性質（Triangle Lifting という）を満たす $\mathcal{X}$ の射 $\phi\colon x \to y$ を cartesian arrow という: (1) にあるような対象と射があるとき，(2) の様に射 $z \to y$ がただ一つ存在し，可換と成る．

(1)

in $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dr] & \\ x \arrow[rr, "\phi"'] & & y \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} & \pi(z) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \pi(x) \arrow[rr, "\pi(\phi)"'] & & \pi(y) \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

(2)

in $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} & z \arrow[dl, "\exists_1"'] \arrow[dr] & \\ x \arrow[rr, "\phi"'] & & y \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} & \pi(z) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \pi(x) \arrow[rr, "\pi(\phi)"'] & & \pi(y) \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

(ii) $y \in \mathcal{X}, u \to \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対し，以下の図式を満たす[†1]$x \in \mathcal{X}$ と cartesian arrow :: $x \to y \in \mathcal{X}$を，cartesian lifting(or cleavage) of $u \to \pi(y)$ と呼ぶ．

in $\mathcal{X}$

$$x \xrightarrow{\text{cart.}} y$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$u \longrightarrow v$$

in $\mathbf{B}$

(iii) 任意の $y \in \mathcal{X}$ と $u \to \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対して cartesian lifting が存在する $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category という．fibered category over $\mathbf{B}$ が成す圏を $\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ とする．

(iv) 二つの fibered category :: $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}, \pi'\colon \mathcal{X}' \to \mathbf{B}$ について，$\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}'$ の間の射 (morphism of fibered categories, cartesian functor) とは，functor :: $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ であって，π, π' と整合的[†2]であり，cartesian arrow を cartesian arrow に写すもの．

(v)

注意 1.2

少し圏論の言葉を整理しておく．

対象を 0-morphism（あるいは 0-cell）と呼ぶ時，非負整数 $k \geq 0$ について，k-morphism (cell) は $(k-1)$-

[†1] すなわち，$\pi(x) = u, \pi(x \to y) = u \to \pi(y)$ を満たす．

[†2] すなわち $\pi' \circ g = \pi$ を満たす．

morphism (cell) の間の射と定義できる．こうして k-morphism (cell) は階層を成す．そこで，ここで定義した性質を階層別にまとめると次のように成る．

arrow	arrow in a fibered category	(i) Cartesian Arrow, (ii) Cartesian Lifting
0-cell	fibered category	(iii) Existence of Cartesian Lifting
1-cell	functor between fibered categories	(iii) Morphism of Fibered Category
2-cell	nat. trans. between functors	(iv) Base-Preserving Natural Transformation

通常の圏同型を 1-iso と呼び $\overset{1}{\cong}$ と書く．この時，階層ごとの iso/equiv は以下のようなものである．

iso.	$x \cong y$	$\iff$	2 つの arrow $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$.
1-iso.	$x \overset{1}{\cong} y$	$\iff$	2 つの 1-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$.
1-equiv.	$x \overset{1}{\simeq} y$	$\iff$	2 つの 1-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi \cong \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi \cong \mathrm{id}_y$.
2-iso.	$x \overset{2}{\cong} y$	$\iff$	2 つの 2-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$.
2-equiv.	$x \overset{2}{\simeq} y$	$\iff$	2 つの 2-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi \overset{1}{\cong} \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi \overset{1}{\cong} \mathrm{id}_y$.

注意 1.3

$\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ は 2-category である．2-category は 2-morphism ($\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ では natural transformation) に "vertical composition" と "horizontal composition" の二種類の合成が定まる圏である．詳しくはこのノートでは触れない．

定義 1.4 (Base-Preserving Natural Transformation, HOM, Equivalence)

(i) 二つの fibered category :: $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}, \pi'\colon \mathcal{X}' \to \mathbf{B}$ の間の 2 つの射 $g, g'\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ と natural transformation :: $\alpha\colon g \to g'$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[dd, shift right=3, "g"'] \arrow[dd, shift left=3, "g'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] \arrow[rd, "\pi"] & \\
& \mathbf{B} \\
\mathcal{X}' \arrow[ru, "\pi'"'] &
\end{tikzcd}$$

任意の $x \in \mathcal{X}$ について，$\pi'(\alpha_x)\colon \pi'(g(x)) \to \pi'(g'(x))$ が恒等射になるとき，α を base-preserving natural transformation という．

(ii) $\mathcal{X}, \mathcal{X}' \in \mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ について，$\mathrm{HOM}_{\mathbf{B}}(\mathcal{X}, \mathcal{X}')$ を次の圏とする．

Object. morphism of fibered category $\mathcal{X} \to \mathcal{X}'$.

Arrows. base-preserving natural transformation.

(iii) morphism of fibered category :: $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ が equivalence of fibered category であるとは，別の morphism $h\colon \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ が存在し，$h \circ g$ と $\mathrm{id}_{\mathcal{X}}$，$g \circ h$ と $\mathrm{id}_{\mathcal{X}'}$ の間に base-preserving isomorphism が存在すること[†3].

$$h \circ g \overset{2}{\cong} \mathrm{id}_{\mathcal{X}}, g \circ h \overset{2}{\cong} \mathrm{id}_{\mathcal{X}'}.$$

†3 基本的には category of equivalence の定義と同じである．

二つの fibrered category が equivalent であるとは，二つの間に equivalence of fibered category が存在するということである．

注意 1.5
2-morphism (2-cell) を base-preserving natural transformation に制限した fibered category の圏を $\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ とすると，HOM は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})}$ であるし，equivalence of fibered category は $\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ での 2-iso である．

1.3 Examples.

例 1.6
morphism of schemes :: $f\colon X \to Y$ を取る．この f に対し，f の pullback が成す圏 $\Pi(f)$ を考えることが出来る．以下のように定義する．

Object. pullback diagram :: $\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$.

Arrow. pullback diagram と整合的な射の組 $(Z \to Z', P \to P')$.

$\Pi(f)$ から次のように projection が定まる．

$$\begin{array}{cccc} \pi\colon & \Pi(f) & \to & \mathbf{Sch}/Y \\ & \begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd} & \mapsto & [Z \to Y] \end{array}$$

ここで注意したいのは，$\Pi(f)$ は pullback of f の同型類や代表ではなく，pullback of f 全てであることである．したがって $\pi\colon \Pi(f) \to \mathbf{Sch}/Y$ は pullback of f を選択公理無しに扱う枠組を与えている．

例 1.7
category :: $\mathbf{C}$ について，arrow category :: $\mathbf{C}^{\to}$ を以下で定める．

Object. $\mathbf{C}$ の射（$[x \to u]$ の様に表記する）.

Arrow. 射 $[x \to u] \to [y \to v]$ は次の図式を可換にする $x \to y, u \to v$ の組: $\begin{tikzcd} x \arrow[r, dashed] \arrow[d] & y \arrow[d] \\ u \arrow[r, dashed] & v \end{tikzcd}$

すると Cartesian Lifting は $\mathbf{C}$ が pullback を持つことを意味し，Triangle Lifting は pullback の普遍性を意味する．

例 1.8
以下の関手は fibration である．

$$\begin{array}{cccc} \pi\colon & \mathbf{Sch}/X & \to & \mathbf{Sch} \\ & [Y \to X] & \mapsto & Y \end{array}$$

1.4 Propositions.

命題 1.9 ([5] Prop3.4)

(i) cartesian arrow の合成は cartesian arrow である．

(ii) $\phi\colon x \to y, \psi\colon y \to z$ について，$\psi \circ \phi, \psi$ :: cartesian arrow ならば ψ :: cartesian arrow.

(証明). Triangle Lifting のみを用いて証明できる．簡単なので証明は省略する． ∎

次の命題の証明は Cartesian Lifting と Triangle Lifting の使い方をよく示している．

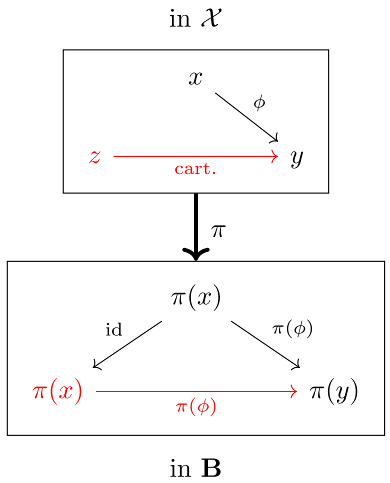
命題 1.10

$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category over $\mathbf{B}$ とする．$\mathcal{X}$ の射 $x \to y$ は以下のような二つの射の合成 $x \to z \to y$ に分解できる．

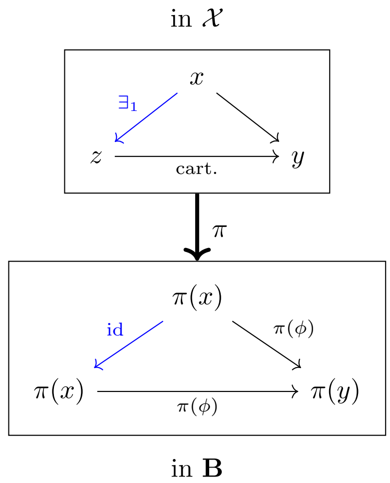
- $x \to z$ :: over $\mathrm{id}_{\pi(x)}$.
- $z \to y$ :: cartesian, over $\pi(x \to y)$.

(証明). $\pi(\phi)$ の cartesian lifting として以下の図式 (1) の z と $z \to y$ を得る．さらに Triangle Lifting により図式 (2) の通り $\mathrm{id}_{\pi(x)}$ 上の射 $x \to z$ を得る．

(1)



(2)



∎

命題 1.11

$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．$\mathcal{X}$ の任意の cartesian morphism :: $\phi\colon x \to y$ について，ϕ :: iso と $\Phi := \pi(\phi)$ :: iso は同値．

(証明). 以下の図式 (1) に Triangle Lifting を用いれば，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$ なる射 $\psi\colon y \to x$ を得る．さらに図式 (2) に於いて，$\phi \circ \mathrm{id}_x = \phi = \phi \circ \psi \circ \phi$ と Triangle Lifting の一意性から $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x$ を得る．

(1)

in $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} & y \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ x \arrow[rr, "\phi :: \text{cart.}"'] & & y \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} & \pi(y) \arrow[dl, "\Phi^{-1}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\ \pi(x) \arrow[rr, "\Phi"'] & & \pi(y) \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

(2)

in $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, shift right, "\psi\circ\phi"'] \arrow[dl, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\phi"] & \\ x \arrow[rr, "\phi"'] & & y \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} & \pi(x) \arrow[dl, "\Phi^{-1}\circ\Phi=\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ \pi(x) \arrow[rr, "\Phi"'] & & \pi(y) \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

∎

2 Cleavage

Cartesian lifting は普遍性 (Triangle Lifting) で特徴づけられている．なので同型を除いて一意であるが，厳密な意味で一意であるというものではない．どの Cartesian lifting を用いるか選んだものが Cleavage（分裂，劈開）．これは Fibered category :: $\mathcal{X}$ の Cartesian arrow の class を成す．Cleavage と fibration (resp. Fibered category) を併せたものを Cloven fibration (resp. Cloven fibered category) と呼ぶ．選択公理によって，我々は常に Fibration を Cloven fibration にできる．

2.1 Split Fibration

Cleavage は Cartesian arrow の class であると書いたが，この class が圏を成すと綺麗である．そのような Cleavage を選べる Fibration を Split fibration と呼ぶ．

定義 2.1 ([3])
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ :: fibered category とする．splitting of π とは，以下を満たす subcategory :: $\mathbf{S} \subset \mathcal{X}$ のことである．

(i) $\mathbf{S}$ は $\mathcal{X}$ の任意の対象を持つ．

(ii) $\mathbf{S}$ の任意の射は cartesian.

(iii) 任意の $\mathbf{B}$ の射 $f\colon U \to V$ と V 上の対象 $v \in \mathcal{X}$ について，f 上の射 $u \to v$ がただ一つ存在する．（すなわち，cartesian lifting が一意に存在する．）

この時，組 $(\mathcal{X}, \mathbf{S})$ を split fibered category と呼ぶ．

任意の Fibration は Split fibration とは限らないが，Split fibration と圏同値である．

定理 2.2
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ :: fibered category とする．この時，split fibered category over $\mathbf{B}$ :: $(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbf{S})$ が存在し，圏同値

$\tilde{\mathcal{X}} \simeq \mathcal{X}$ が成立する．

(証明). ここでは圏と部分圏 $(\tilde{\mathcal{X}}, \mathbf{S})$ 及び関手 $\Phi\colon \tilde{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ を構成するにとどめる．（TODO: これらがそれぞれ split fibered category over $\mathbf{B}$ と equivalence であることはここでは確認しない．）

以下のように $\tilde{\mathcal{X}}$ を構成する．

> Objects. object :: $U \in \mathbf{B}$ と morphism of fibered category :: $u\colon \mathbf{B}/U \to \mathcal{X}$ の組 (U, u).
> Arrows. 射 $(V, v) \to (U, u)$ は $\mathbf{B}$ の射 $g\colon V \to U$ と base-preserving isomorphism :: $\alpha\colon v \to u \circ g$ の組 (g, α).

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B}/V \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "v"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Uparrow\alpha"] & \mathbf{B}/U \arrow[r, "u"] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

まず projection functor が以下のように定まる．

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\pi}\colon & \tilde{\mathcal{X}} & \to & \mathbf{B} \\ & (U, u) & \mapsto & U \end{array}$$

この関手によって fibered category の構造が入る．

さらに次の関手によって equivalence が与えられる．

$$\begin{array}{cccc} \Phi\colon & \tilde{\mathcal{X}} & \to & \mathcal{X} \\ & (U, u) & \mapsto & u(\mathrm{id}_U) \end{array}$$

これが equivalence であることは 2-Yoneda Lemma による．

最後に，splitting of $\tilde{\pi}$ :: $\mathbf{S}$ が次で定められる．

> Objects. $\tilde{\mathcal{X}}$ と同じ．
> Arrows. $\tilde{\mathcal{X}}$ の射で，(g, id) と表されるもの．すなわち，射 $(V, v) \to (U, u)$ は $\mathbf{B}$ の射 $g\colon V \to U$ であって $v = u \circ g$ であるもの．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B}/V \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "v"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\|"] & \mathbf{B}/U \arrow[r, "u"] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

∎

定義 2.3
圏 $\mathbf{B}$ に対し，

- Cloven fibration over $\mathbf{B}$ の圏を $\mathbf{cFib}(\mathbf{B})$,
- Split fibration over $\mathbf{B}$ の圏を $\mathbf{sFib}(\mathbf{B})$

と書く．それぞれ忘却関手 $\mathbf{sFib}(\mathbf{B}) \to \mathbf{cFib}(\mathbf{B}), \mathbf{cFib}(\mathbf{B}) \to \mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ をもつ．

3 Fiber of Fibered Categories

3.1 Motivation

3.2 Definition

定義 3.1 (Fiber)
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．任意の $b \in \mathbf{B}$ について，以下で定める圏を $\mathcal{X}_b$ あるいは $\mathcal{X}(b)$ と書き，fiber of π at (over) b と呼ぶ:

Object. $\pi(x) = b$ となる object :: $x \in \mathcal{X}$.
Arrow. $\pi(\phi) = \mathrm{id}_b$ となる arrow :: $\phi \in \mathcal{X}$.

morphism of fibered category :: $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ から fiber の間に誘導される射を $g_B\colon \mathcal{X}_B \to \mathcal{Y}_B$ と書く．

注意 3.2
標語的には次のように定義されている．

$$\mathcal{X}_b = \mathcal{X}(b) := \text{“}\pi^{-1}\left(\begin{tikzcd} b \arrow[loop right, "\mathrm{id}"] \end{tikzcd}\right)\text{”}$$

また，morphism of schemes :: $f\colon X \to B$ の fiber が $f^{-1}(b)$ と表現されることと比較せよ。

$\mathcal{X}$ は上で定義した fiber と cartesian lifting によって contravariant functor に成ることが予想される．しかしこれは一般には正しくない．正確には，fibered category の fiber は一般に psuedo-functor となる．このことは後に証明する．

定義 3.3 (Psuedo-functor (weak 2-functor))
（以下の URL を参照せよ: https://stacks.math.columbia.edu/tag/003G.）2-圏 $\mathbf{C}$ から 2-圏 $\mathbf{D}$ への psuedo-functor :: $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ とは，$\mathbf{C}$ の object を $\mathbf{D}$ の object へ，$\mathbf{C}$ の arrow を $\mathbf{D}$ の arrow へ対応させるものであり，以下を満たす．

(a) 任意の $c \in \mathbf{C}$ について 2-isomorphism $\alpha_c\colon F(\mathrm{id}_c) \to \mathrm{id}_{F(c)}$ が存在する．

(b) 任意の $f\colon c \to d, g\colon d \to e \in \mathbf{C}$ について 2-isomorphism $\alpha_{g,f}\colon F(g \circ f) \to F(g) \circ F(f)$ が存在する．

(c) $f\colon x \to y, g\colon y \to z, h\colon z \to w$ について以下の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "F(f)"] \arrow[r, bend right, "F(f)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_{F(f)}"] & F(y) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "F(\mathrm{id})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha_y"] & F(y) \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "F(f)"] \arrow[r, bend right, "F(f)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha_{\mathrm{id}_y, f}"] & F(y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r] \arrow[r, bend left] \arrow[rrr, bend left] & F(y) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & F(z) \arrow[r] & F(w) \end{tikzcd}$$

3.3 Propositions

補題 3.4
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．任意の $\mathbf{B}$ の射 $f\colon b \to b'$ と $x \in \mathcal{X}(b')$ について，f と x に対する cartesian lifting は，同型を除いて一意に存在する．

(証明). 存在は fibered category の定義から明らか．一意性は cartesian lifting が普遍性を持つことを Triangle Lifting を用いて示せば良い． ∎

補題 3.5
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．このとき，fiber of π は psuedo-functor である．

(証明). $b \in \mathbf{B}$ について，$\mathcal{X}(b)$ は既に既に定義した．$\mathbf{B}$ の射 $\phi\colon b' \to b$ について，関手 $\mathcal{X}(\phi)\colon \mathcal{X}(b) \to \mathcal{X}(b')$ は次のように定められる．まず $u \in \mathcal{X}(b)$ について，$\mathcal{X}(\phi)(u)$ は ϕ による u の pullback :: ϕ^*u (cartesian lifting of ϕ) である．次に $\mathcal{X}(b)$ の射 $\lambda\colon u \to v$ （$\mathcal{X}(b)$ の定義から $\pi(\lambda) = \mathrm{id}$ を満たす）について，下の図式に triangle lifting を用いて $\phi^*u \to \phi^*v$ を得る．

in $\mathcal{X}$

$$\begin{tikzcd} \phi^*u \arrow[r] \arrow[dr, bend left] & u \arrow[d, "\lambda"] \\ \phi^*v \arrow[r] & v \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} b' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, bend left] & b \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ b' \arrow[r, "\phi"'] & b \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

定義 (3.3) にある条件 (a) については，各 $b \in \mathbf{B}$ について，命題 (1.11) を用いれば同型の存在が分かる．条件 (b) については，各 $f\colon c \to d, g\colon d \to e \in \mathbf{C}$ と各 $b \in \mathbf{B}$ について補題 (3.4) を用いれば $\mathcal{X}(g \circ f)(b) \cong \mathcal{X}(f) \circ \mathbf{B}(g)(b)$ が得られる．あとはこの同型が自然である（すなわち自然変換を定める）ことを確かめれば良い． ∎

この事実は次のセミナーで用いる．

定理 3.6 (2-Yoneda Lemma (Fibered Yoneda Lemma))
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ :: fibered category とする．以下のように関手を定める．

$$\begin{array}{rccc} Y\colon & \mathbf{B} & \to & \mathbf{Fib}(\mathbf{B}) \\ & U & \mapsto & \mathbf{B}/U \end{array}$$

ここで $\mathbf{B}/U$ は例 (1.8) にあるとおり fibered category over $\mathbf{B}$ である．

この時，圏同値 $\mathrm{HOM}_{\mathbf{U}}(Y(U),\mathcal{X}) \to \mathcal{X}(U)$ が成り立つ.

(証明). (TODO) ∎

注意 3.7
この定理から，$\mathcal{X}(U)$ を「空間」$\mathcal{X}$ の U-rational points と考えることが出来る．また，この定理から関手 Y が $U \in \mathbf{B}$ の fibered category over $\mathbf{B}$ への「昇格」を与えていることが分かる.

系 3.8
圏同値 $U, V \in \mathbf{B}$ について $Y(U) \simeq Y(V)$ と $U \cong V$ は同値.

4 Grothendieck Construction

今，fibered category から fiber として psuedo-functor を構成した．実はこの逆が出来る.

定義 4.1 (Grothendieck Construction, [3], [2])
psuedo-functor :: $P\colon \mathbf{B} \to \mathbf{Cat}/\mathbf{B}$ について，以下のように圏 $\int P$ を定義する.

Object. $b \in \mathbf{B}$ と $x \in P(b)$ の組 (b, x).
Arrow. $\phi\colon b \to b'$ と $\Phi\colon P(\phi)(x) \to x'$ の組 (ϕ, Φ).

射の合成は $(\psi, \Psi) \circ (\phi, \Phi) = (\psi \circ \phi, \Phi \circ P(\psi)(\Phi))$ で与えられる.
この圏によって以下の関手が定まる.

$$\int\colon \quad \begin{array}{ccc} \left\{\begin{matrix}\text{psuedo-functor} \\ \mathbf{B} \to \mathbf{Cat}\end{matrix}\right\} & \to & \mathbf{sFib}(\mathbf{B}) \\ P & \mapsto & \displaystyle\int P \end{array}$$

例 4.2
scheme :: S について，representable functor :: $\underline{S}$ は $\mathbf{Sch}/S$ に対応する.

例 4.3
presheaf of set :: $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$ は $\bigsqcup_{c \in \mathbf{C}} F(c)$ に対応する.

注意 4.4
David I. Spivak "Category theory for scientists"によると，Grothendieck Construction を最初に構成したのは Grothendieck ではない．例えば MacLane が以前から扱っている.

定義 4.5 (weak/strict 2-equivalence)
関手 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が weak 2-equivalence であるとは，以下が成り立つこと: 逆向きの関手 $\mathbf{C} \leftarrow \mathbf{D}\colon G$ と二つの自然変換 $\alpha\colon GF \to \mathrm{id}_{\mathbf{C}}, \beta\colon FG \to \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$ が存在し，

- 各 $c \in \mathbf{C}, d \in \mathbf{D}$ について α_c, β_d は同型であり，
- 射 $\phi \in \mathrm{Arr}(\mathbf{C}), \psi \in \mathrm{Arr}(\mathbf{D})$ について α_ϕ, β_ψ も同型.

α_ϕ, β_ψ が恒等射であるときは strict 2-equivalence という.

定理 4.6 (Grothendieck Construction give Category Equivalence)
Grothendieck Construction

$$\int : \left\{ \begin{matrix} \text{psuedo-functor} \\ \mathbf{B} \to \mathbf{Cat} \end{matrix} \right\} \to \mathbf{cFib}(\mathbf{B})$$

は strict 2-equivalence である．また，このあとに忘却関手 $\mathbf{cFib}(\mathbf{B}) \to \mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ を続けると，weak 2-equivalence となる．

(証明). [5] §3.1.3 に詳しい証明がある．あるいは，P. T. Johnstone “Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium vol.1 (Oxford Logic Guides 43)” に証明がある． ∎

注意 4.7
$\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ と “anafunctor”の圏が strict 2-equivalence である，という述べ方もあるようだが，“anafunctor”を用いる理由が特に無いので，このノートでは導入しない．

注意 4.8
この定理から，psuedo-functor の理論と fibered category の理論は殆ど同じ，と言える．また，今後現れる stack などは psuedo-functor に対して定義され，一見，fibered category の理論は扱う必要性がなくなる．

しかし実際には，fibered category の方が psuedo-functor より構成しやすい，あるいは全体の性質を理解しやすいという面がある．また技術的な有利としては，fibered category は cleavage（例えば pullback, fiber product 等）を選択する必要がなく，例えば，pullback の貼り合わせ（貼り合わせの際には同型での変形が必要に成る）を自然に扱うことが出来る[†4]．

また，直観としては，fibered category は family である．ここから得られる fiber は正に fiber of family である．そのため fibered category は大域的，psuedo-functor は局所的だと考えられる．

(TODO: あとで分かったらもっと追記する．)

5 Category Fibered in Groupoids/Sets

5.1 Motivation

Category Fibered in Groupoids は「綺麗すぎる」fibered category であるが，我々が研究する範囲では珍しいものではない．

5.2 Definition

定義 5.1 (Groupoid)
任意の射が同型射である圏を groupoid と呼ぶ．

注意 5.2
群は対象がただ一つで任意の射が同型であるものとみなせるため，groupoid にはこの名前がある．

群以外の極めて単純な groupoid として，集合を射が恒等射しかない圏（離散圏）とみなしたものがある．そのため，逆に恒等射しか無い圏も set と呼ぶ．

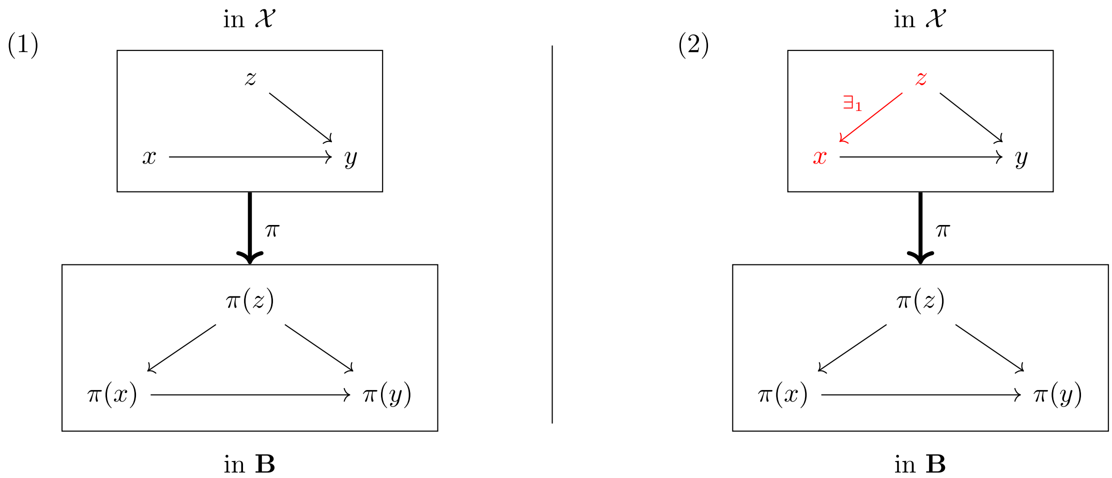
[†4] もう少し具体的な例としては，trivial family の貼り合わせで出来る locally trivial family も扱える．詳しい例は私の Deformation Theory に関するノートを読んで欲しい．

定義 5.3 (Category fibered in groupoids/sets)
$\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．任意の $b \in \mathbf{B}$ について，π の b における fiber$\mathcal{X}(b)$ が groupoid (set) であるとき，$\mathcal{X}$ を category fibered in groupoids (sets) と呼ぶ.

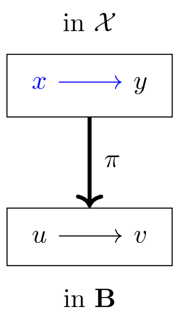
category fibered in groupoids は次のように定義しても同値である.

定義 5.4 (Category fibered in groupoid (Another Definition))
任意の射が cartesian である fibered category を category fibered in groupoids と呼ぶ．すなわち，以下の 2 条件が成立する圏 $\mathcal{X}$ と関手 $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}$ を category fibered in groupoids と呼ぶ.

(i) 以下の図式 (1) において，上の箱と下の箱が π で対応し，下の箱にある図式が可換であるとする．この時，図式 (2) のように上の箱にある図式を可換にし，π での対応を保つ射 $z \to x$ がただ一つ存在する.



(ii) $y \in \mathcal{X}, u \to \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対し，以下の図式を満たす[†5]$x \in \mathcal{X}$ と射 $x \to y \in \mathcal{X}$が存在する.



(証明). [4] 003V[†6]. ∎

[†5] すなわち，$\pi(x) = u, \pi(x \to y) = u \to \pi(y)$ を満たす.
[†6] https://stacks.math.columbia.edu/tag/003V

6 Equivalence of Fibered Categories

Fibered category の一般論の最後に，この直後に扱うことと成る Equivalence を扱う．

この節では fibered categories :: $\pi\colon \mathcal{X} \to \mathbf{B}, \pi'\colon \mathcal{X}' \to \mathbf{B}$ と，これらの間の射 $g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$ を考える．

6.1 Definition

定義 6.1 (Equivalence)
g が equivalence of fibered categories であるとは，別の射 $h\colon \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ が存在し，$g \circ h, h \circ g$ がそれぞれ恒等関手と base-preserving isomorphic であるということである．

この時，$\mathcal{X} \simeq \mathcal{X}'$ と書き，h は psuedo-inverse of g と呼ばれる．

注意 6.2
比較すれば分かるとおり，equivalence of fibered categories は，通常の圏同値の定義に "base-preserving" という条件が追加されただけである．

6.2 Propositions

命題 6.3
fibered とは限らない圏 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ とその間の関手 $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ について，F が圏同値であることは以下の 2 条件が同時に成立することと同値．

Fully Faithfulness.

任意の $c, c' \in \mathbf{C}$ について，

関手 F が与える class の対応 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), F(c'))$ は全単射である．

Essential Surjectivity.

任意の $d \in \mathbf{D}$ について，$F(c) \cong d$ となる対象 $c \in \mathbf{C}$ が存在する．

(証明)．[1] Prop7.26 を参照せよ． ∎

命題 6.4 ([3] Prop3.1.18, 3.1.10)
$b \in \mathbf{B}$ について，g を $\mathcal{X}(b)$ に制限して得られる関手を $g_b\colon \mathcal{X}(b) \to \mathcal{X}'(b)$ とする．

(a) g :: fully faithful $\iff$ 任意の $b \in \mathbf{B}$ について，g_b :: fully faithful.

(b) g :: equivalence $\iff$ 任意の $b \in \mathbf{B}$ について，g_b :: equivalence [†7].

(証明)．いずれも $\Longrightarrow$ は自明なので $\Longleftarrow$ を示す．

[†7] こちらは通常の圏同値

(i) の証明の概略は以下の通り．まず $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c,c'), \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c),F(c'))$ を

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c,c') = \bigsqcup_{h\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(\pi(c),\pi(c'))} \left\{\begin{matrix}\text{morphisms } c\to c', \\ \text{over } h\end{matrix}\right\},$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c),F(c')) = \bigsqcup_{h\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(\pi(c),\pi(c'))} \left\{\begin{matrix}\text{morphisms } F(c)\to F(c'), \\ \text{over } h\end{matrix}\right\}$$

と分解する．そして各 h について session 4 の命題 4.2（射は cartesian arrow と id に写る射の合成に分解できる）を用いる．すると各成分について全単射を構成できる．

(TODO: proof of (ii)) ∎

参考文献

[1] Steve Awodey. *Category Theory (Oxford Logic Guides)*. Oxford University Press, U.S.A., 2 edition, 8 2010.

[2] Behrang Noohi. A quick introduction to fibered categories and topological stacks. `http://www.maths.qmul.ac.uk/~noohi/papers/quick.pdf`.

[3] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[4] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2019.

[5] Angelo Vistoli. Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008). `http://homepage.sns.it/vistoli/descent.pdf`.