ゼミノート #9
Quotient Stacks

七条彰紀

2019 年 1 月 30 日

目次

Algebraic stack の具体例として Quotient stack を扱う．この例を通じて特に，「diagonal morphism $\Delta\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ が表現可能とはどういうことか」ということを考えたい．参考文献として [2] 1.3.2, [1] Example 4.8, [3] Example 8.1.12 を参照する．

1 Definitions

1.1 $\mathcal{G}$-torsor

定義 1.1 (Equivariant Morphism)
一般の site :: $\mathbf{C}$ をとり，$\mathcal{G}$ を $\mathbf{C}$ 上の sheaf of groups とする．sheaf :: $\mathcal{F}$ と，$\mathcal{G}$ からの左作用 $\alpha\colon \mathcal{G} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ を組にして $(\mathcal{F}, \alpha)$ と書く．$\mathcal{G}$ からの左作用を持つ sheaf の間の射 $(\mathcal{F}, \alpha) \to (\mathcal{F}', \alpha')$ とは，sheaf の射

$f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ であって以下が可換図式であるもの．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \times \mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{id}\times f"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{G} \times \mathcal{F}' \arrow[d, "\alpha'"] \\
\mathcal{F} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{F}'
\end{tikzcd}$$

このような射 f は $\mathcal{G}$-equivariant morphism（$\mathcal{G}$ 同変写像）と呼ばれる．

定義 1.2 ($\mathcal{G}$-Torsor, [3] 4.5.1, [4] Tag 04UJ)
一般の site :: $\mathbf{C}$ をとり，$\mathcal{G}$ を $\mathbf{C}$ 上の sheaf of groups とする．$\mathbf{C}$ 上の $\mathcal{G}$-torsor とは，$\mathbf{C}$ 上の sheaf :: $\mathcal{P}$ と左作用 $\alpha\colon \mathcal{G} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ の組であって，次を満たすもの．

T1 任意の $X \in \mathbf{C}$ について cover of X :: $\{X_i \to X\}$ が存在し，$\mathcal{P}(X_i) \neq \emptyset$.
T2 写像

$$\langle \mathrm{pr}_2, \alpha\rangle\colon \mathcal{G} \times \mathcal{P} \to \mathcal{P} \times \mathcal{P}; \quad (p, g) \mapsto (p, \alpha(g, p))$$

は同型．ただし，$\langle \mathrm{pr}_1, \alpha\rangle$ は $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ の普遍性と $\mathrm{pr}_1, \alpha\colon \mathcal{P} \times \mathcal{G} \to \mathcal{P}$ から得られる射である．

$\mathcal{G}$-torsor の射は $\mathcal{G}$-equivariant morphism である．

$(\mathcal{P}, \alpha)$ が $\mathcal{G}$-torsor :: $(\mathcal{G}, m)$ （ただし $m\colon \mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ は積写像）と同型である時 $\mathcal{G}$-torsor :: $(\mathcal{P}, \alpha)$ は自明 (trivial) であると言う．

注意 1.3
$\mathcal{G}, \mathcal{P}$ の両方が scheme で表現できる場合には，$\mathcal{G}$-torsor は principal bundle と呼ばれる．group scheme に対応する representable sheaf が

注意 1.4
任意の $X \in \mathbf{C}$ について $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ である場合には，条件 T2 は作用 α が単純推移的であることを意味する．すなわち，任意の $p, q \in \mathcal{P}(X)$ についてただ一つの $g \in \mathcal{G}(X)$ が存在し，$q = g * q = \alpha(g, p)$ となる．

補題 1.5 ([4] Tag 03AI, [3] 4.5.1)

(i) $\mathcal{G}$-torsor :: $(\mathcal{P}, \alpha)$ が自明であることと，$\mathcal{P}$ が global section[†1] を持つことと同値.

(ii) $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ ならば制限 $\mathcal{P}|_X$ は trivial.

(iii) 同型 $\mathcal{G}|_X \to \mathcal{P}|_X$ と $\mathcal{P}(X)$ の元は一対一に対応する．

(証明). $(\mathcal{P}, \alpha)$ が自明であると仮定すると，次のように global section が得られる．

$$1 \to \mathcal{G} \cong \mathcal{P}; \quad * \mapsto e$$

ただし e は $\mathcal{G}$ の単位元である．

p を $\mathcal{P}$ の global section とすると，

$$\mathcal{G} \to \mathcal{P}; \quad g \mapsto \alpha(g, p)$$

という射が定義できる．これは定義にある条件 T2 から同型である．

[†1] 前層の圏 $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ の terminal object から $\mathcal{P}$ への射のこと ([4] Tag 06UN). $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ の terminal object は自明群で定まる constant sheaf である．

$s \in \mathcal{P}(X)$ をとれば，scheme の任意の射 $\phi\colon U \to X$ について

$$1 \to (\mathcal{P}|_X)(U) = \mathcal{P}(U); \quad * \mapsto \phi^* s$$

のように global section :: $1 \to \mathcal{P}|_X$ が定まる． ∎

系 1.6
$\mathcal{G}$-torsor の任意の射は同型．

(証明)．isomorphism は etale local on the target なので (TODO)，条件 T1 にあるような etale cover $\{\phi_i\colon U_i \to X\}$ を取れば主張は「trivial $(\phi_i)^*\mathcal{G}$-torsor の射は同型」という命題に帰着される．

$\mathcal{G}$ の単位元（射 $e\colon 1 \to \mathcal{G}$ の像）を e と書くことにすると，射 $(\phi_i)^*\mathcal{G} \to (\phi_i)^*\mathcal{G}$ は，$g \mapsto g \cdot f(e)$ と書ける．$f(e) \in (\phi_i)^*\mathcal{G}$ も群の元なので逆元が存在する．なので $g' \mapsto g' \cdot f(e)^{-1}$ とすれば逆射が作れる． ∎

1.2 Quotient Stack

定義 1.7 (Quotient Stack, [3] Example 8.1.12)
X :: algebraic space, G :: smooth group scheme over S, acting on X とする．すなわち左作用 $\alpha\colon \underline{G} \times X \to X$ が存在するものとする．この時，fibered category :: $[X/G](\to \mathrm{ET}(S))$ を以下で定める．

Object 以下の 3 つ組．

- S-scheme :: U,
- $G_U(:= G \times_S U)$-torsor on $\mathrm{ET}(U)$ :: $\mathcal{P}$,
- $\underline{G_U}$-torsor の射 $\pi\colon \mathcal{P} \to X_U(:= X \times_S U)$.

Arrow 射 $(U, \mathcal{P}, \pi) \to (U', \mathcal{P}', \pi')$ は二つの射の組 $(f\colon U \to U', f^\flat\colon \mathcal{P} \to f^*\mathcal{P}')$ であって，以下が可換となるもの．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[rr, "f^\flat"] \arrow[dr, "\pi"'] & & f^*\mathcal{P}' \arrow[dl, "f^*\pi'"] \\ & X_U & \end{tikzcd}$$

π と $f^*\pi'$ の codomain，すなわち X_U と $f^*X_{U'}$ が一致していることに注意．

fibration は $(U, \mathcal{P}, \pi) \mapsto U, (f, f^\flat) \mapsto f$ で与えられる．

注意 1.8
任意の $[U \to S] \in \mathbf{Sch}/S$ について，$G_U(:= G \times U)$ は群になる．単位セクション $e_U\colon 1 \to G_U$，$e\colon 1 \to G$ の pullback から得られる．積 m_U なども同様．特に射影 $\mathrm{pr}_U\colon G_U \to U$ は，smooth morphism :: $G \to S$ の pullback なので smooth.

補題 1.9
S :: scheme, X :: algebraic space, G :: smooth group scheme over S, acting on X とする．Quotient stack :: $[X/G]$ は stack in groupoids である．

(証明)．stack であることは sheaf の貼り合わせが可能であることに拠る．詳しくは [3] 4.2.12, [4] Tag 04UK を参照せよ．$[X/G]$ が category fibered in groupoids(CFG) であることを確かめる．これは恒等射上の

$[X/G]$ の射が同型射であることを確かめれば良い．

$U \in \mathrm{ET}(S)$ を固定し，射 $(\mathrm{id}_U, f^\flat)\colon (U, \mathcal{P}, \pi) \to (U, \mathcal{P}', \pi')$ を考える．定義から，次が可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[rr, "f^\flat"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{P}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X_U & \end{tikzcd}$$

∎

2 Aim of This Session

定理 2.1

X :: algebraic space, G :: smooth group scheme over S, acting on X とする．Quotient Stack :: $[X/G]$ は Artin stack である．

3 準備

3.1 Definition of $\mathbf{Isom}(X, Y)$

最初に $\mathfrak{X}$ の cleavage を選択せずとも出来る **Isom** の構成を述べる．後の注意で特に splitting を選択した場合の構成も述べておく．

定義 3.1 ($\mathbf{Isom}(X, Y)$)

stack とは限らない fibration :: $\mathfrak{X} \to \mathbf{B}$ と，$U \in \mathbf{B}$ 及び U 上の対象 $X, Y \in \mathfrak{X}$ をとる．この時，CFG over $\mathbf{B}/U$:: $\mathbf{Isom}(X, Y)$ を以下のように定める．

Object. 以下の 4 つ組．

- $\mathbf{B}/U$ の対象 $f\colon V \to U$.
- f の cartesian lifting :: $f^*X \to X, f^*Y \to Y$.
- 同型 ϕ: $f^*X \to f^*Y$.

Arrow. 射

$$(V \xrightarrow{f} U, f^*X \to X, f^*Y \to Y, f^*X \xrightarrow{\phi} f^*Y) \to (W \xrightarrow{g} U, g^*X \to X, g^*Y \to Y, g^*X \xrightarrow{\psi} g^*Y)$$

は，以下の 2 つからなる．

- $\mathbf{B}/U$ の射 $h\colon V \to W$（したがって $g \circ h = f$ が成立），
- 射 $h^*\psi, \phi$ の間の canonical な同型射 $(h^*g^*X \to f^*X, h^*g^*Y \to f^*Y)$.

$(h^*g^*X \to f^*X, h^*g^*Y \to f^*Y)$ を選択することで，$h^*g^*X \to X, h^*g^*Y \to Y$ が定まる．また Triangle Lifting により $h^*\psi$ も定まる．以下の図式を参考にすると良い．

in $\mathfrak{X}$

$$\begin{tikzcd}
& h^*g^*X \arrow[r, "h^*\psi"] \arrow[dl] \arrow[dd] & h^*g^*Y \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
X & & & Y \\
& f^*X \arrow[r, "\phi"'] \arrow[ul] & f^*Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi_{\mathfrak{X}}$$

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "g\circ h"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}"'] & V \arrow[dr, "g\circ h"] \arrow[dd, "\mathrm{id}"] & \\
U & & & U \\
& V \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ul, "f"] & V \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

fibration は次のように与えられる．

$$\begin{array}{lccc}
\pi\colon & \mathbf{Isom}(X,Y) & \to & \mathbf{B}/U \\
\textbf{Objects:} & (f\colon V\to U, f^*X, f^*Y, \phi\colon f^*X\to f^*Y) & \mapsto & f \\
\textbf{Arrows:} & (h\colon V\to W, h^*g^*X\to f^*X, h^*g^*Y\to f^*Y) & \mapsto & h
\end{array}$$

注意 3.2
$\mathfrak{X}\to\mathbf{B}$ の splitting を選んだ場合には $\mathbf{Isom}(X,Y)$ の定義は次のように簡単に成る．

Object. $\mathbf{B}/U$ の対象 $f\colon V\to U$ と同型 $\phi\colon f^*X\to f^*Y$ の組．
Arrow. 射 $(f,\phi)\to(g,\psi)$ は，$g\circ h=f$ を満たす $\mathbf{B}/U$ の射 h.

以下では $\mathbf{Isom}(X,Y)$ が algebraic space（これは sheaf）と同型であるかどうかを考えるので，こちらの定義だけを覚えていても問題はない．

3.2 Propositions

補題 3.3
任意の $U\in\mathbf{B}$ と $X,Y\in\mathfrak{X}(U)$ について，$\mathbf{Isom}(X,Y)$ は category fibered in sets.

(証明). 恒等射上の射は恒等射しかないことを確かめれば良い．$\mathbf{Isom}(X,Y)$ の射の定義から，恒等射上の射は次の形になっている．

$$(\mathrm{id}_U, f^*X\to f^*X, f^*Y\to f^*Y)\colon (f,f^*X,f^*Y,\phi)\to(f,f^*X,f^*Y,\psi)$$

$f^*X\to f^*X, f^*Y\to f^*Y$ は Triangle Lifting から得られる canonical なものなので，恒等射である． ∎

$\mathfrak{X}$ :: stack の場合は（$\mathfrak{X} \to \mathbf{B}$ の splitting を選べば）$\mathbf{Isom}(X, Y)$ は sheaf になる．

補題 3.4
一般の site :: $\mathbf{C}$ と CFG :: $\mathfrak{X} \to \mathbf{C}$ をとる．さらに $\mathfrak{X}$ は split fibered category であるとする．以下の二つは互いに同値．

(i) $\mathfrak{X}$ は prestack である．

(ii) 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}$ について $\mathbf{Isom}(X, Y)$ の fiber は sheaf である．

(証明)．(TODO: 出典) ∎

3.3 Representability of Diagonal Morphism.

注意 3.5
以下，scheme S を固定し，特に断らない限り big etale site :: $\mathrm{ET}(S)$ 上の stack in groupoids のみ考える．

補題 3.6
$\mathfrak{X}$ :: stack in groupoids on $\mathbf{C}(= \mathrm{ET}(S))$ とする．この時，$\Delta\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ が表現可能であることと，任意の $U \in \mathbf{C}$ と任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ について $\mathbf{Isom}(X, Y)$ が algebraic space であることは同値．

(証明)．$x, y\colon \mathbf{Sch}/U(= U) \to \mathfrak{X}$ を，2-Yoneda Lemma により得られる $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ に対応する射とする[†2]．

以下の図式が pullback diagram であることから分かる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Isom}(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{pr}_U"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathfrak{X}}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{a}{\Nearrow}"] & \mathbf{Sch}/U \arrow[d, "x \times y"] \\
\mathfrak{X} \arrow[r, "\Delta"'] & \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}
\end{tikzcd}$$

任意の射 $\mathbf{Sch}/U \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ が $x \times y$ の形で表されることは，$\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ の普遍性から得られる．

まず，射と自然同型を定義する．$\mathbf{Isom}(X, Y)$ から伸びる射は次の関手である．ただし $\xi = (f\colon V \to U, f^*X, f^*Y, \phi\colon f^*X \to f^*Y), \eta = (g\colon W \to U, g^*X, g^*Y, \psi\colon g^*X \to f^*Y)$ とした．

pr_U	$\mathbf{Isom}(X, Y)$	$\to$	$\mathbf{Sch}/U$
Objects:	ξ	$\mapsto$	f
Arrows:	$[\xi \to \eta]$	$\mapsto$	h

$\mathrm{pr}_{\mathfrak{X}}$	$\mathbf{Isom}(X, Y)$	$\to$	$\mathfrak{X}$
Objects:	ξ	$\mapsto$	f^*X
Arrows:	$[\xi \to \eta]$	$\mapsto$	$f^*X \to h^*g^*X$

自然同型 a は次で定める．

[†2] 例えば x は $f \in \mathbf{Sch}/U$ を cartesian lifting f^*X へ写す．

$$\begin{array}{rccc} a_\xi\colon & ((x\times y)\,\mathrm{pr}_U)(\xi) & \to & (\Delta\,\mathrm{pr}_{\mathfrak{X}})(\xi) \\ & (f\colon V\to U, f^*X, f^*X, \alpha) & \mapsto & (\mathrm{id}_{f^*X}, \phi) \end{array}$$

$\mathbf{Isom}(X,Y)$ が pullback であることは，$\mathbf{Isom}(X,Y)$ が普遍性を持つことを通して確かめる．（TODO） ∎

4 証明

4.1 Δ is Representable.

示した補題から，任意の $U\in\mathbf{C}$ と任意の G_U-torsor :: $\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2\in\mathfrak{X}(U)$ について $\mathbf{Isom}(\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2)$ が algebraic space であることは同値である．これは次のようにして自明な場合に帰着できる．

■$\mathcal{P}_1,\mathcal{P}_2$ が自明な場合に帰着させる．

補題 4.1 ([3] Exc 5.G)
U :: scheme をとる．sheaf on $\mathrm{ET}(U)$ :: $\mathcal{F}$ と etale surjective morphism :: $V\to U$ に対し，$V\times_U\mathcal{F}$ が algebraic space ならば，$\mathcal{F}$ は algebraic space.

補題 4.2
$X,Y\in\mathfrak{X}(U)$ と $v\colon V\to U$ について

$$V\times_U\mathbf{Isom}(X,Y)\cong\mathbf{Isom}(v^*X,v^*Y).$$

(補題 4.1 の証明). $\mathcal{F}' := (V\times_U\mathcal{F})\times_V(V\times_U\mathcal{F})$ とおく．
まず diagonal morphism の表現可能性を考える．pullback lemma から次が分かる．

$$(V\times_U\mathcal{F})\times_V(V\times_U\mathcal{F})\cong(V\times_U\mathcal{F})\times_U\mathcal{F}\cong V\times_U(\mathcal{F}\times_U\mathcal{F}).$$

このことから，$\Delta\colon\mathcal{F}\to\mathcal{F}\times_U\mathcal{F}$ を $V\to Y$ で pullback したものが $\Delta'\colon\mathcal{F}'\to\mathcal{F}'\times\mathcal{F}'$ だと分かる．
atlas の存在は次のように分かる．$A\to\mathcal{F}'$ を $\mathcal{F}'$ の atlas とする．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[d] \\ & V \arrow[r, "\text{etale, surj.}"'] & U \end{tikzcd}$$

$V\to Y$ が etale surjective なので $\mathcal{F}'\to\mathcal{F}$ も etale surjective. 今 $A\to\mathcal{F}'$ が etale surjective なので，併せて $A\to\mathcal{F}$ が etale surjective と分かる． ∎

(補題 4.2 の証明). 定義を変形するだけである．

$$\begin{aligned} &(V\times_U(\mathbf{Isom}(X,Y)))(W) \\ =&V(W)\times_{U(W)}\mathbf{Isom}(X,Y)(W) \\ =&\{(w\colon W\to V, f\colon W\to U, \rho\colon f^*X\xrightarrow{\cong}f^*Y)\mid u\circ v=f\} \\ =&\{(w\colon W\to V, \rho\colon w^*u^*X\xrightarrow{\cong}w^*u^*Y)\} \\ =&\mathbf{Isom}(v^*X,v^*Y)(V) \end{aligned}$$

∎

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ が自明に成る etale cover :: $\mathcal{V}$ [†3] をとり，$v\colon V = \coprod_{V \in \mathcal{V}} V \to X$ とすれば，$v^*\mathcal{P}, v^*\mathcal{P}_2$ は自明な G_U-torsor となる．こうして $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ が自明な場合に議論を帰着させることが出来る．

同型 $G_Y \cong \mathcal{P}_1, G_Y \cong \mathcal{P}_2$ を固定する．これらと π_1, π_2 を合成して

$$\rho_1\colon G_Y \to X_Y, \quad \rho_2\colon G_Y \to X_Y$$

を得る．

■$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ が自明な場合について証明する． $\mathbf{Isom}(\ (G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2)\ )$ がどのような sheaf か考える．trivial torsor の任意の自己同型 $\phi\colon G_Y \to G_Y$ は，これが equivariant であることから，$\phi(e)$ の左からの積になっている．逆に任意の G_Y の元を取れば左からの積が自己同型になるから，集合 $\mathbf{Isom}(\ (G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2)\ )$ は G_Y の部分集合である．そこで，$g \in G_Y$ (i.e. $g\colon 1 \to G_Y$) から得られる自己同型 $(\cdot g)\colon G_Y \to G_Y$ が満たすべき条件を考える．

$[X/G]$ の定義から，次が可換である．

$$\begin{tikzcd} G_Y \arrow[rr, "(\cdot g)"] \arrow[dr, "\rho_1"'] & & G_Y \arrow[dl, "\rho_2"] \\ & X_Y & \end{tikzcd}$$

$(\cdot g)$ は equivariant だから，この図式が可換であることは $\rho_1(e) = \rho_2(g)$ と同値である．したがって

$$\begin{aligned} &\mathbf{Isom}(\ (G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2)\ )(V) \\ =&\{g \in G_Y(V) \mid \rho_1(e) = \rho_2(g)\} \\ =&\{(g, x) \in G_Y(V) \times X_Y(V) \mid (\rho_1(e), \rho_2(g)) = (x, x)\} \end{aligned}$$

これは次のように，fiber product で表現出来る．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Isom}(\ (G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2)\ ) \arrow[r] \arrow[d] & G_Y \arrow[d] \\ X_Y \arrow[r, "\Delta"'] & X_Y \times_Y X_Y \end{tikzcd}$$

射 $G_Y \to X_Y \times_Y X_Y$ は $g \mapsto (\rho_1(e), \rho_2(g))$ である．この図式が pullback diagram であることは $\mathbf{Isom}(\ (G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2)\ )$ が algebraic space であることを意味している．

4.2 $[X/G]$ has an Atlas.

射 $a\colon X \to [X/G]$ を trivial G_X-torsor :: $(G_X, m_X) \in [X/G](X)$ に（2-Yoneda Lemma によって）対応する射とする．この射 a が atlas であることを示す．a が representable であることは Δ が representable であることから分かる．a が smooth, surjective であることを示す．

以下の pullback diagram を考える．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "(G_X, m_X)"] \\ Y \arrow[r, "(\mathcal{P}, \pi)"'] & {[X/G]} \end{tikzcd}$$

[†3] i.e. $^\forall V \in \mathcal{V}, \ \ \mathcal{P}_1(V), \mathcal{P}_2(V) \neq \emptyset$.

ただし $Y \to [X/G]$ は a と同様に $(\mathcal{P}, \pi) \in [X/G](Y)$ に対応する射である．$\mathcal{P}$ は作用 $\alpha\colon G_Y \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ を持つとする．

この時，$\mathbf{P}$ は sheaf として $\mathcal{P}$ と同型である．これは次のように同型が得られる．まず $\mathbf{P}(U)$ は以下の 3 つの組の集合である．

- $x\colon U \to X$,
- $y\colon U \to Y$,
- $\rho\colon x^*(G_X, m_X) \xrightarrow{\cong} y^*(\mathcal{P}, \pi))$.

ただし x, y について以下が可換．

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{x} & X \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

上のような x, y を一つとり，x_0, y_0 と名前を付ける．すると $(y_0)^*G_Y = (x_0)^*G_X$ となる．$\mathbf{P}(U)$ の元 (x, y, ρ) が存在するならば，$x^*X = y^*X_Y$ ゆえに x, y は上の可換図式を満たすことに注意せよ．

次のように同型を定める．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(U) & \to & \mathcal{P}(U) \\ (x, y, \rho) & \mapsto & \rho_U(e) \\ (x_0, y_0, (y_0)^*\alpha(-, p)) & \leftarrow\!\shortmid & p \end{array}$$

$(f^*\mathcal{P})(U) = \mathcal{P}(U)$ は f^* の colomit を用いた定義から得られる．

最後に $\mathcal{P} \to Y$ が etale surjective であることを確かめる．$\mathcal{P}(Y_i) \neq \emptyset$ となる Y の cover :: $\{Y_i \to Y\}$ をとる．$\mathcal{P}|_{Y_i}$ は trivial torsor :: G_{Y_i} と同型となる．$\mathrm{pr}_{Y_i}\colon G_{Y_i} \to Y_i$ は smooth surjective であり，smooth, surjective はどちらも etale local on target な性質なので，$\mathcal{P} \to Y$ も etale, surjective.（ついでに $\mathcal{P}$ :: algebraic space も分かる．）

参考文献

[1] Pierre Deligne and David Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.

[2] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[3] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[4] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.