補題 0.1. 環 A を integrally closed domain とし，G をその自己準同型写像が成すある有限群とする．この時，固定環 $A^G(\subseteq A)$ は integrally closed domain である．

(証明)．$\mathrm{Quot}(A^G)$ の元 f/g を任意にとる．以下の式を満たす $\{a_i\}_i \subset A^G$ が存在したとしよう．

$$\left(\frac{f}{g}\right)^n + a_1\left(\frac{f}{g}\right)^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

$A^G \subseteq A, \mathrm{Quot}(A^G) \subseteq \mathrm{Quot}(A)$ だから，$f/g \in \mathrm{Quot}(A), \{a_i\}_i \subset A$ とみなすことが出来る．A が integrally closed domain であることから $f/g \in A$．まとめて $f/g \in \mathrm{Quot}(A^G) \cap A$ が得られる．

さて，$f/g = h$ と置くと $h \in A$ かつ $gh = f$．$f/g \in \mathrm{Quot}(A^G)$ だから f, g はどちらも A^G の元である．なので，

$$^\forall\sigma \in G,\quad g \cdot h = \sigma(f) = f = g \cdot \sigma(h) \iff {}^\forall\sigma \in G,\quad h = \sigma(h)$$

よって $h = f/g \in A^G$ が得られた． ∎