定義 0.1
教科書及びこのメモでは scheme についての仮定 $(*)$ を次で定める．この条件 $(*)$ を満たす scheme では Weil divisor が定義できる．

- integral,
- separated,
- noetherian, and
- regular in codimention one.

最後の条件の定義は次のよう．X :: scheme に対し，$X^{(1)}$ を $\mathrm{codim}(\mathrm{cl}_X(\{z\}, X)) = 1$ なる点 $z \in X$ の全体とする．（Weil divisor 全体は free abelian group $\mathbb{Z}^{(X^{(1)})}$ と表現できる．）X が "regular in codimention one"であるとは，任意の $z \in X^{(1)}$ に対し $\mathcal{O}_{X,z}$ :: integrally closed domain であるということ．

さらに強く，codimension one とは限らない点 $x \in X$ において $\mathcal{O}_{X,x}$ :: UFD であるとき，X は locally factorial であるという (Prop6.11)．locally fatorial になる十分条件のひとつは X :: regular である (Remark 6.11.1A)．

定義 0.2
X :: scheme 上の $\mathcal{F}$ :: sheaf について定義する．

$\mathcal{F}$ が invertible であるとは，X の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在し，$\mathcal{F}|_{U_\lambda} \cong \mathcal{O}_X$ が成り立つということである．

$\mathcal{F}$ が generated by global sections であるとは，$G \subseteq \Gamma(X, \mathcal{F})$ が存在し，任意の点 $x \in X$ について $\mathcal{F}_x$ :: $\mathcal{O}_{X,x}$-module が $G_x = \{g_x \mid g \in G\}$ で生成されるということである．G のことを global generator of $\mathcal{F}$ と呼ぶ．

$\mathcal{F}$ が locally generated by $\{\langle U, g_U\rangle\}_U (\subseteq \mathcal{F})$ とは，$\mathcal{F}|_V$ :: sheaf on V が generated by global sections $\{\langle U \cap V, g_U|_{U\cap V}\rangle\}_U$，になるということ．$\{\langle U, g_U\rangle\}$ のことを local generator of $\mathcal{F}$ と呼ぶ．

Weil/Carier divisor の定義は難しくないので改めて書かない．

1 Remarks on Cartier divisor.

Cartier divisor を $\{\langle U_i, f_i\rangle\}$ の形で書いたものについて，定義を書き下しておく．

■Local Equations. Cartier divisor $\{\langle U_i, f_i\rangle\}$ について，$\{f_i\}$ は local equations と呼ばれる．

■Equivalence of Cartier Divisor. 二つの Cartier divisor

$$D = \{\langle U_i, f_i\rangle\}_i, D' = \{\langle U'_j, f'_j\rangle\}_j$$

は，集合としての合併が再び Cartier divisor ならば同じものである．すなわち，次が成り立つならば $D = D'$．任意の i, j について

$$^\forall i, j, \quad (f_i|_{U_i\cap U'_j}) \cdot (f'_j|_{U_i\cap U'_j})^{-1} \in \Gamma(U_i \cap U'_j, \mathcal{O}^*_{U_i\cap U'_j}).$$

以上の二つは I.R.Shafarevich"Algebraic Geometry I" pp.255-256 にある．

■Principal Cariter Divisor. $\{\langle U_i, f_i\rangle\}$ :: Cartier divisor on X が principal であるとは，$f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X)$ が存在し，すべての i について $f_i/f \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}^*_{U_i})$ となること．これは $\{\langle U_i, f_i\rangle\} - \{\langle U_i, f\rangle\} = \{\langle U_i, f_i/f\rangle\}$ が $\Gamma(X, \mathcal{O}^*_X)$ に属すということを言い換えたものである．

2 Cartier Divisor $\leftrightarrow$ Weil Divisor.

■Weil divisor $\leftarrow$ Cartier divisor. Prop6.11 の前半から．**この対応は (∗) を満たすならば成立する．** $\{\langle U_i, f_i\rangle\}_i$ を Cartier Divisor とすると，X :: integral から $\mathcal{K}$ は K の constant sheaf．なので $z \in X^{(1)}$ について $v_z(f_i|_{\mathrm{cl}_{U_i}(x)})$ が定まる．したがって $\sum_{z\in X^{(1)}} \sum_i v_z(f_i|_{\mathrm{cl}_{U_i}(x)}) \,\mathrm{cl}_X(z)$ とすればよい．（この対応を EGA IV では cyc と呼んでいる．）

■Weil divisor $\rightarrow$ Cartier divisor. Prop6.11 の後半から．**この対応は X が (∗) を満たし，かつ locally factorial であるならば成立する．** D :: Weil divisor とし，詳しく $D = \sum_{z\in X^{(1)}} n_z \,\mathrm{cl}_X(z)$ とする．点 $x \in X$ をとり，$T_x = \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{X,x}$ とする．

$$D_x = D|_{T_x} = \sum_{z\in X^{(1)}\cap T_x} n_z \,\mathrm{cl}_{T_x}(z)$$

（記法は EGA ch.IV, p.274 より借用した．）は T_x 上の Weil divisor であり，X :: nonsingular projective curve より (Remark 6.11.1A) $\mathcal{O}_x$ :: UFD．なので Prop6.2 より，$D_x = (f_x)$ なる $f_x \in K$ が存在する (つまり principal divisor)．よって $D \cap U_x = f_x|_{U_x}$ となる x の近傍 U_x が存在する．これをまとめて，$\{\langle U_x, f_x\rangle\}_x$ が Cartier divisor になる．（ここは U.Görtz, T.Wedhorn "Algebraic Geometry I" pp.306-309 も参考になる．基本的に EGA ch.IV の翻訳ではあるが，Hartshorne の記法に近い．）

3 Cartier Divisor $\leftrightarrow$ Invertible Subsheaf of $\mathcal{K}$.

D :: Cartier divisor は X の被覆 $\{U_i\}_i$ と $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{K}_X)$ で表現される．ただし，$f_i/f_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X^*)$ となっている．

対応は Prop6.13 で証明されている．

■Cartier Divisor $\rightarrow$ Invertible Subsheaf of $\mathcal{K}$. $\{\langle U_i, f_i\rangle\}_i$ で表現される D :: Cartier divisor に対して，$\mathcal{L}(D)$ :: subsheaf of $\mathcal{K}$ を，$\mathcal{O}_{U_i} \ni 1 \mapsto f_i^{-1}$ で定まる準同型の像として定める．（$\mathcal{L}$ の local generator は $\{\langle U_i, f_i\rangle\}_i$ である．）

■Cartier Divisor $\leftarrow$ Invertible Subsheaf of $\mathcal{K}$. X の開被覆 $\{U_i\}$ が存在し，$\mathcal{L}$ の local generator が $\{\langle U_i, g_i\rangle\}_i$ だとする．この時，$\{\langle U_i, g_i^{-1}\rangle\}_i$ が Cartier divisor を定める．

4 Morphism to $\mathbb{P}^n$ $\leftrightarrow$ Invertible Sheaf & Global Generators.

対応が存在することは Thm7.1 による．また，$\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_A}(1) = (A[x_0, \ldots, x_n](1))\tilde{}$ とする．これの generator は $x_0, \ldots, x_n$ である．

定義 4.1

$f : X \to Y$ :: morphism of schemes, $\mathcal{F}$ :: $\mathcal{O}_X$-module とする．$\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to f_* f^* \mathcal{F}$ を adjoint pair $f^* \dashv f_*$ の unit とする．V :: open in Y について，$(\eta_{\mathcal{F}})_V : \mathcal{F}(V) \to f_* f^* \mathcal{F}(V)$ を f^* と書く．

この定義は教科書には書かれていない．私は Daniel Murfet の lecture note [†1] を参照した．

■Morphism to $\mathbb{P}^n \to$ Invertible Sheaf & Global Generators. $\phi : X \to \mathbb{P}^n_A$ を Spec A-morphism (p.78) とする．ϕ に対し，$\phi^*(\mathcal{O}(1))$ は invertible sheaf であり，$\phi^*(x_0), \ldots, \phi^*(x_n)$ がその global generator である．

■Morphism to $\mathbb{P}^n \leftarrow$ Invertible Sheaf & Global Generators. 上の対応の逆も成り立つ．$\mathcal{L}$ :: invertible sheaf, $G \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ :: global generator ($\#G = n$) に対し，$\mathcal{L} \cong \phi^*(\mathcal{O}(1)), G = \{\phi^*(x_i)\}_{i=1}^n$ であるような $\phi : X \to \mathbb{P}^n_A$ が存在する．

5 Ample Sheaf.

定義 5.1

$\mathcal{L}$ :: invertible sheaf on noetherian scheme X が ample sheaf であるとは，任意の $\mathcal{F}$ :: coherent sheaf on X に対して十分大きいすべての n で $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ が generated by global section になるということである．

6 Linear System.

k :: algebraically closed field, X :: nonsingular projective variety over k, K :: functor field of X とする．この時は，次の対応関係が成り立つ．

■Cartier Divisor $\leftrightarrow$ Weil Divisor. Prop6.11 に証明がある．詳細は上に書いたとおり．

■CaCl $X \cong$ Pic X. Prop6.15 にある．

また，この状況では次の事実が成り立つ (5.19): 任意の $\mathcal{L}$ :: invertible sheaf on X について，$\Gamma(X, \mathcal{L})$ :: finite dimentional k-vector space.

■Linear System $\to$ Invertible Sheaf. $\mathfrak{d}$ :: linear system の元はすべてある D_0 :: Cartier divisor on X と linear equivalent である．なので上の段落にある CaCl $X \cong$ Pic X より，$\mathfrak{d}$ の任意の元は $\mathcal{L} \in$ Pic X :: invertible sheaf に対応する．

■Nonzero Global Section of $\mathcal{L} \to$ Effective Cartier Divisor. $\mathcal{L}$ :: invertible sheaf on X, $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ :: nonzero global section of $\mathcal{L}$ とする．$\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$ となる任意の開集合 U について，この同型写像を $\phi^{(U)} : \mathcal{L}|_U \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_U$ とする．すると明らかに $\phi_U(s|_U) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$．なのでこうして得られる $\{U, \phi_U^{(U)}(s|_U)\}$ は effective Cartier divisor を定めている．$\phi^{(U)}$ のとり方には $\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$ の分だけ自由度があるが，これは結局同じ Cartier divisor を定めている．

■Complete Linear System $|D_0| \approx$ Nonzero Global Sections of $\mathcal{L}(D_0)$. Complete Linear System $|D_0|$ は，ある与えられた divisor D_0 と線形同値なすべての effective divisor の集合である．Prop7.7 より，$|D_0|$ の任意の元は $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}(D_0)) - \{0\}$ を用いて $(s)_0$ と書ける．$k^* = \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ の分だけ自由度があるから，結局 $|D_0|$ は $(\Gamma(X, \mathcal{L}(D_0)) - \{0\})/k^*$ と同型である．（X の様子を表す divisor から線形空間という比較的わかりやすいものが取り出せた．）Thm5.19 より，$\Gamma(X, \mathcal{L}(D_0)$ は finite dimensional k-vector space であることに

[†1] `http://therisingsea.org/notes/Section2.7-ProjectiveMorphisms.pdf`

注意.

定義 6.1
D :: Weil divisor on X が $D = \sum_{x \in X^{(1)}} n_x \operatorname{cl}_X(x)$ と書けたとする．この時，

$$\operatorname{Supp} D = \bigcup_{x \in X^{(1)}, n_x \neq 0} \operatorname{cl}_X(x) \subseteq X$$

とする．これは閉集合の有限和なので閉集合．$\mathfrak{d}$ :: linear system on X について，$\bigcap_{D \in \mathfrak{d}} \operatorname{Supp} D$ の点を base point と呼び，この集合が空ならば $\mathfrak{d}$ は base point free と呼ばれる．

7 Global (or Relative) Projective Space $\mathbf{Proj}$ (or $\underline{\operatorname{Proj}}$).

■Assumption (†). X :: noetherian scheme, $\mathcal{S}$ :: graded $\mathcal{O}_X$-algebra とする．また，$d \in \mathbb{Z}, d \geq 0$ について，$\mathcal{S}_d$ :: homogeneous part of $\mathcal{S}$ を $U \mapsto \mathcal{S}(U)_d$ で定める．次のように仮定する．

- $\mathcal{S}$ :: quasi-coherent.
- $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_d$.
- $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$.
- $\mathcal{S}_1$ :: coherent $\mathcal{O}_X$-module.
- $\mathcal{S}$ :: locally generated by $\mathcal{S}_1$ as $\mathcal{O}_X$-algebra.

下の二つから，任意の $d \geq 0$ についても $\mathcal{S}_d$ :: coherent であることが分かる．

■Construction of $\mathbf{Proj}$． $X, \mathcal{S}$ を (†) を満たす scheme, graded $\mathcal{O}_X$-algebra とする．任意の affine open subset $U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ をとる．$\mathcal{S}_0(U) = \mathcal{O}_X(U) = A$ に注意する．$\mathcal{S}$ :: quasi-coherent なので，$\mathcal{S}|_U = \tilde{M}$ となる M :: A-algebra が存在する．$D_+(g)$ ($g \in M_+ \otimes A_f = (M \otimes A_f)_+$) での section を見ると，次式の最後の等号が分かる．

$$\operatorname{Proj} \mathcal{S}(U) = \operatorname{Proj} M = \operatorname{Proj} M \otimes_A A = \operatorname{Proj} M \times_{\operatorname{Spec} A} \operatorname{Spec} A.$$

なので，次の fiber product の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
(\operatorname{Proj} \mathcal{S}(U)) \times_U U \arrow[r, "\pi_U"] \arrow[d, "\mathrm{pr}"'] & U \arrow[d, equal] \\
\operatorname{Proj} \mathcal{S}(U) \arrow[r] & U.
\end{tikzcd}$$

このように，$\operatorname{Proj} \mathcal{S}(U) = (\operatorname{Proj} \mathcal{S}(U)) \times_U U$ からの projection map として π_U を定める．$f \in A, U_f = \operatorname{Spec} A_f \subseteq U$ とすると，Thm3.3 の証明より次が得られる．

$$\pi_U^{-1}(U_f) = (\operatorname{Proj} \mathcal{S}(U)) \times_U U_f = \operatorname{Proj} M \otimes A_f = \operatorname{Proj} M_f = \operatorname{Proj} \mathcal{S}(U_f).$$

$\mathcal{S}(U_f) = M_f = \mathcal{S}(U)_f$ に注意．これら (と私が書いた Ex3.1 の解答にある道具たち) を使うと，U, V :: open affine subset in X について $\pi_U^{-1}(U \cap V) \cong \pi_V^{-1}(U \cap V)$ となることがわかる．したがって $\operatorname{Proj} \mathcal{S}(U)$ と π_U の張り合わせが可能であり，こうして $\mathbf{Proj}\,\mathcal{S}, \pi : \mathbf{Proj}\,\mathcal{S} \to X$ が構成できる．$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} \mathcal{S}(U)}(1)$ 達も貼りあわせて，$\mathcal{O}(1)$ を得る．