Ex4.1　Finite Morphism is Proper.

$f : X \to Y$ を finite だとする．Cor4.8f と Ex3.4 より，X, Y が affine scheme である場合について調べれば十分である．

$X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B$ とすると，A :: finitely generated B-module．なので特に X :: Noetherian scheme．任意の R :: valuation ring をとり，$K = \operatorname{Quot} R$ とする．今，以下の可換図式が成り立っているとする．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} A \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] & \operatorname{Spec} B
\end{tikzcd}$$

これに対応して，以下の環の可換図式が成り立つ．Prop2.3 より，二つの可換図式は一対一に対応している．

$$\begin{tikzcd}
K & A \arrow[l, "u"] \\
R \arrow[u, hook] & B \arrow[l, "v"] \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

A :: integral / B から $v(B) \subseteq u(A)$ :: integral ring extension が得られる[†1]．$v(B) \subseteq R$ と合わせて，$u(A)(\subseteq K)$ :: initegral / R．R が付値環であることから，R は K 上整閉．よって $u(A) \subseteq R$．このことから $u : A \to R$ の存在が得られる．さらに，$R \to K$ が単射であることからこのような射はただひとつ．図式の一対一対応から，$\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} A$ の射がただひとつ存在することがわかった．

Ex4.2

U :: dense in X とし，以下の可換図式で f, g :: S-morphism は $f|_U = g|_U$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, hook] & & \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] \arrow[rrd, "g"] & Y \times_S Y \arrow[ld] \arrow[rd] & Y \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[d, equal] \arrow[lld, equal] \\
Y \arrow[r] & S & Y \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$U \to X \to Y = Y \to Y \times_S Y$ とたどると，$\Delta(f(U)) = h(U)$ が得られる．$f(U) \subseteq Y$ から $h(U) \subseteq \Delta(Y)$．さらに次の計算から $h(X) \subseteq \Delta(Y)$ が得られる．

$$h(X) = h(\operatorname{cl}_X(U)) \subseteq \operatorname{cl}_Y(h(U)) \subseteq \operatorname{cl}_Y(\Delta(Y)) = \Delta(Y).$$

最後の等号で Y :: separated / S を用いた．可換図式にある $Y \times_S Y \to Y$ の射を $\operatorname{pr}_1, \operatorname{pr}_2$ とする．$h(X) \subseteq \Delta(Y)$ から以下が得られる．

$$^\forall x \in X,\ \ ^\exists y \in Y,\ \ f(x) = \operatorname{pr}_1 \circ h(x) = \operatorname{pr}_1 \circ \Delta(y) = y = \operatorname{pr}_2 \circ \Delta(y) = \operatorname{pr}_2 \circ h(x) = g(x).$$

よって topological space の射として $f = g$．

さらに scheme の射として $f = g$ であることを示す．

[†1] $a \in A$ をとると，$a^n + \phi(b_{n-1})a^{n-1} + \cdots + \phi(b_0) = 0$ となる $n > 0$ と $b_i \in B$ が存在する．両辺を u で写すと，$u \circ \phi = v$ より $u(a)^n + v(b_{n-1})u(a)^{n-1} + \cdots + v(b_0) = 0$.

主張 Ex4.2.1. V :: open in Y を任意に取る．$\bar{V} = f^{-1}V \cap U = g^{-1}V \cap U (\neq \emptyset)$ とする．任意の $s \in \mathcal{O}_Y(V)$ に対し $s|_{\bar{V}} = 0$ ならば $s = 0$.

$f|_U = g|_U$ から $(f^{\#}(s) - g^{\#}(s))|_{\bar{V}} = 0$ が直ちに得られる．なので，この主張が示されれば $f^{\#}(s) - g^{\#}(s) = 0$ すなわち $f^{\#} = g^{\#}$ が得られる．

(証明). V :: affine の場合に調べれば十分なので $V = \operatorname{Spec} A$ とする．$\mathfrak{p} \in \bar{V}$ を任意に取ると，$s|_{\bar{V}} = 0$ より $s_{\mathfrak{p}} = 0$. これは $s = 0$ in $A_{\mathfrak{p}}$ を意味する．したがって次が成り立つ．

$$^{\exists}t \notin \mathfrak{p}, \quad st = 0 \in \mathfrak{p}.$$

よって $s \in \mathfrak{p}$，$\mathfrak{p} \in V(s)$ となる．$\mathfrak{p} \in \bar{V}$ は任意にとっていたので $\bar{V} \subseteq V(s)$. $\bar{V}$ は $V = \operatorname{Spec} A$ で dense だから，両辺の閉包をとって $V = V(s)$. すなわち $s = 0$. ∎

Ex4.3 X :: Separated over an Affine Scheme S.

S :: affine scheme, X :: separated scheme $/S$, U, V :: affine open subscheme of X とする．以下が fiber product であれば，主張が示せる．

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\Delta"] \\ U \times_S V \arrow[r] & X \times_S X \end{tikzcd}$$

実際，Δ :: closed immersion と Ex3.11a より $U \cap V \to U \times_S V$ は closed immersion. $U \times_S V$ :: affine と Ex3.11b より $U \cap V$ :: affine.

Ex4.4 "The Image of a Proper Scheme is Proper."

Ex4.5 Center of Valuation Ring of K/k.

X :: integral scheme of finite type over a field k, K :: function field of K とする．特に，$f : X \to \operatorname{Spec} k$ が finite type であるとしておく．また，X は finitely generated k-algebra の Spec で被覆されるから Noetherian である．

K/k の valuation ring R が $x \in X$ を center に持つとは，R が $\mathcal{O}_{X,x}$ を dominate するということである．言い換えれば，injection $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow R$ が存在し，これが local ring homomorphism であるということである．

(a) If X :: separated$/k$ then any valuation of K/k has at most one center.

R を K/k の任意の valuation ring とする．以下の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} R \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

まず，f は与えられたものである．$\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} R$ は包含写像 $R \subseteq K$（特に単射）から得られるから，

$$\operatorname{Spec} K \ni (0) \mapsto (0) \in R.$$

$\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} k$ も同様．$\operatorname{Spec} K \to X$ は $(0) \in \operatorname{Spec} K$ を X の generic point ζ に写すものとする．実際にこのような射が存在することは Lemma4.4 による．

X :: Noetherian scheme だから，この時，図式を可換にする $\operatorname{Spec} R \to X$ の射 i が高々一つある (Thm4.3).

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] & \operatorname{Spec} R \arrow[r, "i"] & X \\
(0) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, equal] & (0) \arrow[r, mapsto] & \zeta \arrow[d, equal] \\
(0) \arrow[rr, mapsto] & & \zeta
\end{tikzcd}$$

可換性から，i は $(0) \subseteq R$ を ζ へ写す．Lemma4.4 より，R のもうひとつの点（極大イデアル）x について，R は $\operatorname{cl}_X(\{\zeta\}) = X$ 上の点 $i(x)$ における local ring $\mathcal{O}_{X,i(x)}$ を dominate する．再び Lemma4.4 から，逆に R が $\mathcal{O}_{X,x'}$ を dominate するならば，x を x' に写すことで i が得られる．よって R の center と i は一対一に対応し，たかだか一つしか無い．

(b) If X :: proper/k then any valuation of K/k has just one center.

この場合，f :: finite type かつ X :: Noetherian なので，Thm4.7 が成立する．そして Thm4.7 から i は丁度一つある．ほかは (a) と全く同じ．

(c) The Converses of (a) and (b).

Ex2.7 と Lemma4.4 を使うのだとは思う．

(d) Generalization of ch I, 3.4a.

X :: proper/k かつ k :: algebraically closed とする．この時 $G := \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$ であることを示す．$a \in k \implies a \in G$ ($k \subseteq G$) は明らかなので，$a \notin k \implies a \notin G$ を示せば十分である．そのために，$a \notin k$ かつ $a \in G$ となる元が存在すると仮定しよう．

$k[a^{-1}] \subseteq R \subsetneq K$ なる valuation ring R すべての共通部分は，Thm4.11 より K における整閉包 $\overline{k[a^{-1}]}$ である．下で示すように，これは a を含まない．したがって $a^{-1} \in R, a \notin R$ であるような valuation ring R が存在する．$a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \subseteq K$ だと仮定すると，任意の $x \in X$ について $a \in \mathcal{O}_{X,x}$．よって $\mathcal{O}_{X,x} \subseteq R$ ならば $a, a^{-1} \in R$ となり，これは今示したことに反する．したがって R はいかなる点も center に持たない．これは (b) に反する．

主張 Ex4.5.1.

$$a \in \overline{k[a^{-1}]} \implies a, a^{-1} \in \bar{k}.$$

(証明)．$a \in K - \{0\}$ が $k[a^{-1}]$ 上整ならば，以下のような零でない多項式 $f \in k[X, X^{-1}]$ が存在する．

$$f(X) = X^d + c_{d-1}(X^{-1})X^{d-1} + \cdots + c_0(X^{-1}) \neq 0, \quad f(a) = 0.$$

f に $X^{-d} \in k[X, X^{-1}]$ をかける．

$$X^{-d}f(X) = 1 + c_{d-1}(X^{-1})X^{-1} + \cdots + c_0(X^{-1})(X^{-1})^d \neq 0, \quad (X^{-d}f)(a) = a^{-d}f(a) = 0.$$

したがって，$f'(a^{-1}) = 0$ を満たす零でない多項式 $f' = X^d f(X^{-1}) \in k[X]$ が存在する．すなわち a^{-1} は k 上代数的である．よって $a^{-1} \in \bar{k}$．$a \neq 0$ だから $a, a^{-1} \in \bar{k}$．これは矛盾． ∎

Another Proof of (d).

$G := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ が k の代数的拡大体であることを示す．$a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = G$ を任意に取る．すると任意の点 x について $a \in \mathcal{O}_{X,x}$．また，K/k の任意の valuation ring R は Ex4.5b より少なくとも 1 点 x について $a \in \mathcal{O}_{X,x} \subseteq R$ となる．

$a \in G - \{0\}$ をとる．すると $k[a^{-1}] \subseteq K$．今見たように K/k の任意の valuation ring は a を含むから，$a \in \overline{k[a^{-1}]}$．主張から $a, a^{-1} \in \bar{k}$ が得られる．よって $G \subseteq \bar{k}$.

Ex4.6 f :: proper morphism of affine varieties/k. Then f :: finite.

$f : X \to Y$ を考える．X, Y :: affine variety / k より，X, Y は A, B :: affine domain / k を用いて $X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B$ と書ける．f から誘導される環準同型を $\phi : B \to A$ とする．A, B :: affine domain / k から特に X, Y は Noetherian である．また，f :: finite type より A :: finitely generated B-algebra．よって，f :: finite であるためには ϕ :: integral すなわち A :: integral / $\phi(B)$ を示せば十分である．

$K = \operatorname{Quot}(\phi(B))$ とし，R を $\phi(B) \subseteq R \subset K$ であるような任意の valuation ring とする．Thm4.7 から以下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
K & A \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
R \arrow[u, hook] & B \arrow[l] \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

$A \to R \to K = A \to K$ かつ右辺が埋め込みであることから $A \to R$ は埋め込みである．すなわち $(\phi(B) \subseteq) A \subseteq R$．$R$ のとり方と Thm4.11 より，$A \subseteq \overline{\phi(B)}$．よって A :: integral / $\phi(B)$.

Ex4.7 Schemes Over $\mathbb{R}$

Ex4.8 Let $\wp$ :: Property of Morphisms of Schemes

Ex4.9 Composition of Projective Morphisms is Projective

Ex4.10 Chow's Lemma.

Ex4.11 Descrite Valuative Criteria of Separatedness and Properness.

Ex4.12 Examples of Valuation Rings.

(a) If K/k :: function field of dim$=1$, then every valuation ring of K/k is discrete.

K に対応する nonsingular projective curve を $\tilde{C}$(cf. ch I, Cor6.12) とし，$C = t(\tilde{C})$ を C に対応する scheme とする (Prop 2.6)．これは projective integral scheme/k，特に proper & integral scheme of finite type /k（Prop4.10)．C 上の irreducible closed subset は C と closed point しか無いから，C の点は ζ :: generic point と closed point しかない．

主張 **Ex4.12.1** (claim 1)**.** $K = \mathcal{O}_{C,\zeta} = K(\tilde{C})$.

(証明)．Prop2.6 の証明を見ると，$\mathcal{O}_C$ は sheaf of regular functions on $\tilde{C}$ である．なので $K(\tilde{C}), \mathcal{O}_{C,\zeta}$

の定義から両者は一致する． ∎

主張 Ex4.12.2 (claim 2)**.** $x \in C$ :: closed point について $\mathcal{O}_{C,x}$ :: DVR.

(証明). $\mathcal{O}_C$ :: sheaf of regular functions on $\tilde{C}$ から，$\mathcal{O}_{C,x} = \mathcal{O}_{\tilde{C},x}$．これが DVR であることは ch I, Prop6.7 の証明中程にもあるし，ch I, Thm6.2 と Dedekind domain の定義の下の文からも分かる． ∎

K/k の（K ではない）任意の valuation ring R を考える．C :: proper & integral scheme of finite type $/k$，Ex4.5b と claim 1 より，R が $\mathcal{O}_{C,x}$ を dominate するような点 $x \in C$ が一つあることが言える．$\mathcal{O}_{C,x} \subseteq R \neq K$ から，x :: closed point．さらに claim 2 から，R は少なくとも一つの DVR を dominate すると言える．valuation ring の極大性から $\mathcal{O}_{C,x} = R$ :: DVR.

Another Proof of (a).

R を K/k の valuation ring とする．R の任意の元が k 上代数的ならば R は（k の代数的拡大）体となるから，R は k 上超越的な元 t を持つ．

$A := k[t]$ は integral domain で，なおかつ $\mathrm{Quot}(A) \subseteq K$．なので A の K での整閉包 A' をとると，ch I, Thm3.9 より，A' は finitely generated k-algebra．$A \subseteq A'$ が integral ring extension で $\dim A = 1$ だから $\dim A' = 1$．したがって A' は Dedekind domain である．

今，$A' \subseteq R$ となっている．これは integral ring extension（示す必要がある）．R の極大イデアル $\mathfrak{m}_R$ の contruction $\mathfrak{m}_{A'} = \mathfrak{m}_R \cap A'$ をとると，Ati-Mac Cor5.8 より，$\mathfrak{m}_{A'}$ は A' の極大イデアル．したがって A' を $\mathfrak{m}_{A'}$ で局所化すると，ch I, §6 の Dedekind domain の定義 (p.40) の下にある注意から，DVR が得られる．しかも $A'_{\mathfrak{m}_{A'}} \subseteq R$ かつ $\mathfrak{m}_{A'} = \mathfrak{m}_R \cap A'$ から，R は $A'_{\mathfrak{m}_{A'}}$ を dominant する．valuation ring は dominating に関しての極大元だから，$R = A'_{\mathfrak{m}_{A'}}$ :: DVR.