ゼミノート #3
Stable Curves

七条彰紀

2018 年 6 月 14 日

[4] 2.C,D を中心に stable curve について記述する．以下で曲線は全て **arithmetic genus** が 2 以上であるものとする．これは特異曲線を扱うために arithmetic genus を用い，自己同型群が有限であるために ≥ 2 とする．

1 Motivation: To Get Modular Compactification of $\mathcal{M}_g$.

G.I.T. によって $\mathcal{M}_g$ を得る方法では，Hilbert scheme $\mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}$[†1]の開集合 K を用いて $\mathcal{M}_g = K/PGL(N+1,\mathbb{C})$ として $\mathcal{M}_g$ を得た．

そこで compactification of $\mathcal{M}_g$（ここでは $\mathcal{M}_g$ を開集合として含む projetive scheme over $\mathbb{Z}$）を得る方法として，K の $\mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}$ での閉包を取って $PGL_{N+1}(\mathbb{C})$ で割る，ということが思いつく．しかしこれでは moduli space が得られない．moduli space を得るためには，K を含む集合 $\tilde{K}$ の商 $\tilde{K}/PGL_{N+1}(\mathbb{C})$ をとらなくてはならない．これらの包含関係は $K \subset \tilde{K} \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{H}}(K)$ となる．

$\bar{K}$ でなく $\tilde{K}$，という制限が必要な理由は次のように説明される: 次のような $(s:t) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{(0:1),(1:0)\} =: B$ でパラメトライズされる family of smooth curves を考える．

$$C_{(a,b)} : s^3y^2z = s^3x^3 - st^2axz - t^3bz^3 \quad \text{where} \quad a,b \in \mathbb{C}, (s:t) \neq (0:1),(1:0)$$

j-invariant を計算すると，これは fiberwise trivial family（session1A2A 参照）になっている．また，この曲線族 $C_{(a,b)}$ は a,b の値を変えることで任意の楕円曲線を含むものに成る．今 family :: $C_{(a,b)} \to B$ があるから，coarse moduli space の定義より，morphism :: $\phi\colon B \to \overline{\mathcal{M}}_g$ が存在する．今，$\overline{\mathcal{M}}_g$ は projective (over $\mathbb{Z}$) であるから，proper ([2] Thm II.4.9)．なので $B = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{(0:1),(1:0)\} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ は $\bar{\phi} : \mathbb{P}^1 \to \overline{\mathcal{M}}_g$ へ拡張される[†2]．そこで $\bar{\phi}$ の $(s:t) = (1:0)$ における fiber を考えると，明らかにこれは cuspidal curve :: $y^2z = x^3$ である．これは rational curve であり，他の fiber と同型でない．他の fiber は全て同型であったから，この family では jamp phenomenon が発生している．したがって moduli space を得るためには，cuspidal curve に対応する点を K に（そして $\mathcal{M}_g$ に）付け加えてはならない．この意味で cuspidal curve は楕円曲線の “bad degeneration”と呼べる．

---

†1 $N = (2n-1)(g-1) - 1$.

†2 証明の概略: criterion of properness を用いて $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,\zeta} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ を $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,t} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ に拡張し，これらが ϕ と貼り合わせられることを射の一意性から述べる．https://math.stackexchange.com/questions/1540201, http://lovelylittlelemmas.rjprojects.net/properness-and-completeness-of-curves/ を参照のこと．

では jump phenomenon が発生しないような “good degeneration” は何か，というと，これが stable curve である．Deligne と Mumford が stable curve を定義し，研究した．

3A, 4A

2 Definition.

定義 2.1 (Stable Curve)
stable curve of genus g とは，以下を満たす曲線（reduced scheme of pure dimension 1 of finite type over $\mathbb{C}$）である．

1. 完備 (=proper),
2. 連結,
3. （存在すれば）特異点は通常 2 重点 (node) のみ[†3],
4. 自己同型群が有限位数.
5. arithmetic genus が g.

注意 2.2
Hurwitz's automorphisms theorem から，connected proper smooth curve of genus $g \geq 2$ は全て stable curve である．

まったく同様に stable n-pointed curve も定義できる．

定義 2.3
stable n-pointed curve とは，以下を満たす曲線 C（reduced scheme of pure dimension 1 of finite type over $\mathbb{C}$）と，C のなめらかな n 点 $p_1, \ldots, p_n$ の組 $(C, p_1, \ldots, p_n)$ のことである．

1. 完備 (=proper),
2. 連結,
3. （存在すれば）特異点は通常 2 重点 (node) のみ,
4. 自己同型群が有限位数,
5. arithmetic genus が g.

ただし $(C, p_1, \ldots, p_n)$ の自己同型とは，$\sigma(p_i) = p_i$ を満たすような自己同型 $\sigma : C \to C$ のことである．

関連して semi-stable (pointed) curve と unstable (pointed) curve の概念がある．これは「自己同型群が有限群」であるという条件をゆるめたもので，「自己同型群が簡約群 (reductive group)」とする．reductive group は G.I.T. の文脈で現れる概念である．

自己同型に関する条件は以下のように言い換えることが出来る．

命題 2.4
stable curve の定義は，「自己同型群が有限位数.」を以下のように書き換えたものと同値: E を C の smooth rational irreducible component とする．この時，E と E 以外の部分 $(= \mathrm{cl}_C(C - E) =: R)$ の交点は 3 つ

[†3] node とは，$xy = 0$ の原点と analytically isomorphic である点．

以上．

参考: https://math.stackexchange.com/questions/248722, [3] Thm27.4.

証明は 3 つの命題に分けられる．

主張 2.5

C :: stable curve of genus $g \geq 2$ とする．$\mathrm{Aut}(C)$ の部分群 G を，C の singular point を固定し，C の各 irreducible component を集合として保つ元が成すものとする．G が有限群であるならば $\mathrm{Aut}(C)$ は有限群である．

(証明)．正規部分群の定義から，G は $\mathrm{Aut}(C)$ の正規部分群である (TODO: 詳細に)．$\mathrm{Aut}(C)/G$ は，G の定義から singular point 同士，irreducible component 同士を交換する群である．C は Noetherian だから irreducible component は有限個しか無い．singular point 全体も曲線の閉集合 ([2] Cor II.8.16) であるから有限個．よって仮定から $G, \mathrm{Aut}(C)/G$ は有限群なので $\mathrm{Aut}(C)$ も有限群． ∎

主張 2.6

genus formula を考えると，stable curve of genus $g \geq 2$ の irreducible component の種類は以下の他は smooth rational curve のみである．

(1) curve at worst nordal of genus $g \geq 2$.
(2) curve of genus 1 minus one point.
(3) nordal curve of genus 0 minus one point.

C をこのリストのいずれかとする．この時 $\#\,\mathrm{Aut}(C) < \infty$.

(証明)．(1) については Hurwitz's automorphism theorem として知られている． ∎

(命題 (2.4) の証明). E は smooth proper curve であって $\mathbb{P}^1$ と birational equivalent であるもの．なので $\mathbb{P}^1$ と同型である ([2] Thm6.9).

$r = \#(R \cap E)$ とし，$\mathbb{P}^1$ の自己同型のうち互いに異なる r 点を固定するものを考える．これは $PGL(2, \mathbb{C})$ の元のうち，対応する点を固有ベクトルにもつものである．このようなものは $r < 3$ の時無数に存在し，$r \geq 3$ ならば有限個しか存在しない．

$r < 3$ とする．$E \cap R$ を固定する E の自己同型は，id_R と貼り合わせることで C 全体の自己同型へ拡張できる．こうして $\mathbb{P}^1$ の互いに異なる r 点を固定する自己同型から，C の自己同型が作れた．したがって C の自己同型は $r < 3$ の時，無数に存在する．

$r \geq 3$ であるとする．C の irreducible component は C :: Noetherian ゆえに有限個であり，前の主張と上での議論から，各 component は有限個の自己同型しか持たない．C 全体の自己同型は高々これら部分ごとの自己同型の貼り合わせであるから†4，有限個しかない． ∎

semi-stable は「交点が 2 つ以上」と書き換えたものと同値である．

†4 部分ごとの自己同型の全ての組み合わせが貼り合わせられるわけではないので，C 全体の自己同型の個数は，部分ごとの自己同型の個数の積 $(= \prod \#\,\mathrm{Aut}(C_i))$ よりも少ない．

3 Example

例 3.1
次の $\mathbb{A}^1$ 上の family を考える．

$$C_t : y^2 z = x(x-1)(x-t) \quad \text{where} \quad t \in \mathbb{A}^1.$$

$t \neq 0, 1$ の時，C_t は楕円曲線である．また，任意の $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線はこの family のいずれかの fiber と同型である．すなわち，fiberwise trivial family ではない．そして $t = 0, 1$ の時 C_t は stable curve となっている．（plot するときは $y \mapsto iy$ と線形変換したほうが node が見やすい．）

4 $\Delta = \overline{\mathcal{M}}_g - \mathcal{M}_g$

node を δ 個持つ stable curve が成す locus を考える．

主張 4.1
node を δ 個持つ stable curve が成す locus を $N_\delta \subset \bar{\mathcal{M}}_g$ とする．この時，

$$\dim N_\delta = 3g - 3 - \delta \quad (\implies \operatorname{codim} N_\delta = \delta).$$

また，$\mathrm{cl}_{\bar{\mathcal{M}}_g}(N_\delta)$ は node を δ 個以上持つ stable curve が成す locus に一致する．

このことは [4] Thm3.150 直後の段落でも触れられている．

node を 1 個以上持つ curve の locus :: $\Delta = \overline{\mathcal{M}}_g - \mathcal{M}_g$ は，$\mathcal{M}_g$ が $\overline{\mathcal{M}}_g$ の開集合であるから，これは closed in $\overline{\mathcal{M}}_g$．上の主張から，Δ は node を丁度 1 つ持つ curve の locus の closure である．そこで Δ_0 と Δ_i $(i = 1, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor)$ を次のように定める．

- $\Delta_0 = \mathrm{cl}_{\overline{\mathcal{M}}_g}(\{[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g \mid C :: \text{ irreducible curve with 1 node }\})$.
- $\Delta_0 = \mathrm{cl}_{\overline{\mathcal{M}}_g}(\{[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g \mid C :: \text{ union of two smooth curves of genus } i \text{ and } g-i\text{, meeting at 1 pt }\})$ for $i = 1, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor$.

注意 4.2
命題 (2.4) から，“union of two smooth curves of genus 0 and g, meeting at 1 pt”は stable curve ではない．なので Δ_0 は smooth rational irreducible component を持たず，node をただひとつ持つ曲線に対応する点の集合の閉包として定義されている．

$\Delta_0, \ldots, \Delta_{\lfloor g/2 \rfloor}$ は irreducible である．これは以下のように証明する．まず Δ_0 を考える．C :: irreducible curve with 1 node とする．これの normalization を $\tilde{C}$ とすると，C の node は $\tilde{C}$ の 2 点に対応する．そこで $\tilde{C}$ とこの 2 点を組にして $\mathcal{M}_{g-1,2}$ の点とする．こうして $\phi_0 : \mathcal{M}_{g-1,2} \to \Delta_0$ が得られる．Δ_i $(i > 0)$ の場合，C の normalization は genus i, genus $g-i$ の component からなる．交点に対応する点をそれぞれ一つずつ持つから，これを distinguished point として $\phi_i : \mathcal{M}_{i,1} \times_k \mathcal{M}_{g-i,1} \to \Delta_i$ が得られる．こうして得られる $\phi_0, \ldots, \phi_{\lfloor g/2 \rfloor}$ は連続である (FACT).

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ は irreducible である (Thm2.15)．したがってその開集合 $\mathcal{M}_{g,n}$ も irreducible である（Δ :: closed より）．$\mathcal{M}_{g,n}$ は代数閉体上の scheme（実際には variety, Thm2.15）なので，これらの fiber product も

irreducible．連続写像で写す操作と閉包をとる操作で irreducibility が保たれるので，$\Delta_i = \mathrm{cl}(\mathrm{im}\,\phi_i)$ $(i = 0, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor)$ は irreducible である．

5 (Semi-)Stable Reduction.

これは [4] 3.C で詳しく扱う．個人的な意見で有るが，moduli 問題において stable curve の最も重要な特徴は，次の定理が成立することである．

定理 5.1 (Deligne–Mumford Stable Reduction [6])
B :: smooth curve, $0 \in B$ :: closed point, $B^* := B - \{0\}$ とする．さらに $X \to B^*$ :: flat family of stable (resp.semi-stable) curves of arithmetic genus $g \geq 2$ とする．この時，branched cover which totally ramified over 0 :: $B' \to B$ が存在し，$X \times_{B^*} B'$ を stable family :: $X' \to B'$ へ拡張することが出来る．この拡張で得られる X'_0 は $B' \to B$ と $X \times B'$ の拡張に依らず，同型を除いて一意である．

参考文献として他に [1] を挙げる．

6 Genus Formula

命題 6.1
C :: connected nordal curve of genus g とし，以下のように置く．

- $P_1, \ldots, P_\delta \in C$ :: nodes of C,
- $C_1, \ldots, C_\nu$ :: irreducible components of C,
- g_i :: genus of C_i for $i = 1, \ldots, \nu$.

この時，以下の等式が成立する．

$$g = \sum_{i=1}^{\nu} g_i - \nu + \delta + 1 = \sum_{i=1}^{\nu} (g_i - 1) + \delta + 1.$$

(証明)．$C, C_1, \ldots, C_\nu$ の normalization をそれぞれ $\tilde{C}, \tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_i$ とする．このとき $\mathcal{O}_{\tilde{C}} = \sum_i \mathcal{O}_{\tilde{C}_i}$．また，$\pi : \tilde{C} \to C$ を自然な射影とする．π の定義から，$\pi^\# : \mathcal{O}_C \to \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ は単射かつ finite [†5]．よって次の SES が存在する．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{\pi^\#} \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}} \longrightarrow (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}})/\mathcal{O}_C \longrightarrow 0.$$

点 P での $\mathbb{C}$ の skyscraper sheaf を $\mathbb{C}_P$ と書くことにする．$(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}})/\mathcal{O}_C \cong \prod_{i=1}^{\delta} \mathbb{C}_{P_i}$ を認めると，以下の LES が得られる．

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_C) \longrightarrow H^0(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \longrightarrow H^0(\textstyle\sum \mathbb{C}_{P_i})$$

$$\longrightarrow H^1(\mathcal{O}_C) \longrightarrow H^1(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}) \longrightarrow H^1(\textstyle\sum \mathbb{C}_{P_i}) \longrightarrow 0.$$

[†5] C の affine open subset 毎に包含写像から誘導される射 $\mathrm{Spec}\,\tilde{A} \to \mathrm{Spec}\,A$ が存在するので，π はこれらの射の張り合わせとして定義されている．finite morphism であることは finiteness of integral closure から来る．ref. [2] Ex II.3.8.

$H^j(C,\mathcal{F})$ は $H^j(\mathcal{F})$ と略した．$\dim_{\mathbb{C}}$ が additive function であることから，次が得られる．

$$h^0(\mathcal{O}_C)+h^0(\sum\mathbb{C}_{P_i})+h^1(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})=h^0(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})+h^1(\mathcal{O}_C)+h^1(\sum\mathbb{C}_{P_i})$$

π :: finite morphism であるから，[2] Ex III.4.1 より $H^i(C,\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})\cong H^i(\tilde{C},\mathcal{O}_{\tilde{C}})$．$\tilde{C}$ の connected component は C の irreducible component と birational equivalent であるから，$h^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}})=\nu$．まとめて次のように成る．

$$\begin{aligned}h^0(\mathcal{O}_C)+h^0(\prod\mathbb{C}_{P_i})+h^1(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})=&h^0(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})+h^1(\mathcal{O}_C)+h^1(\prod\mathbb{C}_{P_i})\\h^0(\mathcal{O}_C)+\prod h^0(\mathbb{C}_{P_i})+h^1(\mathcal{O}_{\tilde{C}})=&h^0(\mathcal{O}_{\tilde{C}})+h^1(\mathcal{O}_C)+h^1(\prod\mathbb{C}_{P_i})\\1+\delta+\sum g_i=&\nu+g+0\end{aligned}$$

X,Y :: disjoint schemes ならば $H^i(X\sqcup Y)\cong H^i(X)\oplus H^i(Y)$ であることに注意．

最後に $(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})/\mathcal{O}_C\cong\prod_{i=1}^{\delta}\mathbb{C}_{P_i}$ を示す．各点 $P\in C$ における $(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})/\mathcal{O}_C$ の stalk を見る．私のノート Hartshorne_AG_Ch2/section6_ex.pdf [†6] にある Ex6.9(a) の解答から，stalk は $\tilde{\mathcal{O}}_{C,P}/\mathcal{O}_{C,P}$．よって $\mathrm{Supp}(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})/\mathcal{O}_C=\mathrm{Sing}\,C$ であり，これは曲線の閉集合なので有限集合．したがって[†7]

$$(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{C}})/\mathcal{O}_C\cong\prod_{i=1}^{\delta}\tilde{\mathcal{O}}_{C,P_i}/\mathcal{O}_{C,P_i}.$$

$\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathcal{O}}_{P_i}/\mathcal{O}_{P_i})$ は analytic isomorphic についての不変量だから (TODO, cf. [2] Ex IV.1.8c)，$\mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[x,y]/(xy)$ の原点について計算することで，$\dim_{\mathbb{C}}(\tilde{\mathcal{O}}_{P_i}/\mathcal{O}_{P_i})=1$ を得る．よって所望の同型を得る． ∎

7 Dualizing Sheaf

7.1 Definitions

定義 7.1 (Dualizing Sheaf of Curve, implicit)
X :: proper scheme of dimension n over a field k とする．ω_X° :: dualizing sheaf for X とは，以下の条件を満たす trace morphism :: $t_X:H^n(X,\omega_X^\circ)\to k$ を備える sheaf on X のことである: 任意の coherent sheaf $\mathcal{F}$ について，以下は同型である．

$$\begin{array}{cccc}(t_X\circ): & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(F,\omega_X^\circ) & \to & H^n(X,\mathcal{F})\\ & \phi & \mapsto & t_X\circ\phi\end{array}$$

注意 7.2
定義の仕方から，ω_X° は次のようにも定義できる．すなわち，ω_X° は $\mathcal{F}\mapsto H^n(X,\mathcal{F})^*$ という関手の representation である．

定義 7.3 (Dualizing Sheaf of Curve, explicit, [7])
C :: stable curve (over $\mathbb{C}$), L :: function field of C, $\Omega_{K/\mathbb{C}}$ :: the module of differentioals of C over $\mathbb{C}$. $v:\tilde{C}\to C$ を normalization とする．

†6 https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section6_ex.pdf
†7 射を $\langle U,s\rangle\mapsto(s_x)_{x\in U}$ で作り，これの stalk が isomorphism であることから同型を示す ([2] PropII.1.1).

ω_C° とは，C の開集合 U に対して次のように定められる sheaf on C である．

$$\omega_C^\circ(U) = \left\{\omega \in \Omega_{L/\mathbb{C}} \;\middle|\; {}^\forall x \in U,\ \ {}^\forall f \in \mathcal{O}_{C,x},\quad \mathrm{res}_x(v_x^\#(f)\cdot\omega) = 0.\right\}$$

ここで $\mathrm{res}_x = \sum_{y\in v^{-1}(x)} \mathrm{res}_y$ とおいた．C :: at-worst-nordal curve であるから，$v^{-1}(P)$ は高々 2 点集合である．

注意 7.4
[4] 3.A においては $\omega_C^\circ(U)$ は以下のように定義されている．

$$\omega_C^\circ(U) = \left\{\eta \in (v_*\Omega_{C/\mathbb{C}}) \;\middle|\; {}^\forall x \in U \cap \operatorname{Sing} C,\quad \mathrm{res}_x(\eta) = 0.\right\}$$

res_x の定義は上と同じである．

ω_X° の明示的な定義は次を参照しても良い: Matthew Morrow “An explicit approach to residues on and dualizing sheaves of arithmetic surfaces” †8

定義 7.5 (Divisor of Singular Curve, and $\deg D, l(D)$)
C :: projective (abstruct) variety of dimention 1 over an algebraically closed field $\mathbb{C}$ とする．C の regular point 全体を $\operatorname{Reg} C$ とする．($\operatorname{Reg} C$ は Cor II.8.16 (or Thm I.5.3) から open dense subset.)

C の divisor とは，$\operatorname{Reg} C$ の Weil divisor

$$\sum_{i=1}^{r} n_i P_i \qquad (n_i \in \mathbb{Z}, P_i \in \operatorname{Reg} C)$$

のこと．divisor :: $D = \sum_{i=1}^r n_i P_i$ に対して，$\deg D, l(D)$ は通常の divisor と同様に定める．

$$\deg D = \sum_i n_i, \qquad l(D) = h^0(C, \mathcal{L}(D)).$$

$\dim_{\mathbb{C}} H^i(-,-)$ は $h^i(-,-)$ と略した．

定義 7.6 (Canonical Divisor of Singular Curves)
C を定義 (7.5) と同様にする．この時 [2] III.7.11 より ω_C° :: invertible sheaf なので，ω_C° に対応する divisor（参考: [2] II.6）が存在する．これを K (or K_C) と書き，C の canonical divisor と呼ぶ．

7.2 Key Propositions

定理 7.7
X :: projective Cohen-Macaulay (in paticular, locally complete intersection) scheme of equidimention n over an algebraically closed field k とする．この時，lcally free sheaf :: $\mathcal{F}$ について次が成立する．

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^\circ).$$

定理 7.8 (Riemann-Roch for Singular Curves, [2] Ex IV.1.9)
C :: integral projective scheme of dimension 1 over a algebraically closed field $\mathbb{C}$ (特に irreducible stable curve) とする．C の divisor :: C について，次の等式が成立する．

$$l(D) - l(K - D) = \deg D + 1 - g.$$

†8 https://arxiv.org/abs/0911.0590v2

g は C の arithmetic genus である．

証明はしばらく後で示す．

補題 7.9
C :: stable curve （より一般に nordal curve）とする．この時 C は locally complete intersection である．

(証明). locally complete intersection であるとは，各点 $P \in C$ について $\mathcal{O}_{C,P}$ が complete intersection ring であること．P :: smooth point ならば $\mathcal{O}_{C,P}$ :: regular local ring であり，したがって complete intersection ring なので，P は node とする．

今，C :: finite type over $\mathbb{C}$ であるから，$\mathcal{O}_{C,P}$ は noetherian local ring. なのでこの条件は完備化 $(\mathcal{O}_{C,P})\hat{}$ が complete intersection ring であることと同値 ([5] Thm21.2 (i))．P は node としたから，

$$(\mathcal{O}_{C,P})\hat{} \cong \mathbb{C}[[x,y]]/(xy).$$

xy は $k[[x,y]]$-regular (i.e. not zero-divisor in $k[[x,y]]$) であるから，右辺は complete intersection ring ([5] Thm21.2 (ii))．よって主張が示された．∎

命題 7.10
C :: stable curve, ω_C° :: dual sheaf of C とする．

(i) ω_C° :: invertible sheaf.
(ii) $h^0(C, \omega_C^\circ) = g$.
(iii) $\deg \omega_C^\circ = 2g-2$.
(iv) For $g \geq 2, n \geq 2$, $H^0(C, (\omega_C^\circ)^{\otimes n}) = (2n-1)(g-1)$.
(v) For $g \geq 2, n \geq 3$, $(\omega_C^\circ)^{\otimes n}$ :: very ample.

(証明). (i) canonical divisor の定義で触れた．[2] III.7.11 に証明がある．
(ii) The Serre duality (7.7) から $h^0(C, \omega_C^\circ) = h^1(C, \mathcal{O}_C) = g$.
(iii) (7.8) において $D = K$ とし，$l(0) = 1, l(K) = h^0(C, \omega_C^\circ) = g$ を用いれば良い．
(iv) $D = nK$ とすると，これは non-special (ref. [2] Example IV.1.3.4)，すなわち $l(K-D) = 0$．(7.8) においてこのことと $\deg(nK) = n \deg K$ を用いれば良い．また，(7.7) より

$$H^1(C, (\omega_C^\circ)^{\otimes n}) \cong H^0(C, (\omega_C^\circ)^{\otimes 1-n})$$

なので，$n \geq 2$ の時 $H^1(C, (\omega_C^\circ)^{\otimes n}) = 0$ も成立する．
(v) [2] Cor IV.3.2 [†9] から，nK :: very ample は $\deg nK \geq 2g+1$ と同値．$g \geq 2, n \geq 3$ なので成立する．∎

7.3 Proof of Thm (7.8)

(証明). ∎

proof of [2] Ex IV.1.8c

[†9] 定理は nonsingular curve を仮定しているが，証明では [2] II.7 の結果と (7.8) の等式しか使っていない．なのでこの仮定は stable curve に弱められる．

参考文献

[1] Sebastian Casalaina-Martin. *A tour of stable reduction with applications (v2)*. 2013. `https://arxiv.org/abs/1207.1048v2`.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[3] Robin Hartshorne. *Deformation Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2010 edition, 12 2009.

[4] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[5] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge University Press, revised edition, 5 1989.

[6] David Mumford Pierre Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.

[7] Jean-Pierre Serre. *Singular Algebraic Curves*, pp. 58–73. Springer New York, New York, NY, 1988.