

正標数の環における導分

七条 彰紀

2017 年 10 月 20 日

定義 0.1 (Derivation, k -Derivation.)

$A :: \text{ring}, M :: \text{module}$ とする. 任意の $a, b \in A$ に対して次を満たす写像 $D : A \rightarrow M$ を derivation とよぶ.

- (i) $D(a + b) = D(a) + D(b)$.
- (ii) $D(ab) = D(a) \cdot b + a \cdot D(b)$.

(ii) は Leibniz Formula (or Rule) と呼ばれる. 以下, 必要に応じて $D(a)$ を Da と表記する.

準同型 $f : k \rightarrow A$ によって A を k -module とみなせる時, $D \circ f = 0$ を満たす derivation D を k -derivation と呼ぶ.

$\text{Der}(A, M)$ で $A \rightarrow M$ の derivation 全体を表す. $\text{Der}(A, A)$ は $\text{Der}(A)$ と略す. $\text{Der}_k(A, M)$ で $A \rightarrow M$ の k -derivation 全体を表す. $\text{Der}_k(A, A)$ は $\text{Der}_k(A)$ と略す.

$\text{Der}(A, M), \text{Der}_k(A, M)$ が A -module になることは明らか. $a \in A, n \geq 0$ について $Da^n = na^{n-1}Da$ が成り立つことは帰納法を用いて簡単に示せる.

次が成り立つ.

命題 0.2

$A :: \text{ring}, D \in \text{Der}(A), a, b \in A, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

$$D^n(ab) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (D^i a)(D^{n-i} b).$$

ただし $D^0 = \text{id}_A$ とする.

証明は n についての帰納法に拠る.

今, $A :: \text{ring}$ が正標数 $c > 0$ ^{†1} を持つとしよう. c が素数ならば, $\binom{c}{i}$ は $i = 1, \dots, c-1$ について c の倍数であるから, 次が成り立つ.

$$D^c(ab) = (D^c a) \cdot b + a \cdot (D^c b). \quad (*)$$

すなわち, $D^c \in \text{Der}(A)$ となる.

一方, c が素数でない, すなわち合成数でない時には $(*)$ が成り立たないことがある.

例 0.3

$A = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[x], D = x \frac{d}{dx}$ とする. この場合, A の標数は 4. ただし $\frac{d}{dx}$ は x についての通常の微分であ

^{†1} $f : \mathbb{Z} \rightarrow A$ を唯一の写像 $1_{\mathbb{Z}} \mapsto 1_A$ とすると, $f^{-1}((0)) = \ker f \subseteq \mathbb{Z}$ は \mathbb{Z} のイデアルであり, したがって $\ker f = (c)$ となる $c \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する. この c を A の標数と呼ぶ.

り, 明示すれば $\frac{d}{dx}x = 1, \frac{d}{dx}1 = 0$ を満たす. $\frac{d}{dx} \in \text{Der}(A)$ と $\text{Der}(A) \ni A\text{-module より } D \in \text{Der}(A)$. $Dx = x \cdot 1 = x$ だから, $D^4(x^2)$ は次のように成る.

$$D^4(x^2) = D^3(D(x^2)) = D^3(2x^{2-1}(Dx)) = D^3(2x^2) = \cdots = 2^4x^2 = 0.$$

一方, $D^4(x^2) = D^4(x \cdot x)$ と考えて (*) の右辺を計算すると, 次のよう.

$$(D^4x) \cdot x + x \cdot (D^4x) = 2x^2 \neq 0.$$

なので (*) は成立しない.

例 0.4

文字 c を導入して一般化を試みる. $A = (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})[x], D = x \frac{d}{dx}$ とする.

$$D^c(x^2) = 2^c x^2, \quad 2x^2 = D^c(x) \cdot x + x \cdot D^c(x).$$

この二つはほとんどの c で異なり, そのとき (*) の反例と成る.

しかし, よく知られている通り, Fermat の小定理の逆には反例が存在する. なので, ここで与えた例は, 例えば c が Carmichael 数 (561, 1105, 1729, 2465, 2821, ...) である場合についての (*) の反例にならない.

さて, 他に上の例が (*) の反例にならない c がないか探してみると, $c = 341 (= 11 \cdot 31), 645, 1387, 1905, 2047$ でも反例にならない. これらについては次の方法で反例が作れる.

例 0.5

c に加えて文字 a, b を加えて更に一般化する. $A = (\mathbb{Z}/c\mathbb{Z})[x], D = x \frac{d}{dx}$ とする. ある $a, b > 0$ について $(a+b)^c \neq a^c + b^c$ である (したがって c は Carmichael 数でない) としよう. この時, (*) の反例がある:

$$D^c(x^a \cdot x^b) = (a+b)^c x^{a+b} \neq (a^c + b^c) x^{a+b} = D^c(x^a) \cdot x^b + x^a \cdot D^c(x^b).$$

標数 c が Carmichael 数ならば常に (*) が成り立つ可能性もあるが, それは Future Work としよう.

標数 c が合成数であっても (*) が成り立つのはどんな場合か, という問に対しては次がひとつの答えを与える.

命題 0.6

$A, k \ni \text{ring}, D \in \text{Der}_k(A)$ とする. A の標数 c は合成数であるとする. A は次を満たすとする.

- (1) A の任意の元が $G \subseteq A$ の元の積の k 線型結合として書ける.
- (2) G の任意の元 g について $D^2g = 0$.

この時, $D^c = 0$. したがって任意の $a, b \in A$ について (*) の等号が成り立つ.

この命題の仮定のうち, 条件 (2) 以外は次のような環で成り立つ: k 上の多項式環・形式的ベキ級数環, 及びその剰余環, k の元による局所化, テンソル積, 直積.

これは次の補題から得られる.

補題 0.7

$A, k \ni \text{ring}, D \in \text{Der}_k(A)$ とする. $x \in A$ と $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について, 次が成り立つ.

$$D^k x^n = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} n^{i+1} x^{n-(i+1)} (Dx)^i (D^{k-i} x).$$

ここで $n^{\underline{i+1}} = n(n-1)\cdots(n-(i+1)+1)$ は降下階乗べきである.

$D \in \text{Der}_k(A)$ は k 線形写像であること, 及び $n^{\underline{i+1}}$ が $i = 0, \dots, k-1$ で $(i+1)!$ の倍数に成ることに気をつければ, この補題から上の命題はすぐに出る.