ゼミノート #12
Quotients of Algebraic Spaces

七条彰紀

2019 年 8 月 16 日

目次

1 Notes on Topology

1.1 Constructible Topology

以下を参考にした．

- [2] §1
- http://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/Perfseminar/Notes/L3.pdf by B.Conrad
- [4] 08YF https://stacks.math.columbia.edu/tag/08YF

定義 1.1
X :: topological space とする．

(i) X の locally closed subset とは，closed subset と open subset の共通部分で表せる subset である．

(ii) X の constructible set とは，X の有限個の locally closed subset の和集合で表せる subset のことである．

(iii) $U \subseteq X$ が X の locally constructible set であるとは，U のある開被覆 $\{U_i\}$ について，各 $U \cap U_i$ が constructible set である，ということ．

(iv) X の constructible topology とは，X の constructible set を開基とする位相のことである．X の underlying set に X の constructible topology を与えた位相空間を X_{cons} と書く．

(v) 有限個とは限らない X の constructible set の，和集合を ind-constructible subset と呼び，共通部分を pro-constructible subset と呼ぶ[†1].

(vi) map of topological spaces :: $f\colon X \to Y$ について，f^{cons} を constructible topology での map とする．（map of sets としては $f = f^{\mathrm{cons}}$ である．）

命題 1.2

X :: topological space とする．

(i) X の open subset と closed subset は constructible set である．

(ii) 有限個の constructible set の和，共通部分は constructible set である．constructible set の補集合も constructible set である．

(iii) X の constructible topology に於ける open subset は ind-constructible subset に限る．同様に，closed subset は pro-constructible subset に限る．

(iv) map of topological spaces :: $f\colon X \to Y$ について，f^{cons} :: continuous.

(証明)．自明． ∎

命題 1.3 (i) qcqs(=quasi-compact and quasi-separated) scheme の pro-constructible subset は，affine scheme からの射の像に限る．

(ii) locally of finite presentation morphism は constructible topology において open.

(iii) quasi-compact morphism は constructible topology において closed.

(iv) f :: surjective morphism で f :: locally of finite presentation or quasi-compact ならば f^{cons} :: submersive.

(証明)．(i) は Rydh10 の Prop1.1 である．(ii) は Chevalley's theorem からの帰結．(iii) は locally に調べれば容易に分かる．(iv) は (ii), (iii) からの帰結である． ∎

注意 1.4

constructible topology は spectral space [†2] と共に扱われることが多い．例えば qcqs scheme の underlying space は spectral である．

命題 1.5

[2] Prop1.7 morphism of schemes :: $f\colon X \to Y, g\colon Y' \to Y$ を考え，f の g による pullback を f' と書く．

(i) P を open, closed, submersive のいずれかとする．g が submersive ならば，f' :: P と f :: P は同値．

(ii) P を universally open, universally closed, universally submersive, separated のいずれかとする．g が universally submersive ならば，f' :: P と f :: P は同値．

(iii) g^{cons} が universally submersive ならば，f' :: quasi-compact と f :: quasi-compact は同値．

(証明)．(TODO) (iii) だけ証明を与える． ∎

[†1] "ind-" は inductive limit を意味し，"pro-" は projective limit を意味する．

[†2] spectral space とは，以下の性質をもつ位相空間: sober, quasi-compact, the intersection of two quasi-compact opens is quasi-compact, and the collection of quasi-compact opens forms a basis for the topology ([4] 08FG).

注意 1.6
おそらく，[3] はこの命題を利用するために，topological quotient に「q^{cons} :: universal submersive」を要求している．より詳しく言うと以下の命題で使われている．

命題 1.7 ([3] Prop2.12 (ii))
$R \rightrightarrows_t^s X$ :: groupoid とし，$q\colon X \to Y$ を topological quotient とする．j :: quasi-compact と，Y :: quasi-separated かつ $j_{/Y}$ :: quasi-compact は同値.

これを経由して，$X \to S$ :: quasi-separated ならば GC quotient :: $Y \to S$ が quasi-separated であることなどを示している (Prop4.7).

1.2 Equivalence Relation on Topological Space Induced by Groupoid

S :: algebraic space とし，groupoid in algebraic S-space :: $R \rightrightarrows_t^s X$ を考える．
topological space :: $|U|$ に，次のようにして同値関係 $\sim_R$ を定義する．

定義 1.8
点 $x_1, x_2 \in |X|$ について，

$$x_1 \sim_R x_2 \iff {}^{\exists} r \in |R|, \quad |s|(r) = x_1, |t|(r) = x_2$$

と定義する．

$|R \times_x R| \to |R| \times_{|X|} |R|$ が全射であることを用いると，groupoid の定義から，$\sim_R$ が同値関係であることが分かる．

定義 1.9
点 $x \in |X|$ の同値類を orbit と呼び，$R(x)$ と書く．$R(x)$ は $|t|(|s|^{-1}(x))$ と等しい．
また，$W \subseteq |X|$ が R-stable であるとは，W が $\sim_R$ について stable であること．すなわち，

$$\{x \in |X| \mid {}^{\exists} w \in W, \quad w \sim_R x\} = R$$

となること．これは $|s|^{-1}(W) = |t|^{-1}(W)$ in $|R|$ とも同値.

注意 1.10
[4] 04XJ には，$S = |X| \times_{|[X/R]|} |X|$ とすると位相空間として $|[X/R]| = |X|/S$，という命題が有る．

2 Quotients

以降は引き続き S :: algebraic space とし，groupoid in algebraic S-space :: $R \rightrightarrows_t^s X$ を考える．

2.1 Definitions

定義 2.1 (equivariant morphism)
morphism :: $q\colon X \to Y$ について，$q \circ s = q \circ t$ であるとき，q を equivariant morphism という．

定義 2.2 (j, j_Y)
$s, t\colon R \to X$ から $X \times_S X$ の普遍性により得られる射 :: $R \to X \times_S X$ を j と書く．

また，equivariant morphism :: $q\colon X \to Y$ について，s, t から $X \times_Y X$ の普遍性により得られる射 :: $R \to X \times_Y X$ を $j_{/Y}$ と書く．

stabilizer はまたの機会に定義する．

注意 2.3
fiber product の普遍性から，$j_{/Y}$ に $X \times_Y X \to X \times_S X$ を合成すると j に一致する．

注意 2.4
equivariant morphism :: $R \rightrightarrows_t^s X \to Y$ は，quotient stack からの射 $[X/R] \to Y$ に一対一に対応する．(TODO: proof)

定義 2.5 (universal, uniform quotient)
$q\colon X \to Y$ が性質 P をもつとする．

- 任意の射 $Y' \to Y$ による pullback :: $q'\colon X \times_Y Y' \to Y'$ も性質 P をもつ時，P は universal であると言う．
- 任意の flat 射 $Y' \to Y$ による pullback :: $q'\colon X \times_Y Y' \to Y'$ も性質 P をもつ時，P は uniform であると言う．

定義 2.6
equivariant morphism :: $q\colon X \to Y$ を考える．

Categorical quotient
任意の equivariant morphism :: $r\colon X \to Z$ が q を介して一意に分解する時，すなわち $\bar{r} \circ q = r$ を満たす射 :: $\bar{r}\colon Y \to Z$ が一意に存在するとき，q を categorical quotient と呼ぶ．

Zariski quotient
$|q|\colon |X| \to |Y|$ が topological space の圏における $|R| \rightrightarrows_{|t|}^{|s|} |X|$ の coequalizer である時，q を Zariski quotient と呼ぶ．同値な言い換えとして，任意の点の $|q|$ による逆像が丁度一つの orbit から成り，かつ $|q|$ :: submersive である，というものが有る．

Constructible quotient
$|q|^{\mathrm{cons}}\colon |X|^{\mathrm{cons}} \to |Y|^{\mathrm{cons}}$ が topological space の圏における $|R|^{\mathrm{cons}} \rightrightarrows_{|t|^{\mathrm{cons}}}^{|s|^{\mathrm{cons}}} |X|^{\mathrm{cons}}$ の coequalizer である時，q を constructible quotient と呼ぶ．言い換えについては Zariski quotient と同様である．

Topological quotient
q :: universal Zariski & universal constructible quotient である時，q を topological quotient と呼ぶ．

Strongly topological quotient
q :: topological quotient かつ $j_{/Y}$ :: universally submersive である時，q を strongly topological quotient と呼ぶ．

Geometric quotient
q が topological quotient であり，かつ $\mathcal{O}_Y$ が Y_{ET} (category of etale sheaves on Y) における s^*, t^*

の equalizer である時，q を geometric quotient と呼ぶ．

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow q_*\mathcal{O}_X \underset{t^*}{\overset{s^*}{\rightrightarrows}} (q\circ s)_*\mathcal{O}_R$$

Strongly geometric quotient

q :: geometric quotient & strongly topological quotient であるとき，すなわち q :: geometric quotient かつ $j_{/Y}$ :: universally submersive であるとき，q を strongly geometric quotient と呼ぶ．

注意 2.7
strongly topological quotient では $j_{/Y}\colon R \to X \times_Y X$ が univ. submersive であるから，$X \times_Y X \to X \times_S X$ も univ. submersive．このことは $X \times_Y X$ に「適切な」位相が入っていることを意味する．

注意 2.8
geometric quotient in [1]

- q :: surjective and equivariant.
- $\mathcal{O}_Y = (q_*\mathcal{O}_X)^R$.
- 任意の点 $y \in Y$ について，$q^{-1}(y)$ はただ一つの orbit からなる．
- $W_1, W_2 \subseteq X$ :: disjoint closed subset について $\mathrm{cl}_Y(q(W_1)), \mathrm{cl}_Y(q(W_2))$ :: disjoint.

以下のように言い換えても良い．

- q :: Zariski quotient.
- $\mathcal{O}_Y = (q_*\mathcal{O}_X)^R$.
- q の open immersion による pullback も上記を満たす．

ref. E.Viehweg “D. Mumford’s Geometric Invariant Theory”．なお，[1] の初版では q :: universally submersive を仮定している．

2.2 Propositions : Paraphase

命題 2.9 ([3], Prop2.3)
R-equivariant morphism :: $q\colon X \to Y$ を考える．以下の $3 \times 3 = 9$ 個の命題を考える．

(i) 任意の体 k と射 $y\colon k \to Y$ †3について $|X \times_Y k|$ は，
少なくとも 1 つの / 多くとも一つの / 丁度一つの，$(R \times_Y k)$-orbit を含む．

(ii) q :: surjective / $j_{/Y}$ :: surjective / $q, j_{/Y}$:: surjective.

(iii) 任意の代数閉体 K について，$\bar{q}_K\colon X(K)/R(K) \to Y(K)$ †4は
surjective / injective / bijective.

この時，(i) $\iff$ (ii) $\impliedby$ (iii) がそれぞれ成り立つ．さらに $q, j_{/Y}$ :: locally of finite type or integral ならば，(ii) $\implies$ (iii) も成り立つ．

†3 $\mathrm{Spec}\, k$ を k と略した．
†4 $X(K)/R(K)$ は $R(K) \rightrightarrows^{s_K}_{t_K} X(K)$ の coequalizer で，$\bar{q}_K$ は coequalizer による $q_K\colon X(K) \to Y(K)$ の一意な分解である．

(証明). 以下で計 6 つの命題の証明を行う．そのために，取り扱う 6 つの命題を以下のようにまとめる．

	a	b
1	(i) 少なくとも 1 つの	(i) 多くとも一つの
2	(ii) q :: surjective	(ii) $j_{/Y}$ :: surjective
3	(iii) surjective	(iii) injective

例えば “(1a)”という記号は，(i) に含まれる「任意の体 k と射 $y\colon k \to Y$ について $|X \times_Y k|$ は少なくとも 1 つの $(R \times_Y k)$-orbit を含む.」という命題を意味する．

体 :: k, morphism :: $y\colon \operatorname{Spec} k \to Y$ をとる．$\operatorname{Spec} k$ を k と略し，$X \times_Y \operatorname{Spec} k$ や $R \times_Y k$ をそれぞれ X_y, R_y と略す．

■(1a) $\Longrightarrow$ (2a)　仮定より $|X_y| \neq \emptyset$ である．この集合から $|q|^{-1}(y)$ への写像が存在するので $|q|^{-1}(y) \neq \emptyset$. よって q は全射．

$$|X_y| \longrightarrow |X| \times_{|Y|} |k| \xrightarrow{\mathrm{pr}_{|X|}} |q|^{-1}(y)$$

■(2a) $\Longrightarrow$ (1a)　仮定から直ちに次がわかる．

$$q\colon X \to Y :: \text{surj} \implies y^*q\colon X_y \to k :: \text{surj} \iff |y^*q| :: \text{surj} \iff {}^\forall t \in |\operatorname{Spec} k|,\ \ |y^*q|^{-1}(t) \neq \emptyset$$

R_y-equiv. morphism による一点の逆像は R_y-orbit を含む[†5]から，$|X_y|$ は R_y-orbit :: $|y^*q|^{-1}(t) \subseteq |X_y|$ を含む．

■(3a) $\Longrightarrow$ (2a)　k の代数閉包を K と書く．この時，y と $k \hookrightarrow K$ から誘導される射を合成すると，y と同値な点 $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} k \to X$ が得られる．これを改めて $y\colon \operatorname{Spec} K \to X$ と命名する．以下，$\operatorname{Spec} K$ を K と略す．すると仮定 $(X(K)/R(K) \to Y(K)$;; surj) と米田の補題により，$q \circ z = y$ を満たす $z\colon K \to X$ が存在する．よって $|q|$ :: surj.

■(2b) $\Longrightarrow$ (1b)　まず，$(X \times_Y X) \times_Y k \cong X_y \times_k X_y$ に注意する．以下の pullback 図式の $(j_{/Y})_y$ を考える．仮定からこれは全射．

$$\begin{tikzcd} R_y \arrow[r, "(j_{/Y})_y"] \arrow[d] & X_y \times_k X_y \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[d, "y"] \\ R \arrow[r, "j_{/Y}"'] & X \times_Y X \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

こうして全射 $|R_y| \to |X_y \times_k X_y| \to |X_y| \times_{|k|} |X_y|$ が得られる．$j_{/Y}$ の定義から，これらと $\mathrm{pr}_i\colon |X_y| \times_{|k|} |X_y| \to |X_y|$ $(i = 1, 2)$ を合成すればそれぞれ $|s|, |t|$ となる．よって任意の $u, v \in |X_y|$ について $|s|(r) = u, |t|(r) = v$ となる $r \in |R_y|$ が存在する．すなわち，任意の $u, v \in |X_y|$ について $u \sim_{R_y} v$.

■(3b) $\Longrightarrow$ (2b)　点 $z\colon \operatorname{Spec} k \to X \times_Y X$ を任意に取ると，上述のとおり，k をその代数閉包 K に取り替えることが出来る．したがってここでは $z\colon \operatorname{Spec} K \to X \times_Y X$ を扱う．$z_i := \mathrm{pr}_i \circ z, y := q \circ \mathrm{pr}_i \circ z$ とする．$q \circ \mathrm{pr}_1 = q \circ \mathrm{pr}_2$ に注意．以下，$\operatorname{Spec} K$ を K と略し，米田の補題によって対応するもの（例えば射 $z\colon K \to X$ と $X(K)$ の元）を同じ記号で書く．

[†5] 点 $t \in |\operatorname{Spec} k|$ について $q_y(t) = q_y(R_y(t))$ だから．

$q_K(z_1)=q_K(z_2)=y$ なので，仮定から $s_K(r)=z_1, t_K(r)=z_2$ を満たす元 $r\in R(K)$ が存在する．$s=\mathrm{pr}_1\circ j_{/Y}, t=\mathrm{pr}_2\circ j_{/Y}$ なので，さらに以下の図式が可換に成る．

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "r"] \arrow[rrr, bend left, "z_1"] \arrow[rrd, "z_2"'] & R \arrow[r, "j_{/Y}"] & X\times_Y X \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & X \arrow[d, "q"] \\
 & & X \arrow[r, "q"'] & Y
\end{tikzcd}$$

$X\times_Y X$ の普遍性から $r\circ j_{/Y}=z$ が分かる．すなわち，$|j_{/Y}|$ は，したがって $j_{/Y}$ は全射である．

■(1b) $\Longrightarrow$ (2b)　一つ前の段落と同じく $z, z_i\ (i=1,2), y$ をとる．この y で $X\times_Y X\to X\to Y$ を pullback する．すると z と id_K から点 $z_y\colon K\to X_y\times_K X_y$ が誘導される．

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, bend left, "z_y"] \arrow[rrrr, bend left=40, "\mathrm{id}"] & R_y \arrow[r, "(j_{/Y})_y"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & X_y\times_K X_y \arrow[r, "\mathrm{pr}_{i,y}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & X_y \arrow[r, "q_y"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & K \arrow[d, "y"] \\
K \arrow[rr, bend right, "z"'] \arrow[rrrr, bend right=40, "y"'] & R \arrow[r, "j_{/Y}"'] & X\times_Y X \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & X \arrow[r, "q"'] & Y
\end{tikzcd}$$

そこで $z_{i,y}:=\mathrm{pr}_{i,y}\circ z_y$ とおく．これは $z_{i,y}$ が z_i と id_K から誘導されると言っても同じである．

主張 2.10
(1b) が成立するならば，任意の点 z について $(j_{/Y})_y$ は全射である．

(証明)．今，仮定から，$r\in|R_y|$ が存在し，$|s_y|(r)=[z_{1,y}], |t_y|(r)=[z_{2,y}]$ を満たす．この r の代表元として $\tilde{r}\colon \operatorname{Spec} L\to R_y$ をとる．すると L と K は共通の部分体 K をもつから，合成体 KL が存在する．そして $\tilde{r}$ と同値な点 $\tilde{r}'\colon KL\to L\xrightarrow{\tilde{r}} R_y$ の $(j_{/Y})_y$ による像が，z_y と同値な点 $z'_y\colon KL\to K\xrightarrow{z_y} X_y\times_K X_y$ に一致する．以下はそのことをまとめた可換図式である．

$$\begin{tikzcd}
KL \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[rrd, dashed] & & K \arrow[d, "z_y"] \arrow[dr, "z_{1,y}"] \arrow[dd, bend right, "z_{2,y}"'] & \\
L \arrow[r, "\tilde{r}"'] \arrow[rrr, bend left] \arrow[rrd] & R_y \arrow[r, "(j_{/Y})_y"'] & X_y\times_K X_y \arrow[r] \arrow[d] & X_y \arrow[d, "q_y"] \\
 & & X_y \arrow[r, "q_y"'] & K
\end{tikzcd}$$

ここで $KL \to K$ と $KL \to L$ は包含射から誘導されたものなので，赤で示した 2 点の同値関係と青で示した 2 点の同値関係を同時に与える．（TODO: 不安） ∎

以上から任意の点 z について $|(j_{/Y})_y|$ は全射である．このことから $|j_{/Y}|$ による像が z である点 $KL \to R_y \to R$ の存在が言える．

$$\begin{tikzcd} KL \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{r}'"'] & K \arrow[d, "z_y"] \arrow[dd, bend left, "z"] \\ R_y \arrow[r, "(j_{/Y})_y"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & X_y \times_K X_y \arrow[d] \\ R \arrow[r, "j_{/Y}"'] & X \times_Y X \end{tikzcd}$$

よって $j_{/Y}$ は全射. ∎

注意 2.11
したがって quotient の定義の幾つかは次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} q :: \text{univ. Zariski} &\iff q :: \text{univ. submersive and } j_{/Y} :: \text{surjective.} \\ q :: \text{topological} &\iff q, q^{\text{cons}} :: \text{univ. submersive and } j_{/Y} :: \text{surjective.} \\ q :: \text{strongly topological} &\iff q, q^{\text{cons}}, j_{/Y} :: \text{univ. submersive} \end{aligned}$$

補題 2.12 ([3] Prop2.4, Remark2.5)
$q\colon X \to Y$ :: universal Zariski quotient とする．以下の時，q :: topological quotient.

(i) q :: quasi-compact,

(ii) q :: locally of finite presentation,

(iii) q :: universally open/closed,

(iv) s :: universally open/closed.

(証明). q^{cons} :: univ. submersive を示す．これには q^{cons} :: univ. open or univ. closed を示せば十分である．なので (i),(ii) については命題 (1.3) から分かる．(iii) について q^{cons} :: univ. open は自明．(iv) を証明する．

s :: univ. open/closed と仮定する．$j_{/Y}$ の定義から，s は以下のように分解できる．

$$R \xrightarrow{j_{/Y}} X \times_Y X \xrightarrow{\text{pr}} X$$

一つ前の命題から，今 $j_{/Y}$ :: surjective となっている．$U \subseteq X \times_Y X$ を open/closed とすると，$\text{pr}(U) = s(j_{/Y}^{-1}(U))$ も open/closed．よって pr :: open/closed map. univ. open/closed や surj. は pullback で保たれるので，特に pr :: univ. open/closed. q :: univ. submersive なので，命題 (1.5) と合わせて q :: univ. open/closed を得る． ∎

命題 2.13 ([3] Prop2.10)
$q\colon X \to Y$ :: equivariant とし，$f\colon Y' \to Y$ による q の pullback を $q'\colon X \times_Y Y' \to Y'$ とする．

(i) q :: topological quotient，ならば q' :: topological quotient.

(ii) f :: flat かつ q :: geometric quotient，ならば q' :: geometric quotient.

(iii) f :: fpqc or fppf [†6] かつ q' :: topological / geometric / universal geometric quotient ならば，q もそうである．

いずれも “topological” を “strongly topological” に，“geometric” を “strongly geometric” に置き換えても成立する．

参考文献

[1] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric Invariant Theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34)*. Springer-Verlag, 3rd ed. edition, 1992.

[2] David Rydh. Submersions and effective descent of étale morphisms. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, Vol. 138, No. 2, pp. 181–230, 2010.

[3] David Rydh. Existence and properties of geometric quotients. *Journal of Algebraic Geometry*, Vol. 22, pp. 629–669, 08 2013.

[4] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2019.

[†6] faithfully flat and quasi-compact または faithfully flat and locally of finite presentation