

ゼミノート #7

Descent Theory

七条彰紀

2018 年 12 月 18 日

1 Motivation

(TODO)

2 Definition

定義 2.1

関手 $\epsilon_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ を用いて以下のように定義する.

- (i) ϵ_U :: equivalence となる U を of effective descent for \mathcal{F} と呼ぶ.
- (ii) ϵ_U の像と同型である $\mathcal{F}(U)$ の対象を, effective data という.

3 Criterion for fpqc Stacks

補題 3.1 ([2] Lemma 4.25)

S :: scheme, $\mathcal{F} \rightarrow (\mathbf{Sch}/S)$:: fibration とする. 以下が成り立つとする.

- (a) \mathcal{F} は Zariski topology での stack である.
- (b) 任意の flat surjective morphism of affine S -scheme :: $V \rightarrow U$ について,
 $\epsilon_{\{V \rightarrow U\}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\{V \rightarrow U\})$ は圏同値.

この時, \mathcal{F} は fpqc topology での stack である.

証明のために段階を踏む.

3.1 Step 1 / ϵ_U : faithful.

(TODO: いないかも)

3.2 Step 2 / single morphism cover の場合に帰着させる.

次を示す.

補題 3.2 ([1] p.87)

$\mathcal{U} = \{\phi_i: V_i \rightarrow U\}, V' = \bigsqcup V_i$ とする. さらに, $f: V' \rightarrow U$ を \mathcal{U} から誘導される射とする.

このとき, 圏同値 $E: \mathcal{F}(U' \rightarrow U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ が存在し, 合成

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\epsilon_{\{f\}}} \mathcal{F}(V' \rightarrow U) \xrightarrow{E} \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

が関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ と同型と成る.

(証明). まず関手 E を構成し, その後 E が圏同値であること, 補題の性質を満たすことを確認する. ■

注意 3.3

ここで, 各 ϕ_i が quasi-compact (特に fpqc) であったとしても, 誘導される射 $f: V' \rightarrow U$ が必ずしも quasi-compact でないことに注意する. 例えば $\{\mathrm{Spec} k[x_i] \rightarrow \bigsqcup_i \mathrm{Spec} k[x_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ を考えれば分かる.

以上のことに注意すると, 我々は次のことを証明することに成る:

補題 3.4

条件 (a), (b) が成り立つならば, 以下の条件 (*) を満たす任意の flat surjective morphism $:: f: V \rightarrow U$ について, $\epsilon_{\{f\}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) ::$ equivalence.

(*) affine Zariski cover $:: U = \bigcup_i U_i$ と, 各 i について $f^{-1}(U_i)$ の affine Zariski cover $:: f^{-1}(U_i) = \bigcup_j V_{ij}$ が存在し, $V_{ij} ::$ quasi-compact かつ $f(V_{ij}) = U_i$ となる.

条件 (*) は $U, V ::$ locally noetherian であるような任意の fppf morphism について成立する ([2] Cor1.1.6).

注意 3.5

以下, $\mathcal{F} ::$ split fibered category とする. session 4.5 定理 1.2 より, このように仮定しても一般性を失わない.

3.3 Step 3 / affine scheme への quasi-compact morphism の場合.

$f: V \rightarrow U$ を $U ::$ affine である quasi-compact morphism とする. $\{V_i\}_i$ を V の open affine cover とし, $V' = \bigsqcup_i V_i$ とおく. $V' ::$ affine なので, 仮定 (b) から圏同値 $\mathcal{F}(U) \simeq \mathcal{F}(V' \rightarrow U)$ が存在する.

以下の図式 (1) を考える. \leftrightarrow は圏同値を意味する.

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\epsilon_f} \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) \\
 & \uparrow \epsilon_{\{V_i \rightarrow U\}} & \swarrow E \\
 & \mathcal{F}(\{V_i \rightarrow U\}) & \\
 & \downarrow & \\
 & \mathcal{F}(V' \rightarrow U) &
 \end{array}
 \quad (1)$$

ここで関手 ϵ_f, E は次で与えられる. ただし $\text{pr}_k: V \times_U V \rightarrow V$ は第 k 成分への射影である.

$$\begin{array}{lll}
 \epsilon_f: & \mathcal{F}(U) & \rightarrow \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) \\
 \textbf{Objects}: & \xi & \mapsto (f^*\xi, \sigma) \\
 \textbf{Arrows}: & \alpha & \mapsto f^*\alpha
 \end{array}$$

ここで $\sigma: \text{pr}_2^* f^* \xi \rightarrow \text{pr}_1^* f^* \xi \in \text{Arr}(\mathcal{F}(V \times_U V))$ は $\text{pr}_2^* f^* \xi, \text{pr}_1^* f^* \xi$ がいずれも $f \circ \text{pr}_2 = f \circ \text{pr}_1$ による ξ の pullback であることから得られる同型射である.

$$\begin{array}{lll}
 E: & \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) & \rightarrow \mathcal{F}(\{V_i \rightarrow U\}) \\
 \textbf{Objects}: & (\eta, \sigma) & \mapsto (\{\eta|_{V_i}\}_i, \{(\gamma_{ij})^* \sigma\}) \\
 \textbf{Arrows}: & \beta & \mapsto \{\beta|_{V_i}\}
 \end{array}$$

ここで γ_{ij} は以下の可換図式のように, fiber product の一意性から得られる射である.

$$\begin{array}{ccccc}
 V_i \times_U V_j & \xrightarrow{\text{pr}_1} & V_i & & \\
 \downarrow \text{pr}_2 & \searrow \gamma_{ij} & & \downarrow & \\
 & V \times_U V & \xrightarrow{\text{pr}_1} & V & \\
 & \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow f & \\
 V_j & \xrightarrow{\quad} & V & \xrightarrow{f} & U
 \end{array}$$

この図式の可換性から, 関手の同型 $E \circ \epsilon_f \cong \epsilon_{\{V_i \rightarrow U\}}$ が得られる ($\mathcal{F} :: \text{split fibered category}$ を利用する). (よって上の図式 (1) は可換である.) したがって ϵ_f の psuedo-inverse functor $:: (\epsilon_{\{V_i \rightarrow U\}})^{-1} \circ E$ が得られた.

3.4 Step 4 / 条件 (*) を満たす affine scheme への射の場合.

([1] p.88) 仮定 (*) より, Zariski cover $:: \{\iota_i: V_i \rightarrow V\}$ が存在し, $V_i :: \text{quasi-compact}$.

注意 3.6

前段の議論のうち, 図式 (1) の $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V' \rightarrow U)$ が圏同値でない. なので新しい議論が必要である.

$$\begin{array}{ccc}
(2) & \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathcal{F}(V_i \rightarrow U) & & \end{array} & \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(V_i \cup V_j \rightarrow U) \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathcal{F}(V_i \rightarrow U) & & \end{array} \\
(3) & &
\end{array}$$

3.5 Step 5 / 一般の場合.

条件 (*) を満たす任意の射 $f: V \rightarrow U$ をとり, affine Zariski cover $:: \{U_i \rightarrow U\}$ をとる. さらに $V_i := f^{-1}(U_i)$ とおき, $\phi_i = f|_{V_i}$ とおく.

今,

$$\Phi_i = \epsilon_{V_i \rightarrow U_i}: \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(V_i \rightarrow U_i)$$

と置く. 同様に $\Phi_{ij} = \epsilon_{V_{ij} \rightarrow U_{ij}}, \Phi_{ijk} = \epsilon_{V_{ijk} \rightarrow U_{ijk}}$ と置く. この時, 以下は厳密な可換図式である.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}(U_i) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{F}(U_{ij}) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{F}(U_{ijk}) \\
\Phi_i \downarrow & & \downarrow \Phi_{ij} & & \downarrow \Phi_{ijk} \\
\mathcal{F}(V_i \rightarrow U_i) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{F}(V_{ij} \rightarrow U_{ij}) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{F}(V_{ijk} \rightarrow U_{ijk})
\end{array} \tag{4}$$

ここで, 各 Φ_* はいずれも Step 4 から圏同値である.

次の関手を考える.

$$\begin{array}{llll}
P_i: & \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) & \rightarrow & \mathcal{F}(V_i \rightarrow U_i) \\
\text{Objects} & (\eta, \sigma) & \mapsto & (\eta|_{V_i}, (\gamma_{ii})^* \sigma) \\
\text{Arrows} & \alpha & \mapsto & \alpha|_{V_i}
\end{array}$$

同様に $P_{ij}: \mathcal{F}(f) \rightarrow \mathcal{F}(V_{ij} \rightarrow U_{ij})$ を定義する. すると step 4 の結果から $\mathcal{F}(U_i) \simeq \mathcal{F}(V_i \rightarrow U_i)$ なので, $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ と同型

$$\alpha_i: \Phi_i(\xi_i) \xrightarrow{\cong} P_i((\eta, \sigma))$$

が得られる. 上の図式 (4) が可換であることから,

$$\alpha_i|_{V_{ij}}: \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}}) = (\Phi_i(\xi_i))|_{V_{ij}} \xrightarrow{\cong} P_{ij}((\eta, \sigma))$$

すると,

$$\alpha_i^{-1} \alpha_j: \Phi_{ij}(\xi_j|_{V_{ij}}) \rightarrow \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}})$$

$\Phi_{ij} :: \text{equivalence}$ なので, この同型射の逆像として $\sigma_{ij}: \xi_j|_{V_{ij}} \rightarrow \xi_i|_{V_{ij}}$ が得られる.

以上で得られる $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ は cocycle condition を満たすため, $\mathcal{F}(\{U_i \rightarrow U\})$ の object である. これは $\mathcal{F}(U)$ と圏同値なので, ξ が得られる.

4 Application : \mathbf{QCoh}/S is a fpqc stack.

参考文献

[1] Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008).

- [2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.