

第 2 章

Sites and Topoi

七条彰紀

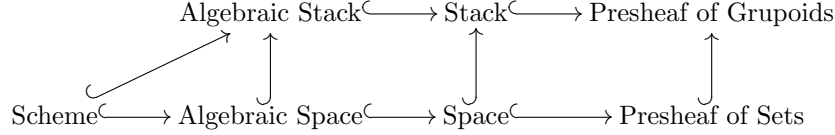
2019 年 6 月 19 日

目次

1	Motivation.	2
2	Sites.	2
2.1	Definitions.	2
2.2	Examples.	4
3	Sheaves.	7
3.1	Definitions.	7
3.2	Examples.	8
3.3	Propositions.	9
4	Points and Stalks.	13
5	Morphism of Shaves.	14
5.1	Definitions.	14
5.2	Examples.	14
5.3	Propositions.	15
6	Topoi.	16
6.1	Definitions.	16
6.2	Propositions.	16

1 Motivation.

scheme, stack 等には以下のような包含関係がある.



最終的にセミナーを通じて我々が定義したいのは algebraic stack であるが, 今回はそれよりも定義が簡素な “space” を定義する. 先に space の定義文を示そう.

定義 1.1 (Space, [2] p.26)

$S :: \text{scheme}$ とする. Space over S (or S -space) とは, big etale site over S 上にある, 集合の sheaf である.

ここに現れる “big etale site” と “big etale site 上の sheaf” を以下で定義する. さらに sheaf の射について幾つか定義をすれば, algebraic space まで定義できる.

定義だけでは space の local は性質を調べる手段がないため, 次回は「高次版の sheaf の貼り合わせ」と呼べる “Descent theory” を学ぶ.

2 Sites.

2.1 Definitions.

以下で導入する Grothendieck topology は, 「Sheaf を定義するのに必要な位相空間の定義を抽出し, 圏論的に一般化したもの」である. $X :: \text{topological space}$ とし, sheaf on X の定義を見なおしてみよう. すると, sheaf on X は次に挙げるもののみに用いて定義されていると分かる.

- (i) X の開部分集合と包含写像が成す圏.
- (ii) 開部分集合 $U \subseteq X$ の open covering.
- (iii) 同じく U の open covering $:: \{U_i\}_i$ が与えられたときの族 $\{U_i \cap U_j\}_{i,j}$

そこで次のように定義する.

定義 2.1 (Grothendieck Topology)

$\mathbf{C} :: \text{category}$ について, \mathbf{C} 上の Grothendieck topology は任意の $X \in \mathbf{C}$ に \mathbf{C} の射の集まり $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ の集まり (collection of collections) を対応させる Cov で構成される. さらに, Cov は以下を満たすように要請される.

- (a) $X' \rightarrow X :: \text{iso}$ ならば $\{X' \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X)$.
- (b) $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U), V \rightarrow U \in \mathbf{C}$ について, $\{U_i \times_U V \rightarrow V\} \in \text{Cov}(V)$.
- (c) $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \text{Cov}(U)$ をとり, さらに各 i について $\{V_{i,j} \rightarrow U_i\}_j \in \text{Cov}(U_i)$ をとる.
この時, 合成も Cov に入っている: $\{V_{i,j} \rightarrow U_i \rightarrow U\}_{i,j} \in \text{Cov}(U)$.

注意 2.2

ここで「集合」ではなく「集まり」という言葉を用いたのは、これらが集合ではない可能性があるからである。この問題（圏論でもしばしば現れる）を取り扱うためには、2つの解決策がある。1つ目は Grothendieck の宇宙公理 U を ZFC 公理系に加えた ZFCU 公理系で議論を行うことである。もう1つは真のクラスを扱える NBG 公理系で議論を行うことである。

後者の方針を採用する場合は、Grothendieck topology の定義で現れた「集まりの集まり」という言葉に注意が必要である。というのも、たとえ NBG 公理系でも、真のクラスを要素に持つ真のクラスは許されていないからである。この問題を解決するには以下のように Cov を定義すれば良い（以下のように書き換えれば良いという事がわかれば十分なので、実際に以下の定義を採用することはない）：

全ての $U \in \mathbf{C}$ について $\text{Cov}(U)$ は codomain が U である射のクラスである。任意の要素 $[V \rightarrow U] \in \text{Cov}(U)$ についてこの要素を含む $\text{Cov}(U)$ の部分クラス $\{U_i \rightarrow U\}_i \subset \text{Cov}(U)$ が存在し、以下が成立する。（以下略）。

Cov の元には大抵、以下の条件が課される。

定義 2.3 ((Jointly) Surjective Family)

ある圏の射の集まり $\{U_i \rightarrow U\}_i$ について、

$$\bigsqcup_i U_i \rightarrow U$$

が surjective である時、（同値な条件として、 $\text{im}(U_i \rightarrow U)$ の set-theoretic union が U に等しい時、）この集まり $\{U_i \rightarrow U\}$ を (jointly) surjective family という。

定義 2.4 (Site)

圏 \mathbf{C} と \mathbf{C} 上の Grothendieck topology $:: \text{Cov}$ の組を site と呼ぶ。site に対し、その部分である圏を the underlying category と呼ぶ。しばしば Cov を略して \mathbf{C} のみで site を表す。

定義 2.5 (Localized Site.)

site $:: \mathbf{C}$ と $X \in \mathbf{C}$ について、localized site $:: \mathbf{C}/X$ を以下のように定義する。

\mathbf{C}/X の underlying category は slice category $:: \mathbf{C}/X$ である。したがって対象は \mathbf{C} 内の X への射である。Grothendieck topology $:: \text{Cov}$ は、

$$\{[U_i \rightarrow X] \rightarrow [U \rightarrow X]\}_i \in \text{Cov}([U \rightarrow X]) \implies \{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U).$$

のように定められる。

定義 2.6 (Diagrams (or Comma Site).)

$\Delta :: \text{category}$, $\mathbf{C} :: \text{site}$, $F: \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{C} :: \text{functor}$ とする。この時 site $:: \mathbf{C}_F$ を以下のように定める。

まず underlying category は $(\text{id}_{\mathbf{C}} \downarrow F)$ である。したがって対象は $X \rightarrow F(\delta)$ ($\delta \in \Delta$) である。 Cov は以下のように定める。

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X'_i & \xrightarrow{f_i^\flat} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\delta_i) & \xrightarrow{F(f_i)} & F(\delta) \end{array} \right\} \in \text{Cov}([X \rightarrow F(\delta)]) \implies f_i: \delta \rightarrow \delta_i :: \text{iso. and } \{f_i^\flat: X'_i \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X).$$

定義 2.7 (Continuous Functor.)

$\mathbf{C}, \mathbf{C}' :: \text{sites}$ とする. $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}' :: \text{functor}$ が continuous とは, 以下の 2 つが成立すること:

(i) 任意の $X \in \mathbf{C}$ と $\{U_i \rightarrow X\}_i \in \text{Cov}_{\mathbf{C}}(X)$ について,

$$\{f(U_i) \rightarrow f(X)\}_i \in \text{Cov}_{\mathbf{C}'}(f(X))$$

となる.

(ii) \mathbf{C} の任意の射 $X_1 \rightarrow Y, X_2 \rightarrow Y$ について, fiber product $:: X_1 \times_Y X_2$ が \mathbf{C} に存在するならば,

$$f(X_1 \times_Y X_2) \cong f(X_1) \times_{f(Y)} f(X_2).$$

注意 2.8

後に示すように, continuous functor はよくあるケースで category of sheaves on site の間の関手を誘導する. これは scheme の間の continuous map が category of sheaves on scheme の間の関手 (e.g. inverse image functor, direct image functor) を定めるのと同じである.

2.2 Examples.

2.2.1 Site.

例 2.9 (Classical topology.)

$X :: \text{topological space}$ とし, $O(X)$ を以下のような圏とする.

対象 X の開集合.

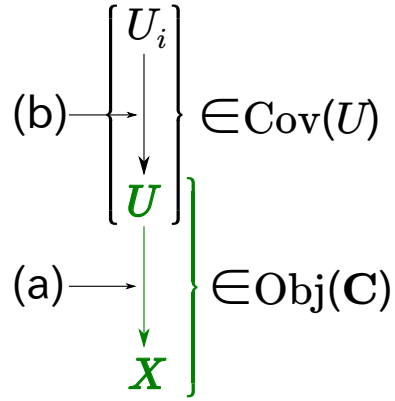
射 包含射.

この時, $U \in O(X)$ の covering $:: \text{Cov}(U)$ を, U への包含射のみから成る jointly surjective family の集合^{†1} とする.

以上で定まる site $:: (O(X), \text{Cov})$ は通常の topology を Grothendieck topology の枠組の中で再現している.

以下で主に用いるのは, \mathbf{C} が slice category $:: \mathbf{Sch}/X$ ($X \in \mathbf{Sch}$) の部分圏であるような site である. $X \in \mathbf{Sch}$ に対して, このような site は underlying category ($\subset \mathbf{Sch}/X$) と Grothendieck topology (Cov) からなるから, 以下の図の (a) $U \rightarrow X$, (b) $U_i \rightarrow U$ がどのようなものであるか定めれば定義できる.

^{†1} 包含射の個数は高々 $2^{\#X}$ 以下の濃度なので, family の集まりは集合.



すなわち，以下の未完成な定義文をテンプレートとする，一連の定義文の群がある．

定義 2.10 (** site)

$X :: \text{scheme}$ について，圏 \mathbf{C} を以下で定める．

対象 (a) である射 $U \rightarrow X$ ．

射 二つの対象の間の射 $[U \rightarrow X] \rightarrow [U' \rightarrow X]$ は， X -morphism $U \rightarrow U'$ ．

$[U \rightarrow X] \in \mathbf{C}$ に対して， $\text{Cov}(U)$ を (b) である射の集まり $\{U_i \rightarrow U\}_i$ であって jointly surjective family であるものの集まりとする．

以上の \mathbf{C} と Cov からなる site を ** site of X と呼ぶ．

Grothendieck topology の定義から分かるとおり，性質 (b) が stable under base change & composition

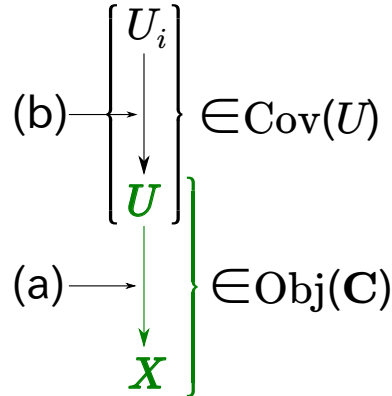
であれば、以上のテンプレートは site の定義文と成る．

定義 2.11

以上の定義文テンプレートを用いて、(a), (b) と各 site の定義を以下のように対応させる．(a) が “-” とある箇所は「 \mathbf{Sch}/X の任意の射」を意味する．さらに、“open inclusion” は Zariski 開集合の間にある包含射のことである（したがって small Zariski site の underlying category には Zariski 開集合しか無い）．

***	small Zariski	big Zariski	small etale	big etale
(a)	open immersion	–	etale	–
(b)	open immersion	open immersion	etale	etale
***	lissee-etale	smooth	fppf	fpqc
(a)	smooth	smooth	–	–
(b)	etale	smooth	flat&locally of finite presentation	flat&quasi-compact

図の再掲:



注意 2.12

“fppf” は “fidèlement plate de présentation finie”（仏語）すなわち “faithfully flat and of finite presentation” の略である． flat& locally of finite presentation ならば実際にこのように成る． 同様に “fpqc” は “fidèlement plat et quasi-compact”（仏語）すなわち “faithfully flat and quasi-compact” の略である．

定義 2.13

*** site of X の記号を以下のように定める．

***	small Zariski	big Zariski	small etale	big etale
名前	$\mathrm{Zar}(X)$	$\mathrm{ZAR}(X)$	$\mathrm{Et}(X)$	$\mathrm{ET}(X)$
***	lissee-etale	smooth	fppf	fpqc
名前	$\mathrm{Lis-Et}(X)$	$\mathrm{Sm}(X)$	$\mathrm{Fppf}(X)$	$\mathrm{Fpqc}(X)$

[6] では big Zariski site of X を $(\mathbf{Sch}/X)_{\mathrm{Zariski}}$ などと書く．

2.2.2 Continuous Functor.

例 2.14

$X, X' :: \text{topological space}$ について, $O(X), O(X') :: \text{classical site}$, $f: X \rightarrow X' :: \text{continuous map}$ とする. この時, $f^{-1}: O(X') \rightarrow O(X) :: \text{continuous functor}$. (f は必ずしも continuous functor でないことに注意.)

注意 2.15

$f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}' :: \text{functor between sites}$ が continuous であるための条件を再掲する.

- (i) 任意の $X \in \mathbf{C}$ と $\{U_i \rightarrow X\}_i \in \text{Cov}_{\mathbf{C}}(X)$ について,

$$\{f(U_i) \rightarrow f(X)\}_i \in \text{Cov}_{\mathbf{C}'}(f(X))$$

となる.

- (ii) \mathbf{C} の任意の射 $X_1 \rightarrow Y, X_2 \rightarrow Y$ について, fiber product $:: X_1 \times_Y X_2$ が \mathbf{C} に存在するならば,

$$f(X_1 \times_Y X_2) \cong f(X_1) \times_{f(Y)} f(X_2).$$

例と照らし合わせると, 1 つめの条件は f^{-1} が開集合を開集合に写すことに対応し, 2 つめの条件は f^{-1} が \cap と交換することに対応する.

例 2.16

従属関係

$$\text{open immersion} \implies \text{etale} \implies \text{fppf}$$

があるから, inclusion map $:: \text{Zar}(X) \hookrightarrow \text{ET}(X) \hookrightarrow \text{Fppf}(X)$ はそれぞれ continuous.

例 2.17

flat morphism $:: f: X \rightarrow Y$ をとり, f による pullback functor を P_f とする. (TODO: 要確認.)

3 Sheaves.

3.1 Definitions.

定義 3.1 (Sheaf, Topos, Morphism of Topoi.)

- (i) site $:: S$ 上の presheaf とは, functor $:: \mathcal{F}: S^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ のことである.
- (ii) 射影 $U \times_B V \rightarrow U$ を presheaf $:: \mathcal{F}$ で写した射を $\text{res}_U^{U \times_B V}$ と書く.
- (iii) presheaf on $S :: \mathcal{F}$ が sheaf であるとは, 以下の図式が equalizer diagram であるということ.

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

ここで右の並行射は $\text{res}_{U_i}^{U_i \times U_j}, \text{res}_{U_j}^{U_i \times U_j}$ である.

- (iv) Site $:: S$ 上の, 圏 $\mathbf{C}(= \mathbf{Sets}, \mathbf{Rings}, \mathbf{AbGrp}, \dots)$ への presheaf の圏を $\mathbf{PSh}(S, \mathbf{C})$, sheaf の圏を $\mathbf{Sh}(S, \mathbf{C})$ と書く. $\mathbf{C} = \mathbf{Sets}$ の場合は略して $\mathbf{Sh}(S), \mathbf{PSh}(S)$ と書く.

- (v) morphism of sheaves $:: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ とは, natural transformation のことである.
- (vi) $T ::$ category が topos であるとは, category of sheaves of sets on a site と圏同値であるということである.
- (vii) $T, T' ::$ topoi とする. morphism of topoi $:: f: T \rightarrow T'$ とは, 以下の 3 つの射 (2 functor and 1 isomorphism.) からなる.

$$f_*: T \rightarrow T', \quad f^*: T' \rightarrow T, \quad \phi: \text{Hom}_T(f^*(-), -) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{T'}(-, f_*(-)).$$

注意 3.2

上で定義した sheaf of sets と同様に, sheaf of abelian groups, sheaf of rings, ... が定義できる. これらはそれぞれ sheaf of sets の圏 $:: \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, \mathbf{Sets})$ における abelian group objects, ring objects, ... と定義される.

注意 3.3

“Topos” はギリシャ語で「場 (place)」を意味する. ギリシャ語なので複数形は “topoi”.

$X ::$ scheme について, X に関する topos を X_{et}, X_{ET}, \dots などと書く. 著者 (例えば [6]) によってはこれらの記号を \mathbf{Sch}/X を underlying category とする site に用いる. しかし “Grothendieck’s insight is that the basic object of study is the topos, not the site.” (M.Olsson “Stacks”) というということから, topos に site より簡単な記号を与えるのは理解できることである.

定義 3.4 (Direct Image Functor.)

$f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ を functor of sites とする. この時, $F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について

$$f_*F(-) := F(f(-))$$

とおくと, $f_*F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ が得られる. $f ::$ continuous functor ならば, $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ に対し同様にして $f_*\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ が得られる.

定義 3.5 (Ringed Topos.)

- (i) $T ::$ topos と T の ring object $:: \Lambda$ を合わせて ringed topos と呼ぶ.
- (ii) morphism of ringed topoi $:: (f, f^\#): (T, \Lambda) \rightarrow (T', \Lambda')$ は,
- morphism of topoi $:: f = (f_*, f^*, \phi): T \rightarrow T'$ と,
 - morphism of ring in $T' :: f^\#: \Lambda' \rightarrow f_*\Lambda$
- の組である.

3.2 Examples.

例 3.6

$X ::$ scheme と, \mathbf{Sch}/X の部分圏を underlying category とする site $:: \mathbf{C}$ (e.g. small/big Zariski site) について, $\underline{X}(-) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$ で functor $:: \underline{X}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ を定める. この時, $\underline{X} ::$ presheaf on \mathbf{C} . 特に, 後に示すとおり, fppf topology より荒い位相 (e.g. Zariski, smooth, etale, ...) で sheaf となる.

例 3.7 (Constant (Pre)sheaf.)

$\mathbf{C} ::$ site とし, 以下のように presheaf on $\mathbf{C} :: \mathcal{F}$ を定める.

$$\mathcal{F}: \emptyset \neq U \mapsto \mathbb{R}, \quad \emptyset \mapsto \{0\}.$$

constant presheaf on a scheme が sheaf でないのと全く同じ理由で、この \mathcal{F} は sheaf でない。具体的には $U \in \mathbf{C}$ が連結でない scheme ならば、 $U_1 \sqcup U_2 = U$ なる covering を取ると、定義にある diagram が equalizer diagram にならない。

例 3.8

$S :: \text{scheme}$ について、 \mathbf{Sch}/S 上の presheaf を

$$\mathcal{O}_S: [X \rightarrow S] \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

で定める。この sheaf は “structure sheaf of S ” と呼ばれ、 \underline{A}_S^1 と同型。

3.3 Propositions.

定理 3.9

$\mathbf{C} :: \text{site}$ とする。忘却関手

$$Fgt: \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathbf{C}).$$

は left adjoint functor $:: Shff$ を持つ。

注意 3.10

以下で述べる $Shff$ の構成は “plus construction” と呼ばれる。Kay Werndli “Sheaves From Scratch” §3.5 では etale bundle という物を用いた構成をしている。

証明のために幾つか定義しておく。

定義 3.11 ([6], Tag 00W1)

$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ と、 $X \in \mathbf{C}$ の cover $:: \mathcal{U} = \{U_i \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X)$ に対し、

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{equalizer of } \left[\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{F}(U_i \times_X U_j) \right]$$

ここで二つの並行射はそれぞれ $\text{res}_{U_i}^{U_i \times_X U_j}, \text{res}_{U_j}^{U_i \times_X U_j}$ である。すなわち、ここにある並行射は sheaf の定義にあるものである。この diagram は圏 \mathbf{Sets} の中のものなので、**index** $:: I$ が集合ならばこの equalizer は常に存在する。(H^0 という記号は、これが \mathcal{F} の 0 次 Čech cohomology であることによる。)

直ちに分かるとおり、 $\text{Cov}(X)$ は細分を射として圏を成し、 $H^0(-, \mathcal{F})$ は圏 $\text{Cov}(X)$ から \mathbf{Sets} への反変関手である。 \mathcal{F}^+ は

$$\mathcal{F}^+(X) = \text{colim}_{\mathcal{U} \in \text{Cov}(X)} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{colim}(\text{Cov}(X) \rightarrow^{H^0(-, \mathcal{F})} \mathbf{Sets}).$$

と定義される^{†2}。任意の $\mathcal{U} \in \text{Cov}(X)$ について、常に標準的全射 $\iota_{\mathcal{U}}: H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}^+(X)$ が存在する。

^{†2} 定義から、 $s, t \in \mathcal{F}^+(X)$ が等しいとは、以下が成り立つこと: s, t へそれぞれ写る $(\tilde{s}_U)_{U \in \mathcal{U}} \in H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}), (\tilde{t}_V)_{V \in \mathcal{V}} \in H^0(\mathcal{V}, \mathcal{F})$ が存在し、 \mathcal{U}, \mathcal{V} の共通のある細分 \mathcal{W} において

$$(\tilde{s}_U|_{\mathcal{W}})_{\mathcal{W} \ni W \subseteq U \in \mathcal{U}} = (\tilde{t}_V|_{\mathcal{W}})_{\mathcal{W} \ni W \subseteq V \in \mathcal{V}}$$

となる。

$H^0(\{\mathrm{id}_X\colon X\rightarrow X\},\mathcal{F})=\mathcal{F}(X)$ であり、しかも任意の cover of X は id_X の細分であるから、 X 毎に標準的な射 $\theta\colon \mathcal{F}(X)\rightarrow \mathcal{F}^+(X)$ が存在する.

$$\theta\qquad\qquad\qquad \mathcal{F}(X)\qquad\qquad\qquad \mathcal{F}^+(X)$$

$$\mathcal{F}(X)\qquad\left\{H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\quad H^0(\mathcal{U}',\mathcal{F})\right\}_{\mathcal{U},\mathcal{U}'}$$

$\mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ は以下を満たす時 separated であるという.

$$\forall X\in \mathbf{C},\ \forall \{U_i\rightarrow X\}_i\in \mathrm{Cov}(X),\ \mathcal{P}(X)\rightarrow \prod_{i\in I}\mathcal{P}(U_i)\ ::\ \mathrm{inj}.$$

$\colon \mathcal{F}\in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ を考える. 任意の $X\in \mathbf{C}, \mathcal{U}\in \mathrm{Cov}(X), U_0\in \mathcal{U}$ について, 以下の図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{res}_X^{U_0} & & \mathrm{pr}_{U_0} \\ \mathcal{F}^+(X) & \longrightarrow & \mathcal{F}^+(U_0) \end{array}$$

$$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})\qquad\longrightarrow\qquad \mathcal{F}(U_0)$$

$$\prod_{U\in \mathcal{U}}\mathcal{F}(U)$$

補題 3.15

site $:: \mathbf{C}$, presheaf $:: \mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について以下が成り立つ.

- (a) $\mathcal{F}^+ :: \text{separated.}$
- (b) $\mathcal{F}^+ :: \text{sheaf if } \mathcal{F} :: \text{separated.}$
- (c) $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+ :: \text{iso if } \mathcal{F} :: \text{sheaf.}$
- (d) $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+ :: \text{universal,}$

(証明).

■ $\mathcal{F}^+ :: \text{separated.}$ $X \in \mathbf{C}$ をとり, $s, t \in \mathcal{F}^+(X)$ をとる. ある cover of $X :: \mathcal{U} \in \text{Cov}(X)$ について

$$\forall U \in \mathcal{U}, \quad s|_U = t|_U$$

が成り立つと仮定して $s = t$ を示す.

まず, $\iota_{\mathcal{U}'}((\tilde{s}_{U'})_{U' \in \mathcal{U}'}) = s$ となる様に $\mathcal{U}' \in \text{Cov}(X)$ と $(\tilde{s}_{U'}) \in H^0(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ をとる. \mathcal{U}' を必要に応じて更に細かくとれば, t についても同様の $(\tilde{t}_{U'}) \in H^0(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ が存在するように出来る. さらに, \mathcal{U}' を \mathcal{U} の細分とする.

この時, 補題 A と \mathcal{U}' が \mathcal{U} の細分であることと仮定から

$$s|_{U'} = \theta(\tilde{s}_{U'}) = \theta(\tilde{t}_{U'}) = s|_{U'} \quad (\in \mathcal{F}^+(U')).$$

したがって $\mathcal{F}^+(U')$ の定義から, 各 U' について以下のような条件を満たす $\mathcal{V}_{U'} \in \mathcal{V}(U')$ が存在する: $(\tilde{s}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}}, (\tilde{t}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}} \in H^0(\mathcal{V}_{U'}, \mathcal{F})$ であって

$$\iota((\tilde{s}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}}) = s|_{U'}, \quad \iota((\tilde{t}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}}) = t|_{U'}$$

となるならば $(\tilde{s}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}} = (\tilde{t}'_V)_{V \in \mathcal{V}_{U'}}$ となる. これら $\mathcal{V}_{U'}$ 達を束ねて \mathcal{U}' の細分 $\mathcal{V} = \{V \rightarrow U' \rightarrow U \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X)$ を得る. $(\tilde{s}_{U'}), (\tilde{t}_{U'})$ も細分して

$$\tilde{s} = (\tilde{s}_{U'}|_V)_{V \ni V \subseteq U' \in \mathcal{U}'}, \quad \tilde{t} = (\tilde{t}_{U'}|_V)_{V \ni V \subseteq U' \in \mathcal{U}'} \in H^0(\mathcal{U}^2, \mathcal{F})$$

を得る.

以上の議論から, 各 U' について

$$\forall U' \in \mathcal{U}', \quad \forall V \in \mathcal{V}, \quad V \subseteq U' \implies \tilde{s}'_V = \tilde{t}'_V \in H^0(\mathcal{V}, \mathcal{F}).$$

\mathcal{V} は \mathcal{U}' の細分だから, これは結局 $\tilde{s} = \tilde{t}$ ということである. さらに, \tilde{s}, \tilde{t} は $(\tilde{s}_{U'})_{U' \in \mathcal{U}'}, (\tilde{t}_{U'})_{U' \in \mathcal{U}'}$ の細分^{†3}であり, したがって $\iota_{\mathcal{V}}(\tilde{s}) = s, \iota_{\mathcal{V}}(\tilde{t}) = t$. 以上より, $s = t$.

■ $\mathcal{F}^+ :: \text{sheaf if } \mathcal{F} :: \text{separated.}$ $\mathcal{F} :: \text{separated}$ 故に $\mathcal{F}(X) \rightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) :: \text{inj}$ なので $\theta :: \text{inj}$.

cover of $X :: \mathcal{U} = \{U_i \rightarrow X\}_{i \in I} \in \text{Cov}(X)$ と, 以下を満たす元 $(s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}^+(U_i)$ をとる:

$$\forall i, i' \in I, \quad s_i|_{U_i \times U_{i'}} = s_{i'}|_{U_i \times U_{i'}} \tag{*}$$

すると補題 A より,

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}) = s_i|_{U_{i,j}}$$

^{†3} 被覆の細分に合わせた呼び方である. 多分, $H^0(-, \mathcal{F})$ の元に用いるのは独自の用法.

となる $\{U_{i,j} \rightarrow U_i\} \in \text{Cov}(U_i)$ と $\tilde{s}_{i,j} \in \mathcal{F}(U_{i,j})$ がとれる. 各被覆の包含関係は以下の通り.

$$\begin{array}{ccccc} U_{i,j} \times_X U_{i',j'} & \longrightarrow & U_{i,j} & \longrightarrow & U_i \longrightarrow X \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & U_i \times_X U_j & & \end{array}$$

(*) から,

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}|_{U_{i,j} \times_X U_{i',j'}}) = s_i|_{U_{i,j} \times_X U_{i',j'}} = s_{i'}|_{U_{i,j} \times_X U_{i',j'}} = \theta(\tilde{s}_{i',j'}|_{U_{i,j} \times_X U_{i',j'}}).$$

$\theta :: \text{inj}$ より, $\tilde{s}_{i,j}|_{U_{i,j} \times_X U_{i',j'}} = \tilde{s}_{i',j'}|_{U_{i,j} \times_X U_{i',j'}}$. したがって $(\tilde{s}_{i,j}) \in H^0(\{U_{i,j} \rightarrow U\}, \mathcal{F})$ であり, ここから $s \in \mathcal{F}^+(X)$ が得られる. 最後に, 各 i について

$$\forall j, \quad \theta(s_{i,j}) = s|_{U_{i,j}} = (s|_{U_i})|_{U_{i,j}} = s_i|_{U_{i,j}}$$

なので, $\mathcal{F} :: \text{separated}$ より, $s|_{U_i} = s_i$.

■ $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+ :: \text{iso}$ if $\mathcal{F} :: \text{sheaf}$. $\mathcal{F} :: \text{sheaf}$ であるとき, 定義から任意の $\mathcal{U} \in \text{Cov}(X)$ について $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$. なので $\theta :: \text{iso}$.

■ $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^+ :: \text{universal}$. $\text{Shff}(-) = ((-)^+)^+$ とすると, これが sheafification functor となる. その UMP を見よう. $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C}), \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ とする. $\theta: \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \rightarrow \text{Shff}$ の naturality から, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & \text{Shff } \mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\sim} & \text{Shff } \mathcal{G} \end{array}$$

$\theta_{\mathcal{G}}: \mathcal{G} \rightarrow \text{Shff } \mathcal{G} :: \text{iso}$ だから, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ から $\text{Shff } \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が得られた. 次に, 以下で示す可換図式 (1) が与えられたとしよう. 全体を Shff で写し, $\text{Shff}|_{\mathbf{Sh}(X)} \cong \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$ を用いて可換図式 (2) が得られる.

$$\begin{array}{ccc} (1) & \text{Shff } \mathcal{F} & \xrightarrow[f]{g} \mathcal{G} \\ \alpha_{\mathcal{F}} \uparrow & \nearrow \phi & \\ \mathcal{F} & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} (2) & \text{Shff } \mathcal{F} & \xrightarrow[f]{g} \mathcal{G} \\ \parallel & \nearrow \text{Shff } \phi & \\ \text{Shff } \mathcal{F} & & \end{array}$$

したがって $f = g$. 以上で existence & uniqueness が示せた. ■

proof of Thm(3.9). 私のノート^{†4} の Ex1.12 で θ の UMP(universal map property, [1]) から left adjointness を証明している. ■

命題 3.16

topos has small limits and small cocomplete.

(証明). 前半は small product と equalizer を構成すればよい. 後半は $\text{Shff}: \mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{Cat} \mathbf{C})$ が left adjoint functor 故に colimit と交換することを用いれば良い. ■

^{†4} [3] ch.I sec.1 の演習問題への解答: https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section1_ex.pdf

以下の 2 つはセミナー内で将来証明を扱う。

定理 3.17 ([5] 4.1.2)

$X \rightarrow Y :: \text{morphism of schemes}$ とする。representable sheaf $:: \underline{X}$ は $\mathbf{Fppf}(Y)$ 上の sheaf である。したがって \mathbf{fppf} topology より荒い位相を持つ site, 特に big etale site $:: \mathbf{ET}(Y)$ でも sheaf である。

命題 3.18

任意の presheaf は colimit of representable sheaves として表現できる

(証明). 証明は (各点) 左 Kan 拡張を用いて,

$$\mathcal{P} = (\text{Lan}_y y)(\mathcal{P}) = \text{colim}(y \downarrow \mathcal{P} \rightarrow^{\pi_1} \mathbf{C} \rightarrow^y \mathbf{PSh}(\mathbf{C})).$$

ここで $y: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ は米田埋め込みである。([1] Prop8.10 でも同じ命題が証明されている。) ■

注意 3.19

Kan 拡張についての資料をメモしておく。alg-d 氏の公開しているノートが日本語で読める上丁寧で、おすすめ。英語で書かれた Web にある資料では、Jan Pavlík “Kan Extensions in Context of Concreteness”^{†5} もある。

以下はセミナー内でこれ以上現れないが、Topos theory の重要な定理である。

定理 3.20 (Giraud’s theorem)

category $:: \mathbf{T}$ について、 \mathbf{T} が topos であることと \mathbf{T} が以下のような圏であることは同値。

- (G1) a locally small category with a small generating set,
- (G2) with all finite limits,
- (G3) with all small coproducts, which are disjoint, and pullback-stable,
- (G4) where all congruences have effective quotient objects, which are also pullback-stable.

参考: <https://ncatlab.org/nlab/show/Grothendieck+topos#Giraud>.

4 Points and Stalks.

以下は small/big etale site のみで使われるものである。

定義 4.1 (Geometric Point, Etale Neighborhood, [5] 1.3.15.)

- (i) $X :: \text{scheme}$ に対し, $k :: \text{separably closed field}$ を用いて $\bar{x}: \text{Spec } k \rightarrow X$ と表される射を geometric point と呼ぶ.
- (ii) geometric point $:: \bar{x}: \text{Spec } k \rightarrow X$ について, \bar{x} の etale neighborhood とは $U \rightarrow X$ が etale である

^{†5} <http://arxiv.org/abs/1104.3542v1>

ような以下の可換図式のことである.

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k & \xrightarrow{\bar{x}} & X \end{array}$$

- (iii) geometric point $:: \bar{x}: \mathrm{Spec} k \rightarrow X$ について, \bar{x} の 2 つの etale neighborhood $:: U_1, U_2$ を考える. この時, U_1 と U_2 の間の射とは, 以下の図式を可換にする morphism of schemes $:: \eta: U_1 \rightarrow U_2$ のことである.

$$\begin{array}{ccccc} & & U_1 & \xrightarrow{\eta} & U_2 \\ & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{\quad} & X \end{array}$$

注意 4.2

geometric point の定義に separably closed field でなく algebraically closed field を用いることもある.

注意 4.3

より一般的な point of site の定義が存在する ([6] Tag 04JU). これは etale か否かに依らず採用できる. しかしこの一般的な定義は複雑であるし, 我々は small/big etale site しか扱わないので, 我々は以上の定義のみ用いる.

定義 4.4 (Stalk, [5] 1.3.15.)

$X :: \text{scheme}$, $\mathcal{F} \in \mathrm{Et}(X)$ あるいは $\mathcal{F} \in \mathrm{ET}(X)$ とする. さらに $\bar{x}: \mathrm{Spec} k \rightarrow X :: \text{geometric point}$ とする. \bar{x} に対して \bar{x} の etale neighborhood が成す圏を $I_{\bar{x}}$ とする,

- (i) $I_{\bar{x}}$ を用いて stalk of \mathcal{F} at \bar{x} を

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} := \varinjlim_{U \in I_{\bar{x}}} \mathcal{F}(U)$$

と定義する.

- (ii) $U \in I_{\bar{x}}$ について, $\mathcal{F}(U)$ から $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ への標準的射がある. この射による $s \in \mathcal{F}(U)$ の像を $s_{\bar{x}}$ と表し, germ of s at \bar{x} と呼ぶ.

5 Morphism of Shaves.

5.1 Definitions.

定義 5.1 (Injective, Surjective)

(同値な条件を列挙したいので, 命題 (5.3, 5.4) を参照せよ.)

5.2 Examples.

(良い例を見つけていない.)

5.3 Propositions.

定義 5.2 (Kernel, Image.)

($\text{im } \phi$ の categorical な定義は [https://www.wikiwand.com/en/Image_\(category_theory\)](https://www.wikiwand.com/en/Image_(category_theory)) 等にもある.)

命題 5.3

site :: \mathbf{C} 上の sheaf of sets :: \mathcal{F}, \mathcal{G} の間の morphism $\phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ をとる. ϕ について以下の 3 つは同値.

- (i) $\forall U \in \mathbf{C}, \phi_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) :: \text{inj},$
- (ii) $\forall x :: \text{geometric point}, \phi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x :: \text{inj},$
- (iii) $\phi :: \text{mono}.$

この同値な条件を満たす射 ϕ は injective であるという.

(証明). morphism between sheaves on a scheme の場合と全く同じである. ■

命題 5.4

$\mathbf{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を前の命題と同様にとる. ϕ について以下の 4 つは同値.

- (i) $\forall U \in \mathbf{C}, \forall s \in \mathcal{G}(U), \exists \{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U), \exists t_i \in \mathcal{F}(U_i), \phi_{U_i}(t_i) = s|_{U_i}.$
- (ii) $\forall x :: \text{geometric point}, \phi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x :: \text{surj},$
- (iii) $\phi :: \text{epi}.$

この同値な条件を満たす射 ϕ は surjective であるという.

(証明). こちらも, morphism between sheaves on a scheme の場合と全く同じである. 一つだけ証明しよう.

■ $\phi :: \text{surj} \implies \phi :: \text{epi}.$ 以下の図式を考える.

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} \mathcal{H}$$

さらに, $\alpha \circ \phi = \beta \circ \phi$ であると仮定する. 示したいのは $\alpha = \beta$ である. したがって任意の $U \in \mathbf{C}$ 上の section :: $t \in \mathcal{G}(U)$ について $\alpha_U(t) = \beta_U(t)$ を示せば良い. 仮定 $\phi :: \text{surj}$ より, t に対し, 以下を満たす $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ と $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ がとれる.

$$\phi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i).$$

ここで $t|_{U_i}$ は射 $\mathcal{G}(U_i \rightarrow U): \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U_i)$ による t の像である. 仮定より,

$$\alpha_{U_i} \circ \phi_{U_i}(s_i) = \alpha_{U_i}(t|_{U_i}) = \beta_{U_i}(t|_{U_i}) = \beta_{U_i} \circ \phi_{U_i}(s_i).$$

したがって $(\alpha_U(t))|_{U_i} = (\beta_U(t))|_{U_i}$ を得る. $\mathcal{H} :: \text{sheaf}$, 特に $\mathcal{H} :: \text{separated presheaf}$ なので $\alpha_U(t) = \beta_U(t)$. ■

命題 5.5

$\mathbf{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ を前の命題と同様にとる. $\phi :: \text{iso}(=\text{inj}+\text{surj})$ と $\phi :: \text{epi}+\text{mono}$ は同値.

(証明). $\text{inj} \iff \text{mono}, \text{surj} \iff \text{epi}$ は上のとおりなので, これらを単に合わせただけである. ■

6 Topoi.

6.1 Definitions.

定義を4つ再掲する.

定義 6.1 (Topos, Morphism of Topoi.)

- (i) $T :: \text{category が topos であるとは, category of sheaves of sets on a site と圏同値であるということである.}$ なお, topos の複数形は topoi である. これは topos がギリシャ語由来だからである. 意味は「場所」である.
- (ii) $T, T' :: \text{topoi とする. morphism of topoi } f: T \rightarrow T' \text{ とは, 以下の3つの射 (2 functor and 1 isomorphism.) からなる.}$

$$f_*: T \rightarrow T', \quad f^*: T' \rightarrow T, \quad \phi: \text{Hom}_T(f^*(-), -) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{T'}(-, f_*(-)).$$

定義 6.2

$f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ を functor of sites とする. この時, $F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について

$$f_*F(-) := F(f(-))$$

とおくと, $f_*F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ が得られる. $f :: \text{continuous functor ならば, } \mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ に対し同様にして $f_*\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ が得られる.

これを用いた別の stalk の定義の仕方がある.

定義 6.3 (Stalk, another definition)

1点からなる空間には一意に位相が入る. そこで一点空間上の sheaf が成す圏を pt と書く.

- (i) point of topos \mathbf{T} とは, morphism of topoi $x: pt \rightarrow \mathbf{T}$ のことである.
- (ii) $\mathcal{F} \in \mathbf{T}$ と point $x: pt \rightarrow \mathbf{T}$ について, $\mathcal{F}_x := x^*\mathcal{F}$ を stalk of \mathcal{F} at x と呼ぶ.
- (iii) morphism of sheaves $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ が isomorphism であることと $x^*f: x^*\mathcal{F} \rightarrow x^*\mathcal{G}$ が isomorphism であることが同値 (特に $x^*f :: \text{iso ならば } f :: \text{iso})$ であるとき, $\mathbf{T} :: \text{having enough points}$ という.

6.2 Propositions.

命題 6.4

$\mathbf{C}, \mathbf{C}' :: \text{site とする. } \mathbf{C}, \mathbf{C}' \text{ は small category であると仮定する.}$

- (i) $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ を functor of sites とする. この時, functor $f_*: \mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ は left adjoint functor を持つ.
- (ii) $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ を continuous functor とする. この時, functor $f_*: \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ は left adjoint functor を持つ.

(証明). (ii) は (i) から従う. 実際, $f_*: \mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ の left adjoint functor を f^p とすると,

$f^* = Shff f^p$ と置けばこれが $f_*: \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ の left adjoint functor となる. 証明は $Shff :: \text{left adjoint}$ を用いて直接行えば良い. なので (i) のみ示す.

$f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ と $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について, $f_*\mathcal{F}$ は Kan 拡張の言葉 (記号は [4] のもの) を用いて $(f^{op})^{-1}\mathcal{F}$ と書ける. ここで $f^{op}: \mathbf{C}^{op} \rightarrow (\mathbf{C}')^{op}$ は射の反転で得られる関手である. したがって, f_* の左随伴は左 Kan 拡張 $\text{Lan}_{f^{op}}\mathcal{F}$ である. 各点左 Kan 拡張を計算すると,

$$(\text{Lan}_{f^{op}}\mathcal{F})(U) = \text{colim} \left((U \downarrow f)^{op} = f^{op} \downarrow U \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{C}^{op} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Sets} \right).$$

ここで $U \downarrow f^{op}$ は Comma 圏で, π_1 は射影 $[f(V) \rightarrow U] \mapsto V$ である. $f^{op} \downarrow U$ は \mathbf{C}^{op} の部分圏だから, 特にこれは small colimit. $\mathbf{Sets} :: \text{cocomplete}$ なのでこの colimit は存在する. ■

系 6.5

f_* は limit と交換し, f^* は colimit と交換する.

注意 6.6

実際に small となる有用な site となると, おそらく殆ど無い. 実際, $\text{ET}(X), \text{Et}(X)$ は large である. しかし $\text{Et}(X) :: \text{essentially small}$ (i.e. equivalent to small category) なので, 適当に $\text{Et}(X)$ の部分圏を取って, その上の category of presheaves が一致するように出来るかも知れない. なお, \mathbf{Sch}/X は essentially small でさえ無い.

しかし, small でないと我々の議論は立ち行かなくなる. なので technical ではあるが, Grothendieck 宇宙の存在を仮定する (宇宙公理を仮定することと同値) などして任意の圏を small とする.

参考文献

- [1] Steve Awodey. *Category Theory (Oxford Logic Guides)*. Oxford University Press, U.S.A., 2 edition, 8 2010.
- [2] Toms L.Gmez. Algebraic stacks. <https://arxiv.org/abs/math/9911199v1>, 1999.
- [3] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.
- [4] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2nd ed. 1978. softcover reprint of the original 2nd ed. 1978 edition, 2010.
- [5] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [6] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.