ゼミノート #6
Basic of Stacks

七条彰紀

2018 年 12 月 13 日

目次

以下，特に改めて指定がなければ $\mathbf{C}$ :: site, $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ :: fibered category を考える．

1 Definition : Prestack / Stack

定義 1.1 (Prestack, Stack)
関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ を用いて以下のように定義する．

(i) 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ について $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: fully faithfull である時，fibered category $\mathcal{F} \to \mathbf{C}$ は prestack である，という．
(ii) 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ について $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: equivalence である時，fibered category $\mathcal{F} \to \mathbf{C}$ は stack である，という．

(pre)stacks の間の射は，fibered category としての射である．

注意 1.2
prestack の定義は以下のように言い換えられる: 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i\colon U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ をとる．さらに $\xi, \eta \in \mathcal{F}(U)$ をとり，$\epsilon_{\mathcal{U}}$ による像を

$$\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) = (\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}), \quad \epsilon_{\mathcal{U}}(\eta) = (\{\eta_i\}, \{\tau_{ij}\}) \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

とする．この時，任意の射 $\{\alpha_i\}\colon \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) \to \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$ （射 $\alpha_i\colon \xi_i \to \eta_i$ の集合）について，$\mathcal{F}(U)$ の射 $\alpha\colon \xi \to \eta$ が<u>一意に存在し</u>，$\alpha_i = (\phi_i)^*\alpha(\iff \{\alpha_i\} = \epsilon_{\mathcal{U}}(\alpha))$ となる．

標語的に言えば，prestack は「貼り合わせられる射を持つ psuedo-functor」となる．同型射の貼り合わせは同型射であるから，prestack は「貼り合わせが（存在すれば）一意な対象を持つ psuedo-functor」である．

注意 1.3

このノートでは，fiber が条件を満たす fibered category として (pre)stack は定義されている（fiber を用いずに (pre)stack を定義することも出来るが，今回は採用しなかった）．なので形式上，(pre)stack は fibered category を経由せず，特別な psuedo-functor として定義できる．しかし実際にそのように定義されることは少ない．

では psuedo-functor として定義しない積極的な理由はと言うと，実用上，元の fibered category にも言及する場合が多いからであると思われる．fiber だけでなく元の fibered category に言及する理由については，このセミナーのノート session 4.5 [†1]，注意 2.8 を参考にして欲しい．

定義 1.4 (Sub(pre)stack)
stack :: $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ の sub(pre)stack とは，$\mathcal{F}$ の部分圏 $\mathcal{G}$ であって，π と包含関手の合成 $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}$ が fibration であり，さらにその fiber が (pre)stack であるもの．

2 Example : Stack

命題 2.1 ([1] Prop4.9)

(i) separated presheaf of sets is a prestack.

(ii) sheaf of sets is a stack.

(証明)．$\mathbf{C}$ :: site, $\mathcal{F}\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$ :: presheaf とする．$U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ を任意に取る．

今，圏 $\mathcal{F}(U), \mathcal{F}(\mathcal{U})$ は集合（離散圏）である．なので関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ は写像である．さらに射 σ_{ij} も恒等射しかないから，$\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象は，任意の i, j について $\xi_i|_{U_{ij}} = \xi_j|_{U_{ij}}$ を満たす $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ の族 $\{\xi_i\}_i$ であると考えて良い．このセミナーノートの session3 の記号を用いれば，$\mathcal{F}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ということに成る．

二つのデータ $\{\xi_i\}, \{\eta_i\}$ の間の射もやはり恒等射しかないから，「関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が fully faithful である」という仮定は「写像 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が単射である」と言い換えられる．これはすなわち，$\mathcal{F}$ が separated presheaf であるということである．

「関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が essentially surjective である」という仮定は「写像 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が全射である」と言い換えられるから．$\epsilon_{\mathcal{U}}$ が equivalence であることは $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と $\mathcal{F}(U)$ の間に全単射が存在するということである．これはすなわち，$\mathcal{F}(U)$ が sheaf であるということである． ∎

注意 2.2
この命題で分かるとおり，prestack は presheaf の抽象化ではなく，separated presheaf の抽象化である．そうすると，我々は psuedo-functor $\mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$ を prestack と呼び，今 prestack と呼んでいるものは separated prestack と呼ぶべきなのかも知れない．我々がそうしないのは，後に定義される "separated stack" との混乱を避けるためである．

以下の二つの例は後にセミナーでも証明を扱う．

例 2.3

[†1] URL : https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/AlgebraicStacks/session4_5_FiberedCategoriesContinued.pdf

$X \in \mathbf{C}$ に対し，圏 $\mathbf{Shv}/X$ を以下のように定める．

Objects.

X への射を持つような $\mathbf{C}$ の対象 :: U と，U 上の sheaf :: $\mathcal{U}$ の組．

Arrows.

射 $(U,\mathcal{U}) \to (V,\mathcal{V})$ は，$\mathbf{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と，morphism of sheaves on V :: $f^{\#}\colon \mathcal{V} \to f_*\mathcal{U}$ の組．

この時，fibered category :: $\mathbf{Shv}/X \to \mathbf{C}/X$; $(U,\mathcal{U}) \mapsto U$ は stack である．この例で考える sheaf を quasi-coherent sheaf に制限してて得られる fibered category :: $\mathbf{QCoh}/X \to \mathbf{C}/X$ も stack である．この二つの例については，このセミナーでも後に証明を扱う．

例 2.4

$X \in \mathbf{Sch}$ に対し，圏 $\mathbf{QCoh}/X$ を以下のように定める．

Objects.

$\mathrm{Fpqc}(X)$ [†2]の対象 :: U と，U 上の sheaf (on fpqc topology):: $\mathcal{U}$ の組．

Arrows.

射 $(U,\mathcal{U}) \to (V,\mathcal{V})$ は，$\mathbf{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と，morphism of sheaves on V :: $f^{\#}\colon \mathcal{V} \to f_*\mathcal{U}$ の組．

この時，fibered category :: $\mathbf{QCoh}/X \to \mathbf{C}/X$; $(U,\mathcal{U}) \mapsto U$ は stack である．

例 2.5 ([2] 4.4.1)

以下で定まる fibered category は stack である．

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{matrix}\text{pair of scheme over } S :: Y \\ \text{and closed imm. } W \hookrightarrow Y\end{matrix}\right\} & \to & \mathrm{Fppf}(S) \\ (Y, W \hookrightarrow Y) & \mapsto & Y \end{array}$$

例 2.6 ([2] 4.4.4)

以下で定まる fibered category は stack である．

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{matrix}\text{pair of scheme over } S :: Y \\ \text{and open imm. } W \hookrightarrow Y\end{matrix}\right\} & \to & \mathrm{Fppf}(S) \\ (Y, W \hookrightarrow Y) & \mapsto & Y \end{array}$$

以下の二つの例は後に一般化される．

例 2.7 ([1] §4.3.1)

arrow category :: $\mathbf{Sch}^{\to}$ の対象を affine morphism に制限したものを圏 $\mathbf{Aff}$ とする．以下で定まる fibered category は stack である．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Aff} & \to & \mathrm{Fppf}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \\ [X \to Y] & \mapsto & Y \end{array}$$

[†2] 圏 $\mathbf{Sch}/X$ に fpqc topology を備えたもの．

例 2.8 ([2] 4.4.15)
quasi-compact open imbedding の後に affine morphism を合成した射のことを quasi-affine morphism という．arrow category :: $\mathbf{Sch}^{\to}$ の対象を quasi-affine morphism に制限したものを **QAff** とする．以下で定まる fibered category は stack である．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{QAff} & \to & \mathrm{Fppf}(\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}) \\ [X \to Y] & \mapsto & Y \end{array}$$

3 Proposition : Stack

命題 3.1 ([2] Prop4.12)
二つの equivalent な fibered category があり，かつ一方が stack ならば，もう一方も stack である．

(証明). $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: fibered categories over $\mathbf{C}$ とし，$F\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ :: morphism of fibered categories とする．この時 cover of $U \in \mathbf{C}$ :: $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}$ について $F_{\mathcal{U}}$ を定義する．

$$\begin{array}{lccc} F_{\mathcal{U}}\colon & \mathcal{F}(\mathcal{U}) & \to & \mathcal{G}(\mathcal{U}) \\ \textbf{Objects}: & (\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}) & \mapsto & (\{F\xi_i\}, \{F\sigma_{ij}\}) \\ \textbf{Arrows}: & \{\alpha_i\} & \mapsto & \{F\alpha_i\} \end{array}$$

更に二つの射 $F, G\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とその間の base-preserving natural transformation :: $\rho\colon F \to G$ に対し，$\rho_{\mathcal{U}}\colon F_{\mathcal{U}} \to G_{\mathcal{U}}$ を次のように定義する．

$$(\rho_{\mathcal{U}})_{(\{\xi_i\},\{\sigma_{ij}\})} = \{\rho_{\xi_i}\}.$$

以上から，F が equivalence ならば $F_{\mathcal{U}}$ も quivalence である．したがって以下の commutative diagram of weak 2-category [†3] が得られる．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{U}}} & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F_{\mathcal{U}}} \\ \mathcal{G}(U) & \xrightarrow[\epsilon_{\mathcal{U}}]{} & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \end{array}$$

この可換図式から，主張が得られる． ∎

命題 3.2 ([2] Exc 4.I)
$\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ :: stack on $\mathbf{C}$, $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ :: morphism of stacks とする．f :: isomorphism は以下の 2 条件が成立することと同値．

(a) 任意の $X \in \mathbf{C}$ について，fiber の間の射 $f_X\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}'(X)$ は fully-faithful.
(b) 任意の $X \in \mathbf{C}$ と $x \in \mathcal{F}'(X)$ について，covering of X :: $\{\phi_i\colon X_i \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$ が存在し，全ての x の pullback :: $\phi_i^* x \in \mathcal{F}'(X_i)$ が $\mathcal{F}(X_i)$ の essential image に属す．

(証明). (TODO) ∎

†3 射の合成の間に natural isomorphism が存在するという意味で可換.

補題 3.3
site :: $\mathbf{C}$ を，空集合の cover として空集合を持つ ($\emptyset \in \mathrm{Cov}(\emptyset)$) ものとする．$\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ :: stack について，以下の圏同値が成立する．

$$\mathcal{F}(\emptyset) \simeq \mathbf{1}.$$

特に，$\mathcal{F}(\emptyset)$ の任意の二つの対象の間には，ただ一つの同型射が存在する．

(証明)．category of descent data :: $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象を考える．これは $\mathcal{U}$ で添字付けられた対象の族の二つ組である．なので $\mathcal{U} = \emptyset$ について，$\mathcal{F}(\emptyset)$ の対象は $(\emptyset, \emptyset)$ しかない．射も $\mathcal{U}$ で添字付けられた族であるから，非自明な射は存在しない． ∎

この補題の仮定は奇妙に見えるかも知れないが，以下の通り，このように仮定しても問題はないし，我々が扱う殆どの site はこの仮定を満たす．

主張 3.4
圏 $\mathbf{C}$ の任意の対象 $U \in \mathbf{C}$ について，命題「$\emptyset \in \mathrm{Cov}(U)$」は Grothendieck topology の公理（定義）と独立である．すなわち，$\emptyset \in \mathrm{Cov}(U)$ としてもしなくても矛盾は生じない．

(証明)．命題「$\emptyset \in \mathrm{Cov}(U)$」を P と書く．Grothendieck topology の定義を見直そう．cover of $\emptyset$ :: $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ が満たすべき条件を記号で書き下す．

(a) $^\forall[V \to U] \in \mathbf{C}/U,\quad \left[^\forall[U' \to U] \in \mathcal{U},\ ^\exists U' \times_U V\right] \implies \{U' \times_U V \to V \mid [U' \to U] \in \mathcal{U}\} \in \mathrm{Cov}(V).$
(b) $^\forall\mathcal{V} := \{\mathcal{U}'_{U'} \mid \mathcal{U}'_{U'} \in \mathrm{Cov}(U')\}_{U' \in \mathcal{U}},\quad \{U'' \to U' \to U \mid [U' \to U] \in \mathcal{U}, [U'' \to U'] \in \mathcal{U}'_{U'}\} \in \mathrm{Cov}(U).$

クラス X と述語 F について "$^\forall x \in X,\quad F(x)$" という文は "$^\forall x,\quad [x \in X \implies F(x)]$ の省略形である．したがって，$X = \emptyset$ であるとき，"$^\forall x \in X,\quad F(x)$" という文は任意の F について真．また，$\{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$．

なので，以上の文を $\mathcal{U} = \emptyset$ の場合に考えると（すなわち P を仮定すると），いずれも P と同値に成る．よって $P \implies P$ ということになる．一方，否定 $\neg P$ を仮定しても矛盾が生じないことは明らか． ∎

例 3.5
圏 $\mathbf{C}$ を $\mathbf{Sch}$ の部分圏や $\mathbf{Sch}/S$ (S :: scheme) とする．morphism of schemes のクラス $\mathcal{P} \subset \mathrm{Arr}(\mathbf{C})$ をとり，以下のように $\mathbf{C}$ 上の Cov を定めたとする:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U) =& \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} :: \text{jointly surjective family and } ^\forall\phi \in \mathcal{U},\quad \phi \in \mathcal{P}\} \\ =& \left\{\mathcal{U} \;\middle|\; \coprod_{U' \in \mathcal{U}} U' \to U :: \text{surjective and } ^\forall\phi,\quad [\phi \in \mathcal{U} \implies \phi \in \mathcal{P}]\right\}.\end{aligned}$$

この時，$\coprod_{U' \in \emptyset} U' = \emptyset$ なので $\emptyset \in \mathrm{Cov}(\emptyset)$．

このセミナーで定義した Zariski site, etale site, ... などは全てこの主張のように定義されている．

補題 3.6
圏 $\mathbf{C}$ を $\mathbf{Sch}$ の部分圏や $\mathbf{Sch}/S$ (S :: scheme) とする．$U \in \mathbf{C}, \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ をとり，$V = \coprod_i U_i$ と置く．

$\{U_i \to V\} \in \mathrm{Cov}(V)$ と仮定する[†4]と $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ :: stack について，圏同値 (TODO: strict 2-equivalence?

[†4] 例えば，Zariski topology より細かい位相ならばこの仮定は成立する．

ここは ϵ と圏同型の合成)

$$\mathcal{F}\left(\bigsqcup_i U_i\right) \simeq \prod_i \mathcal{F}(U_i)$$

が成立する．

(証明). 瑣末なことでは有るが: $\{U_i \to V\}$ の添字について，$i \neq j$ ならば $U_i \neq U_j$ である，と仮定して一般性を失わない．

$\mathcal{U} = \{\mathrm{inj}_i \colon U_i \to V\} (\in \mathrm{Cov}(V))$ と置く．次の関手が圏同値であることを示す．

$$\begin{array}{cccc} E\colon & \mathrm{im}\,\epsilon_{\mathcal{U}} & \to & \prod_i \mathcal{F}(U_i) \\ \textbf{Objects}\colon & (\{(\mathrm{inj}_i)^*\xi\}_i, \{\sigma_{ij}\}_{i,j}) & \mapsto & ((\mathrm{inj}_i)^*\xi)_i \\ \textbf{Arrows}\colon & \{\alpha_i\}_i & \mapsto & (\alpha_i)_i \end{array}$$

$\xi_i := (\mathrm{inj}_i)^*$ とおく．これが示せれば，$\mathcal{F}$ :: stack なので主張も得られる．

まず，仮定の状況では，injection map (coprojection) :: $U_i \to V$ についての fiber product は次のように成る．

$$U_{ij} = U_i \times_V U_j = \begin{cases} U_i & (U_i = U_j) \\ \emptyset & (U_i \neq U_j). \end{cases}$$

■E **:: essentially surjective.** $i \neq j$ の時，σ_{ij} は $\mathcal{F}(U_{ij}) = \mathcal{F}(\emptyset)$ の射であるから，$\xi_i|_\emptyset$ と $\xi_j|_\emptyset$ の間に存在するただ一つの射である．一方，$i = j$ の時は，$(\mathrm{pr}_i)^*(\mathrm{inj}_i)^*\xi$ と $(\mathrm{pr}_j)^*(\mathrm{inj}_j)^*\xi$ が完全に等しいので，$\sigma_{ij} = \mathrm{id}_{\xi_i}$．以上より，対象同士の次の対応は $\mathrm{Ob}(E)$ の逆対応と成る．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ob}\left(\prod_i \mathcal{F}(U_i)\right) & \to & \mathrm{Ob}\,(\mathrm{im}\,\epsilon_{\mathcal{U}}) \\ (\xi_i)_i & \mapsto & (\{\xi_i\}_i, \{\sigma_{ij}\}_{i\neq j} \cup \{\mathrm{id}_{\xi_i}\}_i) \end{array}$$

これは E :: essentially surjective を意味する．

■E **:: fully-faithfull.** また，上で述べたことから，射 $\{\alpha_i\}\colon \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) \to \epsilon_{\mathcal{U}}(\eta)$ に課された条件が，任意の射の組み合わせ $(\alpha_i \colon \xi_i \to \eta_i)_i$ について成立することも分かる（$i \neq j$ と $i = j$ の場合で証明は異なる）．なので全単射

$$\mathrm{Hom}(\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi), \epsilon_{\mathcal{U}}(\eta)) = \mathrm{Hom}((\xi_i)_i, (\eta_i)_i) = \mathrm{Hom}(E(\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)), E(\epsilon_{\mathcal{U}}(\eta)))$$

が得られる．これは E :: fully-faithfull を意味する． ∎

定理 3.7 (Stackification of category fibered by groupoids.)
$\mathbf{C}$ :: site, $\mathcal{F}$ :: category fibered by groupoids over $\mathbf{C}$ とする．この時，$\bar{\mathcal{F}}$ :: stack in groupoids over $\mathbf{C}$ と $\theta\colon \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$ :: morphism of fibered category が存在し，

$$(-) \circ \theta \colon \mathrm{HOM}_{\mathbf{C}}(\bar{\mathcal{F}}, -) \to \mathrm{HOM}_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}, -)$$

が圏同値となる．

（TODO: これは [2] Thm4.6.5 からとった．しかし，https://stacks.math.columbia.edu/tag/02ZM に一般の場合が書かれている．出来ればこちらを理解したい）

例 3.8
presheaf の stackification は sheafification と一致する.

例 3.9 (arXiv:math/0305243v1, Prop3.6)
S :: scheme, $\mathcal{M}$ :: algebraic stack over $\mathbf{Sch}/S$, $\mathcal{G}$ :: sheaf in groups over $\mathbf{Sch}/S$, acting on $\mathcal{M}$ とする. この時, $\mathcal{M}$ の $\mathcal{G}$ による categorical quotient :: $\mathcal{M}/\mathcal{G}$ は, 以下の prestack（2-functor として定義する）:: $\mathcal{P}$ の stackification として定義される.

Objects of $\mathcal{P}(U)$. $\mathcal{M}(U)$ の対象と同じ.
Arrows of $\mathcal{P}(U)$. $g \in \mathcal{G}(T)$ と $\mathcal{M}(U)$ の射 $g * x \to y$ の組.

ただし $U \in \mathbf{Sch}/S$ は任意.

参考文献

[1] Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008).

[2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.