ゼミノート #1
Etale Morphisms

七条彰紀

2018 年 9 月 27 日

[1]

1 定義

定義 1.1 (Infinitesimal Thickening, Formally Smooth/Unramified/Etale) (i) $i\colon Y_0' \hookrightarrow Y'$ :: closed embedding について，defining ideal :: $\ker i^{\#}$ が nilpotent [†1]であるとき，Y_0' を Y' の infinitesimal thickening（無限小肥大？）と呼ぶ．あるいは i を infinitesimal thickening と呼ぶ．

(ii) Y' :: affine Y-scheme, $Y_0'(\hookrightarrow Y')$ :: infinitesimal thickening of Y' とする．$f\colon X \to Y$ について，以下の図式を見よ．

$$\begin{tikzcd} Y_0' \arrow[r, red] \arrow[d, hook, "\text{inf. thi.}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] \arrow[ur, blue] & Y \end{tikzcd}$$

この時，次の写像が定まる．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_Y(Y', X) & \to & \mathrm{Hom}_Y(Y_0', X) \\ {\color{blue}\to} & \mapsto & {\color{red}\to} \end{array}$$

この写像が surjective injective, bijective であるとき，それぞれ formally smooth, formally unramified, formally etale という．

定義 1.2 ((Locally) Of Finite Presented Module/Algebra/Sheaf/Morphism)

(i) R-module :: M が finitely presented module であるとは，次の完全列が存在すること．

$$A^{\oplus r} \longrightarrow A^{\oplus s} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(ii) surjective ring homomorphism :: $\phi\colon R[x_1, \ldots, x_s] \to A$ が存在し，$\ker \phi$ が finitely generated ideal であるとき，A :: finitely presented R-algebra (of finite presentation over R) という．

(iii) $\mathcal{F}$ :: quasi-coherent sheaf on a scheme X とする．$\mathcal{F}$ :: locally finitely presented とは，任意の affine open subscheme of X :: $\mathrm{Spec}\, A \subseteq X$ について，$\Gamma(\mathrm{Spec}\, B, \mathcal{F})$ が finitely presented B-<u>module</u>であること．

[†1] i.e. $^{\exists}n > 0$, $(\ker i^{\#})^n = 0$

(iv) $f\colon X\to Y$ :: locally of finite presentation であるとは，任意の $\operatorname{Spec} B\subseteq Y$ と $\operatorname{Spec} A\subseteq f^{-1}(\operatorname{Spec} B)$ について，A :: finitely presented B-algebra であるということ．あるいは（同値な条件として），affine open cover of Y :: $Y=\bigcup_i \operatorname{Spec} B_i$ が存在して，任意の $\operatorname{Spec} A_{ij}\subseteq f^{-1}(\operatorname{Spec} B_i)$ について，A_{ij} :: finitely presented B_i-algebra であるということ．

(v) $f\colon X\to Y$ が quasi-compact であるとは，任意の affine open subset of X :: $\operatorname{Spec} A$ について $f^{-1}(\operatorname{Spec} A)$ :: quasi-compact であること．あるいは（同値な条件として），affine open cover of Y :: $Y=\bigcup_i \operatorname{Spec} B_i$ が存在して，$f^{-1}(\operatorname{Spec} B_i)$ :: quasi-compact であること．

(vi) $f\colon X\to Y$ が quasi-separated であるとは．また diagonal morphism :: $\Delta\colon X\to X\times_Y X$ [†2] が quasi-compact であること．

(vii) $f\colon X\to Y$ が locally of finite presentation かつ quasi-compact かつ quasi-separated である時，f :: finitely presented という．

環 R や scheme :: Y を noetherian とすれば，(locally) of finite presentation と (locally) of finite type は同値に成る．一般に (locally) of finite presentation の方が強い条件である（例を参照せよ）．

定義 1.3 (Smooth/Unramified/Etale)
morphism :: $f\colon X\to Y$ は，formally smooth / unramified / etale かつ finitely presented ならば smooth / unramified / etale という．

unramified については，finite type のみ要求する定義もある．finitely presented を要求するのは EGA からのもので，我々が主に参照している [3] もこの定義を取っている．

2 定義に対する例

例 2.1
locally of finite presentation かつ quasi-compact だが NOT quasi-separated である例を挙げる．
以下のように設定する．

- k :: field,
- $Y=\operatorname{Spec} k[x_1,x_2,\dots]$,
- $z=(x_1,x_2,\dots)\in Y$,
- $U=Y-\{z\}$.

この時，U は quasi-compact でない．これは U :: quasi-compact $\iff$ z :: finitely generated からわかる[†3]．

[†2] Δ は以下のように pullback の普遍性から得られる射である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\Delta"] \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & X\times X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

[†3] 私のノート: https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section2_ex.pdf 補題 Ex2.13.2 (II) に証明がある．

X を，二つの Y のコピーを U で貼り合わせたものとし，$X_1, X_2 \subseteq X$ をその Y のコピーとする．すなわち $X_1, X_2 \cong Y$．この同型を $\phi_i\colon X_i \to Y$ と名付ける．このとき，$f\colon X \to Y$ を ϕ_1, ϕ_2 の U に沿った貼り合わせとする．こうすると $f|_{X_i} = \phi_i$ となる．

■f :: locally of finite presentation.　Y :: affine scheme で，$f^{-1}(Y) = X_1 \cup X_2$ であり，$X_1, X_2 \cong Y$ であった．なので f :: locally of finite presentation.

■f :: quasi-compact.　同じく，X_1, X_2 :: quasi-compact なので $f^{-1}(Y) = X_1 \cup X_2$ が quasi-compact.

■f :: NOT quasi-separated.　$\mathrm{sp}(X \times_Y X)$ と $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ を考えると次のように成る．

$$\Delta\colon x \mapsto (\phi_1^{-1}(x), \phi_2^{-1}(x)).$$

一方，$X_1 \times_Y X_2 (\subset X \times X)$ は，$X_1, X_2 (\cong Y)$ が affine なので affine. そこで逆像 $\Delta^{-1}(X_1 \times_Y X_2)$ を取ると，これは U である．既に述べたとおり，これは NOT quasi-compact.

例 2.2

■Smooth (BUT NOT Etale) Morphism.　次のように定める．

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathrm{Spec}\, k[x,y] & \to & \mathrm{Spec}\, k[t] \\ & (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

これは affine scheme の間の射なので quasi-separated．$f^{-1}(\mathrm{Spec}\, k[t]) = \mathrm{Spec}\, k[x,y]$ が noetherian scheme なので finitely presented．あとは formally smooth であることを示せば良い．

■Unramified (BUT NOT Etale) Morphism.　次のように定める:

$$\begin{aligned} g\colon \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}[x] \sqcup \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}[y] &\to \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}[t] \\ x \mapsto t & \qquad \text{on } \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}[x] \\ y \mapsto t & \qquad \text{on } \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}[y] \end{aligned}$$

f の場合と同様に，formally unramified だけ示せば良い．

■Etale Morphism.

$$\begin{array}{cccc} h\colon & \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}[u, u^{-1}, y]/(y^d - u) & \to & \mathrm{Spec}\, \mathbb{Q}[t, t^{-1}] \\ & (u,y) & \mapsto & u \end{array}$$

$A = \mathbb{Q}[t, t^{-1}], B = \mathbb{Q}[u, u^{-1}, y]/(y^d - u)$ とおくと．h に対応する環準同型は $h^{\#}\colon A \to B; t \mapsto ua \bmod (y^d - u)$．$f$ の場合と同様に，formally etale だけ示せば良い．

以下の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & R/I \\ A \arrow[u, "h^{\#}"] \arrow[r, "\phi"'] & R \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

ここで $I \subseteq R$ はイデアルで，$I^N = 0$ となる整数 $N > 0$ が存在する．与えられた α から図式を可換にする β を構成し，このような β が α に対し唯一つであることを示す．まず β は $t \in B$ の像のみで定まることに注意

する．図式が可換であることと，次が成立することは同値．

$$\beta h^{\#}(t) = \beta(u) = \phi(t), \qquad \pi\beta(u) = \alpha(u)$$

よって $\beta(u) = \phi(t)$ で β を定めれば良い．このように定めれば後者も成立する．また，この構成から明らかに β はただ一つ．

■Formally Etale BUT NOT Etale Morphism.　例 (2.1) の morphism :: $f\colon X \to Y$ がそうである．このことを示すには，Formally etale であることだけ確かめれば十分．

3　命題

命題 3.1 ([3] Prop1.3.6 (i))
$f\colon X \to Y$ を morphism of schemes とする．この時 $\Omega_{X/Y}$ は次のように成る．

(i) f :: smooth $\Longrightarrow$ $\Omega_{X/Y}$ :: locally free sheaf of finite rank.
(ii) f :: unramified $\Longleftrightarrow$ $\Omega_{X/Y} = 0$.
(iii) f :: etale $\Longrightarrow$ $\Omega_{X/Y} = 0$.

(証明)．証明は [2] §25 の内容を一部使う．特に §25 始めから Thm25.1 の直前までがわかっていれば良い．

主張は local なものだから，$X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$ と仮定して良い．f :: smooth より B :: finitely presented A-algebra. f に対応する準同型を $\phi\colon A \to B$ とする．

(i) を示すために，$\Omega_{B/A}$ :: projective B-module を示す（projective ならば locally free であることは [4] section 10.84 に証明がある）．これはすなわち，B-module の以下の図式に対し，図式を可換にする $\tilde{D}\colon \Omega_{B/A} \to M$ が存在するということである．

$$\begin{tikzcd} & \Omega_{B/A} \arrow[d, "D"] \\ M \arrow[r, two heads, "t"] & N \end{tikzcd}$$

ここで t :: surj.

次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_D"] & B[N] \\ A \arrow[u, "\phi"] \arrow[r] & B[M] \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

ここで $B[M]$ は [2] §25 でいう $B * M$ である[†4]．$B[N]$ も同様．f_D は A-derivation :: D に対応する射 $b \mapsto (b, D(b))$ である．$B[M] \to B[N]$ は $(b, m) \mapsto (b, t(m))$ で与えられる射で，したがって全射であり核は $0 \oplus (\ker t)$．これは square-zero ideal である．そして ϕ :: formally smooth であるから，図式を可換にする $B \to B[M]$ が存在する．これに対応する A-derivation が所望の $\tilde{D}$ である．

†4　これらは B-algebra で，加群としては $B \oplus M$ で，乗法は $(b, m) \cdot (b', m') = (bb', bm' + b'm)$ で定まる．重要な特性として，$\pi_M : B[M] \to B; (b, m) \mapsto b$ の kernel は square-zero で，π_M の A-algebra section (section which is A-albgebra morphism) と A-derivation $B \to M$ が一対一に対応する．

(ii) を示す．R :: ring, $I \subseteq R$ :: ideal を $I^2 = 0$ を満たすものとする．以下が可換図式だったとしよう．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\lambda"] & R/I \\ A \arrow[u, "\phi"] \arrow[r] & R \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

この時，λ を lifting of θ と呼ぶ．[2] §25 より[†5]，

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A}, I) = \mathrm{Der}_A(B, I) = \{\lambda - \lambda' \quad | \lambda, \lambda' :: \text{lifting of } \theta\}$$

となっている．ϕ :: formally unramified なので，lifting of θ は一つしか無い．よって $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A}, I) = 0$. 任意の R, I についてこれが成立するので，これは $\Omega_{B/A} = 0$ と同値．

formally etale $\Longrightarrow$ formally unramified なので (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らか． ∎

命題 3.2 ([3] Prop1.3.6 (iii))
exact seq

命題 3.3
$f\colon X \to Y$ を，locally of finite presentation とする．f :: smooth と次の条件は同値である:

任意の点 $x \in X$ について，x と $y = f(x) \in Y$ の間に affine neighborhood

$$x \in \mathrm{Spec}\, A \subset X, \qquad y = f(x) \in \mathrm{Spec}\, B \subseteq Y \qquad (\text{with } f(\mathrm{Spec}\, B) \subseteq \mathrm{Spec}\, A)$$

が存在し，ある n, s と $f_1, \ldots, f_s, g \in A[x_1, \ldots, x_n]$ について

$$B \cong \left(\frac{A[x_1, \ldots, x_n]}{(f_1, \ldots, f_s)} \right) [1/g].$$

さらに，Jacobian matrix ($n \times (n-r)$-matrix)

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i,j}$$

の部分 $(n-r)$ 正方行列は，いずれも可逆（行列式が B の unit element)．

さらに，f :: etale と，この条件で $n = r$ であることは同値である．

命題 3.4 ([4], Tag 02G7)
$f\colon X \to Y$ が unramified morphism ならば，任意の $y \in Y$ について，fiber of f :: X_y は disjoint union of spectra of finite separable field extensions of $k(y)$.

命題 3.5 ([4], Tag 04HM)
$f\colon X \to Y$ を separated etale morphism とする．$y \in Y$ に対し $f^{-1}(s) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ とする（点が有限個であることは命題 (3.4) による)．tale neighbourhood :: $\nu : (U, u) \to (Y, y)$ が存在し，$X_U = X \times_Y U$ の disjoint union decomposition

$$X_U = \bigsqcup V_{i,j}$$

について $V_{i,j} \cong U$.

[†5] あるいは私のノート https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section8_ex.pdf の Ex8.6(a) の解答より．

4　命題に対する例

5　演習問題

参考文献

[1] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[2] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge University Press, revised edition, 5 1989.

[3] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[4] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.