以下での (*) とは，次のもの: X :: integral noetherian separated (over $\mathbb{Z}$) scheme which is regular in codimension one.

Ex6.1 If X Satisfies (*), $\mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$.

$X' = X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \mathbb{P}^n_X$ とおく．また，$S = \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n]$ とし，$\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$ とみなす．

■X' :: integral noetherian separated. X の affine open cover を $\{\operatorname{Spec} A_i\}_{i=0}^r$ とすると，A_i :: integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. $\mathbb{P}^n$ の affine open cover は $\{\operatorname{Spec} S_{(x_j)}\}_{j=0}^n$ で与えられる．$S_{(x_j)}$ も integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. したがって $R_{ij} = A_i \otimes_{\mathbb{Z}} S_{(x_j)}$ とおくと，X' は $\operatorname{Spec} R_{ij}$ の張り合わせであり（Thm3.3），R_{ij} :: integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. 任意の $(i,j),(i',j')$ について $R_{ij}, R_{i'j'}$ が交わることから，X' 全体でも irreducible. よって X' :: integral noetherian scheme. being separated :: stable under base extension より，X' :: separated.

■X' :: regular in codimension one. $x = \tilde{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec} R_{ij}$ とする．$A_i \otimes \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n]_{(t_j)} \cong A_i[t_0, \dots, t_n]_{(t_j)}$ を，簡単のため $j = 0$ とし，$R_0 := A[\{t_j\}_{j=0}^n]$ とおく．Ati-Mac Prop3.1 より，$\tilde{\mathfrak{p}} \subset (R_0)_{(t_0)}$ に対応する height $= 1$ の素イデアル $\mathfrak{p} \subset R_0$ がただひとつ存在し，$\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(t_0)}$ となる．これを使って計算すると，以下のようになる．

$$\mathcal{O}_{X',x} = ((R_0)_{(t_0)})_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a/t_0^d}{b/t_0^e} \;\middle|\; d, e \geq 0, a \in (R_0)_d, b \in (R_0 - \mathfrak{p})_e \right\} \cong A[\{t_j\}_{j=1}^n]_{\mathfrak{p}'} =: R_1.$$

最後の同型は次のように与えられる．

$$\begin{array}{ccc} (R_0)_{(t_0)} = A[\{t_j\}_{j=0}^n]_{(t_0)} & \to & R_1 = A[\{t_j\}_{j=1}^n] \\ f(t_0, t_1, \dots, t_n) & \mapsto & f(1, t_1, \dots, t_n) \\ g(t_1/t_0, \dots, t_n/t_0) & \leftarrow & g(t_1, \dots, t_n) \end{array}$$

$\mathfrak{p}'$ はこの写像による $\mathfrak{p}$ の像である．R_1 は A と同様に integral noetherian ring. $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}' \cap A$ とおく．$A \subset R_1$ は flat extension だから，going-down theorem が成立し，$\operatorname{height} \mathfrak{q} \leq \operatorname{height} \mathfrak{p}' = 1$．また，計算すると

$$(R_1)_{\mathfrak{p}'} \cong (A_{\mathfrak{q}}[\{t_j\}_{j=1}^n])_{\mathfrak{p}'}.$$

$\operatorname{height} \mathfrak{q} = 1$ の時，仮定から $A_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{X,\mathfrak{q}}$ :: regular local ring. よって $(R_1)_{\mathfrak{p}'}$ は D.V.R. $\operatorname{height} \mathfrak{q} = 0$ すなわち $\mathfrak{q} = 0$ の時，同様に $(R_1)_{\mathfrak{p}'}$ は体 $A_{(0)}$ 上の多項式環の $\mathfrak{p}$ における局所化だから D.V.R.

■Another Proof: X' :: regular in codimension one. $\mathbb{P}^n$ は $n+1$ 個の $\mathbb{A}^n$ で被覆出来るから，$X \times \mathbb{P}^n$ は $n+1$ 個の $X \times \mathbb{A}^n$ で被覆できる．$X \times \mathbb{A}^n$ は Prop6.6 のとおり (*) を満たすから，$X \times \mathbb{P}^n$ も (*) を満たす．

■Define $\mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$. $\mathfrak{p} = (t_0) \in \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_n] = S$ とすると，Krulls Hauptidealsatz より $\operatorname{height} \mathfrak{p} = 1$．したがって $Z = \mathrm{pr}_2^{-1}(V(\mathfrak{p}))$ とおくと，Z :: irreducible closed subset of codim $= 1$ in $X \times \mathbb{P}^n$ [†1]．$U = Z^c = \mathrm{pr}_2^{-1}(V(\mathfrak{p})^c) \cong X \times \mathbb{A}^n$ だから，Ex3.9a と Prop6.6 より，$\mathrm{Cl}(U) \cong \mathrm{Cl}(X)$. したがって Prop6.5 の完全列は以下のようになる．

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{j} \mathrm{Cl}(X) \longrightarrow 0$$

[†1] Z :: irreducible は最初の paragraph と同様に示しても良いし，ch I, Ex3.5 と同様に topological に示しても良い．codim $= 1$ は topological に分かる．pr_1 は連続な全射だから，$Z_0 \subsetneq Z_1$ が異なる 2 つの irreducible closed subset の列ならば，$\mathrm{pr}_1^{-1} Z_0 \subsetneq \mathrm{pr}_1^{-1} Z_1$ もそうである（$\neq$ は全射性からくる）．したがって $\operatorname{codim}(\mathfrak{p}, X) = 1$ より $\operatorname{codim}(\mathrm{pr}_1^{-1} \mathfrak{p}, X) \leq 1$. $\operatorname{codim}(\mathrm{pr}_1^{-1} \mathfrak{p}, X) = 0$ は $V(\mathrm{pr}_1^{-1} \mathfrak{p}) = X$ と同値である．

$\mathrm{Cl}(X\times\mathbb{P}^n)\cong\mathrm{Cl}(X)\times\mathbb{Z}$ を示すには，$i:1\mapsto 1\cdot Z$ が単射であること，および $j:Y\mapsto Y\cap U$ が split することを示せば十分である．後者はすぐに分かる．実際，prime divisor Y が irreducible closed subscheme であることから，j は

$$Y\mapsto Y\cap U\mapsto \mathrm{cl}_{X\times\mathbb{P}^n}(Y\cap U)$$

と split する．

■i :: inj. $X'=X\times\mathbb{P}^n, K$ :: function field of X' とし，$d\in\mathbb{Z}-\{0\}$ をとる．示すべきことは，$dZ=(f)$ を満たす $f\in K^\times$ が存在しないこと．正次数の斉次元 $u\in A[t_0,\dots,t_n]$ をとり，$V=\mathrm{Spec}\,A[t_0,\dots,t_n]_{(u)}=D_+(u)\subset X'$ において f が regular（pole を持たない）だとしよう．$D_+(u)$ は基本開集合を成すから，このようにすることは可能である．また，$V\cap Z\neq\emptyset$，したがって $u\notin(t_0)$ とする．この時，$f\in A[t_0,\dots,t_n]_{(u)}, V\cap Z=V((t_0))$．$V\cap Z$ の generic point を $\eta=t_0\cdot A[t_0,\dots,t_n]_{(u)}$ [†2] とおくと，η に対応する valuation は $v_{V\cap Z}(f)=\sup\{d\mid f\in\eta^d-\eta^{d+1}\}$ で定まる．なので $v(f)=d$ ならば，f は次のようになる．

$$f=\left(\frac{t_0^m}{u}\right)^d\frac{g}{u^e}\quad\text{where}\quad m:=\deg u,\quad e\geq 0,\quad g\in A[t_0,\dots,t_n]_{em},\quad u,t_0^m\not{|}\,g$$

$e=\deg g=0$ の時，u の既約因数によって定まる prime divisor U 上で $v_U(f)<0$ となる．$e>0$ の時，g の既約因数によって定まる prime divisor G 上で $v_G(f)>0$ となる．以上から，$dZ=(f)$ となることはない．

Ex6.2 Varieties in Projective Space.

Ex6.3 Cones.

Ex6.4 $A=k[x_1,\dots,x_n,z]/(z^2-f)$ :: integrally closed.

$\mathrm{char}\,k\neq 2$ とする．$x_1,\dots,x_n$ を $\vec{x}$ と略す．$f\in k[\vec{x}]$ :: square-free とし，$A=k[\vec{x},z]/(z^2-f)$ とおく．また，$\bar{z}=z+(z^2-f)$ とする．（$\bar{z}=\sqrt{f}, A=k[\vec{x},\sqrt{f}]$ と考えて良い．）f :: square-free より z^2-f :: irreducible, A :: integral domain.

■K の同定． この時，$K=\mathrm{Quot}(A)$ は $k(\vec{x})[z]/(z^2-f)$ である．実際，K の元は $g,h\in A$ の元によって g/h と表されるが，$z^2=f$ なので，g/h は分母の「有理化」によって $k(\vec{x})[z]/(z^2-f)$ に属すことが分かる．したがって $k(\vec{x})[z]/(z^2-f)\subseteq K$ であり，逆の包含関係は明らか．

■$K/k(\vec{x})$. K は $k(\vec{x})$ 上の 2 次式 $\bar{z}^2-f$ の最小分解体だから，$K/k(\vec{x})$ は 2 次のガロア拡大である．$\mathrm{Gal}(K/k(\vec{x}))$ は，$\sigma:\bar{z}\mapsto-\bar{z}$ で生成される位数 2 の群．

■A :: integral closure of $k[\vec{x}]$ in K. $\alpha\in K$ をとると，これは $g,h\in k(\vec{x})$ を用いて $g+h\bar{z}$ と書ける．α の最小多項式は，

$$(X-\alpha)(X-\sigma(\alpha))=X^2-2gX+(g^2-h^2f).$$

この多項式の各係数が $k[\vec{x}]$ に属しているとしよう．すると，まず明らかに $g\in k[\vec{x}]$ である．また f :: square-free より，$h\notin k[\vec{x}]$ ならば h^2 の分母は f の因子で打ち消されず，$h^2f, g^2-h^2f\notin k[\vec{x}]$ となる．

[†2] pr_1 は埋め込み写像 $A\to A\otimes\mathbb{Z}[t_0,\dots,t_n]_{(u)}$ で誘導されるから，$Z=\mathrm{pr}_1^{-1}V((t_0))=V((t_0\otimes 1))$．$t_0\otimes 1$ は $A\otimes\mathbb{Z}[t_0,\dots,t_n]_{(u)}\cong A[t_0,\dots,t_n]_{(u)}$ の同型写像で t_0 へ写る．

よって α :: integral / $k[\vec{x}]$ ならば $\alpha \in k[\vec{x}]$．逆に $\alpha \in k[\vec{x}]$ ならば $g, h \in k[\vec{x}]$ だから α の最小多項式は $k[\vec{x}]$ 係数多項式になる．以上をまとめて A :: integrally closed が分かる．

■系． 以上から，$z^2 - f = 0$ で定まる hypersurface は affine variety として normal である．特に，$f(x) \in k[x]$ が重根を持たない 3 次多項式であるとき，楕円曲線 $y^2 = f(x)$ は normal curve である．

Ex6.5 Quadric Hypersurfaces.

k :: field, $\mathrm{char}\, k \neq 2$ とし，

$$f = x_0^2 + \cdots + x_r^2 \in k[x_0, \ldots, x_n], \quad A(X) = k[x_0, \ldots, x_n]/(f), \quad X = \mathrm{Spec}\, A(X)$$

とおく．ch I, Ex3.12 より，$\mathbb{A}^{n+1}$ の任意の r 変数 quadric hypersurfaces は X と同型である．

(a) X :: normal if $r \geq 2$.

$f = x_0^2 - (-x_1^2 - \cdots - x_n^2)$ なので，Ex6.4 より $A(X)$ :: integrally closed．よって任意の点における $A(X)$ の局所化も integrally closed である．すなわち X :: nornal

Ex6.6 Consider $X = \mathcal{Z}_p(y^2z - x^3 + xz^2)$.

Ex6.7 For $X = \mathcal{Z}_p(y^2z - x^3 - x^2z)$, $\mathrm{CaCl}^0(X) \cong \mathbf{G}_m$.

k :: algebraically closed field, $\mathrm{char}\, k \neq 2$ とし，$\mathbb{P}_k^2$ 内の曲線を考えていく．$f = y^2z - x^3 - x^2z, X = \mathrm{Proj}\, k[x, y, z]/(f) \subset \mathbb{P}_k^2$ とする．$S(X) = k[x, y, z]/(f)$ と書く．X の codimension 1 の点は, $\dim X = 1$ より，closed point に他ならない．X は $Z = (0:0:1)$ に node をもつ．

■$\mathrm{CaCl}^0(X) \cong \mathrm{Cl}(X - Z)$． X の singular point は Z しかない．これは ch I, Ex5.8 をつかって確認できる．$X = \mathrm{Proj}\, S(X)$ が noetherian scheme であることから，Thm4.9 より $X - Z$ :: nonsingular & separated & finite type．明らかに integral であることと合わせれば，$X - Z$ が (*) を満たすことが分かる．X 全体でも integral だから，$\mathcal{K}_X$ :: sheaf of total quotient rings of $\mathcal{O}_X$ は function field K である．$P \in X - Z$ に対する Cartier Divisor D_P の定め方，$\mathrm{CaCl}^0(X)$ の任意の元に対して，それが D_P と線形同値になる closed point $X - Z$ が存在することの議論は Example6.11.4 と全く同様である．

■$X - Z \cong \mathbb{A}^1 - \{0\}$． $(s:t:0) \in V(z) \cong \mathbb{P}^1$ をとり，$(s:t:0)$ と $Z = (0:0:1)$ を結ぶ直線 $sy - tx = 0$ と X の交点を計算する．すると $\mathbb{P}^1 \to X$ の写像が得られる．

$$(s:t) \mapsto (x:y:z) = (s(t^2 - s^2) : t(t^2 - s^2) : s^3)$$

$(1:1), (1:-1)$ はこの写像で Z へうつる．そこで以下のように置くと，isomorphism になる．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 - \{(1:1), (1:-1)\} & \to & X - Z \\ (s:t) & \mapsto & (s(t^2 - s^2) : t(t^2 - s^2) : s^3) \\ (x:y) & \leftarrow\!\shortmid & (x:y:z) \end{array}$$

$\mathbb{P}^1 - \{(1:1), (1:-1)\}$ は $(s:t) \mapsto \frac{-s+t}{s+t} = u \mapsto (1 - u : 1 + u)$ によって $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ と同型である．したがって，結局次の同型が出来る．

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \mathbb{A}^1 - \{0\} & \to & X - Z \\ & t & \mapsto & (4(1-t)t : 4(1+t)t : (1-t)^3) \\ & \dfrac{-x+y}{x+y} & \leftarrow\!\shortmid & (x:y:z) \end{array}$$

■$\mathrm{Cl}(X)$ の特徴． $\phi(1) = P_1 = (0:1:0)$ とおく．計算すると $(x:y:z) \in X$ について $P_1, (x:y:z), (x:-y:z)$ が一直線上にある．つまり，$P_1, (x:y:z), (x:-y:z)$ を零点に持つ一次式 l が存在する．よって $P_1 + (x:y:z) + (x:-y:z) \sim 0$ が得られる．（TODO: Example6.10.2 の $P+Q+R \sim 3P_1$ は更に $3P_1 = (z) \sim 0$ ということで良いのか？）

■$\mathrm{CaCl}^0(X) \cong \mathrm{Cl}(X-Z) \cong \mathbf{G}_m$． $\phi(1) = P_1$ に注意する．計算すると，$\phi(t), \phi(u)$ と $\phi(tu)$ の y 成分の符号を反転させたものが一直線上にある．

$$\phi(t) + \phi(u) - (\phi(tu) + P_1) \sim 0.$$

変形して，

$$\begin{aligned} \phi(t) + \phi(u) - (\phi(tu) + P_1) &\sim 0 \\ \phi(t) + \phi(u) - P_1 &\sim \phi(tu) \\ (\phi(s) - P_1) + (\phi(t) - P_1) &\sim \phi(st) - P_1. \end{aligned}$$

よって，P_1 を単位元とすれば，$\mathrm{CaCl}^0(X) \cong \mathrm{Cl}(X-Z) \cong \mathbf{G}_m$．

Ex6.8 Morphism of Schemes Induces Homomorphism of Pic / Cl.

Ex6.9 (Culating the Picard Groups of) Singular Curves.

X :: projective curve $/k$，$\tilde{X}$ :: normalization of X (Ex3.8), $\pi : \tilde{X} \to X$ :: projection, $\widetilde{\mathcal{O}}_P$ :: integral closure of $\mathcal{O}_P$ $(P \in X)$ とする．p.136 にある curve $/k$ の定義から，X :: integral, separated, finite type$/k$．このことと Ex3.8 より，π :: finite mmorphism.

(a) Show there is an exact sequence.

次の完全列を示す．

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^* / \mathcal{O}_P^* \longrightarrow \mathrm{Pic}\, X \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}\, \tilde{X} \longrightarrow 0.$$

Prop6.15 から，$\mathrm{Pic}\, X, \mathrm{Pic}\, \tilde{X}$ はそれぞれ $\mathrm{CaCl}\, X, \mathrm{CaCl}\, \tilde{X}$ と同型である．次の写像を考える．

$$\begin{array}{cccc} \phi: & (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^* & \to & \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^* \\ \phi_U & s + \mathcal{O}_X(U)^* & \mapsto & s/1 + \mathcal{O}_X(U)^* \end{array}$$

単元を単元に写す写像だから，これは単射．したがって次の完全列が得られる．

$$0 \longrightarrow (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}^* / (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* \longrightarrow 0$$

（これは $0 \to \ker \to M \to N \to \mathrm{coker} \to 0$ という形の完全列である．）（TODO: global section をとる？ $\mathcal{K}^*$ :: quasi-coherent かどうか怪しい．）

Ex6.10 The Grothendieck Group $K(X)$.

TODO

Ex6.11　The Grothendieck Group of a Nonsingular Curve.

k :: algebraically closed field, X :: nonsingular curve / k とする．$K(X) \cong \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}$ を示そう．

Ex6.12　The Degree of Coherent Sheaf.

Ex6.11 の続きと言える．X :: complete nonsingular curve とする．Ex6.11 より $K(X) \cong \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}$. また nonsingular $\implies$ regular $\implies$ locally factorial なので Cor6.16 より $\operatorname{Pic} X \cong \operatorname{Cl} X$．そこで，$\mathcal{F}$ :: coherent sheaf on X に対する $\deg \mathcal{F}$ を，

$$\gamma(\mathcal{F}) \in K(X) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z} \to \operatorname{Pic} X \xrightarrow{\cong} \operatorname{Cl} X \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

で定める．右端の deg は degree of Weil divisor である．D :: Weil divisor に対し，$\gamma(\mathcal{L}(D))$ は上の写像で D へ写る．なので，The Grothendieck Group の定義と合わせて，以下が成立する．

(1) If D :: divisor, $\deg \mathcal{L}(D) = \deg D$.

(2) If $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ :: exact sequence, then $\deg \mathcal{F} = \deg \mathcal{F}' + \deg \mathcal{F}''$.

次を示す: If $\mathcal{T}$ is a torsion sheaf, then $\deg \mathcal{T} = \sum_{P \in X} \operatorname{length} \mathcal{T}_P$.

$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ を任意にとり，T :: torsion A-module について $\mathcal{T}|_U \cong \tilde{T}$ であるとする．$\mathfrak{p} \in U$ に対し，$T_{\mathfrak{p}}$ は $A - \mathfrak{p}$ が $\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(T)$ の元を含む時 0 になる．したがって $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ の時のみ $T_{\mathfrak{p}} \neq 0$．そこで $V = V(\mathfrak{a})$ とする．$\mathfrak{a} \neq (0)$ かつ X は 1 次元だから，V は有限個の点のみからなる．

$\tilde{T} \in K(U)$ に対応する $D_T \in \operatorname{Cl} U$ を考える．Ex6.11a の構成によると，D_T の the structure sheaf of the associated subscheme が $\tilde{T}$ である．したがって D_T は以下のようになる．

$$D_T = \sum_{P \in V} v_P(f_P)\{P\}.$$

ただし $f_P \in A$ は $V(f_P) = \{P\} \subseteq U$ を満たす．したがって $v_P(f_P) = \operatorname{length} T_P$ を示せば十分．