Ex5.1　The Dual of Locally Free Module Sheaf.

$(X, \mathcal{O}_X)$ を ringed space とし，$\mathcal{E}$ を有限階数の locally free $\mathcal{O}_X$-module とする．また，$\mathcal{E}$ の双対を $\check{\mathcal{E}} = \mathscr{H}\!om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ で定める．（$\mathscr{H}\!om$ は Ex1.15 で定義されている．）$\mathcal{E}^{\check{}\check{}}$ も同様である．

補題 Ex5.1.1
$\mathcal{F}$ :: $\mathcal{O}_X$-module, $x \in X$ とする．このとき，x に対して $n > 0$ が存在して

$$(\mathscr{H}\!om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}))_x \cong (\mathcal{F}_x)^{\oplus n} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_x).$$

(証明)．Ex5.7 の内容は使う．U :: open in X を十分小さく取れば $\mathcal{E}|_U$ は free module になる．したがって以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&(\mathscr{H}\!om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}))(U)\\
=&\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U)\\
\cong&\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^{\oplus n}, \mathcal{F}|_U)\\
\cong&\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}|_U)^{\oplus n}\\
\cong&(\mathcal{F}|_U)^{\oplus n}\\
=&\varinjlim_{W \supseteq U}(\mathcal{F}(W))^{\oplus n}
\end{aligned}$$

（TODO: 4 行目が怪しい）最後で $\bigoplus$ と $\varinjlim$ が可換であることを用いた．このことから以下を得る．

$$\varinjlim_{U \ni x}\varinjlim_{W \supseteq U}(\mathcal{F}(W))^{\oplus n} = \varinjlim_{W \ni x}(\mathcal{F}(W))^{\oplus n} = (\mathcal{F}_x)^{\oplus n}.$$

あとは $\mathcal{O}_{X,x}$-module の同型から最後の同型を得る．

$$(\mathcal{F}_x)^{\oplus n} \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}((\mathcal{O}_{X,x})^{\oplus n}, \mathcal{F}_x) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_x).$$

∎

$\mathcal{O}_X$-homomorphism を構成し，それが stalk で module の射として isomorphism になっていることを確認する．

(a)　$\mathcal{E}^{\check{}\check{}} \cong \mathcal{E}$.

写像 $\Phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}^{\check{}\check{}}$ を以下のように定める．

$$(\Phi_U(s))_V(\phi) = \phi(s|_V) \quad \text{where} \quad U, V :: \text{open in } X, V \subseteq U, s \in \mathcal{E}(U), \phi \in \check{\mathcal{E}}(V).$$

これが $\mathcal{O}_X$-homomorphism であることは明らか．$x \in X$ を任意に取ると，Φ_x は以下のようになる．

$$\Phi_x(s_x)(\phi_x) = \phi_x(s_x) \ \text{ where } \ s_x \in \mathcal{E}_x, \phi_x \in \check{\mathcal{E}}_x$$

補題より，$\check{\mathcal{E}}_x, (\mathcal{E}^{\check{}\check{}})_x$ が計算できる．

$$\check{\mathcal{E}}_x \cong \mathscr{H}\!om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)_x \cong (\mathcal{E}_x)^*, \quad (\mathcal{E}^{\check{}\check{}})_x \cong \mathrm{Hom}(\check{\mathcal{E}}_x, \mathcal{O}_{X,x}) = (\mathcal{E}_x)^{**}.$$

ただし，$(\mathcal{E}_x)^*$ は $\mathcal{E}_x$ の $\mathcal{O}_{X,x}$-module としての双対である．$(\mathcal{E}_x)^*$ は free module だから，上記の同型が成り立つ．上記の $\Phi_x : \mathcal{E}_x \to (\mathcal{E}^{\check{}\check{}})_x \cong (\mathcal{E}_x)^{**}$ が同型写像であることはよく知られている．よって Prop1.1 より，Φ も同型．

(b) For any $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}$, $\mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \cong \check{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.

写像 Ψ を以下で定める．

$$\begin{array}{cccc} \Psi_U : & \check{\mathcal{E}}(U) \otimes \mathcal{F}(U) & \to & \mathscr{H}om(\mathcal{E},\mathcal{F})(U) \\ & \phi_U \otimes f & \mapsto & \left[\mathcal{E}(V) \ni s \mapsto \phi_V(s) \cdot f|_V \in \mathcal{F}(V)\right] \end{array}$$

ただし U, V は X の開集合で $V \subseteq U$ を満たし，$[]$ 内は $\mathcal{E}(V) \to \mathcal{F}(V)$ の写像の定義である．これの $x \in X$ における stalk は以下のようになる．

$$\begin{array}{cccc} \Psi_x : & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{O}_{X,x}) \otimes \mathcal{F}_x & \to & \mathrm{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_x) \\ & \phi_x \otimes f_x & \mapsto & \left[\mathcal{E}_x \ni s_x \mapsto \phi_x(s_x) \cdot f_x \in \mathcal{F}_x\right] \end{array}$$

(c) For any $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F},\mathcal{G}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F},\mathcal{G}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{G}))$

U :: open in X を任意に取る．テンソル積の定義（普遍性）より，以下が成り立つ．

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{E}(U) \otimes \mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(U), \mathrm{Hom}(\mathcal{E}(U), \mathcal{G}(U)))$$

テンソル積と Hom は $\mathcal{O}_X(U)$-module としてのものである．あとは

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{E}(U), \mathcal{G}(U)) \cong \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{G})(U)$$

を示せば良い．（TODO: 主張自体が怪しい．）これは以下の写像で得られる．

$$\begin{array}{cccc} \Theta_U : & \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{G})(U) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{E}(U), \mathcal{G}(U)) \\ & \phi : \mathcal{E}|_U \to \mathcal{G}|_U & \mapsto & \phi_U : \mathcal{E}(U) \to \mathcal{G}(U) \end{array}$$

これは $x \in U$ について $\Theta_x : \phi_x \mapsto \phi_x$ を与えるから，同型写像．

(d) Projection Formula.

$f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ を ringed space の morphism とし，$\mathcal{F}$ を $\mathcal{O}_X$-module, $\mathcal{E}$ を finite rank locally free $\mathcal{O}_Y$-module とする．すると $f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \cong f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ という自然同型がある．これを示す．

米田の補題を用いて証明する．$\mathcal{G}$ を任意の $\mathcal{O}_Y$-module とする．

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{E})) \\
\cong\, & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{E}) && \text{(Ex1.18)} \\
\cong\, & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{E}^{\check{}\check{}}) && \text{(a)} \\
\cong\, & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes (f^*\check{\mathcal{E}})^{\check{}}) && \text{(?)} \\
\cong\, & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\check{\mathcal{E}}, \mathcal{F})) && \text{(b)} \\
\cong\, & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G} \otimes f^*\check{\mathcal{E}}, \mathcal{F}) && \text{(c)} \\
\cong\, & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}), \mathcal{F}) && \text{(?)} \\
\cong\, & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}, f_*\mathcal{F}) && \text{(Ex1.18)} \\
\cong\, & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathscr{H}om(\check{\mathcal{E}}, f_*\mathcal{F})) && \text{(c)} \\
\cong\, & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{E}^{\check{}\check{}} \otimes f_*\mathcal{F}) && \text{(b)} \\
\cong\, & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}) && \text{(a)}
\end{aligned}$$

$\check{\mathcal{E}}, \check{\check{\mathcal{E}}}, f^*\mathcal{E}$ が finite rank locally free module であることは容易に分かる．残すは以下の 2 つの主張である．

主張 Ex5.1.2

$$f^*\check{\check{\mathcal{E}}} \cong \check{(f^*\check{\mathcal{E}})}.$$

(証明)．U :: open in X をとる．

$$\begin{aligned}\check{(f^*\check{\mathcal{E}})} =& \mathscr{H}om(f^{-1}\check{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_X) \\ =& f^{-1}\mathscr{H}om(\check{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_X) \\ =& f^{-1}\check{\check{\mathcal{E}}} \otimes \mathcal{O}_X\end{aligned}$$

ここで $\mathscr{H}om(f^{-1}*, *) \cong f^{-1}\mathscr{H}om(*, *)$ とした．TODO:どう示す． ∎

主張 Ex5.1.3

$$f^*\mathcal{G} \otimes f^*\check{\mathcal{E}} \cong f^*(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}).$$

(証明)．

$$\begin{aligned}& f^*\mathcal{G} \otimes f^*\check{\mathcal{E}} \\ =& (f^{-1}\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) \otimes (f^{-1}\check{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{O}_X) \\ \cong& (f^{-1}\mathcal{G} \otimes f^{-1}\check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ \cong& f^{-1}(\mathcal{G} \otimes f^{-1}\check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ \cong& f^{-1}f^{-1}(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ =& f^{-1}(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ =& f^*(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}})\end{aligned}$$

ここで $f^{-1}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \cong (f^{-1}\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ を用いた． ∎

Ex5.2 Module Sheaves over the Spec of a D.V.R.

R :: D.V.R., $X = \operatorname{Spec} R, K = \operatorname{Quot}(R)$ とおく．X は 2 点空間 $\{\zeta, \mathfrak{m}\}$ $(\zeta = (0))$ であり，開集合系は $\{\emptyset, \{\zeta\}, X\}$ である．

(a) $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F} \leftrightarrow \rho : M \otimes_R K \to L$.

$\mathcal{F}$ :: $\mathcal{O}_X$-module をとる．$\mathcal{O}_X(\{\zeta\}) = K, \mathcal{O}_X(X) = R$ [†1] だから，$\mathcal{F}$ は K-module $L = \mathcal{F}(\{\zeta\})$ と R-module $M = \mathcal{F}(X)$ と，以下の図式を可換にする restriction map $\tilde{\rho}$ で与えられる．

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\tilde{\rho}"'] & L \\ R \arrow[u] \arrow[r, "l"'] & K \arrow[u] \end{tikzcd}$$

[†1] $\mathcal{O}_X(\{\zeta\})$ は affine scheme の sheaf の定義から分かる．つまり，$\mathcal{O}_X(\{\zeta\})$ の元は $\{\zeta\} \to \mathcal{O}_{X,\zeta} = K$ の写像であって local には R の元の分数で書けるものである．$\{\zeta\}$ は 1 点集合だから，これは $\zeta \mapsto f/g \in K$ なる写像全体を取れば良い．$\mathcal{O}_X(\{\zeta\})$ と K に集合としての全単射だけでなく同型もあることは自明であろう．一般に，点 $x \in X$ について $\{x\}$ が開集合ならば $\mathcal{F}(\{x\}) \cong \mathcal{F}_x$.

ここで $l: R \to K = R_{(0)}$ は標準的な局所化写像である．したがって L も R-module とみなせて，以下の図式にある $\rho: m \otimes x \mapsto \tilde{\rho}(m) \cdot x$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R K \arrow[dr, "\rho"] & \\
M \arrow[u] \arrow[r, "\tilde{\rho}"'] & L \\
R \arrow[u] \arrow[r, "l"'] & K \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

逆に $\rho: M \otimes_R K \to L$ があるとき，$\tilde{\rho} = \rho|_{M \otimes R}$ とすれば $\tilde{\rho}: M \to L$ が得られる．

(b) $\mathcal{F}$ :: quasi-coherent $\iff$ ρ :: isomorphism.

■ $\Longrightarrow$． $\mathcal{F}$ :: quasi-coherent のとき，$M := \Gamma(X, \mathcal{F})$ とすると，Prop5.1a から $\mathcal{F} = \tilde{M}$．$\tilde{M}$ の定義から，restriction map $\tilde{\rho}$ は次のようなものである．

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\rho}: & M & \to & \tilde{M}(\{\zeta\}) \\ & m & \mapsto & [\zeta \mapsto m/1 \in M_\zeta] \end{array}$$

こうして ρ が定まる．

$$\begin{array}{rccc} \rho: & M \otimes K & \to & \tilde{M}(\{\zeta\}) \\ & m \otimes x & \mapsto & [\zeta \mapsto x(m/1) \in M_\zeta] \end{array}$$

逆写像が $[\zeta \mapsto m/s] \mapsto m \otimes (1/s)$ （この逆写像が加群準同型かつ well-defined map であることは容易に分かる）で定まるからこれは同型である．

■ $\Longleftarrow$． 仮定より，

$$\mathcal{F}(X) = M, \quad \mathcal{F}(\{\zeta\}) = L \overset{\rho}{\cong} M \otimes K \cong M_\zeta \cong \tilde{M}(\{\zeta\})$$

なので $\mathcal{F} = \tilde{M}$．

Ex5.3 $\tilde{\square}$ and $\Gamma(X, \square)$ are Adjoint Pair.

A :: ring, $X = \operatorname{Spec} A$ とする．この時，$\tilde{\square}$ と $\Gamma(X, \square)$ は adjoint である．すなわち，任意の M :: A-module, $\mathcal{F}$ :: $\mathcal{O}_X$-module について，

$$\operatorname{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathcal{F}).$$

写像 $\Phi: \operatorname{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathcal{F})$ を次のように定める．U :: open in X に対し，$\tilde{M}(U)$ の元 s は

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & U & \to & M_u \\ & u & \mapsto & m/s \end{array}$$

のような写像である．この元 σ を $\alpha \in \operatorname{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$ によって以下のように写す．

$$\begin{array}{rccc} (\Phi(\alpha))_U: & \tilde{M}(U) & \to & \mathcal{F}(U) \\ & \sigma & \mapsto & \bar{\alpha}(\sigma)|_U \end{array}$$

ただし A_u-module homomorphism $\alpha_{(u)}$ を $m/s \mapsto \alpha(m)/s$ で定めた．

TODO: A-module homomorphism $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$ に対し，A_x-module homomorphism $\tilde{M}_x \to \mathcal{F}_x$ は $m/s \mapsto \alpha(m)_x/s$ で定まる．これを貼り合わせれば良い．

Ex5.4 The Original Definition of (Quasi-)Coherent Sheaves.

■quasi-coherent $\iff$ cokernel of free sheaves locally. $\mathcal{F}$ :: sheaf on X が quasi-coherent ならば，任意の open affine subset $U = \operatorname{Spec} A$ について $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$ となる A-module M が存在する (Prop5.4)．M は cokernel of free module として表現できる（Ati-Mac Prop2.3 の証明を参照せよ）から，完全列 $0 \to A^m \to A^n \to M \to 0$ に対して functor $\tilde{\square}$ を用いれば $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$ は cokernel of free sheaves で表現できる事が得られる[†2]．逆は free sheaf が quasi-coherent であることと Prop5.7 より従う．

■coherent $\iff$ cokernel of finite rank free sheaves locally. X が Noetherian で $\mathcal{F}$ が coherent ならば，任意の open affine subset $U = \operatorname{Spec} A$ について $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$ となる finitely generated A-module M が存在する (Prop5.4)．$\tilde{M}$ が finite rank free sheaf であることは quasi-coherent の場合と同様．逆は finite rank free sheaf が coherent であることと Prop5.7 より従う．

Ex5.5 Is $f_*\mathcal{F}$ Coherent?

(a) An Example that $\mathcal{F}$ is Coherent but $f_*\mathcal{F}$ is NOT Coherent.

材料は次の通り．

$$A = \mathbb{C}, \quad B = \mathbb{C}[x], \quad X = \operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec} \mathbb{C}, \quad \mathcal{F} = \tilde{\mathbb{C}} = \mathcal{O}_X.$$

明らかに $\mathcal{F}$ は coherent $\mathcal{O}_X$-module である (Example 5.2.1)．$f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ を標準的埋込み $A \hookrightarrow B$ から誘導されるものとすると，Prop5.1e より

$$f_*\mathcal{F} \cong (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x])\tilde{} \cong (\mathbb{C}[x])\tilde{} = \tilde{B}$$

となる．$B = \mathbb{C}[x]$ は明らかに finitely generated A-module でない．

(b) Closed Immersion is a Finite Morphism.

$f : X \to Y$ :: closed immersion をとる．Y の open affine subset $U = \operatorname{Spec} A$ をとり，$V = f^{-1}(U)$ とすると，$f|_V : V \to \operatorname{Spec} A$ は closed immersion になっている．Cor5.10（あるいは Ex3.11b）より $V \cong \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ となるイデアル $\mathfrak{a}$ が存在する．

以上から任意の open affine subset $U = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ に対し $V = f^{-1}(U) = \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ かつ B :: finitely generated A-module （$1 + \mathfrak{a}$ で生成される）なので f :: finite.

(c) If X, Y :: noetherian schemes, $f : X \to Y$ :: finite and $\mathcal{F}$ :: coherent on X, then $f_*\mathcal{F}$ :: coherent.

f :: finite から，任意の affine open subset $\operatorname{Spec} B \subset Y$ に対して $f^{-1} \operatorname{Spec} B$ は affine scheme $\operatorname{Spec} A$ であり，かつ A :: finitely generated B-module である．$U = \operatorname{Spec} A, V = \operatorname{Spec} B$ としておこう．

[†2] Ex5.3 から $\tilde{\square}$ は left adjoint なので direct sum (colimit) と可換であることに注意．

Prop5.4 より，$\mathcal{F}|_{\operatorname{Spec} A} = \tilde{M}$ なる finitely generated A-module M が存在する．$f|_U : \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B$ だから Prop5.1 から

$$(f_*\mathcal{F})|_V \cong f_*(\mathcal{F}|_U) \cong f_*\tilde{M} \cong (M \otimes_B A)\tilde{}.$$

（一番左の同型は任意の V の開集合上での section を見れば良い．）今 M, B は共に finitely generated A-module だから，$f_*\tilde{M}$ も finitely generated $\mathcal{O}_V$-module．V は任意の affine open subset としていたから，$f_*\mathcal{F}$ :: coherent.

Ex5.6　Support.

(a)　$\operatorname{Supp} m = V(\operatorname{Ann}(m))$.

A :: ring, M :: A-module, $X = \operatorname{Spec} A$ とおく．さらに $\mathcal{F} = \tilde{M}$ とする．$m \in M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ について，$\operatorname{Supp} m = \{\mathfrak{p} \in X \mid m_\mathfrak{p} \neq 0\}$ を考える．$\operatorname{Ann} m = \{a \in A \mid am = 0\}$ とする．

$$m_\mathfrak{p} = 0 \iff {}^\exists a \in A - \mathfrak{p},\quad am = 0$$

だから，$m_\mathfrak{p} \neq 0$ となるのは $(A - \mathfrak{p}) \cap \operatorname{Ann} m = \emptyset$ であるとき，すなわち $\operatorname{Ann} m \subseteq \mathfrak{p}$ となっているときである．よって $\operatorname{Supp} m = V(\operatorname{Ann} m)$.

(b)　If X :: Noetherian and M :: Finitely Generated, then $\operatorname{Supp} \mathcal{F} = V(\operatorname{Ann} M)$.

Prop5.1 から $\mathcal{F}_\mathfrak{p} \cong M_\mathfrak{p}$．$M$ の生成元全体を G とすると，以下のようになる．

$$M_\mathfrak{p} \neq 0 \iff {}^\exists g \in G,\ \ g_\mathfrak{p} \neq 0 \iff {}^\exists g \in G,\ \ \mathfrak{p} \supseteq \operatorname{Ann} g \iff \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{g \in G} \operatorname{Ann} g.$$

$\operatorname{Ann} M = \bigcap_{g \in G} \operatorname{Ann} g$ は明らか．よって $\operatorname{Supp} \mathcal{F} = V(\operatorname{Ann} M)$.

(c)　The Support of a Coherent Sheaf on a Noetherian Scheme is Closed.

$\mathcal{F}|_U$ が finitely generated module ならば $\operatorname{Supp} \mathcal{F}|_U$ :: closed．このような開集合 U は有限個で十分だから $\operatorname{Supp} \mathcal{F}$ が閉集合の有限和となり，したがって閉集合である．

(d)　$\Gamma_\mathfrak{a}(M)\tilde{} \cong \mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})$.

(e)　$\mathcal{F}$ :: (Quasi-)Coherent $\implies$ $\mathcal{H}^0_Z(\mathcal{F})$ :: (Quasi-)Coherent.

Ex5.7　A Sheaf is Locally Free $\iff$ Its Stalks are Free.

$(X, \mathcal{O}_X)$ を noetherian ringed space とし，$\mathcal{F}$ を coherent sheaf とする．

(a)　$\mathcal{F}_x$ :: free $\implies$ $\mathcal{F}|_U$ is free for a $x \in U$ :: open in X.

$\mathcal{F}$ :: coherent より，$\mathcal{F}|_U = \tilde{M}$ となる $U = \operatorname{Spec} A$ :: open in X と M :: finitely generated A-module が存在する．M の generator が n 個あるとすると，finite rank free module $A^{\oplus n}$ の generator を M の generator に写す surjective module homomorphism f によって exact sequence が出来る．

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow A^{\oplus n} \xrightarrow{f} M \longrightarrow \operatorname{coker} f = 0 \longrightarrow 0$$

この exact sequence を functor $\tilde{\square}$ で写し x での stalk をとると，Prop5.2, 5.1 から，再び exact sequence が得られる．

$$0 \longrightarrow \ker f_x \longrightarrow (A_x)^{\oplus n} \xrightarrow{f_x} M_x \longrightarrow \operatorname{coker} f_x = 0 \longrightarrow 0$$

今 $(\mathcal{F}|_U)_x = \tilde{M}_x = M_x$ だから，f の作り方から f_x :: iso．よって $\ker f_x = 0$．したがって十分小さな開集合 $(x \in)\ V\ (\subseteq U)$ をとれば $\ker f|_V = 0$ となる．f :: iso on V ということになるから，$\Gamma(V, \mathcal{F}|_V) \cong A^{\oplus n}$，$\mathcal{F}|_V \cong (A^{\oplus n})\tilde{}$.

(b) $\mathcal{F}$ :: locally free $\iff$ $\mathcal{F}_x$ are free $\mathcal{O}_{X,x}$-modules for all $x \in X$.

$\Longrightarrow$ は定義から，$\Longleftarrow$ は (a) から明らか．

(c) $\mathcal{F}$ :: invertible $\iff$ ${}^{\exists}\mathcal{G}$ :: coherent, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X$.

■ $\Longrightarrow$．$\mathcal{G} = \check{\mathcal{F}}$ とおくと，Ex5.1b から

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{O}_X.$$

■ $\Longleftarrow$．$x \in X$ を任意にとり，stalk をみる．$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: coherent だから，$\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x$ は finitely generated $\mathcal{O}_{X,x}$-module と同型である．

$$M_x \otimes N_x \cong \mathcal{O}_{X,x}.$$

$\{\mathrm{id}_{\mathcal{O}_{X,x}}\} = \mathrm{Hom}(M_x \otimes N_x, *) \cong \mathrm{Hom}(M_x, \mathrm{Hom}(N_x, *))$ だから $M_x \cong \mathcal{O}_{X,x}$（？）．(a) から $\tilde{M} \cong \mathcal{O}_X$ が得られる．よって $\mathcal{F}$ は invertible.

Ex5.8 $\phi(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)$.

X :: noetherian scheme, $\mathcal{F}$ :: coherent sheaf on X とする．

$$\phi(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x), \quad k(x) = \mathcal{O}_x/\mathfrak{p}_x$$

という関数を考えよう．Ati-Mac Ex2.1 から $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x) \cong \mathcal{F}_x/\mathfrak{p}_x\mathcal{F}_x$.

(a) ϕ :: upper semi-continuous.

任意の $n \in \mathbb{Z}$ について $\phi^{-1}(\mathbb{Z}_{\geq n})$ :: closed in X を示す．$\mathcal{F}|_U$ が $A = \mathcal{O}_X(U)$ と置いた時 finitely generated A-module M を用いて $\tilde{M}$ と書けるような U :: open in X をとる．このような U で X を被覆できるから，$U \cap \phi^{-1}(\mathbb{Z}_{\geq n})$ :: closed in U を示せば十分である．

Prop5.1 から $x \in U$ について $\mathcal{F}_x \cong M_x$．完全列 $0 \to \mathfrak{m}_x M_x \to M_x \to M_x/\mathfrak{m}_x M_x \to 0$ と，$\mathfrak{m}_x = 0$ in $k(x)$ を考えれば，$\phi(x) = \dim_{k(x)} M_x$ と分かる．M の最小の生成元集合を G とおくと，$\dim_{k(x)} M_x$ は $g_x \neq 0$ であるような $g \in G$ の個数に等しい．そこで次の集合をとる．

$$\bigcup_{G_n \subseteq G} \bigcap_{g \in G_n} \operatorname{Supp} g \subseteq U$$

この集合の点では n 個以上の $g \in G$ が 0 にならず，$\phi(x) \geq n$ となる．ただし $\bigcup_{G_n \subseteq G}$ は丁度 n 個の元を持つ G の部分集合 G_n すべてを渡る．Ex5.6a より，$g \in G$ について $\operatorname{Supp} g$ :: closed で，G は有限だから，これは閉集合である．

(b) If $\mathcal{F}$ :: locally free and X :: connected then ϕ :: constant.

$\mathcal{F}$ :: locally free から，U :: open in X について，$A_U = \mathcal{O}_X(U)$ とおくと $\mathcal{F}|_U = (A_U^{\oplus n_U})\tilde{}$ となる n_U が存在する．したがって U においては ϕ の値は常に n_U である．この n_U を $\operatorname{rank}\mathcal{F}|_U$ と書くことにする．

さて，$U \subseteq V$ ならば，$\mathcal{F}|_U = (\mathcal{F}|_V)|_U = ((A_V^{\oplus n_V})\tilde{})|_U$ なので $\operatorname{rank}\mathcal{F}|_U = \operatorname{rank}\mathcal{F}|_V$．ここから一般に，$U \cap V \neq \emptyset$ ならば $\operatorname{rank}\mathcal{F}|_U = \operatorname{rank}\mathcal{F}|_V$ だと分かる．このことを元に次の同値関係を考える．

$$U \frown V \iff {}^{\exists}W_1, \ldots, W_s :: \text{open in } X, \;\; U \cap W_1, W_1 \cap W_2, \ldots, W_s \cap V \neq \emptyset.$$

$U \frown V$ ならば $\operatorname{rank}\mathcal{F}|_U = \operatorname{rank}\mathcal{F}|_V$ であることは今や明らか．X :: conncted より，この同値関係による X の開集合の同値類はただひとつ．よって ϕ :: constant.

(c) If X :: reduced and ϕ :: constant then $\mathcal{F}$ :: locally free.

$\mathcal{F}|_U = \tilde{M}$ となるような U :: affine open in X, M :: finitely generated A-module ($A := \mathcal{O}_X(U)$) をとる．X :: reduced noetherian scheme より A :: reduced noetherian ring.

点 $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A = U$ をとり，$n = \phi(\mathfrak{p})$ とする．次の完全列を考える．

$$0 \longrightarrow \ker \iota_{\mathfrak{p}} \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}^{\oplus n} \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

$A^{\oplus n}$ の標準的基底を $\{e_i\}_{i=1}^n$ とすると，ι は $e_i \mapsto g_i$ なるものである．$k(\mathfrak{p})$ :: field は平坦だから，$\otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p})$ は完全列を保つ．

$$0 \longrightarrow (\ker \iota_{\mathfrak{p}}) \otimes k(\mathfrak{p}) \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}^{\oplus n} \otimes k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{p}} \otimes 1} M_{\mathfrak{p}} \otimes k(\mathfrak{p}) \longrightarrow 0.$$

$n = \dim_{k(\mathfrak{p})} A_{\mathfrak{p}}^{\oplus n} \otimes k(\mathfrak{p}) = \dim_{k(\mathfrak{p})} M_{\mathfrak{p}} \otimes k(\mathfrak{p})$ と $\dim_{k(\mathfrak{p})}$ の加法性から，$(\ker \iota_{\mathfrak{p}}) \otimes k(\mathfrak{p}) = 0$．変形すると $\ker \iota_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} \ker \iota_{\mathfrak{p}} = 0$．$\ker \iota_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$-module だったから，中山の補題より $\ker \iota_{\mathfrak{p}} = 0$.

$\iota : A^{\oplus n} \to M$ を，生成元を生成元へ写す標準的全射とする．もし $\ker \iota \neq 0$ ならば，$\ker \iota_{\mathfrak{p}} \neq 0$ であるような $\mathfrak{p}$ がとれる（by A :: reduced?）．((a) での議論と ϕ :: constant から，M の生成元の任意の点での局所化は常に non-zero.）しかし上での議論から常に $\ker \iota_{\mathfrak{p}} = 0$ だから，$\ker \iota = 0$．よって M :: free module.

Ex5.9 Quasi-Finitely Generated Graded S-Modules.

Ex5.10 Saturated Ideals and Closed Sub-Schemes.

$S = A[x_0, \ldots, x_n], X = \operatorname{Proj} S$ とおく．既に homogeneous ideal $I \subset S$ が X の closed subscheme を定めること (Ex3.12)，逆に X の closed subsecheme はこのように定まることを示した (5.16)．homogeneous ideal $I \subset S$ に対し，その saturation を以下で定める．

$$\bar{I} = \{s \in S \mid {}^{\forall}i = 0, \ldots, n, \;\; {}^{\exists}r \geq 0, \;\; x_i^r s \in I.\}$$

$I = \bar{I}$ の時，I は saturated ideal であると言われる．S の saturated ideal と X の closed subscheme の間に一対一対応があることを示そう．

注意 Ex5.10.1
$x_i^r s \in I$ は $s \in (I : x_i^r), x_i^r \in (I : s)$ と同値である．なので I :: saturated ideal について次が成り立つ．

$$^\forall s \in S, \quad \left[^\forall i = 0, \dots, n, \quad x_i \in \sqrt{(I : s)} \right] \implies s \in I.$$

$\implies$ の左辺は $S_1 \subseteq \sqrt{(I : s)}$ とも表現できる．あるいは次のようにも表現できる．

$$\bigcap_{i=0,\dots,n} \bigcup_{r>0} (I : x_i^r) \subseteq I.$$

(a) I :: Homogeneous Ideal $\implies \bar{I}$ :: Also.

$s \in \bar{I}$ をとり，$s = s_u + \cdots + s_v$ と斉次分解する．今，$i = 0, \dots, n$ を任意に取る．i に対して次を満たす r が存在する: $x_i^r s \in I$．したがって

$$(x_i^r s_u) + \cdots + (x_i^r s_v) \in I$$

が成立している．I :: homogeneous なので $x_i^r s_u, \dots, x_i^r s_v \in I$．よって $s_u, \dots, s_v \in \bar{I}$ となる．

(b) $\bar{I}_1 \cong \bar{I}_2 \iff \operatorname{Proj} S/I_1 \cong \operatorname{Proj} S/I_2$.

次を示す:

1. I :: homogeneous ideal について $\operatorname{Proj} S/I \cong \operatorname{Proj} S/\bar{I}$.
2. I_1, I_2 :: saturated homogeneous ideal について $\operatorname{Proj} S/I_1 \cong \operatorname{Proj} S/I_2$ ならば $I_1 \cong I_2$.

注意 Ex5.10.2
$S = k[x, y], I_1 = (x), I_2 = (y)$ の時，I_1, I_2 は saturated ideal かつ $I_1 \neq I_2$．しかし $\operatorname{Proj} S/I_1, \operatorname{Proj} S/I_2$ はどちらも hyperplane で同型である．なので，主張を $\bar{I}_1 = \bar{I}_2 \iff \operatorname{Proj} S/I_2 \cong \operatorname{Proj} S/I_2$ と理解してはいけない．

■$\operatorname{Proj} S/I \cong \operatorname{Proj} S/\bar{I}$.　$I \subseteq \bar{I}$ なので，次の全射準同型がある．

$$\begin{array}{cccc} \iota : & S/I & \to & S/\bar{I} \\ & s + I & \mapsto & s + \bar{I} \end{array}$$

ι が誘導する $(S/I)_{(x_i+I)} \to (S/\bar{I})_{(x_i+\bar{I})}$ の写像は明らかに全射であり，以下で示すように単射でもある．これは isomorphism of affine schemes $\operatorname{Spec}(S/\bar{I})_{(x_i+\bar{I})} \xrightarrow{\cong} \operatorname{Spec}(S/I)_{(x_i+I)}$ を誘導し，これで被覆される $\operatorname{Proj} S/\bar{I} \xrightarrow{\cong} \operatorname{Proj} S/I$ も同型である．

主張 Ex5.10.3
ι から誘導される $\phi_i : (S/I)_{(x_i+I)} \to (S/\bar{I})_{(x_i+\bar{I})}$ は単射.

(証明)．$i = 0, \dots, n$ を一つ取る．

$$\begin{array}{cccc} \phi_i : & (S/I)_{(x_i+I)} & \to & (S/\bar{I})_{(x_i+\bar{I})} \\ & \dfrac{s + I}{x_i^{\deg s} + I} & \mapsto & \dfrac{s + \bar{I}}{x_i^{\deg s} + \bar{I}} \end{array}$$

$\frac{s+I}{x_i^d+I}$ の像が 0 となるのは次が成立する時.

$$^\exists r \geq 0, \quad x_i^r s \in \bar{I}.$$

$\bar{I}$ の定義より，$R \geq 0$ を十分大きくすると $x_i^{r+R}s \in I$ となる．これは $\frac{s+I}{x_i^{\deg s}+I} = 0$ を意味する．よって $\ker \phi_i = 0$. ∎

■$\operatorname{Proj} S/I_1 \cong \operatorname{Proj} S/I_2 \implies I_1 \cong I_2$. $S/I_1, S/I_2$ が S_0-module として同型であることを示す．$f : \operatorname{Proj} S/I_2 \xrightarrow{\cong} \operatorname{Proj} S/I_1, \phi_i = (f|_{D_+(x_i+I_1)})^\#$ とする．この時，$\phi_i : (S/I_1)_{(x_i+I_1)} \xrightarrow{\cong} (S/I_2)_{(y_i+I_2)}$ であり，$y_i + I_2 \in (S/I_2)_1$ である[†3].

主張 Ex5.10.4

$\rho_i : S/I_1 \to (S/I_1)_{(x_i+I_1)}$ を $s + I_1 \mapsto \frac{s+I_1}{x_i^{\deg(s+I_1)}+I_1}$ で定める．$d \geq 0$, $s + I_1, t + I_1 \in (S/I_1)_d$ をとる．

$$\left[{}^\forall i = 0, \ldots, n, \quad \rho_i(s + I_1) = \rho_i(t + I_2)\right] \implies s + I_1 = t + I_1.$$

すなわち，$\bigoplus_{0 \leq i \leq n} \rho_i$ は単射である．

(証明)．任意の i について $\frac{s+I_1}{x_i^d+I_1} = \frac{t+I_1}{x_i^d+I_1}$ となることは次と同値．

$${}^\forall i = 0, \ldots, n, \quad {}^\exists r \geq 0, \quad x_i^r(sx_i^d - x_i^d t) = x_i^{r+d}(s - t) \in I_1.$$

saturated ideal の定義から，$s - t \in I_1$. ∎

I_1 を I_2 に，x_i を y_i に変えても同様である．($s - t$ の斉次分解を経由する．) これを $\sigma_i : S/I_2 \to (S/I_2)_{(y_i+I_2)}$ としておこう．ρ_i, σ_i は定義の仕方から全射である．したがって主張と合わせて次の全単射が構成できる．

$$(S/I_1)_d \xrightarrow{\bigoplus_i \rho_i} \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \{s/x_i^d \in (S/I_1)_{(x_i+I_1)}\} \xrightarrow{\bigoplus_i \phi_i} \bigoplus_{0 \leq i \leq n} \{t/y_i^d \in (S/I_2)_{(y_i+I_2)}\} \xrightarrow{(\bigoplus_i \sigma_i)^{-1}} (S/I_2)_d.$$

すなわち S/I_1 と S/I_2 は S_0-module として同型である．I_1, I_2 は同じ S の部分加群だから，$I_1 \cong I_2$.

(c) The Ideal $\Gamma_*(\mathcal{I}_Y)$ is saturated.

$i : Y \to X = \operatorname{Proj} S$ を closed immsersion とすると，$\mathcal{I}_Y = \ker i^\# \subseteq \mathcal{O}_X$. $\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{J}_Y(d) \cong \mathcal{J}_Y(n + d)$(pp.115-116) に注意．

Prop5.13 より，$S = \Gamma_*(X, \mathcal{O}_X)$，そこで $s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ をとり，次が成り立つとする．

$${}^\forall i = 0, \ldots, n, \quad {}^\exists r_i \geq 0, \quad x_i^{r_i}s \in \Gamma(X, \mathcal{J}_Y(n + r_i)).$$

この時 $s \in \Gamma(X, \mathcal{J}_Y(n))$ となることを示せば良い．$x_i^{-r_i}$ は $\Gamma(D_+(x_i), \mathcal{O}_X(-r_i)) = (S(-r_i))_{(x_i)}$ の元だから，

$$x_i^{-r_i}(x_i^{r_i}s) = s \in \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{O}_X(-r_i) \otimes \mathcal{J}_Y(n + r_i)) \cong \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{J}_Y(n)).$$

よって $s \in \bigcap_i \Gamma(D_+(x_i), \mathcal{J}_Y(n))$. $\mathcal{J}_Y$ の Gluability Axiom を用いて，主張が得られる．

(d) Saturated Homogeneous Ideals $\leftrightarrow$ Closed Subschemes of $X = \operatorname{Proj} S$.

$\to$ は (b) から，$\leftarrow$ は (c) からわかる．

[†3] $D_+(x_i)$ が $\operatorname{Proj} S/I_1$ を被覆するから $\phi D_+(x_i) = D_+(y_i)$ が $\operatorname{Proj} S/I_2$ を被覆する．したがって $\{y_i\}$ が S/I_2 の生成元であり，それは $(S/I_2)_1$ の元である．

Ex5.11 The Segre Embedding.

S, T を $S_0 = T_0 = A$ であるような graded ring とする．（S, T は A-module である．）これらの Cartesian product $S \times_A T$ を $\bigoplus_{d \geq 0} S_d \otimes_A T_d$ とする．$X = \operatorname{Proj} S, Y = \operatorname{Proj} T$ の時，$\operatorname{Proj}(S \times_A T) = X \times_A Y$ であること，加えて $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj}(S \times_A T)}(1) \cong (\operatorname{pr}_1^* \mathcal{O}_X(1)) \otimes (\operatorname{pr}_2^* \mathcal{O}_Y(1))$ となることを示す．

Ex5.12 Very Ample Invertible Sheaves.

Ex5.13 The d-uple Embedding.

S :: graded ring とし，S_0-algebra として S_1 で生成されているとする．この S と正整数 $d > 0$ に対して

$$S_n^{(d)} := S_{nd}, \quad S^{(d)} := \bigoplus_{n \geq 0} S_n^{(d)}$$

とおく．$\operatorname{Proj} S^{(d)} \cong \operatorname{Proj} S$ を示そう．

仮定より S_1 が S を S_0-algebra として生成する．また，明らかに $S_1^{(d)} = S_d$ が $S^{(d)}$ を S_0-algebra として生成する．そこで $g_0 \in S_1$ を適当にとる．すると $f \in S_1$ について $S_{(f)} = S^{(d)}_{(f f_0^{d-1})}$ が簡単に分かる．

$$\frac{a}{f^n} = \frac{a \cdot f_0^{n(d-1)}}{f^n \cdot f_0^{n(d-1)}}.$$

ここで $a, f^n \in S_n, a f_0^{n(d-1)}, f^n f_0^{n(d-1)} \in S_n^{(d)}$ に注意する．逆に $f' \in S_1^{(d)}$ をとると，$f \backslash f'$ であるような $f \in S_1$ について $S_{(f)} = S^{(d)}_{(f')}$ となる．したがって次が分かる．

$$^\forall f \in S_1, f' \in S_1^{(d)}, \quad f \backslash f' \implies \operatorname{Spec} S_{(f)} = \operatorname{Spec} S^{(d)}_{(f')}.$$

S の生成元 $f \in S_1$(resp. $S^{(d)}$ の生成元 $f' \in S_1^d$) を様々に取れば $\operatorname{Spec} S_{(f)}$(resp. $\operatorname{Spec} S^{(d)}_{(f')}$) で $\operatorname{Proj} S$(resp. $\operatorname{Spec} S^{(d)}$) を被覆できる（$S_1$ の n 個の元の積全体で $S_1^{(d)}$ は生成されるから f' に対応する f は常に存在すると考えて良い）．よって $\operatorname{Proj} S \cong \operatorname{Proj} S^{(d)}$．

S_1 の n 個の元の積 f' をとり，$f \backslash f'$ となる $f \in S_1$ をとる．$X_{(f')} = \operatorname{Spec} S^{(d)}_{(f')}$ 上の $\mathcal{O}(1)$ の元

$$h \cdot \frac{a'}{f'^n} \quad (a' \in S_n^{(d)}, h \in S_1^{(d)})$$

は，分子分母に $(f/f')^n$ をかければ直ちに

$$h \cdot \frac{a}{f^n} \quad (a \in S_n, h \in S_d)$$

と読み替えられる．よって $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S^{(d)}_{(f')}}(1) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S_{(f)}}(d)$，$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S^{(d)}}(1) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} S}(d)$.

Ex5.14 The d-uple Embedding is Projectively Normal.

これは ch I, Ex3.17b で私が考察したことの Scheme における一般化である．

A :: ring, $S_A^r = A[x_0, \ldots, x_r]$，$X$ :: closed subscheme of $\mathbb{P}_A^r = \operatorname{Proj} S_A^r$ とおく．$i : X \to \mathbb{P}_A^r$ を埋め込みとし，$\mathcal{I}_X = \ker i^\#$ とおく．さらに $n \in \mathbb{Z}$ に対して以下のように定義する (p.50, p.117, p.118).

$$S_A^r(n) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} (S_A^r)_{d+n}, \quad \mathcal{O}_X(n) = (S_A^r(n))\tilde{}, \quad \mathcal{I}_X(n) = \mathcal{I}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n), \quad \Gamma_*(\mathcal{I}_X) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{I}_X(d))$$

Ex3.12, Cor5.12 より，$I = \Gamma_*(\mathcal{I}_X), S(X) = S_A^r/I$ とおくと $X \cong \operatorname{Proj} S(X)$ となる．また，X が normal であるとは，任意の点で X の local ring が integrally closed であることで，X が projectively normal であるとは，$S(X)$ が integrally closed であることである．

以下 k :: integrally closed field, X :: connected normal closed subscheme of $\mathbb{P}_k^r$ とし，$S = S(X)$ とする．X の d-uple embedding(Ex5.13) が十分大きな $d > 0$ について projectively normal であることを示す．

(a) S :: domain and $S' := \bigoplus_{n\geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = \bar{S}$.

(i) S :: domain.

■X :: integral projective scheme. X :: integral scheme ならば，任意の $f \in S_+$ について $\mathcal{O}_X(D_+(f)) = S_{(f)}$ :: domain．したがって前段落より S :: domain とわかる．なので X :: integral scheme を示す．まず X :: normal より，任意の $x \in X$ について $\mathcal{O}_{X,x}$ :: integral．なので Ex2.3a より X :: reduced．次の段落で証明するとおり X :: irreducible もわかる．Prop1.1 から X :: integral scheme．（以上の証明から，X :: normal scheme $\Longrightarrow$ X :: disjoint union of integral schemes が分かる．）

■X :: irreducible. X が二つ以上の異なる irreducible component を持っていたとして，それぞれ C_1, C_2 とする．X :: connected より，$C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ であるようにとれる．そこで $x \in C_1 \cap C_2$ をとると，$\mathcal{O}_{X,x}$ は integrally closed になり得ない．実際，$x \in \operatorname{Spec} R = U$ を affine open subset とすると，U は二つの異なる irreducible component $U \cap C_1, U \cap C_2$ をもつから，R はこれらに対応する 2 つの極小素イデアル $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ をもつ．x に対応する素イデアル $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p}_1) \cap V(\mathfrak{p}_2)$ での局所化によって R の極小素イデアルが消えることはないから，結局 $R_\mathfrak{q} \cong \mathcal{O}_{X,x}$ は二つの極小素イデアルをもつ．これは $\mathcal{O}_{X,x}$ :: integral domain に反する．よって X :: irreducible.

■X :: integral projective scheme $\Longrightarrow$ S :: domain. k :: algebraically closed field なので，Prop4.10 から，X は projective variety V に対応する．V :: irreducible に注意．Ex2.14d から V の homogeneous coordinate ring は S だから，S :: domain (cf. ch I, Ex2.4).

(ii) S' :: integrally closed.

■$\mathcal{J}$ の定義．$\mathcal{J}_x$ の元． $\mathcal{J} = \bigoplus_{n\geq 0} \mathcal{O}_X(n)$ とおくと $S' = \Gamma(X, \mathcal{J})$ とみなせる．点 $x \in X$ をとり，$\mathcal{J}_x$ を考えよう．direct sum と stalk（どちらも direct limit）は可換だから，

$$\mathcal{J}_x = \bigoplus_{n\geq 0} (\mathcal{O}_X(n))_x = \bigoplus_{n\geq 0} (S(n))_x.$$

各 $(S(n))_x$ は次のような集合である．

$$(S(n))_x = (S(n))_{(\mathfrak{p}_x)} = \left\{ \frac{a}{f} \;\middle|\; d \geq 0, f \in (S - \mathfrak{p}_x)_d,\ a \in (S(n))_d = S_{d+n} \right\}.$$

ただし $\mathfrak{p}_x$ は点 x に対応する S の斉次素イデアルである．$n \geq 0$ だから

$$\mathcal{J}_x = \left\{ \frac{a}{f} \in S_{\mathfrak{p}_x} \;\middle|\; f :: \text{homogeneous},\ \operatorname{ord} a \geq \deg f \right\}.$$

ここでの $\deg, \operatorname{ord}$ は S に付与されているものである．ただし $\operatorname{ord} a$ は a が持つ斉次成分の次数で最低のものである．$\operatorname{Quot}(\mathcal{J}_x) = \operatorname{Quot}(S)$ も分かる．

■$\mathcal{J}_x$ :: integrally closed / Introduction. $\mathcal{J}_x$ :: integrally closed であることを示すため，次の等式を考える．

$$(*) \qquad \left(\frac{a}{f}\right)^r + c_{r-1}\left(\frac{a}{f}\right)^{r-1} + \cdots + c_0 = 0 \quad \text{where} \quad a/f \in \mathrm{Quot}(S), \quad \{c_i\}_{i=0}^{r-1} \subset \mathcal{J}_x.$$

$d = \deg a/f$ とおく．$\mathcal{O}_{X,x} = S_{(\mathfrak{p}_x)}$ :: integrally closed を利用するため，操作を加えて $a/f, \{c_i\}$ を 0 次斉次元にしたい．操作は d の符号に依って変わってくる．

■$d < 0$ はありえない． 最初に $d < 0$ と仮定する．すると $\mathrm{ord}\, c_i \geq 0$ より，$i = r-1, \ldots, 0$ では $\mathrm{ord}\, c_i + di > dr$ が成り立つ．したがって左辺の dr 次斉次成分を取り出すと先頭項（$i = r$ の項）のみになり，これは明らかに 0 でない．

■$d = 0$ の場合． a/f が負の斉次成分を持つことはないので，a/f は 0 次斉次元である．なので係数から 0 次斉次成分を取り出しても正しい等式となる．(ch I, Thm3.4 で同様の操作を行った．)

■$d > 0$ の場合． (TODO:) その上で $s \in (S - \mathfrak{p}_x)_1$ をとり[†4]，等式 $(*)$ の両辺に s^{-rd} を両辺にかけて，0 次斉次成分を取り出しても正しい等式となる．以上から，次の等式が得られる．

$$\left(\frac{a_d}{s^d f}\right)^r + \left(\frac{c_{r-1}}{s^d}\right)_0 \left(\frac{a_d}{s^d f}\right)^{r-1} + \cdots + \left(\frac{c_0}{s^{rd}}\right)_0 = 0$$

各項の 0 次斉次成分が $\frac{(c_i a^i)_0}{s^{rd} f^{r-1}}$ でなく上のように取れるのは，$\frac{c_i}{s^{d(r-i)}}$ と $\frac{a}{a^d f}$ の斉次成分がどちらも 0 以下のものしか無いことに拠る．0 以下の整数同士を加えて 0 になるのは 0 同士の和のみ，ということである．

■$\mathcal{J}_x$ :: integrally closed / Conclusion. 以上の操作により，a/f 及び係数 $\{c_i\}$ が 0 次斉次元になる．このことから f が斉次だと分かる．等式 $(*)$ が操作後の条件を満たすとして，等式の両辺に f^r を掛けて a^r を移項する:

$$c_{r-1}a^{r-1} \cdot f + \cdots + c_1 a^1 \cdot f^{r-1} + c_0 \cdot f^r = -a^r.$$

c_i, a は斉次元だから，左辺は斉次元である．加えて左辺の各項は次数が同じだから，各項が斉次元．したがって f は斉次でなくてはならない．以上から，$a/f \in S_{((0))}, \{c_i\} \subset S_{(\mathfrak{p}_x)}$ が分かり，$\mathcal{O}_{X,x} = S_{(\mathfrak{p}_x)}$ :: integrally closed より $f \in S - \mathfrak{p}_x$．まとめて，$a/f \in \mathcal{J}_x$．よって $\mathcal{J}_x$ :: integrally closed.

■$^\forall x \in X,\ \mathcal{J}_x$ :: integrally closed $\implies S'$ :: integrally closed. Thm5.19 の証明後半から，$S' \subseteq \bar{S}$．そこで $a/f \in \bar{S} \subset \mathrm{Quot}\, S$ をとって考える．この時，次のような等式が成立する．

$$\left(\frac{a}{f}\right)^r + c_{r-1}\left(\frac{a}{f}\right)^{r-1} + \cdots + c_0 = 0 \quad \text{where} \quad \{c_i\}_{i=0}^{r-1} \subset S \subseteq S'.$$

$S' = \Gamma(X, \mathcal{J})$ だから，任意の $x \in X$ について $\{c_i\} \subset \mathcal{J}_x$．したがって $\mathcal{J}_x$ :: integrally closed より $a/f \in \mathcal{J}_x \subset S_{\mathfrak{p}_x}$．特に，$f$ は斉次元である．f が S の単元でないと仮定すると，f が斉次元であることから，$f \in \mathfrak{p}_x$ なる $x \in X$ がとれる．この x について $a/f \notin \mathcal{J}_x$ となり，矛盾が生じる．よって f は単元でしかありえない．すなわち $a/f \in S \subseteq S'$．以上から $S' \supseteq \bar{S}$ が示された．

(b) $S_d = S'_d$ for all sufficiently large d.

S が Ex5.9 の仮定を満たすことは明らか．$\tilde{S} = \mathcal{O}_X$ なので，Ex5.9c から $S \approx S' = \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$.

[†4] $\mathfrak{p}_x$ が S_1 全体を含むことはない．そうなれば $S_+ \subseteq \mathfrak{p}_x$ となるが，これは $\mathrm{Proj}\, S$ の定義からありえない．なので $s \in (S - \mathfrak{p}_x)_1$ がとれる．

(c) $S^{(d)}$ is integrally closed for sufficiently large d.

(b) より，d を十分大きく取れば，$S_{nd} = S'_{nd}$ $(n \geq 0)$ となる（$S_0 = k = \bar{k} = S'_0$ に注意）．なので，この d について，斉次環 $S^{(d)} = \bigoplus_{n\geq 0} S_{nd}$ は S' の部分環である．$S^{(d)}$ の元を係数に持つ多項式が $\mathrm{Quot}(S^{(d)})$ に根を持っていたとする．

$$\left(\frac{f}{g}\right)^r + c_{r-1}\left(\frac{f}{g}\right)^{r-1} + \cdots + c_0 = 0 \quad \text{where} \quad f, g \in S^{(d)}, \{c_i\}_{i=0}^{r-1} \subset S^{(d)}.$$

$S^{(d)} \subset S'$ かつ (a) から S' は integrally closed なので，$h := f/g \in S'$．上の等式で $(f/g)^r = h^r$ を移項してみると，$\deg c_i$ が d の倍数であることから，$\deg h^r = r \deg h$ も d の倍数だと分かる．r はいくらでも大きくできるから，r と d が互いに素であるようにすれば，$\deg h$ が d の倍数であることが得られる．以上から $h = f/g \in S^{(d)}$ であり，$S^{(d)}$ :: integrally closed.

(d) X :: projectively normal $\iff$ X :: normal and $\Gamma(\mathbb{P}^r_A, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_A}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ is surj.

$X \subseteq \mathbb{P}^r_A$ :: connected closed subscheme とする．X :: projectively normal と，X :: normal かつ自然な写像 $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ が $n \geq 0$ の時全射であること，が同値であることを示す．

■ $\Longrightarrow$．X :: projectively normal の時，定義から $S = \bar{S}$ なので，(a) 後半から $S \cong S' = \Gamma(X, \mathcal{J})$．$x \in X$ とすると，$\mathcal{O}_{X,x} = S_{(\mathfrak{p}_x)} = \mathcal{J}_x$ であり，(a) 後半の証明から $\mathcal{J}_x$ :: integrally closed．また closed immersion の定義から全射 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \to \mathcal{O}_X$ が存在する．homomorphism of graded rings の定義を考えれば，全射が $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ に遺伝することが分かる．

■ $\Longleftarrow$．$S^r_A(n) = \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = S(n)$ が全射かつ X :: normal とする．すると直ちに全射 $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \to \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ が得られる．Ex5.9 より，全射 $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \to \mathcal{O}_X$ が存在し，$\mathcal{I}_X$ の定義から，これの ker が I である．Prop5.13 より $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \cong S^r_A$ なので，$S = S^r_A/I \cong \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S'$．(a) 後半から，これは integrally closed.（k :: integrally closed field は (c) でのみ使われている．）

Ex5.15 Extension of Coherent Sheaves.

X :: noetherian scheme, U :: open in X, $\mathcal{F}$ :: coherent sheaf on U とする．この時，$\mathcal{F}'$ :: coherent sheaf on X であって $\mathcal{F}'|_U = \mathcal{F}$ となるものが存在する．つまり Noetherian Scheme の開集合上の coherent sheaf は拡張できる．これをいくつかの段階に分けて証明する．

Ex5.16 Tensor Operations on Sheaves.

$(X, \mathcal{O}_X)$ :: ringed space, $\mathcal{F}$ :: $\mathcal{O}_X$-module とする．

(a) If $\mathcal{F}$ :: locally free $\mathcal{O}_X$-module then $T^r(\mathcal{F}), S^r(\mathcal{F}), \bigwedge^r(\mathcal{F})$ :: locally free.

Prop5.1,5.2（まとめたものが Cor5.5）と，M :: free A-module に対して $T^r(M), S^r(M), \bigwedge^r(M)$ :: free modules となることから，$T^r(\mathcal{F}), S^r(\mathcal{F}), \bigwedge^r(\mathcal{F})$ :: locally free が分かる．

また，それぞれの rank も計算できる．$\operatorname{rank} M = n \ \ (M \cong A^{\oplus n})$ とする．

$$\operatorname{rank} T^r(M) = \operatorname{rank}\left(\bigotimes_{i=1}^{r} A^{\oplus n}\right) = n^r.$$

$\operatorname{rank} S^r(M)$ は r 個の一次独立な元を n 個の基底 ($A^{\oplus n}$ の基底) からとる重複組み合わせの総数に等しい．

$$\operatorname{rank} S^r(M) = H_r^n = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}.$$

$\operatorname{rank} \bigwedge^r(M)$ は r 個の一次独立な元を n 個の基底 ($A^{\oplus n}$ の基底) からとる（重複なし）組み合わせの総数に等しい．

$$\operatorname{rank} \bigwedge^r(M) = C_r^n = \binom{n}{r}.$$

(b) the multiplication map induces $\bigwedge^r \mathcal{F} \cong (\bigwedge^{n-r} \mathcal{F})\check{} \otimes \bigwedge^n \mathcal{F}$.

M :: locally free A-module とし，M の基底を $x_1, \ldots, x_n$ とする．

■Notation. $S = \{1, \ldots, n\}$ とし，$I \subseteq S$ に対して $x_I = \bigwedge_{i \in I} x_i$ とする．ただし，$i \in I$ は小さいものから取る．例えば $I = \{3, 2, 5\}$ なら $x_I = x_2 \wedge x_3 \wedge x_5$ である．$x_\emptyset = 1 \in A$ としておく．また $\operatorname{sgn} I = \pm 1$ を $x_I \wedge x_{I^c} = (\operatorname{sgn} I) x_S$ で定める．

■→. $\bigwedge^n M = A x_S \cong A$ が分かる．$\bigwedge M$ の multiplication map は次のものである．

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \bigwedge^r M \otimes \bigwedge^{n-r} M & \to & \bigwedge^n M \cong A \\ & x_I \otimes x_J & \mapsto & x_I \wedge x_J. \end{array}$$

ただし $I, J \subset S$ は $\# I = r, \# J = n - r$ を満たす．定義より $I \cap J \neq \emptyset$ ならば $\mu(x_I, x_J) = 0$，$I \cap J = \emptyset$ ならば $\mu(x_I, x_J)$ は $\operatorname{sgn} I = \pm 1 \in A$ へ写る．そこで，$I \subseteq S, x_I \in \bigwedge^r M$ に対し，$\mu(x_I, *) \otimes (x_{I^c} \wedge x_I)$ を x_I の像とする．以上で $\bigwedge^r M$ 全体からの写像が出来た．

■←. $\phi \otimes x_S \in (\bigwedge^{n-r} M)\check{} \otimes \bigwedge^n M$ の像を次のように定める．

$$\sum_{I \subseteq S, \# I = n-r} (\operatorname{sgn} \sigma_I) \phi(x_I) x_{I^c}.$$

ただし S_n は n 次対称群である．

■isomorphism であること． $\mu(x_I, x_J) \neq 0$ となるのは $J = I^c$ の時のみ．なので x_I の像 $\mu(x_I, *) \otimes (x_{I^c} \wedge x_I)$ の像は $(\operatorname{sgn} I)^2 x_I = x_I$．逆に $\phi \otimes x_S$ の像 $\sum_I (\operatorname{sgn} I) \phi(x_I) x_{I^c}$ の像は，$\phi = \sum_I (\operatorname{sgn} I) \phi(x_I) \mu(x_{I^c}, *)$ ゆえに $\phi \otimes x_S$．

Ex5.17 Affine Morphisms.

Scheme morphism $f : X \to Y$ が affine morphism であるとは，$\operatorname{Spec} A \in \mathfrak{U}$ ならば $f^{-1}(\operatorname{Spec} A)$ も affine であるような Y の affine cover $\mathfrak{U}$ が存在する，ということである．

(a) $f : X \to Y$ :: affine $\iff$ for any $\operatorname{Spec} A \subseteq Y$ $f^{-1} \operatorname{Spec} A$ :: affine.

$\Longleftarrow$ は明らか．$\Longrightarrow$ を示す．$\operatorname{Spec} A \subseteq Y$ をとり，$U = \operatorname{Spec} A, V = f^{-1} \operatorname{Spec} A$ とおく．$f|_V : V \to \operatorname{Spec} A$ だけを考えれば十分なので $f : X \to \operatorname{Spec} A = Y$ とする．Ex3.1 の解答で証明した

“Nike’ s Lemma”（と Ex2.13b; sp(Y) :: quasi-compact）を使うと，$\bigcup_{i=1}^{r} D_A(a_i) = Y$ かつ $f^{-1}D_A(a_i)$ :: affine となる $\{a_i\}_{i=1}^{r} \subset A$ が存在することが分かる．

$f^{-1}D_A(a_i) = \operatorname{Spec} B_i$ としよう．さらに $\phi = f_Y^{\#} : A = \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X) = B$ とする．Ex3.1 で証明した別の補題 “Preimage of POS is POS”を使うと，$f^{-1}D_A(a_i) = D_{B_i}(b_i)$ となる $b_i \in B_i$ が存在する事が分かる．$\bigcup_{i=1}^{r} D_A(a_i) = Y$ より $(a_1, \ldots, a_r) = (1) = A$ だから，$(\phi(a_1), \ldots, \phi(a_r)) = (1) = B$. “Preimage of POS is POS”の証明（b_i の定め方）から，$X_{\phi(a_1)} = D_{B_i}(b_i)$ :: affine. 以上から Ex2.17b より $f^{-1} \operatorname{Spec} A$ :: affine.

(b) An affine morphism is quasi-compact and separated. finite $\Longrightarrow$ affine

finite morphism が affine morphism であることは定義から明らか．affine morphism ならば quasi-compact（定義は Ex3.2）であることは Ex2.13b から分かる．affine morphism ならば separated であることは，Cor4.6f と Prop4.1 から．

(c) $\mathbf{Spec}\mathcal{A}$.

Y :: scheme, $\mathcal{A}$ :: quasi-coherent sheaf of $\mathcal{O}_Y$-algebra とする．この時，以下のような X :: scheme, $f : X \to Y$ が一意に存在する: 任意の affine open subset $U \subseteq V \subseteq Y$ について，$f^{-1}U \cong \operatorname{Spec} \mathcal{A}(U)$ であり，$f^{-1}U \hookrightarrow f^{-1}V$ が restrction map $\mathcal{A}(V) \to \mathcal{A}(U)$ に対応する．この X を $\mathbf{Spec}\mathcal{A}$ で表す．

■Construct X. Gluing Lemma(Ex2.12) を用いて X を構成する．貼り合わせるのは $\operatorname{Spec} \mathcal{A}(\operatorname{Spec} R)$ である．V, W :: affine open subset of Y に対し，$U_V = \operatorname{Spec} \mathcal{A}(V), U_W = \operatorname{Spec} \mathcal{A}(W)$ とする．2 つの restriction map $\mathrm{res}_V, \mathrm{res}_W : \mathcal{A}(V), \mathcal{A}(W) \to \mathcal{A}(V \cap W)$ から誘導される写像 $i_V, i_W : \operatorname{Spec} \mathcal{A}(V \cap W) \to U_V, U_W$ をとる．$U_{V,W} = \operatorname{im} i_V, U_{W,V} = \operatorname{im} i_W$ とおくと, open immersion の定義に沿って $U_{V,W}, U_{W,V}$ :: open in U_V, U_W が確かめられる．（$\mathcal{O}_{U_V}|_{U_{V,W}} \cong \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{A}(V \cap W)}$ となる．）以上の設定で gluing が出来ることは明らか．f は Ex2.12 にある isomorphism $(\psi_V)^{-1} : \psi_V(U_V) \to U_V$ を貼り合わせれば良い．

■X satisfies the additional condition. V, W :: affine open subset of Y をとる．$V \subseteq W$ の時，$f^{-1}V \to f^{-1}W$ は $i_W : \operatorname{Spec} \mathcal{A}(V \cap W) = \operatorname{Spec} \mathcal{A}(V) \to \operatorname{Spec} \mathcal{A}(W)$ に対応し，i_W は定義から res_W に対応する．

■Uniqueness.

(d) $f : X \to Y$ :: affine $\iff$ $\mathcal{A} \cong f_*\mathcal{O}_X$ :: quasi-coherent $\mathcal{O}_Y$-algebra and $X \cong \mathbf{Spec}\mathcal{A}$.

■ $\Longrightarrow$. $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$ とおく．$U = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ とすると，$f^{-1}U$ :: affine だから $f^{-1}U = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(f^{-1}U) = \operatorname{Spec} \mathcal{A}(U)$. また，$\operatorname{Spec} \mathcal{A}(U) = f^{-1}U \hookrightarrow f^{-1}V = \operatorname{Spec} \mathcal{A}(V)$ は直ちに $\mathrm{res}_V^U : \mathcal{A}(V) \to \mathcal{A}(U)$ を誘導する．したがって (c) より $X \cong \mathbf{Spec}\mathcal{A}$. また，任意の U :: affine open subset in Y について，$\mathcal{A}(U)$ は $f_U^{\#} : \mathcal{O}_Y(U) \to f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{A}(U)$ によって $\mathcal{O}_Y(U)$-algebra とみなすことが出来る．よって $\mathcal{A}$ :: quasi-coherent $\mathcal{O}_Y$-algebra.

■ $\Longleftarrow$. $\mathcal{A}$ :: quasi-coherent $\mathcal{O}_Y$-algebra ならば，(c) から $\mathbf{Spec}\mathcal{A}$ が存在する．$\mathbf{Spec}\mathcal{A}$ の定義から $f : \mathbf{Spec}\mathcal{A} \to Y$ は affine. $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ を考えると，$U = \operatorname{Spec} A \subseteq Y$ について $f^{-1}U \cong \operatorname{Spec} \mathcal{A}(U)$ だから $\mathcal{O}_X(f^{-1}U) = (f_*\mathcal{O}_X)(U) \cong \mathcal{A}(U)$. このような U で Y を被覆できるから，$\mathcal{A} \cong f_*\mathcal{O}_X$.

(e) $\{$ quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-modules $\} \leftrightarrow \{$ quasi-coherent $\mathcal{A}$-modules $\}$.

$f: X \to Y$ を affine morphism とし，$\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$ とおく．(b) と Prop5.8c より，$\mathcal{F}$ :: quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-module について $f_*\mathcal{F}$ :: quasi-coherent $\mathcal{A}$-module が得られる．

逆に，$\mathcal{M}$ :: quasi-coherent $\mathcal{A}$-module をとる．$U = \operatorname{Spec} A$ :: open in Y をとると，$f^{-1}U$ :: affine なので $f^{-1}U = V = \operatorname{Spec} B$ とする．この時，$\mathcal{M}|_U \cong \tilde{M}$ となる B-module($B = \mathcal{A}(U)$) が存在する．$\phi = f_U^{\#} : A \to B$ によって M を A-module とみなしたものを ${}_AM$ と書くことにして，$\tilde{M}|_U = ({}_AM)\tilde{}$ とおく．こうして $\tilde{\mathcal{M}}$ を構成する[†5]．$({}_AM) \otimes_A B \cong M$ が容易にわかるから，Prop5.2 から $f_*(\tilde{\mathcal{M}}|_U) \cong \mathcal{M}|_U$．${}_A(M \otimes_A B) \cong M$ も同様にわかるから，$\widetilde{f_*(\mathcal{M}|_U)} \cong \mathcal{M}|_U$．$\tilde{\square}$ と f_* が functorial であることは Prop5.2 で述べられているとおりである．以上で主張が示せた．

Ex5.18 Vector Bundles.

[†5] つまるところ $\tilde{\mathcal{M}} = f^*\mathcal{M}$ であるが，上の構成は $\mathcal{M}$ が $\mathcal{O}_X$-module でないという点で Prop5.2 の内容と異なる．