

ゼミノート #1

Etale Morphisms

七条彰紀

2018 年 10 月 11 日

1 定義

定義 1.1 (Infinitesimal Thickening, Formally Smooth/Unramified/Etale) (i) $i: Y'_0 \hookrightarrow Y'$:: closed embedding について, defining ideal :: $\ker i^\#$ が nilpotent ^{†1} であるとき, Y'_0 を Y' の infinitesimal thickening (無限小肥大?) と呼ぶ. あるいは i を infinitesimal thickening と呼ぶ.

(ii) Y' :: affine Y -scheme, $Y'_0(\hookrightarrow Y')$:: infinitesimal thickening of Y' とする. $f: X \rightarrow Y$ について, 以下の図式を見よ.

$$\begin{array}{ccc} Y'_0 & \xrightarrow{\text{red}} & X \\ \text{inf. thi.} \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{\text{blue}} & Y \end{array}$$

この時, 次の写像が定まる.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_Y(Y', X) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_Y(Y'_0, X) \\ \text{blue} \rightarrow & \mapsto & \text{red} \rightarrow \end{array}$$

この写像が surjective injective, bijective であるとき, それぞれ formally smooth, formally unramified, formally etale という.

定義 1.2 ((Locally) Of Finite Presented Module/Algebra/Sheaf/Morphism)

(i) R -module :: M が finitely presented module であるとは, 次の完全列が存在すること.

$$A^{\oplus r} \longrightarrow A^{\oplus s} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(ii) surjective ring homomorphism :: $\phi: R[x_1, \dots, x_s] \rightarrow A$ が存在し, $\ker \phi$ が finitely generated ideal であるとき, A :: finitely presented R -algebra (of finite presentation over R) という.

(iii) \mathcal{F} :: quasi-coherent sheaf on a scheme X とする. \mathcal{F} :: locally finitely presented とは, 任意の affine open subscheme of X :: $\mathrm{Spec} A \subseteq X$ について, $\Gamma(\mathrm{Spec} B, \mathcal{F})$ が finitely presented B -module であること.

^{†1} i.e. $\exists n > 0, (\ker i^\#)^n = 0$

- (iv) $f: X \rightarrow Y$:: locally of finite presentation であるとは, 任意の $\text{Spec } B \subseteq Y$ と $\text{Spec } A \subseteq f^{-1}(\text{Spec } B)$ について, A :: finitely presented B -algebra であるということ. あるいは (同値な条件として), affine open cover of Y :: $Y = \bigcup_i \text{Spec } B_i$ が存在して, 任意の $\text{Spec } A_{ij} \subseteq f^{-1}(\text{Spec } B_i)$ について, A_{ij} :: finitely presented B_i -algebra であるということ.
- (v) $f: X \rightarrow Y$ が quasi-compact であるとは, 任意の affine open subset of X :: $\text{Spec } A$ について $f^{-1}(\text{Spec } A)$:: quasi-compact であること. あるいは (同値な条件として), affine open cover of Y :: $Y = \bigcup_i \text{Spec } B_i$ が存在して, $f^{-1}(\text{Spec } B_i)$:: quasi-compact であること.
- (vi) $f: X \rightarrow Y$ が quasi-separated であるとは, また diagonal morphism :: $\Delta: X \rightarrow X \times_Y X$ ^{†2} が quasi-compact であること.
- (vii) $f: X \rightarrow Y$ が locally of finite presentation かつ quasi-compact かつ quasi-separated である時, f :: finitely presented という.

環 R や scheme :: Y を noetherian とすれば, (locally) of finite presentation と (locally) of finite type は同値になる. 一般に (locally) of finite presentation の方が強い条件である (例を参照せよ).

定義 1.3 (Smooth/Unramified/Etale)

morphism :: $f: X \rightarrow Y$ は, formally smooth / unramified / etale かつ finitely presented ならば smooth / unramified / etale という.

unramified については, finite type のみ要求する定義もある. finitely presented を要求するのは EGA からのもので, 我々が主に参照している [4] もこの定義を取っている.

2 定義に対する例

例 2.1

locally of finite presentation かつ quasi-compact だが NOT quasi-separated である例を挙げる.

以下のように設定する.

- k :: field,
- $Y = \text{Spec } k[x_1, x_2, \dots]$,
- $z = (x_1, x_2, \dots) \in Y$,
- $U = Y - \{z\}$.

この時, U は quasi-compact でない. これは U :: quasi-compact $\iff z$:: finitely generated からわかる^{†3}.

^{†2} Δ は以下のように pullback の普遍性から得られる射である.

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X & \xrightarrow{\quad} & X \\
 & \searrow & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow f \\
 & & X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

^{†3} 私のノート: https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section2_ex.pdf 補題 Ex2.13.2 (II) に証明がある.

X を、二つの Y のコピーを U で貼り合わせたものとし、 $X_1, X_2 \subseteq X$ をその Y のコピーとする。すなわち $X_1, X_2 \cong Y$ 。この同型を $\phi_i: X_i \rightarrow Y$ と名付ける。このとき、 $f: X \rightarrow Y$ を ϕ_1, ϕ_2 の U に沿った貼り合わせとする。こうすると $f|_{X_i} = \phi_i$ となる。

■ $f :: \text{locally of finite presentation}$. $Y :: \text{affine scheme}$ で、 $f^{-1}(Y) = X_1 \cup X_2$ であり、 $X_1, X_2 \cong Y$ であった。なので $f :: \text{locally of finite presentation}$ 。

■ $f :: \text{quasi-compact}$. 同じく、 $X_1, X_2 :: \text{quasi-compact}$ なので $f^{-1}(Y) = X_1 \cup X_2$ が quasi-compact 。

■ $f :: \text{NOT quasi-separated}$. $\text{sp}(X \times_Y X)$ と $\Delta: X \rightarrow X \times_Y X$ を考えると次のように成る。

$$\Delta: x \mapsto (\phi_1^{-1}(x), \phi_2^{-1}(x)).$$

一方、 $X_1 \times_Y X_2 (\subset X \times X)$ は、 $X_1, X_2 (\cong Y)$ が affine なので affine 。そこで逆像 $\Delta^{-1}(X_1 \times_Y X_2)$ を取ると、これは U である。既に述べたとおり、これは NOT quasi-compact 。

例 2.2 (Smooth (BUT NOT Etale) Morphism.)

次のように定める。

$$\begin{aligned} f: \text{Spec } k[x, y] &\rightarrow \text{Spec } k[t] \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

これは affine scheme の間の射なので quasi-separated 。 $f^{-1}(\text{Spec } k[t]) = \text{Spec } k[x, y]$ が noetherian scheme なので $\text{finitely presented}$ 。あとは formally smooth であることを示せば良い。(TODO)

例 2.3 (Unramified (BUT NOT Etale) Morphism.)

次のように定める：

$$\begin{aligned} h: \text{Spec } \frac{\mathbb{C}[x, y]}{(x^2 - y^3)} &\rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[x] \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

f の場合と同様に、 $\text{formally unramified}$ だけ示せば良い。(TODO)

例 2.4 (Etale Morphism.)

次のように定める：

$$\begin{aligned} h: \text{Spec } \mathbb{Q}[u, u^{-1}, y]/(y^d - u) &\rightarrow \text{Spec } \mathbb{Q}[t, t^{-1}] \\ (u, y) &\mapsto u \end{aligned}$$

$A = \mathbb{Q}[t, t^{-1}], B = \mathbb{Q}[u, u^{-1}, y]/(y^d - u)$ とおくと、 h に対応する環準同型は $h^\#: A \rightarrow B; t \mapsto ua \bmod (y^d - u)$ 。 f の場合と同様に、 formally etale だけ示せば良い。

以下の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\alpha} & R/I \\ \uparrow h^\# & \searrow \beta & \uparrow \pi \\ A & \xrightarrow{\phi} & R \end{array}$$

ここで $I \subseteq R$ はイデアルで、 $I^N = 0$ となる整数 $N > 0$ が存在する。与えられた α から図式を可換にする β を構成し、このような β が α に対し唯一であることを示す。まず β は $t \in B$ の像のみで定まることに注意

する。図式が可換であることと、次が成立することは同値。

$$\beta h^\#(t) = \beta(u) = \phi(t), \quad \pi\beta(u) = \alpha(u)$$

よって $\beta(u) = \phi(t)$ で β を定めれば良い。このように定めれば後者も成立する。また、この構成から明らかに β はただ一つ。

例 2.5 (Formally Etale BUT NOT Etale Morphism.)

例 (2.1) の morphism $:: f: X \rightarrow Y$ がそうである。このことを示すには、Formally etale であることだけ確かめれば十分。

3 命題

命題 3.1

以下に列挙する性質は、stable under base exchange かつ stable under composition.

- (1) locally of finite presentation,
- (2) quasi-compact,
- (3) quasi-separated,
- (4) of finite presentation,
- (5) formally smooth,
- (6) formally unramified,
- (7) formally etale,
- (8) smooth,
- (9) unramified,
- (10) etale.

(証明). 証明が必要なものは (1), (2), (3) と (5), (6), (7) である。いずれも簡単なのでここでは証明しない。 ■

定義 3.2 (smooth of relative dimension 0)

morphism $:: f: X \rightarrow Y$ について以下が成立する時、 $f ::$ smooth of relative dimension 0 と呼ぶ。

1. $f ::$ finite type over k ,
2. $f ::$ flat,
3. $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$ を $f(X') \subseteq Y'$ を満たす irreducible component とする。
この時 $\dim X' = \dim Y' + n$,
4. 任意の $x \in X$ について $\dim_{k(x)}(\Omega_{X/Y} \otimes k(x)) = n$.

定理 3.3 ([1] Ex.III.10.3)

morphism $:: f: X \rightarrow Y$ について以下は同値。

1. $f ::$ etale,
2. $f ::$ flat and unramified,
3. $f ::$ smooth of relative dimension 0.

(証明). (TODO) ■

命題 3.4

formally smooth/unramified/etale は locally on codomain な性質である.

(証明). (TODO) ■

命題 3.5 ([4] Prop1.3.6 (i))

$f: X \rightarrow Y$ を finite presentation, quasi-separated morphism とする. この時 $\Omega_{X/Y}$ は次のように成る.

- (i) $f :: \text{smooth} \implies \Omega_{X/Y} :: \text{locally free sheaf of finite rank.}$
- (ii) $f :: \text{unramified} \iff \Omega_{X/Y} = 0.$
- (iii) $f :: \text{etale} \implies \Omega_{X/Y} = 0.$

(証明). 証明は [2] §25 の内容を一部使う. 特に §25 始めから Thm25.1 の直前までがわかっていれば良い.

主張は local なものだから, $X = \text{Spec } B, Y = \text{Spec } A$ と仮定して良い. $f :: \text{smooth}$ より $B :: \text{finitely presented } A\text{-algebra.}$ f に対応する準同型を $\phi: A \rightarrow B$ とする.

(i) を示すために, $\Omega_{B/A} :: \text{projective } B\text{-module}$ を示す (projective ならば locally free であることは [5] section 10.84 に証明がある). これはすなわち, $B\text{-module}$ の以下の図式に対し, 図式を可換にする $\tilde{D}: \Omega_{B/A} \rightarrow M$ が存在するということである.

$$\begin{array}{ccc} & & \Omega_{B/A} \\ & & \downarrow D \\ M & \xrightarrow{t} & N \end{array}$$

ここで $t :: \text{surj.}$

次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f_D} & B[N] \\ \phi \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & B[M] \end{array}$$

ここで $B[M]$ は [2] §25 でいう $B * M$ である^{†4}. $B[N]$ も同様. f_D は $A\text{-derivation} :: D$ に対応する射 $b \mapsto (b, D(b))$ である. $B[M] \rightarrow B[N]$ は $(b, m) \mapsto (b, t(m))$ で与えられる射で, したがって全射であり核は $0 \oplus (\ker t)$. これは square-zero ideal である. そして $\phi :: \text{formally smooth}$ であるから, 図式を可換にする $B \rightarrow B[M]$ が存在する. これに対応する $A\text{-derivation}$ が所望の \tilde{D} である.

(ii) を示す. $R :: \text{ring}, I \subseteq R :: \text{ideal}$ を $I^2 = 0$ を満たすものとする. 以下が可換図式だったとしよう.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\theta} & R/I \\ \phi \uparrow & \searrow \lambda & \uparrow \pi \\ A & \longrightarrow & R \end{array}$$

^{†4} これらは $B\text{-algebra}$ で, 加群としては $B \oplus M$ で, 乗法は $(b, m) \cdot (b', m') = (bb', bm' + b'm)$ で定まる. 重要な特性として, $\pi_M: B[M] \rightarrow B; (b, m) \mapsto b$ の kernel は square-zero で, π_M の $A\text{-algebra section}$ (section which is $A\text{-algebra morphism}$) と $A\text{-derivation } B \rightarrow M$ が一対一に対応する.

この時, λ を lifting of θ と呼ぶ. [2] §25 より^{†5},

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A}, I) = \mathrm{Der}_A(B, I) = \{\lambda - \lambda' \mid \lambda, \lambda' :: \text{lifting of } \theta\}$$

となっている. $\phi :: \text{formally unramified}$ なので, lifting of θ は一つしか無い. よって $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A}, I) = 0$. 任意の R, I についてこれが成立するので, これは $\Omega_{B/A} = 0$ と同値.

formally etale \implies formally unramified なので (ii) \implies (iii) は明らか. ■

命題 3.6 ([4] Prop1.3.6 (iii))

- $g: X \rightarrow Y$ を smooth morphism,
- $i: Z \rightarrow X$ を locally of finite presented closed embedding

とする. この時, $f = i \circ g: Z \rightarrow Y$ が smooth であることと, 以下の列が完全かつ locally split であることは同値である.

$$0 \longrightarrow i^* \mathcal{I}_Z \longrightarrow i^* \Omega_{X/Y} \longrightarrow \Omega_{Z/Y} \longrightarrow 0$$

ただし $\mathcal{I}_Z = \ker i^\#$.

(証明). 問題は local なものであるから, $X = \mathrm{Spec} B, Y = \mathrm{Spec} A, Z = \mathrm{Spec} R = \mathrm{Spec} B/I$ とする. この時, 主張にある完全列は次のように成る.

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_A R \longrightarrow \Omega_{R/A} \longrightarrow 0.$$

ただし $\delta: i \bmod I^2 \mapsto d_{B/A}(i) \otimes 1_R$. $d_{B/A}$ は derivation である.

■方針. 左端の 0 を除いたものは Second Fundamental Exact Sequence として知られ, [2] Thm25.2 など で証明されているとおり, 常に成立する. また, 明らかに $f :: \text{locally finitely presented}$. したがって我々は,

- (a) $Z = \mathrm{Spec} B/I \rightarrow \mathrm{Spec} A = Y :: \text{formally smooth}$ と,
- (b) $\delta :: \text{split}$ が

同値であることを示せば良い.

■(b) の言い換え: $\delta^* :: \text{surj}$. 最初に (a) \implies (b) を示す. これは任意の R -module N について以下が成立することを示せば良い.

$$\delta^* = (- \circ \delta): \mathrm{Hom}_R(\Omega_{B/A} \otimes_A R, N) \cong \mathrm{Hom}_R(\Omega_{B/A}, N) \rightarrow \mathrm{Hom}_R(I/I^2, N) :: \text{surj}.$$

(\cong はテンソル積の随伴性から得られる.) 実際, $N = I/I^2$ とすると, $\delta^* :: \text{surj}$ から δ の retraction の存在が言える. したがって $\delta :: \text{split}$. split は inj を意味することに注意.

■問題のさらなる言い換え. δ^* を具体的に計算すると, 示すべきは次のことであることが分かる.

主張 3.7

^{†5} あるいは私のノート https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section8_ex.pdf の Ex8.6(a) の解答より.

任意の $\phi \in \text{Hom}_R(I/I^2, N)$ に対し, 以下を満たす射 $\psi: B \rightarrow R[N]$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} B \xrightarrow{\psi} R[N] \xrightarrow{\text{pr}_1} R & = & B \xrightarrow{\text{mod } I} R \\ I \hookrightarrow B \xrightarrow{\psi} R[N] & = & I \xrightarrow{\text{mod } I^2} I/I^2 \xrightarrow{\phi} N \hookrightarrow R[N] \end{array}$$

一行目の等号は ψ が π_N の section であることを意味し, 二行目の等号は $\text{pr}_2 \circ \psi: B \rightarrow N$ が $\delta^*(\phi)$ に等しいことを意味する.

■ $\delta^* :: \text{surj.}$ ψ は次のように構成する. まず次の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} R & \xlongequal{\quad} & R \\ \uparrow & & \uparrow \pi \\ A & \longrightarrow & B/I^2 \end{array}$$

π は I/I^2 による剰余をとる写像である. $A \rightarrow R :: \text{formally smooth}$ から, 図式を可換にする射 $\sigma: R \rightarrow B/I^2$ が存在する. この射から次のように同型 $R[I/I^2] \cong B/I^2$ が作れる.

$$\begin{array}{ccc} q: B/I^2 & \rightarrow & R[I/I^2] \\ \tilde{b} & \mapsto & (\pi(\tilde{b}), (\text{id} - \sigma\pi)(\tilde{b})) \\ \pi(r) + \tilde{i} & \mapsto & (r, \tilde{i}) \end{array}$$

これを元に ψ を構成する.

$$B \longrightarrow B/I^2 \xrightarrow{q} R[I/I^2] \xrightarrow{\text{id} \oplus \phi} R[N]$$

これが主張の条件を満たすことは自明.

■ (b) \implies (a) の言い換え: $I \subseteq \ker \tilde{h}$ にする. 話を切り替えて (b) \implies (a) を証明しよう (これは [2] で言及されていない). $C :: A\text{-algebra}$, $J \subset C :: \text{ideal with } J^2 = 0$ とし, $D = C/J$ とおく. 以下の図式 (1) を考える.

$$\begin{array}{ccc} (1) \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{h} & D \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & & \\ \uparrow & & \\ A & \longrightarrow & C \end{array} & (2) \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{h} & D \\ \uparrow & & \uparrow \\ B & & \\ \uparrow & \searrow \tilde{h} & \\ A & \longrightarrow & C \end{array} \end{array}$$

$A \rightarrow B :: \text{formally smooth}$ なので, 図式 (2) の破線の射 \tilde{h} を得る. 我々の目的は図式を可換にする $R \rightarrow C$ を見つけることである. これには, $I \subseteq \ker \tilde{h}$ であれば準同型定理から $\tilde{h} = B \rightarrow R = B/I \rightarrow C$ が得られる.

■ 問題の言い換え: $\text{im } \kappa_h = 0$ にする. $\ker(B \rightarrow R = B/I) = I$ なので $\tilde{h}(I) \subseteq J$. また $J^2 = 0$ なので, \tilde{h} から $\kappa_{\tilde{h}}: I/I^2 \rightarrow J$ が誘導される. 構成から分かるとおり, 示したい $\tilde{h}(I) = 0$ と $\text{im } \kappa_{\tilde{h}} = 0$ は同値である. そして我々は, 以下の通り, $\text{im } \kappa_j = 0$ となる h を選ぶことが出来る.

■ h の構成. 仮定より $\tilde{\alpha} \circ \delta = \kappa_{\tilde{h}}$ を満たす $\tilde{\alpha}: \Omega_{B/A} \otimes_A R \rightarrow J$ が存在する. この $\tilde{\alpha}$ を以下のように拡張し, $\alpha: B \rightarrow J$ とする:

$$\begin{aligned} \alpha: B &\rightarrow J \\ b &\mapsto \tilde{\alpha}(d_{B/A}(b) \otimes 1_R) \end{aligned}$$

$h = \tilde{h} - \alpha$ と置いて, $\kappa_h(I/I^2)$ を計算する. $i \in I$ とする.

$$\begin{aligned} \kappa_h(i \bmod I^2) &= \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) - \alpha(d(i) \otimes 1_R) \\ &= \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) - (\alpha \circ \delta)(i \bmod I^2) \\ &= \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) - \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

以上より, $h(I) = 0$ が得られる. ■

命題 3.8 ([5], Tag 02G7)

$f: X \rightarrow Y$:: finitely presentation and quasi-separated が unramified morphism であることと, 以下の条件 (*) は同値: (*) 任意の $y \in Y$ について, fiber of f at y :: X_y は disjoint union of spectra of finite separable field extensions of $k(y)$.

(証明).

■ (*) $\implies f$:: unramified. 最初は f :: unramified であることを仮定する. unramified は stable under base exchange (命題 3.1) なので, $Y = \text{Spec } k$ の場合を示せば良い.

定理 (3.3) と [1] Cor III.9.6 より, $\dim X = \dim \text{Spec } k = 0$. また X は finite type over k なので noetherian. したがって X :: artinian ^{†6}. artinian ring の構造定理 ([3] Thm8.7) と X :: quasi-compact より, X は

$$X = \bigsqcup \text{Spec } A_i$$

と disjoint に分解でき, 各 A_i は local artinian ring である.

$\text{Spec } A_i \rightarrow \text{Spec } k$:: unramified ゆえに $\Omega_{A_i/k} = 0$ なので, A_i :: reduced ^{†7}. A_i の素イデアルは唯一つであるから, A_i :: field. unramified は stable under base extension なので, 同様に A_i :: separable over k .

A_i :: finitely generated k -algebra かつ体なので, Zariski's Lemma により, A_i/k :: finite algebraic extension. A_i :: separable field over k なので, 定義より A_i :: finite separable extension.

■ f :: unramified \implies (*). 次に命題の条件を仮定する.

まず K/k が finite separable field extension であるとする. すると primitive element theorem より, $\alpha \in K$ を用いて $K = k(\alpha)$ と書ける. $f \in k[x]$ を α の最小多項式とすると, 以下が成り立つ.

$$0 = d(f(\alpha)) = f'(\alpha) \cdot d(\alpha) \in \Omega_{K/k}.$$

K/k :: separable より, $f(\alpha) = 0$ かつ $f'(\alpha) \neq 0$ となる. したがって $f'(\alpha)$:: unit in $\Omega_{K/k}$ なので $d(\alpha) = 0$. よって $\Omega_{K/k} = K \cdot d(\alpha) = 0$.

^{†6} noetherian scheme の定義にある語 “noetherian” を “artinian” に書き換えたのが artinian scheme の定義である.

^{†7} $x \in A_i$ が $x^N = 0$ を満たすとする. $I = \ker(A_i \otimes_k A_i \rightarrow A_i)$ とすると, $x \otimes x^{N-1} \in I$ かつ $\notin I^2$. ゆえに $\Omega_{A_i/k} = I/I^2 \neq 0$.

k -algebra $A = \bigoplus_i K_i$ を $K_i ::$ finite separable field extension of k の直和とする. \mathfrak{p}_i を第 i 成分以外は 0 である元からなる素イデアルとすると,

$$(\Omega_{A/k})_{\mathfrak{p}_i} = \Omega_{A_{\mathfrak{p}_i}/k} = \Omega_{K_i/k} = 0.$$

$\text{sp Spec } A = \{\mathfrak{p}_i\}_i$ なので, これで $\Omega_{A/k} = 0$ が示せた.

最後に, 一般の scheme で考える. 証明は命題 (3.5) を利用する. $\text{Spec } A \subseteq Y$ と $\text{Spec } B \subseteq f^{-1}(\text{Spec } A)$ をとり, $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$ における f の fiber を考える. 仮定 (*) より $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) ::$ direct sum of finite separable field extensions of k . ここで, 上述のことから

$$\Omega_{B \otimes_A k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{p})} = \Omega_{B/A} \otimes_B k(\mathfrak{p}) = 0.$$

$\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p})) \approx f^{-1}(\mathfrak{p})$ を任意にとると,

$$(\Omega_{B/A} \otimes_B k(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{q}} = (\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} \otimes_B k(\mathfrak{p}) = (\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} = 0.$$

これは局所環 $B_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(\mathfrak{p})$ 上の加群であるから, Nakayama's Lemma より, $(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} = 0$. $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p}))$ は任意に取っていたから, これは $\Omega_{B/A} = 0$ を意味する. 命題 (3.5) より, これは $f ::$ unramified と同値. ■

定理 3.9 ([5], Tag 04HM)

$f: X \rightarrow Y$ を separated etale morphism とする. $y \in Y$ に対し $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とする (点が有限個であることは命題 (3.8) による). etale neighbourhood $:: \nu: (U, u) \rightarrow (Y, y)$ が存在し, $X_U = X \times_{\nu, Y, f} U$ の disjoint union decomposition :

$$X_U = \bigsqcup_{i,j} V_{i,j}$$

について $V_{i,j} \cong U$.

注意 3.10

この定理は代数幾何学版の陰関数定理とも呼べる定理である. この現象を根拠にしたスローガン「etale morphism は代数幾何学版 locally homeomorphism」がある. 証明は, この定理だけのために必要な命題が幾つかあるため, 後の節に行う.

命題 3.11

(Jacobian criterion) $f: X \rightarrow Y$ を, locally of finite presentation とする. $f ::$ smooth と次の条件 (+) は同値である:

任意の点 $x \in X$ について, x と $y = f(x) \in Y$ の間に affine neighborhood

$$x \in \text{Spec } B \subset X, \quad y = f(x) \in \text{Spec } A \subseteq Y \quad (\text{with } f(\text{Spec } B) \subseteq \text{Spec } A)$$

が存在し, ある n, s ($s \leq n$) と $f_1, \dots, f_s \in A[x_1, \dots, x_n]$ について

$$B \cong \frac{A[x_1, \dots, x_n]}{(f_1, \dots, f_s)}.$$

さらに, Jacobian matrix ($n \times s$ -matrix)

$$J = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i,j}$$

は, 右逆行列をもつ (i.e. $\exists J', J J' = I$). 同値な条件として, regular (i.e. 行列式が unit element of B) な部分 s 正方行列を J は持つ.

さらに, $f ::$ etale と, この条件で $n = s$ であることは同値である.

(証明). まずは $(f(x) \in) \text{Spec } A$ なる $\text{Spec } A$ と $f(\text{Spec } B) \subseteq \text{Spec } A$ かつ $x \in \text{Spec } B$ なる $\text{Spec } B$ を適当に取る. $f :: \text{locally of finite presentation}$ から, surjective homomorphism

$$A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow B$$

であって kernel $:: I$ が有限生成であると仮定できる.

命題 (3.6) を $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{A}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$ に適用すれば, $f :: \text{smooth}$ と以下が split exact sequence であることが同値だと分かる.

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A[x_1, \dots, x_n]/A} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0.$$

特に $\delta :: \text{split injective}$ が同値である.

■ $f :: \text{smooth} \implies (+)$. $\{f_i\}_{i=1}^s$ を I の生成元とする. この時, δ は次のように作用する.

$$\begin{bmatrix} \delta(\bar{f}_1) \\ \vdots \\ \delta(\bar{f}_s) \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i,j} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

ここで現れた行列は主張にある Jacobian matrix である. 今, 命題 (3.5) (i) と, この exact sequence の存在から $I/I^2 :: \text{free module}$ である. そしてこのとき $\{\bar{f}_i\}_i$ ($\bar{f}_i = f_i \bmod I^2$) は I/I^2 の基底と成る. したがって $\{\bar{f}_i\}_i$ と $\{dx_j\}_j$ はそれぞれの自由加群の基底であるから, δ が split injective であることは, 主張にある Jacobian matrix の条件と同値である.

■ $f :: \text{smooth} \iff (+)$. J が right inverse を持つならば, 明らかに δ が section を持つ. よって $\delta :: \text{split injective}$.

■ $f :: \text{etale} \iff (+)$ and $n = s$. 最初に述べた exact sequence から, $\Omega_{B/A}$ の階数は以下のように成る.

$$\text{rank } \Omega_{B/A} = \text{rank}(\Omega_{A[x_1, \dots, x_n]/A} \otimes_A B) - \text{rank}(I/I^2) = n - s.$$

したがって $n = s \iff \Omega_{B/A} = 0 \iff f :: \text{formally unramified}$. etale=smooth and formally etale なので, 証明できた. ■

定理 3.12

scheme $:: S$ について, category $:: \text{Et}(S)$ を以下のように出さめる.

Objects etale morphism $:: Z \rightarrow S$,

Arrows S -morphism $:: Z \rightarrow Z'$.

$i: S_0 \rightarrow S :: \text{infinitesimal thickening}$ について, 関手 F を以下で定める.

$$\begin{aligned} F: \quad \text{Et}(S) &\rightarrow \text{Et}(S_0) \\ [Z \rightarrow S] &\mapsto [Z \times_S S_0 \rightarrow S_0] \end{aligned}$$

このとき, F は圏同値である.

4 定理 (3.9) の証明.

補題 4.1

$R :: \text{ring}$, $f \in R[x]$ とする. 以下の ring homomorphism から誘導される Spec 間の射は etale である.

$$\begin{array}{ccc} \phi: R & \rightarrow & R[x, 1/f']/(f) \\ r & \mapsto & r \cdot f' \end{array}$$

(証明). 命題 (3.11) (Jacobian criterion) を利用する. この場合, $\text{Jacobian} :: \det \begin{bmatrix} f' \end{bmatrix} = f'$ が unit in $R[x, 1/f']/(f)$ であるから, この補題が成り立つ. ■

参考文献

- [1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.
- [2] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge University Press, revised edition, 5 1989.
- [3] I.G. MacDonald M.F. Atiyah. Atiyah - MacDonald 可換代数入門. 共立出版, 2 2006.
- [4] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [5] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.