ゼミノート #2
Sites and Sheaves

七条彰紀

2018 年 10 月 19 日

1 Motivation.

scheme, stack 等には以下のような包含関係がある．

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{Algebraic Stack} \arrow[r, hook] & \text{Stack} \arrow[r, hook] & \text{Presheaf of Grupoids} \\
\text{Scheme} \arrow[r, hook] \arrow[ur, hook] & \text{Algebraic Space} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \text{Space} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \text{Presheaf of Sets} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

最終的にセミナーを通じて我々が定義したいのは algebraic stack であるが，今回はそれよりも定義が簡素な "space" を定義する．先に space の定義文を示そう．

定義 1.1 (Space, [1] p.26)
S :: scheme とする．Space over S (or S-space) とは，big etale site over S 上にある，集合の sheaf である．

ここに現れる "big etale site" と "big etale site 上の sheaf" を以下で定義する．さらに sheaf の射について幾つか定義をすれば，algebraic space まで定義できる．

定義だけでは space の local は性質を調べる手段がないため，次回は「高次版の sheaf の貼り合わせ」と呼べる "Descent theory" を学ぶ.

2 Definitions : Sites.

以下で導入する Grothendieck topology は，「Sheaf を定義するのに必要な位相空間の定義を抽出し，圏論的に一般化したもの」である．X :: toplological space とし，sheaf on X の定義を見なおしてみよう．すると，sheaf on X は次に挙げるもののみを用いて定義されていると分かる．

1. X の開部分集合と包含写像が成す圏.
2. 開部分集合 $U \subseteq X$ の open covering.
3. 同じく U の open covering :: $\{U_i\}_i$ が与えられたときの族 $\{U_i \cap U_j\}_{i,j}$

そこで次のように定義する．

定義 2.1 (Grothendieck Topology)

$\mathbf{C}$ :: cateogory について，$\mathbf{C}$ 上の Grohendieck topology は任意の $X \in \mathbf{C}$ に $\mathbf{C}$ の射の集まり $\{X_i \to X\}_{i \in I}$ の集まり (collection of collections) を対応させる Cov で構成される．さらに，Cov は以下を満たすように要請される．

(a) $X' \to X$ :: iso ならば $\{X' \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$.
(b) $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U), V \to U \in \mathbf{C}$ について，$\{U_i \times_U V \to V\} \in \mathrm{Cov}(V)$.
(c) $\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)$ をとり，さらに各 i について $\{V_{i,j} \to U_i\}_j \in \mathrm{Cov}(U_i)$ をとる．
この時，合成も Cov に入っている：$\{V_{i,j} \to U_i \to U\}_{i,j} \in \mathrm{Cov}(U)$.

注意 2.2
ここで「集合」ではなく「集まり」という言葉を用いたのは，これらが集合ではない可能性があるからである．この問題（圏論でもしばしば現れる）を取り扱うためには，2 つの解決策がある．1 つ目は Grothendieck の宇宙公理 U を ZFC 公理系に加えた ZFCU 公理系で議論を行うことである．もう 1 つは真のクラスを扱える NBG 公理系で議論を行うことである．

後者の方針を採用する場合は，Grothendieck topology の定義で現れた「集まりの集まり」という言葉に注意が必要である．というのも，たとえ NBG 公理系でも，真のクラスを要素に持つ真のクラスは許されていないからである．この問題を解決するには以下のように Cov を定義すれば良い（以下のように書き換えれば良いという事がわかれば十分なので，実際に以下の定義を採用することはない）：

全ての $U \in \mathbf{C}$ について $\mathrm{Cov}(U)$ は codomain が U である射のクラスである．任意の要素 $[V \to U] \in \mathrm{Cov}(U)$ についてこの要素を含む $\mathrm{Cov}(U)$ の部分クラス $\{U_i \to U\}_i \subset \mathrm{Cov}(U)$ が存在し，以下が成立する．（以下略）．

Cov の元には大抵，以下の条件が課される．

定義 2.3 ((Jointly) Surjective Family)
ある圏の射の集まり $\{U_i \to U\}_i$ について，

$$\coprod_i U_i \to U$$

が surjective である時，（同値な条件として，$\mathrm{im}(U_i \to U)$ の set-theoritic union が U に等しい時,）この集まり $\{U_i \to U\}$ を (jointly) surjective family という．

定義 2.4 (Site)
圏 $\mathbf{C}$ と $\mathbf{C}$ 上の Grothendieck topology :: Cov の組を site と呼ぶ．site に対し，その部分である圏を the underlying category と呼ぶ．しばしば Cov を略して $\mathbf{C}$ のみで site を表す．

定義 2.5 (Localized Site.)
site :: $\mathbf{C}$ と $X \in \mathbf{C}$ について，localized site :: $\mathbf{C}/X$ を以下のように定義する．

$\mathbf{C}/X$ の underlying category は slice cageory :: $\mathbf{C}/X$ である．したがって対象は $\mathbf{C}$ 内の X への射である．Grothendieck topology :: Cov は，

$$\{[U_i \to X] \to [U \to X]\}_i \in \mathrm{Cov}([U \to X]) \implies \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U).$$

のように定められる．

定義 2.6 (Diagrams (or Comma Site).)

Δ :: category, $\mathbf{C}$ :: site, $F\colon \Delta^{op} \to \mathbf{C}$ :: functor とする．この時 site :: $\mathbf{C}_F$ を以下のように定める．

まず undrelying category は $(\mathrm{id}_{\mathbf{C}} \downarrow F)$ である．したがって対象は $X \to F(\delta)$ $(\delta \in \Delta)$ である．Cov は以下のように定める．

$$\left\{ \begin{array}{c} \begin{tikzcd} X_i' \arrow[r, "f_i^\flat"] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ F(\delta_i) \arrow[r, "F(f_i)"'] & F(\delta) \end{tikzcd} \end{array} \right\} \in \mathrm{Cov}([X \to F(\delta)]) \implies f_i\colon \delta \to \delta_i \text{ :: iso. and } \{f_i^\flat\colon X_i' \to X\} \in \mathrm{Cov}(X).$$

定義 2.7 (Continuous Functor.)
$\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ :: sites とする．$f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ :: functor が continuous とは，以下の 2 つが成立すること:

1. 任意の $X \in \mathbf{C}$ と $\{U_i \to X\}_i \in \mathrm{Cov}_{\mathbf{C}}(X)$ について，
$$\{f(U_i) \to f(X)\}_i \in \mathrm{Cov}_{\mathbf{C}'}(f(X))$$
となる．
2. $\mathbf{C}$ の任意の射 $X_1 \to Y, X_2 \to Y$ について，fiber product :: $X_1 \times_Y X_2$ が $\mathbf{C}$ に存在するならば，
$$f(X_1 \times_Y X_2) \cong f(X_1) \times_{f(Y)} f(X_2).$$

注意 2.8
後に示すように，continuous functor はよくあるケースで category of sheaves on site の間の関手を誘導する．これは scheme の間の continuous map が category of sheaves on scheme の間の関手 (e.g. inverse image functor, direct image functor) を定めるのと同じである．

3 Examples : Sites.

3.1 Site.

例 3.1 (Classical topology.)
X :: topological space とし，$O(X)$ を以下のような圏とする．

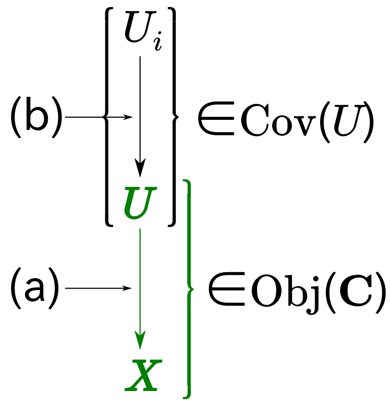
対象 X の開集合.
射 包含射.

この時，$U \in O(X)$ の covering :: $\mathrm{Cov}(U)$ を，U への包含射のみから成る jointly surjective family の集合[†1]とする．

以上で定まる site :: $(O(X), \mathrm{Cov})$ は通常の topology を Grothendieck topology の枠組の中で再現している．

以下で主に用いるのは，$\mathbf{C}$ が slice category :: $\mathbf{Sch}/X$ $(X \in \mathbf{Sch})$ の部分圏であるような site である．$X \in \mathbf{Sch}$ に対して，このような site は underlying category $(\subset \mathbf{Sch}/X)$ と Grothendieck topology (Cov) からなるから，以下の図の (a) $U \to X$, (b) $U_i \to U$ がどのようなものであるか定めれば定義できる．

[†1] 包含射の個数は高々 $2^{\# X}$ 以下の濃度なので，family の集まりは集合．



すなわち，以下の未完成な定義文をテンプレートとする，一連の定義文の群がある．

定義 3.2 ($* * *$ site)
X :: scheme について，圏 $\mathbf{C}$ を以下で定める．

- **対象** (a) である射 $U \to X$.
- **射** 二つの対象の間の射 $[U \to X] \to [U' \to X]$ は，X-morphism :: $U \to U'$.

$[U \to X] \in \mathbf{C}$ に対して，$\mathrm{Cov}(U)$ を (b) である射の集まり $\{U_i \to U\}_i$ であって jointly surjective family であるものの集まりとする．

以上の $\mathbf{C}$ と Cov からなる site を $* * *$ site of X と呼ぶ．

Grothendieck topology の定義から分かるとおり，性質 (b) が stable under base change & composition

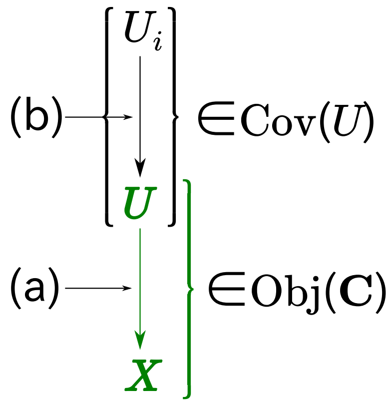
であれば，以上のテンプレートは site の定義文と成る．

定義 3.3

以上の定義文テンプレートを用いて，(a), (b) と各 site の定義を以下のように対応させる．(a) が “–” とある箇所は「$\mathbf{Sch}/X$ の任意の射」を意味する．さらに，“open inclusion” は Zariski 開集合の間にある包含射のことである（したがって small Zariski site の underlying category には Zariski 開集合しか無い）．

$***$	small Zariski	big Zariski	small etale	big etale
(a)	open immersion	–	etale	–
(b)	open immersion	open immersion	etale	etale
$***$	lisse-etale	smooth	fppf	fpqc
(a)	smooth	smooth	–	–
(b)	etale	smooth	flat&locally of finite presentation	flat&quasi-compact

図の再掲:



注意 3.4

“fppf” は “fidèlement plate de présentation finie”（仏語）すなわち “faithfully flat and of finite presentation” の略である．flat& locally of finite presentation ならば実際にこのように成る．同様に “fpqc” は “fidèlement plat et quasi-compact”（仏語）すなわち “faithfully flat and quasi-compact” の略である．

定義 3.5

$***$ site of X の記号を以下のように定める．

$***$	small Zariski	big Zariski	small etale	big etale
名前	$\mathrm{Zar}(X)$	$\mathrm{ZAR}(X)$	$\mathrm{Et}(X)$	$\mathrm{ET}(X)$
$***$	lisse-etale	smooth	fppf	fpqc
名前	$\mathrm{Lis\text{-}Et}(X)$	$\mathrm{Sm}(X)$	$\mathrm{Fppf}(X)$	$\mathrm{Fpqc}(X)$

[2] では big Zariski site of X を $(\mathbf{Sch}/X)_{Zariski}$ などと書く．

3.2 Continuous Functor.

例 3.6
X, X' :: topological space について，$O(X), O(X')$ :: classical site, $f\colon X \to X'$ ::continuous map とする．この時，$f^{-1}\colon O(X') \to O(X)$ :: continuous functor. （f は必ずしも continuous functor でないことに注意.）

注意 3.7
$f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ :: functor between sites が continuous であるための条件を再掲する.

1. 任意の $X \in \mathbf{C}$ と $\{U_i \to X\}_i \in \mathrm{Cov}_{\mathbf{C}}(X)$ について，
$$\{f(U_i) \to f(X)\}_i \in \mathrm{Cov}_{\mathbf{C}'}(f(X))$$
となる.
2. $\mathbf{C}$ の任意の射 $X_1 \to Y, X_2 \to Y$ について，fiber product :: $X_1 \times_Y X_2$ が $\mathbf{C}$ に存在するならば，
$$f(X_1 \times_Y X_2) \cong f(X_1) \times_{f(Y)} f(X_2).$$

例と照らし合わせると，1 つめの条件は f^{-1} が開集合を開集合に写すことに対応し，2 つめの条件は f^{-1} が $\cap$ と交換することと対応する.

例 3.8
従属関係
$$\text{open immersion} \implies \text{etale} \implies \text{fppf}$$
があるから，inclusion map :: $\mathrm{Zar}(X) \hookrightarrow \mathrm{ET}(X) \hookrightarrow \mathrm{Fppf}(X)$ はそれぞれ continuous.

例 3.9
flat morphism :: $f\colon X \to Y$ をとり，f による pullback functor を P_f とする.（TODO: 要確認.）

4 Definitions : Sheaves.

定義 4.1 (Sheaf, Topos, Morphism of Topoi.)

(i) site :: S 上の presheaf とは，functor :: $\mathcal{F}\colon S^{op} \to \mathbf{Sets}$ のことである.

(ii) presheaf on S :: $\mathcal{F}$ が sheaf であるとは，以下の図式が equalizer diagram であるということ.
$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \textstyle\prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathcal{F}(U_i \times_U T_j)$$
ここで右の並行射はそれぞれ射影 $\mathrm{pr}_1(,\mathrm{pr}_2)\colon U_i \times U_j \to U_i(,U_j)$ から $\mathcal{F}$ により誘導される射である.

(iii) Site :: S 上の，圏 $\mathbf{C}(= \mathbf{Sets}, \mathrm{Rings}, \mathrm{AbGrp}, \dots)$ への presheaf の圏を $\mathbf{PSh}(S, \mathbf{C})$，sheaf の圏を $\mathbf{Sh}(S, \mathbf{C})$ と書く.

(iv) morphism of shaeves :: $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ とは，natural transformation のことである.

(v) T :: category が topos であるとは，category of sheaves of sets on a site と圏同値であるということである.

(vi) T, T' :: topoi とする．morphism of topoi :: $f\colon T \to T'$ とは，以下の 3 つの射 (2 functor and 1 isomorphism.) からなる．

$$f_*\colon T \to T', \quad f^*\colon T' \to T, \quad \phi\colon \mathrm{Hom}_T(f^*(-), -) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{T'}(-.f_*(-)).$$

注意 4.2
上で定義した sheaf of sets と同様に，sheaf of abelian groups, sheaf of rings, ... が定義できる．これらはそれぞれ sheaf of sets の圏 :: $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}, \mathbf{Sets})$ における abelian group objects, ring objects, ... と定義される．

注意 4.3
“Topos”はギリシャ語で「場 (place)」を意味する．ギリシャ語なので複数形は “topoi”．

X :: scheme について，X に関する topos を $X_{et}, X_{ET}, \ldots$ などと書く．著者（例えば [2]）によってはこれらの記号を $\mathbf{Sch}/X$ を underlying catgory とする site に用いる．しかし “Grothendieck’s insight is that the basic object of study is the topos, not the site.” (M.Olsson “Stacks”) ということから，topos に site より簡単な記号を与えるのは理解できることである．

定義 4.4 (Ringed Topos.)

(i) T :: topos と T の ring object :: Λ を合わせて ringed topos と呼ぶ．

(ii) morphism of ringed topoi :: $(f, f^\#)\colon (T, \Lambda) \to (T', \Lambda')$ は，
- morphism of topoi :: $f = (f_*, f^*, \phi)\colon T \to T'$ と，
- morphism of ring in T' :: $f^\#\colon \Lambda' \to f_*\Lambda$

の組である．

5 Examples : Sheaves.

例 5.1
X :: scheme と，$\mathbf{Sch}/X$ の部分圏を underlying category とする site :: $\mathbf{C}$(e.g. small/big Zariski site) について，$\underline{X}(-) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$ で functor :: $\underline{X}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}$ を定める．この時，$\underline{X}$ :: presheaf on $\mathbf{C}$．特に，後に示すとおり，fppf toplogy より荒い位相 (e.g. Zariski, smooth, etale, ...) で sheaf となる．

例 5.2 (Constant (Pre)sheaf.)
$\mathbf{C}$ :: site とし，以下のように presheaf on $\mathbf{C}$ :: $\mathcal{F}$ を定める．

$$\mathcal{F}\colon \emptyset \neq U \mapsto \mathbb{R}, \qquad \emptyset \mapsto \{0\}.$$

constant presheaf on a scheme が sheaf でないのと全く同じ理由で，この $\mathcal{F}$ は sheaf でない．具体的には $U \in \mathbf{C}$ が連結でない scheme ならば，$U_1 \sqcup U_2 = U$ なる covering を取ると，定義にある diagram が equalizer diagram にならない．

参考文献

[1] Toms L.Gmez. Algebraic stacks. https://arxiv.org/abs/math/9911199v1, 1999.

[2] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.