ゼミノート #7
Descent Theory

七条彰紀

2018 年 12 月 19 日

1 Motivation

(TODO)

2 Definition

定義 2.1
関手 $\epsilon_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ を用いて以下のように定義する．

(i) $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: equivalence となる $\mathcal{U}$ を of effective descent for $\mathcal{F}$ と呼ぶ．
(ii) $\epsilon_{\mathcal{U}}$ の像と同型である $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象を，effective data という．

3 Criterion for fpqc Stacks

補題 3.1 ([3] Lemma 4.25)
S :: scheme, $\mathcal{F} \to (\mathbf{Sch}/S)$ :: fibration とする．以下が成り立つとする．

(a) $\mathcal{F}$ は Zariski topology での stack である．
(b) 任意の flat surjective morphism of affine S-scheme :: $V \to U$ について，
$\epsilon_{\{V\to U\}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\{V \to U\})$ は圏同値．

この時，$\mathcal{F}$ は fpqc topology での stack である．

注意 3.2
“flat”という条件は以下の証明では利用されない．

証明のために段階を踏む．

3.1 Step 1 / $\epsilon_{\mathcal{U}}$: faithfull.

(TODO: いらないかも)

3.2 Step 2 / single morphism cover の場合に帰着させる．

次を示す．

補題 3.3 ([1] p.87)
$\mathcal{U} = \{\phi_i \colon V_i \to U\}, V' = \coprod V_i$ とする．さらに，$f \colon V' \to U$ を $\mathcal{U}$ から誘導される射とする．
このとき，圏同値 $E \colon \mathcal{F}(U' \to U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ が存在し，合成

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\epsilon_{\{f\}}} \mathcal{F}(V' \to U) \xrightarrow{E} \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

が関手 $\epsilon_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ と同型と成る．

(証明)．まず関手 E を構成し，その後 E が圏同値であること，補題の性質を満たすことを確認する． ∎

注意 3.4
ここで，各 ϕ_i が quasi-compact（特に fpqc）であったとしても，誘導される射 $f \colon V' \to U$ が必ずしも quasi-compact でないことに注意する．例えば $\{\operatorname{Spec} k[x_i] \to \coprod_i \operatorname{Spec} k[x_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ を考えれば分かる．
以上のことに注意すると，我々は次のことを証明することに成る:

補題 3.5
条件 (a), (b) が成り立つならば，以下の条件 $(*)$ を満たす任意の flat surjective morphism :: $f \colon V \to U$ について，$\epsilon_{\{f\}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(f \colon V \to U)$ :: equivalence.

$(*)$ affine Zariski cover :: $U = \bigcup_i U_i$ と，各 i について $f^{-1}(U_i)$ の affine Zariski cover :: $f^{-1}(U_i) = \bigcup_i V_{ij}$ が存在し，V_{ij} :: quasi-compact かつ $f(V_{ij}) = U_i$ となる．

条件 $(*)$ は U, V :: locally noetherian であるような任意の fppf morphism について成立する ([3] Cor1.1.6).

注意 3.6
以下，$\mathcal{F}$ :: split fibered category とする．session 4.5 定理 1.2 より，このように仮定しても一般性を失わない．

3.3 Step 3 / affine scheme への quasi-compact morphism の場合．

$f \colon V \to U$ を U :: affine である quasi-compact morphism とする．$\{V_i\}_i$ を V の open affine cover とし，$V' = \coprod_i V_i$ とおく．V' :: affine なので，仮定 (b) から圏同値 $\mathcal{F}(U) \simeq \mathcal{F}(V' \to U)$ が存在する．

以下の図式 (1) を考える．$\leftrightarrow$ は圏同値を意味する．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\epsilon_f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\epsilon_{\{V_i \to U\}}"'] \arrow[dd, leftrightarrow, bend right=60] & \mathcal{F}(f \colon V \to U) \arrow[dl, "E"] \\
\mathcal{F}(\{V_i \to U\}) \arrow[d, leftrightarrow] & \\
\mathcal{F}(V' \to U) &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

ここで関手 ϵ_f, E は次で与えられる．ただし $\mathrm{pr}_k \colon V \times_U V \to V$ は第 k 成分への射影である．

$$
\begin{array}{llcl}
\epsilon_f \colon & \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{F}(f \colon V \to U) \\
\textbf{Objects}: & \xi & \mapsto & (f^*\xi, \sigma) \\
\textbf{Arrows}: & \alpha & \mapsto & f^*\alpha
\end{array}
$$

ここで $\sigma \colon \mathrm{pr}_2^* f^*\xi \to \mathrm{pr}_1^* f^*\xi \in \mathrm{Arr}(\mathcal{F}(V \times_U V))$ は $\mathrm{pr}_2^* f^*\xi, \mathrm{pr}_1^* f^*\xi$ がいずれも $f \circ \mathrm{pr}_2 = f \circ \mathrm{pr}_1$ による ξ の pullback であることから得られる同型射である．

$$
\begin{array}{llcl}
E \colon & \mathcal{F}(f \colon V \to U) & \to & \mathcal{F}(\{V_i \to U\}) \\
\textbf{Objects}: & (\eta, \sigma) & \mapsto & (\{\eta|_{V_i}\}_i, \{(\gamma_{ij})^*\sigma\}) \\
\textbf{Arrows}: & \beta & \mapsto & \{\beta|_{V_i}\}
\end{array}
$$

ここで γ_{ij} は以下の可換図式のように，fiber product の一意性から得られる射である．

$$
\begin{tikzcd}
V_i \times_U V_j \arrow[rr, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dr, "\gamma_{ij}"] \arrow[dd, "\mathrm{pr}_2"'] & & V_i \arrow[d, hook] \\
& V \times_U V \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & V \arrow[d, "f"] \\
V_j \arrow[r, hook] & V \arrow[r, "f"'] & U
\end{tikzcd}
$$

この図式の可換性から，関手の同型 $E \circ \epsilon_f \cong \epsilon_{\{V_i \to U\}}$ が得られる（$\mathcal{F}$ :: split fibered category を利用する）．（よって上の図式 (1) は可換である．）したがって ϵ_f の psuedo-inverse functor :: $(\epsilon_{\{V_i \to U\}})^{-1} \circ E$ が得られた．

3.4 Step 4 / 条件 $(*)$ を満たす affine scheme への射の場合．

([1] p.88) 仮定 $(*)$ より，Zariski cover :: $\{\iota_i \colon V_i \to V\}$ が存在し，V_i :: quasi-compact．

注意 3.7
前段の議論のうち，図式 (1) の $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V' \to U)$ が圏同値でない．なので新しい議論が必要である．

以下の可換図式を考える．$\mathcal{F}$ :: split としているので，以下は厳密に可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\epsilon_f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{equiv.}"'] & \mathcal{F}(f\colon V \to U) \arrow[dl, "\text{ess. surj., full}"] \\
\mathcal{F}(V_i \to U) &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

左にある縦の射は Step 3 から圏同値である．したがって $\mathcal{F}(V \to U) \to \mathcal{F}(V_i \to U)$（定義はおおよそ関手 E と同様に与えられる）は essentially surjective かつ full である．なのでこの関手が更に faithfull であることが証明できれば，図式の可換性から ϵ_f が圏同値であることが証明できる．

$\mathcal{F}(V \to U)$ の射 β, β' が，$\beta|_{V_i} = \beta'|_{V_i}$ を満たすとする．この時，$\beta = \beta'$ を証明すれば良い．まず，以下の（厳密な）可換図式から，任意の添字 j について圏同値 $\mathcal{F}(V_i \to U) \simeq \mathcal{F}(V_i \cup V_j \to U)$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathcal{F}(V_i \cup V_j \to U) \arrow[dl] \\
\mathcal{F}(V_i \to U) &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

したがって別の可換図式と $\beta|_{V_i} = \beta'|_{V_i}$ から，$\beta|_{V_i \cup V_j} = \beta'|_{V_i \cup V_j}$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(V \to U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}(V_i \cup V_j \to U) \arrow[dl, shift left] \\
\mathcal{F}(V_i \to U) \arrow[ur, shift left] &
\end{tikzcd}$$

よって任意の j について

$$\beta|_{V_j} = (\beta|_{V_i \cup V_j}|_{V_j} = (\beta'|_{V_i \cup V_j})|_{V_j} = \beta'|_{V_j}$$

が得られる．$\mathcal{F}$ :: Zariski stack なので，$\beta = \beta'$.

3.5 Step 5 / 一般の場合．

条件 $(*)$ を満たす任意の射 $f\colon V \to U$ をとり，affine Zarisiki cover :: $\{U_i \to U\}$ をとる．さらに $V_i := f^{-1}(U_i)$ とおき，$\phi_i = f|_{V_i}$ とおく．

今，

$$\Phi_i = \epsilon_{V_i \to U_i}\colon \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(V_i \to U_i)$$

と置く．同様に $\Phi_{ij} = \epsilon_{V_{ij} \to U_{ij}}, \Phi_{ijk} = \epsilon_{V_{ijk} \to U_{ijk}}$ と置く．この時，以下は厳密な可換図式である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "\text{res}"] \arrow[d, "\Phi_i"'] & \mathcal{F}(U_{ij}) \arrow[r, "\text{res}"] \arrow[d, "\Phi_{ij}"] & \mathcal{F}(U_{ijk}) \arrow[d, "\Phi_{ijk}"] \\
\mathcal{F}(V_i \to U_i) \arrow[r, "\text{res}"'] & \mathcal{F}(V_{ij} \to U_{ij}) \arrow[r, "\text{res}"'] & \mathcal{F}(V_{ijk} \to U_{ijk})
\end{tikzcd} \tag{4}$$

ここで，各 Φ_* はいずれも Step 4 から圏同値である．

次の関手を考える．

$$
\begin{array}{cccc}
P_i\colon & \mathcal{F}(f\colon V\to U) & \to & \mathcal{F}(V_i\to U_i) \\
\textbf{Objects} & (\eta,\sigma) & \mapsto & (\eta|_{V_i},(\gamma_{ii})^*\sigma) \\
\textbf{Arrows} & \alpha & \mapsto & \alpha|_{V_i}
\end{array}
$$

同様に $P_{ij}\colon \mathcal{F}(f)\to\mathcal{F}(V_{ij}\to U_{ij})$ を定義する．すると step 4 の結果から $\mathcal{F}(U_i)\simeq\mathcal{F}(V_i\to U_i)$ なので，$\xi_i\in\mathcal{F}(U_i)$ と同型

$$\alpha_i\colon \Phi_i(\xi_i)\xrightarrow{\cong} P_i((\eta,\sigma))$$

が得られる．上の図式 (4) が可換であることから，

$$\alpha_i|_{V_{ij}}\colon \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}}) = (\Phi_i(\xi_i))|_{V_{ij}}\xrightarrow{\cong} P_{ij}((\eta,\sigma))$$

すると，

$$\alpha_i^{-1}\alpha_j\colon \Phi_{ij}(\xi_j|_{V_{ij}})\to\Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}})$$

Φ_{ij} :: equivalence なので，この同型射の逆像として $\sigma_{ij}\colon \xi_j|_{V_{ij}}\to\xi_i|_{V_{ij}}$ が得られる．

以上で得られる $(\{\xi_i\},\{\sigma_{ij}\})$ は cocycle condition を満たすため，$\mathcal{F}(\{U_i\to U\})$ の object である．これは $\mathcal{F}(U)$ と圏同値なので，ξ が得られる．

4 Application : $\mathbf{QCoh}/S\to\mathbf{Sch}/S$ is a fpqc stack.

定義 4.1

$S\in\mathbf{Sch}$ に対し，圏 $\mathbf{QCoh}/S$ を以下のように定める．

Objects.

Fpqc(S) [†1]の対象 :: U と，U 上の quasi-coherent sheaf (on fpqc topology):: $\mathcal{U}$ の組.

Arrows.

射 $(U,\mathcal{U})\to(V,\mathcal{V})$ は，$\mathbf{Sch}/S$ の射 $f\colon U\to V$ と，morphism of sheaves on V :: $f^{\#}\colon\mathcal{V}\to f_*\mathcal{U}$ の組.

この時，$\mathbf{QCoh}/S\to\mathbf{Sch}/S$; $(U,\mathcal{U})\mapsto U$ は fibration である．

$\mathbf{Mod}_A,\mathbf{Mod}_\phi,\mathbf{Mod}_A\to\mathbf{Mod}_\phi$ の定義は [1] §4.2.1 を参照せよ．

$f\colon V\to U$ を flat surjective morphism of S-schemes とし，$\phi\colon A\to B$ を f に対応する faithfully flat な環準同型とする．この時，$\mathbf{QCoh}(U)\simeq\mathbf{Mod}_A$ はよく知られている[†2]．

主張 4.2

$\mathbf{QCoh}(f\colon V\to U)\simeq\mathbf{Mod}_\phi$.

したがって $\epsilon_f\colon\mathbf{QCoh}(U)\to\mathbf{QCoh}(f\colon V\to U)$ は関手 $\mathbf{Mod}_A\to\mathbf{Mod}_\phi$ に対応する．この関手は，可換環論によって圏同値であることが証明される．

参考文献

[1] Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008).

[†1] 圏 $\mathbf{Sch}/S$ に fpqc topology を備えたもの．
[†2] この命題は [2] Cor5.5 で詳しく述べられている

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[3] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.