

ゼミノート #8

Algebraic-ness of Spaces and Stacks

七条彰紀

2019 年 1 月 13 日

目次

1	Fiber Product	1
2	Diagonal Map	5
3	Local Property of Scheme/Morphism of Them	5
4	Algebraic Space	7
4.1	Representable Ones.	7
4.2	Definition of Algebraic Space	8
4.3	Properties of Algebraic Space/Morphism of Algebraic Spaces	8
5	Algebraic Stack	11
5.1	Representable Ones	11
5.2	Definition of Algebraic Stack	12
5.3	Properties of Algebraic Stack/Morphism of Algebraic Stacks	12

affine scheme, scheme. algebraic space, algebraic stack という貼り合わせの連なりを意識した定義をした後, algebraic stack が scheme の貼り合わせとして定義できることを示す. algebraic space と algebraic stack の定義は全く平行に行われる. そのことが分かりやすい記述を志向する.

1 Fiber Product

命題 1.1

任意の site \mathcal{C} について, \mathcal{C} 上の sheaf の圏 $\mathbf{Shv}(\mathcal{C})$ は fiber product を持つ.

(証明). 二つの射 $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}, \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ をとる.

$$\mathcal{C} \ni U \mapsto \mathcal{F}(U) \times_{\mathcal{H}(U)} \mathcal{G}(U)$$

とすれば, これは fiber product となる. ■

$\mathbf{B} :: \text{category}$ とする. この時, $\mathbf{Fib}^{\text{bp}}(\mathbf{B})$ は以下のような圏であった.

Objects: fibered categories over \mathbf{B} .

Arrows: base-preserving natural transtormation.

新たに圏 $\mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ を以下のように定義する.

Objects: categories fibered in groupoids(CFG) over \mathbf{B} .

Arrows: base-preserving natural transtormation.

重要なのは次の存在命題である.

命題 1.2 ([3] p.10)

任意の圏 \mathbf{C} について, $\mathbf{Fib}^{\text{bp}}(\mathbf{B})$ と $\mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ は fibered product を持つ.

(証明). $\mathbf{Fib}^{\text{bp}}(\mathbf{B})$ の射 $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ と $G: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ をとり, F, G の fiber product を実際に構成する.

■圏 \mathbf{P} の構成 圏 \mathbf{P} を以下のように定義する.

Objects: 以下の 4 つ組

- (i) $b \in \mathbf{B}$,
- (ii) $x \in \mathcal{X}(b)$,
- (iii) $y \in \mathcal{Y}(b)$,
- (iv) \mathcal{Z} の恒等射上の同型射 $\alpha: Fx \rightarrow Gy$.

Arrows:

射 $(b, x, y, \alpha) \rightarrow (b', x', y', \alpha')$ は, 二つの射 $\phi_x: x \rightarrow x', \phi_y: y \rightarrow y'$ であって以下を満たすもの:
 ϕ_x, ϕ_y は同じ射 $b' \rightarrow b$ 上の射で, 以下の可換図式を満たすもの.

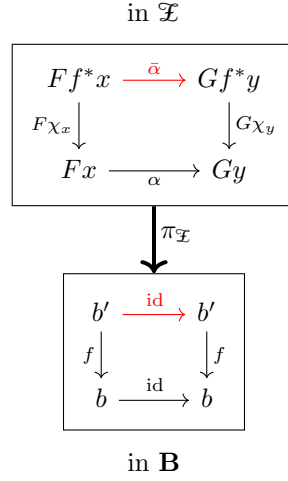
$$\begin{array}{ccc} Fx & \xrightarrow{\alpha} & Gy \\ \textcolor{red}{F\phi_x} \downarrow & & \downarrow \textcolor{red}{G\phi_y} \\ Fx' & \xrightarrow{\alpha'} & Gy' \end{array}$$

■Cartesian Lifting in \mathbf{P} . この圏は $\pi: (b, x, y, \alpha) \mapsto b$ によって fibered category と成る. $f: b' \rightarrow b$ の $\xi = (b, x, y, \alpha)$ に関する Cartesian Lifting $:: f^*\xi \rightarrow \xi$ は次のように定義される.

$$\chi_\xi = (f^*x \xrightarrow{\chi_x} x, f^*y \xrightarrow{\chi_y} y): f^*\xi = (b', f^*x, f^*y, \bar{\alpha}) \rightarrow \xi.$$

ここで $\chi_x: f^*x \rightarrow x$ は f の x に関する Cartesian Lifting である. χ_y も同様. さらに $\bar{\alpha}$ は以下の Triangle Lifting で得られる射である^{†1}.

^{†1} $f^*\alpha: f^*Fx \rightarrow f^*Gy$ とは異なる. 同型 $Ff^*x \rightarrow F^*Fx, Gf^*y \rightarrow f^*Gy$ と $f^*\alpha: Fx \rightarrow Gy$ を合成しても $\bar{\alpha}$ は得られる.



fibered category の間の射は cartesian arrow を保つので $F\chi_x, G\chi_y$ も cartesian. したがって Triangle Lifting が出来る. $\bar{\alpha}$ が同型であることは Triangle Lifting の一意性を用いて容易に証明できる. また, この可換図式から χ_{ξ} が \mathbf{P} の射であることも分かる.

■ $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ が category fibered in groupoids (CFG) ならば \mathbf{P} も CFG. $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ が CFG ならば \mathbf{P} も CFG となる. 実際, $\phi_{\mathcal{X}}: x \rightarrow x'$ と $\phi_{\mathcal{Y}}: y \rightarrow y'$ の両方が cartesian ならば $(\phi_{\mathcal{X}}, \phi_{\mathcal{Y}}): (b, x, y, \alpha) \rightarrow (b', x', y', \alpha')$ は cartesian である.

■ \mathbf{P} からの射影写像. 定義から明らかに $\text{pr}_1: \mathbf{P} \rightarrow \mathcal{X}, \text{pr}_2: \mathbf{P} \rightarrow \mathcal{Y}$ が定義できる. 射の定義にある可換図式は, 以下の A が natural transformation であることを意味している.

$$\begin{array}{ccc}
A: & F \text{pr}_1 & \rightarrow & G \text{pr}_2 \\
& (F \text{pr}_1)((b, x, y, \alpha)) = Fx & \mapsto & \alpha(Fx) = \alpha((F \text{pr}_1)((b, x, y, \alpha)))
\end{array}$$

A が base-preserving であることは α が恒等射上のものであることから, isomorphism であることは α が同型であることから示される.

■ $\mathbf{P} :: \text{fiber product}$. 今, $\mathcal{W} \in \mathbf{Fib}^{\text{bp}}(\mathbf{B})$ と射 $S: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}, T: \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{Y}$ 及び base-preserving isomorphism $\delta: FS \rightarrow GT$ をとる. base-preserving なので, 任意の $w \in \mathcal{W}$ について $\pi_{\mathcal{X}}(FS(w)) = \pi_{\mathcal{X}}(GT(w))$. そこで次のように関手が定義できる.

$$\begin{array}{llll}
H: & \mathcal{W} & \rightarrow & \mathbf{P} \\
\text{Object} & w & \mapsto & (\pi_{\mathcal{X}}(FS(w)), Sw, Tw, \delta_w) \\
\text{Arrow} & [\phi: w \rightarrow w'] & \mapsto & (S\phi: Sw \rightarrow Sw', T\phi: Tw \rightarrow Tw')
\end{array}$$

このように置くと, $S = \text{pr}_1 H, T = \text{pr}_2 H$ となる. 逆に $S \cong \text{pr}_1 H', T \cong \text{pr}_2 H'$ となる関手 $H': \mathcal{W} \rightarrow \mathbf{P}$ は H と同型に成ることが直ちに分かる. ■

注意 1.3

session4 命題 4.5 より, CFG の恒等射上の射は同型射である. したがって $\alpha: Fx \rightarrow Gy$ に課せられた条件は, \mathcal{Z} が CFG ならば一つしか無い.

例 1.4

representable fibered category の fiber product.

sheaf に対応する fibered category の fiber product $\int \mathcal{F} \times_{\int \mathcal{H}} \int \mathcal{G}$ に対応する sheaf は, sheaf の fiber product に対応する.

$$\left(\int \mathcal{F} \times_{\int \mathcal{H}} \int \mathcal{G} \right) (-) = \mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} \in \mathbf{Shv}(\mathbf{C})$$

我々が扱うのは stack であるから, stack という性質が fiber product で保たれていて欲しいが, 果たしてそうなる.

命題 1.5 ([5] Prop 4.6.4)

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} :: \text{stack over } \mathbf{C}$ とし, morphism of stacks $:: F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}, G: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ をとる. この時, F, G についての fiber product $:: \mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}$ は stack である.

したがって結局 $\mathbf{Fib}^{\text{bp}}(\mathbf{B}), \mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ と, stack の圏及び stack in groupoids の圏は fiber product を持つ. 我々が実際に扱うのは stack in groupoids である.

(証明). $\mathcal{P} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}$ とおく. $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ を任意にとり, $\epsilon_{\mathcal{U}}: \mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$ を計算する.

■ $\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$. $\xi = (b, x, y, \alpha)$ をとり, $\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$ を計算する. まず $\{\phi_i^* \xi\}_i$ は既に詳しく説明した. 注意が必要なのは同型 $\sigma_{ij}: \text{pr}_2^* \phi_i^* \xi \rightarrow \text{pr}_1^* \phi_j^* \xi$ である. 可換性は以下の図式から分かる.

$$\begin{array}{c}
 \text{in } \mathcal{Z} \\
 \boxed{
 \begin{array}{ccc}
 F \text{pr}_2^* \phi_j^* x & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & G \text{pr}_2^* \phi_j^* y \\
 \sigma_{ij}^x \downarrow & & \downarrow \sigma_{ij}^y \\
 F \text{pr}_1^* \phi_i^* x & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & G \text{pr}_1^* \phi_i^* y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 Fx & \xrightarrow{\alpha} & Gy
 \end{array}
 } \\
 \downarrow \pi_{\mathcal{Z}} \\
 \boxed{
 \begin{array}{ccc}
 b' & \xlongequal{\quad} & b' \\
 \parallel & & \parallel \\
 b' & \xlongequal{\quad} & b' \\
 \phi_j \circ \text{pr}_2 \downarrow & & \downarrow \phi_i \circ \text{pr}_1 \\
 b & \xlongequal{\quad} & b
 \end{array}
 } \\
 \text{in } \mathbf{B}
 \end{array}$$

■ $\epsilon_{\mathcal{U}}(\kappa)$. (TODO)

■

2 Diagonal Map

注意 2.1

以降は $S :: \text{scheme}$ をとり, $\mathbf{C} = \text{ET}(S) :: \text{big etale site over } S$ 上の sheaf あるいは stack in groupoids のみを考える.

定義 2.2 (Diagonal Map)

sheaf あるいは stack in groupoids over $S :: \mathcal{X}/S$ (すなわち射 $\mathcal{X} \rightarrow S$) の diagonal map $:: \Delta$ とは, 以下の可換図式に収まる射のことである.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{X} & & \xrightarrow{\text{id}} & & \mathcal{X} \\
 & \searrow \Delta & & \searrow & \\
 & \mathcal{X} \times \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} & \\
 & \downarrow \text{p.b.} & & \downarrow & \\
 \mathcal{X} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathcal{X} & \longrightarrow & S
 \end{array}$$

3 Local Property of Scheme/Morphism of Them

定義 3.1 ([2] p.100, Local Property for the topology.)

$S :: \text{scheme}$ とし, (\mathbf{Sch}/S) 上の site $:: \mathbf{C}$ を考える. $X, Y :: \text{scheme}$ とし, $\{\phi_i: X_i \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X), \{\psi_i: Y_i \rightarrow Y\} \in \text{Cov}(Y)$ を任意に取る.

(i) P を scheme の性質とする. P が local for the topology であるとは, 以下が成り立つということ:
 X が P であることは, 全ての U_i が P であることと同値.

(ii) P を scheme の射の性質とする. P が local on the source であるとは, 以下が成り立つということ:
 $f: X \rightarrow Y$ が P であることは, 全ての $f \circ \phi_i$ が P であることと同値.

(iii) P を scheme の射の性質とする. P が local on the target であるとは, 以下が成り立つということ:
 $f: X \rightarrow Y$ が P であることは, 全ての $\text{pr}_2: X \times_Y Y_i \rightarrow Y_i$ が P であることと同値.

(iv) ([5] 5.1.3) P を scheme の射の性質とする. 以下が全て成り立つ時, P は stable であると呼ばれる.

- 任意の同型は P .
- P は, 射の合成で保たれる.
- P は, 任意の \mathbf{C} の射による base change で保たれる.
- local on the target.

(v) ([4] p.33, [3] p.16) P を scheme の射の性質とする. 以下が全て成り立つ時, P は local on the source and target であると呼ばれる. $: X' \rightarrow Y' \times X, Y' \rightarrow Y$ が cover であるような, 次の形の任意の可換図式をとる.

$$\begin{array}{ccccc}
 X' & \longrightarrow & Y' \times X & \longrightarrow & X \\
 & \searrow f' & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow f \\
 & & Y' & \longrightarrow & Y
 \end{array}$$

この時, f が P であることは f' が P であることと同値.

例 3.2 ([6] Tag 0238)

etale topology での定義を挙げる.

local for the topology である性質の例

locally Noetherian, reduced, normal, regular.

local on the source である性質の例

flat, locally of finite presentation, locally of finite type, open, smooth, etale, unramified, locally quasi-finite.

local on the target である性質の例

quasi-compact, quasi-separated, universally closed, separated, surjective, locally of finite type, locally of finite presentation, proper, smooth, etale, unramified, flat.

local on the source and target である性質の例

flat, locally of finite presentation, locally finite type, smooth, etale, unramified...

注意 3.3

“local on the source and target” は, algebraic space, algebraic stack の射について性質を定めるときに必要なになる. この定義は文献に寄って数種類ある. 私が知る限りのものを以下に列挙する.

SP

[6] Tag 04QZ.

DM

X, Y を scheme とし, $\{\phi_i: X_i \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X), \{\psi_i: Y_i \rightarrow Y\} \in \text{Cov}(Y)$ を任意の cover とする. $\{f_i: X_i \rightarrow Y_i\}$ を以下の可換図式を満たす射の族とする.

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\phi_i} & X \\ f_i \downarrow & & \downarrow f \\ Y_i & \xrightarrow{\psi_i} & Y \end{array}$$

この時, 射 f が P であることと, 全ての射 f_i が P であることは同値. [2], p.100 より.

DM'

以下の scheme の可換図式が成立しているとする.

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

ただし $X' \rightarrow X, Y' \rightarrow Y$ は cover である. この時, 射 f が P であることと, 射 f' が P であることは同値. [6] Tag 04R4 で Deligne-Mumford の定義として参照されている.

ST

local on the source かつ local on the target.

ST+

次の 5 条件を合わせたもの.

- 同型について成立する,

- stable under composition,
- stable under base change,
- local on the source,
- local on the target.

[5] Def 5.1.3, 5.4.11 で採用されている.

La

$X, Y :: \text{scheme}$ とし, 射 $Y' \rightarrow Y, X' \rightarrow Y' \times X$ を cover とする. この時, $f: X \rightarrow Y$ と合わせると次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} X' & \longrightarrow & Y' \times X & \longrightarrow & X \\ & \searrow f' & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow f \\ & & Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

この時, f が P であることは f' が P であることと同値. [4] p.33, [3] p.16 で採用されている.

La'

$X, Y :: \text{scheme}$ とし, 射 $Y' \rightarrow Y, X' \rightarrow X$ を cover とする. この時, $f: X \rightarrow Y$ と合わせると次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} X' \times_Y Y' & \longrightarrow & Y' & & \\ \downarrow f' & & \downarrow & \text{p.b.} & \\ X' & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

この時, f が P であることは f' が P であることと同値.

強弱関係は次の通り.

$$\begin{array}{ccccccc} ST+ & \implies & SP & \implies & DM & \implies & DM' \implies La \implies La' \\ & & & & \searrow & & \uparrow \\ & & & & & & ST \end{array}$$

$SP \implies DM \implies ST$ は [6] Tag 04R4 による. $SP \implies DM \implies ST, DM' \implies La \implies La'$ のそれぞれの \implies は逆が成り立たないことも分かっている. また, DM' と local on the target を合わせたものは DM と同値である.

我々としては, 「便利な性質」をもち, かつ弱い定義を取りたい. 後に示すとおり, La を仮定すれば十分「便利」である.

4 Algebraic Space

4.1 Representable Ones.

定義 4.1 (Representable Space)

$\text{stack} :: \mathfrak{X}$ が representable (by scheme) であるとは, ある $\text{scheme} :: X$ が存在し, $\mathfrak{X} \cong X = \mathbf{Sch}/X$ であるということ.

定義 4.2 (Representable Morphism of Spaces)

morphism of spaces $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が representable (by scheme) であるとは, 任意の S -scheme $:: U$ と \mathbf{C} の射 $U \rightarrow \mathcal{Y}$ について, fiber product $:: U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ が representable (by scheme) であるということ.

命題 4.3 (Representable Diagonal Morphism)

$\mathcal{F} ::$ stack on $\tau(S)$ 以下は同値である.

- (i) $\Delta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ は表現可能.
- (ii) 任意の scheme $:: U$ と射 $U \rightarrow \mathcal{X}$ について, $U \rightarrow \mathcal{X} ::$ representable.
- (iii) 任意の scheme $:: U, V$ と射 $u: U \rightarrow \mathcal{X}, v: V \rightarrow \mathcal{X}$ について $U \times_{\mathcal{X}} V ::$ representable.

(証明). (ii) \iff (iii) は representable morphism の定義から直ちに分かる. (i) \iff (iii) は以下が pullback diagram であることから分かる.

$$\begin{array}{ccc} U \times_{\mathcal{X}} V & \longrightarrow & U \times_S V \\ \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow u \times v \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\Delta} & \mathcal{X} \times_S \mathcal{X} \end{array}$$

(TODO: もう少し詳しく.)

定義 4.4 (Property of Representable Spaces/Morphism of Them)

- (i) \mathcal{P} を scheme の性質で local for etale topology であるものとする. この時, representable space $:: \mathcal{X}$ が性質 \mathcal{P} を持つとは, \mathcal{X} を represent する scheme が性質 \mathcal{P} を持つということである.
- (ii) \mathcal{P} を morphism of schemes の性質で local on the target かつ stable under base change であるものとする. この時, representable morphism of spaces $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が性質 \mathcal{P} を持つとは, 任意の $U \in \mathbf{C}$ と射 $U \rightarrow \mathcal{Y}$ について, $\text{pr}: \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U \rightarrow U$ (に対応する morphism of algebraic schemes) が性質 \mathcal{P} を持つということである.

4.2 Definition of Algebraic Space

定義 4.5 (Algebraic Space)

$S ::$ scheme とし, \mathcal{X} を space over S (すなわち big etale site $\text{Et}(S)$ 上の sheaf) とする. \mathcal{X} が algebraic であるとは, 次が成り立つということである.

- (i) diagonal morphism $:: \Delta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が representable である.
- (ii) scheme $:: U$ からの etale surjective morphism $:: U \rightarrow \mathcal{X}$ が存在する.

Algebraic space の射は space としてのものである.

以下では scheme の性質と scheme の射の性質を algebraic space へ拡張する.

4.3 Properties of Algebraic Space/Morphism of Algebraic Spaces

定義 4.6 (Property of Algebraic Spaces)

- (i) \mathcal{P} を scheme の性質であって, local for etale topology であるものとする. この時, algebraic stack $:: \mathcal{X}$ が性質 \mathcal{P} を持つとは, \mathcal{X} のある atlas が性質 \mathcal{P} を持つということである.
- (ii) algebraic stack $:: \mathcal{X}$ が quasi-compact ^{†2} であるとは, \mathcal{X} のある atlas が性質 \mathcal{P} を持つということである.

定義 4.7 (Property of Morphism of Algebraic Spaces)

\mathcal{P} を morphism of scheme の性質であって, local on the source and target であるものとする. 以下の可換図式で, $V \rightarrow \mathcal{Y}, U \rightarrow V \times \mathcal{X}$ は cover であるとする.

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & V \times \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & \searrow f' & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow f \\ & & V & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array} \quad (PM)$$

この時, morphism of algebraic spaces $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が性質 \mathcal{P} を持つとは, この可換図式にある f' (に対応する morphism of scheme) が性質 \mathcal{P} を持つということである.

補題 4.8

- (a) \mathcal{X} を representable space とし, P を algebraic space の性質とする. f が algebraic space として性質 P を持つことと, representable space として性質 P を持つことは同値.
- (b) $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ を representable morphism とし, P を algebraic space の射の性質とする. f が algebraic space の射として性質 P を持つことと, representable morphism として性質 P を持つことは同値.

(証明). \mathcal{X} が scheme $:: X$ で表現されるならば $X \rightarrow \mathbf{Sch}/X \cong \mathcal{X}$ が atlas なので (a) が成立する.

以下の図式で $\text{id}: V \rightarrow V$ が etale surjective なので $U \rightarrow V \times \mathcal{X}$ も etale surjective である. また representable morphism の性質は, scheme の射の性質として local on the target であるものに限っていた. したがって (b) が成立する.

$$\begin{array}{ccccccc} U & \longrightarrow & V \times \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ f'' \downarrow & & \text{p.b.} & & \downarrow f' & \text{p.b.} & \downarrow f \\ V & \xrightarrow{\text{id}} & V & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array}$$

補題 4.9

- (a) P を scheme の性質で local for etale topology なものとする.
一つの etale surjective morphism $:: U \rightarrow \mathcal{X}$ について U が性質 P を持つならば,
任意の etale surjective morphism $:: U \rightarrow \mathcal{X}$ について U が性質 P を持つ.
- (b) P を morphism of scheme の性質であって, local on the source and target であるものとする.
一つの $V \rightarrow \mathcal{Y}, U \rightarrow U \times \mathcal{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つならば,
任意の $V \rightarrow \mathcal{Y}, U \rightarrow U \times \mathcal{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つ.

(証明). [6] Tag 06FM

^{†2} 明らかに, これは local for etale topology ではない.

補題 4.10

P を algebraic space の射の性質とする.

- (a) P が scheme の射の性質として stable under base change ならば, algebraic space の射の性質としても stable under base change.
- (b) P が scheme の射の性質として stable under composition ならば, algebraic space の射の性質としても stable under composition.

(証明). (a) は [6] Tag 0CII を参考にすれば良い.

(b) を示す. 準備として次を示す.

主張 4.11

$U :: \text{scheme}$ とする. $f: U \rightarrow \mathcal{X}, g: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が etale, surjective ならば, 合成 $g \circ f: U \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ も etale, surjective である.

(証明). etale, surjective は scheme の射の性質として stable under base change かつ stable under composition であることに注意する.

$V \rightarrow \mathcal{Y}, W \rightarrow V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ を scheme からの etale surjective (e.s.) 射とする. この時 fiber product を組み合わせて以下の可換図式が得られる. (pullback lemma を暗黙のうちに用いている.)

$$\begin{array}{ccccc}
 W \times_{\mathcal{X}} U & \longrightarrow & V \times_{\mathcal{X}} U & \longrightarrow & U \\
 \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow f \\
 W & \longrightarrow & V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\
 & \searrow & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow g \\
 & & V & \longrightarrow & \mathcal{Y}
 \end{array}$$

この時, 以下のように $W \times U \rightarrow W \rightarrow V$ と $W \times U \rightarrow V \times U$ が e.s. であることが示せる.

- $f: U \rightarrow \mathcal{X} :: \text{e.s. かつ representable} \implies W \times U \rightarrow W :: \text{e.s.}$
- $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} :: \text{e.s.} \implies W \rightarrow V :: \text{e.s.}$
- $W \times U \rightarrow W, W \rightarrow V :: \text{e.s.} \implies W \times U \rightarrow W \rightarrow V :: \text{e.s.}$
- $W \rightarrow V \times \mathcal{X} :: \text{e.s. かつ representable} \implies W \times U = W \times (V \times U) \rightarrow V \times U :: \text{e.s.}$

etale は local on the source な性質なので $V \times U \rightarrow V \times \mathcal{X} \rightarrow V$ も etale. また surjective の圏論的な性質から surjective であることも分かる. この二つから, representable morphism $g \circ f: U \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ は e.s. である. ■

この主張を用いて (b) を示す.

etale surjective 射 $W \rightarrow \mathcal{Z}, V \rightarrow W \times \mathcal{Y}, U \rightarrow V \times \mathcal{X}$ から次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc}
 U & \longrightarrow & V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} & \longrightarrow & W \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\
 \searrow f' & & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow f \\
 & & V & \longrightarrow & W \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{Y} \\
 & & & \searrow g' & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow g \\
 & & & & W & \longrightarrow & \mathcal{Z}
 \end{array}$$

定義から g が P であることと g' が P であることは同値. また, 主張から $W \rightarrow W \times \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$ は etale surjective 射である. したがって再び定義から, f が P であることと f' が P であることは同値. 最後に, $U \rightarrow V \times \mathcal{X} \rightarrow W \times \mathcal{X}$ も etale surjective であるから, $g \circ f$ が P であることと $g' \circ f'$ が P であることは同値である. ■

5 Algebraic Stack

節 5.2 以外は algebraic space の節にある定義文を

- “Space” \rightarrow “Stack”,
- “Scheme” \rightarrow “Algebraic Space”

と置換しただけで得られるので読み飛ばして構わない.

5.1 Representable Ones

定義 5.1 (#Representable Stack)

stack $:: \mathcal{X}$ が representable であるとは, ある algebraic space $:: \mathcal{X}$ が存在し, $\mathcal{X} \cong \mathcal{X} = \int \mathcal{X}$ であるということ.

定義 5.2 (#Representable Morphism of Stacks)

morphism of stacks $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が representable であるとは, 任意の S -algebraic space $:: U$ と \mathbf{C} の射 $U \rightarrow \mathcal{Y}$ について, fiber product $:: U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ が representable であるということ.

補題 5.3 (#)

$\mathcal{X} ::$ stack in groupoids on \mathbf{C} とする. 以下は同値である.

- $\Delta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ は表現可能.
- 任意の algebraic space $:: U$ と射 $U \rightarrow \mathcal{X}$ について, $U \rightarrow \mathcal{X} ::$ representable.
- 任意の algebraic space $:: U, V$ と射 $U \rightarrow \mathcal{X}, V \rightarrow \mathcal{X}$ について $U \times_{\mathcal{X}} V ::$ representable.

定義 5.4 (#Property of Representable Stacks/Morphism of Them)

- \mathcal{P} を scheme の性質で local for etale topology であるものとする. この時, representable stack $:: \mathcal{X}$ が性質 \mathcal{P} を持つとは, \mathcal{X} を represent する algebraic space が性質 \mathcal{P} を持つということである.
- \mathcal{P} を morphism of scheme の性質で local on the target かつ stable under base change であるものとする. この時, representable morphism of stacks $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が性質 \mathcal{P} を持つとは, 任意の $U \in \mathbf{C}$ と射 $U \rightarrow \mathcal{Y}$ について, $\text{pr}: \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U \rightarrow U$ (に対応する morphism of algebraic algebraic spaces) が性質 \mathcal{P} を持つということである.

5.2 Definition of Algebraic Stack

定義 5.5 (Algebraic Stack (Artin Stack))

S :: algebraic space とし, \mathcal{X} を stack over S (すなわち big etale site $\text{Et}(S)$ 上の sheaf) とする. \mathcal{X} が algebraic であるとは, 次が成り立つということである.

- (a) diagonal morphism :: $\Delta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が representable である.
- (b) algebraic space :: U からの smooth surjective morphism :: $U \rightarrow \mathcal{X}$ が存在する.

射は stack in groupoids としての射である.

補題 (5.3) から, 二つの条件は意味を成す.

定義 5.6 (#Deligne-Mumford(DM) Stack)

S :: algebraic space とし, \mathcal{X} を stack over S (すなわち big etale site $\text{Et}(S)$ 上の sheaf) とする. \mathcal{X} が algebraic であるとは, 次が成り立つということである.

- (a) diagonal morphism :: $\Delta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が representable である.
- (b) algebraic space :: U からの etale surjective morphism :: $U \rightarrow \mathcal{X}$ が存在する.

射は stack in groupoids としての射である.

以下, Algebraic Stack と言った時は DM か Artin かを限定しない.

注意 5.7

我々が採用する algebraic stack の定義は, しばしば Artin stack の定義として参照される.

歴史的には, DM stack の方が先に定義された. これは 1969 年の論文 [2] のことである. 動機は algebraic stack $\bar{\mathcal{M}}_g$ を通して, coarse moduli scheme の性質を調べることだった. しばしば DM stack の定義として $\Delta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ は quasi-compact かつ separated であるものとする. しかしこれは [2] では要求されて居ない.

一方, Artin stack は 1974 年の論文 [1] で DM stack の一般化として定義された. 我々が扱う Algebraic stack の定義 (したがって多くの文献での “Artin stack” の定義) は, 原論文のものとは異なる.

5.3 Properties of Algebraic Stack/Morphism of Algebraic Stacks

以下では scheme の性質と scheme の射の性質を algebraic stack へ拡張する.

定義 5.8 (#Property of Algebraic Stack)

- (i) \mathcal{P} を scheme の性質であって, local for etale topology であるものとする. この時, algebraic stack :: \mathcal{X} が性質 \mathcal{P} を持つとは, \mathcal{X} のある atlas が性質 \mathcal{P} を持つということである.
- (ii) algebraic stack :: \mathcal{X} が quasi-compact ^{†3} であるとは, \mathcal{X} のある atlas が性質 \mathcal{P} を持つということである.

^{†3} 明らかに, これは local for etale topology ではない.

ある.

定義 5.9 (#Property of Morphism of Algebraic Stack)

\mathcal{P} を morphism of scheme の性質であって, local on the source and target であるものとする. 以下の可換図式で, $V \rightarrow \mathcal{Y}, U \rightarrow V \times \mathcal{X}$ は cover であるとする.

$$\begin{array}{ccccc} U & \longrightarrow & V \times \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & \searrow f' & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow f \\ & & V & \longrightarrow & \mathcal{Y} \end{array} \quad (PM)$$

この時, morphism of algebraic spaces $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が性質 \mathcal{P} を持つとは, この可換図式にある f' (に対応する morphism of scheme) が性質 \mathcal{P} を持つということである.

補題 5.10 (#)

- (i) \mathcal{X} を representable stack とし, P を algebraic stack の性質とする. f が algebraic stack として性質 P を持つことと, representable stack として性質 P を持つことは同値.
- (ii) $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ を representable morphism とし, P を algebraic stack の射の性質とする. f が algebraic stack の射として性質 P を持つことと, representable morphism として性質 P を持つことは同値.

補題 5.11 (#)

- (i) P を scheme の性質で local for etale topology なるものとする.
一つの etale surjective morphism $:: U \rightarrow \mathcal{X}$ について U が性質 P を持つならば,
任意の etale surjective morphism $:: U \rightarrow \mathcal{X}$ について U が性質 P を持つ.
- (ii) P を morphism of scheme の性質であって, local on the source and target であるものとする.
一つの $V \rightarrow \mathcal{Y}, U \rightarrow U \times \mathcal{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つならば,
任意の $V \rightarrow \mathcal{Y}, U \rightarrow U \times \mathcal{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つ.

(証明). [6] Tag 06FM

補題 5.12 (#)

P を algebraic stack の射の性質とする.

- (i) P が scheme の射の性質として stable under base change ならば, algebraic stack の射の性質としても stable under base change.
- (ii) P が scheme の射の性質として stable under composition ならば, algebraic stack の射の性質としても stable under composition.

(証明). algebraic space の場合の繰り返しである.

参考文献

- [1] M. Artin. Versal deformations and algebraic stacks. *Inventiones mathematicae*, Vol. 27, No. 3, pp. 165–189, Sep 1974.

- [2] Pierre Deligne and David Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.
- [3] Tomàs L. Gòmez. Algebraic stacks. <https://arxiv.org/abs/math/9911199v1>.
- [4] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [5] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [6] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.