

# ゼミノート #9

## Quotient Stacks

七条彰紀

2019 年 1 月 28 日

### 目次

1	Definitions	1
1.1	$\mathcal{G}$ -torsor	1
1.2	Quotient Stack	3
2	Aim of This Session	4
3	準備	4
3.1	Definition of $\mathbf{Isom}(X, Y)$	4
3.2	Propositions	5
3.3	Representability of Diagonal Morphism.	6
4	証明	7
4.1	$\Delta$ is Representable.	7
4.2	$[X/G]$ has an Atlas.	8

Algebraic stack の具体例として Quotient stack を扱う。この例を通じて特に、「diagonal morphism  $\Delta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$  が表現可能とはどういうことか」ということを考えたい。参考文献として [2] 1.3.2, [1] Example 4.8, [3] Example 8.1.12 を参照する。

## 1 Definitions

### 1.1 $\mathcal{G}$ -torsor

定義 1.1 (Equivariant Morphism)

一般の site  $\mathcal{C}$  をとり、 $\mathcal{G}$  を  $\mathcal{C}$  上の sheaf of groups とする。sheaf  $\mathcal{F}$  と、 $\mathcal{G}$  からの左作用  $\alpha: \mathcal{G} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  を組にして  $(\mathcal{F}, \alpha)$  と書く。 $\mathcal{G}$  からの左作用を持つ sheaf の間の射  $(\mathcal{F}, \alpha) \rightarrow (\mathcal{F}', \alpha')$  とは、sheaf の射

$f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$  であって以下が可換図式であるもの.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathcal{F} & \xrightarrow{\text{id} \times f} & \mathcal{G} \times \mathcal{F}' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}' \end{array}$$

このような射  $f$  は  $\mathcal{G}$ -equivariant morphism ( $\mathcal{G}$  同変写像) と呼ばれる.

**定義 1.2** ( $\mathcal{G}$ -Torsor, [3] 4.5.1, [4] Tag 04UJ)

一般の site  $\mathbf{C}$  をとり,  $\mathcal{G}$  を  $\mathbf{C}$  上の sheaf of groups とする.  $\mathbf{C}$  上の  $\mathcal{G}$ -torsor とは,  $\mathbf{C}$  上の sheaf  $\mathcal{P}$  と左作用  $\alpha: \mathcal{G} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  の組であって, 次を満たすもの.

T1 任意の  $X \in \mathbf{C}$  について cover of  $X :: \{X_i \rightarrow X\}$  が存在し,  $\mathcal{P}(X_i) \neq \emptyset$ .

T2 写像

$$\langle \text{pr}_2, \alpha \rangle: \mathcal{G} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{P}; \quad (p, g) \mapsto (p, \alpha(g, p))$$

は同型. ただし,  $\langle \text{pr}_1, \alpha \rangle$  は  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  の普遍性と  $\text{pr}_1, \alpha: \mathcal{P} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$  から得られる射である.

$\mathcal{G}$ -torsor の射は  $\mathcal{G}$ -equivariant morphism である.

$(\mathcal{P}, \alpha)$  が  $\mathcal{G}$ -torsor  $:: (\mathcal{G}, m)$  (ただし  $m: \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  は積写像) と同型である時  $\mathcal{G}$ -torsor  $:: (\mathcal{P}, \alpha)$  は自明 (trivial) であると言う.

**注意 1.3**

$\mathcal{G}, \mathcal{P}$  の両方が scheme で表現できる場合には,  $\mathcal{G}$ -torsor は principal bundle と呼ばれる. group scheme に対応する representable sheaf が

**注意 1.4**

任意の  $X \in \mathbf{C}$  について  $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$  である場合には, 条件 T2 は作用  $\alpha$  が単純推移的であることを意味する. すなわち, 任意の  $p, q \in \mathcal{P}(X)$  についてただ一つの  $g \in \mathcal{G}(X)$  が存在し,  $q = g * p = \alpha(g, p)$  となる.

**補題 1.5** ([4] Tag 03AI, [3] 4.5.1)

(i)  $\mathcal{G}$ -torsor  $:: (\mathcal{P}, \alpha)$  が自明であることと,  $\mathcal{P}$  が global section<sup>†1</sup> を持つことと同値.

(ii)  $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$  ならば制限  $\mathcal{P}|_X$  は trivial.

(iii) 同型  $\mathcal{G}|_X \rightarrow \mathcal{P}|_X$  と  $\mathcal{P}(X)$  の元は一对一に対応する.

(証明).  $(\mathcal{P}, \alpha)$  が自明であると仮定すると, 次のように global section が得られる.

$$1 \rightarrow \mathcal{G} \cong \mathcal{P}; \quad * \mapsto e$$

ただし  $e$  は  $\mathcal{G}$  の単位元である.

$p$  を  $\mathcal{P}$  の global section とすると,

$$\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}; \quad g \mapsto \alpha(g, p)$$

という射が定義できる. これは定義にある条件 T2 から同型である.

<sup>†1</sup> 前層の圏  $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$  の terminal object から  $\mathcal{P}$  への射のこと ([4] Tag 06UN).  $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$  の terminal object は自明群で定まる constant sheaf である.

$s \in \mathcal{P}(X)$  をとれば, scheme の任意の射  $\phi: U \rightarrow X$  について

$$1 \rightarrow (\mathcal{P}|_X)(U) = \mathcal{P}(U); \quad * \mapsto \phi^* s$$

のように global section  $:: 1 \rightarrow \mathcal{P}|_X$  が定まる. ■

### 系 1.6

$\mathcal{G}$ -torsor の任意の射は同型.

(証明). isomorphism は etale local on the target なので (TODO), 条件 T1 にあるような etale cover  $\{\phi_i: U_i \rightarrow X\}$  を取れば主張は「trivial  $(\phi_i)^*\mathcal{G}$ -torsor の射は同型」という命題に帰着される.

$\mathcal{G}$  の単位元 (射  $e: ! \rightarrow \mathcal{G}$  の像) を  $e$  と書くことにすると, 射  $(\phi_i)^*\mathcal{G} \rightarrow (\phi_i)^*\mathcal{G}$  は,  $g \mapsto g \cdot f(e)$  と書ける.  $f(e) \in (\phi_i)^*\mathcal{G}$  も群の元なので逆元が存在する. なので  $g' \mapsto g' \cdot f(e)^{-1}$  とすれば逆射が作れる. ■

## 1.2 Quotient Stack

定義 1.7 (Quotient Stack, [3] Example 8.1.12)

$X ::$  algebraic space,  $G ::$  smooth group scheme over  $S$ , acting on  $X$  とする. すなわち左作用  $\alpha: \underline{G} \times X \rightarrow X$  が存在するものとする. この時, fibered category  $:: [X/G](\rightarrow \text{ET}(S))$  を以下で定める.

Object 以下の 3 つ組.

- $S$ -scheme  $:: U$ ,
- $G_U(= G \times_S U)$ -torsor on  $\text{ET}(U) :: \mathcal{P}$ ,
- $\underline{G}_U$ -torsor の射  $\pi: \mathcal{P} \rightarrow X_U(= X \times_S U)$ .

Arrow 射  $(U, \mathcal{P}, \pi) \rightarrow (U', \mathcal{P}', \pi')$  は二つの射の組  $(f: U \rightarrow U', f^b: \mathcal{P} \rightarrow f^*\mathcal{P}')$  であって, 以下が可換となるもの.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{f^b} & f^*\mathcal{P}' \\ & \searrow \pi & \swarrow f^*\pi' \\ & X_U & \end{array}$$

fibration は  $(U, \mathcal{P}, \pi) \mapsto U, (f, f^b) \mapsto f$  で与えられる.

### 注意 1.8

任意の  $[U \rightarrow S] \in \mathbf{Sch}/S$  について,  $G_U(= G \times U)$  は群になる. 単位セクション  $e_U: ! \rightarrow G_U, e: ! \rightarrow G$  の pullback から得られる. 積  $m_U$  なども同様. 特に射影  $\text{pr}_U: G_U \rightarrow U$  は, smooth morphism  $:: G \rightarrow S$  の pullback なので smooth.

### 補題 1.9

$S ::$  scheme,  $X ::$  algebraic space,  $G ::$  smooth group scheme over  $S$ , acting on  $X$  とする. Quotient stack  $:: [X/G]$  は stack in groupoids である.

(証明). stack であることは sheaf の貼り合わせが可能であることに拠る. 詳しくは [3] 4.2.12, [4] Tag 04UK を参照せよ.  $[X/G]$  が category fibered in groupoids(CFG) であることを確かめる. これは恒等射上の  $[X/G]$  の射が同型射であることを確かめれば良い.

$U \in \text{ET}(S)$  を固定し, 射  $(\text{id}_U, f^b): (U, \mathcal{P}, \pi) \rightarrow (U, \mathcal{P}', \pi')$  を考える. 定義から, 次が可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{f^b} & \mathcal{P}' \\ & \searrow \pi & \swarrow \pi' \\ & X_U & \end{array}$$

■

## 2 Aim of This Session

定理 2.1

$X :: \text{algebraic space}$ ,  $G :: \text{smooth group scheme over } S$ , acting on  $X$  とする. Quotient Stack  $:: [X/G]$  は Artin stack である.

## 3 準備

### 3.1 Definition of $\mathbf{Isom}(X, Y)$

最初に  $\mathfrak{X}$  の cleavage を選択せずとも出来る  $\mathbf{Isom}$  の構成を述べる. 後の注意で特に splitting を選択した場合の構成も述べておく.

定義 3.1 ( $\mathbf{Isom}(X, Y)$ )

stack とは限らない fibration  $:: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{B}$  と,  $U \in \mathbf{B}$  及び  $U$  上の対象  $X, Y \in \mathfrak{X}$  をとる. この時, CFG over  $\mathbf{B}/U :: \mathbf{Isom}(X, Y)$  を以下のように定める.

Object. 以下の 4 つ組.

- $\mathbf{B}/U$  の対象  $f: V \rightarrow U$ .
- $f$  の cartesian lifting  $:: f^*X \rightarrow X, f^*Y \rightarrow Y$ .
- 同型  $\phi: f^*X \rightarrow f^*Y$ .

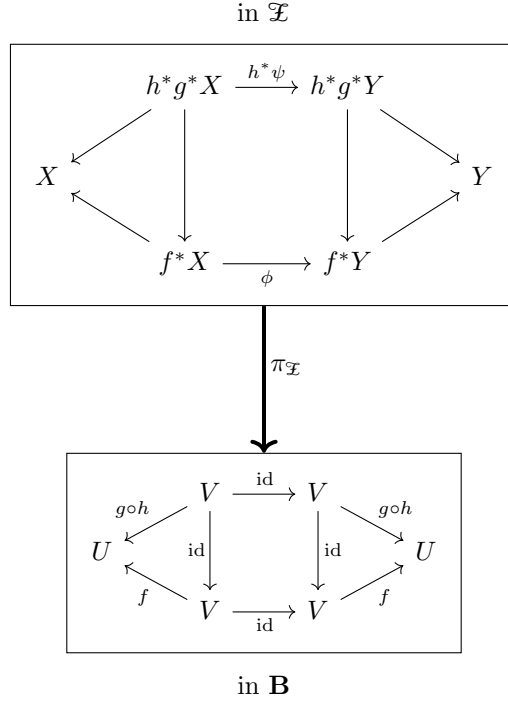
Arrow. 射

$$(V \xrightarrow{f} U, f^*X \rightarrow X, f^*Y \rightarrow Y, f^*X \xrightarrow{\phi} f^*Y) \rightarrow (W \xrightarrow{g} U, g^*X \rightarrow X, g^*Y \rightarrow Y, g^*X \xrightarrow{\psi} g^*Y)$$

は, 以下の 2 つからなる.

- $\mathbf{B}/U$  の射  $h: V \rightarrow W$  (したがって  $g \circ h = f$  が成立),
- 射  $f^*\psi, \phi$  の間の canonical な同型射  $(h^*g^*X \rightarrow f^*X, h^*g^*Y \rightarrow f^*Y)$ .

$(h^*g^*X \rightarrow f^*X, h^*g^*Y \rightarrow f^*Y)$  を選択することで,  $h^*g^*X \rightarrow X, h^*g^*Y \rightarrow Y$  が定まる. また Triangle Lifting により  $f^*\psi$  も定まる. 以下の図式を参考にとすると良い.



fibration は次のように与えられる.

$$\begin{array}{lll}
\pi: & \mathbf{Isom}(X, Y) & \rightarrow \mathbf{B}/U \\
\text{Objects:} & (f: V \rightarrow U, f^*X, f^*Y, \phi: f^*X \rightarrow f^*Y) & \mapsto f \\
\text{Arrows:} & (h: V \rightarrow W, h^*g^*X \rightarrow f^*X, h^*g^*Y \rightarrow f^*Y) & \mapsto h
\end{array}$$

### 注意 3.2

$\mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{B}$  の splitting を選んだ場合には  $\mathbf{Isom}(X, Y)$  の定義は次のように簡単に成る.

**Object.**  $\mathbf{B}/U$  の対象  $f: V \rightarrow U$  と同型  $\phi: f^*X \rightarrow f^*Y$  の組.

**Arrow.** 射  $(f, \phi) \rightarrow (g, \psi)$  は,  $g \circ h = f$  を満たす  $\mathbf{B}/U$  の射  $h$ .

以下では  $\mathbf{Isom}(X, Y)$  が algebraic space (これは sheaf) と同型であるかどうかを考えるので, こちらの定義だけを覚えていても問題はない.

## 3.2 Propositions

### 補題 3.3

任意の  $U \in \mathbf{B}$  と  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$  について,  $\mathbf{Isom}(X, Y)$  は category fibered in sets.

(証明). 恒等射上の射は恒等射しかないことを確かめれば良い.  $\mathbf{Isom}(X, Y)$  の射の定義から, 恒等射上の射は次の形になっている.

$$(\text{id}_U, f^*X \rightarrow f^*X, f^*Y \rightarrow f^*Y): (f, f^*X, f^*Y, \phi) \rightarrow (f, f^*X, f^*Y, \psi)$$

$f^*X \rightarrow f^*X, f^*Y \rightarrow f^*Y$  は Triangle Lifting から得られる canonical なものなので, 恒等射である. ■

$\mathfrak{X} :: \text{stack}$  の場合は ( $\mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{B}$  の splitting を選べば)  $\mathbf{Isom}(X, Y)$  は sheaf になる.

#### 補題 3.4

一般の site  $:: \mathbf{C}$  と CFG  $:: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{C}$  をとる. さらに  $\mathfrak{X}$  は split fibered category であるとする. 以下の二つは互いに同値.

- (i)  $\mathfrak{X}$  は prestack である.
- (ii) 任意の  $X, Y \in \mathfrak{X}$  について  $\mathbf{Isom}(X, Y)$  の fiber は sheaf である.

(証明). (TODO: 出典)

■

### 3.3 Representability of Diagonal Morphism.

#### 注意 3.5

以下, scheme  $S$  を固定し, 特に断らない限り big etale site  $:: \text{ET}(S)$  上の stack in groupoids のみ考える.

#### 補題 3.6

$\mathfrak{X} :: \text{stack in groupoids on } \mathbf{C}(= \text{ET}(S))$  とする. この時,  $\Delta: \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$  が表現可能であることと, 任意の  $U \in \mathbf{C}$  と任意の  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$  について  $\mathbf{Isom}(X, Y)$  が algebraic space であることは同値.

(証明).  $x, y: \mathbf{Sch}/U (= U) \rightarrow \mathfrak{X}$  を, 2-Yoneda Lemma により得られる  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$  に対応する射とする<sup>†2</sup>.

以下の図式が pullback diagram であることから分かる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Isom}(X, Y) & \xrightarrow{\text{pr}_U} & \mathbf{Sch}/U \\ \text{pr}_{\mathfrak{X}} \downarrow & \nearrow a & \downarrow x \times y \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{\Delta} & \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X} \end{array}$$

任意の射  $\mathbf{Sch}/U \rightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  が  $x \times y$  の形で表されることは,  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$  の普遍性から得られる.

まず, 射と自然同型を定義する.  $\mathbf{Isom}(X, Y)$  から伸びる射は次の関手である. ただし  $\xi = (f: V \rightarrow U, f^*X, f^*Y, \phi: f^*X \rightarrow f^*Y), \eta = (g: W \rightarrow U, g^*X, g^*Y, \psi: g^*X \rightarrow f^*Y)$  とした.

$\text{pr}_U$	$\mathbf{Isom}(X, Y)$	$\rightarrow$	$\mathbf{Sch}/U$
<b>Objects:</b>	$\xi$	$\mapsto$	$f$
<b>Arrows:</b>	$[\xi \rightarrow \eta]$	$\mapsto$	$h$

$\text{pr}_{\mathfrak{X}}$	$\mathbf{Isom}(X, Y)$	$\rightarrow$	$\mathfrak{X}$
<b>Objects:</b>	$\xi$	$\mapsto$	$f^*X$
<b>Arrows:</b>	$[\xi \rightarrow \eta]$	$\mapsto$	$f^*X \rightarrow h^*g^*X$

自然同型  $a$  は次で定める.

<sup>†2</sup> 例えば  $x$  は  $f \in \mathbf{Sch}/U$  を cartesian lifting  $f^*X$  へ写す.

$$\begin{aligned} a_\xi: \quad & ((x \times y) \text{pr}_U)(\xi) \quad \rightarrow \quad (\Delta \text{pr}_X)(\xi) \\ & (f: V \rightarrow U, f^*X, f^*X, \alpha) \quad \mapsto \quad (\text{id}_{f^*X}, \phi) \end{aligned}$$

$\mathbf{Isom}(X, Y)$  が pullback であることは,  $\mathbf{Isom}(X, Y)$  が普遍性を持つことを通して確かめる. (TODO) ■

## 4 証明

### 4.1 $\Delta$ is Representable.

示した補題から, 任意の  $U \in \mathbf{C}$  と任意の  $G_U$ -torsor  $:: \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathfrak{X}(U)$  について  $\mathbf{Isom}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$  が algebraic space であることは同値である. これは次のようにして自明な場合に帰着できる.

■  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  が自明な場合に帰着させる.

補題 4.1 ([3] Exc 5.G)

$U :: \text{scheme}$  をとる. sheaf on  $\text{ET}(U) :: \mathcal{F}$  と etale surjective morphism  $:: V \rightarrow U$  に対し,  $V \times_U \mathcal{F}$  が algebraic space ならば,  $\mathcal{F}$  は algebraic space.

補題 4.2

$X, Y \in \mathfrak{X}(U)$  と  $v: V \rightarrow U$  について

$$V \times_U \mathbf{Isom}(X, Y) \cong \mathbf{Isom}(v^*X, v^*Y).$$

(補題 4.1 の証明).  $\mathcal{F}' := (V \times_U \mathcal{F}) \times_V (V \times_U \mathcal{F})$  とおく.

まず diagonal morphism の表現可能性を考える. pullback lemma から次が分かる.

$$(V \times_U \mathcal{F}) \times_V (V \times_U \mathcal{F}) \cong (V \times_U \mathcal{F}) \times_U \mathcal{F} \cong V \times_U (\mathcal{F} \times_U \mathcal{F}).$$

このことから,  $\Delta: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} \times_U \mathcal{F}$  を  $V \rightarrow Y$  で pullback したものが  $\Delta': \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}' \times \mathcal{F}'$  だと分かる.

atlas の存在は次のように分かる.  $A \rightarrow \mathcal{F}'$  を  $\mathcal{F}'$  の atlas とする.

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & V & \xrightarrow{\text{etale, surj.}} & U \end{array}$$

$V \rightarrow Y$  が etale surjective なので  $\mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F}$  も etale surjective. 今  $A \rightarrow \mathcal{F}'$  が etale surjective なので, 併せて  $A \rightarrow \mathcal{F}$  が etale surjective と分かる. ■

(補題 4.2 の証明). 定義を変形するだけである.

$$\begin{aligned} & (V \times_U (\mathbf{Isom}(X, Y)))(W) \\ &= V(W) \times_{U(W)} \mathbf{Isom}(X, Y)(W) \\ &= \{(w: W \rightarrow V, f: W \rightarrow U, \rho: f^*X \xrightarrow{\cong} f^*Y) \mid u \circ v = f\} \\ &= \{(w: W \rightarrow V, \rho: w^*u^*X \xrightarrow{\cong} w^*u^*Y)\} \\ &= \mathbf{Isom}(v^*X, v^*Y)(V) \end{aligned}$$

■

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  が自明に成る etale cover  $:: \mathcal{V}^{\dagger 3}$  をとり,  $v: V = \bigsqcup_{V \in \mathcal{V}} V \rightarrow X$  とすれば,  $v^*\mathcal{P}, v^*\mathcal{P}_2$  は自明な  $G_U$ -torsor となる. こうして  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  が自明な場合に議論を帰着させることが出来る.

同型  $G_Y \cong \mathcal{P}_1, G_Y \cong \mathcal{P}_2$  を固定する. これらと  $\pi_1, \pi_2$  を合成して

$$\rho_1: G_Y \rightarrow X_Y, \quad \rho_2: G_Y \rightarrow X_Y$$

を得る.

■  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  が自明な場合について証明する.  $\mathbf{Isom}((G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2))$  がどのような sheaf か考える. trivial torsor の任意の自己同型  $\phi: G_Y \rightarrow G_Y$  は, これが equivariant であることから,  $\phi(e)$  の左からの積になっている. 逆に任意の  $G_Y$  の元を取れば左からの積が自己同型になるから, 集合  $\mathbf{Isom}((G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2))$  は  $G_Y$  の部分集合である. そこで,  $g \in G_Y$  (i.e.  $g: ! \rightarrow G_Y$ ) から得られる自己同型  $(\cdot g): G_Y \rightarrow G_Y$  が満たすべき条件を考える.

$[X/G]$  の定義から, 次が可換である.

$$\begin{array}{ccc} G_Y & \xrightarrow{(\cdot g)} & G_Y \\ & \searrow \rho_1 & \swarrow \rho_2 \\ & X_Y & \end{array}$$

$(\cdot g)$  は equivariant だから, この図式が可換であることは  $\rho_1(e) = \rho_2(g)$  と同値である. したがって

$$\begin{aligned} & \mathbf{Isom}((G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2))(V) \\ &= \{g \in G_Y(V) \mid \rho_1(e) = \rho_2(g)\} \\ &= \{(g, x) \in G_Y(V) \times X_Y(V) \mid (\rho_1(e), \rho_2(g)) = (x, x)\} \end{aligned}$$

これは次のように, fiber product で表現出来る.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Isom}((G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2)) & \longrightarrow & G_Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_Y & \xrightarrow{\Delta} & X_Y \times_Y X_Y \end{array}$$

射  $G_Y \rightarrow X_Y \times_Y X_Y$  は  $g \mapsto (\rho_1(e), \rho_2(g))$  である. この図式が pullback diagram であることは  $\mathbf{Isom}((G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2))$  が algebraic space であることを意味している.

## 4.2 $[X/G]$ has an Atlas.

射  $a: X \rightarrow [X/G]$  を trivial  $G_X$ -torsor  $:: (G_X, m_X) \in [X/G](X)$  に (2-Yoneda Lemma によって) 対応する射とする. この射  $a$  が atlas であることを示す.  $a$  が representable であることは  $\Delta$  が representable であることから分かる.  $a$  が smooth, surjective であることを示す.

以下の pullback diagram を考える.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow (G_X, m_X) \\ Y & \xrightarrow{(\mathcal{P}, \pi)} & [X/G] \end{array}$$

---

<sup>†3</sup> i.e.  $\forall V \in \mathcal{V}, \mathcal{P}_1(V), \mathcal{P}_2(V) \neq \emptyset$ .



ただし  $Y \rightarrow [X/G]$  は  $a$  と同様に  $(\mathcal{P}, \pi) \in [X/G](Y)$  に対応する射である。  $\mathcal{P}$  は作用  $\alpha: G_Y \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  を持つとする。

この時、  $\mathbf{P}$  は sheaf として  $\mathcal{P}$  と同型である。 これは次のように同型が得られる。 まず  $\mathbf{P}(U)$  は以下の 3 つの組の集合である。

- $x: U \rightarrow X$ ,
- $y: U \rightarrow Y$ ,
- $\rho: x^*(G_X, m_X) \xrightarrow{\cong} y^*(\mathcal{P}, \pi)$ .

ただし  $x, y$  について以下が可換。

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{x} & X \\ y \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

上のような  $x, y$  を一つとり、  $x_0, y_0$  と名前を付ける。 すると  $(y_0)^*G_Y = (x_0)^*G_X$  となる。

次のように同型を定める。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(U) & \rightarrow & \mathcal{P}(U) \\ (x, y, \rho) & \mapsto & \rho_U(e) \\ (x_0, y_0, (y_0)^*\alpha(-, p)) & \leftarrow & p \end{array}$$

$(f^*\mathcal{P})(U) = \mathcal{P}(U)$  は  $f^*$  の colimit を用いた定義から得られる。  $x_0, y_0$  が存在することと  $\mathbf{P}(U)$  の元が存在することは同値であることに注意せよ。

最後に  $\mathcal{P} \rightarrow Y$  が etale surjective であることを確かめる。  $\mathcal{P}(Y_i) \neq \emptyset$  となる  $Y$  の cover  $:: \{Y_i \rightarrow Y\}$  をとる。  $\mathcal{P}|_{Y_i}$  は trivial torsor  $:: G_{Y_i}$  と同型となる。  $\text{pr}_{Y_i}: G_{Y_i} \rightarrow Y_i$  は smooth surjective であり, smooth, surjective はどちらも etale local on target な性質なので,  $\mathcal{P} \rightarrow Y$  も etale, surjective. (ついでに  $\mathcal{P} :: \text{algebraic space}$  も分かる.)

## 参考文献

- [1] Pierre Deligne and David Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.
- [2] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [3] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [4] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.