

以下での (*) とは、次のもの: $X ::$ integral noetherian separated (over \mathbb{Z}) scheme which is regular in codimension one.

Ex6.1 If X Satisfies (*), $\text{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \text{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$.

$X' = X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n = \mathbb{P}_X^n$ とおく. また, $S = \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]$ とし, $\mathbb{P}^n = \text{Proj } S$ とみなす.

■ $X' ::$ integral noetherian separated. X の affine open cover を $\{\text{Spec } A_i\}_{i=0}^r$ とすると, $A_i ::$ integral noetherian \mathbb{Z} -algebra. \mathbb{P}^n の affine open cover は $\{\text{Spec } S_{(x_j)}\}_{j=0}^n$ で与えられる. $S_{(x_j)}$ も integral noetherian \mathbb{Z} -algebra. したがって $R_{ij} = A_i \otimes_{\mathbb{Z}} S_{(x_j)}$ とおくと, X' は $\text{Spec } R_{ij}$ の張り合わせであり (Thm3.3), $R_{ij} ::$ integral noetherian \mathbb{Z} -algebra. 任意の $(i, j), (i', j')$ について $R_{ij}, R_{i'j'}$ が交わることから, X' 全体でも irreducible. よって $X' ::$ integral noetherian scheme. being separated :: stable under base extension より, $X' ::$ separated.

■ $X' ::$ regular in codimension one. $x = \tilde{\mathfrak{p}} \in \text{Spec } R_{ij}$ とする. $A_i \otimes \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_{(x_j)} \cong A_i[x_0, \dots, x_n]_{(x_j)}$ を, 簡単のため $j = 0$ とし, $R_0 := A[\{x_j\}_{j=0}^n]$ とおく. Ati-Mac Prop3.1 より, $\tilde{\mathfrak{p}} \subset (R_0)_{(x_0)}$ に対応する height = 1 の素イデアル $\mathfrak{p} \subset R_0$ がただひとつ存在し, $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(x_0)}$ となる. これを使って計算すると, 以下のようになる.

$$\mathcal{O}_{X',x} = ((R_0)_{(x_0)})_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a/x_0^d}{b/x_0^e} \mid d, e \geq 0, a \in (R_0)_d, b \in (R_0 - \mathfrak{p})_e \right\} \cong A[\{x_j\}_{j=1}^n]_{\mathfrak{p}'} =: R_1.$$

最後の同型は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} (R_0)_{(x_0)} = A[\{x_j\}_{j=0}^n]_{(x_0)} &\rightarrow R_1 = A[\{x_j\}_{j=1}^n] \\ f(x_0, x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(1, x_1, \dots, x_n) \\ g(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) &\leftarrow g(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

\mathfrak{p}' はこの写像による \mathfrak{p} の像である. R_1 は A と同様に integral noetherian ring. $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}' \cap A$ とおく. $A \subset R_1$ は flat extension だから, going-down theorem が成立し, height $\mathfrak{q} \leq \text{height } \mathfrak{p}' = 1$. また, 計算すると

$$(R_1)_{\mathfrak{p}'} \cong (A_{\mathfrak{q}}[\{x_j\}_{j=1}^n])_{\mathfrak{p}''}.$$

ただし $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}' A_{\mathfrak{q}}$. height $\mathfrak{q} = 1$ の時, 仮定から $A_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{X,\mathfrak{q}} ::$ regular local ring. よって $(R_1)_{\mathfrak{p}'}$ は D.V.R. height $\mathfrak{q} = 0$ すなわち $\mathfrak{q} = 0$ の時, 同様に $(R_1)_{\mathfrak{p}'}$ は体 $A_{(0)}$ 上の多項式環の \mathfrak{p} における局所化だから D.V.R.

■ Another Proof: $X' ::$ regular in codimension one. \mathbb{P}^n は $n+1$ 個の \mathbb{A}^n で被覆出来るから, $X \times \mathbb{P}^n$ は $n+1$ 個の $X \times \mathbb{A}^n$ で被覆できる. $X \times \mathbb{A}^n$ は Prop6.6 のとおり (*) を満たすから, (*) のうち local な性質はすべて満たす. global な性質は noetherian と irreducible のみであるが, これらはそれぞれ R_{ij} が noetherian であること, 任意の $(i, j), (i', j')$ について $\text{Spec } R_{ij} \cap \text{Spec } R_{i'j'} \neq \emptyset$ であることからわかる. よって $X \times \mathbb{P}^n$ も (*) を満たす.

■ Definition of $\text{pr}_1, \text{pr}_2, \pi$. $X \times \mathbb{P}^n$ から X, \mathbb{P}^n への projection をそれぞれ pr_1, pr_2 とする. また $X \times \mathbb{A}^n \rightarrow X$ の projection を π とする. Prop6.6 の証明から $\pi^*: \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(X \times \mathbb{A}^n)$ は全単射.

■Exact Sequence in Prop6.5. $\mathfrak{p} = (x_0) \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n] = S$ とする. $Z = \text{pr}_2^{-1}(V(\mathfrak{p}))$ とおくと, Z :: irreducible closed subset of codim = 1 in $X \times \mathbb{P}^n$ ^{†1}. $U = Z^c = \text{pr}_2^{-1}(V(\mathfrak{p})^c) \cong X \times \mathbb{A}^n$ だから, Ex3.9a と Prop6.6 より, $\text{Cl}(U) \cong \text{Cl}(X)$. したがって Prop6.5 の完全列は以下のようになる.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \text{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{j} \text{Cl}(X) \longrightarrow 0$$

$\text{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \text{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$ を示すには, $i: 1 \mapsto 1 \cdot Z$ が単射であること, および $j: Y \mapsto (\pi^*)^{-1}(Y \cap U)$ が split することを示せば十分である. 後者はすぐに分かる. $\pi^*: \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)$ は全単射だから, W :: prime divisor in X について,

$$j(\text{pr}_1^*(W)) = (\pi^*)^{-1}(\text{pr}_1^*(W) \cap U) = (\pi^*)^{-1}(\text{pr}_1|_U)^{-1}W = (\pi^*)^{-1}\pi^{-1}W = (\pi^*)^{-1}\pi^*W = W.$$

$(\text{pr}_1^*W) \cap U = (\text{pr}_1^{-1}W) \cap U = (\text{pr}_1|_U)^{-1}W$ を用いた.

■ i :: injective. $X' = X \times \mathbb{P}^n, K$:: function field of X' とし, $d \in \mathbb{Z} - \{0\}$ をとる. 示すべきことは, $dZ = (f)$ を満たす $f \in K^\times$ が存在しないこと. 正次数の斉次元 $t \in A[x_0, \dots, x_n]$ をとり, $V = \text{Spec } A[x_0, \dots, x_n]_{(t)} = D_+(t) \subset X'$ において f が regular (pole を持たない) だしよう. $D_+(t)$ は基本開集合を成すから, このようにすることは可能である. また, $V \cap Z \neq \emptyset$, したがって $t \notin (x_0)$ とする. この時, $f \in A[x_0, \dots, x_n]_{(t)}, V \cap Z = V((x_0))$. $V \cap Z$ の generic point を $\eta = x_0 \cdot A[x_0, \dots, x_n]_{(t)}$ ^{†2} とおくと, η に対応する valuation は $v_{V \cap Z}(f) = \sup\{d \mid f \in \eta^d - \eta^{d+1}\}$ で定まる. なので $v(f) = d$ ならば, f は次のようになる.

$$f = \left(\frac{x_0^m}{t}\right)^d \frac{g}{t^e} \text{ where } m := \deg t, \quad e \geq 0, \quad g \in A[x_0, \dots, x_n]_{em}, \quad t, x_0^m \nmid g$$

$d \neq 0$ と仮定する. $e = \deg g = 0$ の時, t の既約因数によって定まる prime divisor T 上で $v_T(f) < 0$ となる. $e > 0$ の時, g の既約因数によって定まる prime divisor G 上で $v_G(f) > 0$ となる. 以上から, $dZ = (f)$ となるならば $d = 0$. よって i :: injective.

Ex6.2 Varieties in Projective Space.

Ex6.3 Cones.

Ex6.4 $A = k[x_1, \dots, x_n, z]/(z^2 - f)$:: integrally closed.

$\text{char } k \neq 2$ とする. x_1, \dots, x_n を \vec{x} と略す. $f \in k[\vec{x}]$:: square-free とし, $A = k[\vec{x}, z]/(z^2 - f)$ とおく. また, $\bar{z} = z + (z^2 - f)$ とする. ($\bar{z} = \sqrt{f}, A = k[\vec{x}, \sqrt{f}]$ と考えて良い.) f :: square-free より $z^2 - f$:: irreducible, A :: integral domain.

■ K の同定. この時, $K = \text{Quot}(A)$ は $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f)$ である. 実際, K の元は $g, h \in A$ の元によって g/h と表されるが, $z^2 = f$ なので, g/h は分母の「有理化」によって $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f)$ に属することが分かる. したがって $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f) \subseteq K$ であり, 逆の包含関係は明らか.

^{†1} $\text{Spec } A_i \subseteq X, U_{ij} = \text{Spec } A_i \otimes S_{(x_j)}, j \neq 0$ とする. $\text{pr}_2|_{U_{ij}}$ は $s \mapsto 1 \otimes s$ から誘導されるから,

$$Z \cap U_{ij} = (\text{pr}_2|_{U_{ij}})^{-1}(V(\mathfrak{p})) = V(1 \otimes \mathfrak{p}) = V((1 \otimes x_0)) \subset \text{Spec } A_i \otimes S_{(x_j)}$$

$1 \otimes x_0$ は非単元かつ不定元だから, Krulls Hauptidealsatz より, $(1 \otimes x_0) \subset A_i \otimes S_{(x_j)}$ が高さ 1 の素イデアルであることは明らか. よって $\text{codim}(Z \cap U_{ij}, U_{ij}) = 1, \text{codim}(Z, X') = 1$.

^{†2} pr_1 は埋め込み写像 $A \rightarrow A \otimes \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_{(t)}$ で誘導されるから, $Z = \text{pr}_1^{-1}V((x_0)) = V((x_0 \otimes 1))$. $x_0 \otimes 1$ は $A \otimes \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_{(t)} \cong A[x_0, \dots, x_n]_{(t)}$ の同型写像で x_0 へ写る.

■ $K/k(\bar{x})$. K は $k(\bar{x})$ 上の 2 次式 $\bar{z}^2 - f$ の最小分解体だから, $K/k(\bar{x})$ は 2 次のガロア拡大である. $\text{Gal}(K/k(\bar{x}))$ は, $\sigma: \bar{z} \mapsto -\bar{z}$ で生成される位数 2 の群.

■ $A :: \text{integral closure of } k[\bar{x}] \text{ in } K$. $\alpha \in K$ をとると, これは $g, h \in k(\bar{x})$ を用いて $g + h\bar{z}$ と書ける. α の最小多項式は,

$$(X - \alpha)(X - \sigma(\alpha)) = X^2 - 2gX + (g^2 - h^2f).$$

この多項式の各係数が $k[\bar{x}]$ に属しているとしよう. すると, まず明らかに $g \in k[\bar{x}]$ である. また $f :: \text{square-free}$ より, $h \notin k[\bar{x}]$ ならば h^2 の分母は f の因子で打ち消されず, $h^2f, g^2 - h^2f \notin k[\bar{x}]$ となる. よって $\alpha :: \text{integral} / k[\bar{x}]$ ならば $\alpha \in k[\bar{x}]$. 逆に $\alpha \in k[\bar{x}]$ ならば $g, h \in k[\bar{x}]$ だから α の最小多項式は $k[\bar{x}]$ 係数多項式になる. 以上をまとめて $A :: \text{integrally closed}$ が分かる.

■ 系. 以上から, $z^2 - f = 0$ で定まる hypersurface は affine variety として normal である. 特に, $f(x) \in k[x]$ が重根を持たない 3 次多項式であるとき, 楕円曲線 $y^2 = f(x)$ は normal curve である.

Ex6.5 Quadric Hypersurfaces.

$k :: \text{field, char } k \neq 2$ とし,

$$f = x_0^2 + \cdots + x_r^2 \in k[x_0, \dots, x_n], \quad A(X) = k[x_0, \dots, x_n]/(f), \quad X = \text{Spec } A(X)$$

とおく. ch I, Ex3.12 より, \mathbb{A}^{n+1} の任意の r 変数 quadric hypersurfaces は X と同型である.

(a) $X :: \text{normal if } r \geq 2$.

$f = x_0^2 - (-x_1^2 - \cdots - x_n^2)$ なので, Ex6.4 より $A(X) :: \text{integrally closed}$. よって任意の点における $A(X)$ の局所化も integrally closed である. すなわち $X :: \text{normal}$

Ex6.6 Consider $X = \mathcal{Z}_p(y^2z - x^3 + xz^2)$.

Ex6.7 For $X = \mathcal{Z}_p(y^2z - x^3 - x^2z)$, $\text{CaCl}^0(X) \cong \mathbf{G}_m$.

$k :: \text{algebraically closed field, char } k \neq 2$ とし, \mathbb{P}_k^2 内の曲線を考えていく. $f = y^2z - x^3 - x^2z, X = \text{Proj } k[x, y, z]/(f) \subset \mathbb{P}_k^2$ とする. $S(X) = k[x, y, z]/(f)$ と書く. X の codimension 1 の点は, $\dim X = 1$ より, closed point に他ならない. X は $Z = (0 : 0 : 1)$ に node をもつ.

■ $\text{CaCl}^0(X) \cong \text{Cl}(X - Z)$. X の singular point は Z しかない. これは ch I, Ex5.8 をつかって確認できる. $X = \text{Proj } S(X)$ が noetherian scheme であることから, Thm4.9 より $X - Z :: \text{nonsingular \& separated \& finite type}$. 明らかに integral であることと合わせれば, $X - Z$ が (*) を満たすことが分かる. X 全体でも integral だから, $\mathcal{K}_X :: \text{sheaf of total quotient rings of } \mathcal{O}_X$ は function field K である. $P \in X - Z$ に対する Cartier Divisor D_P の定め方, $\text{CaCl}^0(X)$ の任意の元に対して, それが D_P と線形同値になる closed point $X - Z$ が存在することの議論は Example6.11.4 と全く同様である.

■ $X - Z \cong \mathbb{A}^1 - \{0\}$. $(s : t : 0) \in V(z) \cong \mathbb{P}^1$ をとり, $(s : t : 0)$ と $Z = (0 : 0 : 1)$ を結ぶ直線 $sy - tx = 0$ と X の交点を計算する. すると $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$ の写像が得られる.

$$(s : t) \mapsto (x : y : z) = (s(t^2 - s^2) : t(t^2 - s^2) : s^3)$$

$(1 : 1), (1 : -1)$ はこの写像で Z へうつる. そこで以下のように置くと, isomorphism になる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 - \{(1:1), (1:-1)\} & \rightarrow & X - Z \\ (s:t) & \mapsto & (s(t^2 - s^2) : t(t^2 - s^2) : s^3) \\ (x:y) & \leftarrow & (x:y:z) \end{array}$$

$\mathbb{P}^1 - \{(1:1), (1:-1)\}$ は $(s:t) \mapsto \frac{s+t}{s-t} = u \mapsto (1-u:1+u)$ によって $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ と同型である。したがって、結局次の同型が出来る。

$$\begin{array}{ccc} \phi: \mathbb{A}^1 - \{0\} & \rightarrow & X - Z \\ t & \mapsto & (4(1-t)t : 4(1+t)t : (1-t)^3) \\ \frac{-x+y}{x+y} & \leftarrow & (x:y:z) \end{array}$$

■ $\text{Cl}(X)$ の特徴. $\phi(1) = P_1 = (0:1:0)$ とおく。計算すると $(x:y:z) \in X$ について $P_1, (x:y:z), (x:-y:z)$ が一直線上にある。つまり、 $P_1, (x:y:z), (x:-y:z)$ を零点に持つ一次式 l が存在する。よって $P_1 + (x:y:z) + (x:-y:z) \sim 0$ が得られる。(TODO: Example 6.10.2 の $P+Q+R \sim 3P_1$ は更に $3P_1 = (z) \sim 0$ ということで良いのか?)

■ $\text{CaCl}^0(X) \cong \text{Cl}(X - Z) \cong \mathbf{G}_m$. $\phi(1) = P_1$ に注意する。計算すると、 $\phi(t), \phi(u)$ と $\phi(tu)$ の y 成分の符号を反転させたものが一直線上にある。

$$\phi(t) + \phi(u) - (\phi(tu) + P_1) \sim 0.$$

変形して、

$$\begin{aligned} \phi(t) + \phi(u) - (\phi(tu) + P_1) &\sim 0 \\ \phi(t) + \phi(u) - P_1 &\sim \phi(tu) \\ (\phi(s) - P_1) + (\phi(t) - P_1) &\sim \phi(st) - P_1. \end{aligned}$$

よって、 P_1 を単位元とすれば、 $\text{CaCl}^0(X) \cong \text{Cl}(X - Z) \cong \mathbf{G}_m$ 。

Ex6.8 Morphism of Schemes Induces Homomorphism of Pic / Cl.

Ex6.9 (Culating the Picard Groups of) Singular Curves.

$X ::$ projective curve $/k$, $\tilde{X} ::$ normalization of X (Ex3.8), $\pi: \tilde{X} \rightarrow X ::$ projection, $\tilde{\mathcal{O}}_P ::$ integral closure of \mathcal{O}_P ($P \in X$) とする。p.136 にある curve $/k$ の定義から、 $X ::$ integral, separated, finite type $/k$. このことと Ex3.8 より、 $\pi ::$ finite morphism.

(a) Show there is an exact sequence.

次の完全列を示す。

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^* / \mathcal{O}_P^* \longrightarrow \text{Pic } X \xrightarrow{\pi^*} \text{Pic } \tilde{X} \longrightarrow 0.$$

Prop6.15 から、 $\text{Pic } X, \text{Pic } \tilde{X}$ はそれぞれ $\text{CaCl } X, \text{CaCl } \tilde{X}$ と同型である。次の写像を考える。

$$\begin{array}{ccc} \phi: (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^* & \rightarrow & \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^* \\ \phi_U: s + \mathcal{O}_X(U)^* & \mapsto & s/1 + \mathcal{O}_X(U)^* \end{array}$$

単元を単元に写す写像だから、これは単射^{†3}。したがって次の完全列が得られる。

$$0 \longrightarrow (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}^* / (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* \longrightarrow 0$$

($\text{coker } \phi$ は加群の同型定理と sheafification を通して得られる。) (これは $0 \rightarrow \ker \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow \text{coker} \rightarrow 0$ という形の完全列である。) この exact sequence について、各点 $P \in X$ での stalk をとると、再び exact sequence になる (Ex1.2)。それらを $\bigoplus_{P \in X}$ でまとめても exact。

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} [(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^*]_P \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} [\mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^*]_P \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} [\mathcal{K}^* / (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^*]_P \longrightarrow 0 \quad (*)$$

(*) の最初の要素を見よう。 $P \in X$ について、 $[(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^*]_P = (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^*_P / \mathcal{O}_P^*$ は明らか。
($\varinjlim_{P \in U} \mathcal{O}_X^*(U)$ の元はすべて可逆であることに注意。) $P \in U = \text{Spec } A \subseteq X$ とすると、 \tilde{X} の作り方から $\pi^{-1} \text{Spec } A = \text{Spec } \tilde{A}$ である (\tilde{A} は A の整閉包)。 (正確には、このように U がとれるということであり、 U を適当にとって良いということは分らない。) よって $\Gamma(U, (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})|_U) = \tilde{A}$ 。 $(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})|_U :: \text{sheaf on affine scheme}$ だから

$$[(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})|_U]_P = \varinjlim_{(\pi|_U)^{-1}(\{P\}) \subseteq V} \mathcal{O}_{\text{Spec } \tilde{A}}(V).$$

\mathfrak{p} を $P \in \text{Spec } A$ に対応する素イデアルとする。

$S = A - \mathfrak{p}$ とおくと、 $(\pi|_U)^{-1}(\{P\})$ は $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$ となる $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \tilde{A}$ の全体である。 (この \mathfrak{q} が存在すること、すなわち $(\pi|_U)^{-1}(\{P\})$ が空でないことは Ati-Mac Thm5.10 により分かる。) ($\pi|_U$ は埋め込み準同型 $A \hookrightarrow \tilde{A}$ に対応する。) $S = A - \mathfrak{p}$ とおけば、これは $S \cap \mathfrak{q} = \emptyset$ となる $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \tilde{A}$ の全体に一致する。したがって次のようになる。

$$(\pi|_U)^{-1}(\{P\}) = \bigcup_{f \in S} \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } \tilde{A} \mid f \notin \mathfrak{q}\} = \bigcup_{f \in S} V^c(f), \quad \varinjlim_{(\pi|_U)^{-1}(\{P\}) \subseteq V} \mathcal{O}_{\text{Spec } \tilde{A}}(V) = \varinjlim_{f \in S} \tilde{A}_f = S^{-1} \tilde{A}.$$

ただし $\varinjlim_{f \in S}$ は $\{D(f) \hookrightarrow D(f') \mid f, f' \in S\}$ という direct system についての direct limit である。一方、 $S^{-1} \tilde{A}$ は $S^{-1} A = A_{\mathfrak{p}}$ の整閉包である (Ati-Mac Prop5.12)。よって $[\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}]_P \cong (A_{\mathfrak{p}})^{\sim} = \tilde{\mathcal{O}}_P$ 。以上から $(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^*_P / \mathcal{O}_P^* \cong \tilde{\mathcal{O}}_P^* / \mathcal{O}_P^*$ 。

\mathcal{K} は $X :: \text{integral}$ より constant sheaf である。よって (*) の他の部分も同様に計算できる。

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^* / \mathcal{O}_P^* \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_P^* \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} \mathcal{K}^* / \tilde{\mathcal{O}}_P^* \longrightarrow 0 \quad (*')$$

次に $\bigoplus_{P \in X} \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_P^* \cong \text{CaCl } X$ を示したい。

Ex6.10 The Grothendieck Group $K(X)$.

■Fundamental Property of $K(X)$. $\gamma \mathcal{F} = \gamma \mathcal{G} + \gamma \mathcal{H}$ となっている時、次の完全列が存在する。

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

したがって $\mathcal{H} \cong \mathcal{F} / \mathcal{G}$ 。単位元は $0 :: \text{zero sheaf}$ の像 $\gamma 0$ である。また $\gamma \mathcal{F} = \gamma \mathcal{F}' (+ \gamma 0)$ ならば $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$ 。

(a) If $X = \mathbb{A}_k^1$, $K(X) \cong \mathbb{Z}$.

$A = k[x]$ とし、 $\mathcal{F} :: \text{coherent sheaf on } X = \text{Spec } A$ をとる。 $\mathcal{I} = \mathcal{O}_X = \tilde{A}$ と書くことにする。

まず、 $\gamma \mathcal{F} = n(\gamma \mathcal{I})$ となる $n \in \mathbb{Z}$ が存在することを示す。

^{†3} $\phi(1) = \phi(x)\phi(x^{-1}) = 1$ なので $\phi(x), \phi(x^{-1}) \neq 0$ 。

■Reduce Into $\mathcal{F} = \tilde{M}$ Case. $X ::$ noetherian affine scheme と Cor5.5 より, finitely generated A -module の exact sequence と coherent sheaf on X の exact sequence が一対一に対応する. なので \mathcal{F} が finitely generated module M によって \tilde{M} と書ける場合のみ考えれば良い.

■Case: $\mathcal{F} = \mathcal{I}^{\oplus n}$. 次の完全列が存在する.

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow A^{\oplus n-1} \longrightarrow 0.$$

$A \rightarrow A^{\oplus n}$ は $x \mapsto (x, 0, \dots, 0)$ である. この完全列の存在から $\gamma \mathcal{I}^{\oplus n} = \gamma \mathcal{I} + \gamma \mathcal{I}^{\oplus n-1}$ が得られる. よって帰納的に $\gamma \mathcal{I}^{\oplus n} = n(\gamma \mathcal{I})$.

■Case: $\mathcal{F} = \tilde{M}$. $M ::$ finitely generated module なので, $n > 0, N \subseteq A^{\oplus n}$ が存在し, 次の完全列が成立する (Ati-Mac Prop2.3).

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

よって $\gamma \tilde{M} = \gamma \mathcal{I}^{\oplus n} - \gamma \tilde{N}$. また, A が PID であることから, A 上の自由加群の部分加群はまた自由である. したがって前段落と合わせて, $\gamma \tilde{M} = k(\gamma \mathcal{I})$ ($k \in \mathbb{Z}$) が示された.

■対応が一対一であること, 及び準同型であること. 対応が単射的であることは明らか. 全射的であること, すなわち任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $n(\gamma \mathcal{I}) \in K(X)$ であることは, $K(X)$ が free \mathbb{Z} -module であることから. また, 次の完全列から $(m+n)(\gamma \mathcal{I}) = m(\gamma \mathcal{I}) + n(\gamma \mathcal{I})$ も成り立つ.

$$0 \longrightarrow A^{\oplus m} \longrightarrow A^{\oplus(m+n)} \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow 0.$$

(これによると任意の M について $\tilde{M} \cong \tilde{A}^{\oplus n}$, したがって M が free となる.)

(b) $\text{rank} : K(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ is surjective homomorphism.

$X ::$ integral scheme, $\zeta ::$ generic point of X , $k = \mathcal{O}_{X,\zeta} ::$ function field of X とする. $x = \sum_i n_i(\gamma \mathcal{F}_i) \in K(X)$ に対して, $\text{rank } x = \sum_i n_i \dim_k(\mathcal{F}_i)_{\zeta}$ と定める. この rank を考える.

■rank :: well-defined homomorphism. $\gamma \mathcal{F} = \gamma \mathcal{F}'$ の時, $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$. なので $\text{rank } \gamma \mathcal{F} = \text{rank } \gamma \mathcal{F}'$. また, x の表現はいろいろあるので, これについて整合的であることを確かめなくてはならない. $\gamma \mathcal{F}, \gamma \mathcal{G}, \gamma \mathcal{H} \in K(X)$ をとり, $\gamma \mathcal{F} + \gamma \mathcal{G} = \gamma \mathcal{H}$ だとする. この時, 次の完全列が存在する.

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

stalk を取る操作は exact functor (Ex1.2) だから, 次が得られる.

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{\zeta} \longrightarrow \mathcal{H}_{\zeta} \longrightarrow \mathcal{G}_{\zeta} \longrightarrow 0.$$

これは $\mathcal{O}_{X,\zeta} = k$ -module の exact sequence. \dim_k は additive だから $\text{rank } \gamma \mathcal{H} = \text{rank } \gamma \mathcal{F} + \text{rank } \gamma \mathcal{G}$ となる. $x, y \in K(X)$ について $\text{rank}(x+y) = \text{rank } x + \text{rank } y$ となることは定義と以上のことから分かる.

■rank :: surjective. $\text{rank } n(\gamma \mathcal{O}_X) = n \text{rank}(\gamma \mathcal{O}_X) = n \dim_k k = n$ より, 全射.

(c) For $Y ::$ closed subscheme of X , $K(Y) \rightarrow K(X) \rightarrow K(X - Y) \rightarrow 0 ::$ exact.

$X ::$ noetherian scheme, $Y ::$ closed subscheme of X とする. $i : Y \rightarrow X$ を closed immersion, $j : X - Y \rightarrow X$ を open immersion とする. 次の写像の列を考える.

$$K(Y) \xrightarrow{\epsilon} K(X) \xrightarrow{\rho} K(X - Y) \longrightarrow 0.$$

ここで ϵ は extension of coherent sheaf on Y , $\gamma\mathcal{F} \mapsto \gamma(i_*\mathcal{F})$ (Ex1.19), ρ は restriction, $\gamma\mathcal{G} \mapsto \gamma(j^{-1}\mathcal{G})$ である.

■Easy Parts. Ex5.15 から ρ は全射. また $\text{im } \rho \circ \epsilon$ (Y 上の sheaf を X 上に 0 で拡張して $X - Y$ に制限したもの) が 0 であること, すなわち $\text{im } \epsilon \subseteq \ker \rho$ は明らか. したがって, ここで示すべきは $\text{im } \epsilon \supseteq \ker \rho$ である.

■Map a Course. $\mathcal{F} \in \ker \rho$ をとる. 言い換えれば, \mathcal{F} を X 上の coherent sheaf であって $\text{Supp } \mathcal{F} \subseteq Y$ であるものとする. Ex5.6c より, $\text{Supp } \mathcal{F} ::$ closed in X . この \mathcal{F} から, 次のような finite filtration の存在を示す:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F}_n = 0$$

ここで $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1}$ は $\text{im } \epsilon$ の元. すると次の完全列が存在する.

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1} \longrightarrow 0.$$

したがって $\gamma\mathcal{F}_k = \gamma\mathcal{F}_{k+1} + \gamma(\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1})$. 帰納的に $\gamma\mathcal{F} = \gamma\mathcal{F}_0 = \sum_{k=1}^n \gamma(\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1})$ が得られる. $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1}$ は $\text{im } \epsilon$ の元としていたから, $\gamma\mathcal{F} \in \text{im } \epsilon$.

主張 Ex6.10.1

次の finite filtration が存在する.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F}_n = 0$$

ここで $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1}$ は $\text{im } \epsilon$ の元.

(証明).

■surjective map $\phi_k : \mathcal{F}_k \rightarrow i_*i^*\mathcal{F}_k$. surjective map $\phi_0 : \mathcal{F} \rightarrow i_*i^*\mathcal{F}$ が存在することを示す. $U = \text{Spec } A \subseteq X$ をとる. $Y \cap U$ は U の closed subscheme なので, Cor5.10 より $\mathfrak{a} \subseteq A ::$ ideal によって $V := V \cong \text{Spec } A/\mathfrak{a}$ となる. したがって $i|_V : \text{Spec } A/\mathfrak{a} \rightarrow \text{Spec } A$. $\mathcal{F}|_V = \tilde{M} ::$ finitely generated A/\mathfrak{a} -module とする. Prop5.2 より, 次のように計算できる.

$$(i_*i^*\mathcal{F})|_V \cong ({}_A(M \otimes_A A/\mathfrak{a}))^\sim \cong (M/\mathfrak{a}M)^\sim.$$

よって $M \rightarrow M/\mathfrak{a}M$ から誘導される surjective map $\mathcal{F}|_V \rightarrow (i_*i^*\mathcal{F})|_V$ が存在する. これが gluing できることは明らか. こうして所望の ϕ_0 が得られる. (adjoint の counit から作りたかったが, これは素性がよくわからない.)

■ $\mathcal{F}_{k+1} := \ker \phi_k$. したがって次の完全列がある.

$$0 \longrightarrow \ker \phi_0 \longrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow i_*i^*\mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Ex1.6 より $\epsilon(\gamma(i^*\mathcal{F})) = \gamma(i_*i^*\mathcal{F}) \cong \gamma(\mathcal{F}/\ker \phi_0)$ となり, $\mathcal{F}_1 = \ker \phi_0$ とすれば良いことが分かる. 以下, 帰納的に $\phi_k : \mathcal{F}_k \rightarrow i_*i^*\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+1} = \ker \phi_k$ とすれば良い. 上での構成法から, $(\mathcal{F}_k)|_V \cong (\mathfrak{a}^k M)^\sim$ がわかる.

■ This filtration is finite. 最後に、この列が有限であることを見る。 $(\mathcal{F}_k)|_V \cong (\mathfrak{a}^k M)^\sim$ なので、十分大きい $k > 0$ について $\mathfrak{a}^k M = 0$ であること、すなわち $\mathfrak{a}^k \subseteq \text{Ann}(M)$ となることを示せば良い。 $V(\text{Ann}(M)) = \text{Supp } \mathcal{F}|_V \subseteq V \cong V(\mathfrak{a})$ (Ex5.6b) より、 $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\text{Ann}(M)}$. $A ::$ noetherian ring より、 \mathfrak{a} の生成元は有限個である。したがって十分大きな $k > 0$ をとると、 \mathfrak{a} の任意の生成元 (集合の一元) g に対して $g^k \in \text{Ann}(M)$ であるように出来る。この k について $\mathfrak{a}^k \subseteq \text{Ann}(M)$. Y は $\mathfrak{Y} ::$ finite affine open cover を持つから、 $n = \max_{V \in \mathfrak{Y}} \min_{(\mathcal{F}_k)|_V = 0} k$ とすれば、任意の $V \in \mathfrak{Y}$ について $(\mathcal{F}_n)|_V = 0$, つまり (Identity Axiom から) $\mathcal{F}_n = 0$ となる. ■

Ex6.11 The Grothendieck Group of a Nonsingular Curve.

$k ::$ algebraically closed field, $X ::$ nonsingular curve / k とする. $K(X) \cong \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z}$ を示そう.

Ex6.12 The Degree of Coherent Sheaf.

Ex6.11 の続きと言える. $X ::$ complete nonsingular curve とする. Ex6.11 より $K(X) \cong \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z}$. また nonsingular \implies regular \implies locally factorial なので Cor6.16 より $\text{Pic } X \cong \text{Cl } X$. そこで、 $\mathcal{F} ::$ coherent sheaf on X に対する $\deg \mathcal{F}$ を、

$$\gamma(\mathcal{F}) \in K(X) \xrightarrow{\cong} \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic } X \xrightarrow{\cong} \text{Cl } X \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

で定める. 右端の \deg は degree of Weil divisor である. $D ::$ Weil divisor に対し、 $\gamma(\mathcal{L}(D))$ は上の写像で D へ写る. なので、The Grothendieck Group の定義と合わせて、以下が成立する.

- (1) If $D ::$ divisor, $\deg \mathcal{L}(D) = \deg D$.
- (2) If $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0 ::$ exact sequence, then $\deg \mathcal{F} = \deg \mathcal{F}' + \deg \mathcal{F}''$.

次を示す: If \mathcal{T} is a torsion sheaf, then $\deg \mathcal{T} = \sum_{P \in X} \text{length } \mathcal{T}_P$.

$U = \text{Spec } A \subseteq X$ を任意にとり、 $T ::$ torsion A -module について $\mathcal{T}|_U \cong \tilde{T}$ であるとする. $\mathfrak{p} \in U$ に対し、 $T_{\mathfrak{p}}$ は $A - \mathfrak{p}$ が $\mathfrak{a} = \text{Ann}(T)$ の元を含む時 0 になる. したがって $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ の時のみ $T_{\mathfrak{p}} \neq 0$. そこで $V = V(\mathfrak{a})$ とする. $\mathfrak{a} \neq (0)$ かつ X は 1 次元だから、 V は有限個の点のみからなる.

$\tilde{T} \in K(U)$ に対応する $D_T \in \text{Cl } U$ を考える. Ex6.11a の構成によると、 D_T の the structure sheaf of the associated subscheme が \tilde{T} である. したがって D_T は以下ようになる.

$$D_T = \sum_{P \in V} v_P(f_P) \{P\}.$$

ただし $f_P \in A$ は $V(f_P) = \{P\} \subseteq U$ を満たす. したがって $v_P(f_P) = \text{length } T_P$ を示せば十分.