Locally Ringed Space Morphism の合成について

七条 彰紀

2017 年 10 月 11 日

写像の合成は一々 $g \circ f$ の様に書かず，gf と書く．

定義 0.1
X, Y を locally ringed space とする．X, Y の間の map $f : X \to Y$ が locally ringed space morphism であるとは，任意の点 $x \in X$ について，$f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ の $f(x)$ における stalk $(f^{\#})_{f(x)} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}$ と，direct system の包含関係から誘導される写像 $\iota_{f,x} : (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ の合成

$$f^{\#}_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

が，local ring homomorphism であるということである．

X, Y, X :: locally ringed space, $f : X \to Y, g : Y \to Z$ :: locally ringed space morphism とする．$gf : X \to Z$ は locally ringed space morphism になることはどのように示すべきだろうか．

(証明)．$x \in X$ を任意にとり，固定する．

$$\begin{tikzcd}
 & & (g_*f_*\mathcal{O}_X)_{gf(x)} \arrow[d] \\
 & (g_*\mathcal{O}_Y)_{gf(x)} \arrow[ur, "(g_*f^{\#})_{gf(x)}"] \arrow[d] & (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \arrow[d] \\
\mathcal{O}_{Z,gf(x)} \arrow[ur, "(g^{\#})_{gf(x)}"] \arrow[r, "g^{\#}_{f(x)}"'] & \mathcal{O}_{Y,f(x)} \arrow[ur, "(f^{\#})_{f(x)}"] \arrow[r, "f^{\#}_x"'] & \mathcal{O}_{X,x}
\end{tikzcd}$$

斜めに伸びている $(g^{\#})_{gf(x)}$ などの射は stalk を取ることで得られる射であり，$g^{\#}_{f(x)}, f^{\#}_x$ はそれに direct system の包含関係から誘導される射 $(g_*\mathcal{O}_Y)_{gf(x)} \to \mathcal{O}_{Y,f(x)}, (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ を合成したものである．（p.72 終わりから p.73 始めに記述がある．）したがって，この図式において，下の二つの三角形が可換であることは $g^{\#}_{f(x)}, f^{\#}_x$ の定義である．同様に $(gf)^{\#}_x$ は $\mathcal{O}_{Z,gf(x)} \to (g_*f_*\mathcal{O}_X)_{gf(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ である．（三つの相似な三角形が見えると思う．）

$g^{\#}_{f(x)}, f^{\#}_x$ は l.r.homo (local ring homomorphism) であり，その合成もまた l.r.homo である．示したいことは $(gf)^{\#}_x$ が l.r.homo であることだから，図式中心にあるの平行四辺形が可換であることを示せば良い．

問題の平行四辺形の頂点は，それぞれ次の 4 つの direct system の direct limit である．

$$
\begin{tikzcd}
 & \{(f_*\mathcal{O}_X)(V) \mid fg(x) \in W \subseteq Z, V = g^{-1}W\} \arrow[d, hook] \\
\{\mathcal{O}_Y(V) \mid fg(x) \in W \subseteq Z, V = g^{-1}W\} \arrow[ur, "f_V^\#"] \arrow[d, hook] & \{(f_*\mathcal{O}_X)(V) \mid f(x) \in V \subseteq Y\} \\
\{\mathcal{O}_Y(V) \mid f(x) \in V \subseteq Y\} \arrow[ur, "f_V^\#"] &
\end{tikzcd}
$$

したがって問題の平行四辺形は direct system のレベルで可換． ∎