1 Definition of regular function

定義 1.1 (regular function on quasi-affine variety Y).
$f : Y \to k$ が regular functiona at a point $P \in Y$ とは，以下の論理式が成り立つ事．

$$^{\exists}U \in \mathcal{O}_Y,\ \ (P \in U) \wedge (^{\exists}g, h \in A,\ \ (h|_U \neq 0) \wedge (f|_U = g/h))$$

定義 1.2 (regular function on quasi-projective variety Y).
$f : Y \to k$ が regular functiona at a point $P \in Y$ とは，以下の論理式が成り立つ事．

$$^{\exists}U \in \mathcal{O}_Y,\ (P \in U) \wedge (^{\exists}g, h \in S^h,\ (\deg g = \deg h) \wedge (h|_U \neq 0) \wedge (f|_U = g/h))$$

多様体の間の写像として regular map が後に定義される．

2 About Remark 3.1.1

補題 2.1. $Y(\subset \mathbb{P}^n)$ :: quasi-projective variety, $f : Y \to \mathbb{P}^1_k$ :: regular function on quasi-projective variety $Y \implies f$ :: continus

(証明). そのために Lemma 3.1 と同じ方針で証明をする．閉集合が閉集合へ写ることを示す．$\mathbb{P}^1_k$ の閉集合は有限集合だから，一点集合が閉集合に写ることだけ見れば良い．ある開集合 U で f が

$$f|_U = g/h \ \ (g, h \in S^h, \deg g = \deg h, g|_U \neq 0)$$

とあらわせたとしよう．$a \in f(U) \subseteq \mathbb{P}^1_k$ を任意にとると，

$$f^{-1}(a) \cap U = \{\, P \in U \mid g(P)/h(P) = a \,\} = \mathcal{Z}_p(g - ah)$$

となる．$g - ah$ は g, h が斉次かつ $\deg g = \deg h$ かつ a が定数だから斉次である．[1] よって $f^{-1}(a) \cap U$ は closed set. ∎

補題 2.2. X :: variety, U:: open in X, $f, g : X \to k$ :: regular on U とする．このとき $f = g$ on U ならば $f = g$ on X.

(証明). 今，U において f, g が $f = f_0/f_1, g = g_0/g_1$ とあらわせたとしよう．(U より大きい集合で $f = f_0/f_1$ となっていれば単に制限する．) すると $h = f - g = \frac{f_0 g_1 - g_0 f_1}{f_1 g_1}$ もまた U 上の regular function．したがって h は連続である．$k = \mathbb{A}^1_k$ は T1 空間だから $\{0\}$ は閉集合で，h は連続．よって $A := h^{-1}(\{0\}) = \{P \in X \mid f(P) = g(P)\}$ は閉集合．明らかに $U \subseteq A \subseteq X$ となっている．U は X :: irreducible set の開部分集合なので，Exsercise 1.6 より，U は dense．したがって $\mathrm{cl}_X(U) = X$．A は閉集合であるから，$X \subseteq A \subseteq X$ すなわち $A = X$ が得られる． ∎

[1] この一文だけが affine の場合と異なる．他の部分は affine と全く同じ．

3　p.16 Definition

3.1　ring of regular functions on Y : $\mathcal{O}(Y)$

$\mathcal{O}(Y)$ は Y 全体で regular な関数全体である．つまり，任意の点 $P \in Y$ について，ある P の開近傍 U が存在し，$f = g_U/h_U$ on $U, h_U \neq 0$ であるような $g_U, h_U \in S$ を見つけられるもの．g_U, h_U は点 P と開近傍 U に依存することに注意．Y 全体で正則な有理関数を全て含むが，それよりも大きな集合になりうる．

$\mathcal{O}(Y)$ が ring であることをみる．まず $0, 1$ は明らかにこの集合に属す．$f, g \in \mathcal{O}(Y)$ をとると，適当な点 P とその開近傍 U について $f = \frac{f_0}{f_1}, g = \frac{g_0}{g_1}$ という表示がある．以下の計算から，$fg, f+g$ も U で regular.

$$fg = \frac{f_0 g_0}{f_1 g_1}, f + g = \frac{f_0 g_1 + g_0 f_1}{f_1 g_1} \text{ on } U$$

点 $P \in Y$ は任意に取ったので，$fg, f+g$ は Y で regular.

3.2　local ring of P : $\mathcal{O}_P$

Definition　$\mathcal{O}_P$ は P で regular な関数全体で作られる ring．中身は P の開近傍 $U \subset Y$ と，quasi-variety U の各点で regular な関数 f の組で，

$$\langle U, f \rangle \equiv \langle V, g \rangle \iff f = g \text{ on } U \cap V \iff (f - g)|_{U \cap V} = 0$$

という関係で割っている．f から U が定まるのではなく，その逆である．$Q \in U$ に対する f の有理関数表示が変わるかも知れない．

check to be equivalence relation.　$\equiv$ が同値関係であることは次のように分かる．まず反射律と対称律は明らか．推移律は Remark 3.1.1 の

$$\langle U, f \rangle \equiv \langle V, g \rangle \implies f = g \text{ on } Y$$

より直ちに分かる．$U \cap V \neq \emptyset$ は $P \in U, V$ より直ちに分かる．この同値関係で割らなければ，$\langle U, f \rangle$ と $\langle V, f \rangle$ は異なるものになる．

check to be ring　この集合が ring であることを示す．

$$a = \langle U, f \rangle, b = \langle V, g \rangle$$

とすると，$ab, a+b$ の計算は次のようになる．まず $Q \in U \cap V$ を適当にとると，開近傍 $(Q \in) W, (Q \in) Z$ において f, g はそれぞれ $f = f_0/f_1, g = g_0/g_1$ と書ける．W, Z は irreducible set Y の開部分集合だから $W \cap Z \neq \emptyset$.

$$fg = \frac{f_0 g_0}{f_1 g_1}, f + g = \frac{f_0 g_1 + g_0 f_1}{f_1 g_1} \text{ on } W \cap Z$$

点 $Q \in U \cap V$ 毎に開近傍 $W \cap Z$ がとれ，そこで $fg, f+g$ が regular なので ring になっている．

check for well-definedness　演算が well-defined であることを示す．二つの同値類 A, B をとる．それぞれの代表元を任意に 2 つずつとり，

$$a = \langle U, f\rangle, a' = \langle U', f'\rangle \in A;\ b = \langle V, g\rangle, b' = \langle V', g'\rangle \in B$$

としよう．例えば $ab, a'b'$ を計算すると，

$$ab = \langle U \cap V, fg\rangle, a'b' = \langle (U' \cap V'), f'g'\rangle$$

だが，$f = f'$ on $U \cap U'$, $g = g'$ on $'$ より $fg = f'g'$ on $U \cap U' \cap V \cap V = (U \cap V) \cap (U' \cap V')$．よって $ab = a'b'$．$a + b \equiv a' + b'$ なども同様である．

check to be a local ring　$\mathcal{O}_P$ は $\mathfrak{m} = \{\langle U, f\rangle \mid f(P) = 0\}$ を唯一の極大イデアルとする局所環．実際，$\mathcal{O}_P$ の非単元はすべて $\mathfrak{m}$ に属す．これは $f(P) \neq 0$ ならば適当な P の近傍の中で $1/f$ が定義出来ること（対偶）から示される..

check to be a integral domain　また，$\mathcal{O}_P$ は整域である．実際，$fg = 0$ on $U \cap V$ であるような $\langle U, f\rangle, \langle V, g\rangle \in \mathcal{O}_P$ をとる．$P \in U, V$ より $U \cap V \neq \emptyset$. すると，$f = f_0/f_1, g = g_0/g_1$ on $U \cap V$ となるような $f_0, f_1, g_0, g_1 \in S$ が存在する．f_1, g_1 は $U \cap V$ で 0 とならないから，結局 $f_0 g_0$ on $U \cap V$ となっている．

$$^\forall P \in U \cap V,\ \ (f_0 g_0)(P) = 0 \in k \iff {}^\forall P \in U \cap V,\ \ f_0(P) = 0 \vee g_0(P) = 0$$

よって $f = 0$ on $U \cap V$ または $g = 0$ on $U \cap V$ が成立．Remark3.1.1 より，これは，$f = 0$ on U または $g = 0$ on V，と書き換えられる．

3.3　function field : $K(Y)$

$K(Y)$ は Y 内のいずれかの点で regular な関数全体である．中身は $\mathcal{O}_P$ のものと同様である．これは任意の $\langle U, f\rangle(f|_U \neq 0)$ に対して逆元を持つ．すなわち体である．実際，$U' = U \setminus (U \cap \mathcal{Z}(f))$ [2] と置けば,（$f|_U \neq 0$ より）これは空でないので，$\langle U', 1/f\rangle$ と逆元を作れる．

3.4　$\mathcal{O}(Y) \subset \mathcal{O}_P \subset K(Y)$

この包含関係は殆ど自明である．正確には，injection map が作れることは自明である．$\mathcal{O}(Y)$ の元は Y 全体で regular だから，$\mathcal{O}_P$ に属す．$\mathcal{O}_P$ の元は $P \in Y$ で regular だから，必ず $K(Y)$ に属す．

[2] f が 0 にならない U の開部分集合である

4 Theorem 3.2

4.1 About $\alpha : A(Y) \to \mathcal{O}(Y)$

多項式 $f \in A$ は Y 全体で定義されるから，これは $\langle Y, f|_Y \rangle \in \mathcal{O}(Y)$ のように $\mathcal{O}(Y)$ へ埋め込める．$f \mapsto f|_Y$ という写像によって 0 となるのは $\mathcal{I}(Y)$ の元のみであるから，$A \to \mathcal{O}(Y)$ から $\alpha : A(Y) \to \mathcal{O}(Y)$ が得られる．

4.2 About proof of (b)

点 $P \in Y$ に対応する $A(Y)$ の極大イデアルは次のように作られる．

$$P \mapsto \mathcal{I}(P) \mapsto \mathcal{I}(P)/\mathcal{I}(Y)$$

さらに $\mathcal{I}(P)/\mathcal{I}(Y)$ の元 $\bar{f} = f + \mathcal{I}(Y)$ を α によって Y 上の regular function とみなすことでこの極大イデアルを $\mathfrak{m}_P := \{f \in A(Y) | f(P) = 0\}$ と書くことが出来る．

4.3 About proof of (c)

$S = A \setminus \mathfrak{m}_P$ としよう．すると $s \in S$ について $\alpha(s) = \langle Y, s|_Y \rangle$ は $\mathcal{O}_P$ の単元である．実際 $s(P) \neq 0$ だから，$s|_U \neq 0$ であるような P の近傍 U が存在して，$\langle U, 1/(s|_Y) \rangle \in \mathcal{O}_P$．このことから Ati-Mac の Prop3.1（商環の普遍性）が使える．すなわち，$\beta : A(Y)_{\mathfrak{m}_P} = S^{-1}A(Y) \to \mathcal{O}_P$ であって $\alpha(f) = \beta(f/1)$ となるものが存在する．$f \mapsto f/1$ と α は単射だから β は単射．さらに Prop3.1 の証明から $\beta(a/s) = \alpha(a)/\alpha(s)$.

この対応 β が全射であることは $\mathcal{O}_P$ の定義から直ちに分かる．つまり，$\mathcal{O}_P$ の元はこのようにして得られるものしか無い．よって $A(Y)_{\mathfrak{m}_P} \cong \mathcal{O}_P$.

以上の段落から，$\dim \mathcal{O}_P = \dim A(Y)_{\mathfrak{m}_P} = \operatorname{height} \mathfrak{m}_P$ が得られる．さらに $A(Y)$ の元に点 P を代入する準同型に準同型定理を用いれば，$A(Y)/\mathfrak{m}_P \cong k$ が得られる．(1.7) と (1.8A) より

$$\dim A(Y)/\mathfrak{m}_P + \operatorname{height} \mathfrak{m}_P = \dim A(Y) \iff 0 + \dim \mathcal{O}_P = \dim Y.$$

4.4 About proof of (d)

$\mathrm{Quot}(A(Y)) \cong \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_P)$　本文中の quotinet field は整域の全商環[3] の事．今，環 R の全商環を $\mathrm{Quot}(R)$ と書くことにしよう．すると (c) の結果より，以下が得られる．

$$\mathcal{O}_P \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P} \implies \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_P) \cong \mathrm{Quot}(A(Y)_{\mathfrak{m}_P}) \cong \mathrm{Quot}(A(Y))$$

[3] すなわち整域 R に対する $S = R \setminus (0)$ による局所化

$\mathrm{Quot}(A(Y)_{\mathfrak{m}_P}) \cong \mathrm{Quot}(A(Y))$ は以下のように示される．まず，

$$S_0 = A(Y) \setminus \mathfrak{m}_P, S_1 = A(Y) \setminus \{0 + \mathcal{I}(Y)\}$$

と置くと $\mathrm{Quot}(A(Y)) = S_1^{-1}A(Y), \mathrm{Quot}(A(Y)_{\mathfrak{m}_P}) = \tau(S_1^{-1})(S_0^{-1}A(Y))$ である．ただし τ は $x \mapsto x/1$ という単射写像である．Ati-Mac Ch.3 Ex3 より，これは $(S_1S_0)^{-1}A(Y)$ と同型．[4] さらに

$$S_1S_0 = \{\, xy \mid x, y \in A(Y) \wedge \neg(x \in \mathfrak{m}_P \vee y \in (\bar{0}))\,\}$$

であるので，$\mathfrak{m}_P, (\bar{0})$ がイデアルであることから

$$S_1S_0 = A(Y) \setminus (\mathfrak{m}_P \times (\bar{0})) = A(Y) \setminus (\bar{0}) = S_1$$

よって $\mathrm{Quot}(A(Y)_{\mathfrak{m}_P}) \cong S_1^{-1}A(Y) = \mathrm{Quot}(A(Y))$.

$\mathrm{Quot}(A(Y)) \cong K(Y)$　$\langle U, f\rangle \in \mathrm{Quot}(\mathcal{O}_P) \cong \mathrm{Quot}(A(Y))$ を任意にとる．すると $\langle U, f\rangle$ は $f|_U \neq 0$ を満たすから，$K(Y)$ の元として逆元 $\langle \tilde{U}, 1/f\rangle$ を持つ．したがって

$$\langle U, f\rangle^{-1} \mapsto \langle \tilde{U}, 1/f\rangle$$

という対応が作れた．逆写像も作れる．それは単純に以下のように定まる．

$$(0 \neq)\langle \tilde{U}, 1/f\rangle \mapsto \langle \tilde{U}, f\rangle$$

$\tilde{U} \subset U$ より $\langle U, f\rangle \equiv \langle \tilde{U}, f\rangle$ なのでこれは全単射．この写像が同型写像であることを見よう．つまり演算を保つことを見る．

$$\frac{\langle U, f\rangle}{\langle V, g\rangle}\frac{\langle U', f'\rangle}{\langle V', g'\rangle} \mapsto \quad \langle U \cap \tilde{V}, f/g\rangle\langle U' \cap \tilde{V}', f'/g'\rangle \quad = \langle U \cap U' \cap \tilde{V} \cap \tilde{V}', ff'/gg'\rangle$$

$$\frac{\langle U, f\rangle\langle U', f'\rangle}{\langle V, g\rangle\langle V', g'\rangle} = \qquad \frac{\langle U \cap U', ff'\rangle}{\langle V \cap V', gg'\rangle} \qquad \mapsto \langle U \cap U' \cap \widetilde{V \cap V'}, ff'/gg'\rangle$$

あとは $\tilde{V} \cap \tilde{V}' = \widetilde{V \cap V'}$ を見れば良い．

$$\begin{aligned}
\tilde{V} \cap \tilde{V}' &= \{\, P \in V \mid g(P) \neq 0 \,\} \cap \{\, P \in V' \mid g'(P) \neq 0 \,\} \\
&= \{\, P \in V \cap V' \mid g(P) \neq 0 \wedge g'(P) \neq 0 \,\} \\
&= \{\, P \in V \cap V' \mid \neg(g(P) = 0 \vee g'(P) = 0) \,\} \\
&= \{\, P \in V \cap V' \mid g(P)g'(P) \neq 0 \,\} \\
&= \widetilde{V \cap V'}
\end{aligned}$$

$+$ についても同様である.（有理関数の積と和では分子のみ異なるが，以上の議論では分子の零点は関係なかった.）

[4] Ati-Mac Ch.3 Ex3 の証明は，$(a/st) \mapsto ((a/s)/(t/1))$ が同型でもあることを示せば良い．st を (s, t) に因子分解するところに任意性があるので，どのように分解しても良いことまで示す必要が有る．

4.5 About proof of (a)

$\mathcal{O}_P$ は点 P で定義される regular function 全体だから，$\mathcal{O}(Y) \subseteq \bigcap_{P \in Y} \mathcal{O}_P$ は自明．(b), (c) を用いると $\mathcal{O}_P \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P} = A(Y)_{\mathfrak{m}}$ となる．単射 $\alpha : A(Y) \to \mathcal{O}(Y)$ の存在から $A(Y) \subseteq \mathcal{O}(Y)$ とみなせる．よって

$$A(Y) \subseteq \mathcal{O}(Y) \subseteq \bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(A(Y))} A(Y)_{\mathfrak{m}}.$$

この最左辺と最右辺が一致することを示そう．すると直ちに 3 つが全て等しいことが分かる．

整域 B について，その極大イデアルを 2 つとり，$\mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ とする．すると $B_{\mathfrak{m}} \cap B_{\mathfrak{m}'}$ の元は，分母が $\mathfrak{m}$ にも $\mathfrak{m}'$ にも属さない元であるような分数である．よって $B_{\mathfrak{m}} \cap B_{\mathfrak{m}'} = B_{\mathfrak{m} \cup \mathfrak{m}'}$．このように考えることで，以下が得られる．

$$\bigcap_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(B)} B_{\mathfrak{m}} = B_M \quad \left(M := \bigcup_{\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(B)} \mathfrak{m} \right)$$

$B \setminus M$ に非単元があればそれを含む極大イデアルが存在し，したがってその非単元は M に属す．よって $B \setminus M$ は単元のみの集合（単元群）である．B_M の元は分母が単元であるような分数だから，$a/s \mapsto a \cdot s^{-1}$ という対応で直ちに B と同型になる．以上より $B \cong B_M$．

5 Proposition 3.3

命題 5.1. $U_i = \mathbb{P}^n \setminus \mathcal{Z}_p(x_i)$ と置く．この時 (2.2) の写像 $\phi_i : U_i \to \mathbb{A}^n$ は isomorphism of variety となっている．

(証明). isomorphism of variety の定義からまず ϕ_i が連続であることが必要だが，すでに同相写像であることがわかっている．あとは regular function f/g について $(f/g) \circ \phi_i$ も regular であることを示せば良い．

regular function の定義より，$f, g \in k[x_0, \ldots, x_n]$ は斉次である．これらを (2.2) の α_i, β_i で写し合うことで証明を行う．α, β の添字 i は以降省略する．

$$\begin{aligned} & \left(\frac{f}{g} \circ \phi_i \right) (x_0, \ldots, x_n) \\ =& \frac{f}{g} \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ =& \frac{\alpha(f)}{\alpha(g)} (x_0, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

$\alpha(g)(P) = 0$ ならば $\beta\alpha(g)(P) = g(P) = 0$ が得られる．よって $g(P) \neq 0 \implies \alpha(g)(P) \neq 0$ なので，$\frac{\alpha(f)}{\alpha(g)}$ は regular. ∎

6 About $S_{(\mathfrak{p})}, S_{(f)}$

$S_{(\mathfrak{p})}$ が local ring で，その極大イデアルが $\mathfrak{m} := (\mathfrak{p} \cdot T^{-1}S) \cap S_{(\mathfrak{p})}$ であることを見よう．$S_{(\mathfrak{p})}$ が ring であることは明らか．まず $\mathfrak{m}$ がイデアルとなっていることだが，これは実際に計算して分子分母の次数を見れば良い．あとは $S_{(\mathfrak{p})} \backslash \mathfrak{m}$ が単元のみからなることを見れば良いが，これは $E := T^{-1}S \backslash \mathfrak{p} \cdot T^{-1}S$ が単元のみからなることを元に直ちに分かる．E の元は f/g ($g \notin \mathfrak{p}$) と表されるような $S_{\mathfrak{p}}$ の単元全体であり，$S_{(\mathfrak{p})} \setminus \mathfrak{m}$ は E の内次数 0 のものである．$S_{(f)}$ が ring であることも容易．

7 Theorem 3.4

7.1 About ϕ_i^*

多項式 $f(y_1, \ldots, y_n) \in A(Y)$ を取る．これを代入写像 Φ

$$\Phi : y_1 \mapsto x_0/x_i, \ldots, y_n \mapsto x_n/x_i$$

(x_i/x_i は ommited) で写して通分すると，$\bar{f}(x_0, \ldots, x_n)/x_i^{\deg f}$ という $S(Y)_{(x_i)}$ の元が出来る．例えば $i = 1$ とすると

$$y_1^3 + y_1 y_2 + 1 \mapsto \frac{x_0^3}{x_1^3} + \frac{x_0}{x_1}\frac{x_2}{x_1} + 1 = \frac{x_0^3 + x_0^2 x_1 + x_1^3}{x_1^3}$$

逆に任意に $S(Y)_{(x_i)}$ の元を取るとそれは $F(x_0, \ldots, x_n)/x_i^{\deg F}$ という形をしているが，

$$x_0 \mapsto y_1, \ldots, x_i \mapsto 1, \ldots, x_n \mapsto y_n$$

とすれば，この写像 Φ で F に写ってくるようなものが作れる．よって Φ は全射である．

構成した Φ の逆写像を観察すると，これは Y 上で消える斉次多項式 $F(x_0, \ldots, x_n)$ を $F(x_0, \ldots, 1, \ldots, x_n)$ に写す．このようにして出来る多項式はまさしく $\mathcal{I}_a(Y_i)$ の元である．よって $\ker \Phi = \mathcal{I}_a(Y_i)$．正確には $\ker \Phi = \mathcal{I}_a(Y_i)/\mathcal{I}_a(Y)$ である．($Y_i \subset Y$ より $\mathcal{I}_a(Y_i) \supset \mathcal{I}_a(Y)$ が成り立つことに注意.) $(A/\mathcal{I}_a(Y))/(\mathcal{I}_a(Y_i)/\mathcal{I}_a(Y)) \cong A/\mathcal{I}_a(Y_i)$ だから，$\Phi : A(Y) \to S(Y)_{(x_i)}$ から同型写像 $\phi_i^* : A(Y_i) \to S(Y)_{(x_i)}$ が作れた．

7.2 About (b)

affine の $\mathcal{O}_P$ は $\mathcal{O}_P^a$ と書くことにする．projective も同様．

$\mathcal{O}_P^p \cong A(Y_i)_{\mathfrak{m}'_P}$　最初に $\mathcal{O}_P^p \cong A(Y_i)_{\mathfrak{m}'_P}$ とある．Theorem 3.2 は $\mathcal{O}_P^a \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ しか言っていないので，これを導く．まず $\mathbb{A}^n \cong \sqcup_i$ を用いると，

$\phi_i^*(\mathfrak{m}'_P) = \mathfrak{m}_P \cdot S(Y)_{(x_i)}$ pass

$S(Y)_{(x_i)} \cong A(Y_i)_{\mathfrak{m}'_P}$ pass

7.3 About (c)

${}^\forall i,\quad K^p(Y) = K(Y_i)$ pass

$K^p(Y) \cong S(Y)_{((0))}$ pass

7.4 About (a)

$f \in A(Y_i), x_0^q f^q \in S(Y)$ $f \in A(Y_i)$ をとると，$A(Y_i) \cong S(Y)_{(x_i)}$ より f は $g_i/x_i^{N_i}$ $(g_i \in S(Y)_{N_i})$ と書ける．したがって各 i について $g_i = f \cdot x_i^{N_i} \in S(Y)_{N_i}$．

今，$N \geq \sum N_i$ とすると，N 次単項式 $M = \prod_{i=1}^n x_i^{e_i}$ について少なくともひとつの e_i は N_i より大きい．なので $f \cdot M$ は $f \cdot x_i^{N_i} (\in S(Y)_{N_i})$ の倍数である．$S(Y)_N$ はこのような単項式で張られる k-vector space だから $S(Y)_N \cdot f \subset S(Y)_N$ が分かる．

$$g_i^q = f^q \cdot x_i^{qN_i} = (f \cdot x_i^{N_i})(f^{q-1} \cdot x_i^{(q-1)N_i}) \in S(Y)_{N_i}$$

だから，$g_i^q \in S(Y)_{N_i}$．あとは $q = 1$ の時と同様にして $S(Y)_N \cdot f^q \subset S(Y)_N$．

"we can replace the a_i by ..." 式の左辺を観る．$a_j \in S(Y)$ である．a_j を斉次分解してみる．

$$f^m + a_1 f^{m-1} + \cdots + a_m = f^m + (a_0^{(1)} + a_1^{(1)} + \dots) f^{m-1} + \cdots + (a_0^{(m)} + a_1^{(m)} + \dots)$$

すると f は 0 次式だから，この多項式の 0 次斉次部分は以下のようになる．

$$f^m + a_0^{(1)} f^{m-1} + \cdots + a_0^{(m)}$$

これは斉次多項式だから projective variety の点を入れた時に値が 0 かどうかということは意味を持つ．

8 Proposition 3.5

A morphism $\mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ which induced by ϕ is a homomorphism of k-algebras. $\phi : X \to Y$ から誘導される写像 $\phi^* : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X)$ は次のようなものである．

$$\phi^* : (f : Y \to k) \mapsto (f \circ \phi : X \to k).$$

これは $(af+bg)\circ\phi = a(f\circ\phi)+b(g\circ\phi)$ より，k-加群としての写像でもある．よってこれは k-代数の写像．また，$f\circ\phi\circ\phi^{-1}=f$ より，以下が ϕ^{*-1}．

$$\phi^{*-1} : (g : X \to k) \mapsto (g\circ\phi^{-1} : Y \to k).$$

Naturallity of α　多分．単に「標準的な」という意味で natural と言っている．

9 Lemma 3.6

$x_i\circ\psi$ とあるが，これは x_i を $(x_0,\dots,x_n)\mapsto x_i$ という関数だと考えれば単に $\mathrm{pr}_i\circ\psi$ のことである．この解釈は $f(x_0,\dots,x_n)\circ\psi = f(x_0\circ\psi,\dots,x_n\circ\psi)$ を考えれば自然である．

If $x_i\circ\psi$ is regular, then for all $f\in k[x_0,\dots,x_n]$, $f\circ\psi$ is also regular on X.

$$f\circ\psi = f(x_0,\dots,x_n)\circ\phi = f(x_0\circ\phi,\dots,x_n\circ\phi)$$

$\mathcal{O}(X)$ は任意の variety について環を成すから，$\mathcal{O}(X)$ の元の積と和で表示される $f(x_0\circ\phi,\dots,x_n\circ\phi)$ は $\mathcal{O}(X)$ の元．よって $f\circ\psi$ は X で regular.

ψ is continuous.　Y の閉集合 $\mathcal{Z}_a(E)$ $(E\subset k[x_0,\dots,x_n])$ をとると，

$$\psi^{-1}(\mathcal{Z}_a(E)) = \{\psi^{-1}(P)\in X \mid {}^{\forall}f\in E,\ \ P\in f^{-1}(0)\} = \bigcap_{f\in E}\psi^{-1}\circ f^{-1}(0)$$

任意の多項式 f について $f\circ\psi : X\to k$ が regular．regular なら continuous なので $(f\circ\psi)^{-1}=\psi^{-1}\circ f^{-1}$ は閉集合を閉集合に写す．よってこの最右辺は閉集合.

10 Corollary 3.8

k 上の affine variety と morphism of varieties が成す圏を $\mathbf{Aff}$ と書くことにし，k 上の有限生成整域とその間の準同型写像が成す圏を $\mathbf{k-FinDom}$ と書くことにしよう．関手 $A(-) : \mathbf{Aff}\to\mathbf{k-FinDom}$ は対象 X を $A(X)$ に写し，射 ϕ を $\alpha(\phi)$ にうつす．これが圏同値をつくることを示そう．

$A(-)$ が圏同値をつくることと $A(-)$ が忠実充満関手かつ本質的全射であることは同値である．忠実充満関手であることは Prop 3.5 で示されている．この系では一般の variety としている X を affine としているので $\mathcal{O}(X)\cong A(X)$ が使えることに注意せよ．

本質的全射であることは，Ex1.5 から得られる．Ex1.5 ではべき零元を持たない k 上の有限生成代数は必ず何らかの代数的集合の affine coordinate ring

と同型であることを示す．しかしその証明から，任意の k 上の有限生成整域 B は素イデアル $\mathfrak{p}$ を用いて $k[x_0, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}$ と表せることがわかるから，任意の k 上の有限生成整域 B はある affine variety$X$ を用いて $A(X)$ と表せる．