scheme や scheme morphism の性質の定義は `section3_text.pdf` にまとめたので参照すること．同じ PDF で B-fin.gen. scheme などの独自の用語を定義している．`http://stacks.math.columbia.edu/tag/01T0` も参照すると良い．

記法について．$\operatorname{Spec} A_f = D_A(f)$ と書く．

Ex3.1　Definition(s) of Locally of Finite Type Morphism.

補題 Ex3.1.1 (Nike's Lemma)**.** X :: scheme, $U, V \subseteq X, U = \operatorname{Spec} A, V = \operatorname{Spec} B$ かつ $U \cap V \neq \emptyset$ とする．この時，任意の点 $P \in U \cap V$ に対し，$a \in A, b \in B$ であって

$$P \in D_A(a) = D_B(b) \subset U \cap V$$

となるものがある．系として Prop2.2 より $A_a \cong B_b$ が得られる．

(証明)．適当に $a \in A, b \in B$ をとり，

$$P \in D_B(b) \subseteq D_A(a) \subseteq U \cap V$$

としよう．$X = \operatorname{Spec} B, X_f = D_B(b), \bar{b} = b|_{D_A(a)} \in A_a$ として Ex2.16a を用いると，

$$D_B(b) = D_A(a) \cap D_B(b) = \operatorname{Spec}(A_a)_{\bar{b}}.$$

なので，あとは $(A_a)_{\bar{b}}$ を調べれば良い．

$(A_a)_{\bar{b}}$ の元は以下のように書ける．

$$\frac{u/a^m}{\bar{b}^n} = \frac{u}{a^m \bar{b}^n} \quad (m, n \in \mathbb{N}; u \in A).$$

$\bar{b} \in A_a$ なので $a^N \bar{b} = a' \in A$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在する．

$$\frac{ua^{nN}}{a^m a^{nN} \bar{b}^n} = \frac{ua^{nN}}{a^m a'^n}.$$

仮に $m \geq n$ とすると

$$\frac{ua^{nN}}{a^m a'^n} = \frac{ua^{m-n+nN}}{(aa')^m}$$

$m \leq n$ でも同様に分子分母に a'^{n-m} をかければ，$(A_a)_{\bar{b}}$ の元は $A_{aa'}$ の元として書ける．逆に $A_{aa'}$ の元を $(A_a)_{\bar{b}}$ の元として書くことは直ちに出来る．よって $(A_a)_{\bar{b}} = A_{aa'}$．

以上より，$\alpha = aa' \in A, b \in B$ について $D_B(b) = D_A(\alpha)$. ∎

補題 Ex3.1.2 (Preimage of POS[†1] is POS.)**.** $f : X \to Y$ :: scheme morphism. $\operatorname{Spec} B \subseteq Y, f^{-1} \operatorname{Spec} B = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec} C_i$ とする．この時，以下が成立する．

$$^\forall b \in B, \quad ^\exists\{c_i (\in C_i)\}, \quad f^{-1} D_B(b) = \bigcup_{i \in I} D_{C_i}(c_i).$$

(証明)．$U = \operatorname{Spec} B, V_i = \operatorname{Spec} C_i$ とする．すると f の制限により scheme morphism $f|_{V_i} : V_i \to U$ が得られる．これは $V_i \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ という写像で，したがって逆写像は $(f|_{V_i})(S) = f^{-1}(S) \cap V_i$ であることに注意．structure sheaf の間の射を考えると，以下が得られる．

$$\phi_i = \left((f|_{V_i})^\#\right)_U : B = \mathcal{O}_U(U) \to (f|_{V_i})_* \mathcal{O}_{V_i}(U) = C_i.$$

[†1] Principle Open Set

ここで Prop2.2 を用いた．Prop2.3 から，ϕ_i は $f|_{V_i} : V_i \to U$ に 1-1 対応し，特に topological space として

$$f|_{V_i}(\mathfrak{p}) = \phi_i^{-1}(\mathfrak{p}) \quad (\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} C_i)$$

が成り立つ．このことから以下が得られる．

$$f^{-1}(D_B(b)) \cap V_i = (f|_{V_i})^{-1} D_B(b) = D_{C_i}(\phi_i(b)).$$

最左辺と最右辺を $\bigcup_{i\in I}$ すれば主張が示せる． ∎

補題 Ex3.1.3. $f \in A$ とする．有限生成 A_f 代数は有限生成 A 代数でもある．

(証明)．変数の数は問題にならないので 1 変数で証明する．（つまり以下で $A_f[x]$ を多変数にしても構わない．）有限生成 A_f 代数 B には $A_f[x]$ からの全射が存在する．$A_f[x]$ には $A[x,y]$ から次のような全射が存在する．

$$y \mapsto 1/f$$

これが全射であることは，

$$ay^n x^m \mapsto (a/f^n)x^m \in A_f[x]$$

のように分かる．あとはこの写像が A 準同型（代入写像）であることに注意すれば良い．よって $A[x,y] \to A_f[x] \to B$ という全射が存在する． ∎

以下の命題を示す．

$$\begin{aligned} &{}^{\exists}\{B_i\}_{i\in I}, \quad \left[Y = \bigcup_{i\in I} \operatorname{Spec} B_i\right] \wedge \left[{}^{\forall} i \in I, \quad f^{-1}(\operatorname{Spec} B_i) :: \text{ locally } B_i\text{-fin.gen. scheme}\right] \\ \Longleftrightarrow\ &{}^{\forall} \operatorname{Spec} A \subseteq X, \quad f^{-1}(\operatorname{Spec} A) :: \text{ locally } A\text{-fin.gen. scheme} \end{aligned}$$

下から上は自明である．上から下を示そう．

$U = \operatorname{Spec} A \subset X, V_i = \operatorname{Spec} B_i$ とする．$U \cap V_i$ の各点 P に対し，

$$P \in D_{B_i}(b_{ij}) = D_A(a_{ij}) \subseteq U \cap V_i$$

であるような $b_{ij} \in B_i, a_{ij} \in A$ が取れる．P を動かせば，このようにして U が被覆できる．

$$U = \bigcup_{i,j} D_{B_i}(b_{ij}) = \bigcup_{i,j} D_A(a_{ij}).$$

仮定より，各 V_i は $\{\operatorname{Spec} C_{ik}\}_{i,k}$ で被覆され，これらの C_{ik} は有限生成 B_i 代数[†2]であるようにとれる．

Lemma (Preimage of POS is POS) より，$c_{ijk} \in C_{ik}$ が存在し，以下のようになる．

$$f^{-1}U = \bigcup_{i,j} f^{-1} D_{B_i}(b_{ij}) = \bigcup_{i,j}\bigcup_{k} D_{C_{ik}}(c_{ijk}).$$

$D_{C_{ik}}(c_{ijk}) = \operatorname{Spec}(C_{ik})_{c_{ijk}}$ であり，$(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 $(B_i)_{b_{ij}}$ 代数．これは有限生成代数の定義から存在する全射 $B[x_1, \ldots, x_n] \to C_{ik}$ の両辺を局所化[†3]すれば分かる．$(B_i)_{b_{ij}} \cong A_{a_{ij}}$（Nike's Lemma の最後の文）と最後の Lemma より，$(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 A 代数．

以上より，$f^{-1} \operatorname{Spec} A$ は $\operatorname{Spec}(C_{ik})_{c_{ijk}}$ で被覆され，各 $(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 A 代数である．

[†2] $\phi_{ik} = \left((f|_{\operatorname{Spec} C_{ik}})^{\#}\right)_{\operatorname{Spec} B_i}$ で代数とみなす．

[†3] C_{ik} が ϕ_{ik} による B_i 代数であることと $c_{ijk} = \phi_{ik}(b_{ij})$ を用いて計算する．

Ex3.2 Definition(s) of Quasi-Compact Morphism.

以下を示す．

$$\begin{aligned} &{}^{\exists}\{B_i\}_{i\in I},\quad \left[Y = \bigcup_{i\in I} \operatorname{Spec} B_i\right] \wedge \left[{}^{\forall} i \in I,\quad f^{-1}(\operatorname{Spec} B_i) :: \text{quasi-compact.}\right] \\ \iff &{}^{\forall} \operatorname{Spec} A \subseteq Y,\quad f^{-1}(\operatorname{Spec} A) :: \text{quasi-compact.} \end{aligned}$$

まず $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i,j} D_{B_i}(b_{ij})$ となるように b_{ij} をとる．Ex2.13b より $\operatorname{Spec} A$ は quasi-compact だから b_{ij} は有限個でよい．$f^{-1} \operatorname{Spec} B_i$ は open subscheme だから，$f^{-1} \operatorname{Spec} B_i = \bigcup_{i,k} \operatorname{Spec} C_{ik}$ なる C_{ik} がある．仮定より $f^{-1} \operatorname{Spec} B_i$ は quasi-compact であるから C_{ik} は有限個．これに Ex3.1 の中で示した Lemma (Preimage of POS is POS) を用いると以下のようになる．

$$f^{-1} \operatorname{Spec} A = \bigcup_{i,j} f^{-1} D_{B_i}(b_{ij}) = \bigcup_{i,j} \bigcup_{k} D_{C_{ik}}(c_{ijk}).$$

確認したとおり組 (i, j, k) は高々有限の組み合わせしか無い．Ex2.13 の証明にあるとおり，$D_{C_{ik}}(c_{ijk})$ は quasi-compact だから，$f^{-1} \operatorname{Spec} A$ は quasi-compact な開集合の有限和．よって $f^{-1} \operatorname{Spec} A$ も quasi-compact.

Ex3.3 Definition(s) of Finite Type Morphism.

(a) Finite Type = Locally Finite Type+Quasi-Compact.

定義より明らか.

(b) Another Definition of Finite Type Morphism.

Ex3.1 の弱い形である.

(c) If f :: Finite Type and Any $\operatorname{Spec} A \subseteq f^{-1}(\operatorname{Spec} B)$, A :: Fin.Gen B-Alg.

Ex3.4 Definition(s) of Finite Morphism.

Ex3.1 と同様に証明できる.

Ex3.5 Finite/Quasi-Finite Morphism.

$f : X \to Y$ が quasi-finite morphism であるとは，任意の点 $y \in Y$ について $f^{-1}(y)$ が有限集合であるという事である.

(a) Finite $\Longrightarrow$ Quasi-Finite.

(b) Finite $\Longrightarrow$ Closed.

(c) Give an Example of morphism that is Surjective, Finite-Type, Quasi-Finite BUT NOT Finite.

Ex3.6 Function Field.

X :: integral scheme とし，$\mathcal{O}_{X,\zeta}$ が体であることと，任意の affine open subset $\operatorname{Spec} A$ について $\mathcal{O}_{X,\zeta} \cong \operatorname{Quot}(A)$ であることを示す．

$\zeta \in X$ を generic point としよう．$\{\zeta\}$ は X で dense な 1 点集合だから，任意の開集合に含まれる．だから $\operatorname{Spec} A$ :: affine open subset をどのように取ってもよい．$\mathcal{O}_{X,\zeta} = (\mathcal{O}_X|_{\operatorname{Spec} A})_\zeta = A_\zeta$ であり，$A = \mathcal{O}_X|_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A)$ が integral であることから，$\zeta = (0) \in \operatorname{Spec} A$．以上から

$$\mathcal{O}_{X,\zeta} = (\mathcal{O}_X|_{\operatorname{Spec} A})_\zeta = A_\zeta = A_{(0)} = \operatorname{Quot}(A)$$

が得られる．

Ex3.7 Dominant, Generically Finite Morphism of Finite Type of Integral Schemes.

Ex3.8 Normalization.

scheme が normal であるとは，その任意の局所環が integrally closed domain である，という意味である．X :: integral scheme とする．$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ に対し，$\tilde{A}$ を A の integral closure, $\tilde{U} = \operatorname{Spec} \tilde{A}$ とする．

(a) $\{\tilde{U}\}$ can be glued.

(b) $\tilde{X}$ has a UMP.

(c) X :: finite type $\Longrightarrow$ $\tilde{X} \to X$ :: finite.

Ex3.9 The Topological Space of a Product.

(a) $\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \cong \mathbb{A}^2_k$ but $\mathbb{A}^2_k \neq \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k$ as sets.

$\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[x]$ として $\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k$ を考える．

■$\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \cong \mathbb{A}^2_k$． $\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \cong \operatorname{Spec} k[x] \otimes_k k[y]$ かつ，$k[x] \otimes_k k[y] \cong k[x,y]$(Ch I, Ex3.18 の解答を参照．) なので明らか．

■$\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \neq \mathbb{A}^2_k$ as sets． $\operatorname{Spec} k[x,y]$ は $(y - x^2)$ のような点 (generic point of a variety) を含むが，$\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k$ にこれに対応する点はない．

(b) Describe $\operatorname{Spec} k(s) \otimes_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k(t)$.

$\operatorname{Spec} k(s) \otimes_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k(t) \cong \operatorname{Spec} k(s) \otimes_k k(t)$ である．$k(s) \otimes_k k(t)$ の元は 0 でなければ単元である．実際，$f, g, f', g' \neq 0$ であるとき，

$$\frac{f(s)}{g(s)} \otimes \frac{f'(t)}{g'(t)} \cdot \frac{g(s)}{f(s)} \otimes \frac{g'(t)}{f'(t)} = 1 \otimes 1 = 1.$$

よって $k(s) \otimes_k k(t)$ は体で，$\operatorname{Spec} k(s) \otimes_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k(t)$ は 1 点 scheme.

Ex3.10 Fibres of a Morphism.

(a) $\operatorname{sp}(X_y) \approx f^{-1}(y)$.

X, Y :: scheme, $f : X \to Y$, $y \in Y$ とし，fiber X_y を考える．$k(y)$ :: the residue field at y は体だから，$\operatorname{Spec} k(y)$ は 1 点空間．そこで定値写像 ct_y を

$$ct_y : \operatorname{Spec} k(y) = \{*\} \to Y; \quad * \mapsto y$$

とする．$X_y := X \times_Y \operatorname{Spec} k(y)$ は以下の図式を伴う．

$$\begin{tikzcd}
X_y \arrow[d] \arrow[drr] & & \forall Z \arrow[ll, dashed, "\exists!"'] \arrow[dll, "\forall"] \arrow[d, "\forall"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y & \operatorname{Spec} k(y) \arrow[l, "ct_y"]
\end{tikzcd}$$

以下，scheme はその base space だけを考える．（つまり topology space の圏に落とし込んで考える．）普遍性が保たれることは，scheme morphism が $(f, f^{\#})$ と言う topological space と structure space の間の射の組であり，$f \neq g$ ならば $\mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_Y$ と $\mathcal{O}_X \to g_* \mathcal{O}_Y$ の写像が一致し得ないことから分かる．$f^{-1}(y)$ が X_y の普遍性を満たせば，直ちに[†4] $\operatorname{sp}(X_y) \approx f^{-1}(y)$ が得られる．

上の図式で X_y の部分に $f^{-1}(y)$ を入れた時の図式は次のよう．示すべきは $Z \to f^{-1}(y)$ が一意に存在することである．

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(y) \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[drr, "j"] & & \forall Z \arrow[dll, "\forall p"'] \arrow[d, "\forall q"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y & \operatorname{Spec} k(y) \arrow[l, "ct_y"]
\end{tikzcd}$$

まず，$f^{-1}(y) \to Y$ の射が可換であることを見る．つまり

$${}^{\forall} x \in f^{-1}(y), \quad f \circ i(x) = f(x) = y = ct_y \circ j(x)$$

が成立することを示す必要があるが，これは $f^{-1}(y)$ の定義．次に $Z \to Y$ の射が可換であることから，以下が成り立つ．

$${}^{\forall} z \in Z, \quad f \circ p(z) = y = ct_y \circ q(z).$$

[†4] homeomorphism は topology space の圏における isomorphism であることに注意.

よって $Z \subseteq (f \circ p)(y) = p^{-1}(f^{-1}(y))$．逆の包含関係は自明だから，$Z = p^{-1}(f^{-1}(y))$ が得られる．したがって $Z \to f^{-1}(y)$ の射として p を取ることが出来る．

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(y) \arrow[d, hook, "i"'] \arrow[drr, "j"] & & \forall Z \arrow[ll, "p"'] \arrow[dll, "\forall p"'] \arrow[d, "\forall q"] \\
X \arrow[r, "f"'] & Y & \operatorname{Spec} k(y) \arrow[l, "ct_y"]
\end{tikzcd}$$

i が単射であることから，この図式を可換にする $Z \to f^{-1}(y)$ の射は p に一致する．よって $f^{-1}(y)$ は $\operatorname{sp}(X_y)$ の普遍性を持つ．

(b) Fibers of $f : X = \operatorname{Spec} k[s,t]/(s-t^2) \to \operatorname{Spec} k[s] = Y$.

k :: algebraically closed field とする．$A = k[s,t]/(s-t^2) = k[\bar{t},\bar{s}], B = k[s]$ とおき，$X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B$ とする．$\bar{s} = \bar{t}^2$ に注意．また，f を $\phi : B \to A; s \mapsto \bar{s}$ から誘導される morphism だとする．この設定のもとで各点における fiber を調べていく．

■At $y = (s-a) \in Y \quad (a \neq 0)$. まず $k(y)$ を調べる．$k(y) = B_y/yB_y \cong (B/y)_{\bar{y}}$ だが，$B/y \cong k$ は体だから $k(y) = k$．よって $X_y = \operatorname{Spec}(A \otimes_B k)$ となる．$\phi(y) = (\bar{t}^2 - a) = (\bar{t} - \sqrt{a}) \cap (\bar{t} + \sqrt{a})$ だから，(a) から以下が成り立つ．

$$\operatorname{sp}(X_y) \approx f^{-1}(y) = f^{-1}V(y) = V(\phi(\mathfrak{a})) = \{(\bar{t} - \sqrt{a}), (\bar{t} + \sqrt{a})\}.$$

各点での residue field を見ていく．X_y は $\operatorname{Spec} A \otimes_B k$ である．ここでの $T_y = A \otimes_B k$ は，$A, k(\cong (B/y)_{\bar{y}})$ をそれぞれ $\phi, s \mapsto a$ [†5]で B 代数とみなしている．この時，T_y は

$$\mathfrak{m}_{\pm} = \langle (\bar{t} - \pm\sqrt{a}) \otimes_B 1 \rangle$$

を極大イデアルにもち，それぞれでの剰余体は k である．これは $F = \sum_{i=0}^{d} c_i(\bar{t}^i \otimes 1) \in A$ について $F \otimes 1$ を変形してみると分かる．

$$\begin{aligned}
&F \otimes 1 \\
&= \sum_{i=0}^{d} c_i(\bar{t}^i \otimes 1) \\
&= \sum_{0 \le i \le d, i \in 2\mathbb{Z}} c_i(\bar{t}^i \otimes 1) + \sum_{0 \le i \le d, i \notin 2\mathbb{Z}} c_i(\bar{t}^i \otimes 1) \\
&= \sum_{0 \le i \le \lfloor d/2 \rfloor} c_i(\bar{t}^{2i} \otimes 1) + \sum_{0 \le i \le d, i \notin 2\mathbb{Z}} c_i(\bar{t}^i \otimes 1) \\
&= \sum_{0 \le i \le \lfloor d/2 \rfloor} c_i(a^i \otimes 1) + \sum_{0 \le i \le d, i \notin 2\mathbb{Z}} c_i(\bar{t}^i \otimes 1) \\
&= \left(\sum_{0 \le i \le \lfloor d/2 \rfloor} c_i a^i \otimes 1 \right) + \sum_{0 \le i \le d, i \notin 2\mathbb{Z}} c_i(\bar{t}^i \otimes 1).
\end{aligned}$$

途中で

$$s(1 \otimes 1) = \bar{s} \otimes 1 = \bar{t}^2 \otimes 1 = a \otimes 1 = 1 \otimes a = (1 \otimes 1)s$$

[†5] $s \mapsto a$ は $s \mapsto s \bmod (s-a)$ という写像を書き換えたものである．

を使った．したがって $(F\otimes 1)(\pm\sqrt{a}) = F(\pm\sqrt{a})\otimes 1$ となる．よって $\bar{t}\otimes 1 \mapsto \pm\sqrt{a}$ の ker は $\mathfrak{m}_\pm$．また，上の計算からこの代入写像は k への全射であることが分かる．つまり $T_y/\mathfrak{m}_\pm \cong k$ なので，$k(\mathfrak{m}_\pm) = k$．$\operatorname{Spec} T_y$ が 2 点のみを持つことから，これ以外に素イデアルはない†6．

■At $y = (s) \in Y$． $k(y)$ はやはり $B/y \cong k$ より $k(y) = k$．$\phi(y) = (\bar{t}^2) = (\bar{t})^2$ となるから

$$\operatorname{sp}(X_y) \approx f^{-1}(y) = \{(\bar{t})\}.$$

$X_y = \operatorname{Spec}(A\otimes_B k)$ の sheaf を考えよう．ここでの $T_y = A\otimes_B k$ は，A, k をそれぞれ $\phi, s\mapsto 0$ †7で B 代数とみなしている．この時 $A\otimes_B k$ は non-reduced である．

$$\begin{aligned}
&(\bar{t}\otimes 1)^2 \in T_y\\
=&\bar{t}^2\otimes 1\\
=&\bar{s}\otimes 1\\
=&s(1\otimes 1)\\
=&1\otimes s(0)\\
=&1\otimes 0\\
=&0
\end{aligned}$$

■At $y = (0) = \eta \in Y$． $(B/\eta)_\eta = B_{(0)} = k(s)$ なので $k(\eta) = k(s)$．$\phi(\eta) = (0) = \zeta$ :: generic point of A で，$\phi^{-1}(\mathfrak{a}) = \eta = (0)$ となる $\mathfrak{a}$ は他にないから $\operatorname{sp}(X_\eta) \approx \{\zeta\}$ となる．（$\{\eta\} \neq V(\eta)$ に注意．）$T_\eta = A\otimes_B k(s)$ を考える．ここでは A, k をそれぞれ $\phi, s\mapsto s/1$ で B 代数とみなしている．

(c) Another Solution of (b).

Ch.I Ex3.18(Product of Affine Varieties) で使った補題を少し変形した

$$\frac{k[s][t]}{I}\otimes_{k[s]}\frac{k[s][u]}{J} \cong \frac{k[s][t,u]}{I^e + J^e}$$

と，中国剰余定理を用いる．

補題 Ex3.10.1. I, J をそれぞれ $k[s][t](= k[s,t]), k[s][u](= k[s,u])$ のイデアルとする．この時，以下が成り立つ．

$$\frac{k[s][t]}{I}\otimes_{k[s]}\frac{k[s][u]}{J} \cong \frac{k[s][t,u]}{I^e + J^e}$$

ただし，$\frac{k[s][t]}{I}, \frac{k[s][u]}{J}$ はそれぞれ $f\mapsto f \bmod I, f\mapsto f \bmod J$ で $k[s]$ 代数とみなす．

(証明)．以下の写像を考える．

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{k[s][t]}{I}\otimes_{k[s]}\dfrac{k[s][u]}{J} & \to & \dfrac{k[s][t,u]}{I^e+J^e}\\
(f(s)t^m \bmod I)\otimes(g(s)u^n \bmod J) & \mapsto & f(s)g(s)t^m u^n \bmod I^e + J^e\\
h(s)\cdot(t^m \bmod I)\otimes(u^n \bmod J) & \leftarrow & h(s)t^m u^n \bmod I^e + J^e
\end{array}$$

†6 $\alpha^2 \neq a$ であるとき

$$(\bar{t}^2 - \alpha^2)\otimes 1 = \bar{t}^2\otimes 1 - \alpha^2\otimes 1 = s(1\otimes 1) - s(1\otimes\alpha^2/a) = (\bar{t}^2\otimes 1)((1-\alpha^2/a)\otimes 1)$$

だから $\langle(\bar{t}-\alpha)\otimes_B 1\rangle$ は素イデアルでない．

†7 $s\mapsto 0$ は $s\mapsto s \bmod (s-0)$ という写像を書き換えたものである．

（任意の元については加法準同型として拡張する．）$\to$ を ϕ, $\leftarrow$ を ψ と名付ける．$(f(s)t^m \bmod I) \otimes (g(s)u^n \bmod J) = f(s)g(s) \cdot (t^m \bmod I) \otimes (u^n \bmod J)$ だから，二つが well-defined ならばこれらが互いに逆を与えることをは明らか．

ϕ, ψ の well-defiendness を占めす．$I, J \subset I^e + J^e$ だから，ϕ が well-defined であることは明らか．問題は ψ の well-defiendness である．$I^e + J^e$ の元は，

$$\sum_{\text{finite}} (\text{element of } k[s][t,u]) \cdot (\text{element of } I) + \sum_{\text{finite}} (\text{element of } k[s][t,u]) \cdot (\text{element of } J)$$

のように書ける．したがって，$w = c(s)t^{c_0}u^{c_1} \cdot i(s)t^{i_0} + d(s)t^{d_0}u^{d_1} \cdot j(s)u^{j_0}$ の形の元の和である．ψ は加法準同型であるように定義されているから，$\psi(w \bmod I^e + J^e) = 0$ さえ示せば十分．$\psi(w \bmod I^e + J^e)$ を計算する．

$$\begin{aligned}
&c(s)i(s) \cdot (t^{c_0}t^{i_0} \bmod I) \otimes (u^{c_1} \bmod J) + d(s)j(s) \cdot (t^{d_0} \bmod I) \otimes (u^{j_0}u^{d_1} \bmod J) \\
=&c(s) \cdot (t^{c_0} \cdot i(s)t^{i_0} \bmod I) \otimes (u^{c_1} \bmod J) + d(s) \cdot (t^{d_0} \bmod I) \otimes (u^{j_0} \cdot j(s)u^{d_1} \bmod J) \\
=&c(s) \cdot (0 \otimes (u^{c_1} \bmod J)) + d(s) \cdot ((t^{d_0} \bmod I) \otimes 0) \\
=&0
\end{aligned}$$

よって ψ は well-defined. ∎

これをつかって (b) を計算していく．

■At $y = (s-a) \in Y \quad (a \neq 0)$. $\phi(y) = (\bar{t}^2 - a) = (\bar{t} - \sqrt{a}) \cap (\bar{t} + \sqrt{a})$ だから，(a) から以下が成り立つ．

$$\mathrm{sp}(X_y) \approx f^{-1}(y) = f^{-1}V(y) = V(\phi(\mathfrak{a})) = \{(\bar{t} - \sqrt{a}), (\bar{t} + \sqrt{a})\}.$$

$k(y) = B_y/yB_y \cong (B/y)_{\bar{y}}$ だが，$B/y \cong k$ は体だから $k(y) = k$．$X_y = \operatorname{Spec} A \otimes_B B/y$ なので補題が使える．

$$\begin{aligned}
\frac{k[s,t]}{(s-t^2)} \otimes_{k[s]} \frac{k[s,u]}{(s-a,u)} \cong& \frac{k[s,t,u]}{(s-t^2, s-a, u)} \\
\cong& \frac{k[t]}{(t^2-a)} \\
=& \frac{k[t]}{(t-\sqrt{a}) \cap (t+\sqrt{a})} \\
\cong& \frac{k[t]}{(t-\sqrt{a})} \oplus \frac{k[t]}{(t+\sqrt{a})} \\
\cong& k \times k
\end{aligned}$$

途中で中国剰余定理を使った．このことから $X_y = \operatorname{Spec}(k \times k)$ で，各点での剰余体は k.

■At $y = (s) \in Y$.

$$\begin{aligned}
\frac{k[s,t]}{(s-t^2)} \otimes_{k[s]} \frac{k[s,u]}{(s,u)} \cong& \frac{k[s,t,u]}{(s-t^2, s, u)} \\
\cong& \frac{k[t]}{(t^2)}
\end{aligned}$$

$\frac{k[t]}{(t^2)}$ は $(t) \bmod (t^2)$ を唯一の極大イデアルとする局所環なので，Ex2.3b より Spec $\frac{k[t]}{(t^2)}$ は 1 点空間．また，non-reduced scheme である．

■At $y=(0)=\eta\in Y$．$(B/\eta)_\eta = B_{(0)} = k(s)$ なので $k(\eta)=k(s)$．$k(s)=\frac{k[s,u]}{(su-1)}$ より，以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\frac{k[s,t]}{(s-t^2)} \otimes_{k[s]} \frac{k[s,u]}{(su-1)} &\cong \frac{k[s,t,u]}{(s-t^2, su-1)} \\ &\cong \frac{k[s,t,1/s]}{(t^2-s)} \\ &\cong \frac{k(s)[t]}{(t^2-s)}\end{aligned}$$

t^2-s は $k(s)$ 係数既約多項式だから，この環は体．なので $X_y=\operatorname{Spec}\frac{k(s)[t]}{(t^2-s)}$ は 1 点空間である．しかも剰余体は $k(s)=k(y)$ の 2 次拡大体．

Ex3.11　Closed Subschemes.

(a)　Closed Immersions are Stable under Base Extension.

(b)　* Affine Closed Subscheme of Affine Scheme is Determined by a Suitable Ideal.

(c)　The Smallest Subscheme Structure on a Closed Subset.

(d)　The Scheme-Theoretic Image of f.

Ex3.12　Closed Subschemes of $\operatorname{Proj} S$.

Ex3.13　Properties of Morphisms of Finite Type.

Ex3.14　The Closed Points of Scheme of Finite Type over a Field.

Ex3.15　Geometrically Irreducible/Reduced/Integral Schemes.

Ex3.16　Noetherian Induction.

Ex3.17　Zariski Spaces.

Ex3.18　Constructible Sets.

Ex3.19　Chevalley's Theorem on Constructible Set.

Ex3.20　Dimension.

Ex3.21　Spec of D.V. Ring Gives Counterexample for Ex3.20a,d,e.

Ex3.22　Dimension of the Fibres of a Morphism.

Ex3.23　$t(V\times W) = t(V)\times_{\operatorname{Spec} k} t(W)$.