ゼミノート #1
Fine/Coarse Moduli Space の非存在

七条彰紀

2018 年 3 月 19 日

問 0.1

Fine/Coarse moduli space とは何か？

moduli space は "moduli functor" の情報を可能な限り精密に写した scheme のことである．その理解のためにはまず "functor of points" の概念が必要である．以下，私が過去に書いたノート "Group Scheme" を引用・加筆する．

1 Functor of Points

圏論で言う "generalized point" の概念を，名前を変えて用いる．

定義 1.1

(i) $X, T \in \mathbf{Sch}/S$ に対し，$\underline{X}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/S}(T, X)$ を X の T**-valued points** と呼ぶ．$T = \operatorname{Spec} R$ と書けるときは $\underline{X}(T)$ を $\underline{X}(R)$ と書く．したがって $\underline{X}$ は $\mathbf{Sch}/S$ からの covariant functor と見ることも，k-algebra の圏からの contravariant functor と見ることも出来る．この関手 $\underline{X}$ は functor of points と呼ばれる．

(ii) 体 k 上の scheme :: X $(S = \operatorname{Spec} k, X \in \mathbf{Sch}/S)$ と field extension :: $k \subseteq K$ について，$\underline{X}(K)$ を X の K**-rational points** と呼ぶ．

(iii) morphism :: $h : X \to Y$ について自然変換 $\underline{h} : \underline{X} \to \underline{Y}$ は $\phi \mapsto h \circ \phi$ のように射を写す．

注意 1.2

$\mathbf{Sch}$ は locally small category である．すなわち，任意の $X, T \in \mathbf{Sch}$ について $\underline{X}(T)$ は集合である．これを確かめるために，$X, Y \in \mathbf{Sch}$ を任意にとり，$\mathrm{Hom}(X, Y)$ の濃度がある濃度で抑えられることを見よう．射 $X \to Y$ の作られ方に沿って考える．

(1) base space の間の写像 $f : \operatorname{sp} X \to \operatorname{sp} Y$ をとる．このような写像全体の濃度は高々 $|\operatorname{sp} Y|^{|\operatorname{sp} X|}$．

(2) $|Y|$ の開集合 U をとる．開集合全体の濃度は高々 $2^{|\operatorname{sp} Y|}$．

(3) 写像 $f_U^{\#} : \mathcal{O}_Y(U) \to (f_* \mathcal{O}_X)(U)$ を定める．このような写像全体の濃度は高々 $|(f_* \mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$．

したがって $\mathrm{Hom}(X, Y)$ の濃度は高々

$$|\operatorname{sp} Y|^{|\operatorname{sp} X|} \times \prod_{U \in 2^{\operatorname{sp} Y}} |(f_* \mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$$

となる．濃度の上限が存在する（すなわち，ある集合への単射を持つ）から，$\mathrm{Hom}(X, Y)$ は集合である．

注意 1.3

上の注意から，Yoneda Lemma が成立する．したがって自然変換 $\underline{G} \to \underline{H}$ と射 $G \to H$ が一対一対応する．このため，scheme の間の射についての議論と functor of points の間の射の議論は（ある程度）互いに翻訳することが出来る．

注意 1.4

K-rational point については，$\underline{X}(K) = \{x \in X \mid k(x) \subseteq K\}$ とおく定義もある．ここで $k(x)$ は x での residue field である．しかし [2] Chapter.2 Ex2.7 から分かる通り，この二つの定義は翻訳が出来る．すなわち，$k(x) \subseteq K$ を満たす $x \in X$ と，$\operatorname{Spec} k$-morpsihm :: $\operatorname{Spec} K \to X$ は一対一に対応する．

また X :: finite type $/k$ であるとき，closed point :: $x \in X$ について，$k(x)$ は k の有限次代数拡大体である．これは Zariski's Lemma の帰結である．したがって $\underline{X}(\bar{k})$ は X の closed point 全体に対応する．ただし $\bar{k}$ は k の代数閉包である．

例 1.5

$\mathbb{R}$ 上の affine scheme $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$ の $\mathbb{R}$-rational point と $\mathbb{C}$-rational point を考えよう．

$\operatorname{Spec} \mathbb{R} \to X$ の射は環準同型 $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2) \to \mathbb{R}$ と一対一に対応する．しかし直ちに分かる通り，このような環準同型は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (0, 0)$$

で定まるものしか存在し得ない．ここで $\bar{x} = x \bmod (x^2 + y^2), \bar{y} = y \bmod (x^2 + y^2)$ と置いた．よって $\underline{X}(\mathbb{R})$ は 1 元集合．また，この環準同型が誘導する $\operatorname{Spec} R \to X$ の射は 1 点空間 $\operatorname{Spec} \mathbb{R}$ を原点へ写す．

一方，環準同型 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \to \mathbb{C}$ は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (a, \pm ia)$$

（ここで $i = \sqrt{-1}, a \in \mathbb{R}$）で定まることが分かる．すなわち，$\mathcal{Z}_a(x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ の点に対応して，$\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \to \mathbb{C}$ の環準同型が定まる．逆の対応も明らか．よって $\underline{X}(\mathbb{C})$ の元は $\mathcal{Z}_a(x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ の点に対応している．

例 1.6

体 k 上の affine variety :: $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ を多項式系 :: $F_1, \ldots, F_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$ で定まるものとする．すると k 上の環 R に対して，次の集合が考えられる．

$$V_R = \left\{p = (r_1, \ldots, r_n) \in R^{\oplus n} \;\middle|\; F_1(p) = \cdots = F_n(p) = 0\right\}.$$

この集合の元も R-value point と呼ばれる．([5] ではこちらのみを R-value point と呼んでいる．実際，こちらのほうが字句 “value point”の意味が分かりやすいだろう．) V_R の点が $\underline{X}(R)$ の元と一対一に対応することを見よう．

X の affine coordinate ring を $A = k[x_1, \ldots, x_n]/(F_1, \ldots, F_n)$ とし，$\bar{x}_i = x_i \bmod (F_1, \ldots, F_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおく．$\phi : A \to R$ を考えてみると，これは次のようにして定まる．

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \mapsto (r_1, \ldots, r_n) \in V_R.$$

すなわち，V_R の点に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ の元が定まる．逆の対応は明らか．そして，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ が $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} R, X) = \underline{X}(R)$ と一対一対応することはよく知られている．

2 Moduli Functor and Fine/Corse Moduli Space

A を代数幾何学的対象の集合とし，$\sim$ を Z の中の同値関係とする．“naive moduli problem”は，M の点と $A/\sim$ の元（同値類）が一対一対応するような scheme :: M を見つけよ，という問題である．更に $A/\sim$ の元が「連続的に変化」する様子も「エンコード」しているような M を見つけよ，という問題を “extended moduli problem”と呼ぶ（正確な定義は [4] §2.2)．“extended moduli problem”を定式化するには，「連続的に変化」と「エンコード」を定式化しなくてはならない．前者の為に “family”が定義され，後者の為に “moduli functor”が定義される．すると「エンコード」は関手の表現であると理解できる．

2.1 Families

定義 2.1
$\mathcal{P}$ を集合のクラス[†1] とする．集合 B について，B の構造と整合的な構造を持った集合 $\mathcal{F}$ と全射写像 $\pi : \mathcal{F} \to B$ の組が $\mathcal{P}$ の B 上の **family** であるとは，各 $b \in B$ について集合 $\pi^{-1}(b) \subseteq \mathcal{F}$ が $\mathcal{P}$ に属すということ．

「B の構造と整合的な構造」というのは，例えば，S が位相空間であって写像 $\mathcal{F} \to S$ を連続にするような位相が $\mathcal{F}$ に入っている，ということである．family の構造は場合毎に明示されなくてはならない．

用語 “family”を厳密に定義しているものは全くと言っていいほど無いが，ここでは Renzo のノート[†2] の定義を参考にした．“family”を上のように解釈して不整合が生じたことは，私の経験の中ではない．

注意 2.2
moduli theory 以外で “family of $\mathcal{C}$”と言えば，単に $\mathcal{C}$ の部分集合であろう．“family parametrized by S”の様に言えば，S-indexed family (or set) のことを想像するであろう．しかし S-indexed family :: $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ は $S \to \mathcal{F}$ という写像で定まるから，ここでの “family”とは写像の向きが逆である．

上の定義を無心に読めば分かる通り，「$\mathcal{C}$ の family :: $\mathcal{F}$」と言った時には，$\mathcal{C}$ に属すのは $\mathcal{F}$ の部分集合である．属すのは（一般に）$\mathcal{F}$ の元ではない．また $\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}$ の元の和集合とみなせる．（正確には $\mathcal{C}$ の元を S に沿って並べたものである．）

例 2.3
X, B :: scheme, $f : X \to B$ :: morphism of schemes をとる．X は f によって B 上の family となる．射の fibre として実現される，scheme（例えば smooth curve）の family は deformation theory の対象である．

[†1] 集合 X を変数とする述語 $X \in \mathcal{C}$ の意味を「X はある条件を満たす対象である」と定義した，と考えて良い．「属す」の意味は集合と同様に定める．

[†2] http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topics10/Notes.pdf

例 2.4
k を体, S を適当な scheme とする．$\mathbb{A}_k^2$ の原点を通る直線の S 上の family として, line bundle :: $\mathcal{L} \subset \mathbb{A}^2 \times_k S$ を考えることが出来る．$\mathcal{L} \to S$ は射影写像で与えられる．同様に $\mathbb{A}^n$ の r 次元線形空間の S 上の family は r 次元 vector bundle :: $\mathcal{E} \subset \mathbb{A}^n \times S$ である．

例 2.5
k を適当な体とし，$\mathbb{P}_k^1$ の点 O_i $(i = 1, 2, 3)$ を順に $(0 : 1), (1 : 0), (1 : 1)$ とする．この時，$PGL_2(k)$ は次の全単射で $\mathbb{P}_k^1$ の自己同型写像の $(\mathbb{P}_k^1)^{\oplus 3}$ 上の family になる．

$$\begin{array}{cccc} \pi : & PGL_2(k) & \to & (\mathbb{P}_k^1)^{\oplus 3} \\ & \phi & \mapsto & (\phi^{-1}(O_i))_{i=1}^3. \end{array}$$

注意 2.6
family に要請される性質として，特に "flat"がある．projective flat family は，base scheme に適切な条件をつけると各 fiber :: X_t の Hilbert 多項式が t に依らない，という特徴がある ([2] III, Thm9.9)．詳細は [2] III, 9 を参照せよ．

2.2 Moduli Functor

以下の定義は [1] など，Moduli 問題に関する殆どの入門書で述べられている．

定義 2.7
moduli functor（または functor of families）とは，各 scheme :: S に対して，$\mathcal{M}(S)$ が代数幾何学的対象の S 上の family 達を family の間の同値関係で割ったもの ("$\{$families over $S\}/\sim_S$" in [4]) であるような $\mathcal{M} : \mathbf{Sch} \to \mathbf{Set}$ のことである．morphism :: $f : S \to T$ は，$\mathcal{M}$ によって pullback に写される．すなわち，$\phi : \mathcal{F} \to T$ は $\mathcal{M}(f)$ によって $\mathcal{F} \times_T S \to S$ に写される．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \times_T S \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{M}(f)(\phi)"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\phi"] \\ S \arrow[r, "f"'] & T \end{tikzcd}$$

moduli functor の定義はあえて曖昧に述べられている．これは「出来る限り多くのものを moduli theory の範疇に取り込みたい」という思いがあるからである ([1])．

2.3 Fine Moduli Space

定義 2.8
scheme :: M が moduli fuctor :: $\mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるとは，M が $\mathcal{M}$ を表現する (represent) ということである．言い換えれば，関手 $\underline{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, M)$ が $\mathcal{M}$ と自然同型，ということである．

注意 2.9
moduli functor :: $\mathcal{M}$ の fine moduli space :: M が存在したとしよう．この時，任意の $X \in \mathbf{Sch}$ について $\mathcal{M}(X) \cong \underline{M}(X)$．これは X 上の代数幾何学的対象が成す同値類が M の X-value point と一対一に対応して

いることを意味する．したがって，$\mathcal{M}$ が指定する代数幾何学的対象の集合の同値類を M が「パラメトライズ」していると考えられる．

定義 2.10
moduli fuctor :: $\mathcal{M}$ に対する fine moduli space を M であるとする．また $\Psi : \mathcal{M} \to \underline{M}$ を自然同型とする．$u = \Psi_M^{-1}(\mathrm{id}_M) : \mathcal{U} \to M$ を universal family と呼ぶ．

universal family の名前の由来は次の命題に拠る．

命題 2.11
任意の family :: $\phi : \mathcal{F} \to B \in \mathcal{M}(B)$ は，$\chi = \Psi(\phi) : B \to M$ と universal family :: $u : \mathcal{U} \to M$ の pullback (fiber product) として得られる．

(証明)．$\Psi : \mathcal{M} \to \underline{M}$ は自然同型であるから，$\chi = \Psi(\phi) : B \to M$ から次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(B) \arrow[d, "\Psi_B"'] & \mathcal{M}(M) \arrow[l, "\mathcal{M}(\chi)"'] \arrow[d, "\Psi_M"] \\
\underline{M}(B) & \underline{M}(M) \arrow[l, "\underline{M}(\chi)"]
\end{tikzcd}$$

$u \in \mathcal{M}(M)$ を $\mathcal{M}(\chi)$ で写すと $\mathcal{U} \times_M B \to B$ になる．同じ u を $\underline{M}(B)$ まで写すと，$\Psi_M(u) \circ \chi = \chi$ になる．これを Ψ_B^{-1} で写せば $\phi : \mathcal{F} \to B$．上の図式は可換図式であったから，$\phi = \mathcal{U} \times_M B \to B$． ∎

例 2.12 ([4], Exercise 2.20)
例 2.4 で述べた $\mathbb{A}^n$ の r 次元線形空間の S 上の family (vector bundle over S) の集合を，vector bundle の同型で割った集合を $\mathcal{M}(S)$ とする．$f : T \to S$ に対する $\mathcal{M}(f)$ は，vector bundle への post-composition で自然に定まる．

この moduli functor は fine moduli space を持つことが知られている．これが Grassmannian variety である．

残念ながら，多くの moduli functor に対して fine moduli space が存在し得ない．（このあたりの議論は [1] p.3 や [3] p.150 にある．この節の終わりでも理由と例を示す．）そのため Mumford は（おそらく GIT 本で）fine moduli space の代わりとして coarse moduli space を提唱した．

2.4 Coarse Moduli Space

定義 2.13
moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対して，以下を満たす scheme :: M を $\mathcal{M}$ の coarse moduli space と呼ぶ．

(i) 自然変換 $\eta : \mathcal{M} \to \underline{M}$ が存在する．

(ii) η は自然変換 $\mathcal{M} \to \underline{\tilde{M}}$ の中で最も普遍的である:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[dl, "{}^\forall\tau"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ {}^\forall\underline{\tilde{M}} & & \underline{M} \arrow[ll, "{}^{\exists!}\underline{f}"] \end{tikzcd}$$

この図式で $\tilde{M}$ :: scheme, $f : M \to \tilde{M}$.

(iii) 任意の代数閉体 :: k について $\eta_{\operatorname{Spec} k} : \mathcal{M}(\operatorname{Spec} k) \to \underline{M}(\operatorname{Spec} k)$ は全単射である．

例 2.14

楕円曲線の j-不変量．後に示すとおり，これは fine でない．

2.5 Properties of Fine / Coarse Moduli Spaces

命題 2.15

moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対して coarse moduli space は同型を除いて一意である．

命題 2.16 ([3], Prop23.6)

scheme :: M が moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるならば，M は $\mathcal{M}$ の coarse moduli space でもある．

この二つをまとめると次の図式に成る．

$$\begin{tikzcd} \text{Fine moduli} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Coarse moduli} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Universality} \arrow[d, Rightarrow] \\ & & \text{Uniqueness} \end{tikzcd}$$

命題 2.17 ([3], Prop23.5)

S :: scheme の open subscheme と包含写像が成す圏を $\mathbf{OpenSubSch}(S)$ と書くことにする．これは $\mathbf{Sch}/S$ の full subcategory である．

moduli functor :: $\mathcal{M}$ が fine moduli space をもつならば，任意の S :: scheme について $\mathcal{M}|_{\mathbf{OpenSubSch}(S)}$ は S 上の sheaf である．言い換えれば，$\mathcal{M}$ は Zariski topology 上の sheaf である．

(証明). M :: fine moduli scheme for $\mathcal{M}$ とし，S :: scheme を固定する．$\mathcal{F} := \underline{M}|_{\mathbf{OpenSubSch}(S)}$ は開集合系からの contravariant functor だから presheaf であることは定義から従う．また $\mathcal{F}$ の元は scheme の morphism である．このことから sheaf の公理 Identity Axiom と Gluability Axiom を満たすことも簡単に分かる．（一応，[2] II, Thm3.3 Step3 を参考に挙げる．） ∎

3 Pathological behaviour.

問 3.1

Fine/Coarse Moduli Space はいつ存在し，いつ存在しないのか？

Moduli 問題の対象と一対一に対応する scheme が見つかったからと言って，それが fine moduli space であるとは言えない．問題と成るのは，family の同型である．ここでは fine moduli space が存在するということから導かれる必要条件を二つ考え，それから例を見る．fine moduli space が存在するならば例では特に automorphism の存在と jump phenomenon が fine moduli space が存在するための障害と成ることを見る．

3.1 Fine moduli space が存在することの必要条件.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} \to S$ を fiber of morphism で実現される family だとする．（したがって $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ は scheme である．）$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の同値関係を，scheme としての同型で定めよう．M を fine moduli space, η を moduli functor から $\underline{M}$ への自然同型だとする．

$\eta_S(\mathcal{F}) : S \to M$ は $\mathcal{F}$ の fiber を M の点に対応させる．（添字の S は以降略す．）

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & S & \xrightarrow{\eta(\mathcal{F})} & M \\ \mathcal{F}_s & \longmapsto & s & \longmapsto & m \end{array}$$

$\eta(\mathcal{G}) : S \to M$ についても同様である．したがって $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が fiber 毎に同型であれば，$\eta(\mathcal{F}) = \eta(\mathcal{G})$ となる．

それぞれの fiber が互いに同型である (i.e. ${}^\forall t, s \in S, \quad \mathcal{F}_t \cong \mathcal{F}_s$) ような family を fiberwise trivial family, 対象 X（なめらかな曲線など）を用いて $X \times S \to S$ の形に書ける family を trivial family と呼ぶ．上での議論から，fine moduli space が存在するならば，fiberwise trivial family は trivial family である (cf. [3] Remark23.1.1).

3.2 j-invariant is not a fine moduli space.

一つ例を見よう．

$S = \mathbb{A}^1_k - \{0\}$ とする．S 上の楕円曲線の family :: $\mathcal{F}$ を次で定める．

$$\mathcal{F} = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - s) \subseteq \mathbb{A}^2_k \times_k S \xrightarrow{\mathrm{pr}} S.$$

$\eta(\mathcal{F})$ を j 不変量を用いて $s \mapsto j(\mathcal{F}_s)$ で定める．j 不変量が coarse moduli であることは既に見た．計算すると分かる通り，$\eta(\mathcal{F})$ は定値写像である．したがって $\mathcal{F}$ のそれぞれの fiber は互いに同型である．一方，$\mathcal{F}' = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - 1) \times S$ について同様に $\eta(\mathcal{F}')$ を定めると，これも自明に定値写像である．しかし，$\mathcal{F} \not\cong \mathcal{F}'$ であることが示せる．よって j 不変量は fine moduli にならない．fine/coarse moduli の一意性から，楕円曲線は fine moduli を持たない．

proof of $\mathcal{F} \not\cong \mathcal{F}'$. [2] I, Ex6.2 を参考にする．我々が調べるのは次の二つの環である．それぞれ $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ である．

$$A = k[x, y, t, t^{-1}]/(y^2 - x^3 - t), \qquad B = k[x, y]/(y^2 - x^3 - 1) \otimes_k k[t, t^{-1}],$$

A は UFD であるが B は UFD でない (GCD domain でさえない)，ということを示す．

A は $k[x, y]_{y^2 - x^3}$(1 元での局所化) と同型である．$k[x, y]$ は UFD であり，irreducible element での局所化でこれは保たれる．すなわち A は UFD.

B が UFD でないことを示すために，$\bar{x} = x \bmod (y^2 - x^3 - 1)$ が not prime だが irreducible であることを示す．

$\bar{x}$ :: not prime を示すために次の等式を考える．

$$\bar{x}^3 = \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} = (\bar{y}+1) \cdot (\bar{y}-1).$$

$\bar{x}$ :: prime と仮定すると，$\bar{y}+1$ or $\bar{y}-1 \in (\bar{x})$ となる．そこで例えば

$$\bar{y}+1 = a\bar{x}$$

なる $\bar{a} \in B$ が存在するとしよう．すると $y+1-ax \in I$ が得られる．これは楕円曲線 $y^2 = x^3+1$ が $y+1-ax=0$ という曲線に含まれていることを意味する．したがって $x=0$ と楕円曲線の交点は，存在しても $(x,y)=(0,-1)$ の一つのみ，ということになる．しかし実際は $(0,-1)$ もこの楕円曲線に属すので矛盾．

$\bar{x}$ :: irreducible を示すために σ と N を準備する．$\sigma : k[x,y] \to k[x,y]$ を $y \mapsto -y$ で他の元は変化させないものとする．すると $\sigma(I) \subseteq I$ なので $\sigma : B \to B$ が誘導される．さらに $N(a) = a \cdot \sigma(a)$ で $N : B \to k[\bar{x}]$ を定める．N は積について準同型であることに注意せよ．

$\bar{x}$ が irreducible でないならば，$\bar{x} = fg \bmod I$ なる $f,g \in k[x,y]$ が存在する．$f \bmod I, g \bmod I$ はどちらも単元でない．両辺を N で写すと次のように成る．

$$(x^2 - N(f)N(g)) \bmod I = 0.$$

したがって $x^2 - N(f)N(g) = a(y^2-x^3-1)$ なる $a \in k[x,y]$ が存在する．左辺は $k[x]$ に属すから，y の次数を考えると $a=0$ が示される．また $N(f), N(g)$ の次数は 2 以上であるから，$N(f), N(g)$ のいずれかは $k^\times$ の元である．しかし $N(f) = f \cdot \sigma(f)$ (resp. $N(g)$) が単元ならば f (resp. g) も単元であり，f,g についての仮定に反する．よって $\bar{x}$ :: irreducible. ∎

したがって moduli functor は必ずしも fine moduli space を持たない．

3.3 Automorphism is an obstruction to the existence of fine moduli space.

Moduli 問題の対象が非自明な自己同型写像をもつなら，多くの場合で fine moduli space が存在し得ない．

例を二つ考える．最初の例は scheme の例ではないが，直観的である．

例 3.1
k :: field とし，$\mathbb{A}^2_k$ の原点を通る直線を，同型を無視して分類する．直線は全て同型であるから，これは一つしか無い．したがってこの問題に対する fine moduli space が存在すれば，それは一点空間である．したがって任意の scheme :: B について，B 上の family は全て trivial family と同型である．

L を $\mathbb{A}^2$ の原点を通る直線とし，その非自明な自己同型 $\sigma : L \to L$ をとる．$[0,1]$ 上の trivial fiber :: $[0,1] \times L$ を，次の同値関係で割って商空間を作る．

$$(t,Q) \sim (s,Q) \iff |t-s| = 1 \land P = \sigma(Q) \quad \text{where} \quad s,t \in [0,1], P,Q \in L.$$

例えば σ を $(x,y) \mapsto (-x,-y)$ と置くと，これは丁度メビウスの和である．そしてこれは S^1 上の family となっている．

今 S^1 上の family として，σ を使って構成したものと trivial family （斜めになった円筒）がある．これらは明らかに同型ではない．

次は [1] 2.A で挙げられている例である．2.11 の存在（と，fiber product の普遍性）に対して矛盾が生じるように構成する．構成には (two)pullback lemma を用いる．（生じる矛盾がわかりやすく述べられていないので，再構成した．）

例 3.2

ただし，automorphism が存在するにも関わらず fine moduli space が存在することもある．nLab 参照.

3.4 jump phenomenon.

coarse moduli space さえ持ち得ない moduli functor もある．

参考文献

[1] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[3] Robin Hartshorne. *Deformation Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2010 edition, 12 2009.

[4] Victoria Hoskins. Moduli problems and geometric invariant theory. 2016.

[5] 向井茂. モジュライ理論〈1〉. 岩波書店, 12 2008.