以下での $(*)$ とは，次のもの:

- integral,
- separated,
- noetherian, and
- regular in codimention one.

また，$(\dagger)$ は次のもの: X :: noetherian scheme, $\mathcal{S}$ :: graded $\mathcal{O}_X$-algebra となっている．また，$d \in \mathbb{Z}, d \geq 0$ について，$\mathcal{S}_d$ :: homogeneous part of $\mathcal{S}$ を $U \mapsto \mathcal{S}(U)_d$．$X, \mathcal{S}$ は次をすべて満たす．

- $\mathcal{S}$ :: quasi-coherent.
- $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_d$.
- $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$.
- $\mathcal{S}_1$ :: coherent $\mathcal{O}_X$-module.
- $\mathcal{S}$ :: locally generated by $\mathcal{S}_1$ as $\mathcal{O}_X$-algebra.

Ex7.1 Surjective Mophism between Invertible Sheaves is Isomorphic.

X :: locally ringed space, $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ :: invertible sheaves on X, $f : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ :: surjective mophism，とする．

■Proof 1. 任意の点 $x \in X$ をとり，$A = \mathcal{O}_{X,x}$ とおく．$f_x : \mathcal{L}_x \to \mathcal{M}_x$ は同型写像を合成することで $\phi : A \to A$ :: surjective A-morphism と同一視出来る．ϕ :: surjective より，$\phi(\alpha) = 1 \in A$ となる $\alpha \in A$ がとれる．また ϕ は A-module morphism だから，$\alpha\phi(1) = 1$．そこで $\psi : A \to A$ を $a \mapsto \alpha a$ と定義すれば，これが ϕ の逆写像になる．よって ϕ, f_x は同型．Prop1.1 から，f :: iso.

■Proof 2. Matsumura, Thm2.4 から分かる．これは NAK (or Nakayama's Lemma) からの帰結である．

注意 Ex7.1.1

$k(x)$ :: residue field と $f_x : \mathcal{L}_x \to \mathcal{M}_x$ をテンソルすると，$f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)}$ :: surjective $k(x)$-module morphism が得られる．よって $\ker(f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)}) = 0$．しかし，ここから NAK をつかって $\ker f_x = 0$ を導くことは出来ない．$k(x)$ が flat $\mathcal{O}_{X,x}$-module でなく，したがって $\ker(f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)})$ と $(\ker f_x) \otimes k(x)$ の間に同型があることが言えないからである．このことは flat $\implies$ torsion-free に気をつければすぐに分かる．同様の議論が f_x :: injective（と $\operatorname{coker} f_x$）の場合に出来ることにも気づくが，このときは $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2; 1 \mapsto 3$ という反例がある．

Ex7.2 Two Sets of Global Generators and Corresponding Morphisms.

k :: field, X :: scheme $/k$, $\mathcal{L}$ :: invertible sheaf on X, $S = \{s_0, \dots, s_m\}, T = \{t_0, \dots, t_n\}$ :: global generators of $\mathcal{L}$. とする．ここで S, T は同じ線形（部分）空間 $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ を張るとする．また $n \leq m, d = \dim_k V$ とする．

S, T からそれぞれ Thm7.1 のように定まる morphism を ϕ_S, ϕ_T とする．ϕ_S が次のように分解できる

ことを示す．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi_T"] \arrow[rrrr, bend right, "\phi_S"'] & \operatorname{im}\phi_T \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^m - L \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}^n \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

ここで π, α はそれぞれ linear projection と automorphism である．

$X \to \mathbb{P}^n$ の morphism を考えることは，$k[y_0, \ldots, y_n]$ の元 $y_{0,\ldots,n}$ の変換を考えることと同じである．これは Thm7.1 の証明を観察すれば分かる．二つの k-linear map は ϕ_S^*, ϕ_T^* はそれぞれ，$y_i \mapsto s_i (i = 0, \ldots, n)$，$y_i \mapsto t_i (i = 0, \ldots, m)$ で定まっている．したがって問題は，$t_0, \ldots, t_m$ を $s_0, \ldots, s_n$ へ変換する projection と automorphism をつくる問題，と言い換えられる．

今，次のような $(m+1) \times (n+1)$ 行列 Q が存在する．

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}.$$

S, T が V の生成系であることから $\operatorname{rank} Q = \dim V =: d$．$Q$ は基本行列をいくつもかける（あるいは基本変形を繰り返し行う）ことにより，次の形に分解できる．

$$Q = LP_dR \quad \text{where} \quad L \in PGL(m, k), R \in PGL(n, k)$$

ただし行列 P_r $(r = 1, \ldots, n+1)$ は $r \times r$-identity matrix I_r をもちいて $P_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と定義される行列である．（TODO: P_d を P_{n+1} に交換しても問題ない？）L, P_{n+1}, R が誘導する morphism をそれぞれ $\beta, \tilde{\pi}, \alpha$ とすれば，α, β は automorphism であり，$\tilde{\pi}$ は projection である．

$$\mathbb{P}^m \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^m \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^m - L \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{P}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n$$

求める写像はこの α と，$\pi = \beta \circ i \circ \tilde{\pi}$ である．また，$L = \mathcal{Z}_p(y_0, \ldots, y_n) \subseteq \mathbb{P}^m$ の次元は $m - (n+1)$ である．

Ex7.3 Morphism of $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ can be Decomposed into Common Ones.

$\phi : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^m$ を考える．$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ :: invertible sheaves の global generator をそれぞれ $\{x_0, \ldots, x_m\}, \{y_0, \ldots, y_n\}$ とする．

(a) $\operatorname{im}\phi = pt$ or $m \geq n$ and $\dim \operatorname{im}\phi = n$.

$s_i = \phi^*(x_i)$ $(i = 0, \ldots, m)$ とおくと，$s_0, \ldots, s_m$ は $\mathcal{L} := \phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$ の global generator である．$\mathcal{L}$ は $\mathbb{P}^n$ 上の invertible sheaf だから，Cor6.17 より，$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ となる $d \in \mathbb{Z}$ が存在する．Example7.8.3 同様，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ は $|d|$ 次斉次単項式で生成される．

■$m < n \implies \dim \operatorname{im}\phi = 0$.

■$m \geq n \implies \dim \operatorname{im}\phi = n$.

Ex7.4　If X Admits an Ample Invertible Sheaf, then X is Separated.

(a)　Assumption of Thm7.6 $\Longrightarrow$ X :: separated.

A :: noetherian ring, X :: scheme of finite type $/A$ とする．$\mathcal{L}$ :: ample invertible sheaf on X が存在したとする．Thm7.6 の証明（特に p.155 の第二段落）から次が分かる: 十分大きい $n > 0$ をとると，$s_1, \ldots, s_k \in \Gamma(X, \mathcal{L}^n)$ が存在し，$X_i = X_{s_i}$ [†1] は affine open cover を成す．$U_i = V^c(x_i)$ とすると，これも affine open cover．Thm7.6 において引き続いて構成される immertion $\phi : X \to \mathbb{P}^N_A$ は，（証明の最終段落から）$\phi^{-1}(U_i) = X_i$ を満たす．U_i, X_i は共に affine であるから，$\phi|_{X_i} : X_i \to U_i$ は separated (Prop4.1)．Cor4.6f より $\phi : X \to \mathbb{P}^N_A$ は separated．$\mathbb{P}^N_A \to \operatorname{Spec} A$ は projective (Example4.8.1) なので sperated．よって separated morphism の合成 $X \to \mathbb{P}^N_A \to \operatorname{Spec} A$ も separated である．

(b)　There is No Ample Invertible Sheaf on  / a field k.

k :: field, X :: affine with doubled origin $/k$ とする．より詳細に，X は $X_1 = \operatorname{Spec} k[x], X_2 = \operatorname{Spec} k[y]$ を $U_1 = X_1 - \{O_1\}, U_2 = X_2 - \{O_2\}$ で貼りあわせたものとする．ただし $O_1 \in X_1, O_2 \in X_2$ は原点である．X_i, U_i, O_i　$(i = 1, 2)$ はすべて X の部分集合とみなす．X :: noetherian integral scheme は明らか．Example 6.3.1, Cor 6.16 より，$\operatorname{Pic} X_1, \operatorname{Pic} X_2 = 0$.

まず $\operatorname{Pic} X$ を計算する．これには $k[x], k[y]$ が UFD であることを用いる．X :: integral より $\operatorname{Pic} X \cong \operatorname{CaCl} X$ (Prop6.15)．なので $\operatorname{CaCl} X$ を計算する．Example 4.0.1 にある $\mathcal{O}_X$ の定義から計算すると，K_X :: function field of X は次のように書ける．

$$K_X = \{(f, g) \in k(x) \times k(y) \mid \phi(f|_{U_1 \cap U_2}) = g|_{U_1 \cap U_2}.\}$$

ただし ϕ は $x \mapsto y$ で定まる同型である．O_1 に対応するイデアルは単項イデアル (x) であるから，f は $x^n h$ の様に書くことが出来る．この h は O_1 で零点も極も持たない元，すなわち $\mathcal{O}_{X_1, O_1} = k[x]_{(x)}$ の単元である．g についても同様であるから，結局次のように成る．

$$K_X = \{(x^n, y^n) \cdot (f, g) \mid n \in \mathbb{Z}, (f, g) \in \mathcal{O}^*_{X_1, O_1} \times \mathcal{O}^*_{X_2, O_2}, \phi(f|_{U_1 \cap U_2}) = g|_{U_1 \cap U_2}.\}$$

K^*_X の元が principal divisor だから，$\operatorname{CaCl} X \cong \{(x^n, y^n) \in k(x) \times k(y) \mid n \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}$.

[†1] X_{s_i} は $\{P \in X \mid (s_i)_P \notin \mathfrak{m}_P \mathcal{L}^n_P\}$ で定義される開集合．cf. Ex2.16.

Ex7.5 Ample and Very Ample are Inherted by Tensor Products.

Ex7.6 The Riemann-Roch Problem.

Ex7.7 Some Rational Surfaces.

Ex7.8 Sections of $\pi : ¶(\mathcal{E}) \to X \leftrightarrow$ Quotient Invertible Sheaves of $\mathcal{E}$.

Ex7.9

Ex7.10 P^n-Bundles Over a Scheme.

Ex7.11 Different Sheaves of Ideals can Give Rise to Isomorphic Blown Up Schemes.

Ex7.12

Ex7.13 * A Complete Nonprojective Variety.

Ex7.14