可測集合が可測集合に写る事

平成 29 年 7 月 7 日

定理 0.1. 集合 X 上の全単射連続写像 T と 0 でない定数 τ があって，集合 X 上の外測度 μ に対して，

$$\mu \circ T = \tau \cdot \mu$$

が成立するものとする．このとき，E が μ-可測集合ならば $T^{-1}(E)$ も μ-可測集合．特に T が同相写像ならば $T(E)$ も μ-可測集合．

(証明)．T, τ の関係と，T が全単射であることから $\tau \cdot (\mu \circ T^{-1}) = \mu \circ (T \circ T^{-1}) = \mu$ が成立する．

任意の $A \subset X$ を取る．

$$\begin{aligned}
\mu(A) &= \mu(A \cap E) && + && \mu(A \cap E^c) \\
&= \tau \cdot \mu(T^{-1}(A \cap E)) && + && \tau \cdot \mu(T^{-1}(A \cap E^c)) \\
&= \tau \cdot \mu(T^{-1}(A) \cap T^{-1}(E)) && + && \tau \cdot \mu(T^{-1}(A) \cap T^{-1}(E^c)) \\
&= \tau \cdot \mu(T^{-1}(A) \cap T^{-1}(E)) && + && \tau \cdot \mu(T^{-1}(A) \cap T^{-1}(E)^c)
\end{aligned}$$

$\mu(A) = \tau \cdot \mu \circ T^{-1}(A)$ を用いて

$$\begin{aligned}
\tau \cdot \mu \circ T^{-1}(A) &= \tau \cdot (\mu(T^{-1}(A) \cap T^{-1}(E)) + \mu(T^{-1}(A) \cap T^{-1}(E)^c)) \\
\mu(T^{-1}(A)) &= \mu(T^{-1}(A) \cap T^{-1}(E)) + \mu(T^{-1}(A) \cap T^{-1}(E)^c)
\end{aligned}$$

任意の集合 A は $T(A')$ と表現できる（T の全射性）から，

$$\mu(A') = \mu(A' \cap T^{-1}(E)) + \mu(A' \cap T^{-1}(E)^c)$$

よって $T^{-1}(E)$ は μ-可測． ∎

実際の所，定数 τ が存在するという条件は「加法準同型な全単射写像 U があって $\mu \circ T = U \circ \mu$」と書けるのだが，このような U であって更に連続なものに限ると，$U(x) = \tau x$ の形になるしか無い．

例 0.2. $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度を考えることにする．定数 c に対して $T(E) = E - c, \tau = 1$ とすればこれは定理の仮定を満たす．したがって平行移動に対して可測性は不変．

また，0 でない定数 a を取ると，$T(E) = aE$ に対して $\tau = |a|^n$ とすればこれも定理の仮定を満たすから，定数倍に対しても可測性は不変．