第 2 章
Sites and Topoi

七条彰紀

2020 年 3 月 17 日

目次

1 Motivation.

scheme, stack 等には以下のような包含関係がある．

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Algebraic Stack} \arrow[r, hook] & \text{Stack} \arrow[r, hook] & \text{Presheaf of Grupoids} \\
\text{Scheme} \arrow[r, hook] \arrow[ur, hook] & \text{Algebraic Space} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \text{Space} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \text{Presheaf of Sets} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

最終的にセミナーを通じて我々が定義したいのは algebraic stack であるが，今回はそれよりも定義が簡素な "space" を定義する．先に space の定義文を示そう．

> **定義 1.1** (Space, [Gom99] p.26)
> S :: scheme とする．Space over S (or S-space) とは，big etale site over S 上にある，集合の sheaf である．

ここに現れる "big etale site" と "big etale site 上の sheaf" を以下で定義する．さらに sheaf の射について幾つか定義をすれば，algebraic space まで定義できる．

定義だけでは space の local は性質を調べる手段がないため，次回は「高次版の sheaf の貼り合わせ」と呼べる "Descent theory" を学ぶ．

2 Sites.

2.1 Definitions.

以下で導入する Grothendieck topology は，「Sheaf を定義するのに必要な位相空間の定義を抽出し，圏論的に一般化したもの」である．X :: toplological space とし，sheaf on X の定義を見なおしてみよう．すると，sheaf on X は次に挙げるもののみを用いて定義されていると分かる．

(i) X の開部分集合と包含写像が成す圏．

(ii) 開部分集合 $U \subseteq X$ の open covering.

(iii) 同じく U の open covering :: $\{U_i\}_i$ が与えられたときの族 $\{U_i \cap U_j\}_{i,j}$

そこで次のように定義する．

> **定義 2.1** (Grothendieck Topology)
> $\mathbf{C}$ :: cateogory について，$\mathbf{C}$ 上の Grohendieck topology は任意の $X \in \mathbf{C}$ に $\mathbf{C}$ の射の集まり $\{X_i \to X\}_{i \in I}$ の集まり (collection of collections) を対応させる Cov で構成される．さらに，Cov は以下を満たすように要請される．
>
> (a) $X' \to X$ :: iso ならば $\{X' \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$.
>
> (b) $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U), V \to U \in \mathbf{C}$ について，$\{U_i \times_U V \to V\} \in \mathrm{Cov}(V)$.

(c) $\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U)$ をとり，さらに各 i について $\{V_{i,j} \to U_i\}_j \in \mathrm{Cov}(U_i)$ をとる．
この時，合成も Cov に入っている：$\{V_{i,j} \to U_i \to U\}_{i,j} \in \mathrm{Cov}(U)$.

注意 2.2
ここで「集合」ではなく「集まり」という言葉を用いたのは，これらが集合ではない可能性があるからである．この問題（圏論でもしばしば現れる）を取り扱うためには，2 つの解決策がある．1 つ目は Grothendieck の宇宙公理 U を ZFC 公理系に加えた ZFCU 公理系で議論を行うことである．もう 1 つは真のクラスを扱える NBG 公理系で議論を行うことである．

後者の方針を採用する場合は，Grothendieck topology の定義で現れた「集まりの集まり」という言葉に注意が必要である．というのも，たとえ NBG 公理系でも，真のクラスを要素に持つ真のクラスは許されていないからである．この問題を解決するには以下のように Cov を定義すれば良い（以下のように書き換えれば良いという事がわかれば十分なので，実際に以下の定義を採用することはない）：

全ての $U \in \mathbf{C}$ について $\mathrm{Cov}(U)$ は codomain が U である射のクラスである．任意の要素 $[V \to U] \in \mathrm{Cov}(U)$ についてこの要素を含む $\mathrm{Cov}(U)$ の部分クラス $\{U_i \to U\}_i \subset \mathrm{Cov}(U)$ が存在し，以下が成立する．（以下略）.

Cov の元には大抵，以下の条件が課される．

定義 2.3 ((Jointly) Surjective Family)
ある圏の射の集まり $\{U_i \to U\}_i$ について，

$$\coprod_i U_i \to U$$

が surjective である時，（同値な条件として，$\mathrm{im}(U_i \to U)$ の set-theoritic union が U に等しい時,）この集まり $\{U_i \to U\}$ を (jointly) surjective family という．

定義 2.4 (Site)
圏 $\mathbf{C}$ と $\mathbf{C}$ 上の Grothendieck topology :: Cov の組を site と呼ぶ．site に対し，その部分である圏を the underlying category と呼ぶ．しばしば Cov を略して $\mathbf{C}$ のみで site を表す．

定義 2.5 (Localized Site.)
site :: $\mathbf{C}$ と $X \in \mathbf{C}$ について，localized site :: $\mathbf{C}/X$ を以下のように定義する．

$\mathbf{C}/X$ の underlying category は slice cageory :: $\mathbf{C}/X$ である．したがって対象は $\mathbf{C}$ 内の X への射である．Grothendieck topology :: Cov は，

$$\begin{aligned}\{[U_i \to X] \to [U \to X]\}_i \in \mathrm{Cov}([U \to X]) \\ \implies \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U).\end{aligned}$$

のように定められる．

定義 2.6 (Diagrams (or Comma Site).)
Δ :: category, $\mathbf{C}$ :: site, $F\colon \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}$ :: functor とする．この時 site :: $\mathbf{C}_F$ を以下のように定める．

まず undrelying category は $(\mathrm{id}_{\mathbf{C}} \downarrow F)$ である．したがって対象は $X \to F(\delta)$ $(\delta \in \Delta)$ である．Cov は以下のように定める．

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X_i' & \xrightarrow{f_i^\flat} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\delta_i) & \xrightarrow[F(f_i)]{} & F(\delta) \end{array} \right\} \in \mathrm{Cov}([X \to F(\delta)])$$
$$\Longrightarrow f_i\colon \delta \to \delta_i :: \text{iso. and } \{f_i^\flat\colon X_i' \to X\} \in \mathrm{Cov}(X).$$

定義 2.7 (Continuous Functor.)
$\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ :: sites とする．$f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ :: functor が continuous とは，以下の 2 つが成立すること:

(i) 任意の $X \in \mathbf{C}$ と $\{U_i \to X\}_i \in \mathrm{Cov}_{\mathbf{C}}(X)$ について，
$$\{f(U_i) \to f(X)\}_i \in \mathrm{Cov}_{\mathbf{C}'}(f(X))$$
となる．

(ii) $\mathbf{C}$ の任意の射 $X_1 \to Y, X_2 \to Y$ について，fiber product :: $X_1 \times_Y X_2$ が $\mathbf{C}$ に存在するならば，
$$f(X_1 \times_Y X_2) \cong f(X_1) \times_{f(Y)} f(X_2).$$

注意 2.8
後に示すように，continuous functor はよくあるケースで category of sheaves on site の間の関手を誘導する．これは scheme の間の continuous map が category of sheaves on scheme の間の関手 (e.g. inverse image functor, direct image functor) を定めるのと同じである．

2.2 Examples.

2.2.1 Site.

例 2.9 (Classical topology.)
X :: topological space とし，$O(X)$ を以下のような圏とする．

対象 X の開集合．
射 包含射．

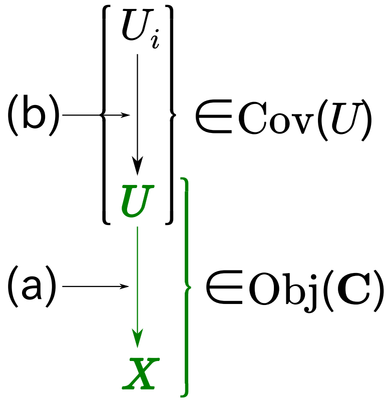
この時，$U \in O(X)$ の covering :: $\mathrm{Cov}(U)$ を，U への包含射のみから成る jointly surjective family の集合[†1]とする．

以上で定まる site :: $(O(X), \mathrm{Cov})$ は通常の topology を Grothendieck topology の枠組の中で再現して

[†1] 包含射の個数は高々 $2^{\#X}$ 以下の濃度なので，family の集まりは集合．

いる．

以下で主に用いるのは，$\mathbf{C}$ が slice category :: $\mathbf{Sch}/X$ ($X \in \mathbf{Sch}$) の部分圏であるような site である．$X \in \mathbf{Sch}$ に対して，このような site は underlying category ($\subset \mathbf{Sch}/X$) と Grothendieck topology (Cov) からなるから，以下の図の (a) $U \to X$, (b) $U_i \to U$ がどのようなものであるか定めれば定義できる．



> **定義 2.10** (Zariski/平滑/エタール/fppf/fpqc 景)
> 記号 (a), (b) を表 (1) にあるいずれかの組とする．
> 　スキーム X について，$\mathbf{Sch}/X$ の充満部分圏 $\mathbf{C}$ を次のように定める．
>
> 　<u>対象</u> (a) であるスキームの射 $U \to X$.
> 　<u>射</u> 二つの対象の間の射 $[\,U \to X\,] \to [\,U' \to X\,]$ は，X 上の射 $U \to U'$.
>
> 圏 $\mathbf{C}$ の対象 $U \xrightarrow{u} X$ ((U, u) または U と書く) に対して，$\mathrm{Cov}((U, u))$ を (b) であるスキームの射の集合 $\{U_i \to U\}_i$ であって合併的に全射であるもの全体のクラスとする．
> 　以上の圏 $\mathbf{C}$ と Cov で定まる景の名前と記号は表 (1) のとおりとする．

表 1　景の名前，記号，対象の種類，被覆の種類

名前	記号	(a)	(b)
Zariski 大景	$\mathrm{ZAR}(X)$	任意	開埋め込み射
Zariski 小景	$\mathrm{Zar}(X)$	開埋め込み射	開埋め込み射
平滑 大景	$\mathrm{SM}(X)$	任意	平滑 (smooth) 射
エタール大景	$\mathrm{ET}(X)$	任意	エタール射
エタール小景	$\mathrm{et}(X)$	エタール射	エタール射
fppf 大景	$\mathrm{FPPF}(X)$	任意	平坦かつ局所有限表示な射
fpqc 大景	$\mathrm{FPQC}(X)$	任意	平坦かつ準コンパクトな射

Grothendieck topology の定義から分かるとおり，性質 (b) が stable under base change & composition であれば，以上のテンプレートは site の定義文と成る．

注意 2.11
“fppf” は “fidèlement plate de présentation finie”（仏語）すなわち “faithfully flat and of finite presentation” の略である．flat& locally of finite presentation ならば実際にこのように成る．同様に “fpqc” は “fidèlement plat et quasi-compact”（仏語）すなわち “faithfully flat and quasi-compact” の略である．

2.2.2 Continuous Functor.

例 2.12
X, X' :: topological space について，$O(X), O(X')$ :: classical site, $f\colon X \to X'$ ::continuous map とする．この時，$f^{-1}\colon O(X') \to O(X)$ :: continuous functor.（f は必ずしも continuous functor でないことに注意.）

注意 2.13
$f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ :: functor between sites が continuous であるための条件を再掲する．

(i) 任意の $X \in \mathbf{C}$ と $\{U_i \to X\}_i \in \mathrm{Cov}_{\mathbf{C}}(X)$ について，

$$\{f(U_i) \to f(X)\}_i \in \mathrm{Cov}_{\mathbf{C}'}(f(X))$$

となる．

(ii) $\mathbf{C}$ の任意の射 $X_1 \to Y, X_2 \to Y$ について，fiber product :: $X_1 \times_Y X_2$ が $\mathbf{C}$ に存在するならば，

$$f(X_1 \times_Y X_2) \cong f(X_1) \times_{f(Y)} f(X_2).$$

例と照らし合わせると，1 つめの条件は f^{-1} が開集合を開集合に写すことに対応し，2 つめの条件は f^{-1} が $\cap$ と交換することと対応する．

例 2.14
従属関係

$$\text{open immersion} \implies \text{etale} \implies \text{fppf}$$

があるから，inclusion map :: $\mathrm{Zar}(X) \hookrightarrow \mathrm{ET}(X) \hookrightarrow \mathrm{Fppf}(X)$ はそれぞれ continuous.

例 2.15
flat morphism :: $f\colon X \to Y$ をとり，f による pullback functor を P_f とする．（TODO: 要確認.）

3 Sheaves.

3.1 Definitions.

> **定義 3.1** (Sheaf, Topos, Morphism of Topoi.)
> (i) site :: S 上の presheaf とは，functor :: $\mathcal{F}\colon S^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ のことである．
> (ii) 射影 $U \times_B V \to U$ を presheaf :: $\mathcal{F}$ で写した射を $\mathrm{res}_U^{U \times_B V}$ と書く．

(iii) presheaf on S :: $\mathcal{F}$ が sheaf であるとは，以下の図式が equalizer diagram であるということ．

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

ここで右の並行射は $\mathrm{res}^{U_i\times U_j}_{U_i}, \mathrm{res}^{U_i\times U_j}_{U_j}$ である．

(iv) Site :: S 上の，圏 $\mathbf{C}(= \mathbf{Set}\mathrm{Rings}, \mathrm{AbGrp}, \dots)$ への presheaf の圏を $\mathbf{PShv}(S, \mathbf{C})$，sheaf の圏を $\mathbf{Shv}(S, \mathbf{C})$ と書く．$\mathbf{C} = \mathbf{Set}$ の場合は略して $\mathbf{Shv}(S), \mathbf{PShv}(S)$ と書く．

(v) morphism of shaeves :: $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ とは，natural transformation のことである．

(vi) T :: category が topos であるとは，category of sheaves of sets on a site と圏同値であるということである．

(vii) T, T' :: topoi とする．morphism of topoi :: $f: T \to T'$ とは，以下の 3 つの射 (2 functor and 1 isomorphism.) からなる．

$$f_*: T \to T', \quad f^*: T' \to T, \quad \phi\colon \mathrm{Hom}_T(f^*(-), -) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{T'}(-.f_*(-)).$$

注意 3.2
上で定義した sheaf of sets と同様に，sheaf of abelian groups, sheaf of rings, ... が定義できる．これらはそれぞれ sheaf of sets の圏 :: $\mathbf{ShvC}, \mathbf{Set}$ における abelian group objects, ring objects, ... と定義される．

注意 3.3
“Topos” はギリシャ語で「場 (place)」を意味する．ギリシャ語なので複数形は “topoi”.

X :: scheme について，X に関する topos を $X_{et}, X_{ET}, \dots$ などと書く．著者（例えば [Sta19]）によってはこれらの記号を $\mathbf{Sch}/X$ を underlying catgory とする site に用いる．しかし “Grothendieck’s insight is that the basic object of study is the topos, not the site.” (M.Olsson “Stacks”) というということから，topos に site より簡単な記号を与えるのは理解できることである．

定義 3.4 (Direct Image Functor.)
$f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を functor of sites とする．この時，$F \in \mathbf{PShvC})$ について

$$f_*F(-) := F(f(-))$$

とおくと，$f_*F \in \mathbf{PShvC}')$ が得られる．f :: continuous functor ならば，$\mathcal{F} \in \mathbf{ShvC})$ に対し同様にして $f_*\mathcal{F} \in \mathbf{ShvC}')$ が得られる．

定義 3.5 (Ringed Topos.)

(i) T :: topos と T の ring object :: Λ を合わせて ringed topos と呼ぶ.

(ii) morphism of ringed topoi :: $(f, f^\#)\colon (T, \Lambda) \to (T', \Lambda')$ は，
- morphism of topoi :: $f = (f_*, f^*, \phi)\colon T \to T'$ と，
- morphism of ring in T' :: $f^\#\colon \Lambda' \to f_*\Lambda$

の組である．

3.2 Examples.

例 3.6
X :: scheme と，$\mathbf{Sch}/X$ の部分圏を underlying category とする site :: $\mathbf{C}$(e.g. small/big Zariski site) について，$\underline{X}(-) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$ で functor :: $\underline{X} \colon \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ を定める．この時，$\underline{X}$ :: presheaf on $\mathbf{C}$. 特に，後に示すとおり，fppf toplogy より荒い位相 (e.g. Zariski, smooth, etale, ...) で sheaf となる．

例 3.7 (Constant (Pre)sheaf.)
$\mathbf{C}$ :: site とし，以下のように presheaf on $\mathbf{C}$ :: $\mathcal{F}$ を定める．

$$\mathcal{F} \colon \emptyset \neq U \mapsto \mathbb{R}, \qquad \emptyset \mapsto \{0\}.$$

constant presheaf on a scheme が sheaf でないのと全く同じ理由で，この $\mathcal{F}$ は sheaf でない．具体的には $U \in \mathbf{C}$ が連結でない scheme ならば，$U_1 \sqcup U_2 = U$ なる covering を取ると，定義にある diagram が equalizer diagram にならない．

例 3.8
S :: scheme について，$\mathbf{Sch}/S$ 上の presheaf を

$$\mathcal{O}_S \colon [X \to S] \mapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

で定める．この sheaf は "structure sheaf of S" と呼ばれ，$\underline{\mathbb{A}^1_S}$ と同型．

3.3 Propositions.

定理 3.9
$\mathbf{C}$ :: site とする．忘却関手

$$Fgt \colon \mathbf{Shv}(\mathbf{C}) \to \mathbf{PShv}(\mathbf{C}).$$

は left adjoint functor :: *Shff* を持つ．

注意 3.10
以下で述べる *Shff* の構成は "plus construction" と呼ばれる．Kay Werndli "Sheaves From Scratch" §3.5 では etale bundle という物を用いた構成をしている．

証明のために幾つか定義しておく．

定義 3.11 ([Sta19], Tag 00W1)
$\mathcal{F} \in \mathbf{PShvC})$ と，$X \in \mathbf{C}$ の cover :: $\mathcal{U} = \{U_i \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$ に対し，

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{equalizer of } \left[\ \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{F}(U_i \times_X U_j)\ \right]$$

ここで二つの並行射はそれぞれ $\mathrm{res}_{U_i}^{U_i\times U_j}, \mathrm{res}_{U_j}^{U_i\times U_j}$ である．すなわち，ここにある並行射は sheaf の定義にあるものである．この diagram は圏 **Set** の中のものなので，**index ::** I **が集合ならば**この equalizer は常に存在する．(H^0 という記号は，これが $\mathcal{F}$ の 0 次 Čech cohomology であることによる．)

直ちに分かるとおり，$\mathrm{Cov}(X)$ は細分を射として圏を成し，$H^0(-,\mathcal{F})$ は圏 $\mathrm{Cov}(X)$ から **Set** への反変関手である．$\mathcal{F}^+$ は

$$\mathcal{F}^+(X) = \operatorname*{colim}_{\mathcal{U}\in\mathrm{Cov}(X)} H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) = \mathrm{colim}(\mathrm{Cov}(X) \to^{H^0(-,\mathcal{F})} \mathbf{Set}.$$

と定義される[a]．任意の $\mathcal{U}\in\mathrm{Cov}(X)$ について，常に標準的全射 $\iota_{\mathcal{U}}\colon H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \mathcal{F}^+(X)$ が存在する．

$H^0(\{\mathrm{id}_X\colon X\to X\},\mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$ であり，しかも任意の cover of X は id_X の細分であるから，X 毎に標準的な射 $\theta\colon \mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}^+(X)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{F}(X) \arrow[r, dashed, "\theta"] \arrow[d] \arrow[dr, bend left] & \mathcal{F}^+(X) \\
\mathcal{F}(X) & \in & \Big\{H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[ur, bend right] & H^0(\mathcal{U}',\mathcal{F})\Big\}_{\mathcal{U},\mathcal{U}'} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

[a] 定義から，$s,t\in\mathcal{F}^+(X)$ が等しいとは，以下が成り立つこと：s,t へそれぞれ写る $(\tilde{s}_U)_{U\in\mathcal{U}} \in H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}), (\tilde{t}_V)_{V\in\mathcal{V}} \in H^0(\mathcal{V},\mathcal{F})$ が存在し，$\mathcal{U},\mathcal{V}$ の共通のある細分 $\mathcal{W}$ において

$$(\tilde{s}_U|_W)_{\mathcal{W}\ni W\subseteq U\in\mathcal{U}} = (\tilde{t}_V|_W)_{\mathcal{W}\ni W\subseteq V\in\mathcal{V}}$$

となる．

定義 3.12

presheaf :: $\mathcal{P}\in\mathbf{PShvC}$) は以下を満たす時 separated であるという．

$$^\forall X\in\mathbf{C},\ \ ^\forall\{U_i\to X\}_i\in\mathrm{Cov}(X),\ \ \mathcal{P}(X)\to\prod_{i\in I}\mathcal{P}(U_i)\ ::\ \mathrm{inj}.$$

補題 3.13 (A)

site :: $\mathbf{C}$, presheaf :: $\mathcal{F}\in\mathbf{PShvC}$) を考える．任意の $X\in\mathbf{C},\mathcal{U}\in\mathrm{Cov}(X), U_0\in\mathcal{U}$ について，以下の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^+(X) \arrow[r, "\mathrm{res}_X^{U_0}"] & \mathcal{F}^+(U_0) \\
H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[u, "\iota_{\mathcal{U}}"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_{U_0}"'] \arrow[d, phantom, "\rotatebox{90}{$\subseteq$}"] & \mathcal{F}(U_0) \arrow[u, "\theta"'] \\
\prod_{U\in\mathcal{U}}\mathcal{F}(U) &
\end{tikzcd}$$

(証明). 適当に $(\tilde{s}_U)_{U\in\mathcal{U}} \in H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ をとり，$s = \iota_{\mathcal{U}}\big((\tilde{s}_U)_{U\in\mathcal{U}}\big) \in \mathcal{F}^+(X)$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, mapsto, "\mathrm{res}^{U_0}_X"] & s|_{U_0} \\
(\tilde{s}_U)_{U\in\mathcal{U}} \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto, "\prod \mathrm{res}^{U\times U_0}_U"] \arrow[dr, mapsto, "\mathrm{pr}_{U_0}"'] & (\tilde{s}_U|_{U\times U_0})_{U\in\mathcal{U}} \arrow[u, mapsto] \\
 & \tilde{s}_{U_0} \arrow[u, mapsto, "\prod \mathrm{res}^{U\times U_0}_{U_0}"'] \arrow[uu, mapsto, bend right=60]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^+(U) \arrow[r] & \mathcal{F}^+(U_0) \\
H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[dr] & H^0(\mathcal{U}\times U_0,\mathcal{F}) \arrow[u] \\
 & \mathcal{F}(U_0) \arrow[u] \arrow[uu, bend right=60]
\end{tikzcd}
$$

どちらも右に有る大きく曲がった射は θ である．

$(\tilde{s}_U)_{U\in\mathcal{U}}$ から $(\tilde{s}_U|_{U\times U_0})_{U\in\mathcal{U}}$ への 2 本の射が一致するのは，$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ の定義から従う

$$\tilde{s}_U|_{U\times U_0} = \tilde{s}_{U_0}|_{U\times U_0}$$

が理由である． ■

補題 3.14 (B)
任意の $X \in \mathbf{C}$ と $\mathcal{U},\mathcal{V} \in \mathrm{Cov}(X)$ に対し，$\mathcal{U},\mathcal{V}$ の共通の細分が存在する．

(証明). 具体的に

$$\mathcal{U}\times\mathcal{V} = \{U\times V \to U \to X \mid U \in \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{V}\} = \{U\times V \to V \to X \mid U \in \mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{V}\}$$

と取れば良い． ■

補題 3.15
site :: $\mathbf{C}$, presheaf :: $\mathcal{F} \in \mathbf{PShvC}$) について以下が成り立つ．

(a) $\mathcal{F}^+$ :: separated.

(b) $\mathcal{F}^+$ :: sheaf if $\mathcal{F}$ :: separated.

(c) $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ :: iso if $\mathcal{F}$ :: sheaf.

(d) $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ :: universal,

(証明).
■**$\mathcal{F}^+$ :: separated.** $X \in \mathbf{C}$ をとり，$s,t \in \mathcal{F}^+(X)$ をとる．ある cover of X :: $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(X)$ について

$${}^\forall U \in \mathcal{U},\quad s|_U = t|_U$$

が成り立つと仮定して $s = t$ を示す．

まず，$\iota_{\mathcal{U}'}\big((\tilde{s}_{U'})_{U'\in\mathcal{U}'}\big) = s$ となる様に $\mathcal{U}' \in \mathrm{Cov}(X)$ と $(\tilde{s}_{U'}) \in H^0(\mathcal{U}',\mathcal{F})$ をとる．$\mathcal{U}'$ を必要に応じて更に細かくとれば，t についても同様の $(\tilde{t}_{U'}) \in H^0(\mathcal{U}',\mathcal{F})$ が存在するように出来る．さらに，$\mathcal{U}'$ を $\mathcal{U}$ の細分とする．

この時，補題 A と $\mathcal{U}'$ が $\mathcal{U}$ の細分であることと仮定から

$$s|_{U'} = \theta(\tilde{s}_{U'}) = \theta(\tilde{t}_{U'}) = s|_{U'}\ (\in \mathcal{F}^+(U')).$$

したがって $\mathcal{F}^+(U')$ の定義から，各 U' について以下のような条件を満たす $\mathcal{V}_{U'} \in \mathcal{V}(U')$ が存在する: $(\tilde{s}'_V)_{V\in\mathcal{V}_{U'}}, (\tilde{s}'_V)_{V\in\mathcal{V}_{U'}} \in H^0(\mathcal{V}_{U'},\mathcal{F})$ であって

$$\iota\big((\tilde{s}'_V)_{V\in\mathcal{V}_{U'}}\big) = s|_{U'},\quad \iota\big((\tilde{t}'_V)_{V\in\mathcal{V}_{U'}}\big) = t|_{U'}$$

となるならば $(\tilde{s}'_V)_{V\in\mathcal{V}_{U'}} = (\tilde{t}'_V)_{V\in\mathcal{V}_{U'}}$ となる．これら $\mathcal{V}_{U'}$ 達を束ねて $\mathcal{U}'$ の細分 $\mathcal{V} = \{V \to U' \to U \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$ を得る．$(\tilde{s}_{U'}), (\tilde{t}_{U'})$ も細分して

$$\tilde{s} = (\tilde{s}_{U'}|_V)_{\mathcal{V}\ni V\subseteq U'\in\mathcal{U}'},\ \tilde{t} = (\tilde{t}_{U'}|_V)_{\mathcal{V}\ni V\subseteq U'\in\mathcal{U}'} \in H^0(\mathcal{U}^2,\mathcal{F})$$

を得る．

以上の議論から，各 U' について

$$^\forall U' \in \mathcal{U}',\ ^\forall V \in \mathcal{V},\ V \subseteq U' \implies \tilde{s}'_V = \tilde{t}'_V \in H^0(\mathcal{V},\mathcal{F}).$$

$\mathcal{V}$ は $\mathcal{U}'$ の細分だから，これは結局 $\tilde{s} = \tilde{t}$ ということである．さらに，$\tilde{s}, \tilde{t}$ は $(\tilde{s}_{U'})_{U'\in\mathcal{U}'}, (\tilde{t}_{U'})_{U'\in\mathcal{U}'}$ の細分[†2]であり，したがって $\iota_{\mathcal{V}}(\tilde{s}) = s, \iota_{\mathcal{V}}(\tilde{t}) = t$．以上より，$s = t$.

■$\mathcal{F}^+$ **:: sheaf if** $\mathcal{F}$ **:: separated.** $\mathcal{F}$ :: separated 故に $\mathcal{F}(X) \to H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ :: inj なので θ :: inj.

cover of X :: $\mathcal{U} = \{U_i \to X\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(X)$ と，以下を満たす元 $(s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I}\mathcal{F}^+(U_i)$ をとる:

$$^\forall i, i' \in I,\quad s_i|_{U_i\times U_{i'}} = s_{i'}|_{U_i\times U_{i'}} \tag{$*$}$$

すると補題 A より，

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}) = s_i|_{U_{i,j}}$$

となる $\{U_{i,j} \to U_i\} \in \mathrm{Cov}(U_i)$ と $\tilde{s}_{i,j} \in \mathcal{F}(U_{i,j})$ がとれる．各被覆の包含関係は以下の通り．

$$\begin{tikzcd}
U_{i,j}\times_X U_{i',j'} \arrow[r] \arrow[dr] & U_{i,j} \arrow[r] & U_i \arrow[r] & X \\
& U_i \times_X U_j \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$(*)$ から，

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}}) = s_i|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}} = s_{i'}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}} = \theta(\tilde{s}_{i',j'}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}}).$$

θ :: inj より，$\tilde{s}_{i,j}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}} = \tilde{s}_{i',j'}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}}$．したがって $(\tilde{s}_{i,j}) \in H^0(\{U_{i,j} \to U\},\mathcal{F})$ であり，ここから $s \in \mathcal{F}^+(X)$ が得られる．最後に，各 i について

$$^\forall j,\quad \theta(s_{i,j}) = s|_{U_{i,j}} = (s|_{U_i})|_{U_{i,j}} = s_i|_{U_{i,j}}$$

なので，$\mathcal{F}$ :: separated より，$s|_{U_i} = s_i$.

■$\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ **:: iso if** $\mathcal{F}$ **:: sheaf.** $\mathcal{F}$ :: sheaf であるとき，定義から任意の $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(X)$ について $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X)$．なので θ :: iso.

[†2] 被覆の細分に合わせた呼び方である．多分，$H^0(-,\mathcal{F})$ の元に用いるのは独自の用法.

■$\theta\colon \mathcal{F}\to\mathcal{F}^+$ **:: universal.** $\mathit{Shff}(-)=((-)^+)^+$ とすると，これが sheafification functor となる．その UMP を見よう．$\mathcal{F}\in\mathbf{PShvC}),\mathcal{G}\in\mathbf{ShvC})$ とする．$\theta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{Shv}(X)}\to\mathit{Shff}$ の naturality から，次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathit{Shff}\mathcal{F} \arrow[d] \\
\mathcal{G} \arrow[r, "\sim"] & \mathit{Shff}\mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

$\theta_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{G}\to\mathit{Shff}\mathcal{G}$ :: iso だから，$\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ から $\mathit{Shff}\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ が得られた．次に，以下で示す可換図式 (1) が与えられたとしよう．全体を Shff で写し，$\mathit{Shff}|_{\mathbf{Shv}(X)}\cong\mathrm{id}_{\mathbf{Shv}(X)}$ を用いて可換図式 (2) が得られる．

$$(1)\quad\begin{tikzcd}
\mathit{Shff}\mathcal{F} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{G} \\
\mathcal{F} \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{F}}"] \arrow[ur, "\phi"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
(2)\quad\begin{tikzcd}
\mathit{Shff}\mathcal{F} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{G} \\
\mathit{Shff}\mathcal{F} \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{F}}"] \arrow[ur, "\mathit{Shff}\phi"'] &
\end{tikzcd}$$

したがって $f=g$．以上で existence & uniqueness が示せた． ■

proof of Thm(3.9). 私のノート[†3] の Ex1.12 で θ の UMP(universal map property, [Awo10]) から left adjointness を証明している． ■

命題 3.16
topos has small limits and small cocomplete.

(証明)．前半は small product と equalizer を構成すればよい．後半は $\mathit{Shff}\colon \mathbf{PShvC})\to\mathbf{ShvCat}C)$ が left adjoint functor 故に colimit と交換することを用いれば良い． ■

以下の 2 つはセミナー内で将来証明を扱う．

定理 3.17 ([Ols16] 4.1.2)
$X\to Y$ :: morphism of schemes とする．representable sheaf :: $\underline{X}$ は FPPF(Y) 上の sheaf である．したがって fppf topology より荒い位相を持つ site，特に big etale site :: ET(Y) でも sheaf である．

命題 3.18
任意の presheaf は colimit of representable sheaves として表現できる

(証明)．証明は（各点）左 Kan 拡張を用いて，

$$\mathcal{P}=(\mathrm{Lan}_y y)(\mathcal{P})=\mathrm{colim}(y{\downarrow}\mathcal{P}\to^{\pi_1}\mathbf{C}\to^{y}\mathbf{PShvC})).$$

ここで $y\colon \mathbf{C}\to\mathbf{PShvC})$ は米田埋め込みである．（[Awo10] Prop8.10 でも同じ命題が証明されている．） ■

[†3] [Har97] ch.I sec.1 の演習問題への解答: `https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section1_ex.pdf`

注意 3.19

Kan 拡張についての資料をメモしておく．alg-d 氏の公開しているノートが日本語で読める上丁寧で，おすすめ．英語で書かれた Web にある資料では，Jan Pavlík “Kan Extensions in Context of Concreteness” [†4]もある．

以下はセミナー内でこれ以上現れないが，Topos theory の重要な定理である．

> **定理 3.20** (Giraud’s theorem)
> category :: $\mathbf{T}$ について，$\mathbf{T}$ が topos であることと $\mathbf{T}$ が以下のような圏であることは同値.
>
> (G1) a locally small category with a small generating set,
>
> (G2) with all finite limits,
>
> (G3) with all small coproducts, which are disjoint, and pullback-stable,
>
> (G4) where all congruences have effective quotient objects, which are also pullback-stable.
>
> 参考: `https://ncatlab.org/nlab/show/Grothendieck+topos#Giraud`.

4 Points and Stalks.

以下は small/big etale site のみで使われるものである.

> **定義 4.1** (Geometric Point, Etale Neighborhood, [Ols16] 1.3.15.)
>
> (i) X :: scheme に対し，k :: separabely closed field を用いて $\bar{x}\colon \operatorname{Spec} k \to X$ と表される射を geometric point と呼ぶ.
>
> (ii) geometric point :: $\bar{x}\colon \operatorname{Spec} k \to X$ について，$\bar{x}$ の etale neighborhood とは $U \to X$ が etale であるような以下の可換図式のことである.
>
> $$\begin{tikzcd} & U \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[ur] \arrow[r, "\bar{x}"'] & X \end{tikzcd}$$
>
> (iii) geometric point :: $\bar{x}\colon \operatorname{Spec} k \to X$ について，$\bar{x}$ の 2 つの etale neighborhood :: U_1, U_2 を考える．この時，U_1 と U_2 の間の射とは，以下の図式を可換にする morphism of schemes :: $\eta\colon U_1 \to U_2$ のことである.

注意 4.2

geometric point の定義に separabely closed field でなく algebraically closed field を用いることもある.

[†4] `http://arxiv.org/abs/1104.3542v1`

注意 4.3
より一般的な point of site の定義が存在する（[Sta19] Tag 04JU）．これは etale か否かに依らず採用できる．しかしこの一般的な定義は複雑であるし，我々は small/big etale site しか扱わないので，我々は以上の定義のみ用いる．

定義 4.4 (Stalk, [Ols16] 1.3.15.)
X :: scheme, $\mathcal{F} \in \mathrm{et}(X)$ あるいは $\mathcal{F} \in \mathrm{ET}(X)$ とする．さらに $\bar{x}\colon \operatorname{Spec} k \to X$ :: geometric point とする．$\bar{x}$ に対して $\bar{x}$ の etale neighborhood が成す圏を $I_{\bar{x}}$ とする，

(i) $I_{\bar{x}}$ を用いて stalk of $\mathcal{F}$ at $\bar{x}$ を

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} := \varinjlim_{U \in I_{\bar{x}}} \mathcal{F}(U)$$

と定義する．

(ii) $U \in I_{\bar{x}}$ について，$\mathcal{F}(U)$ から $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ への標準的射がある．この射による $s \in \mathcal{F}(U)$ の像を $s_{\bar{x}}$ と表し，germ of s at $\bar{x}$ と呼ぶ．

5 Morphism of Shaves.

5.1 Definitions.

定義 5.1 (Injective, Surjective)
（同値な条件を列挙したいので，命題 (5.3, 5.4) を参照せよ．）

5.2 Examples.

（良い例を見つけていない．）

5.3 Propositions.

定義 5.2 (Kernel, Image.)
（$\operatorname{im}\phi$ の categorical な定義は `https://www.wikiwand.com/en/Image_(category_theory)` 等にもある．）

命題 5.3
site :: $\mathbf{C}$ 上の sheaf of sets :: $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の間の morphism $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ をとる．ϕ について以下の 3 つは同値．

(i) ${}^{\forall}U \in \mathbf{C},\quad \phi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ :: inj,

(ii) $^\forall x$ :: geometric point， $\phi_x \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ :: inj,

(iii) ϕ :: mono.

この同値な条件を満たす射 ϕ は injective であるという．

(証明)．morphism between sheaves on a scheme の場合と全く同じである． ∎

命題 5.4
$\mathbf{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前の命題と同様にとる．ϕ について以下の 4 つは同値．

(i) $^\forall U \in \mathbf{C}$， $^\forall s \in \mathcal{G}(U)$， $^\exists\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$， $^\exists t_i \in \mathcal{F}(U_i)$， $\phi_{U_i}(t_i) = s|_{U_i}$.

(ii) $^\forall x$ :: geometric point， $\phi_x \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ :: surj,

(iii) ϕ :: epi.

この同値な条件を満たす射 ϕ は surjective であるという．

(証明)．こちらも，morphism between sheaves on a scheme の場合と全く同じである．一つだけ証明しよう．

■ϕ :: surj $\implies$ ϕ :: epi. 以下の図式を考える．

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} \mathcal{H}$$

さらに，$\alpha \circ \phi = \beta \circ \phi$ であると仮定する．示したいのは $\alpha = \beta$ である．したがって任意の $U \in \mathbf{C}$ 上の section :: $t \in \mathcal{G}(U)$ について $\alpha_U(t) = \beta_U(t)$ を示せば良い．仮定 ϕ :: surj より，t に対し，以下を満たす $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ と $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ がとれる．

$$\phi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i).$$

ここで $t|_{U_i}$ は射 $\mathcal{G}(U_i \to U) \colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(U_i)$ による t の像である．仮定より，

$$\alpha_{U_i} \circ \phi_{U_i}(s_i) = \alpha_{U_i}(t|_{U_i}) = \beta_{U_i}(t|_{U_i}) = \beta_{U_i} \circ \phi_{U_i}(s_i).$$

したがって $(\alpha_U(t))|_{U_i} = (\beta_U(t))|_{U_i}$ を得る．$\mathcal{H}$ :: sheaf，特に $\mathcal{H}$ :: separated presheaf なので $\alpha_U(t) = \beta_U(t)$. ∎

命題 5.5
$\mathbf{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前の命題と同様にとる．ϕ :: iso(=inj+surj) と ϕ :: epi+mono は同値．

(証明)．inj $\iff$ mono, surj $\iff$ epi は上のとおりなので，これらを単に合わせただけである． ∎

6 Topoi.

6.1 Definitions.

定義を 4 つ再掲する．

定義 6.1 (Topos, Morphism of Topoi.)

(i) T :: category が topos であるとは，category of sheaves of sets on a site と圏同値であるということである．なお，topos の複数形は topoi である．これは topos がギリシャ語由来だからである．意味は「場所」である．

(ii) T, T' :: topoi とする．morphism of topoi :: $f\colon T \to T'$ とは，以下の 3 つの射 (2 functor and 1 isomorphism.) からなる．

$$f_*\colon T \to T', \quad f^*\colon T' \to T, \quad \phi\colon \mathrm{Hom}_T(f^*(-), -) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{T'}(-.f_*(-)).$$

定義 6.2 (pullback functor, [Sta19] 00WU, 00X0)
$f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を functor of sites とする．この時，$F \in \mathbf{PShvC}')$ について

$$f_*F(-) := F(f(-))$$

とおくと，$f_*F \in \mathbf{PShvC})$ が得られる．f :: continuous functor ならば，$\mathcal{F} \in \mathbf{ShvC}')$ に対し同様にして $f_*\mathcal{F} \in \mathbf{ShvC})$ が得られる．

注意 6.3
[Sta19] 00WU では $F \in \mathbf{PShv}(\mathbf{C}')$ については $f^pF = F(f(-))$，$\mathcal{F} \in \mathbf{Shv}(\mathbf{C}')$ については $f^s\mathcal{F} = \mathcal{F}(f(-))$ と記号を変えている．そして f_* は別の記法として 00X0 で導入されている．

これを用いた別の stalk の定義の仕方がある．

定義 6.4 (Stalk, another definition)
1 点からなる空間には一意に位相が入る．そこで一点空間上の sheaf が成す圏を pt と書く．

(i) point of topos $\mathbf{T}$ とは，morphism of topoi $x\colon pt \to \mathbf{T}$ のことである．

(ii) $\mathcal{F} \in \mathbf{T}$ と point :: $x\colon pt \to \mathbf{T}$ について，$\mathcal{F}_x := x^*\mathcal{F}$ を stalk of $\mathcal{F}$ at x と呼ぶ．

(iii) morphism of sheaves :: $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が isomorphism であることと $x^*f\colon x^*\mathcal{F} \to x^*\mathcal{G}$ が isomorphism であることが同値（特に x^*f :: iso ならば f :: iso）であるとき，$\mathbf{T}$ :: having enough points という．

6.2 Propositions.

命題 6.5
$\mathbf{C}, \mathbf{C}$ :: site とする．$\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ は small category であると仮定する．

(i) $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を functor of sites とする．この時，functor :: $f_*\colon \mathbf{PShvC}) \to \mathbf{PShvC}')$ は left adjoint functor を持つ．

(ii) $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を continuous functor とする．この時，functor :: $f_*\colon \mathbf{ShvC}) \to \mathbf{ShvC}')$ は left adjoint functor を持つ．

(証明). (ii) は (i) から従う．実際，$f_*\colon \mathbf{PShvC}) \to \mathbf{PShvC}')$ の left adjoint functor を f^p とすると，$f^* = \mathit{Shff}\, f^p$ と置けばこれが $f_*\colon \mathbf{ShvC}) \to \mathbf{ShvC}')$ の left adjoint functor となる．証明は Shff :: left adjoint を用いて直接行えば良い．なので (i) のみ示す．

$f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ と $\mathcal{F} \in \mathbf{PShvC})$ について，$f_*\mathcal{F}$ は Kan 拡張の言葉（記号は [Mac10] のもの）を用いて $(f^{\mathrm{op}})^{-1}\mathcal{F}$ と書ける．ここで $f^{\mathrm{op}}\colon \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}'^{\mathrm{op}}$ は射の反転で得られる関手である．したがって，f_* の左随伴は左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_{f^{\mathrm{op}}}$ である．各点左 Kan 拡張を計算すると，

$$(\mathrm{Lan}_f{}^{\mathrm{op}}\mathcal{F})(U) = \mathrm{colim}\left(U{\downarrow}f^{\mathrm{op}} = f^{\mathrm{op}}{\downarrow}U \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Set} \right).$$

ここで $f^{\mathrm{op}}{\downarrow}U$ は Comma 圏で，π_1 は射影 $[f(V) \to U] \mapsto V$ である．$f^{\mathrm{op}}{\downarrow}U$ は $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ の部分圏だから，特にこれは small colimit. $\mathbf{Set}$ :: cocomplete なのでこの colimit は存在する． ∎

系 6.6
f_* は limit と交換し，f^* は colimit と交換する．

注意 6.7
実際に small となる有用な site となると，おそらく殆ど無い．実際，$\mathrm{ET}(X), \mathrm{et}(X)$ は large である．しかし $\mathrm{et}(X)$ :: essentially small (i.e. equivalent to small category) なので，適当に $\mathrm{et}(X)$ の部分圏を取って，その上の category of presheaves が一致するように出来るかも知れない．なお，$\mathbf{Sch}/X$ は essentially small でさえ無い．

しかし，small でないと我々の議論は立ち行かなくなる．なので technical ではあるが，Grothendieck 宇宙の存在を仮定する（宇宙公理を仮定することと同値）などして任意の圏を small とする．

参考文献

[Awo10] Steve Awodey. *Category Theory*. 2nd ed. Oxford Logic Guides. Oxford University Press, U.S.A., Aug. 2010.

[Gom99] T. Gomez. “Algebraic Stacks”. In: (Nov. 25, 1999). arXiv: `math/9911199`. URL: `http://arxiv.org/abs/math/9911199` (visited on 12/09/2019).

[Har97] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. 1st ed. 1977. Corr. 8th printing 1997. Graduate Texts in Mathematics 52. Springer, Apr. 1997.

[Mac10] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. 2nd ed. 1978. Softcover reprint of the original 2nd ed. 1978. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 2010.

[Ols16] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks*. American Mathematical Society Colloquium Publications 62. Amer Mathematical Society, Apr. 2016. ISBN: 978-1-4704-2798-6. URL: `https://doi.org/10.1365/s13291-017-0172-7`.

[Sta19] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. 2019. URL: https://stacks.math.columbia.edu.