Ex2.1 $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \approx (\operatorname{Spec} A_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f})$

A :: ring, $X = \operatorname{Spec} A$, $f \in A$ とし，$D(f) = (V((f)))^c$ とする．$S = \{1, f, f^2, \dots\}$ とし，以下のように写像を定める．

$$\begin{array}{cccc} \phi: & D(f) & \to & \operatorname{Spec} A_f \\ & \mathfrak{p} & \mapsto & S^{-1}\mathfrak{p} \\ & \mathfrak{q} \cap A & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

$\mathfrak{p}$ は S と共通部分を持たない素イデアルだから，Ati-Mac Prop3.11 より，ϕ は全単射．

C :: open in $D(f)$ とする．この時，

$$C = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{p}, (f) \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

となるイデアル $\mathfrak{I} \subset A$ が存在する．Ati-Mac Prop3.3 より，ϕ は単射を保つから，$\phi(C)$ も closed．逆に D :: open in $\operatorname{Spec} A_f$ をとる．再び Ati-Mac Prop3.11 より，$\operatorname{Spec} A_f$ の任意の元は拡大イデアルだから，

$$D = \{\phi(\mathfrak{p}') \in \operatorname{Spec} A_f \mid \phi(\mathfrak{I}') \subseteq \phi(\mathfrak{p}'), \phi(f) \not\subseteq \phi(\mathfrak{p}')\}$$

と書ける．つまり，$D = \phi(V(\mathfrak{I}'))$．$\phi$ は全単射なので $\phi^{-1}(D) = V(\mathfrak{I}')$ となり，これは closed．以上より ϕ が同相写像であることがわかった．

Prop2.3 と同様に locally ringed space の射を構成しておく．これは

$$f : \mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p}), \quad f^{\#} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f}(-) \mapsto \mathcal{O}_X|_{D(f)}(\phi(-))$$

で定義される．

Ex2.2 IF X :: scheme, and U :: open in X, then $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ :: scheme.

X は scheme だから，開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在し，$(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda})$ は affine scheme となる．すなわち，R_λ :: ring が存在して

$$(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda}) \approx (\operatorname{Spec} R_\lambda, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_\lambda})$$

と書ける．

$V_\lambda = U \cap U_\lambda$ とすると，$\{V_\lambda\}$ は U の開被覆である．そして各 $V_\lambda \subseteq U_\lambda$ は affine scheme の開集合．教科書 pp.70-71 から，affine scheme の open base は $D(f)$ $(f \in R_\lambda)$ の形の開集合全体である．したがって，各 V_λ について，以下のような条件を満たす R_λ の部分集合 F_λ が取れる．

$$V_\lambda = \bigcup_{f \in F_\lambda} D(f).$$

まとめると，

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{f \in F_\lambda} D(f).$$

$f \in R_\lambda$ であるとき，$D(f) \subseteq U_\lambda = \operatorname{Spec} R_\lambda$ と Ex2.1 より $(D(f), \mathcal{O}_{U_\lambda}|_{D(f)})$ は affine．よって U は affine scheme で被覆される．（$\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U$ に注意．）

Ex2.3 Reduced Schemes.

scheme $(X, \mathcal{O}_X)$ が reduced とは，任意の開集合 $U \subseteq X$ について $\mathcal{O}_X(U)$ がベキ零元を持たない，すなわち $\mathcal{O}_X(U)$ が reduced ring である，ということ．$(X, \mathcal{O}_X)$ の reduced scheme $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ を，presheaf $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)/\operatorname{Nil}(\mathcal{O}_X(U))$ の sheafification とする．この X から得られた reduced scheme を X_{red} と書く．

(a) $(X, \mathcal{O}_X)$ :: reduced $\iff$ ${}^\forall P \in X,\quad \mathcal{O}_{X,P}$ :: reduced.

両者の対偶を示す．

■($\Longleftarrow$) U :: open in $X, s \in \mathcal{O}_X(U), s \neq 0$ とする．s が nilpotent であったと仮定すると，$s^n = 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する．$s \neq 0$ から，ある点 $P \in U$ においては $s(P) \neq 0$．しかし $s^n(P) = 0 = (s(P))^n$ なので，$s(P) \in \mathcal{O}_{X,P}$ は nilpotent.

■($\Longrightarrow$). ある点 P において，$a/f \in \mathcal{O}_{X,P} \cong A_{\mathfrak{p}_P}$ が nilpotent であったとする．この時，P の開近傍 $D(f)$ 上で定義される定値写像 $c(*) = a/f$ が取れる．明らかにこの写像は $\mathcal{O}_X(D(f))$ の元で，しかも nilpotent.

(b) $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathsf{red}})$ :: scheme.

$(X, \mathcal{O}_X)$ が affine scheme だと仮定して証明する．調べる必要があるのは，$(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}$ は sheaf of ring on $\operatorname{Spec} A$ であること，すなわち以下が成り立つことである．

$${}^\forall U :: \text{open in } X,\quad {}^\forall s \in (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}(U),\quad {}^\forall \mathfrak{P} \in X,\quad P \in {}^\exists V \subseteq U {}^\forall \mathfrak{q} \in V,\quad s(Q) \in A_{\mathfrak{q}}.$$

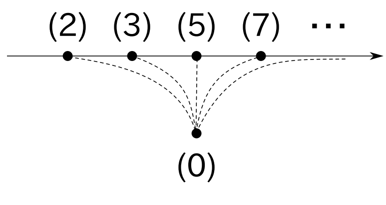
$s \in (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}(U)$ を任意に取る．sheafification のやり方から，点 P の十分小さな開近傍 V について $s \in \mathcal{O}_X(U)/\operatorname{Nil}(\mathcal{O}_X(U))$ と言える（正確には presheaf を sheaf に埋め込む射が必要)．(TODO)

(c) If X :: reduced scheme, then $X \to Y$ is uniquely factored into $X \to Y_{\mathsf{red}} \to Y$.

Ex2.4 Functor Γ and Affine Schemes.

Ex2.5 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ is the Final Object in $\mathbf{Sch}$.

$\mathbb{Z}$ は次元 1 の環だから，$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ は以下の図のようになる．



$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ の開集合は，$\emptyset, \operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ から有限個の点を除いたもの．(TODO)

Ex2.6　$\mathrm{Spec}\{0\}$ is the Initial Object in $\mathbf{Sch}$.

零環 $\{0\}$ はただひとつのイデアル（したがって素イデアル）(0) を持つから，$\mathrm{Spec}\{0\}$ は 1 点集合．零環から別の環への準同型写像は $0 \mapsto 0$ なるものしか無い．scheme の間の射は環の間の準同型から作られるものしかないから（Prop2.3c），$\mathrm{Spec}\{0\}$ から別の scheme への射は $0 \mapsto 0$ から得られるものしか無い．よって $\mathrm{Spec}\{0\}$ は initial object.

Ex2.7

Ex2.8

Ex2.9

Ex2.10

Ex2.11

Ex2.12

Ex2.13

Ex2.14

Ex2.15

Ex2.16

Ex2.17

Ex2.18

Ex2.19