

# $(f^{-1}\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_{f(x)}$ の証明

七条 彰紀

2017 年 10 月 11 日

## 定義 0.1

連続写像  $f: X \rightarrow Y$  と  $Y$  上の sheaf  $\mathcal{F}$  に対して,  $f^{-1}\mathcal{F}$  を  $U \mapsto \varinjlim_{f(U) \subseteq V} \mathcal{F}(V)$  で定まる presheaf の associated sheaf とする.

$X$  上の sheaf  $\mathcal{G}$  に対して  $U \mapsto \mathcal{G}(f^{-1}(U))$  は sheaf  $f_*\mathcal{G}$  を定める. これに対応して  $U \mapsto \mathcal{F}(f(U))$  で presheaf を定めることは, 一般には出来ない. そこで代わりに  $f(U)$  を含む開集合達で  $f(U)$  を近似しよう, というのが  $f^{-1}$  である. (「それに近いもの全体」で「それ」を表現しよう, という思考は数学の他の場所にも現れる.)

このノートの目的は次の主張に 2 つの証明を与えることである.

## 命題 0.2 (\*)

$f: X \rightarrow Y$  を連続写像とし,  $\mathcal{F}$  を  $Y$  上の sheaf とする. この時,  $x \in X$  について  $(f^{-1}\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_{f(x)}$ .

直接の証明は次の通り.

(証明). sheafification と taking stalk at  $x$  が可換であることは既知とする<sup>†1</sup> したがって我々は次を示せば良い.

$$\varinjlim_{V \in \mathcal{D}} \mathcal{F}(V) = \varinjlim_{V \in \mathcal{S}} \mathcal{F}(V)$$

ただし  $\mathcal{D}, \mathcal{S}$  は以下のような direct system である.

$$\mathcal{D} = \{V \supseteq V' \mid \exists U \subseteq X, x \in U, f(U) \subseteq V' \subseteq V\}, \quad \mathcal{S} = \{V \supseteq V' \mid f(x) \in V' \subseteq V\}.$$

ここに現れる  $X, Y$  の部分集合はすべて開集合である.  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$  は明らか. 一方,  $f(x) \in V$  ならば  $x \in f^{-1}(V)$  である.  $f$  は連続だから  $f^{-1}(V)$  は開集合であり,  $x \in U \subseteq f^{-1}(V)$  すなわち  $f(x) \in f(U) \subseteq V$  なる開集合  $U \subseteq X$  が存在する. よって  $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{S}$  も得られる. direct system が同じものであるから, 2 つの direct limit も同じである. ■

上記の主張 (\*) は次の主張の系としても得られる.

## 主張 0.3

2 つの写像  $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$  を連続写像とし,  $\mathcal{F}$  を  $Z$  上の sheaf とする. この時,  $f^{-1}g^{-1}\mathcal{F} = (g \circ f)^{-1}\mathcal{F}$

<sup>†1</sup> これは sheafification  $Sh$  が left adjoint functor であり, taking stalk at  $x$   $\varinjlim_{x \in U}$  が colimit であることによる.  $Sh$  が left adjoint functor であることは, 次の pdf ファイルに証明を書いた: [https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne\\_AG\\_Ch2/section1\\_ex.pdf](https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section1_ex.pdf)

(証明). functor  $f^{-1}, g^{-1}$  はそれぞれ  $f_*, g_*$  の left adjoint functor である.<sup>†2</sup>. 一方,  $g_*f_*$  は定義から明らかに  $(g \circ f)_*$  に等しい. なので次が成り立つ.

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}g^{-1}\mathcal{F}, -) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, g_*f_*-) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, (g \circ f)_*-) \cong \mathrm{Hom}((g \circ f)^{-1}\mathcal{F}, -).$$

すなわち,  $f^{-1}g^{-1}, (g \circ f)^{-1}$  はどちらも  $g_*f_*(= (g \circ f)_*)$  の left adjoint functor である. adjoint functor の一意性から,  $f^{-1}g^{-1}\mathcal{F} = (g \circ f)^{-1}\mathcal{F}$ . ■

この主張の系として (\*) の証明を与える.

(証明).  $i: \{x\} \hookrightarrow X$  を包含写像とする. すると  $i^{-1}f^{-1}\mathcal{F} = (f \circ i)^{-1}\mathcal{F}$ .  $f \circ i$  は  $\{x\} \rightarrow \{f(x)\} \subseteq Y$  なる写像であるから, これは presheaf  $\{x\} \supseteq U \mapsto \varinjlim_{f \circ i(U) \subseteq V} \mathcal{F}(V)$ , すなわち次の presheaf の associated sheaf である. これは明らかに sheaf なので, 実際には sheafification は不要である.

$$((f \circ i)^{-1}\mathcal{F})(U) = \begin{cases} 0 & (U = \emptyset) \\ \mathcal{F}_{f(x)} & (U = \{x\}) \end{cases}$$

■

---

<sup>†2</sup> 次の pdf ファイルの “Ex1.18 Adjoint Property of  $f^{-1}$ .” に証明を書いた: [https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne\\_AG\\_Ch2/section1\\_ex.pdf](https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section1_ex.pdf)