ゼミノート #8
Algebraic-ness of Spaces and Stacks

七条彰紀

2019 年 1 月 4 日

affine scheme, scheme. algebraic space, algebraic stack という貼り合わせの連なりを意識した定義をした後，algebraic stack が scheme の貼り合わせとして定義できることを示す．algebraic space と algebraic stack の定義は全く平行に行われる．そのことが分かりやすい記述を志向する．

1 Fiber Product of Fibered Categories

$\mathbf{B}$ :: category とする．この時，$\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ は以下のような圏であった．

> Objects: fibered categories over $\mathbf{B}$.
> Arrows: base-preserving natural transtormation.

新たに圏 $\mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ を以下のように定義する．

> Objects: categories fibered in groupoids over $\mathbf{B}$.
> Arrows: base-preserving natural transtormation.

重要なのは次の存在命題である．

命題 1.1 ([1] p.10)
$\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ と $\mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ は fibered product を持つ．

(証明). $\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ の射 $F\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}$ と $F\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ をとり，F, G の fiber product を実際に構成する．

■圏 $\mathbf{P}$ の構成　圏 $\mathbf{P}$ を以下のように定義する．

Objects: 以下の 4 つ組

(i) $b \in \mathbf{B}$,
(ii) $x \in \mathfrak{X}(b)$,
(iii) $y \in \mathfrak{Y}(b)$,
(iv) $\mathfrak{Z}$ の恒等射上の同型射 $\alpha\colon Fx \to Gy$.

Arrows:
射 $(b, x, y, \alpha) \to (b', x', y', \alpha')$ は，二つの射 $\phi_{\mathfrak{X}}\colon x \to x', \phi_{\mathfrak{Y}}\colon y \to y'$ であって以下を満たすもの:

$\phi_{\mathfrak{X}}, \phi_{\mathcal{Y}}$ は同じ射 $b' \to b$ 上の射で，以下の可換図式を満たすもの．

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F\phi_{\mathfrak{X}}"'] & Gy \arrow[d, "G\phi_{\mathcal{Y}}"] \\ Fx' \arrow[r, "\alpha'"'] & Gy' \end{tikzcd}$$

■P は fibered category / category fibered by groupoids. この圏は $(b, x, y, \alpha) \mapsto b$ によって fibered category と成る．特に $\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \mathfrak{Z}$ が CFG ならば **P** も C.F.G となる．このことは次のことから分かる: $\phi_{\mathfrak{X}} \colon x \to x'$ と $\phi_{\mathcal{Y}} \colon y \to y'$ の両方が cartesian ならば $(\phi_{\mathfrak{X}}, \phi_{\mathcal{Y}}) \colon (b, x, y, \alpha) \to (b', x', y', \alpha')$ は cartesian である．

■P からの射影写像. 定義から明らかに $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbf{P} \to \mathfrak{X}, \mathrm{pr}_2 \colon \mathbf{P} \to \mathcal{Y}$ が定義できる．射の定義にある可換図式は，以下の A が natural transformation であることを意味している．

$$\begin{array}{rccc} A\colon & F\,\mathrm{pr}_1 & \to & G\,\mathrm{pr}_2 \\ & (F\,\mathrm{pr}_1)((b,x,y,\alpha)) = Fx & \mapsto & \alpha(Fx) = \alpha((F\,\mathrm{pr}_1)((b,x,y,\alpha))) \end{array}$$

A が base-preserving であることは α が恒等射上のもの (i.e. $\pi_{\mathfrak{Z}}(\alpha) = \mathrm{id}$) であることから，isomorphism であることは α が同型であることから示される．

■P :: fiber product. 今，$\mathcal{W} \in \mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ と射 $S \colon \mathcal{W} \to \mathfrak{X}, T \colon \mathcal{W} \to \mathcal{Y}$ 及び base-preserving isomorphism :: $\delta \colon FS \to GT$ をとる．base-preserving なので，任意の $w \in \mathcal{W}$ について $\pi_{\mathfrak{Z}}(FS(w)) = \pi_{\mathfrak{Z}}(GT(w))$．そこで次のように関手が定義できる．

$$\begin{array}{lccc} H\colon & \mathcal{W} & \to & \mathbf{P} \\ \textbf{Object} & w & \mapsto & (\pi_{\mathfrak{Z}}(FS(w)), Sw, Tw, \delta_w) \\ \textbf{Arrow} & [\phi\colon w \to w'] & \mapsto & (S\phi\colon Sw \to Sw', T\phi\colon Tw \to Tw') \end{array}$$

このように置くと，$S = \mathrm{pr}_1 H, T = \mathrm{pr}_2 H$ となる．逆に $S \cong \mathrm{pr}_1 H', T \cong \mathrm{pr}_2 H'$ となる関手 $H' \colon \mathcal{W} \to \mathbf{P}$ は H と同型に成ることが直ちに分かる． ∎

注意 1.2
session4 命題 4.5 より，CFG の恒等射上の射は同型射である．したがって $\alpha \colon Fx \to Gy$ に課せられた条件は，$\mathfrak{Z}$ が CFG ならば一つしか無い．

例 1.3
representable fibered category の fiber product.

我々が扱うのは stack であるから，stack という性質が fiber product で保たれていて欲しいが，果たしてそうなる．

命題 1.4 ([2] Prop 4.6.4)
$\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \mathfrak{Z}$ :: stack over $\mathbf{C}$ とし，morphism of stacks :: $F \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}, G \colon \mathcal{Y} \to \mathfrak{Z}$ をとる．この時，F, G についての fiber product :: $\mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Z}} \mathcal{Y}$ は stack である．

(証明)．(TODO) ∎

2 Representable Morphism

注意 2.1

以下，S :: scheme とし，$\mathbf{Sch}/S$ 上の site を $\mathbf{C}$ と書く（$(\mathbf{Sch}/S)_\tau$ といった表記も見かける）．また，stack といえば stack in groupoid に限る．

定義 2.2 (Representability of Morphism of Spaces/Stacks)

(i) morphism of spaces :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が representable(by scheme) であるとは，任意の S-scheme :: U と射 $U \to \mathcal{Y}$ について，fiber product :: $U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$（これは space）が representable by scheme であるということ．

(ii) morphism of stacks :: $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ が representable(by space) であるとは，任意の S-space :: U と射 $U \to \mathscr{Y}$ について，fiber product :: $U \times_{\mathscr{Y}} \mathscr{X}$（これは stack）が representable by space であるということ．

補題 2.3

morphism of stacks :: $f\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ が representable by space であることは，任意の S-scheme :: U と射 $U \to \mathscr{Y}$ について，fiber product :: $U \times_{\mathscr{Y}} \mathscr{X}$ （これは stack）が representable by space であることと同値．

3 Diagonal Map

定義 3.1 (Diagonal Map)

$\mathscr{X}/S$（すなわち射 $\mathscr{X} \to S$）の diagonal map :: Δ とは，以下の可換図式に収まる射のことである．

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{X} \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& \mathscr{X} \times \mathscr{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathscr{X} \arrow[d] \\
& \mathscr{X} \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

命題 3.2

$\mathscr{F}$ :: stack on $\tau(S)$ 以下は同値である．

(i) $\Delta\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ :: representable.

(ii) 任意の scheme :: U について，$U \to \mathscr{X}$ :: representable.

(iii) 任意の scheme :: U, V と射 $U \to \mathscr{X}, V \to \mathscr{X}$ について $U \times_{\mathscr{X}} V$ :: representable.

(証明)．(TODO) ∎

4 Property of Representable Space/Stack/Morphism

定義 4.1
まず space と morphism of spaces について定義する．

(i) $\mathcal{P}$ を scheme の性質とする．この時，representable space :: $\mathcal{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathcal{X}$ を represent する scheme が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(ii) $\mathcal{P}$ を morphism of algebraic schemes の性質とする．この時，representable morphism of spaces :: $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，任意の $U \in \mathbf{C}$ と射 $U \to \mathcal{Y}$ について，$\mathrm{pr}\colon \mathfrak{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathfrak{X} \to U$ （に対応する morphism of algebraic schemes）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

次に stack と morphism of stacks について定義する．これらは上の定義を殆ど機械的に置換すれば得られる．

(i) $\mathcal{P}$ を space (resp. scheme) の性質とする．この時，representable stack :: $\mathcal{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathcal{X}$ を represent する space(resp. scheme) が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(ii) $\mathcal{P}$ を morphism of algebraic spaces の性質とする．この時，representable morphism of stacks :: $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，任意の $U \in \mathbf{C}$ と射 $U \to \mathcal{Y}$ について，$\mathrm{pr}\colon \mathfrak{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathfrak{X} \to U$ （に対応する morphism of algebraic spaces）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

5 Algebraic-ness

5.1 Definition

定義 5.1 (Algebraic Space)

(i) diagonal morphism :: $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が representable である．

(ii) scheme からの etale surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ が存在する．

定義 5.2 (Deligne-Mumford / Artin Stack)

(i) diagonal morphism :: $\Delta\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ が representable である．

(ii) algebraic space からの etale surjective morphism :: $U \to \mathfrak{X}$ が存在する．

以上の定義は Deligne-Mumford stack と呼ばれる．**algebraic stack と言えばこちらを指す．** etale でなく smooth を要求するものに弱めたものは Artin stack と呼ばれる．

参考文献

[1] Tomàs L. Gòmez. Algebraic stacks. https://arxiv.org/abs/math/9911199v1.

[2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.