双対格子 (Dual Lattice) の生成元

七条 彰紀

2018 年 7 月 24 日

一般の格子 L について双対格子 $L^* = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$ の格子としての生成元集合を求める．L は適当な isotopy で移して $L \cong \mathbb{Z}^r$ とする．すなわち，双線形形式 $\langle -, - \rangle_L$ とは独立に，L の元と行列との積や L 上の標準的内積を定める．

まず L は自由 $\mathbb{Z}$ 加群であるから，$L^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$ は L と階数が同じ $\mathbb{Z}$ 自由加群である．したがって L^* は L と同じく $L \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^r$ の部分アーベル群である．標準的な方法で双線形形式 $\langle -, - \rangle_L$ の拡張 $\langle -, - \rangle_{L\otimes\mathbb{Q}}$ が定まる．L^* の元を $L \otimes \mathbb{Q}$ の部分アーベル群として特定する．

主張 0.1

$L^* = \mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$ の元は

$$M = \{x \in L \otimes \mathbb{Q} \mid {}^\forall y \in L,\ \ \langle x, y \rangle_{L\otimes\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}\}$$

という集合と一対一に対応し，この集合 M は格子の構造を持つ．

(証明). $x \in M$ ならば明らかに $\langle x, - \rangle_L \in L^*$．この対応は準同型であり，$\langle -, - \rangle_L$ が非退化であるから単射である．

準同型 $x \mapsto \langle x, - \rangle_L$ が全射であることを示す．逆に $\phi \in L^*$ に対して $0 \neq u_0 \in (\ker \phi)^\perp \subseteq L \otimes \mathbb{Q}$ を適当にとり，$x = \frac{\phi(u_0)}{u_0^2} u_0 \in L \otimes \mathbb{Q}$ とおく．任意の元 $u \in L \otimes \mathbb{Q} = (\ker \phi) \oplus (\ker \phi)^\perp$ は

$$u = u' + \frac{\langle u, u_0 \rangle}{u_0^2} u_0\ \ (u' \in \ker \phi)$$

と書ける（両辺の $\langle u_0, - \rangle$ での値を見れば良い）ので，

$$\phi(u) = \frac{\langle u, u_0 \rangle}{u_0^2} \phi(u_0) = \langle u, x \rangle.$$

以上から L^* と M はアーベル群として同型である．さらに M 上には $\langle -, - \rangle_{L\otimes\mathbb{Q}}$ の制限に依って双線形形式が定まる．あわせて，M は格子である．■

以下，L^* を $\mathrm{Hom}(L, \mathbb{Z})$ ではなく格子 M を表すものとする．

$r = \mathrm{rank}\, L$ とし，L の生成元集合 $G = \{g_i\}_{i=1}^r$ をとる．r 次正方行列 A を $\Big[\langle g_i, g_j \rangle\Big]_{i,j=1}^r$ とする．これらを用いて，$\langle x, y \rangle = {}^t x A y$ を書ける．（x, y は基底 G について行ベクトルの形に書く．）

L^* の生成元を特定する．$x \in L \otimes \mathbb{Q}$ が L^* に入っている必要十分条件は，$L^* (= M)$ の定義から次のように書ける．

$$Ax \in \bigoplus_{i=1}^r g_i \mathbb{Z}$$

すなわち $x \in \bigoplus_{i=1}^{r}(A^{-1}g_i)\mathbb{Z}$ なので，L^* の基底は $G^* = \{A^{-1}g_i\}_i$ である．$g_i^* = A^{-1}g_i$ と書く．

最後に，$L^*/L \cong \bigoplus(\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z})$ となる $\{n_k\}$ を求める．$g_i^* \mapsto e_i$ (e_i は $\mathbb{Z}^n$ の標準基底) という対応で L の生成元 $g_i \in L^*$ は Ae_i に写される．こうして生成元集合 $\{Ae_i\}$ で $\mathbb{Z}$ 加群として生成される $\mathbb{Z}^n$ の部分加群は，$\{n_ie_i\}(n_i \in \mathbb{Z})$ の形の生成元集合をもつ．実際，この n_i はその定義から A の単因子に一致している．まとめて，次の主張を得る．

主張 0.2

行列 $A \in M_r(\mathbb{Z})$ の単因子を $\{n_i\}_{i=1}^{r}$ とする．すると L^*/L は $\mathbb{Z}$ 自由加群として

$$\bigoplus_{i=1}^{r}(\mathbb{Z}/n_i\mathbb{Z})$$

と同型である．

特に，積 $\prod n_i$ は $d(L) = |\det A|$ と一致するから，$[L^* : L] = d(L)$.