Ex4.1 Term “is defined” for Regular Functions.

X::variety と $\langle U, f\rangle, \langle V, g\rangle \in K(X)$ について，$f = g$ on $U \cap V$ とする．このとき，U 上で f，V 上で g であるような写像 h が $U \cup V$ 上の regular function であることを示そう．つまり，regular function の定義域を接続する．

$P \in U \cup V$ をとる．$P \in U \setminus V$ ならば単に $P \in U$ と考えて開近傍をとり，h は P で regular であることが分かる．$P \in V \setminus U$ でも同様に h は P で regular であることがわかる．$P \in U \cap V$ の時は P の適当な開近傍上で f, g がそれぞれ有理関数表示をとるが，$f = g$ on $U \cap V$ により，その有理関数表示も等しい．正確には，P の開近傍 Z で $f = f_n/f_d, g = g_n/g_d$ と同時にとれたとすると，$f = g$ より $f_n g_d - f_d g_n = 0$ on Z．左辺は多項式であり，Z は無限集合であるから，左辺は零多項式である．なので h の P 近傍での有理関数表示としては $f_n/f_d, g_n/g_d$ のいずれをとっても同じである．よって h は $U \cap V$ で well-defined.

以上のように $\langle U, f\rangle$ の定義域を拡大していくと，定義域（開集合）の集合が出来る．ネーター空間上で議論しているので，これは極大元を持つ．もしも二つ極大な定義域が存在すれば，どちらも U を含むので接続が出来る．したがって定義域の拡張でできる極大な定義域はただ一つである．

Ex4.2 Term “is defined” Rational Maps.

$\phi : U$ and $U' \to V$ が rational map であるとする．このとき ϕ は明らかに $U \cup U'$ で連続．また，regular funciton $f : Z \to k$ を任意にとった時，$f \circ \phi : \phi^{-1}(Z) \to k$ が regular であることは $f_1 \circ \phi : \phi^{-1}(Z) \cap U \to k, f_2 \circ \phi : \phi^{-1}(Z) \cap U' \to k$ の両方が regular であることから明らか.

Ex4.3 Example of “defined”

(a) Open subset where $f = x_1/x_0$ is defiend.

(b)

Ex4.4 “Rational”

Y ::variety がある $\mathbb{P}^n$ と birational であるとき，Y は rational であるという．同値な条件として，$K(Y)/k$ が純超越拡大であるとき Y は rational である．

(a) Any conic in $\mathbb{P}^2$ is a rational curve.

$\mathbb{P}^2$ 内の任意の conic curve は $\mathbb{P}^1$ に同型．したがって conic curve 全体から $\mathbb{P}^1$ 全体への morphism が存在するので rational である．

(b) $C : y^2 - x^3 = 0$ is a rational curve.

まず，C がパラメータ表示 $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ を持つことを言っておく．$U = C \setminus \{(0,0)\}$ という C の開部分集合をとると，パラメータ表示から以下は birational である．

$$\begin{aligned} \phi : U &\xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1 \\ (x, y) &\mapsto (x : y) = (1 : t) \end{aligned}$$

明らかにこれは U とアフィン開被覆 U_0 の間の isomorphism であるから C は birational.

(c) Projection of $Y : y^2z - x^2(x+z) = 0$.

$P = (0:0:1)$ から $z=0$ への射影を ϕ とする．このとき，$\phi(x:y:z) = (x:y)$．ここから以下の写像が得られる．

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : Y \cap U_0 &\to \{(1:s) \mid s^2 \neq 1\} \subset \mathbb{P}^1 \\ (1:s:t) &\mapsto (1:s) \\ \left(1:s:\frac{1}{s^2-1}\right) &\leftarrow\!\shortmid (1:s) \end{aligned}$$

$\{(1:s) \mid s \neq 1\} = U_0 \cap (\mathcal{Z}_p(x^2-y^2))^c$ は開集合である．また，像，原像ともに affine であるから，Lemma 3.6 によって $\bar{\phi}, \bar{\phi}^{-1}$ の両方が morphism であることが分かる．よってこれは birational map.

Ex4.5　$Q : xy - zw = 0$ is birational to $\mathbb{P}^2$ but not isomorphic.

■Q is birational to $\mathbb{P}^2$.　$Q_3 = Q \cap U_3$ を考えると，

$$\phi : (x:y:z:w) \mapsto \left(\frac{x}{w} : \frac{y}{w} : \frac{z}{w}\right)$$

という写像が得られる．これは直ちに逆写像が得られるので，birational map $\phi : Q \cap U_3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^2$ が得られた．

■Q is not isomorphic to $\mathbb{P}^2$.　Ex3.7 より，$\mathbb{P}^2$ の任意の曲線は交わる．しかし Ex2.15 より二つの直線 $L_t, L_u (t \neq u)$ は交わらない．よって Q と $\mathbb{P}^2$ は同相でなく，したがって同型でもない．

Ex4.6　Plane Cremona Transformations.

$\mathbb{P}^2$ から自分自身への birational map は plane Cremona transformation と呼ばれる．Quadratic transformation.

$$\phi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2; \quad (a_0 : a_1 : a_2) \mapsto (a_1a_2 : a_0a_2 : a_0a_1)$$

ここで a_0, a_1, a_2 のいずれか二つは 0 でない．

(a) ϕ itself is its inverse as a rational map.

ϕ を 2 回適用する．

$$(a_0 : a_1 : a_2) \mapsto (a_1a_2 : a_0a_2 : a_0a_1) \mapsto (a_0^2a_1a_2 : a_0a_1^2a_2 : a_0a_1a_2^2) = (a_0 : a_1 : a_2)$$

したがって ϕ は $U = (\mathcal{Z}_p(x_0x_1x_2))^c$ から U 自身への isomorphism である．定義域がこれ以上拡大出来ないことは明らか.

(b) Find $U, V \in \mathbb{P}^2$ where $U \overset{\phi}{\equiv} V$

すでに述べた．

(c)　Find opensets where ϕ and ϕ^{-1} are defiend.

すでに述べた．

Ex4.7　$\mathcal{O}_{P,X} \equiv \mathcal{O}_{Q,Y} \implies {}^{\exists}\psi,\quad \psi : X \xrightarrow{\cong} Y; P \mapsto Q$

■We can assume X, Y::affine.　Prop4.3 より，$P \in Z \subset X$ なる Z::affine open subset が存在する．このとき $\mathcal{O}_{P,X}$ と $\mathcal{O}_{P,Z}$ は $\langle U, f\rangle \mapsto \langle U \cap Z, f\rangle; \langle V, g\rangle \leftarrow\!\shortmid \langle V, g\rangle$ なる写像で同型である．なので X, Y::affine と仮定して良い．

■Make ϕ_* and ψ.　今，仮定から $\phi : A(X)_{\mathfrak{m}_P} \xrightarrow{\equiv} A(Y)_{\mathfrak{m}_Q}$ なる同型写像が存在する．同型の両辺で Quot を取ることで $\phi_* : K(X) \xrightarrow{\equiv} K(Y)$ ::isomorphism が得られる．[1] $\phi_*(x_i + \mathcal{I}(X)) \in \mathrm{Quot}(A(Y)) = K(Y)$ は有理関数であるから，以下の写像が定義できる開集合 $U \subset Y$ が存在する．

$$\psi : U \to X;\ S \mapsto (\phi_*(x_0 + \mathcal{I}(X))(S), \ldots, \phi_*(x_n + \mathcal{I}(X))(S))$$

逆写像も同様に作れるため，これは birational map である．$f \in A(X)_{\mathfrak{m}_P}$ についてあきらかに $\phi_* \circ f = f \circ \psi$. [2]

■Paraphrasing of $\psi^{-1} : P \mapsto Q$.　ϕ_* によって極大イデアル $\bar{\mathfrak{m}}_P \subset A(X)_{\mathfrak{m}_P} \subset K(X)$ は極大イデアル $\bar{\mathfrak{m}}_Q \subset A(Y)_{\bar{\mathfrak{m}}_Q} \subset K(Y)$ に写され，$\mathcal{Z}_a(\bar{\mathfrak{m}}_Q) = \mathcal{Z}_a(\phi_*(\bar{\mathfrak{m}}_P)) = \{Q\}$．$\phi_* \circ f = f \circ \psi$ から以下のように $\psi^{-1} : P \mapsto Q$ が得られる．

$$\begin{aligned}
& Q \in \mathcal{Z}_a(\phi_*(\bar{\mathfrak{m}}_P)) = \mathcal{Z}_a(\bar{\mathfrak{m}}_Q) \\
\iff & {}^{\forall} f \in \bar{\mathfrak{m}}_P,\quad \phi_*(f)(Q) = 0 \\
\iff & {}^{\forall} f \in \bar{\mathfrak{m}}_P,\quad f(\psi(Q)) = 0 \\
\iff & \psi(Q) \in \mathcal{Z}_a(\bar{\mathfrak{m}}_P) = \{P\} \\
\iff & \psi^{-1}(P) = Q
\end{aligned}$$

なお，証明には全て $\implies$ で十分．

Ex4.8　Cardinality and Homeomorphism of Curves

Lemma

念の為に以下を証明しておく．

補題 Ex4.8.1. 体 k の代数閉包を $\bar{k}$ とする．k が有限体ならば $|\bar{k}| = \aleph_0$ であり，k が無限体ならば $|\bar{k}| = |k|$ である．

(証明)．k 上の n 次多項式は次のように k^n の元と一対一対応する．

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_0 \leftrightarrow (c_{n-1}, \ldots, c_0)$$

n 次多項式の根は高々 n 個だから，以下のように濃度が計算できる．

$$|\bar{k}| \le \sum_{n \in \mathbb{N}} n|k^n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} n|k|^n = |\{(i, j, x) \mid i \in \mathbb{N}, 1 \le j \le i, x \in k^i\}|$$

[1] $\phi_*(a/s) = \frac{\phi(a/1)}{\phi(s/1)}$ とすれば良い．Them3.2 の議論と Ati-Mac Ex3.3 を参照.

[2] 実際は $(a/s)(P) = 0 \iff a(P) = 0$ なので $f \in A(X)$ についてのみこの等式を言えば良い.

以降は $|k|$ が有限かどうかで計算が変わる．

■Case: $|k| < \aleph_0$　$|k|$ が有限ならば $n|k|^n$ も有限なので

$$|\bar{k}| \leq |\{(i,j) \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq i|k|^i\}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0.$$

任意の自然数 $d \in \mathbb{N}$ に対して d 次既約多項式が存在することが知られているので $|\bar{k}| \geq \aleph_0$．よって $|k| = \aleph_0$．

■Case: $|k| \geq \aleph_0$　$|k|$ が無限ならば $n|k|^n = n|k| = |k|$ なので[3)]

$$|\bar{k}| \leq |\mathbb{N} \times k| \leq |k^2| = |k|.$$

$k \subseteq \bar{k}$ から $|k| \leq |\bar{k}|$ なので証明が完成した．　■

(a)　For any variety X whose dimention ≥ 1, $|X| = |k|$.

$k = \bar{k}$ とする．

■$|\mathbb{A}^n| = |\mathbb{P}^n| = |k|$　$\mathbb{A}^n = k^n$ なので $|k|$ が無限濃度であることと合わせて $|\mathbb{A}^n| = |k|$．また，$\mathbb{P}^n = (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{O\})/\sim$ なので，$|\mathbb{P}^n| \leq |\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{O\}| = |k|$．$\mathbb{A}^n \equiv U_0 \subset \mathbb{P}^n$ を考えて $|\mathbb{P}^n| \geq |k|$．まとめて $|\mathbb{A}^n| = |\mathbb{P}^n| = |k|$．

■Start of step I: case of $\dim X = 1$.　$\dim X = 1$ の時，X::variety, $\dim X = 1$ を考える．Prop 4.9 より，X から hypersurface $H(\subset \mathbb{P}^2)$ への birational map が存在する．H の定義多項式を h としておこう．

■ϕ is surjective.　一次斉次多項式 F を，$H \cup \mathcal{Z}_p(F) = \mathcal{Z}_p(\langle h, F \rangle)$ が $\mathbb{P}^2$ 全体でないように取る．すると $P \notin H \cup \mathcal{Z}_p(F)$ を適当に取ることができる．この点 P からの射影 $\phi : \mathbb{P}^2 \setminus P \to \mathcal{Z}_p(F)$ を考えよう．明らかに $\phi(H) \subseteq \mathcal{Z}_p(F) = \mathbb{P}^1$ かつ $|\mathcal{Z}_p(F)| = |\mathbb{P}^1| = |k|$ である．これが全射であることを示せば $|H| \geq |k|$ が分かる．$R \in \mathcal{Z}_p(F)$ を任意にとり，P と R を通る直線を $L(P,R)$ としよう．Ex3.7(a) より，$L(P,R) \cap H \neq \emptyset$（ここで $\dim H = 1$ を用いる）．したがって $Q \in L(P,R) \cap H$ を取ることができて，構成法から[4)] $\phi(Q) = R$ が成立する．よって ϕ は全射．[5)]

■Conclusion of step I　以上で $|H| \geq |k|$ が示された．$H \subset \mathbb{P}^2$ より $|H| \leq |k|$ なので $|H| = |k|$．さて，X と H は birational なので，2 つのある開集合 $U \subset X, V \subset H$ の間に全単射が存在する．H が 1 次元であることから V は H から有限個の点を除いたものであり，したがって $|V| = |H| = |k|$．[6)] あわせて $|X| \geq |U| = |V| = |k|$．$X \subset \mathbb{P}^n$ より $|X| \leq |k|$ なので，Case I の証明が終わった．

■Next Step　$\dim X \geq 2$ ならば，次元の定義より，X は 1 次元の既約閉集合 C を含む．したがって Case I より $|X| \geq |C| = |k|$．$|X| \leq |\mathbb{P}^n| = |k|$ なので一般の次元でも証明が得られた．

(b)　Any two curves over k are homeomorphic.

Ex3.1d から $\mathbb{A}^2 \not\cong \mathbb{P}^2$ であることに注意．

[3)] 無限濃度 κ について $\kappa^2 = \kappa$ は選択公理と同値．

[4)] つまり P, Q, R が一直線上にあり，$Q \in H, R \in \mathcal{Z}_p(F)$ だから．

[5)] $L(P,R) \cap H$ が有限集合であることは，$M(R;t) = P + tR$ とすると $h(M(R;t))$ が t の 1 変数多項式であり，したがって根は高々 $\deg h$ 個であることから得られる．

[6)] H に含まれる既約閉集合は 1 点のみであり，H の任意の閉集合は Prop1.5 から有限個の点である．

二つの曲線 C, D をとろう．(a) の結果から $|C| = |k| = |D|$ なので全単射 $\phi : C \to D$ が存在する．C, D は 1 次元なので C, D 上の閉集合は空集合，有限個の点，曲線全体しかない．明らかに ϕ は空集合，点，曲線全体をそれぞれ空集合，点，曲線全体に写すので，同相写像である．

(c) Another proof for |any curve| $\geq |k|$

任意の曲線 C を取ると，これは hypersurface $H \subset \mathbb{P}^2$ と birational．H の定義多項式を $h \in k[x, y, z]$ とする．このとき，写像 $\iota : k \to H$ が構成できる．これは単純に $f(1, a, z) \in k[z]$ の零点 $z = b$ を一つ選び[7] $\iota : a \mapsto (1 : a : b)$ とすれば良い．代数閉体で考えているので零点は必ず有限個存在する．これは明らかに単射だから $|C| \geq |k|$.

Ex4.9 Stereographic projection can induce a birational morphism.

X::projective variety in $\mathbb{P}^n$，$n \geq \dim X + 2 = r + 2$ とする．local な議論をするので，$Y = X \cap U_{x_0}$::affine open subset として $K(Y)(= K(X)$ by Cor4.5) を考察する．明らかに Y は affine variety である．

$\bar{x}_i = x_i + \mathcal{I}_a(Y)$ とすると Them3.2 より $K(Y) = \mathrm{Quot}(A(Y)) = k(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$．Them3.2 と Them4.8 より拡大 $K(Y)/k$ は finitely and separably generated．Them4.7 より，$\{\bar{x}_i\}_{i=1}^n$ は separating transcendence base を部分集合として含む．そこで番号を付け替えて，$\{\bar{x}_i\}_i$ に含まれる separating transcendence base を $\{\bar{x}_i\}_{i=1}^r$ としよう．base の濃度が $r(= \dim X)$ であることは Them3.2 による．そして以下の拡大は finite generated extension である．

$$k(\{\bar{x}_i\}_{i=1}^n)/k(\{\bar{x}_i\}_{i=1}^r)$$

$J = k(\{\bar{x}_i\}_{i=1}^r)$ としておこう．Them4.6 から，この拡大は以下のようなただ一つの元 α で生成することが出来る．

$$\alpha = \sum_{i=r+1}^n c_i \bar{x}_i \text{ where } c_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r) \in J$$

今述べたように，$K(Y)$ は k に $r+1$ 個の元 $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r, \alpha$ を添加したものである．$n > r+1$ なので少なくとも 1 つの $\bar{x}_i$ は $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_r, \alpha$ のいずれとも一致しない．それを $\bar{x}_n$ とする．（必要ならば変数を交換する．）

さて，ここで $\mathbb{P}^{n-1} = \mathcal{Z}_p(x_n), P = (0 : \cdots : 0 : 1)$ という設定の stereographic projection ψ を考える．$\bar{x}_n$ が $\{\bar{x}_i\}_{0 \leq i \leq n-1}$ の有理関数 η として表すことが出来た時，すなわち $\bar{x}_n = \eta \in k[\{\bar{x}_i\}_{0 \leq i \leq n-1}]$ の時，以下のように birational map が構成できる．

$$\begin{array}{cccc} \psi : & X \supset V & \to & U \subset \mathbb{P}^{n-1} \\ & (1 : a_1 : \cdots : a_{n-1} : a_n) & \mapsto & (1 : a_1 : \cdots : a_{n-1} : 0) \\ & (1 : a_1 : \cdots : a_{n-1} : \eta(a_0, \ldots, a_{n-1})) & \leftarrow\!\shortmid & (1 : a_1 : \cdots : a_{n-1} : 0) \end{array}$$

ただし V, U はそれぞれ開集合である．逆に，この逆写像が birational となるのは Lemma 3.6 より $\bar{x}_n \in k[\{\bar{x}_i\}_{0 \leq i \leq n-1}]$ の時.

任意の stereographic projection は線形変換によって上の設定に読み替えることが出来る．なので，適切な線形変換をとって $\bar{x}_n \in k[\{\bar{x}_i\}_{0 \leq i \leq n-1}]$ とすれば良い．ある i について $c_i = 0$ であれば変数交換で $c_n = 0$ とできるので，いずれの c_i も 0 でないとしよう．α の $\bar{x}_n$ の係数 $c_n \in J$ を 0 にすることを考え

[7] 選択公理を用いる．

るが，c_n は必ずしも k の元ではない．なので k 上の線形変換では必ずしも 0 に出来ない．そこで J 上の線形変換を考え，以下のような J 上の正則行列 M をとる．

$$M = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & -c_n \\ & & & 0 & c_{n-1} \end{bmatrix}$$

この行列で定まる線形変換 κ_M は α を次のように写す．

$$c_{r+1}\bar{x}_{r+1} + \cdots + c_{n-1}\bar{x}_{n-1} + c_n\bar{x}_n \mapsto c_{r+1}\bar{x}_{r+1} + \cdots + c_{n-1}(\bar{x}_{n-1} - c_n\bar{x}_n) + c_n(c_{n-1}\bar{x}_n).$$

こうして $\bar{x}_n$ が消える．実際はこのような正則行列であれば M は何でも良い．このような M がとれることは $n > r+1$，すなわち M が 1×1 行列でないことによる．小行列に分割して計算することで直ちに $\det M = c_{n-1}$ が分かる．そこで開集合 $V_\# = (\mathcal{Z}_a(c_{n-1}))^c$ を取ろう．今 $c_{n-1} \neq 0$ であり，しかも c_{n-1} は $A(Y)$ の元であるから，$V_\#$ は Y 上の空でない開集合であり，M は $V_\#$ 上で正則．したがって Lemma3.6 より，κ_M は $V_\#$ から $\mathcal{Z}_p(\bar{x}_n)$ の部分集合 V への isomorphism である．この V で ψ が働く．

Ex4.10 Blowing up of $C : y^2 - x^3 = 0$ at $O = (0,0)$.

$V_0 = \mathbb{A}^2 \times U_0, V_1 = \mathbb{A}^2 \times U_1$ とおく．これらはそれぞれ $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1$ とみなすことが出来る．

■Blowing up to V_0. C の V_0 への blow-up は，$y^2 - x^3 = 0, y = xu$ の連立方程式を解くことで得られる．計算すると $x^2(u^2 - x) = 0$．よって $E_0 = (0,0) \times (1 : u), \tilde{C}_0 = \mathcal{Z}_a(u^2 - x) \subset V_0$．$E_0 \cap \tilde{C}_0 = (0,0) \times (1:0)$ が得られる．また，$\tilde{C}_0$ は $u \mapsto (u^2, u^3) \times (1 : u)$ により $\mathbb{A}^1$ と同型である．

■Blowing up to V_1. 同様に $y^2 - x^3 = 0, x = ty$ を解いて $y^2(1 - t^3y) = 0$．よって $E_1 = (0,0) \times (t : 1), \tilde{C}_1 = \mathcal{Z}_a(1 - t^3y) \subset V_1$ となる．$E_1 \cap \tilde{C}_1$ は空である．また，$\tilde{C}_1$ は $t \mapsto (t^2, t^3) \times (1 : t)$ により $\mathbb{A}^1$ と同型である．

■Summarize.

$$\begin{aligned} E &= O \times \mathbb{P}^1 \\ \tilde{C} &= \{(t^2, t^3) \times (1 : t) \mid t \in k\} \end{aligned}$$

$\tilde{C}$ は直ちに $\mathbb{A}^3$ の曲線と見ることが出来る．
gnuplot でのコードは `set parametric; splot u**2, u**3, u` なので試すと良い．