

この note では Hartshorne “Algebraic Geometry” p.61 にある sheaf property (3) を Identity Axiom と呼び、同じく (4) を Gluability Axiom と呼ぶ。これらの名称は Vakil “Foundations of Algebraic Geometry” にあるものである。

## Ex1.1 Constant Sheaf is Associated to Constant Presheaf.

$A ::$  abelian group,  $X ::$  topological space とする。任意の空でない開集合  $U \subseteq X$  について  $\mathcal{F}(U) = A$  とし, restriction map  $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  は  $\text{id}_A$  とする。この  $\mathcal{F}$  を constant presheaf と呼ぶ。 $\mathcal{F}$  に対応する sheaf を  $\mathcal{F}^+$  としよう。開集合  $U \subseteq X$  に対し,  $\mathcal{F}^+(U) = \{f : U \rightarrow A \mid f :: \text{continus.}\}$  を示す。

まず, 明らかに

$$\mathcal{F}_P = \{\langle U, s \rangle \mid U :: \text{open in } X, s \in A\} = \{\langle X, s \rangle \mid s \in A\} \cong A$$

なので  $\bigcup_{P \in U} \mathcal{F}_P \cong A$ .  $\mathcal{F}^+(U)$  の元  $s (= \langle U, s \rangle)$  は, 以下の条件を満たすものである。

$$\forall P \in U, \exists P \in V \subseteq U, \exists t \in \mathcal{F}(V), \forall Q \in V, t_P = s(Q).$$

これは  $t$  として  $s$  自身が取れるので常に成り立つ。 $A$  に離散位相を入れているので,

$$\{f : U \rightarrow A \mid f :: \text{continus.}\} = \{f : U \rightarrow A \mid 2^A \subseteq f(\mathcal{O}_U).\} = \text{Hom}(U, A) = \mathcal{F}^+(U).$$

## Ex1.2 The Image/Kernel in a Sheaf/Stalk.

$$(a) \quad (\ker \phi)_P = \ker \phi_P, (\text{im } \phi)_P = \text{im } \phi_P.$$

$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  と任意の点  $P$  について  $(\ker \phi)_P = \ker \phi_P, (\text{im } \phi)_P = \text{im } \phi_P$  を示す。

■ASSERTION.  $\mathcal{F}'$  を  $\mathcal{F}$  の subsheaf だとする。この時, 以下の写像  $\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P} : \mathcal{F}'_P \rightarrow \mathcal{F}_P$  に依って  $\mathcal{F}'_P$  は  $\mathcal{F}_P$  の subgroup とみなせる。なお, germ は  $\sim_P$  についての同値類 (点ではなく集合) とみなす。 $\sim_P$  は「点  $P$  の開近傍において二つの section が一致する。」という同値関係である。

$$\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P}(s_P) = \left\{ \langle U, \sigma \rangle \mid \begin{array}{l} P \in U, \sigma \in \mathcal{F}(U), \\ P \in \exists V \subseteq U, \langle V, \sigma \rangle \in s_P. \end{array} \right\} / \sim_P$$

$\langle U, \sigma \rangle$  は本文 p.62 の記号である。以下,  $\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P}$  は適宜  $\iota$  と略す。 $s_P = t_P$  であるとき  $\iota(s_P) = \iota(t_P)$  であることは定義の “ $\langle V, \sigma \rangle \in s_P$ ” の部分から明らか。この写像が単射であることは以下のように示される。まず互いに異なる  $s_P, t_P \in \mathcal{F}'_P$  をとる。すると  $\langle U, \sigma \rangle \in s_P \setminus t_P$  が取れる。明らかに  $\langle U, \sigma \rangle \in \iota(s_P)$ 。この  $\langle U, \sigma \rangle$  について, 開集合  $U$  をより小さい  $U'$  に取り替えても  $\langle U, \sigma \rangle \in s_P \setminus t_P$  となる。これは  $s_P, t_P$  が  $\sim_P$  についての同値類だからである。したがって  $\langle *, \sigma \rangle$  は  $\iota(t_P)$  に属さない。以上から  $\iota(s_P) \neq \iota(t_P)$ 。

■ $\ker \iota_{(\ker \phi)_P}^{\mathcal{F}_P}$  の像が  $\ker \phi_P$  であることを示す。そのために  $s_P \in (\ker \phi)_P$  をとり,  $\iota(s_P)$  を考える。

$$\begin{aligned} s_P &\in (\ker \phi)_P \\ \iff \forall \langle U, \sigma \rangle \in s_P, \sigma &\in (\ker \phi)(U) \\ \iff \forall \langle U, \sigma \rangle \in \iota(s_P), P &\in \exists V \subseteq U, \sigma|_V \in (\ker \phi)(V) \\ \iff \forall \langle U, \sigma \rangle \in \iota(s_P), P &\in \exists V \subseteq U, \phi_V(\sigma|_V) = 0 \\ \iff \phi_P(\iota(s_P)) &= 0 \\ \iff \iota(s_P) &\in \ker \phi_P \subseteq \mathcal{F}_P \end{aligned}$$

$\iota$  を介さなければ、二つの集合は一致しない。例を見よう。  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  をどちらも実直線  $\mathbb{R}$  上の連続な関数がなす層 (変数は  $x$ ) とし、  $\phi(f) = f - x$  とする。この  $\phi$  で ramp function  $\text{ramp}(x) = [x \geq 0]x$  を写したものは  $\phi(\text{ramp})(x) = [x < 0](-x)$  となる。これは明らかに  $x = 1$  の近傍  $(0, 2)$  で 0 になるから、  $\langle (0, 2), \text{ramp} \rangle \in \ker \phi_P$ 。また、近傍を  $(-2, 2)$  としても、  $\langle (0, 2), \text{ramp} \rangle \sim_P \langle (-2, 2), \text{ramp} \rangle \in \ker \phi_P$ 。しかし、  $\text{ramp}|_{(-2, 2)} \neq 0$  だから  $\text{ramp} \notin (\ker \phi)((-2, 2))$  となる。なので  $(\ker \phi)_P$  に  $\langle (-2, 2), \text{ramp} \rangle$  は入っていない。

■im 殆ど  $\ker$  の場合と同じだが、  $(\text{im}^{pre} \phi)_P = (\text{im} \phi)_P$  を用いる。

$$\begin{aligned}
s_P &\in (\text{im}^{pre} \phi)_P = (\text{im} \phi)_P \\
&\iff \forall \langle U, \sigma \rangle \in s_P, \sigma \in (\text{im}^{pre} \phi)(U) \\
&\iff \forall \langle U, \sigma \rangle \in \iota(s_P), P \in \exists V \subseteq U, \sigma|_V \in (\text{im}^{pre} \phi)(V) \\
&\iff \forall \langle U, \sigma \rangle \in \iota(s_P), P \in \exists V \subseteq U, \exists \tau \in \mathcal{G}(V), \phi_V(\tau) = \sigma|_V \\
&\iff \exists \tau_P \in \mathcal{G}_P, \phi_P(\tau_P) = \iota(s_P) \\
&\iff \iota(s_P) \in \text{im} \phi_P
\end{aligned}$$

$\tau$  は  $\langle U, \sigma \rangle$  ごとに選ばれるが、下から 2 つめの  $\iff$  で問題は生じない。例えば  $\langle U, \sigma \rangle$  に  $\langle V, \tau \rangle$  が、  $\langle U', \sigma' \rangle$  に  $\langle V', \tau' \rangle$  が対応するなら、  $\langle U, \sigma \rangle, \langle U', \sigma' \rangle \in \iota(s_P)$  なので、ある開集合  $W \subseteq U \cap U'$  について  $\phi_U(\tau)|_W = \sigma|_W = \sigma'|_W = \phi_{U'}(\tau')|_W$  となる。よって  $\tau_P = \tau'_P$ 。

(b)  $\phi :: \text{inj/surj} \iff \forall P \in X, \phi_P :: \text{inj/surj}$ .

まず、

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} \implies \forall P \in X, \mathcal{A}_P = \mathcal{B}_P$$

が言えることに注意する。これは  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  の両辺を stalk をとる functor で写せば分かる。

■Injectivity. まず  $\phi$  と  $\phi_P$  の単射性について。(a) から以下が分かる。

$$\ker \phi = 0 \implies \forall P, (\ker \phi)_P = 0_P = 0 \iff \forall P, \ker \phi_P = \{\iota(0)\}.$$

ここで  $0_P$  は zero sheaf <sup>†1</sup> の stalk. 残るは  $\ker \phi = 0 \iff \forall P, \ker \phi_P = \{\iota(0)\}$  である。  $\ker \phi \supseteq 0$  は自明なので、逆の包含関係を示そう。  $U :: \text{open in } X$  とし、  $s \in (\ker \phi)(U)$  を任意に取る。このとき  $\phi_U(s) = 0$ 。したがって任意の点  $P \in U$  について  $\phi_P(s_P) = 0$  となる。  $\ker \phi_P = 0$  から  $s_P = 0$ 。なので新しい開近傍  $V_P$  ( $P \in V_P \subseteq U$ ) が存在して  $s|_{V_P} = 0$  となる。そこで  $P$  を動かして  $V_P$  で  $U$  を被覆すると、  $\mathcal{G}$  の Identity Axiom から  $s = 0$ 。任意の  $U, s \in (\ker \phi)(U)$  について  $s = 0$  だから、  $\ker \phi = 0$ 。

■Surjectivity.  $\phi$  と  $\phi_P$  の全射性についても、以下の通り。

$$\text{im} \phi = \mathcal{G} \implies \forall P, (\text{im} \phi)_P = \mathcal{G}_P \iff \forall P, \text{im} \phi_P = \mathcal{G}_P.$$

この場合は  $\text{im} \phi$  が proper subsheaf ではないので記号を変えたりする必要はない。残る  $\text{im} \phi = \mathcal{G} \iff \forall P, \text{im} \phi_P = \mathcal{G}_P$  を示す。  $\text{im} \phi \subseteq \mathcal{G}$  は自明なので、逆の包含関係を示そう。  $U :: \text{open in } X, t \in \mathcal{G}(U)$  を任意に取る。すると  $\text{im} \phi_P = \mathcal{G}_P$  より、  $\phi_P((s^P)_P) = t_P$  となる  $(s^P)_P \in \mathcal{F}_P$  が存在する。この時、任意の点  $P$  について開近傍  $V_P$  ( $P \in V_P \subseteq U$ ) が存在し、  $\phi_{V_P}(s^P|_{V_P}) = t|_{V_P}$ 。restriction と  $\phi$  の naturality から  $\phi_U(s^P)|_{V_P} = t|_{V_P}$ 。状況をまとめよう。  $U$  の開被覆  $\{V_P\}_{P \in U}$  が存在し、さらに各  $P$

<sup>†1</sup> 自明な abelian group  $\{0\}$  の constant sheaf

ごとに  $\sigma^P|_{V_P} = t|_{V_P}$  なる  $\sigma^P := \phi_U(s^P) \in (\text{im } \phi)(V_P)$  が存在する. 二点  $P, Q$  を取れば, 以下が成り立つ.

$$\sigma^P|_{V_P \cap V_Q} = t|_{V_P \cap V_Q} = \sigma^Q|_{V_P \cap V_Q}.$$

よって  $\text{im } \phi$  の Glueability Axiom から,  $\Sigma|_{V_P} = \sigma^P = \phi_U(s^P)|_{V_P} = t|_{V_P}$  なる  $\Sigma \in (\text{im } \phi)(U)$  が存在する. 最後に Identity Axiom を用いて,  $t = \Sigma$ . 以上より, 任意の  $t \in \mathcal{G}(U)$  に対して  $t \in (\text{im } \phi)(U)$  が示された. (この議論は当然 presheaf  $\text{im}^{pre} \phi$  では通用しない.  $\text{im}$  が presheaf のままでは,  $\phi$  と  $\phi_P$  の全射性について, このような同値関係は示せない.)

$$(c) \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \text{ is exact} \iff \forall P, \mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{H}_P \text{ is exact.}$$

示すべきは以下の命題である.

$$\text{im } \phi = \ker \psi \iff \text{im } \phi_P = \ker \psi_P.$$

しかしこれは (a) より明らか.

### Ex1.3 Surjectivity of Morphism is (Not) Local Property.

#### (a) Paraphrase of Surjectivity.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} : X \rightarrow A, \phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  について  $\phi :: \text{surj}$  が以下の命題と同値であることを示す.

$$(*) \quad \forall U :: \text{open in } X, \forall s \in \mathcal{G}(U), \bigcup \exists U_i = U, \exists t_i \in \mathcal{F}(U_i), \forall i, \phi(t_i) = s|_{U_i}.$$

$\phi :: \text{surj}$  ならば covering  $\{U_i\}$  として  $U$  をとり,  $\phi(t) = s$  となる  $t$  を  $t_i$  とすれば良い.

逆を示す. Ex1.2b より, 任意の  $P \in U$  について  $\phi_P :: \text{surj}$  であることを示せば良い. 仮定より  $P \in V \subseteq U$  となる  $V$  ((\*) 中の  $U_i$ ) が存在し,  $\phi_P(t_P) = s|_V = s_P$  を満たす  $t_P \in \mathcal{F}(V) \subseteq \mathcal{F}_P$  が存在する. よって  $\phi_P :: \text{surj}$ .

#### (b) Give an Counterexample.

### Ex1.4 Induced Injective Sheaf Morphism.

#### (a) Injective Presheaf Morphism Induces Injective Sheaf Morphism.

以下は可換図式である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}^+ & \xrightarrow{\phi^+} & \mathcal{G}^+ \\ \uparrow & \nearrow & \uparrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{G} \end{array}$$

これを stalk をとる関手  $\lim_{\rightarrow P \in U}$  で写すと, Prop-Def1.2 の直後に言及されている  $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_P^+$  から, 以下が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_P^+ & \xrightarrow{\phi_P^+} & \mathcal{G}_P^+ \\ \parallel & \nearrow & \parallel \\ \mathcal{F}_P & \xrightarrow{\phi_P} & \mathcal{G}_P \end{array}$$

この可換図式から  $\phi_P = \phi_P^+$ . よって Ex1.2b から  $\phi :: \text{inj} \iff \phi^+ :: \text{inj}$ .

(b) Natural Induced Map  $\text{im } \phi \rightarrow \mathcal{G}$  is Injective.

埋め込み写像  $\text{im}^{pre} \phi \hookrightarrow \mathcal{G}$  は injective なので、ここから誘導される  $\text{im } \phi \rightarrow \mathcal{G}$  も injective.

### Ex1.5 For Morphism of Shaves, iso=inj+surj.

$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を考える.  $\phi$  が iso であることと, 任意の点  $P$  で  $\phi_P$  が iso であることは同値. また,  $\phi$  が inj+surj であることと, 任意の点  $P$  で  $\phi_P$  が inj+surj であることは同値である. これらはそれぞれ Prop1.1 と Ex1.2 から理解する. よって  $\phi_P$  について iso=inj+surj を確かめれば必要十分.

■  $\phi_P :: \text{iso} \implies \phi_P :: \text{inj+surj}$ .  $\phi_P :: \text{iso}$  ならば,

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{F}_P, \phi_P(x_1) = \phi_P(x_2) \implies \phi_P^{-1} \circ \phi_P(x_1) = x_1 = x_2 = \phi_P^{-1} \circ \phi_P(x_2)$$

すなわち  $\phi_P :: \text{inj}$ . 同時に

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \phi_P(\phi_P^{-1}(y)) = y$$

すなわち  $\phi_P :: \text{surj}$ .

■  $\phi_P :: \text{iso} \iff \phi_P :: \text{inj+surj}$ . まず  $\phi_P :: \text{surj}$  から以下が成り立つ.

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \exists x \in \mathcal{F}_P, \phi_P(x) = y.$$

この命題を満たす  $x \in \mathcal{F}_P$  は  $\phi_P :: \text{inj}$  からただひとつである.

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \exists! x \in \mathcal{F}_P, \phi_P(x) = y.$$

なので  $\phi_P^{-1}(y) = x$  と定めればこれは写像になる. なお,  $\phi_P$  でなく  $\phi$  で議論をすると, 構成した  $\phi$  の naturality を示す必要がある.

### Ex1.6 Short Exact Sequence of Sheaves.

(a) Natural Map  $q : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{F}'$  Has  $\text{im } q = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$  and  $\ker q = \mathcal{F}'$ .

quotient sheaf の定義 (p.65) より, 任意の点  $P$  について  $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$  <sup>†2</sup>. よって  $q$  から誘導される  $q_P$  は  $\mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$  の自然な写像である.  $\text{im } q_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P, \ker q_P = \mathcal{F}'$  となるから, Ex1.2a より主張が得られる.

(b) If  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  is Exact, ...

仮定より,  $0 = \ker f, \text{im } f = \ker g, \text{im } g = \mathcal{F}''$ . よって  $f$  は inj で,  $f|_{\text{im } f} : \mathcal{F}' \rightarrow \text{im } f$  は surj+inj. なので Ex1.5 よりこれは iso であり,  $\mathcal{F}'$  は  $\text{im } f \subset \mathcal{F}$  と同型である. 続けて  $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''$  から誘導される  $g_P : \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}''_P$  を考える. 定義より  $\mathcal{F}_P, \mathcal{F}''_P$  は abelian group (abelian group の圏での colimit) で,  $g_P$  はその morphism. だから abelian group の準同型定理からの帰結として  $\mathcal{F}_P/\ker g_P = (\mathcal{F}/\ker g)_P \cong \mathcal{F}''_P$  が得られる. Prop1.1 より  $\mathcal{F}'' \cong \mathcal{F}/\ker g = \mathcal{F}/\text{im } f \cong \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ .

<sup>†2</sup> これは sheafification functor  $sh_X : \mathbf{PSh}(X, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{Sh}(X, \mathcal{C})$  が forgetful functor の left adjoint functor であること, 及び left adjoint functor は colimit を保つことから得られる.

**Ex1.7**  $\text{im } \phi \cong \mathcal{F} / \ker \phi$ , and  $\text{coker } \phi \cong \mathcal{G} / \text{im } \phi$ .

$\phi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  について考える.  $\text{im } \phi \cong \mathcal{F} / \ker \phi$  は以下の完全列に Ex1.6b を用いて得られる.

$$0 \rightarrow \ker \phi \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \text{im } \phi \rightarrow 0.$$

ただし  $i$  は埋め込み写像である.  $\text{coker } \phi \cong \mathcal{G} / \text{im } \phi$  は同様に以下の完全列から得られる.

$$0 \rightarrow \text{im } \phi \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{q} \text{coker } \phi \rightarrow 0.$$

ただし  $q$  は  $q^{pre} : \mathcal{G} \rightarrow \text{coker } \phi = \mathcal{G} / \text{im } \phi$  から誘導される写像. これが完全列であることは次のように示される. まず Ex1.6a を用いて stalk の完全列を得る.

$$0 \rightarrow \text{im } \phi_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{q_P} \text{coker } \phi_P = \mathcal{G}_P / \text{im } \phi_P \rightarrow 0.$$

Ex1.2a,c を用いて元の列が完全であることが示される.

**Ex1.8**  $\forall U \subset X, \Gamma(U, -) :: \text{left exact functor}$

以下を  $X \rightarrow A$  の sheaves がなす完全列とする.

$$0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}''.$$

完全列なので  $0 = \ker f, \text{im } f = \ker g$ .  $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}(U)$  で定義される functor  $\Gamma(U, -)$  により, この完全列は以下の列になる.

$$0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{F}''(U).$$

これが完全列であることは  $0 = \ker f_U, \text{im } f_U = \ker g_U$  と同値.

まず  $\ker f$  を考えると, 定義より  $0 = (\ker f)(U) = \ker f_U$ . よって  $f_U :: \text{inj}$ . また,  $\Gamma(U, -)$  は functor だから

$$0 = \Gamma(U, g \circ f) = \Gamma(U, g) \circ \Gamma(U, f) = 0.$$

すなわち  $g_U \circ f_U = 0, \text{im } f_U \subseteq \ker g_U$ .

残るは逆の包含関係である. まず  $s \in \ker g_U \subseteq \mathcal{F}(U)$  を取る. Ex1.2a より, 任意の  $P \in U$  について  $\text{im } f_P = \ker g_P$ . なので任意の点  $P$  について  $s_P \in \text{im } f_P = \ker g_P$  であり,  $f_P(t_P) = s_P$  となる  $t_P \in \mathcal{F}'_P$  が存在する. そこで  $s_P, t_P$  の代表元  $\langle V_P, s|_{V_P} \rangle, \langle V_P, t^P|_{V_P} \rangle$  をとると  $f_{V_P}(t^P|_{V_P}) = s|_{V_P}$  となる. 同様に別の点  $Q \in U, t_Q = \langle V_Q, t^Q|_{V_Q} \rangle$  をとると,  $W_{PQ} := V_P \cap V_Q$  について

$$f_{W_{PQ}}(t^P|_{W_{PQ}}) = s|_{W_{PQ}} = f_{W_{PQ}}(t^Q|_{W_{PQ}}).$$

$0 = (\ker f)(W_{PQ}) = \ker f_{W_{PQ}}$  より  $f_{W_{PQ}}$  は inj. したがって  $t^P|_{W_{PQ}} = t^Q|_{W_{PQ}}$  が得られる. ( $P \in$  )  $W_{PQ}$  は  $U$  を被覆するから, Glueability Axiom より,  $t|_{W_{PQ}} = t^P|_{W_{PQ}} = t^Q|_{W_{PQ}}$  なる  $t \in \mathcal{F}'(U)$  が存在する. morphism と restriction の naturality により,

$$f_U(t)|_{W_{PQ}} = f_{W_{PQ}}(t|_{W_{PQ}}) = f_{W_{PQ}}(t^P|_{W_{PQ}}) = s|_{W_{PQ}}$$

となるから, Identity Axiom より  $f_U(t) = s$ . 以上より  $\text{im } f_U \supseteq \ker g_U$ .

## Ex1.9 Direct Sum.

sheaves  $\mathcal{F}, \mathcal{G} : X \rightarrow \mathfrak{C}$  について,  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  を以下で定める.

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} : U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U).$$

ただし  $U :: \text{open in } X$ . これが presheaf であることは自明なので, sheaf であることを示す. 以下,  $U :: \text{open in } X$  とその開被覆  $\{U_i\}$  を固定する.

■  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  Satisfies Identity Axiom.  $s \oplus t \in \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$  が  $(s \oplus t)|_{U_i} = 0 \oplus 0 = 0$  を満たすとする. この仮定を論理式で書下すと,

$$\forall P \in U_i, (s \oplus t)(P) = s(P) \oplus t(P) = 0 \oplus 0.$$

abelian group の coproduct は product と同型だから, これは以下のように書き換えられる.

$$\forall P \in U_i, s(P) = 0 \wedge t(P) = 0.$$

これは  $s|_{U_i} = t|_{U_i} = 0$  と同値. なので  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  は sheaf であることから  $s = t = 0$ . すなわち  $s \oplus t = 0$ .

■  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  Satisfies Glueability Axiom.  $s_i \oplus t_i \in \mathcal{F}(U_i) \oplus \mathcal{G}(U_i)$  が存在し, 以下を満たすとする.

$$\forall i, j, (s_i \oplus t_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j \oplus t_j)|_{U_i \cap U_j}.$$

前段落と同様に書き換えて, 以下が得られる.

$$\forall i, j, s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \wedge t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j}.$$

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$  は sheaf であることから, 以下を満たす  $s \in \mathcal{F}(U_i), t \in \mathcal{G}(U_i)$  が存在する.

$$\forall i, s|_{U_i} = s_i \wedge t|_{U_i} = t_i.$$

この  $s, t$  について  $(s \oplus t)|_{U_i} = (s|_{U_i}) \oplus (t|_{U_i}) = s_i \oplus t_i$ .

■  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  is Coproduct in  $\mathbf{Sh}(X)$ . 以下の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} & \\ i \nearrow & \vdots & \nwarrow j \\ \mathcal{F} & \mathcal{G} & \\ \searrow \forall f & \downarrow \exists^1[f, g] & \swarrow \forall g \\ & \mathcal{Z} & \end{array}$$

ただし  $\mathcal{Z}, f, g$  は任意で,  $i, j$  はそれぞれ  $s \mapsto s \oplus 0, t \mapsto 0 \oplus t$  とする. すると  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  から  $\mathcal{Z}$  へ至る二つのパスをたどることで, この図式を可換にする  $[f, g]$  は以下のものしか無い事が理解する.

$$[f, g] : s \oplus t \mapsto f(s) + g(t).$$

$f, g$  は morphism of abelian group で  $f(s), g(t)$  は element of abelian group. だから, 例えば  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{Z}$  の二つのパスは次の計算の通り可換になる.

$$[f, g] \circ i : s \mapsto s \oplus 0 \mapsto f(s) + g(0) = f(s) \leftarrow s : f$$

よって  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  は coproduct.

## Ex1.10 Direct Limit.

Ex1.8 の functor  $\Gamma(-, -)$ , sheafification functor  $sh_X$  と abelian category の direct limit  $\lim_{\rightarrow i}$  を用いて,  $\lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i$  を以下で定める.

$$\Gamma(-, \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i) = sh_X \lim_{\rightarrow i} \Gamma(-, \mathcal{F}_i).$$

ただし  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  は direct system である. これが  $\mathbf{Sh}(X)$  の direct limit であることを示す.

まず,  $\mathcal{L} : U \mapsto \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i(U)$  とおく. これは明らかに  $\mathbf{PSh}(X)$  における direct limit で<sup>†3</sup>,  $\mathcal{L}^+ = \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i$  を満たす. よって sheafification functor  $sh_X$  が direct limit を保つことを見れば良い. 次の可換図式は  $\mathcal{L}$  の UMP を表す.

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{L} & \\ & \swarrow \bar{f}_i & \searrow \\ \mathcal{F}_i & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{G} \end{array}$$

ただし  $\mathcal{G}, f_i$  は任意. sheafification の UMP を  $\bar{f}_i : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{G}$  に用いて, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{L}^+ \\ & \searrow \bar{f}_i & \swarrow \bar{f}_i \\ \mathcal{F}_i & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{G} \end{array}$$

よって  $f_i : \mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{G}$  に対して一意に  $\bar{f}_i : \mathcal{L}^+ \rightarrow \mathcal{G}$  が存在する. これで  $\mathcal{L}^+ = \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i$  の UMP が示せた.  $\mathcal{F}_i \rightarrow \mathcal{F}_j$  との可換性は morphism を結合すれば容易に分かる.

(i) Another Proof.

sheafification functor  $sh_X : \mathbf{PSh}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$  が Forgetful Functor  $F : \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{PSh}(X)$  の left adjoint functor であることを用いる. これは R.Vakil “Foundations of Algebraic Geometry” Part I, 2.4.L などにある事実である. direct limit が colimit であることと, “Left Adjoint Preserves Colimits” より,

$$sh_X \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i \cong \lim_{\rightarrow i} sh_X \mathcal{F}_i \cong \lim_{\rightarrow i} \mathcal{F}_i.$$

## Ex1.11 Pre-Direct Limit on Noetherian Top.Sp. is Already a Sheaf.

sheaves  $\{\mathcal{F}^i\}_{i \in I}$  with morphisms  $f^{ij} : \mathcal{F}^i \rightarrow \mathcal{F}^j$  :: direct system とし,  $\mathbf{PSh}(X)$  における direct limit を  $\mathcal{L}$  で書く.  $X$  :: noetherian topological space であるとき,  $\mathcal{L}$  が予め sheaf であることを示す. 以下,  $U$  :: open in  $X$  と開被覆  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を任意にとり, 固定する.

$X$  :: noetherian より,  $X$  :: quasi-compact. なので集合  $\{U_\lambda\}$  から有限被覆  $\{U_j\}_{j \in J}$  が出来る.

## Ex1.12 Inverse Limit.

sheaves  $\{\mathcal{F}^i\}$  with morphisms  $f^{ij} : \mathcal{F}^i \rightarrow \mathcal{F}^j$  :: inverse system とし,  $\mathbf{PSh}(X)$  における inverse limit  $U \mapsto \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i(U)$  を  $\mathcal{L}$  で書く. このとき  $\mathcal{L}$  は  $\mathbf{Sh}(X)$  においても inverse limit であることを示す.

<sup>†3</sup>  $\mathbf{PSh}(X)$  が direct limit を持つことは abelian category  $\mathfrak{C}$  が direct limit を持つことによる.

sheafification functor を  $Sh : \mathbf{PSh}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$ , forgetful functor を  $Fgt : \mathbf{Sh}(X) \rightarrow \mathbf{PSh}(X)$  で書く.  $Fgt$  は  $Sh$  の right adjoint functor ( $Sh \dashv Fgt$ .) なので,  $\lim_{i \leftarrow} \text{と可換}^{\dagger 4}$ . inverse limit は limit なので以下が得られる.

$$\lim_{i \leftarrow} Fgt \mathcal{F}^i \cong Fgt \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i \cong \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i.$$

最後の  $\cong$  は  $F$  が forgetful functor, すなわち object を変化させないことによる. したがって  $\mathbf{PSh}(X)$  における inverse limit は  $\mathbf{Sh}(X)$  における inverse limit と一致する. まったく同様の議論で  $\mathbf{PSh}(X)$  における limit は  $\mathbf{Sh}(X)$  における limit に一致する.

(i) Proof of  $Sh \dashv Fgt$ .

adjoint の定義にはいくつか同値なものがあるが<sup>3</sup>, ここでは Steve Awodey “Category Theory” p.214 にある Cor9.5 を用いる.

$F$  は object を変えない埋め込み写像なので, 直ちに全単射  $\tilde{\eta}_{(-)} : (-) \leftrightarrow F(-) : \tilde{\epsilon}_{(-)}$  がとれる. これに sheafification の UMP を用いると以下の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} Sh & \xrightarrow{\tilde{\eta}} & Fgt Sh \\ \theta \uparrow & \nearrow \eta & \\ id_{\mathbf{PSh}(X)} & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Sh Fgt & \xrightarrow{\epsilon} & id_{\mathbf{Sh}(X)} \\ \theta_{Fgt} \uparrow & \nearrow \tilde{\epsilon} & \\ Fgt & & \end{array}$$

こうして unit  $\eta : id_{\mathbf{PSh}(X)} \rightarrow Fgt Sh$  と counit  $\epsilon : Sh Fgt \rightarrow id_{\mathbf{Sh}(X)}$  が得られる. さらに, この二つの可換図式を組み合わせて, 以下の可換図式が作れる.

$$id_{\mathbf{PSh}(X)} \xrightarrow{\theta} Sh$$

$$\begin{array}{ccc} Fgt & \xleftarrow{\tilde{\epsilon}} & id_{\mathbf{Sh}(X)} \\ \theta_{Fgt} \searrow & & \nearrow \epsilon \\ & Sh Fgt & \end{array}$$

さて,  $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X), \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X)$  と  $g : Sh \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  を任意に取る. この時の可換図式は以下の (1) である.

$$\begin{array}{ccc} (1) \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\theta_{\mathcal{F}}} Sh \mathcal{F} & (2) \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\theta_{\mathcal{F}}} Sh \mathcal{F} & (3) \quad \mathcal{F} \xrightarrow{\theta_{\mathcal{F}}} Sh \mathcal{F} \\ \downarrow g & \downarrow g & \downarrow g \\ Fgt \mathcal{G} \xleftarrow{\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}} \mathcal{G} & Fgt \mathcal{G} \xleftarrow{\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}} \mathcal{G} & Fgt \mathcal{G} \xleftarrow{\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}} \mathcal{G} \\ \theta_{Fgt \mathcal{G}} \searrow \nearrow \epsilon_{\mathcal{G}} & \theta_{Fgt \mathcal{G}} \searrow \nearrow \epsilon_{\mathcal{G}} & \theta_{Fgt \mathcal{G}} \searrow \nearrow \epsilon_{\mathcal{G}} \\ Sh Fgt \mathcal{G} & Sh Fgt \mathcal{G} & Sh Fgt \mathcal{G} \end{array}$$

コの字型の部分をつなぐことで, (2) の  $\bar{g} : \mathcal{F} \rightarrow Fgt \mathcal{G}$  が得られる. Ex1.4 における  $\phi^+$  の作り方をなぞると,  $Sh(\bar{g})$  は (2) の波矢印  $\theta_{Fgt \mathcal{G}} \circ \bar{g}$  から sheafification の UMP で得られるものである. sheafification をしたあとの可換図式が (3) である. UMP から,  $\theta_{Fgt \mathcal{G}}$  および  $\theta_{Fgt \mathcal{G}} \circ \bar{g}$  と共に可換な三角形をなす射は  $Sh(\bar{g})$  に等しい. よって  $Sh(\bar{g}) = \theta_{Fgt \mathcal{G}} \circ \tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}^{-1} \circ g$ . こうして  $g = \epsilon_{\mathcal{G}} \circ Sh(\bar{g})$  が得られる.

<sup>†4</sup> “Right Adjoints Preserves Limits.”



## Ex1.13 Espace Étale of a Presheaf.

### (i) Definition of Espace Étale.

$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X)$  に対し, espace étale of  $\mathcal{F}$   $\mathrm{Spé}(\mathcal{F})$  を以下のように定義する. まず, 集合として  $\mathrm{Spé}(\mathcal{F}) = \bigsqcup_{P \in X} \mathcal{F}_P$  とおく. projection map  $\pi$  とその “section”  $\bar{s}$  を以下で定める. まず,  $\pi$  は以下のもの.

$$\begin{aligned} \pi : \mathrm{Spé}(\mathcal{F}) &\rightarrow X \\ s \in \mathcal{F}_P &\mapsto P. \end{aligned}$$

任意の  $U :: \text{open in } X$  と  $s \in \mathcal{F}(U)$  に対して  $\bar{s} : U \rightarrow \mathrm{Spé}(\mathcal{F})$  を以下で定める.

$$\begin{aligned} \bar{s} : U &\rightarrow \mathrm{Spé}(\mathcal{F}) \\ P &\mapsto s_P. \end{aligned}$$

この時,  $\pi \circ \bar{s} = \mathrm{id}_U$ . すなわち,  $\bar{s}$  は  $U$  上で  $\pi$  の “section” である. そして  $\mathrm{Spé}(\mathcal{F})$  に以下のような位相を入れる: 任意の  $U$  と任意の  $s$  について  $\bar{s}$  が連続であるような最強の位相. これはつまり  $\{\bar{s}\}$  についての終位相である.

### (ii) More References for Espace Étale.

Wikipedia の Sheaf のページ [https://www.wikiwand.com/en/Sheaf\\_\(mathematics\)#/The\\_.C3.A9tal.C3.A9\\_space\\_of\\_a\\_sheaf](https://www.wikiwand.com/en/Sheaf_(mathematics)#/The_.C3.A9tal.C3.A9_space_of_a_sheaf) (2017 年 3 月 30 日参照) に概略が書かれている. 詳細についての資料は以下の通り. まず, 一般の espace étalé (étale space) の categorical な定義が <https://ncatlab.org/nlab/show/etale+space> にある. Étale space の圏と sheaf の圏が圏同値であることの証明は Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk “Sheaves in Geometry and Logic” の §5-6, pp.83-90 にある. (この命題はこの本の p.90 Cor3 である.) 同様のことが “Etale cohomology course notes” <http://math.colorado.edu/~jonathan.wise/teaching/math8174-spring-2014/notes.pdf> の 7 Etale spaces and sheaves (p.24) にあるが, この note はミスが多いしわかりにくいのでおすすめしない.

### (iii) Proposition and Proof.

$X$  上の étale space をとって, その連続な section 全体をとる関手を  $\mathrm{Sec} : \mathbf{Et}(X) \rightarrow \mathbf{Sh}(X)$  とする. 逆に presheaf から étale space を作る関手を  $\acute{E}t : \mathbf{PSh}(X) \rightarrow \mathbf{Et}(X)$  とする. sheafification functor が  $\mathrm{Sh} = \mathrm{Sec} \acute{E}t$  で定義できることを示す.

■ Plan of Proof. 二つの写像を定める.

$$\begin{aligned} \alpha : \quad \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)} &\rightarrow \mathrm{Sec} \acute{E}t \\ s \in \mathcal{F}(U) &\mapsto [\bar{s} : P \mapsto s_P] \\ \\ \beta : \quad \acute{E}t \mathrm{Sec} &\rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{Et}(X)} \\ P \times [\sigma : U \rightarrow \mathrm{id}_{\mathbf{Et}(X)}] &\mapsto \sigma(P) \end{aligned}$$

ただし  $U$  は任意の  $X$  の開集合で,  $P$  は  $U$  の任意の点である. この  $\alpha, \beta$  が natural map かつ isomorphism であることが証明できるので, 圏同値  $\mathbf{Et}(X) \simeq \mathbf{Sh}(X)$  が示せる. しかし我々の目的は sheafification の UMP であり, これには  $\alpha$  についてさえ示せば十分である. この証明は Saunders

Mac Lane, Ieke Moerdijk “Sheaves in Geometry and Logic” pp.85-86 にある<sup>†5</sup>.

■  $\alpha :: \text{natural}$ .  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{PSh}(X)$  とする.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{F}}} & \text{Sec}\acute{E}t\mathcal{F} \\ \downarrow \phi & & \downarrow \text{Sec}\acute{E}t\phi \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{G}}} & \text{Sec}\acute{E}t\mathcal{G} \end{array}$$

$\text{Sec}\acute{E}t\phi$  は次のような, section を section へ写す写像である.

$$\text{Sec}\acute{E}t\phi : [P \mapsto *_P] \mapsto [P \mapsto *_P \mapsto \phi_P(*_P)].$$

したがって  $\mathcal{F} \rightarrow \text{Sec}\acute{E}t\mathcal{G}$  のどちらのパスでも  $s \mapsto [P \mapsto \phi_P(s_P) = (\phi(s))_P]$  と section を section へ写す写像になる. ただし  $P$  は  $X$  の点である. これで  $\alpha :: \text{natural}$  が示せた.

■  $\alpha :: \text{iso}$ . まず  $\alpha :: \text{inj}$  は Identity Axiom から容易に示されるので略す.  $\alpha :: \text{surj}$  の証明は長い. まず  $U :: \text{open in } X, \sigma \in (\text{Sec}\acute{E}t\mathcal{F})(U)$  を任意に取る. すると  $\text{Sec}\acute{E}t$  の定義から, 以下が成り立つ.

$$\forall P \in U, P \in \exists V \subseteq U :: \text{open}, \exists s \in \mathcal{F}(V), \sigma(P) = s_P.$$

$\acute{E}t\mathcal{F}$  の位相は像位相であり, かつ  $\alpha(s) = \bar{s}$  は明らかに単射. なので  $\alpha(s)(V) = \bar{s}(V)$  は open である<sup>†6</sup>. しかも  $\sigma :: \text{continuous}$  だから,  $\sigma(S) \subseteq \alpha(\sigma)(V)$  なる  $P \in S \subseteq \sigma^{-1}(\alpha(\sigma)(V)) :: \text{open}$  が存在する<sup>†7</sup>. 直ちに以下が成り立つ.

$$\forall Q \in S, \exists Q' \in V, \mathcal{F}_Q \ni \sigma(Q) = s_{Q'}.$$

明らかに  $Q = Q'$ , すなわち  $\sigma|_S = \alpha(s)|_S$  が成り立つ. 点  $P$  を様々に取ることで,  $S$  で  $U$  を被覆できることがわかる.  $s \& S$  と  $t \& T$  の二組について

$$\alpha(s)|_{S \cap T} = \sigma|_{S \cap T} = \alpha(t)|_{S \cap T}.$$

したがって  $\alpha :: \text{inj}$  から  $s|_{S \cap T} = t|_{S \cap T}$ . こうして Glueability Axiom から,  $\alpha(s)|_S = \alpha(f)|_S = \sigma|_S$  なる  $f \in \mathcal{F}(U)$  の存在が示せる. 最後に Identity Axiom を用いて  $\alpha(f) = s$ . これで  $\alpha :: \text{iso}$  が示せた.

■ UMP of Sheafification.  $Sh = \text{Sec}\acute{E}t$  とすると, これが sheafification functor となる. その UMP を見よう.  $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X), \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X)$  とする.  $\alpha : \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \rightarrow Sh$  の naturality から, 次の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & Sh\mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\sim} & Sh\mathcal{G} \end{array}$$

$\alpha_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \rightarrow Sh\mathcal{G} :: \text{iso}$  だから,  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  から  $Sh\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  が得られた. 次に, 以下で示す可換図式 (1) が与えられたとしよう. 全体を  $Sh$  で写し,  $Sh|_{\mathbf{Sh}(X)} \cong \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$  を用いて可換図式 (2) が得られる.

$$(1) \begin{array}{ccc} Sh\mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \\ \uparrow \alpha_{\mathcal{F}} & \nearrow \phi & \\ \mathcal{F} & & \end{array} \quad (2) \begin{array}{ccc} Sh\mathcal{F} & \xrightarrow{f} & \mathcal{G} \\ \parallel & \nearrow Sh\phi & \\ Sh\mathcal{F} & & \end{array}$$

<sup>†5</sup> この本では  $\alpha$  は  $\eta$  と書かれている. また, この本でいう cross-section は  $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$  なる section のこと.  $\bar{s}$  は  $s$  のことである. その他, germ の記法などがだいぶ違うので注意.

<sup>†6</sup>  $\bar{s}$  の像位相において, 開集合  $V$  の像が開集合であることは  $\bar{s}^{-1} \circ \bar{s}(V)$  が開集合であることと同値だが, 単射性から, この集合は  $V$  に等しい.

<sup>†7</sup> これは  $\epsilon$ - $\delta$  論法に似ている.  $\sigma^{-1}(\alpha(\sigma)(V))$  が開集合であるから, 任意の点, 特に  $P$  はこの集合の内点である. このことから開集合  $S$  が存在することは自明である.

したがって  $f = g$ . 以上で existence & uniqueness が示せた.

## Ex1.14 Support.

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X), U :: \text{open in } X, s \in \mathcal{F}(U)$  をとる.  $\text{Supp } s = \{P \in U \mid s_P \neq 0\}$  としたとき, これが closed in  $U$  であることを示そう. そのために  $T = (\text{Supp } s)^c = \{P \in U \mid s_P = 0\}$  として, これが open であることを示す.

$P \in T$  を任意に取る. すると  $s_P$  の代表元として  $\langle V_P, s \rangle$  ( $P \in V_P \subset U$ ) が取れる. 今  $s_P = 0$  なので,  $s|_{V_P} = 0$ . したがって  $V_P \subset T$  となる. 任意の  $P \in T$  についてこのように  $V_P$  が取れるので,  $T$  は open covering  $\{V_P\}_{P \in T}$  を持つ. よって  $T = \bigcup_{P \in T} V_P :: \text{open in } U$ .

$\text{Supp } \mathcal{F} = \{P \in X \mid \mathcal{F}_P \neq 0\}$  と定義される. これは closed とは限らない. 実際,  $\mathcal{F}$  の元を, なめらかな実関数に  $\text{bump}(x) = [x > 0]e^{-1/x}$ <sup>†8</sup> をかけたものとする,  $\text{Supp } \text{bump}(x) = [0, \infty), \text{Supp } \mathcal{F} = (0, \infty)$  となる. 後者は明らかに閉集合でない.

## Ex1.15 Sheaf $\mathcal{H}om$ .

$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X), U :: \text{open in } X$  とし,  $\mathcal{F}$  の  $U$  への restriction(p.65) を  $\mathcal{F}|_U$  で書く.  $U \mapsto \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$  で定まる presheaf  $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$  が sheaf であることを示そう. 以下では  $U$  とその開被覆  $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  を任意にとりて固定する.

■  $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) :: \text{Abelian Group}$ .  $s, t \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$  について,  $s + t$  を以下で定める.

$$(s + t)(\sigma) = s(\sigma) + t(\sigma) \text{ where } V :: \text{open in } U, \sigma \in (\mathcal{F}|_U)(V).$$

単位元は  $\text{im } \mathcal{F}|_U$  の単位元を返す定値写像である. 単位元を以下では 0 と書く.

■  $\mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G}) :: \text{Presheaf}$ .  $U, V :: \text{open}$  かつ  $V \subseteq U$  とする.  $\text{res}_U^V : \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V)$  を以下のように定める.

$$\{\mathcal{F}|_U \ni \sigma|_U \mapsto \tau|_U \in \mathcal{G}|_U\} \mapsto \{\mathcal{F}|_V \ni \sigma|_V \mapsto \tau|_V \in \mathcal{G}|_V\}$$

これは  $\text{res}(\mathcal{F})_U^V : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  と  $\text{res}(\mathcal{G})_U^V : \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{G}(V)$  の自然性から誘導される.

■ Identity Axiom.  $s \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \text{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$  をとる. この  $s$  が任意の  $\lambda$  について  $s|_{U_\lambda} = 0$  を満たすとする. さて,  $V :: \text{open in } U$  と  $\sigma \in \mathcal{F}(V)$  を任意に取る.  $\{V_\lambda\}$  を  $V_\lambda = V \cap U_\lambda$  で定めると, これは  $V$  の開被覆になる. 仮定より,  $s|_{V_\lambda}(\sigma) = s(\sigma)|_{V_\lambda} = 0$ . よって  $s(\sigma) \in \mathcal{G}(V)$  に Identity Axiom を用いることで  $s(\sigma)|_V = 0$  が示される.  $V, \sigma$  は任意なので, 結局以下が得られた.

$$\forall V :: \text{open in } U, \forall \sigma \in \mathcal{F}(V), s(\sigma) = 0.$$

すなわち,  $s$  は定値写像 0 である. 以上で Identity Axiom の成立が示された.

■ Gluability Axiom. sections  $s_\lambda \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U_\lambda)$  をとる. これが任意の  $\lambda, \mu \in \Lambda$  について  $s_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = s_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}$  を満たすとしよう. この仮定は以下のように書ける.

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda, \forall \sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda \cap U_\mu), s_\lambda(\sigma) = s_\mu(\sigma).$$

<sup>†8</sup>  $[True] = 1, [False] = 0$  とした. Iverson の記法である.  $\text{bump}(x)$  がなめらかであることは次の PDF を参照せよ: <https://andromeda.rutgers.edu/~loftin/diffal03/bump.pdf>.

そこで  $\lambda$  をひとつ取って固定し,  $\sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda)$  とする. さらに  $\{V_\mu\}_{\mu \in \Lambda}$  を  $V_\mu = U_\lambda \cap U_\mu$  で定める. この  $\{V_\mu\}$  は  $U_\lambda$  の開被覆である. すると最初の仮定と  $V_\mu \cap V_\nu = U_\lambda \cap (U_\mu \cap U_\nu) \subseteq U_\mu \cap U_\nu$  から以下が成り立つ.

$$\forall \mu, \nu \in \Lambda, \quad s_\mu(\sigma)|_{V_\mu \cap V_\nu} = s_\nu(\sigma)|_{V_\mu \cap V_\nu}.$$

sections  $s_\mu(\sigma) \in \mathcal{G}(U_\lambda)$  に対して Gluability Axiom を用いて,  $s(\sigma)|_{V_\mu} = s_\mu(\sigma)|_{V_\mu}$  なる  $s(\sigma)$  の存在が言える. Identity Axiom から  $s(\sigma)|_{U_\lambda} = s_\mu(\sigma)|_{U_\lambda}$ . こうして, 以下を満たす  $s \in \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$  の像が各点  $\sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda)$  ごとに定義できる.

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda), \quad s(\sigma)|_{U_\lambda} = s_\lambda(\sigma)|_{U_\lambda}.$$

簡潔にかけば,  $s|_{U_\lambda} = s_\lambda|_{U_\lambda}$ . よって Gluability Axiom の成立が示せた.

## Ex1.16 Flasque Sheaves.

$U, V :: \text{open in } X, V \subseteq U$  とする. restriction map  $\text{res}_U^V$  が surjective であるような  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$  を flasque<sup>†9</sup> sheaf と呼ぶ.

### (a) Constant Sheaf on Irreducible Top.Sp is Flasque.

$X :: \text{irreducible}, A :: \text{abelian group}, U, V :: \text{open in } X, V \subseteq U$  とする.  $\mathcal{A}$  を  $X$  から  $A$  への constant sheaf とすると, 定義より  $\mathcal{A}(V) = \{s : V \rightarrow A \mid s :: \text{continuous.}\}$ . そこで  $s \in \mathcal{A}(V)$  を一つとって固定する.  $s :: \text{continuous}$  という条件は次と同値

$$\forall a \in A, \quad s^{-1}(a) :: \text{open in } V.$$

$X :: \text{irreducible}$  であるとき,  $s \in \mathcal{F}(V)$  がどのようなものか考えよう.

■Case:  $\#A = 1$ . まず  $\#A = 1$ , すなわち  $A$  が自明な abelian group  $\{e\}$  であったとする. この時, 明らかに  $\mathcal{F}(V)$  は定値写像  $x \mapsto e$  のみからなる.  $\mathcal{F}(U)$  も同じ定値写像からなるので, この時 constant sheaf は flasque.

■Case  $\#A > 1$ .  $a \neq b$  が成り立つような  $a, b \in A$  を任意に取る. すると以下が成り立つ.

$$s^{-1}(\{a\}) \cap s^{-1}(\{b\}) = s^{-1}(\{a\} \cap \{b\}) = s^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

したがって  $X :: \text{irreducible}$  から  $s^{-1}(\{a\})$  or  $s^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ . 仮に任意の  $a \in A$  について  $s^{-1}(\{a\}) = \emptyset$  であったとすると  $s$  が写像にならない. したがって  $s^{-1}(\{a_s\}) \neq \emptyset$  となる  $a_s \in A$  がただひとつ存在する.  $s$  は写像なので  $s^{-1}(A) = V$  が成り立ち, したがって  $s$  はこのような  $a_s$  への定値写像である事が分かる. すると容易に  $s$  は  $U$  へ拡張できるので, この時も constant sheaf は flasque.

### (b) If $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$ is Exact and $\mathcal{F}'$ is Flasque, then...

$0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  が exact かつ  $\mathcal{F}'$  が flasque であったとする. この時, 任意の open set  $U$  について  $0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \rightarrow \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}''(U) \rightarrow 0$  は exact であることを示す.

写像に  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  と名前をつけ,  $U :: \text{open in } X$  と  $s'' \in \mathcal{F}''(U)$  をとる. Ex1.8 より,  $0 \rightarrow \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{F}''(U)$  は exact. なのであとは  $g_U$  が surjective であることを示せば良い.

<sup>†9</sup> フランス語. フラスコのこと. 軟弱という意味. 発音は <https://ja.forvo.com/word/flasque/>.

元の exact sequence から  $g :: \text{surj}$  が言える. Ex1.3 より, 以下が成り立つ.

$$(*) \quad \bigcup \exists U_i = U, \quad \exists t_i \in \mathcal{F}(U_i), \quad \forall i, \quad g(t_i) = s''|_{U_i}.$$

任意に  $i, j$  をとり, 以下の可換図式で diagram chase をする. ただし  $U = U_i \cap U_j$  とした.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}''(U) \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
& 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U_j) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(U_j) & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}''(U_j) \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U_i) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(U_i) & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}''(U_i) \\
& & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
& 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U_{ij}) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(U_{ij}) & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}''(U_{ij})
\end{array}$$

$s'' \in \mathcal{F}''(U)$  と,  $(*)$  から存在が示される  $t_i \in \mathcal{F}(U_i), t_j \in \mathcal{F}(U_j)$  から diagram chasing を始める.

- (1) naturality から  $g(t_i|_{U_{ij}}) = s''|_{U_{ij}} = g(t_j|_{U_{ij}})$ .
- (2) よって列の完全性から  $t_i - t_j \in \ker g|_{U_{ij}} = \text{im } f|_{U_{ij}}$ .
- (3) したがって  $f(u'_{ij}) = t_i - t_j$  なる  $u'_{ij} \in \mathcal{F}'(U_{ij})$  が存在する.
- (4)  $\text{res}_U^{U_{ij}} :: \text{surj}$  から  $s'_{ij}|_{U_{ij}} = u'_{ij}$  なる  $s'_{ij} \in \mathcal{F}'(U)$  が存在する.
- (5)  $s_i = f(s'_{ij})|_{U_i} + t_j \in \mathcal{F}(U_i)$  とおく. (足すのは  $t_j$  であることに注意.)
- (6) 構成より,  $g(s_i)|_{U_{ij}} = g(t_i|_{U_{ij}}) = s''|_{U_{ij}}$ .
- (7)  $i$  を固定して  $j$  を動かすことで, Identity Axiom により  $g(s_i) = s''|_{U_i}$  が得られる.
- (8)  $g(s_i) \in \text{im } g$  に Glueability Axiom を用いて,  $g(s)|_{U_i} = g(s_i) = s''|_{U_i}$  なる  $s \in \mathcal{F}(U)$  がとれる (?).
- (9) Identity Axiom から  $g(s) = s''$ .

#### (i) Another Proof

次の PDF の Lemma2.12(p.10) がこの演習問題と同じ命題である: [http://www.math.mcgill.ca/goren/SeminarOnCohomology/Sheaf\\_Cohomology.pdf](http://www.math.mcgill.ca/goren/SeminarOnCohomology/Sheaf_Cohomology.pdf). 次の PDF の Lemma0.3(p.12) も同じ: <http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4215/v15/notes1.pdf>. どちらの証明でも Zorn's Lemma が用いられている.

(c) If  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0$  is Exact and  $\mathcal{F}', \mathcal{F}$  is Flasque, then  $\mathcal{F}''$  also.

$U, V :: \text{open in } X, V \subseteq U$  とする. (b) より, 以下の完全列が得られる.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(U) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}'(V) & \xrightarrow{f} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{g} & \mathcal{F}''(V) \longrightarrow 0
\end{array}$$

証明は diagram chasing による.

- (1)  $s'' \in \mathcal{F}''(V)$  を任意に取る.

(2)  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}''(V) :: \text{surj}$  から,  $g(\tilde{s})|_V = s''$  なる  $\tilde{s} \in \mathcal{F}(U)$  が取れる.

(3) naturality から  $g(\tilde{s}|_V) = s'' = g(\tilde{s})|_V$ .

$s := g(\tilde{s}) \in \mathcal{F}''(U)$  とおけば  $s|_V = s''$ .

(d) If  $f : X \rightarrow Y$  is Conti. and  $\mathcal{F}$  is Flasque, then  $f_*\mathcal{F}$  is Flasque.

$U, V :: \text{open in } Y, V \subseteq U$  とする. このとき  $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$ . なので  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V) :: \text{surj}$  より  $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{F}(f^{-1}(V)) :: \text{surj}$ .  $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$  だから,  $f_*\mathcal{F} :: \text{flasque}$ .

(e) Discontinuous Sections.

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$  とする. これに対し, discontinuous sections of  $\mathcal{F}$  と呼ばれる sheaf  $\mathcal{G}$  が以下のように作れる.  $\pi$  は Ex1.13 の  $s_P \mapsto P$  なる写像である.

$$\mathcal{G} : U \mapsto \left\{ s : U \rightarrow \bigsqcup_{P \in U} \mathcal{F}_P \mid \pi \circ s = \text{id}_U \right\}$$

$\mathcal{G}$  が flasque sheaf であることと,  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  の自然な単射が存在することを示す.

■  $\mathcal{G} :: \text{sheaf}$ .  $\mathcal{G} :: \text{presheaf}$  は明らか. sheaf であることを示すため,  $U :: \text{open in } X$  とその open cover  $\{U_i\}_{i \in I}$  をとり, 固定する. 任意の  $i \in I$  について  $s|_{U_i} = 0$  であるような  $s \in \mathcal{G}(U)$  が存在したとする.  $\bigcup U_i = U$  より, 任意の点  $P \in U$  に対して  $s(P) = 0$ . これは Identity Axiom の成立を意味する. 同様に “ $\forall i, j, \forall P \in U_i \cap U_j,$  ” を “ $\forall P \in U,$  ” に書き換えるだけで, Glueability Axiom の成立が証明できる.

■  $\mathcal{G} :: \text{flasque}$ .  $V \subset U$  とする.  $s \in \mathcal{G}(V)$  をとる. これは例えば以下のように拡張できる.

$$\bar{s}(P) = \begin{cases} s(P) & (P \in V) \\ 0 & (P \in U \setminus V) \end{cases}$$

■  $\alpha$  in Ex1.13 is injective. Ex1.13 の  $\alpha : s \mapsto [P \mapsto s_P]$  が injective であることは以下のように示される. ある  $s, t \in \mathcal{F}(U)$  について  $\alpha(s) = \alpha(t)$  が成立するとしよう. すると十分小さい open set  $(P \in) V_P \subset U$  が存在して,  $s|_{V_P} = t|_{V_P}$  となる. 明らかに  $\{V_P\}_{P \in U}$  は  $U$  の open cover なので,  $s - t \in \mathcal{G}$  に Identity Axiom を用いて  $s = t$  が得られる.

## Ex1.17 Skyscraper Sheaves.

$X :: \text{topological space}, P \in X, A :: \text{abelian group}$  とする. sheaf  $i_P(A)$  を以下で定める.

$$i_P(A)(U) = \begin{cases} A & (P \in U) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

点  $P$  を含む最小の閉集合を  $\{P\}^-$  と書く.

(a)  $(i_P(A))_Q = A$  is  $A$  if  $Q \in \{P\}^-$ , otherwise  $0$ .

$U$  を  $Q$  を含む極小の開集合とした時,  $(i_P(A))_Q$  は集合として  $\mathcal{F}(U)$  と一致する. したがって以下が成立する.

$$\begin{aligned} (i_P(A))_Q &= A \\ \iff \forall U \subset X, Q \in U \implies P \in U \\ \iff \forall U \subset X, P \in U^c \implies Q \in U^c. \end{aligned}$$

最後の行は対偶として得られた. 一方, 点  $P$  を含む最小の閉集合  $\{P\}^-$  は以下を満たす唯一の集合として特徴づけられる.

$$\forall U \subset X, P \in U^c \implies \{P\}^- \subseteq U^c$$

よって  $(i_P(A))_Q = A \iff Q \in \{P\}^-$ . 他の方は明らかに  $(i_P(A))_Q = 0$  となる. また, この特徴付けの対偶から  $U \cap \{P\}^- \neq \emptyset$  ならば  $P \in U$ .  $P \in U$  ならば  $P \in U \cap \{P\}^-$  なので逆も成立する.

(b)  $i_P(A)$  can be described as direct image.

abelian group  $A$  に伴う  $\{P\}^-$  上の constant sheaf を  $\mathcal{A}$  とする. すると  $i_P(\mathcal{A})$  は埋め込み写像  $i : \{P\}^- \hookrightarrow X$  の direct image  $i_*(\mathcal{A})$  に等しい. 実際, 開集合  $U$  について  $i_*(\mathcal{A})(U) = \mathcal{A}(i^{-1}(U)) = \mathcal{A}(U \cap \{P\}^-)$  であるから以下のようになる.

$$i_*(\mathcal{A})(U) \cong \begin{cases} A & (U \cap \{P\}^- \neq \emptyset) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

(a) で見たとおり  $U \cap \{P\}^- \neq \emptyset$  と  $P \in U$  は同値. よって  $i_*(\mathcal{A}) = i_P(A)$ . 特に,  $\{P\}^-$  はその最小性から irreducible なので, Ex1.16a,d と合わせれば  $i_P(A)$  は flasque であることが分かる.

## Ex1.18 Adjoint Property of $f^{-1}$ .

$f : X \rightarrow Y :: \text{continuous map}$  について,  $f^{-1}$  が  $f_*$  の left adjoint functor であることを示す. left adjoint の定義としては Hom についての定義を用いる.

unit  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Sh}(Y)} \rightarrow f_* f^{-1}$  と counit  $\epsilon : f^{-1} f_* \rightarrow \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$  を構成する.

■ Construction of Unit  $\eta$ .  $\mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(Y)$  をとると,  $U :: \text{open in } Y$  について次の等式が成り立つ.

$$(f_* f^{-1} \mathcal{G})^{pre}(U) = (f^{-1} \mathcal{G})^{pre}(f^{-1}(U)) = \varinjlim_{V \supseteq f \circ f^{-1}(U)} \mathcal{G}(V).$$

$U \supseteq f \circ f^{-1}(U)$  (全射と等号成立は同値) だから, cocone の「母線」として

$$(\eta_{\mathcal{G}}^{pre})_U : \mathcal{G}(U) \rightarrow (f_* f^{-1} \mathcal{G})^{pre}(U)$$

が得られる. これを sheafification functor  $Sh$  で写して,  $\eta : \text{id}_{\mathbf{Sh}(Y)} \rightarrow f_* f^{-1}$  が得られる.  $\eta$  の自然性は容易に示される.

■ Construction of Counit  $\epsilon$ .  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$  をとると,  $U :: \text{open in } X$  について次の等式が成り立つ.

$$(f^{-1} f_* \mathcal{F})^{pre}(U) = \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{F}(f^{-1}(V)).$$

$V \supseteq f(U)$  であるとき,  $f^{-1}(V) \supseteq f^{-1} \circ f(U) \supseteq U$  (単射と等号成立は同値). したがって colimit の UMP により  $(\epsilon_{\mathcal{F}}^{pre})_U$  が得られる.

$$\begin{array}{ccc} & (f^{-1}f_*\mathcal{F})^{pre}(U) & \xrightarrow{(\epsilon_{\mathcal{F}}^{pre})_U} \mathcal{F}(U) \\ & \uparrow & \nearrow \text{res} \\ \dots & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{F}(V_-) \end{array}$$

ただし  $V_-$  は  $V \supseteq f^{-1} \circ f(U)$  なる開集合  $V$  の中で極小のものである.  $\epsilon^{pre}$  を sheafification functor  $Sh$  で写して,  $\epsilon: f^{-1}f_* \rightarrow \text{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$  が得られる.  $\epsilon$  の自然性は  $\text{res}$  の自然性から誘導される.

■Preparation of Unit-Counit Equations. まず  $f \circ f^{-1}(B) \subseteq B$  に  $B = f(A)$  を代入すると  $f \circ f^{-1} \circ f(A) \subseteq f(A)$ . 続いて  $f^{-1} \circ f(A) \supseteq A$  の両辺を  $f$  で写すと  $f \circ f^{-1} \circ f(A) \supseteq f(A)$ . 二つを合わせて  $f \circ f^{-1} \circ f = f$  が得られる. 双対的に  $f^{-1} \circ f \circ f^{-1} = f^{-1}$  が得られる.

■Unit-Counit Equations. 以下の可換図式を見よ.

$$\begin{array}{ccc} (f_*f^{-1}f_*\mathcal{F})^{pre}(U) & \xrightarrow{f_*(\epsilon^{pre})_{\mathcal{F}}} & (f_*\mathcal{F})(U) \\ \uparrow & \nwarrow & \parallel \\ \dots & \xrightarrow{(\eta^{pre})_{f_*\mathcal{F}}} & \mathcal{F}(f^{-1} \circ f \circ f^{-1}(U)) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \end{array}$$

よって  $\text{id}_{f_*} = f_*\epsilon \circ \eta_{f_*}$  が得られた. 次に  $\mathcal{G} \xrightarrow{\eta_{\mathcal{G}}} f_*f^{-1}\mathcal{G}$  と  $f_*f^{-1}\mathcal{G}$  の下にある cocone を  $f^{-1}$  で写し,  $\epsilon$  を図式に追加することで, 以下の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} (f^{-1}f_*f^{-1}\mathcal{G})^{pre}(U) & \xrightleftharpoons[f^{-1}(\eta^{pre})_{\mathcal{G}}]{(\epsilon^{pre})_{f^{-1}\mathcal{G}}} & (f^{-1}\mathcal{G})^{pre}(U) \\ \uparrow & \nwarrow & \uparrow \\ \dots & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & \dots \xrightarrow{\quad \quad \quad} \mathcal{G}(f \circ f^{-1} \circ f(U)) = \mathcal{G}(f(U)) \end{array}$$

$f^{-1}\mathcal{G}$  が持つ (colimit の) UMP から,  $\text{id}_{f^{-1}} = \epsilon_{f^{-1}\mathcal{G}} \circ f^{-1}\eta_{\mathcal{G}}$ .

■Hom-set Definition. 以下のように写像を定義する.

$$\phi(-) = f_*(-) \circ \eta_{\mathcal{G}}, \quad \psi(-) = \epsilon_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}(-).$$

すると unit-counit equations からこれらが互いに逆写像であることが分かる. こうして所期の同型  $\phi: \text{Hom}(f^{-1}\mathcal{F}, \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{G})$  が得られる. 自然性は  $\eta, \epsilon$  の自然性から誘導される.

## Ex1.19 Extending a Sheaf by Zero.

$X ::$  topological space,  $Z ::$  closed subset in  $X$ ,  $U = X \setminus Z$  とする. さらに  $i: Z \hookrightarrow X, j: U \hookrightarrow X$  を埋め込み写像とする.

(a)  $i_*\mathcal{F}: \text{Extending } \mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(Z) \text{ by Zero Outside } Z.$

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(Z)$  とする.  $i$  は埋め込み写像なので, 開集合  $U$  について  $(i_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U \cap Z)$ . 点  $P$  の開近傍を考える.



■Case:  $P \in Z^c$ .  $Z^c$  は開集合だから,  $P \in Z^c$  ならば, 開近傍  $V$  が存在して  $P \in V \subseteq Z^c$  となる. このとき,  $\mathcal{F}(Z \cap V) = \mathcal{F}(\emptyset) = 0$  となる. しかも  $\mathcal{F}(Z \cap V) = 0$  は十分小さいすべての  $U$  について成り立つ. したがって  $P$  の任意の開近傍  $V$  について次の図式が可換.

$$\begin{array}{ccc} & (i_*\mathcal{F})_P & \\ \nearrow & & \nwarrow \\ \mathcal{F}(Z \cap V) & \xrightarrow{i_* \text{res}_V^\emptyset} & 0 \end{array}$$

よって  $\mathcal{F}(Z \cap V) \rightarrow (i_*\mathcal{F})_P$  はゼロ写像しかなく,  $(i_*\mathcal{F})_P$  の UMP から  $(i_*\mathcal{F})_P = 0$ .

■Case:  $P \in Z$ . 逆に  $P \in Z$  ならば, 点  $P$  の  $X$  における開近傍  $U$  から作られる  $Z \cap U$  は, 常に空でない  $P$  の開近傍. いつでも埋め込み射  $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(Z \cap V)$  が存在するので, 結局  $\mathcal{F}(V)$  ( $P \in V$ ) なる abelian group 全てから  $(i_*\mathcal{F})_P$  に射がのびている. よって  $(i_*\mathcal{F})_P = \mathcal{F}_P$ .

■Conclusion. まとめると, 以下が成り立つ.

$$(i_*\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & (P \in Z) \\ 0 & (P \notin Z) \end{cases}$$

## (b) $j_!\mathcal{F}$ : Extending $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(U)$ by Zero Outside $U$

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(U)$  とし,  $j_!\mathcal{F}$  を以下で定まる presheaf の sheafification とする.

$$(j_!\mathcal{F})^{pre}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & (V \subseteq U) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

sheafification で stalk は変わらないから,  $(j_!\mathcal{F})_P = (j_!\mathcal{F})_P^{pre}$ .

点  $P$  の開近傍を考えよう.

■Case:  $P \in U$ .  $U :: \text{open}$  なので, ある  $V :: \text{open}$  が存在して  $P \in V \subseteq U$  となる. このような  $V$  について  $(j_!\mathcal{F})^{pre}(V) = \mathcal{F}(V)$ .  $U$  より小さい任意の開近傍  $V$  については  $(j_!\mathcal{F})^{pre}(V) = \mathcal{F}(V)$  となる上,  $U$  より大きい任意の開近傍  $V$  から射  $\text{res}_V^{U \cap V} : \mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  が生えている. よって  $(j_!\mathcal{F})_P^{pre} = \mathcal{F}_P$ .

■Case:  $P \in U^c$ . このとき, どのように  $P$  の開近傍  $V$  をとっても,  $P \in V$  かつ  $P \notin U$  なので  $V \not\subseteq U$ . したがって  $(j_!\mathcal{F})_P^{pre} = 0$  となる.

■Conclusion. まとめると, 以下が成り立つ.

$$(j_!\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & (P \in U) \\ 0 & (P \notin U) \end{cases}$$

## (c) $0 \rightarrow j_!(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*(\mathcal{F}|_Z) \rightarrow 0$ is Exact.

Ex1.2c を応用する.  $P \in X$  を任意の点とする.  $P \in U \text{ exor } Z$  なので, それぞれの場合について考える.

■Case:  $P \in Z$ . この時,  $(j_!(\mathcal{F}|_U))_P = \mathcal{F}_P$ ,  $(i_*(\mathcal{F}|_Z))_P = 0$  となる. よって  $0 \rightarrow (j_!(\mathcal{F}|_U))_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P \rightarrow 0$  は  $0 \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow 0 \rightarrow 0$  に等しく, これは完全列.

■Case:  $P \in U$ . この時,  $(j_!(\mathcal{F}|_U))_P = 0, (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P = \mathcal{F}_P$  となる. よって  $0 \rightarrow (j_!(\mathcal{F}|_U))_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P \rightarrow 0$  は  $0 \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow \mathcal{F}_P \rightarrow 0$  に等しく, これは完全列.

## Ex1.20 Subsheaf with Supports.

$Z :: \text{closed in } X, \mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$  とする.  $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$  を以下で定める.

$$\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \mid \text{Supp}(s) \subseteq Z\}.$$

“ $\text{Supp}(s) \subseteq Z$ ” は “ $\forall P \in Z^c, s(P) = 0$ ” と同値である. また, 特に  $\text{Supp}(0) = \emptyset$  より,  $0 \in \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ .

(a) Presheaf  $V \mapsto \Gamma_{V \cap Z}(V, \mathcal{F}|_V)$  is a Sheaf.

Presheaf  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$  を

$$\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) : V \mapsto \Gamma_{V \cap Z}(V, \mathcal{F}|_V)$$

で定める. これが sheafであることを示そう. 開集合  $V$  とその開被覆  $\{V_i\}_{i \in I}$  を任意にとる.

■Identity Axiom.  $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V)$  をとる. 任意の  $i \in I$  について  $s|_{V_i} = 0$  が成り立つとしよう. この時,  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$  の定義から,  $s \in \mathcal{F}(V)$  と  $\text{Supp}(s|_V) \subseteq V \cap Z$  が成り立つ.  $\mathcal{F}$  の identity axiom をもちいて,  $s|_V = 0$  が得られる.

■Glueability Axiom.  $s_i \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V_i)$  をとる. 任意の  $i, j \in I$  について  $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$  が成り立つとしよう. するとやはり  $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$  なので,  $\mathcal{F}$  の glueability axiom から,  $s|_{V_i} = s_i$  なる  $s \in \mathcal{F}(V)$  が存在する. あとは  $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V)$ , すなわち  $\text{Supp}(s) \subseteq V \cap Z$  を示せば良い. これは

$$\text{Supp}(s_i) = \text{Supp}(s|_{V_i}) = \text{Supp}(s) \cap V_i \subseteq V_i \cap Z$$

から  $\text{Supp}(s) = \bigcup (\text{Supp}(s) \cap V_i) \subseteq \bigcup (V_i \cap Z) = V \cap Z$  と計算できる.

(b) For  $U = X \setminus Z$ ,  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$  is Exact.

開集合  $U = X \setminus Z$  と  $j : U \hookrightarrow X$  について,  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$  が exact であることを示す. さらに,  $\mathcal{F} :: \text{flasque}$  ならば  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U) \rightarrow 0$  も exact であることを示す.

定義より,  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}), j_*(\mathcal{F}|_U)$  は以下のような集合である.

$$\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(V) \mid \forall Q \in U \cap V, s(Q) = 0\}, \quad j_*(\mathcal{F}|_U) = \mathcal{F}(U \cap V).$$

そこで写像  $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U)$  を以下で定義する.

$$\zeta(s)(Q) = [Q \in U \cap V]s(Q) \text{ where } V :: \text{open in } X, s \in \mathcal{F}(V), Q \in V.$$

ただし  $[Q \in U \cap V]$  は Iverson の記法である. (ここは指示関数を用いて  $\chi_{U \cap V}(Q)$  と書いても良い.) すると既に確認した  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$  の定義から,  $\ker \zeta = \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ . よって  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\zeta} j_*(\mathcal{F}|_U)$  は exact.

さらに  $\mathcal{F} :: \text{flasque}$  だと仮定する. すると,  $s \in \mathcal{F}(U \cap V)$  に対して  $s'|_{U \cap V} = s$  なる  $s' \in \mathcal{F}(V)$  が存在する. 明らかに  $\zeta(s') = s$  となるから, この時  $\zeta$  は全射. したがって  $0 \rightarrow \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow j_*(\mathcal{F}|_U) \rightarrow 0$  も exact になる.

## Ex1.21 Some Examples of Sheaves on Varieties.

$k ::$  algebraically closed field,  $X ::$  variety over  $k$  とする.  $\mathcal{O}_X$  を the sheaf of regular functions on  $X$  (Example 1.0.1) とする.

(a) The Sheaf of Ideals  $\mathcal{I}_Y$ .

$Y ::$  closed in  $X$  とする. 任意の  $U ::$  open in  $X$  について,  $\mathcal{I}_Y(U)$  を以下で定める.

$$\mathcal{I}_Y : U \mapsto \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid \forall P \in Y \cap U, f(P) = 0\}.$$

$\mathcal{I}_Y(U)$  は  $\mathcal{O}_X(U)$  のイデアルである. この時,  $\mathcal{I}_Y(\subseteq \mathcal{O}_X)$  が sheaf であることを示す.

(b) If  $Y ::$  subvariety, then  $\mathcal{O}_X \cong i_*(\mathcal{O}_Y)$ .

(c)

(d)

(e)

## Ex1.22 Glueing Sheaves.

$X ::$  topological space,  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I} ::$  open cover of  $X$ ,  $\mathcal{F}_i \in \mathbf{Sh}(U_i)$  とする. この  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  に付随して, 同型写像  $\phi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i \cap U_j} \xrightarrow{\cong} \mathcal{F}_j|_{U_i \cap U_j}$  が存在し,  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  with  $\{\phi_{ij}\}_{i,j \in I}$  が inverse system をなすとする. この時, inverse limit  $\mathcal{F}$  の存在を示す. さらに,  $\mathcal{F}|_{U_i} \cong \mathcal{F}_i$  となることを示す. この命題は section でなく sheaf の Glueability Axiom と言える.

Prop1.1 を用いて仮定を書き換える.  $\{\mathcal{F}_i\}_{i \in I}$  について, 以下の同型がある.

$$\forall i, j \in I, \forall P \in U_i \cap U_j, (\mathcal{F}_i)_P \cong (\mathcal{F}_j)_P.$$

この時, sheaf  $\mathcal{F}$  が存在して,

$$\forall i \in I, \forall P \in U_i, \mathcal{F}_P = (\mathcal{F}|_{U_i})_P \cong (\mathcal{F}_i)_P$$

となることを示す. Ex1.19b の結果が結論によく似ているので, これを参考にする.

$\mathcal{F}$  を以下の presheaf の sheafification と定義する.

$$\mathcal{F}^{pre}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_i(V) & (\exists i \in I, V \subseteq U_i) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

もし  $V \subseteq U_i$  なる  $i$  が複数存在した時には, どれを選んでも構わない. その時  $V \subset U_i \cap U_j$  なる  $i, j \in I$  が存在し,  $i, j$  どちらを選んでも  $\mathcal{F}^{pre}(V)$  が  $\phi_{ij}$  を介して同型になるからである. そして Ex1.19b の証明から分かるように,  $(\mathcal{F}|_{U_i})_P = (\text{emb}_!^{U_i} \mathcal{F}_i)_P = (\mathcal{F}_i)_P$ . ただし  $\text{emb}^{U_i} : U_i \hookrightarrow U$  は埋め込み写像である.