Ex2.1　$(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \approx (\operatorname{Spec} A_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f})$

A :: ring, $X = \operatorname{Spec} A$, $f \in A$ とし，$D(f) = (V((f)))^c$ とする．$S = \{1, f, f^2, \dots\}$ とし，以下のように写像を定める．

$$\begin{array}{cccc} \phi: & D(f) & \to & \operatorname{Spec} A_f \\ & \mathfrak{p} & \mapsto & S^{-1}\mathfrak{p} \\ & \mathfrak{q} \cap A & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

$\mathfrak{p}$ は S と共通部分を持たない素イデアルだから，Ati-Mac Prop3.11 より，ϕ は全単射．

C :: open in $D(f)$ とする．この時，

$$C = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{p}, (f) \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

となるイデアル $\mathfrak{I} \subset A$ が存在する．Ati-Mac Prop3.3 より，ϕ は単射を保つから，$\phi(C)$ も closed．逆に D :: open in $\operatorname{Spec} A_f$ をとる．再び Ati-Mac Prop3.11 より，$\operatorname{Spec} A_f$ の任意の元は拡大イデアルだから，

$$D = \{\phi(\mathfrak{p}') \in \operatorname{Spec} A_f \mid \phi(\mathfrak{I}') \subseteq \phi(\mathfrak{p}'), \phi(f) \not\subseteq \phi(\mathfrak{p}')\}$$

と書ける．つまり，$D = \phi(V(\mathfrak{I}'))$．$\phi$ は全単射なので $\phi^{-1}(D) = V(\mathfrak{I}')$ となり，これは closed．以上より ϕ が同相写像であることがわかった．

Prop2.3 と同様に locally ringed space の射を構成しておく．これは

$$f : \mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p}), \quad f^{\#} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f}(-) \mapsto \mathcal{O}_X|_{D(f)}(\phi(-))$$

で定義される．

Ex2.2　If X :: scheme, and U :: open in X, then $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ :: scheme.

X は scheme だから，開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在し，$(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda})$ は affine scheme となる．すなわち，R_λ :: ring が存在して

$$(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda}) \approx (\operatorname{Spec} R_\lambda, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_\lambda})$$

と書ける．

$V_\lambda = U \cap U_\lambda$ とすると，$\{V_\lambda\}$ は U の開被覆である．そして各 $V_\lambda \subseteq U_\lambda$ は affine scheme の開集合．教科書 pp.70-71 から，affine scheme の open base は $D(f)$ $(f \in R_\lambda)$ の形の開集合全体である．したがって，各 V_λ について，以下のような条件を満たす R_λ の部分集合 F_λ が取れる．

$$V_\lambda = \bigcup_{f \in F_\lambda} D(f).$$

まとめると，

$$U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcup_{f\in F_\lambda} D(f).$$

$f \in R_\lambda$ であるとき，$D(f) \subseteq U_\lambda = \operatorname{Spec} R_\lambda$ と Ex2.1 より $(D(f), \mathcal{O}_{U_\lambda}|_{D(f)})$ は affine．よって U は affine scheme で被覆される．（$\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U$ に注意．）

Ex2.3 Reduced Schemes.

scheme $(X,\mathcal{O}_X)$ が reduced とは，任意の開集合 $U \subseteq X$ について $\mathcal{O}_X(U)$ がベキ零元を持たない，すなわち $\mathcal{O}_X(U)$ が reduced ring である，ということ．$(X,\mathcal{O}_X)$ の reduced scheme $(X,(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ を，presheaf $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)/\operatorname{Nil}(\mathcal{O}_X(U))$ の sheafification とする．この X から得られた reduced scheme を X_{red} と書く．

(a) $(X,\mathcal{O}_X)$ :: reduced $\iff$ $^\forall P \in X,\quad \mathcal{O}_{X,P}$ :: reduced.

両者の対偶を示す．

■($\Longleftarrow$)　U :: open in $X, s \in \mathcal{O}_X(U), s \neq 0$ とする．s が nilpotent であったと仮定すると，$s^n = 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する．$s \neq 0$ から，ある点 $P \in U$ においては $s(P) \neq 0$．しかし $s^n(P) = 0 = (s(P))^n$ なので，$s(P) \in \mathcal{O}_{X,P}$ は nilpotent.

■($\Longrightarrow$)．ある点 P において，$a/f \in \mathcal{O}_{X,P} \cong A_{\mathfrak{p}_P}$ が nilpotent であったとする．この時，P の開近傍 $D(f)$ 上で定義される定値写像 $c(*) = a/f$ が取れる．明らかにこの写像は $\mathcal{O}_X(D(f))$ の元で，しかも nilpotent.

(b) $(X,(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ :: scheme.

$(X,\mathcal{O}_X)$ が affine scheme だと仮定して証明する．調べる必要があるのは，$(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}$ は sheaf of ring on $\operatorname{Spec} A$ であること，すなわち以下が成り立つことである．

$$^\forall U \text{ :: open in } X,\quad ^\forall s \in (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}(U),\quad ^\forall \mathfrak{P} \in X,\quad P \in {}^\exists V \subseteq U ^\forall \mathfrak{q} \in V,\quad s(Q) \in A_{\mathfrak{q}}.$$

$s \in (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}(U)$ を任意に取る．sheafification のやり方から，点 P の十分小さな開近傍 V について $s \in \mathcal{O}_X(U)/\operatorname{Nil}(\mathcal{O}_X(U))$ と言える（正確には presheaf を sheaf に埋め込む射が必要）．（TODO）

(c) If X :: reduced scheme, then $X \to Y$ is uniquely factored into $X \to Y_{\mathrm{red}} \to Y$.

Ex2.4 Functor Γ and Affine Schemes.

A :: ring, X :: scheme とする．写像 α を以下で定める．

$$\begin{array}{cccc} \alpha: & \operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, SpecA) & \to & \operatorname{Hom}_{\mathbf{Rings}}(A, \Gamma(X,\mathcal{O}_X)) \\ & (f, f^\#) & \mapsto & f^\#_{\operatorname{Spec} A}. \end{array}$$

これが bijective であることを示す．

■Definition of $\beta : \operatorname{Hom}(A, \Gamma(X,\mathcal{O}_X)) \to \operatorname{Hom}(X, SpecA)$.　X の open affine cover を $\{U_i\}_{i\in I}$ とおく．また，B_i :: ring を

$$(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \cong (\operatorname{Spec} B_i, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B_i})$$

となるものとして定める．この時，写像 β を次のように定める．$\phi \in \operatorname{Hom}(A, \Gamma(X,\mathcal{O}_X))$ とすると，

$$\phi_i := \operatorname{res}^{U_i}_X \circ \phi : A \to \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = B_i$$

が得られる．ここから誘導される morphism of schemes $(f_i, f_i^{\#}) : U_i \to \operatorname{Spec} A$ を用いて，$(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ を

$$f(x) = x \in U_i \text{ となる } i \text{ について } f_i(x); f_U^{\#}(s) = s \circ f$$

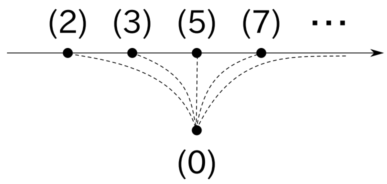
とおく．ここまでの ϕ から $(f, f^{\#})$ を得る操作を，まとめて β とおく．

■$\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$.

■$\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$.

Ex2.5　$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ is the Final Object in $\mathbf{Sch}$.

$\mathbb{Z}$ は次元 1 の環だから，$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ は以下の図のようになる．



任意の環 R について，homomorphism $\phi : \mathbb{Z} \to R$ を考える．準同型だから $\phi(0) = o, \phi(1) = e, \phi(-1) = -e$（ただし o, e はそれぞれ R の加法/乗法単位元.）となる．そして $\mathbb{Z}$ は無限巡回群だから，$\phi(n-m) = \sum_{i=1}^{n} e + \sum_{i=1}^{m} (-e)$ となり，よって準同型 $\mathbb{Z} \to R$ はただひとつ．つまり $|\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, R)| = 1$. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ は affine space だから，Ex2.4 より，任意の scheme X について $|\operatorname{Hom}(X, \operatorname{Spec} \mathbb{Z})| = 1$．すなわち，$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ は $\mathbf{Sch}$ の final object となる．

Ex2.6　$\operatorname{Spec}\{0\}$ is the Initial Object in $\mathbf{Sch}$.

零環 $\{0\}$ はただひとつのイデアル（したがって素イデアル）(0) を持つから，$\operatorname{Spec}\{0\}$ は 1 点集合．零環から別の環への準同型写像は $0 \mapsto 0$ なるものしか無い．scheme の間の射は環の間の準同型から作られるものしかないから（Prop2.3c），$\operatorname{Spec}\{0\}$ から別の scheme への射は $0 \mapsto 0$ から得られるものしか無い．よって $\operatorname{Spec}\{0\}$ は initial object.

Ex2.7　Residue Field.

Residue field of x on X とは，剰余体 $k(x) := \mathcal{O}_{X,x} / \mathfrak{m}_{X,x}$ のことである．

K :: field, $O := (0) \subset K$ とする．すると $\operatorname{Spec} K = \{O\}$ であり，開集合は $\emptyset, \operatorname{Spec} K = \{O\}$ の二つのみ．したがって $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} K) = K$ となる．$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O}$ は $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} K)$ のみからなる direct system の direct limit だから，これらは厳密に等しい．

■$(f, f^{\#}) \to (x, \phi)$　$(f, f^{\#}) : (\operatorname{Spec} K, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ を考えよう．$f : \operatorname{Spec} K \to X$ は，$\operatorname{Spec} K$ が 1 点空間であることから，$f(O)$ の値のみで定まる．この値を $x := f(O)$ としておこう．$f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}$ は

$$f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(U) = \begin{cases} K & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases}$$

で定まる．これは K の skyscraper sheaf (Ex.1.17) である．すると，$f^\# : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}$ は x における stalk の間の射

$$f_x^\# : \mathcal{O}_{X,x} \to (f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K})_x = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O} = K$$

を誘導する[†1]．これは以下の図式を可換にする射である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "f_x^\#"] & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{O}_X(U) \arrow[u, "\mu_U"] \arrow[r, "f_U^\#"] & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(\{O\})
\end{tikzcd}$$

ただしこの図式では $x \in U \subseteq X$．今扱っているのは locally ringed space の morphism だから，

$$(f_x^\#)^{-1}(\mathfrak{m}_{\operatorname{Spec} K, O}) = (f_x^\#)^{-1}(0) = \mathfrak{m}_{X,x}.$$

よって $\ker f_x^\# = \mathfrak{m}_{X,x}$ で，$(f^\#)_x$ は

$$\mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} = k(x) \xrightarrow{\phi} K$$

へと分解される．こうして $(f, f^\#)$ から $x \in X$ と $\phi_f : k(x) \to K$ が得られた．

■$(x, \phi) \to (f, f^\#)$　逆に $x \in X$ と $\phi : k(x) \to K$ から $(f, f^\#)$ を作る．これには以上の手順を逆にたどればよい．まず f は以下のものになる．

$$\begin{array}{cccc} f: & \operatorname{Spec} K & \to & X \\ & O & \mapsto & x \end{array}$$

$\phi : k(x) \to K$ から $f^\#$ を復元するには，以下のようにする．

$$\begin{array}{cccc} f_U^\# : & \mathcal{O}_X(U) & \to & (f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K})(U) \\ & s & \mapsto & \begin{cases} \Phi_U(s) & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases} \end{array}$$

ここでの Φ_U (with $x \in U$) は，以下のような写像の結合である．

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \varinjlim_{x \in V} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} = k(x) \xrightarrow{\phi} K = (f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K})(U)$$

$f^\#$ から ϕ を作った時，ϕ から再び $f^\#$ に戻ることは，前段落で見た二つの図式から分かる．

Ex2.8　$\operatorname{Hom}_{/\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} k[x]/(x^2), X) \cong \operatorname{Rat}(X) \times T_x X$.

$\epsilon = x + (x^2), D = k[x]/(x^2) = k[\epsilon]$ とおく．$\epsilon^2 = 0$ をよく使う．$(f, f^\#) \in \operatorname{Hom}_{/\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} D, X)$ をとる．これは $\operatorname{Spec} k$ 上の morphism である（教科書 p.78 参照）．したがって

$$(p, p^\#) : \operatorname{Spec} D \to \operatorname{Spec} k, (q, q^\#) : X \to \operatorname{Spec} k$$

が存在し $(p, p^\#) = (q, q^\#) \circ (f, f^\#)$ が成立する．

$O := (0) \subset k, \mathfrak{m} := \operatorname{Nil}(A) = (\epsilon)$ とすると，Ex2.3b より $\operatorname{Spec} D \approx \operatorname{Spec} D_{red} = \operatorname{Spec} k$．そこで $x = f(\mathfrak{m})$ としておく．

多項式環 $k[x]$ を k 代数とみなすときは，自然な埋め込み射で k 代数とみなす．**他の場合を考えることはない．**

[†1] この写像は $\varinjlim_{x \in U} f^\#$ ではない．また，$(f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K})_x = \varinjlim_{x \in V \subseteq X} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(f^{-1}(V)) = K$.

■stalk 間の写像． 特に structure sheaf の間に次の可換図式がある．

$$
\begin{tikzcd}
p_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} D} & & q_*\mathcal{O}_X \arrow[ll, "q_* f^\#"'] \\
& \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k} \arrow[ul, "p^\#"] \arrow[ur, "q^\#"'] &
\end{tikzcd}
$$

この図式の射達から誘導される射達を書くと以下のようになる．（TODO: これは可換？）

$$
\begin{tikzcd}
D = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} D,\mathfrak{m}} & & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[ll, "f^\#_{\mathfrak{m}}"'] \\
& k \arrow[ul, "p^\#_{\mathfrak{m}}"] \arrow[ur, "q^\#_x"'] &
\end{tikzcd}
\tag{dg2.18}
$$

この図式を図式 (dg2.18) と呼ぶことにする．ここで

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k, p(\mathfrak{m})} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k, qf(\mathfrak{m})} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k, O} = k, \quad \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} D,\mathfrak{m}} = D_{\mathfrak{m}} = D$$

を用いた[†2]．

■$k \cong k(x)$． 図式 (dg2.18) の射はいずれも local homomorphism だから，以下が成り立つ．

$$(p^\#_{\mathfrak{m}})^{-1}(\mathfrak{m}) = (0), \quad (q^\#_x)^{-1}(\mathfrak{m}_{X,x}) = (0), \quad (f^\#_{\mathfrak{m}})^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_{X,x}$$

ev_0 を $\epsilon \mapsto 0$ という代入写像だとすると，これは全射．$ev_0^{-1}(0) = \mathfrak{m}, (f^\#_{\mathfrak{m}})^{-1}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_{X,x}$ より $\ker(ev_0 \circ f^\#_{\mathfrak{m}}) = \mathfrak{m}_{X,x}$．なので準同型定理が使える．$\ker(ev_0 \circ p^\#_{\mathfrak{m}})^{-1} = (0)$ も同様にして得られる．標準的全射 $\mathcal{O}_{X,x} \to k(x)$ を用いれば $q^\#_x$ についても同様である．

$$
\begin{tikzcd}
k & & k(x) \arrow[ll, tail] \\
D \arrow[u, two heads, "ev_0"'] & & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[ll, "f^\#_{\mathfrak{m}}"'] \arrow[u, two heads] \\
& k \arrow[ul, "p^\#_{\mathfrak{m}}"] \arrow[ur, "q^\#_x"'] &
\end{tikzcd}
$$

$p^\#$ は標準的入射であり，したがって $p^\#_{\mathfrak{m}}|_k = \mathrm{id}_k$ となっている．なので図式にある $k \to k$ の射は全単射であり，このことと図式の可換性から $k \cong k(x)$ が分かる ($g \circ f$ が全射ならば g も全射であることを使う)．

■$(f, f^\#)$ から $v_f \in T_xX$ を構成する． $\mathfrak{m} \subseteq f^\#_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}_{X,x})$ であるから，以下が成り立つ．

$$^\forall a \in \mathfrak{m}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{X,x}, \quad ^\exists \beta \in k, \quad f^\#_{\mathfrak{m}}(a) = \beta\epsilon \in \mathfrak{m} = (\epsilon).$$

$aa' \in \mathfrak{m}^2_{X,x}$ については $\epsilon^2 = 0$ より $f^\#_{\mathfrak{m}}(aa') = 0$ となる．よって $\mathfrak{m}^2_{X,x} \subseteq \ker f^\#_{\mathfrak{m}}$ が得られる．なので

$$T_xX \ni v_f = \frac{1}{\epsilon} f^\#_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m}_{X,x}/\mathfrak{m}^2_{X,x} \to k$$

が得られる．

[†2] $\frac{a+b\epsilon}{c+d\epsilon} \in D_{\mathfrak{m}}$ は (分母) $\notin (\epsilon)$ なので $c \neq 0$．分子分母に $c - d\epsilon$ をかけると $\frac{ac+(bc-ad)\epsilon}{c^2}$ となり，$D_{\mathfrak{m}} = D$ が示される．

■$x \in \mathrm{Rat}(X), v \in T_xX$ **から** $(f_v, f_v^\#)$ **を構成する．**　$\operatorname{Spec} D = \{\mathfrak{m}\}$ なので $f_v : \mathfrak{m} \mapsto x$ とする．$k(x) = k$ だから，$a \mapsto a(x)$ なる代入写像 (これは $a \mapsto a \bmod \mathfrak{m}_{X,x}$ と見ても同じ) は k に値を取る．また，$a - a(x)$ は同じ代入写像で 0 になるから $\mathfrak{m}_{X,x}$ に属す．そこで $a \in \mathcal{O}_{X,x}$ に対し，以下のように定める．

$$(f_v^\#)_x(a) = a(x) + v([a - a(x)] \bmod \mathfrak{m}_{X,x}^2)\epsilon.$$

さらに $U \subset X$ について

$$((f_v)_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} D})(U) = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} D}(f_v^{-1}(\{x\} \cap U)) = \begin{cases} D_\mathfrak{m} = D & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases}$$

だから，$x \in V \subseteq X$ について以下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "(f_v^\#)_x"] & D \arrow[d, equal] \\ \mathcal{O}_X(V) \arrow[u] \arrow[r, "(f_v^\#)_V"'] & D \end{tikzcd}$$

$x \notin V$ については，$((f_v)_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} D})(V) = 0$ なので $(f_v^\#)_V$ が自動的に零写像になる．こうして $f_v^\#$ が構成できた．

■**1 対 1 対応であること．**　容易に確かめられるので省略．

Ex2.9　Uniquely-Existence of Generic Point.

X を scheme とし，Z をその nonempty irreducible closed subset とする．この時，Z がただひとつの generic point を持つことを示す．

■Affine Case.　affine scheme $\operatorname{Spec} A$ の irreducible closed subset C を考えよう．これは $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$ のように表される素イデアルの集合である．Ati-Mac Exc1.8 [†3] から，C は包含関係に関しての極小元を持つ．この極小元全体を G とおくと，これは 1 点からなる．これを示すため，G が 2 点以上からなると仮定しよう．すると G は空でない二つの真の部分集合の和 $G = G_0 \cup G_1$ として書くことが出来る．すると G, G_0, G_1 の定義から

$$\mathrm{cl}_C(G_0), \mathrm{cl}_C(G_1) \subsetneq C \text{ and } \mathrm{cl}_C(G) = C.$$

閉包に関する general topology の結果から

$$C = \mathrm{cl}_C(G) = \mathrm{cl}_C(G_0 \cup G_1) = \mathrm{cl}_C(G_0) \cup \mathrm{cl}_C(G_1) = C.$$

こうして C は空でない真の閉部分集合の和で書けることがわかった．これは C は irreducible であることに反する．よって背理法により G が 1 点集合であることがわかった．これは C がただ 1 つの generic point を持つことを意味する．

■Useful Fact (!).　一般に，$D \subset X$ が X の dense subset ならば，$X \setminus D$ は空集合の他に開集合を含まない．これは直ちに理解できるが重要なので記しておく．

[†3] これは以下のように解く．C の全順序部分集合 Γ を考え，$\gamma = \bigcap \Gamma$ とする．$\gamma \in C$ を示せば良い．非自明な部分は $\gamma \in \operatorname{Spec} A$ のみ．$x, y \in A$ について $x, y \notin \gamma$ であったと仮定しよう．すると $x \notin \mathfrak{p}, y \notin \mathfrak{q}$ となる $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \Gamma$ が存在する．Γ は全順序なので，$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ と仮定できる．すると $x, y \notin \mathfrak{p}$．$\mathfrak{p}$ は素イデアルなので $xy \notin \mathfrak{p}$ が得られる．よって $x, y \notin \gamma$ ならば $xy \notin \gamma$.

■General Case.　affine open subset $U \subseteq X$ であって，$U \cap Z \neq \emptyset$ であるものをとる．この時，$U \cap Z$ (:: closed in U) は affine scheme の closed subset だから，前段落より，必ず generic point ζ を持つ．この ζ は Z の generic point でもある．このことを示すために，$\{\zeta\}$ が Z で dense でないとしよう．すると $Z \setminus \{\zeta\}$ は $V(\neq \emptyset)$ :: open in Z を含む．Z は irreducible だから $V \cap U \neq \emptyset$．今 ζ は $Z \cap U$ の generic point としたから，$(U \cap Z) \setminus \{\zeta\} = U \cap (Z \setminus \{\zeta\})$ は $U \cap Z$ の開集合を含まない．しかし今

$$V \subseteq Z \setminus \{\zeta\} \text{ であり，} \quad \emptyset \neq U \cap V \subseteq U \cap (Z \setminus \{\zeta\}).$$

これは ζ が $U \cap Z$ の generic point で無いことを意味し，ζ のとり方に反する．よって $\zeta \in U \cap Z$ は Z の generic point である．また，ζ の他に generic point ζ' が存在したとしよう．$\zeta' \notin Z \cap U$ であれば $Z \setminus \{\zeta'\}$ は空でない開集合 $Z \cap U$ を含むことになるので，$\zeta, \zeta' \in Z \cap U$．前段落の結果より，$\zeta = \zeta'$ が得られる．

Ex2.10　$\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]$

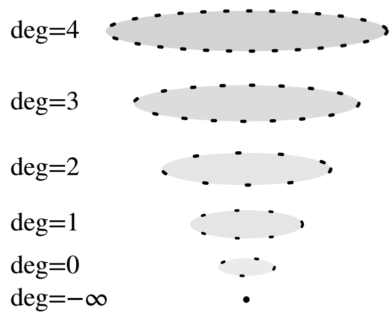
$\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]$ の元は，既約多項式または 0 が生成する単項イデアルである．$\mathbb{R}[x]$ の既約多項式は，一次式または二次式に限られる（代数学の基本定理の初期バージョン）．したがって $\mathbb{R}[x]$ の既約多項式は

$$\mathbb{C}_{\Im \geq 0} = \{x + iy \mid y \geq 0\}$$

の元と一対一に対応する．

Ex2.11　$\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x]$

図を書くと次のようになる．この円錐は上へ限りなく続く．



Ex2.12　Gluing Lemma.

データは次の通り．

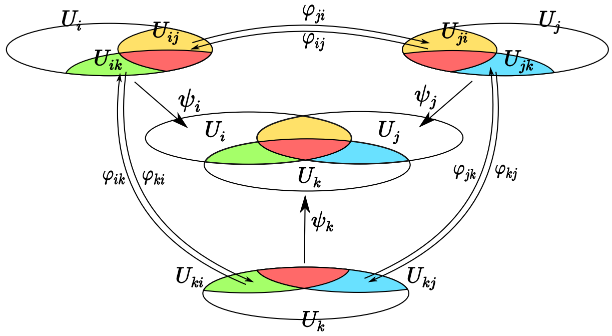
- $\{U_i\}_{i \in I}$ :: family of schemes,
- $\{U_{ij}\}_{i,j \in I}$ :: open subschemes ($U_{ij} \subset X_i$), and
- $\{\phi_{ji} : U_{ij} \to U_{ji}\}_{i,j \in I}$ :: isomorphisms of schemes.

ϕ_{ji} の添字の順番が Hartshorne の逆なので注意．これらは次を満たす:

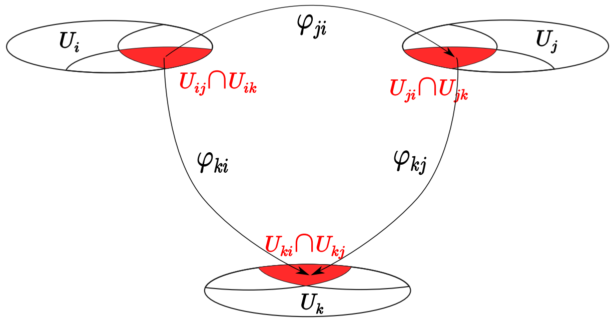
(1) $^\forall i \in I,\ \ U_{ii} = U_i$.

(2) $^\forall i, j, k \in I,\ \ \phi_{kj} \circ \phi_{ji} = \phi_{ki}\ \text{ on }\ U_{ij} \cap U_{ik}$.

$\#I = 3$ の場合の図は次の様になる．



1 つめの条件から $\phi_{ii} = \mathrm{id}_{U_{ii}}$ が従う．2 つめの条件は cocycle condition と呼ばれる．この条件で $i = k$ とすれば $\phi_{ij} = \phi_{ji}^{-1}$ が分かる．$\phi_{ij}(U_{ij} \cap U_{ik}) = U_{ji} \cap U_{jk}$ も同様．これを図にすれば次のようになる．



これらのデータから得られる colimit が $\{U_i\}_{i \in I}$ の gluing である．すなわち，これらのデータから，次の性質を満たす X :: scheme と $\{\psi_i : U_i \to X\}_{i \in I}$ が得られる．

- $\operatorname{im} \psi_i$ :: open subscheme of X (for all $i \in I$).
- $\psi_i : U_i \to \operatorname{im} \psi_i$ :: isomorphism (for all $i \in I$).
- $\psi_j \circ \phi_{ji} = \psi_i$ on U_{ij} (for all $i, j \in I$).
- $X = \bigcup_{i \in I} \psi_i(U_i)$.
- $\psi_i(U_{ij}) = \psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j) = \psi_j(U_{ji})$ (for all $i, j \in I$)

また，$X, \{\psi_i\}_i$ は与えられたデータから同型を除いて一意に定まる．

命題（colimit の存在）の証明の詳細は U.Gortz, T.Wedhorn “Algebraic Geometry I” の pp.70-71 を参照するのが良い．ここでは概要を述べる．

まず，$\operatorname{sp} X$ は $\{U_i\}_i$ と $\{\phi_{ij}\}_{i,j}$ が成す index category の colimit として与えられる．すなわち，次のように与えられる．

$$\operatorname{sp} X = \left. \bigsqcup_{i \in I} U_i \middle/ \sim \right. .$$

ただし，$\sim$ は次のような二項関係である．

$$\forall i, j \in I, \quad \forall x_i \in U_i, x_j \in U_j, \quad [\, x_i \sim x_j \iff x_j = \phi_{ji}(x_i) \,] .$$

この二項関係が同値関係であること，及び well-defined であることは，cocycle condition から得られる．これは商位相だから，$V \subseteq X$ が開集合であることはすべての i について $\psi_i^{-1}(V)$ が U_i の開集合であることと同値．特に，$\operatorname{im} \psi_i = \psi_i(U_i)$ は $\psi_i^{-1}\psi_i(U_i) = U_i$ ゆえに開集合である．

次に，$\mathcal{O}_X$ は次の様に与えられる．こちらは limit である．(scheme は topology と sheaf で射が反転することによる．) V を X の開集合とする．

$$\mathcal{O}_X(V) = \left\{ \Sigma \in \prod_{i\in I} \mathcal{O}_{U_i}(\psi_i^{-1}V) \;\middle|\; {}^\forall i,j \in I,\ \ \phi_{ij}^{\#}\left(\Sigma_j|_{\psi_j^{-1}V\cap U_{ji}}\right) = \phi_{ii}^{\#}\left(\Sigma_i|_{\psi_i^{-1}V\cap U_{ij}}\right) \right\}.$$

Σ の i 成分を $\Sigma_i(\in \mathcal{O}_{U_i}(\psi_i^{-1}V))$ と書いている．$\phi_{ii} = \mathrm{id}_{U_{ii}} = \mathrm{id}_{U_i}$ に注意．これは inverse limit なので，Ex1.12 より，これも sheaf.

Ex2.13　Quasi-Compact/Noetherian Space.

補題 Ex2.13.1 (I)
A :: ring, $f \in A$ について $D(f)$ :: quasi-compact.

(証明). $D(f) = \bigcup_{i\in I} U_i$ とすると，

$$\sqrt{(f)} = \sqrt{\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i}$$

というイデアル達 $\{\mathfrak{a}_i\}_{i\in I}$ が存在する．両辺ともに特に f を含むから，ある自然数 $n > 0$ が存在して

$$f^n \in \sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i$$

となる．イデアルの和の定義から，(必要なら適当に番号を付け替えることで)

$$f^n = \sum_{i=1}^{r} a_i \text{ with } a_i \in \mathfrak{a}_i$$

と出来る．よって

$$\sqrt{(f)} \subseteq \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i} \subseteq \sqrt{\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i} = \sqrt{(f)}$$

となる．これは $D(f) = \bigcup_{i=1}^{r} U_i$ を意味する． ∎

補題 Ex2.13.2 (II)
$V(\mathfrak{a})^c$ :: quasi-compact $\iff$ $\sqrt{\mathfrak{a}_f} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ となる有限生成イデアル $\mathfrak{a}_f$ が存在する．

(証明).
■($\Longrightarrow$).　$\mathfrak{a} = \sum_{a\in A}(a)$ だから

$$V(\mathfrak{a})^c = V(\sum_{a\in A}(a))^c = \bigcup_{a\in A} V((a))^c$$

となる．仮定より

$$V(\mathfrak{a}) = V(\sum_{i=1}^{2}(a_i))^c = V(\langle a_1, \ldots, a_r\rangle)$$

となる $a_i \in \mathfrak{a}$ が存在する．

■($\Longleftarrow$).　$g_1, \ldots, g_r$ を $\mathfrak{a}_f$ の生成元とすると

$$V(\mathfrak{a})^c = V(\sum_{i=1}^{r}(g_i))^c = \bigcup_{i=1}^{r} D(g_i)$$

となる．これは Lemma I より quasi-compact な開集合の有限和だから，quasi-compact. ∎

(a) Noethrian $\iff$ Every Open Subset is Quasi-Compact.

■($\Longrightarrow$). Ch.I, Ex1.7 ですべて示した．

■($\Longleftarrow$). 可算開集合族 $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が昇鎖 $U_0 \subseteq U_1 \subseteq \dots$ をなすとしよう．$U = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ とすると，$\mathfrak{U}$ は U の open cover である．なので仮定より finite sub-cover $\mathfrak{U}_{fin}$ が存在する．$\mathfrak{U}$ は昇鎖なので，$\mathfrak{U}_{fin}$ も有限昇鎖をなす．その有限昇鎖の中でもっとも大きい物をとれば，それは U と一致する．これで主張が示せた．

(b) $\operatorname{Spec} A$ :: Quasi-Compact, but NOT Noetherian In General.

$X = \operatorname{Spec} A$ とする．$D(1) = \operatorname{Spec} A$ だから，Lemma I より $\operatorname{Spec} A$ :: quasi-compact. しかし一般には Noetherian でない．これを示すためには，(a) から，ある開集合が quasi-compact でない例を構成すれば良い．そのために

$$A = k[x_1, x_2, \dots] \supset \mathfrak{a} = (x_1, x_2, \dots)$$

を考える．ただし k :: alg.closed.field. Lemma II より，$\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{a}_f}$ となる有限生成イデアル $\mathfrak{a}_f$ が存在しないことを示せば良い．

背理法で証明する．$\mathfrak{a}_f$ が存在すると仮定し，$g_1, \dots, g_r$ を $\mathfrak{a}_f$ の生成元とする．各 g_i に入っている不定元は高々有限個だから，まとめれば，$g_1, \dots, g_r$ のいずれかに入っている不定元であって一番番号が大きいものが存在する．それを x_N としよう．つまり $g_1, \dots, g_r \in A_N$．$\mathfrak{a}_f^c = \mathfrak{a} \cap A_N$ とおこう．

$1 \in \mathfrak{a}_f^c \implies 1 \in \mathfrak{a}_f$ だから，これの対偶によって $\mathcal{Z}_a(\mathfrak{a}_f^c) \neq \emptyset$（ここで k :: alg.closed を使っている）.

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathcal{Z}_a(\mathfrak{a}_f^c), P = (\alpha_1, \dots, \alpha_N, 1, 0, \dots)$$

とすると，$g_i(P) = 0$．一方，$x_{N+1} \in \sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{a}_f}$ だから，$x_{N+1}^d = c_1 g_1 + \dots + c_N g_N$ となる $d > 0$ が存在する．両辺に P を代入すると，左辺は $1^d = 1 \neq 0$．右辺は $c_1(P) * 0 + c_N(P) * 0 = 0$．矛盾が生じた．よって $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{a}_f}$ となる有限生成イデアル $\mathfrak{a}_f$ は存在しない．

(c) A :: Noethrian $\Longrightarrow$ $\operatorname{Spec} A$ :: Noethrian.

Lemma II と (a) により明らか．

(d) Give Example: A :: Noetherian $\not\Longleftarrow$ $\operatorname{Spec} A$ :: Noethrian.

k を体，$x_1, x_2, \dots$ を不定元とし，$A = k[x_1, x_2, \dots]/(x_1, x_2, \dots)^2$ を考える．x_i の R における像を e_i とすると，任意の i, j について $e_i e_j = 0$．イデアル $(e_1, e_2, \dots)$ は有限生成でないから，この環は Noetherian ring でない．$\operatorname{Spec} A$ が Noetherian であることは，Ex2.3b と $\mathrm{Nil}(A) = (e_1, e_2, \dots)$ から得られる．$\mathrm{Nil}(A)$ は $e_i \mapsto 1$ という代入写像の核だから極大イデアル．したがって Ex2.3b より $\operatorname{Spec} A_{red} \approx \operatorname{Spec} k$ となり，これは 1 点集合である．よって Noetherian.

Ex2.14 $\mathrm{Proj}\, S$

Ex2.15 The Fuctor t.

Ex2.16 X_f.

X :: scheme, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) =: A$ について，X_f を次のように定める.

$$x \in X_f \iff f_x :: \text{unit in } \mathcal{O}_{X,x}.$$

(a) For $X \supseteq U = \mathrm{Spec}\, B$, $X_f \cap U = D(\bar{f})$.

$U \subseteq X$ を open affine subscheme とし，$U = \mathrm{Spec}\, B$ とする．さらに $\bar{f}$ で $f|_U \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X|_U) = B$ を表す．この時，以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} & x \in X_f \cap U \\ \iff & [f_x :: \text{unit in } \mathcal{O}_{X,x}] \wedge [x \in U] \\ \iff & \bar{f}_x = \frac{\bar{f}}{1} :: \text{unit in } B_{\mathfrak{p}_x} \\ \iff & \bar{f} \notin \mathfrak{p}_x \\ \iff & x \in D(\bar{f}) \end{aligned}$$

ただし $\mathfrak{p}_x \subseteq B$ は点 x に対応する素イデアル．よって $X_f \cap U = D(\bar{f})$.

U :: open in X かつ $X_f \cap U = D(\bar{f})$ :: open in U なので，$X_f \cap U$ :: in X．X の open affine cover を考えれば，X_f :: open in X が分かる.

(b) For $a \in A$，If X :: quasi-compact and $a|_{X_f} = 0$ then $^\exists n > 0,\quad f^n a = 0$.

$\{U_i\}_{i \in I}$ を X の open affine cover とする．X :: quasi-compact という仮定から，I は有限であると仮定して構わない．また，$U_i = \mathrm{Spec}\, B_i$ とする.

$a \in A$ をとり，$a|_{X_f} = 0$ であるとする．すると任意の i について $a|_{U_i} = 0 (= 0/1)$，$a|_{U_i} \in B_i$．前 section から $X_f \cap U = D(f|_{U_i})$ なので，以下が成り立つ[†4].

$$^\forall i \in I,\quad ^\exists n_i > 0,\quad (f|_{U_i})^{n_i}(a|_{U_i} \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (f^{n_i} a)|_{U_i} = 0.$$

I は有限だから，$n = \max_{i \in I} n_i$ が存在する．明らかに任意の i について $(f^n a)|_{U_i} = 0$ だから，Identity Axiom により $f^n a = 0$ in A.

(c) Under Some Assumption, $^\forall b \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f}),\quad ^\exists n > 0,\quad ^\exists a \in A,\quad f^n b = a|_{X_f}$.

X は finite affine open cover $\{U_i\}_{i=1}^r$ を持ち，任意の i, j について $U_i \cap U_j$ :: quasi-compact であるとする．$U_i = \mathrm{Spec}\, B_i$ とする.（次の問題 (d) でも X にこの仮定を置く）

(a) より $U_i \cap X_f = D(f|_{U_i})$, かつ Prop2.2 より $\mathcal{O}_{U_i}(D(f|_{U_i})) = (B_i)_{f|_{U_i}}$．なので $b|_{D(f|_{U_i})} \in (B_i)_{f|_{U_i}}$ について以下が成り立つ．ただし $f_i = f|_{U_i}$ とした.

$$^\exists m_i > 0,\quad ^\exists b_i \in B_i,\quad (f^{m_i} b)|_{D(f_i)} = b_i|_{D(f_i)}.$$

[†4] 商環の等号の定義からは $n_i \geq 0$ であるが，$n_i > 0$ としても問題ない.

$m = \max_i m_i$ とすれば以下のようにまとめられる．

$$^\exists a_i \in B_i,\ \ (f^m b)|_{D(f_i)} = a_i|_{D(f_i)}.$$

次に $a_i \in B_i = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ を貼りあわせる．そのために (b) を，$X = U_i \cap U_i$ として利用しよう．$X_{ij} = U_i \cap U_j, f_{ij} = f|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}})$ とおく．すると $(X_{ij})_{f_{ij}} = X_f \cap X_{ij}$ となる．$a_i - a_j \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_ij})$ を $(X_{ij})_{f_{ij}} \subset D(f_i)$ に制限すると 0 になるから，(b) より，以下が成り立つ．

$$^\exists n_{ij} > 0,\ \ (f_{ij})^{n_{ij}}(a_i - a_j) = 0.$$

これをすべての組 (i,j) について考えれば，以下が得られる．

$$^\exists n > 0,\ \ (f^n a_i)|_{U_{ij}} = (f^n a_j)|_{U_{ij}} \text{ in } \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_ij}).$$

よって Gluability Axiom により，$(f^n a)|_{U_i} = f^n a_i$ となる $a \in A$ がある．

もとの $f^m b$ へ戻ると，今以下が成り立つ．

$$(f^{m+n} b)|_{D(f_i)} = (f^n a)|_{D(f_i)}.$$

Identity Axiom により，$f^{m+n} b = (f^n a)|_{X_f}$.

(d) $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f}) = A_f$.

(c) から，以下が成り立つ．

$$^\forall b \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f}),\ \ ^\exists a \in A,\ \ ^\exists n > 0,\ \ b = \frac{a}{f^n}.$$

よって $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f}) \subseteq A_f$．$\supseteq$ は明らかなので，$\Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f}) \subseteq A_f$.

Ex2.17 A Criterion for Affineness.

(a) $f|_{f^{-1}(U_i)}$ :: iso $\implies$ f :: iso.

$f : X \to Y$ :: morphism of schemes について，open cover $\{U_i\}$ が存在し，各 i について $f_i := f|_{f^{U_i}} : f^{-1}(U_i) \to U_i$ が iso であったとする．この時 f :: iso を示す．$V_i = \{f^{-1}(U_i)\}$ としておく．これは X を被覆する．

$$f_i|_{V_i \cap V_j} = (f|_{V_i})|_{V_i \cap V_j} = (f|_{V_j})|_{V_i \cap V_j} = f_i|_{V_i \cap V_j}$$

なので，f は f_i 達の張り合わせとして矛盾なく書くことが出来る．つまり，「$f(x) = f_i(x)$（ここでの i は $x \in V_i$ を満たすもの）」と書くことが出来る．さらに V, U :: open in X, Y について，以下が成り立つ．

$$f(V) = f(\bigcup (V \cap V_i)) = \bigcup f(V \cap V_i);\ \ f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcup (U \cap U_i)) = \bigcup f^{-1}(U \cap U_i).$$

f_i:: homeo からこの二つは開集合．よって f :: homeo.

$f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ も次のように $f_i^\#$ で書ける．

$$\mathcal{O}_Y(U) \to f_* \mathcal{O}_Y(U) :\ s \longmapsto \bigoplus (s|_{U \cap U_i}) \xmapsto{\bigoplus (f_i^\#)_{U \cap U_i}} \bigoplus (f_i^\#)_{U \cap U_i}(s|_{U \cap U_i}) = \bigoplus t_i \longmapsto t$$

$(f_i^\#)_{U \cap U_i}$ が iso なのでこの写像は iso.

(b) For scheme X, X :: affine $\iff$ ....

X :: scheme を考える．$A := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ とする．以下を条件 (*) と呼ぶ．

$$^{\exists}f_1, \ldots, f_r \in A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X), \quad [^{\forall}i = 1, \ldots, r, \quad X_{f_i} :: \text{affine}] \wedge [(f_1, \ldots, f_r) = (1) = A.]$$

X :: affine $\iff$ (*)，ということを示す．Affine scheme は quasi-compact である (Ex2.13b)，ということを何度も使う．

■ $\Longrightarrow$．この時 $X = \operatorname{Spec} A$ である．主張の成立は自明．

■ $\Longleftarrow$．核心となるのは，$\{X_{f_i}\}$ が Ex2.16c で $\{U_i\}$ に課せられている条件を満たす，ということ．$X = \bigcup X_{f_i}$ は

$$\left(\bigcup X_{f_i}\right)^c = \left(\bigcap \{x \mid (f_i)_x \in \mathfrak{m}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{X,x}\}\right)^c$$

と $(f_1, \ldots, f_r) = (1)$ から得られる．$X_{f_i} \cap X_{f_j}$ ::quasi-compact は，$X_{f_i} = \operatorname{Spec} F_i$ とすると，

$$X_{f_i} \cap X_{f_j} = D(f_j|_{X_{f_i}}) = \operatorname{Spec}(F_i)_{f_j}$$

は affine scheme だから quasi-compact．以上から Ex2.16d, Ex2.4, Ex2.17a が全部使えて，この順に使えば $X = \operatorname{Spec} A$ が示せる．

Ex2.18 Ring Homomorphism vs. the Induced Morphism of the Spectra.

A, B :: ring, $\phi : A \to B$ :: ring homo とする．$(f, f^{\#}) : Y = \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A = X$ と ϕ の関係を考える．以下では $f(y) \in X$ における $f^{\#}$ の stalk を $f^{\#}_{(y)}$ と書く．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,f(y)} \arrow[r, "f^{\#}_{(y)}"] \arrow[d, leftrightarrow] & (f_*\mathcal{O}_Y)_{f(y)} \arrow[r, "\iota^y"] & \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[d, leftrightarrow] \\
A_{f(y)} \arrow[rr, "\phi_y"] & & B_y
\end{tikzcd}$$

Ex2.19 $\operatorname{Spec} A$ :: disconnected $\iff$ ....

可換環 A について以下が同値であることを示す．

(1) $\operatorname{Spec} A$ :: disconnected.
(2) $^{\exists}e_1, e_2 \in A \setminus \{0\}, \quad e_1e_2 = 0, e_1^2 = e_1, e_2^2 = e_2, e_1 + e_2 = 1.$
(3) $^{\exists}A_1, A_2 \neq 0, \quad A \cong A_1 \times A_2.$

■(1) $\Longrightarrow$ (2) [Step 1] 仮定より，$\operatorname{Spec} A$ は二つ以上の connected component をもつ．そこで一方の connected component を C_1 とし，$C_2 = \operatorname{Spec} A \setminus C_1$ とする．そして $\mathfrak{a}_1 = \bigcap_{\mathfrak{p} \in C_1}$ とし，$\mathfrak{a}_2$ も同様に定義する．定義の仕方から，$\mathfrak{a}_1 \subsetneq \mathfrak{a}_1'$ であるとき

$$C_1 = V(\mathfrak{a}_1) \supsetneq V(\mathfrak{a}_1')$$

となることに注意せよ．

■(1) $\Longrightarrow$ (2) [Step 2]

$$\begin{aligned} &\operatorname{Spec} A = V(\mathfrak{a}_1) \sqcup V(\mathfrak{a}_2) \\ \Longleftrightarrow\ &[\operatorname{Spec} A = V(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)] \wedge [\emptyset = V(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)] \\ \Longleftrightarrow\ &[\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \subseteq \mathrm{Nil}(A)] \wedge [(1) = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2] \end{aligned}$$

最後の行，2 つめの条件から，$a_1 + a_2 = 1$ となる $a_1 \in \mathfrak{a}_1, a_2 \in \mathfrak{a}_2$ が存在することが分かる．1 つめの条件からは，$a_1^n a_2^n = 0$ となる $n > 0$ が存在することが分かる．

■(1) $\Longrightarrow$ (2) [Step 3]　$(a_1 + a_2)^n = 1^n = 1$ の左辺を展開する．

$$1 = a_1^n + a_2^n + a_1 a_2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} a_1^{i-1} a_2^{n-i-1} \right) = 1.$$

$a_1 a_2 (***)$ の部分を移項すると，

$$a_1^n + a_2^n = 1 - a_1 a_2 (***)$$

となる．$a_1 a_2 (***) \in \mathrm{Nil}(A)$ だから，Ati-Mac Ex1.1 より右辺は単元．これを u を置くと，

$$u^{-1} a_1^n + u^{-1} a_2^n = 1, (u^{-1} a_1^n)(u^{-1} a_2^n) = u^{-2}(a_1^n a_2^n) = 0$$

となる．

■(1) $\Longrightarrow$ (2) [Step 4]　以上から，$e_1 = u^{-1} a_1^n, e_2 = u^{-1} a_2^n$ とおくと $e_1 + e_2 = 1$ と $e_1 e_2 = 0$ が成り立つことがわかった．最後に，$e_1^2 = e_1$ を示す（$e_1^2 = e_1$ も同様）．これは以下のように直ちに示せる．

$$e_1 \cdot (e_1 + e_2) = e_1 \cdot 1 \implies e_1^2 + e_1 e_2 = e_1 \implies e_1^2 = e_1.$$

■(2) $\Longrightarrow$ (3)　$A_1 = e_1 A, A_2 = e_2 A$ とすれば良い．同型は以下のように定義できる．

$$\begin{array}{cccc} \phi: & A_1 \times A_2 & \to & A \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \\ & (ae_1, ae_2) & \leftarrow\!\shortmid & a \end{array}$$

$a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ について $a_1 a_2 = 0$ に注意すると，準同型であることが確かめられる．実際，

$$\phi(x, y)\phi(z, w) = (x + y)(z + w) = xz + (yz + zw) + yw = xz + yw = \phi(xz, yw) = \phi((x, y) \cdot (z, w)).$$

同型であることは $e_1 + e_2$ にも注意すれば分かる．

■(3) $\Longrightarrow$ (1)　e_1, e_2 があるとき，$(e_1), (e_2)$ は明らかに () を満たす．なので $\operatorname{Spec} A = V((e_1)) \sqcup V((e_2))$ となる．