

Ex4.1 Term “is defined” for Regular Functions.

$X :: \text{variety}$ と $\langle U, f \rangle, \langle V, g \rangle \in K(X)$ について, $f = g$ on $U \cap V$ とする. このとき, U 上で f , V 上で g であるような写像 h が $U \cup V$ 上の regular function であることを示そう. つまり, regular function の定義域を接続する.

$P \in U \cup V$ をとる. $P \in U \setminus V$ ならば単に $P \in U$ と考えて開近傍をとり, h は P で regular であることが分かる. $P \in V \setminus U$ でも同様に h は P で regular であることがわかる. $P \in U \cap V$ の時は P の適当な開近傍上で f, g がそれぞれ有理関数表示をとるが, $f = g$ on $U \cap V$ により, その有理関数表示も等しい. 正確には, P の開近傍 Z で $f = f_n/f_d, g = g_n/g_d$ と同時にとれたとすると, $f = g$ より $f_n g_d - f_d g_n = 0$ on Z . 左辺は多項式であり, Z は無限集合であるから, 左辺は零多項式である. なので h の P 近傍での有理関数表示としては $f_n/f_d, g_n/g_d$ のいずれをとっても同じである. よって h は $U \cap V$ で well-defined.

以上のように $\langle U, f \rangle$ の定義域を拡大していくと, 定義域 (開集合) の集合が出来る. ネーター空間上で議論しているので, これは極大元を持つ. もしも二つ極大な定義域が存在すれば, どちらも U を含むので接続が出来る. したがって定義域の拡張でできる極大な定義域はただ一つである.

Ex4.2 Term “is defined” Rational Maps.

$\phi : U \text{ and } U' \rightarrow V$ が rational map であるとする. このとき ϕ は明らかに $U \cup U'$ で連続. また, regular function $f : Z \rightarrow k$ を任意にとった時, $f \circ \phi : \phi^{-1}(Z) \rightarrow k$ が regular であることは $f_1 \circ \phi : \phi^{-1}(Z) \cap U \rightarrow k, f_2 \circ \phi : \phi^{-1}(Z) \cap U' \rightarrow k$ の両方が regular であることから明らか.

Ex4.3 Example of “defined”

(a) Open subset where $f = x_1/x_0$ is defined.

(b)

Ex4.4 “Rational”

$Y :: \text{variety}$ がある \mathbb{P}^n と birational であるとき, Y は rational であるという. 同値な条件として, $K(Y)/k$ が純超越拡大であるとき Y は rational である.

(a) Any conic in \mathbb{P}^2 is a rational curve.

\mathbb{P}^2 内の任意の conic curve は \mathbb{P}^1 に同型. したがって conic curve 全体から \mathbb{P}^1 全体への morphism が存在するので rational である.

(b) $C : y^2 - x^3 = 0$ is a rational curve.

まず, C がパラメータ表示 $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ を持つことを言うておく. $U = C \setminus \{(0,0)\}$ という C の開部分集合をとると, パラメータ表示から以下は birational である.

$$\begin{aligned} \phi : U &\xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1 \\ (x, y) &\mapsto (1 : t) \end{aligned}$$

明らかにこれは U とアフィン開被覆 U_0 の間の isomorphism であるから C は birational.

(c) Projection of $Y : y^2z - x^2(x+z) = 0$.

$P = (0 : 0 : 1)$ から $z = 0$ への射影を ϕ とする. このとき, $\phi(x : y : z) = (x : y)$. ここから以下の写像が得られる.

$$\begin{aligned}\bar{\phi} : Y \cap U_0 &\rightarrow \{(1 : s) \mid s^2 \neq 1\} \subset \mathbb{P}^1 \\ (1 : s : t) &\mapsto (1 : s) \\ \left(1 : s : \frac{1}{s^2 - 1}\right) &\mapsto (1 : s)\end{aligned}$$

$\{(1 : s) \mid s \neq 1\} = U_0 \cap (\mathcal{Z}_p(x^2 - y^2))^c$ は開集合である. また, 像, 原像ともに affine であるから, Lemma 3.6 によって $\bar{\phi}, \bar{\phi}^{-1}$ の両方が morphism であることが分かる. よってこれは birational map.

Ex4.5 $Q : xy - zw = 0$ is birational to \mathbb{P}^2 but not isomorphic.

■ Q is birational to \mathbb{P}^2 . $Q_3 = Q \cap U_3$ を考えると,

$$\phi : (x : y : z : w) \mapsto \left(\frac{x}{w} : \frac{y}{w} : \frac{z}{w}\right)$$

という写像が得られる. これは直ちに逆写像が得られるので, birational map $\phi : Q \cap U_3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^2$ が得られた.

■ Q is not isomorphic to \mathbb{P}^2 . Ex3.7 より, \mathbb{P}^2 の任意の曲線は交わる. しかし Ex2.15 より二つの直線 $L_t, L_u (t \neq u)$ は交わらない. よって Q と \mathbb{P}^2 は同相でなく, したがって同型でもない.

Ex4.6 Plane Cremona Transformations.

\mathbb{P}^2 から自分自身への birational map は plane Cremona transformation と呼ばれる. Quadratic transformation.

$$\phi : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2; (a_0 : a_1 : a_2) \mapsto (a_1a_2 : a_0a_2 : a_0a_1)$$

ここで a_0, a_1, a_2 のいずれか二つは 0 でない.

(a) ϕ itself is its inverse as a rational map.

ϕ を 2 回適用する.

$$(a_0 : a_1 : a_2) \mapsto (a_1a_2 : a_0a_2 : a_0a_1) \mapsto (a_0^2a_1a_2 : a_0a_1^2a_2 : a_0a_1a_2^2) = (a_0 : a_1 : a_2)$$

したがって ϕ は $U = (\mathcal{Z}_p(x_0x_1x_2))^c$ から U 自身への isomorphism である. 定義域がこれ以上拡大出来ないことは明らか.

(b) Find $U, V \in \mathbb{P}^2$ where $U \xrightarrow{\phi} V$

すでに述べた.

(c) Find opensets where ϕ and ϕ^{-1} are definiend.

すでに述べた.

Ex4.7 $\mathcal{O}_{P,X} \cong \mathcal{O}_{Q,Y} \implies \exists \psi, \psi : X \xrightarrow{\cong} Y; P \mapsto Q$

■We can assume $X, Y :: \text{affine}$. Prop4.3 より, $P \in Z \subset X$ なる $Z :: \text{affine open subset}$ が存在する. このとき $\mathcal{O}_{P,X}$ と $\mathcal{O}_{P,Z}$ は $\langle U, f \rangle \mapsto \langle U \cap Z, f \rangle; \langle V, g \rangle \mapsto \langle V, g \rangle$ なる写像で同型である. なので $X, Y :: \text{affine}$ と仮定して良い.

■Make ϕ_* and ψ . 今, 仮定から $\phi : A(X)_{\mathfrak{m}_P} \xrightarrow{\cong} A(Y)_{\mathfrak{m}_Q}$ なる同型写像が存在する. 同型の両辺で Quot を取ることで $\phi_* : K(X) \xrightarrow{\cong} K(Y) :: \text{isomorphism}$ が得られる.^{†1} $\phi_*(x_i + \mathcal{I}(X)) \in \text{Quot}(A(Y)) = K(Y)$ は有理関数であるから, 以下の写像が定義できる開集合 $U \subset Y$ が存在する.

$$\psi : U \rightarrow X; S \mapsto (\phi_*(x_0 + \mathcal{I}(X))(S), \dots, \phi_*(x_n + \mathcal{I}(X))(S))$$

逆写像も同様に作れるため, これは birational map である. $f \in A(X)_{\mathfrak{m}_P}$ についてあきらかに $\phi_* \circ f = f \circ \psi$.^{†2}

■Paraphrasing of $\psi^{-1} : P \mapsto Q$. ϕ_* によって極大イデアル $\bar{\mathfrak{m}}_P \subset A(X)_{\mathfrak{m}_P} \subset K(X)$ は極大イデアル $\bar{\mathfrak{m}}_Q \subset A(Y)_{\bar{\mathfrak{m}}_Q} \subset K(Y)$ に写され, $\mathcal{Z}_a(\bar{\mathfrak{m}}_Q) = \mathcal{Z}_a(\phi_*(\bar{\mathfrak{m}}_P)) = \{Q\}$. $\phi_* \circ f = f \circ \psi$ から以下のように $\psi^{-1} : P \mapsto Q$ が得られる.

$$\begin{aligned} Q &\in \mathcal{Z}_a(\phi_*(\bar{\mathfrak{m}}_P)) = \mathcal{Z}_a(\bar{\mathfrak{m}}_Q) \\ \iff \forall f \in \bar{\mathfrak{m}}_P, \phi_*(f)(Q) &= 0 \\ \iff \forall f \in \bar{\mathfrak{m}}_P, f(\psi(Q)) &= 0 \\ \iff \psi(Q) \in \mathcal{Z}_a(\bar{\mathfrak{m}}_P) = \{P\} \\ \iff \psi^{-1}(P) &= Q \end{aligned}$$

なお, 証明には全て \implies で十分.

Ex4.8 Cardinality and Homeomorphism of Curves

Lemma

念の為に以下を証明しておく.

補題 Ex4.8.1

体 k の代数閉包を \bar{k} とする. k が有限体ならば $|\bar{k}| = \aleph_0$ であり, k が無限体ならば $|\bar{k}| = |k|$ である.

(証明). k 上の n 次多項式は次のように k^n の元と一対一対応する.

$$x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0 \leftrightarrow (c_{n-1}, \dots, c_0)$$

n 次多項式の根は高々 n 個だから, 以下のように濃度が計算できる.

$$|\bar{k}| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} n|k^n| = \sum_{n \in \mathbb{N}} n|k|^n = |\{(i, j, x) \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq i, x \in k^i\}|$$

^{†1} $\phi_*(a/s) = \frac{\phi(a/1)}{\phi(s/1)}$ とすれば良い. Thm3.2 の議論と Ati-Mac Ex3.3 を参照.

^{†2} 実際は $(a/s)(P) = 0 \iff a(P) = 0$ なので $f \in A(X)$ についてのみの等式を言えば良い.

以降は $|k|$ が有限かどうかで計算が変わる.

■Case: $|k| < \aleph_0$ $|k|$ が有限ならば $n|k|^n$ も有限なので

$$|\bar{k}| \leq |\{(i, j) \mid i \in \mathbb{N}, 0 \leq j \leq i|k|^i\}| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0.$$

任意の自然数 $d \in \mathbb{N}$ に対して d 次既約多項式が存在することが知られているので $|\bar{k}| \geq \aleph_0$. よって $|k| = \aleph_0$.

■Case: $|k| \geq \aleph_0$ $|k|$ が無限ならば $n|k|^n = n|k| = |k|$ なので^{†3}

$$|\bar{k}| \leq |\mathbb{N} \times k| \leq |k^2| = |k|.$$

$k \subseteq \bar{k}$ から $|k| \leq |\bar{k}|$ なので証明が完成した. ■

(a) For any variety X whose dimension ≥ 1 , $|X| = |k|$.

$k = \bar{k}$ とする.

■ $|\mathbb{A}^n| = |\mathbb{P}^n| = |k|$ $\mathbb{A}^n = k^n$ なので $|k|$ が無限濃度であることと合わせて $|\mathbb{A}^n| = |k|$. また, $\mathbb{P}^n = (\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{O\}) / \sim$ なので, $|\mathbb{P}^n| \leq |\mathbb{A}^{n+1} \setminus \{O\}| = |k|$. $\mathbb{A}^n \equiv U_0 \subset \mathbb{P}^n$ を考えて $|\mathbb{P}^n| \geq |k|$. まとめ $|\mathbb{A}^n| = |\mathbb{P}^n| = |k|$.

■Start of step I: case of $\dim X = 1$. $\dim X = 1$ の時, X : variety, $\dim X = 1$ を考える. Prop 4.9 より, X から hypersurface $H(\subset \mathbb{P}^2)$ への birational map が存在する. H の定義多項式を h としておこう.

■ ϕ is surjective. 一次斉次多項式 F を, $H \cup \mathcal{Z}_p(F) = \mathcal{Z}_p(\langle h, F \rangle)$ が \mathbb{P}^2 全体でないように取る. すると $P \notin H \cup \mathcal{Z}_p(F)$ を適当に取ることができる. この点 P からの射影 $\phi: \mathbb{P}^2 \setminus P \rightarrow \mathcal{Z}_p(F)$ を考えよう. 明らかに $\phi(H) \subseteq \mathcal{Z}_p(F) = \mathbb{P}^1$ かつ $|\mathcal{Z}_p(F)| = |\mathbb{P}^1| = |k|$ である. これが全射であることを示せば $|H| \geq |k|$ が分かる. $R \in \mathcal{Z}_p(F)$ を任意にとり, P と R を通る直線を $L(P, R)$ としよう. Ex3.7(a) より, $L(P, R) \cap H \neq \emptyset$ (ここで $\dim H = 1$ を用いる). したがって $Q \in L(P, R) \cap H$ を取ることができて, 構成法から^{†4} $\phi(Q) = R$ が成立する. よって ϕ は全射.^{†5}

■Conclusion of step I 以上で $|H| \geq |k|$ が示された. $H \subset \mathbb{P}^2$ より $|H| \leq |k|$ なので $|H| = |k|$. さて, X と H は birational なので, 2つのある開集合 $U \subset X, V \subset H$ の間に全単射が存在する. H が 1 次元であることから V は H から有限個の点を除いたものであり, したがって $|V| = |H| = |k|$.^{†6} あわせて $|X| \geq |U| = |V| = |k|$. $X \subset \mathbb{P}^n$ より $|X| \leq |k|$ なので, Case I の証明が終わった.

■Next Step $\dim X \geq 2$ ならば, 次元の定義より, X は 1 次元の既約閉集合 C を含む. したがって Case I より $|X| \geq |C| = |k|$. $|X| \leq |\mathbb{P}^n| = |k|$ なので一般の次元でも証明が得られた.

(b) Any two curves over k are homeomorphic.

Ex3.1d から $\mathbb{A}^2 \not\cong \mathbb{P}^2$ であることに注意.

^{†3} 無限濃度 κ について $\kappa^2 = \kappa$ は選択公理と同値.

^{†4} つまり P, Q, R が一直線上にあり, $Q \in H, R \in \mathcal{Z}_p(F)$ だから.

^{†5} $L(P, R) \cap H$ が有限集合であることは, $M(R; t) = P + tR$ とすると $h(M(R; t))$ が t の 1 変数多項式であり, したがって根は高々 $\deg h$ 個であることから得られる.

^{†6} H に含まれる既約閉集合は 1 点のみであり, H の任意の閉集合は Prop1.5 から有限個の点である.

二つの曲線 C, D をとろう. (a) の結果から $|C| = |k| = |D|$ なので全単射 $\phi : C \rightarrow D$ が存在する. C, D は 1 次元なので C, D 上の閉集合は空集合, 有限個の点, 曲線全体しかない. 明らかに ϕ は空集合, 点, 曲線全体をそれぞれ空集合, 点, 曲線全体に写すので, 同相写像である.

(c) Another proof for $|\text{any curve}| \geq |k|$

任意の曲線 C を取ると, これは hypersurface $H \subset \mathbb{P}^2$ と birational. H の定義多項式を $h \in k[x, y, z]$ とする. このとき, 写像 $\iota : k \rightarrow H$ が構成できる. これは単純に $f(1, a, z) \in k[z]$ の零点 $z = b$ を一つ選び^{†7} $\iota : a \mapsto (1 : a : b)$ とすれば良い. 代数閉体で考えているので零点は必ず有限個存在する. これは明らかに単射だから $|C| \geq |k|$.

Ex4.9 Stereographic projection can induce a birational morphism.

別の PDF ファイル “exercise4_9.pdf” に解答を書いた.

Ex4.10 Blowing up of $C : y^2 - x^3 = 0$ at $O = (0, 0)$.

$V_0 = \mathbb{A}^2 \times U_0, V_1 = \mathbb{A}^2 \times U_1$ とおく. これらはそれぞれ $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{A}^1$ とみなすことが出来る.

■Blowing up to V_0 . C の V_0 への blow-up は, $y^2 - x^3 = 0, y = xu$ の連立方程式を解くことで得られる. 計算すると $x^2(u^2 - x) = 0$. よって $E_0 = (0, 0) \times (1 : u), \tilde{C}_0 = \mathcal{Z}_a(u^2 - x) \subset V_0$. $E_0 \cap \tilde{C}_0 = (0, 0) \times (1 : 0)$ が得られる. また, \tilde{C}_0 は $u \mapsto (u^2, u^3) \times (1 : u)$ により \mathbb{A}^1 と同型である.

■Blowing up to V_1 . 同様に $y^2 - x^3 = 0, x = ty$ を解いて $y^2(1 - t^3y) = 0$. よって $E_1 = (0, 0) \times (t : 1), \tilde{C}_1 = \mathcal{Z}_a(1 - t^3y) \subset V_1$ となる. $E_1 \cap \tilde{C}_1$ は空である. また, \tilde{C}_1 は $t \mapsto (t^2, t^3) \times (1 : t)$ により \mathbb{A}^1 と同型である.

■Summarize.

$$E = O \times \mathbb{P}^1$$

$$\tilde{C} = \{(t^2, t^3) \times (1 : t) \mid t \in k\}$$

\tilde{C} は直ちに \mathbb{A}^3 の曲線と見ることが出来る.

gnuplot でのコードは `set parametric; splot u**2, u**3, u` なので試すと良い.

^{†7} 選択公理を用いる.