# ゼミノート #7

## Descent Theory

七条彰紀

2018年12月18日

## 1 Motivation

(TODO)

## 2 Definition

#### 定義 2.1

関手  $\epsilon_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$  を用いて以下のように定義する.

- (i)  $\epsilon_{\mathcal{U}}$  :: equivalence となる  $\mathcal{U}$  を of effective descent for  $\mathcal{F}$  と呼ぶ.
- (ii)  $\epsilon_{\mathcal{U}}$  の像と同型である  $\mathcal{F}(\mathcal{U})$  の対象を、effective data という.

## 3 Criterion for fpqc Stacks

補題 **3.1** ([2] Lemma 4.25)

S:: scheme,  $\mathcal{F} \to (\mathbf{Sch}/S)::$  fibration とする. 以下が成り立つとする.

- (a) Fは Zariski topology での stack である.
- (b) 任意の flat surjective morphism of affine S-scheme ::  $V \to U$  について,  $\epsilon_{\{V \to U\}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\{V \to U\})$  は圏同値.

この時,  $\mathcal{F}$  は fpqc topology での stack である.

証明のために段階を踏む.

## 3.1 Step 1 / $\epsilon_{\mathcal{U}}$ : faithfull.

(TODO: いらないかも)

3.2 Step 2 / single morphism cover の場合に帰着させる.

次を示す.

### 補題 3.2 ([1] p.87)

 $\mathcal{U} = \{\phi_i \colon V_i \to U\}, V' = \bigsqcup V_i$  とする. さらに、 $f \colon V' \to U$  を  $\mathcal{U}$  から誘導される射とする. このとき、圏同値  $E \colon \mathcal{F}(U' \to U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$  が存在し、合成

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\epsilon_{\{f\}}} \mathcal{F}(V' \to U) \xrightarrow{E} \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

が関手  $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :  $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$  と同型と成る.

(証明). まず関手 E を構成し、その後 E が圏同値であること、補題の性質を満たすことを確認する.

#### 注意 3.3

ここで、各  $\phi_i$  が quasi-compact(特に fpqc)であったとしても、誘導される射  $f\colon V'\to U$  が必ずしも quasi-compact でないことに注意する.例えば  $\{\operatorname{Spec} k[x_i]\to \bigsqcup_i\operatorname{Spec} k[x_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$  を考えれば分かる.

以上のことに注意すると、我々は次のことを証明することに成る:

#### 補題 3.4

条件 (a), (b) が成り立つならば、以下の条件 (\*) を満たす任意の flat surjective morphism ::  $f: V \to U$  について、 $\epsilon_{\{f\}}: \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(f: V \to U)$  :: equivalence.

(\*) affine Zariski cover ::  $U = \bigcup_i U_i$  と、各 i について  $f^{-1}(U_i)$  の affine Zariski cover ::  $f^{-1}(U_i) = \bigcup_i V_{ij}$  が存在し、 $V_{ij}$  :: quasi-compact かつ  $f(V_{ij}) = U_i$  となる.

条件 (\*) は U,V:: locally noetherian であるような任意の fppf morphism について成立する ([2] Cor1.1.6).

#### 注意 3.5

以下,  $\mathcal{F}$  :: split fibered category とする. session 4.5 定理 1.2 より, このように仮定しても一般性を失わない.

3.3 Step 3 / affine scheme への quasi-compact morphism の場合.

 $f\colon V \to U$  を U:: affine である quasi-compact morphism とする.  $\{V_i\}_i$  を V の open affine cover とし、 $V' = \bigsqcup_i V_i$  とおく. V':: affine なので、仮定 (b) から圏同値  $\mathcal{F}(U) \simeq \mathcal{F}(V' \to U)$  が存在する.

以下の図式 (1) を考える.  $\leftrightarrow$  は圏同値を意味する.

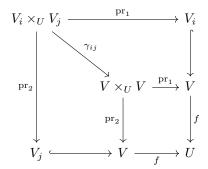
ここで関手  $\epsilon_f, E$  は次で与えられる. ただし  $\operatorname{pr}_k \colon V \times_U V \to V$  は第 k 成分への射影である.

$$\begin{array}{lll} \epsilon_f \colon & \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{F}(f \colon V \to U) \\ \textbf{Objects} \colon & \xi & \mapsto & (f^*\xi, \sigma) \\ \textbf{Arrows} \colon & \alpha & \mapsto & f^*\alpha \end{array}$$

ここで  $\sigma$ :  $\operatorname{pr}_2^* f^* \xi \to \operatorname{pr}_1^* f^* \xi \in \operatorname{Arr}(\mathcal{F}(V \times_U V))$  は  $\operatorname{pr}_2^* f^* \xi$ ,  $\operatorname{pr}_1^* f^* \xi$  がいずれも  $f \circ \operatorname{pr}_2 = f \circ \operatorname{pr}_1$  による  $\xi$  の pullback であることから得られる同型射である.

$$\begin{array}{llll} E\colon & \mathcal{F}(f\colon V\to U) & \to & \mathcal{F}(\{V_i\to U\}) \\ \textbf{Objects}\colon & (\eta,\sigma) & \mapsto & (\{\eta|_{V_i}\}_i,\{(\gamma_{ij})^*\sigma\}) \\ \textbf{Arrows}\colon & \beta & \mapsto & \{\beta|_{V_i}\} \end{array}$$

ここで  $\gamma_{ij}$  は以下の可換図式のように、fiber product の一意性から得られる射である.



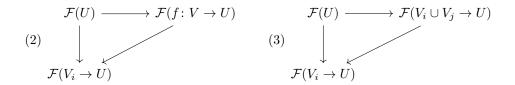
この図式の可換性から、関手の同型  $E \circ \epsilon_f \cong \epsilon_{\{V_i \to U\}}$  が得られる( $\mathcal{F}$  :: split fibered category を利用する).(よって上の図式 (1) は可換である.)したがって  $\epsilon_f$  の psuedo-inverse functor ::  $(\epsilon_{\{V_i \to U\}})^{-1} \circ E$  が得られた.

### 3.4 Step 4 / 条件 (\*) を満たす affine scheme への射の場合.

([1] p.88) 仮定 (\*) より、Zariski cover ::  $\{\iota_i: V_i \to V\}$  が存在し、 $V_i$  :: quasi-compact.

#### 注意 3.6

前段の議論のうち,図式 (1)の  $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V' \to U)$  が圏同値でない.なので新しい議論が必要である.



## 3.5 Step 5 / 一般の場合.

条件 (\*) を満たす任意の射  $f\colon V\to U$  をとり、affine Zarisiki cover ::  $\{U_i\to U\}$  をとる.さらに  $V_i:=f^{-1}(U_i)$  とおき, $\phi_i=f|_{V_i}$  とおく.

$$\Phi_i = \epsilon_{V_i \to U_i} : \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(V_i \to U_i)$$

と置く.同様に  $\Phi_{ij}=\epsilon_{V_{ij}\to U_{ij}}, \Phi_{ijk}=\epsilon_{V_{ijk}\to U_{ijk}}$  と置く.この時,以下は厳密な可換図式である.

$$\mathcal{F}(U_i) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{F}(U_{ij}) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{F}(U_{ijk})$$

$$\Phi_i \downarrow \qquad \qquad \downarrow \Phi_{ij} \qquad \qquad \downarrow \Phi_{ijk}$$

$$\mathcal{F}(V_i \to U_i) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{F}(V_{ij} \to U_{ij}) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{F}(V_{ijk} \to U_{ijk})$$
(4)

ここで、各 $\Phi_*$  はいずれも Step 4 から圏同値である.

次の関手を考える.

$$\begin{array}{llll} P_i\colon & \mathcal{F}(f\colon V\to U) &\to & \mathcal{F}(V_i\to U_i) \\ \textbf{Objects} & (\eta,\sigma) & \mapsto & (\eta|_{V_i},(\gamma_{ii})^*\sigma) \\ \textbf{Arrows} & \alpha & \mapsto & \alpha|_{V_i} \end{array}$$

同様に  $P_{ij}$ :  $\mathcal{F}(f) \to \mathcal{F}(V_{ij} \to U_{ij})$  を定義する. すると step 4 の結果から  $\mathcal{F}(U_i) \simeq \mathcal{F}(V_i \to U_i)$  なので,  $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$  と同型

$$\alpha_i \colon \Phi_i(\xi_i) \xrightarrow{\cong} P_i((\eta, \sigma))$$

が得られる. 上の図式(4)が可換であることから,

$$\alpha_i|_{V_{ij}}: \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}}) = (\Phi_i(\xi_i))|_{V_{ij}} \xrightarrow{\cong} P_{ij}((\eta, \sigma))$$

すると,

$$\alpha_i^{-1}\alpha_j \colon \Phi_{ij}(\xi_j|_{V_{ij}}) \to \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}})$$

 $\Phi_{ij}$  :: equivalence なので,この同型射の逆像として  $\sigma_{ij}\colon \xi_j|_{V_{ij}} o \xi_i|_{V_{ij}}$  が得られる.

以上で得られる  $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$  は cocycle condition を満たすため, $\mathcal{F}(\{U_i \to U\})$  の object である.これは  $\mathcal{F}(U)$  と圏同値なので, $\xi$  が得られる.

## 4 Application : $\mathbf{QCoh}/S$ is a fpqc stack.

### 参考文献

[1] Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008).

[2]		Spaces and I Society, 4	(American	Mathematical	Society	Colloquium	Publica-