

# ゼミノート #11

## Overview of

### “Existence and properties of geometric quotients” (D.Rydh, 2013)

七条彰紀

2019 年 7 月 24 日

## 目次

1	事実のまとめ	2
1.1	stack から scheme まで	2
1.2	coarse moduli space が存在するための十分条件	2
1.3	coarse moduli space が存在するための必要条件	2
1.4	その他の moduli space	3
2	論文 “Existence and properties of geometric quotients” [7] の構成	3
2.1	証明の構成	3
2.2	中心的概念	4

このノートは, [7] を理解することを目的とするゼミのためのノートである. Algebraic stack については既に私のノート [9] の内容程度のことを分かっているものとする.

### 注意 0.1

著者 “Rydh” はスウェーデン語で, 大体「リード」と発音する. 参考: [https://forvo.com/word/annika\\_rydh/](https://forvo.com/word/annika_rydh/)

## Conventions and Nootations

- 定義は私のノート [9] ch.5 “Algebraic Stacks and Spaces”にあるものとする. 特に, diagonal map が quasi-compact, quasi-separated であることを仮定しない. これは [7] と同じである. algebraic stack という語は基本的に使わず, artin stack を中心的に扱う.
- artin stack の moduli space というとき, 特別な algebraic space のことを意味することも有るし, artin stack から algebraic space への特別な射のことを意味することもある. (このノートでは後者の意味であることが多い.)

- unramified という語は locally of finite type かつ formally unramified を意味する．私のノートでは locally of finite presentation まで要求するので注意せよ．
- fppf atlas of an artin stack とは, surjective, flat <sup>†1</sup>, locally of finite presentation であるような algebraic space から artin stack への射を言う．取り扱う論文 [7] ではこれを presentation と呼んでいるが, 我々は presentation を quotient stack による artin stack の表示のことを言う．
- geometric point とは  $\text{Spec } k$  ( $k ::$  algebraically closed field) からの射のことである．

## 1 事実のまとめ

### 1.1 stack から scheme まで

moduli 問題を含む多くの問題では, まず stack(in groupoids) が得られる．得られた stack が scheme であればとても取り扱いやすいが, そうなることはめったに無い．

一方で stack と scheme の間には, artin stack, Deligne-Mumford(DM) stack, algebraic space といった中間的概念がある．いつどれになるのか, という条件は既によく研究されていて, 同値条件も得られている．以下でそれらを列挙する．

まず, 得られた moduli stack が artin stack であるか否かは, “Criteria for Representability”として [8] ch.91 にまとめられている．また, artin stack over a scheme  $:: \mathcal{X}$  が Deligne-Mumford stack であるかどうかは, 例えば任意の geometric point の自己同型群が reduced finite group scheme であることと同値である ([6] Thm8.3.3)．さらに,  $\mathcal{X}$  が algebraic space であることは, 例えば任意の geometric point の自己同型群が自明であることと同値である ([4] Thm2.2.5, [8] tag 04SZ)．

### 1.2 coarse moduli space が存在するための十分条件

しかし, 得られた artin stack が algebraic space であることもまためったに無い．筆者の感覚では, DM stack で既に綺麗すぎる (too neat) 対象である．そこで, artin stack を algebraic space や scheme で近似出来ないか, という問題が生まれる．この近似を coarse moduli space と呼ぶ．なお, これは歴史的な経緯から来た命名であり, 一般には必ずしも moduli 問題と関係が有るわけではない．

artin stack が coarse moduli space をもつための条件も 90 年代から考えられているが, 必要十分条件を得るには程遠い．十分条件として有名なのは Keel-Mori の定理 ([5]) が提示した「inertia stack が  $\mathcal{X}$ -finite」である．当初は多くの追加条件付きで証明されたが, [3] で base scheme に関する条件が取り外され, 最終的に [7] で artin stack に関する条件が全て取り外された．

他に, gerbe は必ず coarse moduli space を持つ．artin stack が gerbe であることは, inertia stack  $:: \mathcal{I}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$  が flat and locally of finite presentation であることと同値である．

### 1.3 coarse moduli space が存在するための必要条件

一方で, coarse moduli space が存在するための必要条件についてはほとんど知られていない．([3] Cor5.2) では様々な前提条件付きで「separated coarse moduli space が存在する」と「inertia stack が  $\mathcal{X}$ -finite」が

---

<sup>†1</sup> surjective+flat=falshfully flat に注意．

同値であることを示している．一方で [7] では反例を構成し，「inertia stack が  $\mathcal{X}$ -proper」さえ必要条件ではないことを示している．

## 1.4 その他の moduli space

また，「inertia stack が  $\mathcal{X}$ -finite」より強い条件を課したものとして，「quasi-coherent sheaf の pushforward が exact」を追加した tame Artin stack がある．これは coarse moduli space が etale local に綺麗なものとなっている．

違う方向性では，J.Alper が提案した adquate moduli space と good moduli space がある．good moduli space は quotient map にはなっていないが，GIT quotient に似た優れた性質を持つ ([1])．さらに，artin stack が good moduli space を持つための必要十分条件が分かっている ([2])．

## 2 論文 “Existence and properties of geometric quotients” [7] の構成

今回取り扱う [7] で述べられている命題のうち，次のものを特に研究する．

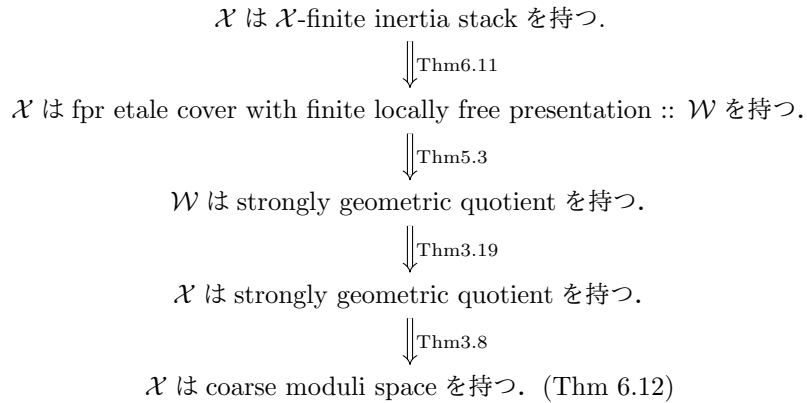
### 定理 2.1

$\mathcal{X}$  を artin stack とする． $\mathcal{X}$  が  $\mathcal{X}$ -finite inertia stack を持つならば， $\mathcal{X}$  が coarse moduli space を持つ．

論文は基本的に algebraic space の groupoid による商を扱っており，最後の §6 でそれらが stack の言葉に翻訳される．この方針は [5] と同じである．

### 2.1 証明の構成

証明の手順を説明する．未定義の用語がかなり多くなるが，適宜無視して欲しい．



命題番号を見ると，結論に近い部分から述べられていることが分かる．

また，ここに挙げられていないが coarse moduli space を考える上で重要な命題として次が有る．

### 定理 2.2 (Part of [7] Thm 3.16)

$R \rightrightarrows X$  を groupoid とし， $q: X \rightarrow Z$  をその strongly geometric quotient とする．この時， $q$  が universally open であり，かつ  $q$  が proper または integral であれば， $q$  は categorical quotient でもある．

全体として、この論文による D.Rydh の貢献は、geometric quotient 等の概念と categorical quotient の概念、また descent condition などの概念の関係性を解明した点に有ると思う。

## 2.2 中心的概念

上で述べたなかに頻出したとおり、strongly geometric quotient という概念が頻出である。この定義を述べよう。

**定義 2.3** (strongly geometric quotient, stack version, [7] Def 6.1)

$\mathcal{X}$  を artin stack とし、 $q$  を algebraic space への射  $q: \mathcal{X} \rightarrow Z$  とする。次の条件を満たす時、 $q$  は strongly geometric quotient と呼ばれる。

- $q ::$  universal homeomorphism,
- the diagonal  $\Delta_q ::$  universally submersive,
- $q^\# : \mathcal{O}_Z \rightarrow q_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} ::$  isomorphism.

最初の二つが成立する時、 $q$  は strongly topological quotient と呼ばれる。

[7] Prop3.8 (と Def 6.1 の上の段落) より、これは categorical quotient でもある。見ての通り、これはかなり強い条件である。なお、最後の条件が成立するためには、 $q$  の smooth 射による pullback がまた categorical quotient であることが十分である<sup>†2</sup>。

## 参考文献

- [1] Jarod Alper. Good moduli spaces for artin stacks. *Annales de l'Institut Fourier*, Vol. 63, No. 6, pp. 2349–2402, 2013.
- [2] Jarod Alper, Daniel Halpern-Leistner, and Jochen Heinloth. Existence of moduli spaces for algebraic stacks. <https://arxiv.org/abs/1812.01128>, 12 2018.
- [3] Brian Conrad. The keel-mori theorem via stacks. <https://math.stanford.edu/conrad/papers/coalgebraicstacks.pdf>, 2005.
- [4] Brian Conrad. Arithmetic moduli of generalized elliptic curves. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, Vol. 6, pp. 209–278, 04 2007.
- [5] Sean Keel and Shigefumi Mori. Quotients by groupoids. *Annals of Mathematics*, Vol. 145, No. 1, pp. 193–213, 1997.
- [6] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [7] David Rydh. Existence and properties of geometric quotients. *Journal of Algebraic Geometry*, Vol. 22, pp. 629–669, 08 2013.
- [8] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2019.

---

<sup>†2</sup> 特に  $q$  が uniform categorical quotient であれば十分。証明には、[9] で証明した  $(q_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}})(U) = \Gamma(U \times_Z \mathcal{X}, \text{pr}_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$  と、関手  $\Gamma(-, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$  が affine line  $:: \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$  で表現可能であることを用いる

- [9] 七条彰紀. Algebraic stacks, Sep 2018. <https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/tree/master/AlgebraicStacks>.