

Ex8.1 Strengthen Some Results in the Text.

Ex8.2 $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow 0$.

X :: variety of dimension n over k , \mathcal{E} :: locally free sheaf of rank $> n$, $V^\# \subset \Gamma(X, \mathcal{E})$:: k -vector space of global sections which generate \mathcal{E} とする. X :: variety より X :: connected なので \mathcal{E} の rank は X 全体で一定である. $\text{rank } \mathcal{E} = r(> n)$ としておこう.

主張 Ex8.2.1

ある $s \in V$ について次が成立する.

$$\forall x \in X, \quad s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x.$$

■Conversions and Notations. X の closed point 全体を X^+ と書く. Ex3.14 より, これは dense in X . また, $d = \dim_k V^\#, V = \mathbb{P}_k^{d-1}$ とし, $V^+ = (V^\# - \{0\})/k^*$ を V の closed points と同一視する. この同一視の仕方は Prop7.7 や dual projective space と同じである. $\dim_k V^\# - 1 = \dim V$ に注意. $V^\#$ の subspace も同様に V の subspace とみなす.

■Definition of B, B^+ . $B \subseteq X \times_k V$ を次のように置く.

$$B = \bigcap_{s \in V^\#} \text{pr}_1^{-1}(\{x \in X \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}).$$

B は $X \times V$ の closed subscheme である. ($\{\}$ 部分が closed であることは Ex2.16 を参照.) B には reduced structure を与えておく. $\text{pr}_1|_B : B \rightarrow X$ を p_1 と略す. B の closed points :: B^+ は次のような集合である.

$$B^+ = \{(x, s) \in X^+ \oplus V^+ \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}.$$

■Plot. 主張は, $\text{pr}_2(B) \not\supseteq V^+$ と言い換えられる. (詳細は後ほど.) これには B の次元が V の次元より小さいことを言えば良い. B の次元は Ex3.22 の結果を用いればその fiber :: B_x から計算できる. 全ての $x \in X$ について $\dim B_x$ を計算することは難しい. しかし少し妥協して, $x \in X^+$ についての $\dim B_x$ を計算することは出来る. この場合でも Ex3.22c の結果を用いて $\dim B_x$ が計算できる.

■Definition of ϕ_x . $x \in X$ について次の写像を考える.

$$\begin{aligned} \phi_x : \quad V^\# &\rightarrow \mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \\ s &\mapsto s_x \otimes 1 \end{aligned}$$

これが k -linear map であることは明らか. $k(x) := \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x$ より $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$. このことと ϕ_x の定義の仕方から, $\ker \phi_x = \{s \in V^\# \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}$.

■ ϕ_x for $x \in X^+$. この段落では $x \in X^+$ とする. すると $k(x) = k^{\dagger 1}$ なので $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x$. また $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$. さらに $V^\#$:: global generators of \mathcal{E} であるから, ϕ_x は surjective. なので

^{†1} X :: variety より, k :: algebraically closed field かつ X :: finite type / k . $A = k[x_1, \dots, x_n], \mathfrak{a} \subseteq A$ とし, $\mathfrak{m}/\mathfrak{a} \in \text{Spec } A/\mathfrak{a} \subseteq X$ が x に対応する極大イデアルだとする. ここで \mathfrak{m} は A の極大イデアル. $S = A - \mathfrak{m}$ とすると

$$k(x) = \frac{S^{-1}(A/\mathfrak{a})}{S^{-1}(\mathfrak{m}/\mathfrak{a})} \cong S^{-1}\left(\frac{A/\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}\right) \cong S^{-1}(A/\mathfrak{m}).$$

$A/\mathfrak{m} \cong k$ は体だから, これは $k(x) \cong k$.

$x \in X^+$ について $\dim \ker \phi_x$ が分かる.

$$\dim_k \ker \phi_x = \dim_k V^\# \otimes_k k(x) - \dim_k \mathcal{E}_x = \dim_k V^\# - r.$$

■Dimension of fiber :: $\dim B_x$. p_1 についての $x \in X^+$ の fiber :: B_x の base space は, Ex3.10 より, $\text{sp } B_x \approx p_1^{-1}(x)$. したがって次が分かる.

$$\text{sp } B_x \cap \text{sp } B^+ \approx p_1^{-1}(x) \cap \text{sp } B^+ = \{x\} \times \ker \phi_x.$$

ここで \times は集合としての直積を表す. よって B_x の次元が分かる^{†2}.

$$\dim B_x = \dim_k \ker \phi_x - 1 = \dim_k V^\# - r - 1 = \dim V - r.$$

■ p_1 :: closed map. $V \rightarrow \text{Spec } k$ は projective であり, $V, \text{Spec } k$ 共に noetherian であるからこの射は proper. よって universally closed である.

$$\begin{array}{ccc} X \times_k V & \longrightarrow & V \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{universally closed} \\ X & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

B :: closed なので B の closed subset は X でも closed. したがって $p_1 = \text{pr}_1|_B$:: closed map.

■ $p_1(B) = X$ or $B = \emptyset$. $p_1(B) \supseteq X^+$ とする. すると $p_1(B)$:: closed より $p_1(B) \supseteq \text{cl}_X(X^+) = X$. 次に $p_1(B) \not\supseteq X^+$ とする. すると上で述べたこと (全ての $x \in X^+$ について $\dim p_1^{-1}(x)$ が等しいこと) から, 結局 $p_1(B) \cap X^+ = \emptyset$ が分かる. $p_1(B)$ が空でないとは仮定しよう. すると p_1 :: closed map より, $x \in p_1(B)$ なら $\text{cl}_X(\{x\}) \subseteq p_1(B)$. $\text{cl}_X(\{x\})$ は closed point を含むので矛盾が生じる. よって $p_1(B) \not\supseteq X^+$ ならば $p_1(B) = \emptyset$. これは $B = \emptyset$ を意味し, さらにこれは 0 を除く全ての $V^\#$ の元が claim の条件を満たすことを意味する. 以下, $B \neq \emptyset$ と仮定する.

■ B :: irreducible. 以上から B :: irreducible が分かる. 実際, B が二つの閉集合 $C_1, C_2 (\neq \emptyset, X)$ の和であったとすると, $p_1(B) = X$ より,

$$X = p_1(C_1) \cup p_1(C_2).$$

一方, X :: irreducible. よって矛盾が生じ, B :: irreducible が示される.

■Dimension of B . B :: integral & finite type/ k (\implies variety/ k) なので, Ex3.22c から次が成り立つ: $x \in U$ ならば $\dim B_x = \dim B - \dim X$, となる U :: open dense subset in X が存在する. U :: non-empty open subset と X^+ :: dense から, $U \cap X^+ \neq \emptyset$. $x \in X^+$ であるときの及び開集合 $\dim B_x$ が既に分かっているから, $\dim B$ も分かる.

$$\dim B = \dim B_x + \dim X = \dim V - r + n.$$

$r > n$ なので, $\dim B < \dim V$.

^{†2} closed subscheme of B :: C について $\dim C = \dim C \cap B^+$ を示す. $C \cap B^+ \subset C$ より $\dim C \geq \dim C \cap B^+$ は明らか. $d = \dim C$ とし, C の irreducible closed subset が成す真の極大上昇鎖をとる: $Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_d$. closed immersion \implies finite type に注意すると, Z_i :: finite type/ k . なので Ex3.14 より $Z_i \cap B^+$:: dense in Z_i . したがって $Z_i \cap B^+ = Z_j \cap B^+ \implies Z_i = Z_j$ となり, $Z_0 \cap B^+ \subsetneq \cdots \subsetneq Z_d \cap B^+$ は B^+ の irreducible closed subset が成す真の上昇鎖. 以上から $\dim C \leq \dim C \cap B^+$ も成り立つ.

■ $\text{pr}_2(B) \supseteq V^+ \implies \dim B \geq \dim V$. $\text{pr}_2(B) \supseteq V^+$ としよう. B^+ の場合と同様に $\dim V^+ = \dim V$. ch I, Ex1.10 より, $\dim U = \dim V$ を満たす affine open subset of V $:: U$ がとれる. 適当に $\text{pr}_1(B)$ から affine open subset $:: U'$ をとると, X, V 共に finite type $/k$ だから, ch I, Ex3.15 (Products of Affine Varieties) が使える. よって $\dim U \times U' = \dim U + \dim U' \geq \dim U = \dim V$. $U \times_k U' \subset B$ だから $\dim B \geq \dim V$

■ Complete proof of the claim. 今はこれの対偶が成立する. すなわち, $s \in V^+ - \text{pr}_2(B)$ が存在する. この s と任意の $x \in X$ について $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ が成り立つ.

■ An exact sequence. Φ を以下で定める.

$$\begin{aligned} \Phi: \quad \mathcal{O}_X &\rightarrow \mathcal{E} \\ \langle U, \sigma \rangle &\mapsto \langle U, (s|_U) \cdot \sigma \rangle \end{aligned}$$

これの $x \in X$ における stalk を見ると, $\Phi_x: \sigma_x \mapsto s_x \cdot \sigma_x$ と成っている. $\mathcal{E}_x \cong \mathcal{O}_x^{\oplus r}$ かつ $\mathcal{O}_x :: \text{domain}$ より, $\text{Ann}(\mathcal{E}_x) = 0$. そして $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ から, $s_x \neq 0$. なので Φ_x は, したがって Φ は injective. よって $\mathcal{E}' = \text{coker } \Phi$ とおくと以下は exact sequence.

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow 0.$$

■ $\mathcal{E}' :: \text{locally free}$. \mathcal{E}' が locally free であることを示そう. Ex5.7b から, 任意の点における stalk が free であることを示せば十分. 以下, $\mathcal{E}_x = \mathcal{O}_x^{\oplus r}$ (\cong でなく $=$) とする. 点 $x \in X$ について

$$s_x = (s_x^{(i)})_i \in \mathcal{O}_x^{\oplus r} = \mathcal{E}_x$$

とする. $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x = \mathfrak{m}_x^{\oplus r}$ から, ある i について $s_x^{(i)} \notin \mathfrak{m}_x$. すなわち $s_x^{(i)} :: \text{unit}$. ここでは $i = 0$ とし,

$$u = (s_x^{(0)})^{-1} s_x = \left(1, s_x^{(2)}(s_x^{(0)})^{-1}, \dots, s_x^{(r)}(s_x^{(0)})^{-1} \right) \in s_x \mathcal{O}_x$$

と置く. すると $\mathcal{E}'_x \cong \mathcal{E}_x / \text{im } \Phi_x = \mathcal{O}_x^{\oplus r} / s_x \mathcal{O}_x$ は次の写像で $\mathcal{O}_x^{\oplus r-1}$ と同型.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x^{\oplus r} / s_x \mathcal{O}_x &\rightarrow 0 \oplus \mathcal{O}_x^{\oplus r-1} \\ (t^{(j)})_j \bmod s_x \mathcal{O}_x &\mapsto (t^{(j)})_j - t^{(0)} u \end{aligned}$$

well-defined であることは明らか. 逆写像は次のもの.

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x^{\oplus r-1} &\rightarrow \mathcal{O}_x^{\oplus r} / s_x \mathcal{O}_x \\ t &\mapsto (0 \oplus t) \bmod s_x \mathcal{O}_x \end{aligned}$$

Ex8.3 Product Schemes.

Ex8.4 Complete Intersections in \mathbb{P}^n .

Ex8.5 Blowing Up a Nonsingular Subvariety.

Ex8.6 The Infinitesimal Lifting Property.

Ex8.7 Classifying Infinitesimal Extension: One Case.

Ex8.8 Plurigenera and Hodge Numbers are Birational Invariants.