Pullback functor が関係する各種計算.

七条 彰紀

2017 年 11 月 19 日

定義 0.1
$f : X \to Y$ を scheme morphism とする．$\mathcal{O}_Y$-module :: $\mathcal{F}$ に対して，$f^*\mathcal{F}$ は inverse image functor を用いて $f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$ と定義する．あるいは，$\mathcal{O}_Y$-module の圏における f_* :: direct image functor の left adjoint functor として定義する．

以下，X, Y, f は定義文中のようなものとする．
V :: open in Y とし，$i : V \to Y$ を inclusion map とする．すると i^* は restriction である．

$$i_*\mathcal{F} = i^{-1}\mathcal{F} \otimes_{i^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_V \cong \mathcal{F}|_V.$$

命題 0.2
V :: open in Y, $U = f^{-1}(V)$ :: open in X とする．このとき，

$$(f^*\mathcal{F})|_U \cong (f|_U)^*\mathcal{F}|_V.$$

(証明)．明らかに次は可換図式である．i, j は inclusion map とする．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f|_U"'] & X \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, "j"'] & Y \end{tikzcd}$$

証明は次のよう．

$$(f^*\mathcal{F})|_U \cong i^*f^*\mathcal{F} \cong (f \circ i)^*\mathcal{F} \cong (j \circ f|_U)^*\mathcal{F} \cong (f|_U)^*j^*\mathcal{F} \cong (f|_U)^*\mathcal{F}|_V.$$

∎

命題 0.3
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: locally free $\mathcal{O}_Y$-module とする．

$$f^*(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \cong f^*\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{G}.$$