

ゼミノート #3

\mathcal{M}_g の構成方針

七条彰紀

2018 年 5 月 29 日

以降は, curve と言えば

smooth, complete, reduced and connected scheme of dimension 1 over \mathbb{C}

のことである. [2] II, 6.7 より, 以上の意味での curve は projective である. (geometric) genus of curve は通常 g で表す.

1 Moduli spaces we'll be concerned with

以降で考えていく moduli space を簡単に紹介する.

1.1 \mathcal{M}_g :: the coarse moduli space of curves of genus g .

これまで議論してきた. まだ存在は示されていない. trivial automorphism しか持たない curve に対応する \mathcal{M}_g の点全体を \mathcal{M}_g^0 と書くことにする. これは \mathcal{M}_g の開集合であることが知られている.

1.2 $\mathcal{M}_{g,n}$:: the coarse moduli space of pairs of curve of genus g and n distinct points.

$\mathcal{C}_g = \mathcal{M}_{g,1}$ もここで述べる.

curve of genus g :: C と C の n 個の互いに異なる点 :: p_1, \dots, p_n を合わせた順序組 (C, p_1, \dots, p_n) の moduli space を $\mathcal{M}_{g,n}$ と呼ぶ.

[1] によれば, 圏点をつけた条件 (互いに異なる点の順序組) は, $\mathcal{M}_{d,g}$ の compactification を考える上で必要である. また, curve :: C と, 互いに異なるとは限らない点の順序無し組の組 $(C, \{p_1, \dots, p_n\})$ の coarse moduli space を構成することも出来る.

(C, p_1, \dots, p_n) から n 点 p_1, \dots, p_n の情報を忘れると, 標準的な射 $\mathcal{M}_{g,n} \rightarrow \mathcal{M}_g$ が得られる.

$\mathcal{M}_{g,n}$ は \mathcal{M}_g に比べて次元が n 大きく, 元の \mathcal{M}_g の情報を得づらいという問題がある. しかし, $\mathcal{M}_{g,n}$ はしばしば自然に現れるので, 文脈によっては大きな意味を持つ.

1.3 $\mathcal{P}_{d,g} ::$ the coarse moduli space of pairs of curve of genus g and line bundle of degree d .

$\mathcal{P}_{d,g}$ は, curve of genus g とその上の line bundle of degree d の組 (C, \mathcal{L}) から \mathcal{L} の情報を忘れれば, 標準的な射 $\phi: \mathcal{P}_{d,g} \rightarrow \mathcal{M}_g$ が得られる.

■ 次の同型が存在する.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{d,g} &\cong \mathcal{P}_{d+(2g-2),g}, & \mathcal{P}_{d,g} &\cong \mathcal{P}_{-d,g} \\ (C, \mathcal{L}) &\mapsto (C, \mathcal{L} \otimes K_C), & (C, \mathcal{L}) &\mapsto (C, \mathcal{L}^{-1}). \end{aligned}$$

このことと Exercise 2.6 から, 互いに同型にならない $\mathcal{P}_{d,g}$ は, 各 g に対して丁度 $g-1$ 個ある^{†1}.

$$\mathcal{P}_{0,g}, \mathcal{P}_{1,g}, \dots, \mathcal{P}_{g-1,g}.$$

$\mathcal{P}_{d,g}$ のうち, $\mathcal{P}_{g-1,g}$ は “Theta characteristic” と呼ばれるものを付加構造とした moduli space である. 参考文献: Gavril Farkas “Theta characteristics and their moduli”^{†2}

2 Constructions of \mathcal{M}_g

2.1 Generally Steps of Construction of Moduli Space.

moduli space の構成方法はある程度決まった手順がある. ここではそれを述べる.

まず, 対象 X と付随する情報 (extra data) の組たちを, 何らかの parameter space W の点に対応させる. parameter space は対象と付加情報の組そのもの (同値類でなく) が成す空間である. 例えば平面上の原点を通る直線の parameter space は \mathbb{P}^1 である. 1 つの対象の同型類 $[X]$ に対応する W の点たちが成す集合 $S_{[X]}$ を観察する. この集合 $S_{[X]}$ を何らかの群 G の W への作用に拠る軌道と考えることが出来れば ($S_{[X]} = Gw$ なる $w \in W$ が存在すれば), 求める moduli space は商空間 W/G として実現できる.

まとめると, moduli space を構成する際には以下の 4 つの要素を中心に考えることに成る.

Extra Data	分類対象 (Object) に付随させる情報.
Parameter Space	組 (Object, Extra Data) が成す空間.
Group	Parameter Space に作用し, 1 つの Object に対応する点の集合が 1 つの軌道である群.

例 2.1

([3]) $k ::$ field とし, moduli space of hypersurface of degree d in \mathbb{P}_k^n を構成しよう. $H ::$ hypersurface of degree d in \mathbb{P}_k^n は, 次のような形の $k[x_1, \dots, x_n]$ の斉次 d 次多項式で定まる.

$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha x^\alpha.$$

ただし α は多重添字である. そして多項式はその係数 a で定まる. a は $k^{\oplus N}$ ($N := \binom{n+d}{d}$) の元である. したがって H は \mathbb{A}_k^N (Parameter Space) の点 $(a_{(d,0,\dots,0)}, \dots, a_{(0,\dots,0,d)})$ に対応する.

^{†1} \mathbb{Z} を $s: d \mapsto d + (2g-2)$ と $t: d \mapsto -d$ の二つの自己同型で生成される群で割る. s が生成する群は $(2g-2)\mathbb{Z}(<\mathbb{Z})$ と同型で, t が生成する群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型. よって $\#(\mathbb{Z}/(2g-2)\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})) = (2g-2)/2 = g-1$.

^{†2} <https://arxiv.org/abs/1201.2557>

しかし, a に正則行列 $g \in GL_{n+1}(k)$ (Group) を作用させた a' も, H と同型な hypersurface に対応する (g の作用のさせ方はここで述べない). 逆に H の同型な hypersurface に対応する \mathbb{A}^N の点の全体は, $GL_{n+1}(k)$ による a の軌道として得られる. よって $\mathbb{A}_k^N/GL_{n+1}(k)$ がもつめる moduli space である.

以下では \mathcal{M}_g :: the coarse moduli space of smooth curves of genus g の構成方法の概略を述べる. 分類対象 (Object) に付随させる情報. 方法は大きく分けて 3 つある. 最初の二つは解析的な方法で, 最後のものは完全に代数的である.

2.2 The Teichmüller approach

Extra Data	Normalized set of generators for $\pi_1(C)$, or Homeomorphism which C^{an} to standard compact orientable surface X_0 .
Parameter Space	Teichmüller space :: $T_g \subseteq \mathbb{C}^{3g-3}$.
Group	Γ_G :: Group of diffeomorphisms of X_0 , modulo isotopy.

この方法で構成された \mathcal{M}_g は analytic variety になる.

この方法の利点は, \mathcal{M}_g の位相を扱いやすいことと, \mathcal{M}_g に自然な計量を入れられることである.

Teichmüller space :: T_g は, open ball であることが知られている. すなわち, contractable space となっている. そこで T_g の代わりに扱いやすい contractable space を考え, その Γ_g による商を考えることで \mathcal{M}_g の cohomology について調べることが出来る. 主に Harer がこの方法で成果をあげた. この成果についてはこのセミナーでものちに取り上げる.

\mathcal{M}_g に計量を入れて, それをもちいて projective variety への埋め込みを与える, ということを Wolpert が行った. この埋め込み先の projective variety は Deligne–Mumford compactification と共通の良い性質を多く持っている. なお, 計量の入れ方は複数存在する. 参考文献は Kefeng Liu, Xiaofeng Sun, Shin-Tung Yau “Geometric Aspects of the Moduli Space of Riemann Surfaces” ^{†3}.

2.3 The Hodge theory approach

Extra Data	1. Symplectic basis of $H_1(C, \mathbb{Z})$:: $\{a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g\}$, 2. Basis of $H^0(C, K_C)$:: $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$, 3. The intersection pairing.
Parameter Space	$\mathfrak{c}_g \subseteq \mathfrak{h}_g$.
Correspondance	$P = [\int_{b_i} \omega_j]_{i,j} \in \mathfrak{h}_g$
Group	$Sp_{2g}(\mathbb{Z})$:: Symplectic group.

ここで \mathfrak{h}_g は次のように定義される.

$$\mathfrak{h}_g = \{ \tau \in M_{g \times g}(\mathbb{C}) \mid \tau^T = \tau, \Im(\tau) \text{ :: positive definite.} \}$$

これは Siegel upper-halfspace of dimension g と呼ばれている. \mathfrak{h}_1 が通常の upper-half plane と一致することに注意.

^{†3} <https://arxiv.org/abs/math/0411247>

$\{a_1, \dots, a_g\} \subset H_1(C, \mathbb{Z})$ は $[\int_{b_i} \omega_j]_{i,j} = I_g$ (単位行列) であるように選ばれる. b_1, \dots, b_g の選び方によって $P = [\int_{b_i} \omega_j]_{i,j} \in \mathfrak{c}_g$ は変わるが, これは以下の $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ による作用に対応する.

$$Sp_{2g}(\mathbb{Z}) = \{\gamma \in GL_{2g}(\mathbb{Z}) \mid \gamma^T \Omega \gamma = \Omega\}, \text{ where } \Omega = \begin{bmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{bmatrix}.$$

構成方法から, \mathcal{M}_g は $\mathcal{A}_g = \mathfrak{h}_g / Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ に含まれる. \mathcal{A}_g は coarse moduli space for abelian varieties of dimension g である.

この方法は $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ が Γ_g よりも分かりやすいという点で Teichmüller approach に優っている. しかし \mathfrak{c}_g の方は把握が難しく, 「 \mathfrak{c}_g はどのようなものか」という問は the Schottky problem と呼ばれている. これについては様々な考察がなされているが, \mathfrak{c}_g の具体的な記述は得られていない.

この方法の別の利点は, compactification of $\mathcal{A}_g :: \tilde{\mathcal{A}}_g$ ^{†4} が自然に得られるということである. compactification of $\mathcal{M}_g :: \tilde{\mathcal{M}}_g$ は Statake compactification と呼ばれ, $\tilde{\mathcal{A}}_g$ での \mathcal{M}_g の閉包として得られる.

しかし, $\tilde{\mathcal{M}}_g$ はいかなる moduli functor の coarse moduli space でもないため, (以下で述べる例を除いては) \mathcal{M}_g 自体の研究には役立てられない. 実際, $\tilde{\mathcal{M}}_g - \mathcal{M}_g$ は種数が g より小さい smooth curve に対応しているため, $\tilde{\mathcal{M}}_g$ 上の family を考えるということは出来ない. 種数 g の曲線と種数が g 未満の曲線の両方を fiber にもつ family は, どこかで singular な fiber を持つからである (種数は homotopy/birational 不変量であったことを想起せよ).

$\tilde{\mathcal{M}}_g$ を用いた議論によって, \mathcal{M}_g が projective でも affine でも無いことが分かる (TODO: ここでの \mathcal{M}_g って scheme ではないのでは?).

2.4 The geometric invariant theory (G.I.T.) approach

$n \geq 3$ を任意にとって固定する.

Extra Data	(Nothing.)
Parameter Space	$K \subseteq \mathcal{H}_{2(g-1)n, g, N}$ ($N := (2n-1)(g-1)-1$).
Group	$PGL_{N+1}(\mathbb{C})$.

$\mathcal{H}_{2(g-1)n, g, N}$ は subscheme of degree $2(g-1)n$ and genus g in \mathbb{P}^N の Hilbert scheme である.

この方法の利点は, 代数的であることの他に二つある.

1. \mathcal{M}_g が quasiprojective algebraic variety として得られる.
2. compactification of \mathcal{M}_g についての考察が自然に得られる.

2.4.1 Compactification of \mathcal{M}_g and Stable Curve.

compactification of \mathcal{M}_g (ここでは \mathcal{M}_g を含む projective scheme) を得る方法として, K の $\mathcal{H}_{2(g-1)n, g, N}(=:\mathcal{H})$ での閉包を取って $PGL_{N+1}(\mathbb{C})$ で割る, ということが思いつく. しかしこれで得られるのは K の compactification でなく, K を含む集合 \tilde{K} の商 $\tilde{K}/PGL_{N+1}(\mathbb{C})$ の compactification である. これらの包含関係は $K \subset \tilde{K} \subset \text{cl}_{\mathcal{H}}(K)$ となる.

この拡張が必要な理由は, 次のように説明される: 次のような $t \in \mathbb{A}^1 - \{0\}$ でパラメトライズされる family

^{†4} \mathcal{A}_g を analytic open subset として含む compact analytic variety の事.

of smooth curves を考える. has only nodes as singularities and has only finitely many automor- phisms.

$$C : y^2z = x^3 - t^2axz - t^3bz^3 \text{ where } a, b, t \in \mathbb{C}, t \neq 0.$$

$t \neq 0$ ならば $C_t \cong C_1$ となる. しかし C_0 は cuspidal curve となる. $C \rightarrow \mathbb{A}^1 - \{0\}$ に対応する j -invariant map を $\chi : \mathbb{A}^1 - \{0\} \rightarrow \mathbb{A}^1$ とすると, $t \rightarrow 0$ で χ の値は \mathbb{A}_j^1 の外側の点に収束してしまう. なので $\mathcal{M}_1 = \mathbb{A}_j^1$ をコンパクト化するには, C_0 に対応する点を \mathcal{M}_1 に加えなければならない. なお, この曲線族は a, b の値を変えることで任意の楕円曲線を含むものに成る.

では \tilde{K} に含まれる曲線は何だろうか, ということになるが, これは (Deligne-Mumford) stable curve と呼ばれるものである. 次の session で詳しく述べる.

参考文献

- [1] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.
- [2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.
- [3] 向井茂. モジュライ理論 〈1〉. 岩波書店, 12 2008.