

第 4 章

Stacks and Descent Theory

七条彰紀

2019 年 6 月 19 日

1 The Category of Descent Data.

今回のノートで一貫して用いる記号と記法を定める.

$\mathbf{C} :: \text{site}, \pi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{C} :: \text{fibered category}$ を考える^{†1}.

記法を定める. $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i: U_i \rightarrow U\}_{i \in I} \in \text{Cov}(U)$ について,

$$U_{ij} := U_i \times_U U_j, \quad U_{ijk} := U_i \times_U U_j \times_U U_k \quad (i, j, k \in I)$$

と書くことにする. また, 添字 $a, b = i \text{ or } j \text{ or } k$ について, fiber product からの射影を

$$\text{pr}_a: U_{ij} \text{ (or } U_{ijk}) \rightarrow U_a, \quad \text{pr}_{a,b}: U_{ijk} \rightarrow U_{ab}$$

とする. さらに $\text{pr}_i: U_{ij} \rightarrow U_i$ による pullback を $(-)|_{U_{ij}}$ などと書く.

1.1 Definition

定義 1.1 ($\mathcal{F}(\mathcal{U})$, [2] 4.2.4, [3] Def4.2)

圏 $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を次のように定める.

Object.

- $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ なる対象の class $\{\xi_i\}_{i \in I}$ と,
- $\mathcal{F}(U_{ij})$ 中の同型 $\sigma_{ij}: \xi_j|_{U_{ij}} \rightarrow \xi_i|_{U_{ij}}$ の class $\{\sigma_{ij}\}_{i,j \in I}$

の組 $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ であって, 以下で述べる cocycle condition を満たすもの. このような組を object with descent data と呼ぶ^{†2}.

Arrow.

射 $\{\alpha_i\}: (\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}) \rightarrow (\{\eta_i\}, \{\tau_{ij}\})$ とは, $\mathcal{F}(U_i)$ の射 $\alpha_i: \xi_i \rightarrow \eta_i$ の class であって,

^{†1} ほとんど fiber of π しか扱わないので, pseudo-functor $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ をとっても構わない.

^{†2} 同型の class $\{\sigma_{ij}\}$ が descent data と呼ばれる.

σ_{ij}, τ_{ij} と整合的であるもの. すなわち, 任意の $i, j \in I$ について以下の図式が可換であるもの.

$$\begin{array}{ccc} \xi_j|_{U_{ij}} & \xrightarrow{\alpha_j|_{U_{ij}}} & \eta_j|_{U_{ij}} \\ \sigma_{ij} \downarrow & & \downarrow \tau_{ij} \\ \xi_i|_{U_{ij}} & \xrightarrow{\alpha_i|_{U_{ij}}} & \eta_i|_{U_{ij}} \end{array}$$

■cocycle condition 組 $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ が cocycle condition を満たすとは, 任意の $i, j, k \in I$ について以下が成り立つということ.

$$\sigma_{ik}|_{U_{ijk}} = (\sigma_{ij}|_{U_{ijk}}) \circ (\sigma_{jk}|_{U_{ijk}}).$$

図式でかけば, 圏 $\mathcal{F}(U_{ijk})$ における以下の図式が可換であることと同値.

$$\begin{array}{ccc} \xi_k|_{U_{ijk}} & \xrightarrow{\sigma_{jk}|_{U_{ijk}}} & \xi_j|_{U_{ijk}} \\ & \searrow \sigma_{ik}|_{U_{ijk}} \quad \swarrow \sigma_{ij}|_{U_{ijk}} & \\ & \xi_i|_{U_{ijk}} & \end{array}$$

注意 1.2

この定義に於いて fiber products $:: U_{ij}, U_{ijk}$ を暗黙のうちに選択している. たが, どのように選択しても得られる圏は同型に成る. U_{ij}, U_{ijk} の選択も込めて $(\{\xi_i\}, \{\xi_{ij}\}, \{\xi_{ijk}\})$ を $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象とする定義の仕方も有るが, ここでは述べない. 詳細は [3] Remark 4.3 にある.

定義 1.3 ([3] p.72)

$\xi \in \mathcal{F}(U), \mathcal{U} = \{\phi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ について, $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の元を以下のデータに対応させる:

- $\xi_i := \phi_i^* \xi$ の class $\{\xi_i\}_{i \in I}$.
- $\xi_i|_{U_{ij}}$ と $\xi_j|_{U_{ij}}$ が, いずれも

$$\phi_i \circ \text{pr}_i = \phi_j \circ \text{pr}_j: U_{ij} \rightarrow U$$

による ξ の pullback であることから得られる標準的同型の class $\{\sigma_{ji}: \xi_j|_{U_{ij}} \rightarrow \xi_i|_{U_{ij}}\}_{i,j}$.

このデータをまとめて $(\{\phi_i^* \xi\}, \text{cano})$ などと書く. この対応を $\epsilon_{\mathcal{U}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ と書く. $\mathcal{F}(U)$ の射 $\xi \rightarrow \eta$ から, ϕ_i に沿った pullback によって $(\{\phi_i^* \xi\}, \text{cano}) \rightarrow (\{\phi_i^* \eta\}, \text{cano})$ が得られるので, 対応 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ は関手である.

1.2 Example

例 1.4 ([2], 4.2.1)

一つの射から成る cover $:: \mathcal{U} = \{f: V \rightarrow U\}$ について $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を考えてみる. この圏の対象は,

- 対象 $E \in \mathcal{F}(V)$
- $\mathcal{F}(V \times_U V)$ の中の同型射 $\sigma: \text{pr}_1^* E \rightarrow \text{pr}_2^* E$

の組である.

2 Prestack / Stack.

2.1 Definitions.

定義 2.1 (Prestack, Stack)

関手 $\epsilon_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ を用いて以下のように定義する.

- (i) 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} \in \text{Cov}(U)$ について $\epsilon_U ::$ fully faithful である時, fibered category $\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{C}$ は prestack である, という.
- (ii) 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} \in \text{Cov}(U)$ について $\epsilon_U ::$ equivalence である時, fibered category $\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{C}$ は stack である, という.

(pre)stacks の間の射は, fibered category としての射である.

注意 2.2

prestack の定義は以下のように言い換えられる: 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ をとる. さらに $\xi, \eta \in \mathcal{F}(U)$ をとり, ϵ_U による像を

$$\epsilon_U(\xi) = (\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}), \quad \epsilon_U(\eta) = (\{\eta_i\}, \{\tau_{ij}\}) \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

とする. この時, 任意の射 $\{\alpha_i\}: \epsilon_U(\xi) \rightarrow \epsilon_U(\eta)$ (射 $\alpha_i: \xi_i \rightarrow \eta_i$ の集合) について, $\mathcal{F}(U)$ の射 $\alpha: \xi \rightarrow \eta$ が一意に存在し, $\alpha_i = (\phi_i)^* \alpha (\iff \{\alpha_i\} = \epsilon_U(\alpha))$ となる.

標語的に言えば, prestack は「貼り合わせられる射を持つ psuedo-functor」となる. 同型射の貼り合わせは同型射であるから, prestack は「貼り合わせが (存在すれば) 一意な対象を持つ psuedo-functor」である.

注意 2.3

このノートでは, fiber が条件を満たす fibered category として (pre)stack は定義されている (fiber を用いずに (pre)stack を定義することも出来るが, 今回は採用しなかった). なので形式上, (pre)stack は fibered category を経由せず, 特別な psuedo-functor として定義できる. しかし実際にそのように定義されることは少ない.

では psuedo-functor として定義しない積極的な理由はと言うと, 実用上, 元の fibered category にも言及する機会が多いからであると思われる. fiber だけでなく元の fibered category に言及する理由については, このセミナーのノート session 4.5^{†3}, 注意 2.8 を参考にして欲しい.

定義 2.4 (Sub(pre)stack)

stack $:: \pi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{C}$ の sub(pre)stack とは, \mathcal{F} の部分圏 \mathcal{G} であって, π と包含関手の合成 $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}$ が fibration であり, さらにその fiber が (pre)stack であるもの.

^{†3} URL : https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/AlgebraicStacks/session4_5_FiberedCategoriesContinued.pdf

2.2 Examples.

命題 2.5 ([3] Prop4.9)

- (i) separated presheaf of sets is a prestack.
- (ii) sheaf of sets is a stack.

(証明). $\mathbf{C} :: \text{site}, \mathcal{F}: \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets} :: \text{presheaf}$ とする. $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ を任意に取る.

今, 圏 $\mathcal{F}(U), \mathcal{F}(\mathcal{U})$ は集合 (離散圏) である. なので関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ は写像である. さらに射 σ_{ij} も恒等射しかないから, $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象は, 任意の i, j について $\xi_i|_{U_{ij}} = \xi_j|_{U_{ij}}$ を満たす $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ の族 $\{\xi_i\}_i$ であると考えて良い. このセミナーノートの session3 の記号を用いれば, $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ということに成る.

二つのデータ $\{\xi_i\}, \{\eta_i\}$ の間の射もやはり恒等射しかないから, 「関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が fully faithful である」という仮定は「写像 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が単射である」と言い換えられる. これはすなわち, \mathcal{F} が separated presheaf であるということである.

「関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が essentially surjective である」という仮定は「写像 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が全射である」と言い換えられるから. $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が equivalence であることは $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と $\mathcal{F}(U)$ の間に全単射が存在するということである. これはすなわち, $\mathcal{F}(U)$ が sheaf であるということである. ■

注意 2.6

この命題で分かるとおり, prestack は presheaf の抽象化ではなく, separated presheaf の抽象化である. そうすると, 我々は psuedo-functor $\mathbf{B}^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$ を prestack と呼び, 今 prestack と呼んでいるものは separated prestack と呼ぶべきなのかも知れない. 我々がそうしないのは, 後に定義される “separated stack” との混乱を避けるためである.

以下の二つの例は後にセミナーでも証明を扱う.

例 2.7

$X \in \mathbf{C}$ に対し, 圏 \mathbf{Shv}/X を以下のように定める.

Objects.

X への射を持つような \mathbf{C} の対象 U と, U 上の sheaf \mathcal{U} の組.

Arrows.

射 $(U, \mathcal{U}) \rightarrow (V, \mathcal{V})$ は, \mathbf{C} の射 $f: U \rightarrow V$ と, morphism of sheaves on $V :: f^\#: \mathcal{V} \rightarrow f_*\mathcal{U}$ の組.

この時, fibered category $:\mathbf{Shv}/X \rightarrow \mathbf{C}/X; (U, \mathcal{U}) \mapsto U$ は stack である. この例で考える sheaf を quasi-coherent sheaf に制限して得られる fibered category $:\mathbf{QCoh}/X \rightarrow \mathbf{C}/X$ も stack である. この二つの例については, このセミナーでも後に証明を扱う.

例 2.8

$X \in \mathbf{Sch}$ に対し, 圏 \mathbf{QCoh}/X を以下のように定める.

Objects.

$\mathbf{Fpqc}(X)^{\dagger 4}$ の対象 $:: U$ と, U 上の sheaf (on fpqc topology) $:: \mathcal{U}$ の組.

Arrows.

射 $(U, \mathcal{U}) \rightarrow (V, \mathcal{V})$ は, \mathbf{C} の射 $f: U \rightarrow V$ と, morphism of sheaves on $V :: f^\#: \mathcal{V} \rightarrow f_*\mathcal{U}$ の組.

この時, fibered category $:: \mathbf{QCoh}/X \rightarrow \mathbf{C}/X; (U, \mathcal{U}) \mapsto U$ は stack である.

例 2.9 ([2] 4.4.1)

以下で定まる fibered category は stack である.

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{pair of scheme over } S :: Y \\ \text{and closed imm. } W \hookrightarrow Y \end{array} \right\} & \rightarrow & \mathbf{Fppf}(S) \\ (Y, W \hookrightarrow Y) & \mapsto & Y \end{array}$$

例 2.10 ([2] 4.4.4)

以下で定まる fibered category は stack である.

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{pair of scheme over } S :: Y \\ \text{and open imm. } W \hookrightarrow Y \end{array} \right\} & \rightarrow & \mathbf{Fppf}(S) \\ (Y, W \hookrightarrow Y) & \mapsto & Y \end{array}$$

以下の二つの例は後に一般化される.

例 2.11 ([3] §4.3.1)

arrow category $:: \mathbf{Sch}^\rightarrow$ の対象を affine morphism に制限したものを圏 \mathbf{Aff} とする. 以下で定まる fibered category は stack である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Aff} & \rightarrow & \mathbf{Fppf}(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}) \\ [X \rightarrow Y] & \mapsto & Y \end{array}$$

例 2.12 ([2] 4.4.15)

quasi-compact open imbedding の後に affine morphism を合成した射のことを quasi-affine morphism という. arrow category $:: \mathbf{Sch}^\rightarrow$ の対象を quasi-affine morphism に制限したものを \mathbf{QAff} とする. 以下で定まる fibered category は stack である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{QAff} & \rightarrow & \mathbf{Fppf}(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}) \\ [X \rightarrow Y] & \mapsto & Y \end{array}$$

2.3 Propositions.

命題 2.13 ([2] Prop4.12)

二つの equivalent な fibered category があり, かつ一方が stack ならば, もう一方も stack である.

(証明). $\mathcal{F}, \mathcal{G} ::$ fibered categories over \mathbf{C} とし, $F: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} ::$ morphism of fibered categories とする. この時 cover of $U \in \mathbf{C} :: \mathcal{U} = \{U_i \rightarrow U\}$ について $F_{\mathcal{U}}$ を定義する.

^{†4} 圏 \mathbf{Sch}/X に fpqc topology を備えたもの.

$$\begin{array}{lll}
F_{\mathcal{U}}: & \mathcal{F}(\mathcal{U}) & \rightarrow \mathcal{G}(\mathcal{U}) \\
\textbf{Objects}: & (\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}) & \mapsto (\{F\xi_i\}, \{F\sigma_{ij}\}) \\
\textbf{Arrows}: & \{\alpha_i\} & \mapsto \{F\alpha_i\}
\end{array}$$

更に二つの射 $F, G: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ とその間の base-preserving natural transformation $\rho: F \rightarrow G$ に対し, $\rho_{\mathcal{U}}: F_{\mathcal{U}} \rightarrow G_{\mathcal{U}}$ を次のように定義する.

$$(\rho_{\mathcal{U}})_{(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})} = \{\rho_{\xi_i}\}.$$

以上から, F が equivalence ならば $F_{\mathcal{U}}$ も equivalence である. したがって以下の commutative diagram of weak 2-category^{†5} が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{U}}} & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \\
F \downarrow & & \downarrow F_{\mathcal{U}} \\
\mathcal{G}(U) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{U}}} & \mathcal{G}(\mathcal{U})
\end{array}$$

この可換図式から, 主張が得られる. ■

命題 2.14 ([2] Exc 4.I)

$\mathcal{F}, \mathcal{F}' :: \text{stack on } \mathbf{C}$, $f: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}' :: \text{morphism of stacks}$ とする. $f :: \text{isomorphism}$ は以下の 2 条件が成立することと同値.

- (a) 任意の $X \in \mathbf{C}$ について, fiber の間の射 $f_X: \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}'(X)$ は fully-faithful.
- (b) 任意の $X \in \mathbf{C}$ と $x \in \mathcal{F}'(X)$ について, covering of $X :: \{\phi_i: X_i \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X)$ が存在し, 全ての x の pullback $:: \phi_i^* x \in \mathcal{F}'(X_i)$ が $\mathcal{F}(X_i)$ の essential image に属す.

(証明). (TODO) ■

補題 2.15

site $:: \mathbf{C}$ を, 空集合の cover として空集合を持つ ($\emptyset \in \text{Cov}(\emptyset)$) ものとする. $\pi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{C} :: \text{stack}$ について, 以下の圏同値が成立する.

$$\mathcal{F}(\emptyset) \simeq \mathbf{1}.$$

特に, $\mathcal{F}(\emptyset)$ の任意の二つの対象の間には, ただ一つの同型射が存在する.

(証明). category of descent data $:: \mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象を考える. これは \mathcal{U} で添字付けられた対象の族の二つ組である. なので $\mathcal{U} = \emptyset$ について, $\mathcal{F}(\emptyset)$ の対象は (\emptyset, \emptyset) しかない. 射も \mathcal{U} で添字付けられた族であるから, 非自明な射は存在しない. ■

この補題の仮定は奇妙に見えるかも知れないが, 以下の通り, このように仮定しても問題はないし, 我々が扱う殆どの site はこの仮定を満たす.

主張 2.16

圏 \mathbf{C} の任意の対象 $U \in \mathbf{C}$ について, 命題「 $\emptyset \in \text{Cov}(U)$ 」は Grothendieck topology の公理 (定義) と独立である. すなわち, $\emptyset \in \text{Cov}(U)$ としなくても矛盾は生じない.

^{†5} 射の合成の間に natural isomorphism が存在するという意味で可換.

(証明). 命題「 $\emptyset \in \text{Cov}(U)$ 」を P と書く. Grothendieck topology の定義を見直そう. $\text{cover of } \emptyset :: \mathcal{U} \in \text{Cov}(U)$ が満たすべき条件を記号で書き下す.

- (a) $\forall [V \rightarrow U] \in \mathbf{C}/U, [\forall [U' \rightarrow U] \in \mathcal{U}, \exists U' \times_U V] \implies \{U' \times_U V \rightarrow V \mid [U' \rightarrow U] \in \mathcal{U}\} \in \text{Cov}(V)$.
(b) $\forall \mathcal{V} := \{\mathcal{U}'_{U'} \mid \mathcal{U}'_{U'} \in \text{Cov}(U')\}_{U' \in \mathcal{U}}, \{U'' \rightarrow U' \rightarrow U \mid [U' \rightarrow U] \in \mathcal{U}, [U'' \rightarrow U'] \in \mathcal{U}'_{U'}\} \in \text{Cov}(U)$.

クラス X と述語 F について “ $\forall x \in X, F(x)$ ” という文は “ $\forall x, [x \in X \implies F(x)]$ ” の省略形である. したがって, $X = \emptyset$ であるとき, “ $\forall x \in X, F(x)$ ” という文は任意の F について真. また, $\{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$.

なので, 以上の文を $\mathcal{U} = \emptyset$ の場合に考えると (すなわち P を仮定すると), いずれも P と同値に成る. よって $P \implies P$ ということになる. 一方, 否定 $\neg P$ を仮定しても矛盾が生じないことは明らか. ■

例 2.17

圏 \mathbf{C} を \mathbf{Sch} の部分圏や \mathbf{Sch}/S ($S :: \text{scheme}$) とする. morphism of schemes のクラス $\mathcal{P} \subset \text{Arr}(\mathbf{C})$ をとり, 以下のように \mathbf{C} 上の Cov を定めたとする:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(U) &= \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} :: \text{jointly surjective family and } \forall \phi \in \mathcal{U}, \phi \in \mathcal{P}\} \\ &= \left\{ \mathcal{U} \left| \bigsqcup_{U' \in \mathcal{U}} U' \rightarrow U :: \text{surjective and } \forall \phi, [\phi \in \mathcal{U} \implies \phi \in \mathcal{P}] \right. \right\}. \end{aligned}$$

この時, $\bigsqcup_{U' \in \emptyset} U' = \emptyset$ なので $\emptyset \in \text{Cov}(\emptyset)$.

このセミナーで定義した Zariski site, etale site, ... などは全てこの主張のように定義されている.

補題 2.18

圏 \mathbf{C} を \mathbf{Sch} の部分圏や \mathbf{Sch}/S ($S :: \text{scheme}$) とする. $U \in \mathbf{C}, \{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ をとり, $V = \bigsqcup_i U_i$ と置く.

$\{U_i \rightarrow V\} \in \text{Cov}(V)$ と仮定する^{†6}と $\pi: \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{C} :: \text{stack}$ について, 圏同値 (TODO: strict 2-equivalence? ここは ϵ と圏同型の合成)

$$\mathcal{F} \left(\bigsqcup_i U_i \right) \simeq \prod_i \mathcal{F}(U_i)$$

が成立する.

(証明). 瑣末なことでは有るが: $\{U_i \rightarrow V\}$ の添字について, $i \neq j$ ならば $U_i \neq U_j$ である, と仮定して一般性を失わない.

$\mathcal{U} = \{\text{inj}_i: U_i \rightarrow V\} (\in \text{Cov}(V))$ と置く. 次の関手が圏同値であることを示す.

$$\begin{array}{lll} E: & \text{im } \epsilon_{\mathcal{U}} & \rightarrow \prod_i \mathcal{F}(U_i) \\ \text{Objects:} & (\{(\text{inj}_i)^* \xi\}_i, \{\sigma_{ij}\}_{i,j}) & \mapsto ((\text{inj}_i)^* \xi)_i \\ \text{Arrows:} & \{\alpha_i\}_i & \mapsto (\alpha_i)_i \end{array}$$

$\xi_i := (\text{inj}_i)^*$ とおく. これが示せれば, $\mathcal{F} :: \text{stack}$ なので主張も得られる.

まず, 仮定の状況では, injection map (coprojection) $:: U_i \rightarrow V$ についての fiber product は次のように

^{†6} 例えば, Zariski topology より細かい位相ならばこの仮定は成立する.

成る.

$$U_{ij} = U_i \times_V U_j = \begin{cases} U_i & (U_i = U_j) \\ \emptyset & (U_i \neq U_j). \end{cases}$$

■ $E :: \text{essentially surjective.}$ $i \neq j$ の時, σ_{ij} は $\mathcal{F}(U_{ij}) = \mathcal{F}(\emptyset)$ の射であるから, $\xi_i|_{\emptyset}$ と $\xi_j|_{\emptyset}$ の間に存在するただ一つの射である. 一方, $i = j$ の時は, $(\text{pr}_i)^*(\text{inj}_i)^*\xi$ と $(\text{pr}_j)^*(\text{inj}_j)^*\xi$ が完全に等しいので, $\sigma_{ij} = \text{id}_{\xi_i}$. 以上より, 対象同士の次の対応は $\text{Ob}(E)$ の逆対応と成る.

$$\begin{aligned} \text{Ob} \left(\prod_i \mathcal{F}(U_i) \right) &\rightarrow \text{Ob}(\text{im } \epsilon_{\mathcal{U}}) \\ (\xi_i)_i &\mapsto (\{\xi_i\}_i, \{\sigma_{ij}\}_{i \neq j} \cup \{\text{id}_{\xi_i}\}_i) \end{aligned}$$

これは $E :: \text{essentially surjective}$ を意味する.

■ $E :: \text{fully-faithfull.}$ また, 上で述べたことから, 射 $\{\alpha_i\}: \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) \rightarrow \epsilon_{\mathcal{U}}(\eta)$ に課された条件が, 任意の射の組み合わせ $(\alpha_i: \xi_i \rightarrow \eta_i)_i$ について成立することも分かる ($i \neq j$ と $i = j$ の場合で証明は異なる). なので全単射

$$\text{Hom}(\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi), \epsilon_{\mathcal{U}}(\eta)) = \text{Hom}((\xi_i)_i, (\eta_i)_i) = \text{Hom}(E(\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)), E(\epsilon_{\mathcal{U}}(\eta)))$$

が得られる. これは $E :: \text{fully-faithfull}$ を意味する. ■

定理 2.19 (Stackification of category fibered by groupoids.)

$\mathbf{C} :: \text{site}$, $\mathcal{F} :: \text{category fibered by groupoids over } \mathbf{C}$ とする. この時, $\bar{\mathcal{F}} :: \text{stack in groupoids over } \mathbf{C}$ と $\theta: \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathcal{F}} :: \text{morphism of fibered category}$ が存在し,

$$(-) \circ \theta: \text{HOM}_{\mathbf{C}}(\bar{\mathcal{F}}, -) \rightarrow \text{HOM}_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}, -)$$

が圏同値となる.

(TODO: これは [2] Thm4.6.5 からとった. しかし, <https://stacks.math.columbia.edu/tag/02ZM> に一般の場合が書かれている. 出来ればこちらを理解したい)

例 2.20

presheaf の stackification は sheafification と一致する.

例 2.21 (arXiv:math/0305243v1, Prop3.6)

$S :: \text{scheme}$, $\mathcal{M} :: \text{algebraic stack over } \mathbf{Sch}/S$, $\mathcal{G} :: \text{sheaf in groups over } \mathbf{Sch}/S$, acting on \mathcal{M} とする. この時, \mathcal{M} の \mathcal{G} による categorical quotient $:: \mathcal{M}/\mathcal{G}$ は, 以下の prestack (2-functor として定義する) $:: \mathcal{P}$ の stackification として定義される.

Objects of $\mathcal{P}(U)$. $\mathcal{M}(U)$ の対象と同じ.

Arrows of $\mathcal{P}(U)$. $g \in \mathcal{G}(T)$ と $\mathcal{M}(U)$ の射 $g * x \rightarrow y$ の組.

ただし $U \in \mathbf{Sch}/S$ は任意.

3 Descent Theory.

3.1 Motivation.

(TODO)

3.2 Definitions.

定義 3.1

関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ を用いて以下のように定義する.

- (i) $\epsilon_{\mathcal{U}} ::$ equivalence となる \mathcal{U} を of effective descent for \mathcal{F} と呼ぶ.
- (ii) $\epsilon_{\mathcal{U}}$ の像と同型である $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象を, effective data という.

4 Criterion for fpqc Stacks.

定理 4.1 ([2] Lemma 4.25)

$S ::$ scheme, $\mathcal{F} \rightarrow (\mathbf{Sch}/S) ::$ fibration とする. 以下が成り立つとする.

- (a) \mathcal{F} は Zariski topology での stack である.
- (b) 任意の flat surjective morphism of affine S -scheme $V \rightarrow U$ について,
 $\epsilon_{\{V \rightarrow U\}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\{V \rightarrow U\})$ は圏同値.

この時, \mathcal{F} は fpqc topology での stack である.

注意 4.2

“flat” という条件は以下の証明では利用されない.

4.1 Step 1 / 準備

以前示した命題から, $\mathcal{F} ::$ split fibered category と仮定しても一般性を失わないので, 以下そのように仮定する.

補題 4.3

\mathbf{C} を site とし, $\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{C}$ を split fibration とする. さらに $U \in \mathbf{C}$, $\mathcal{U} = \{\phi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ と \mathcal{U} の細分^{†7} $\mathcal{V} = \{\psi_{ij}: V_{ij} \rightarrow U\}$ をとる.

^{†7} 細分の定義を確認しておく: 任意の \mathcal{V} の元 $V_{ij} \rightarrow U$ に対して \mathcal{U} の元 $U_i \rightarrow U$ が存在し, $V_{ij} \rightarrow U$ が $U_i \rightarrow U$ を通して $V_{ij} \rightarrow U_i \rightarrow U$ と分解する. 特に射 $V_{ij} \rightarrow U_i$ が存在する.

この時，関手 $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}: \mathcal{F}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{V})$ が存在し，以下は厳密な可換図式である。

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_{\mathcal{U}} & \mathcal{F}(U) & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \\ & \downarrow & \\ & \mathcal{F}(\mathcal{V}) & \end{array}$$

$$\mathrm{pr}_2$$

$$\mathrm{pr}_2$$

σ_{ij} は fiber product の普遍性から得られる $\mathrm{pr}_2^* \phi_j^* \xi$ から $\mathrm{pr}_1^* \phi_i^* \xi$ への同型であるから, $\sigma_{ij} = \mathrm{id}$. このことと $\mathcal{F} :: \text{split}$ から $\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^* \sigma_{ij} = \mathrm{id}$ も分かる. まとめて, $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) = (\{(\psi_{ik})^* \xi\}, \{\mathrm{id}_{(\psi_{ik})^* \xi}\})$.

一方,

$$\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^* \mathrm{pr}_2^* \phi_j^* \xi = (\psi_{jl} \circ \mathrm{pr}_2)^* \xi = \mathrm{pr}_2^* (\psi_{jl})^* \xi = \mathrm{pr}_1^* (\psi_{ik})^* \xi = (\psi_{ik} \circ \mathrm{pr}_1)^* \xi = \left(\iota_{ik}^{jl}\right)^* \mathrm{pr}_1^* \phi_i^* \xi.$$

なので, fiber product の普遍性から得られる $\mathrm{pr}_2^* (\psi_{jl})^* \xi$ から $\mathrm{pr}_1^* (\psi_{ik})^* \xi$ への同型は id である. したがって $\epsilon_{\mathcal{V}}(\xi) = (\{(\psi_{ik})^* \xi\}, \{\mathrm{id}_{(\psi_{ik})^* \xi}\})$ となり, $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) = \epsilon_{\mathcal{V}}(\xi)$.

■射について $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \epsilon_{\mathcal{U}} = \epsilon_{\mathcal{V}}$. $\mathcal{F}(U)$ の射 $\alpha: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ をとる. すると $\mathcal{F} :: \text{split}$ なので

$$R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \epsilon_{\mathcal{U}}(\alpha) = \{(\iota_{ik})^* \phi_i^* \alpha\} = \{(\phi_i \circ \iota_{ik})^* \alpha\} = \{\psi_{ik}^* \alpha\} = \epsilon_{\mathcal{V}}(\alpha).$$

■

注意 4.4

$\mathcal{F} :: \text{split}$ を仮定しない場合, さらに base preserving isomorphism $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \epsilon_{\mathcal{U}} \rightarrow \epsilon_{\mathcal{V}}$ を構成する必要がある.

4.2 Step 2 / single morphism cover の場合に帰着させる.

系 4.5 ([3] p.87)

\mathbf{C}, \mathcal{F} 等を補題 (4.3) の様にとる. $\mathcal{U} = \{\phi_i: V_i \rightarrow U\}, V' = \bigsqcup V_i$ とする. さらに, $f: V' \rightarrow U$ を \mathcal{U} から誘導される射とする.

このとき, 圏同値 $R_{V' \rightarrow U}^{\mathcal{U}}: \mathcal{F}(V' \rightarrow U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ が存在し, 合成

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\epsilon_{\{f\}}} \mathcal{F}(V' \rightarrow U) \xrightarrow{E} \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

が関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ と厳密に一致する.

(証明). \mathcal{U} は $\{U' \rightarrow U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ の細分であるから, 補題 (4.3) から明らか. ■

注意 4.6

ここで, 各 ϕ_i が quasi-compact (特に fpqc) であったとしても, 誘導される射 $f: V' \rightarrow U$ が必ずしも quasi-compact でないことに注意する. 例えば $\{\mathrm{Spec} k[x_i] \rightarrow \bigsqcup_i \mathrm{Spec} k[x_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ を考えれば分かる.

以上のことに注意すると, 我々は次のことを証明することに成る:

主張 4.7

条件 (a), (b) が成り立つならば, 以下の条件 (*) を満たす任意の flat surjective morphism $f: V \rightarrow U$ について, $\epsilon_{\{f\}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) :: \text{equivalence}$.

(*) affine Zariski cover $U = \bigcup_i U_i$ と, 各 i について $f^{-1}(U_i)$ の affine Zariski cover $f^{-1}(U_i) = \bigcup_j V_{ij}$ が存在し, $V_{ij} :: \text{quasi-compact}$ かつ $f(V_{ij}) = U_i$ となる.

条件 (*) は $U, V :: \text{locally noetherian}$ であるような任意の fppf morphism について成立する ([2] Cor1.1.6).

注意 4.8

以下、 $\mathcal{F} :: \text{split fibered category}$ とする. session 4.5 定理 1.2 より, このように仮定しても一般性を失わない.

4.3 Step 3 / affine scheme への quasi-compact morphism の場合.

$f: V \rightarrow U$ を $U :: \text{affine}$ である quasi-compact morphism とする. $\{V_i\}_i$ を V の open affine cover とし, $V' = \bigsqcup_i V_i$ とおく. $V' :: \text{affine}$ なので, 仮定 (b) から圏同値 $\mathcal{F}(U) \simeq \mathcal{F}(V' \rightarrow U)$ が存在する.

以下の図式 (1) を考える. \leftrightarrow は圏同値を意味する.

$$\begin{array}{ccc} \epsilon_{\{V_i \rightarrow U\}} & & \\ \downarrow & \mathcal{F}(U) & \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) \\ & & \end{array}$$

$$\mathcal{F}(\{V_i \rightarrow U\})$$

$$\mathcal{F}(V' \rightarrow U)$$

$$R := R_{V_i \rightarrow U}^{V_i \rightarrow U} \cup R_{V_j \rightarrow U}^{V_j \rightarrow U}$$

を $\beta|v_i$ に一対一に写すのだから, R^{-1}

したがって R^{-1} が存在する。関手 R は $\mathcal{F}(V_i \cup V_j \rightarrow U)$ から $\mathcal{F}(V_i \rightarrow U)$ に写す。
 は $\beta|_{V_i}$ を $\beta|_{V_i \cup V_j}$ に合成で β, β' を写す。
 さて、以下の関手の合成で $\mathcal{F}(V_i \rightarrow U)$

$$V_j \rightarrow U$$

$$R_{V_i \cup V_j} \rightarrow U$$

$$\mathcal{F}(V \rightarrow U)$$

て, 任意の j について

$\beta|_{V_i \cup V_j} = \beta'|_{V_i \cup V_j}$ が得られる。
 $\beta|_{V_j} = (\beta|_{V_i \cup V_j})|_{V_j} = (\beta'|_{V_i \cup V_j})|_{V_j} = \beta'|_{V_j}$ で写して $\beta|_{V_i \cup V_j} = \beta'|_{V_i \cup V_j}$ が得られる。
 $\beta|_{V_j} = (\beta|_{V_i \cup V_j})|_{V_j} = (\beta'|_{V_i \cup V_j})|_{V_j} = \beta'|_{V_j}$ をとる。さらに
 $\beta|_{V_j} = \beta'|_{V_j}$ なので、 $\beta = \beta'$ 。
 $\{U_i\}$ は Zariski stack なので、affine Zariski cover $\{U_i \rightarrow U\}$ をとり、 $\pi(V_i \rightarrow U_i)$ は厳密な可換図式である。

5 | 一般の場合.

(*) を満たす任意の射 $f: V \rightarrow W$ に対して、 $f|_{V_i} = \phi_i$ とおく。

$$\mathcal{F}(V_i \rightarrow U_i) \mathcal{F}(V_{ij} \rightarrow U_{ij}) \mathcal{F}(V_{ijk} \rightarrow U_{ijk})$$

が得られる。上の図式 (4) が可換であることから,

$$\alpha_i|_{V_{ij}}: \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}}) = (\Phi_i(\xi_i))|_{V_{ij}} \xrightarrow{\cong} P_{ij}((\eta, \sigma))$$

すると,

$$\alpha_i^{-1}\alpha_j: \Phi_{ij}(\xi_j|_{V_{ij}}) \rightarrow \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}})$$

$\Phi_{ij} :: \text{equivalence}$ なので, この同型射の逆像として $\sigma_{ij}: \xi_j|_{V_{ij}} \rightarrow \xi_i|_{V_{ij}}$ が得られる。

以上で得られる $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ は cocycle condition を満たすため (TODO), $\mathcal{F}(\{U_i \rightarrow U\})$ の object である。 $\mathcal{F} :: \text{Zariski stack}$ なので, これは $\mathcal{F}(U)$ と圏同値。よって ξ が得られる。(TODO: 射についても)

5 Application : $\mathbf{QCoh}/S \rightarrow \mathbf{Sch}/S$ is a fpqc stack.

定義 5.1

$S \in \mathbf{Sch}$ に対し, 圏 \mathbf{QCoh}/S を以下のように定める。

Objects.

$\text{Fpqc}(S)^{\dagger 9}$ の対象 $:: U$ と, U 上の quasi-coherent sheaf (on fpqc topology) $:: \mathcal{U}$ の組。

Arrows.

射 $(U, \mathcal{U}) \rightarrow (V, \mathcal{V})$ は, \mathbf{Sch}/S の射 $f: U \rightarrow V$ と, morphism of sheaves on $V :: f^\#: \mathcal{V} \rightarrow f_*\mathcal{U}$ の組。

この時, $\mathbf{QCoh}/S \rightarrow \mathbf{Sch}/S; (U, \mathcal{U}) \mapsto U$ は fibration である。

$\mathbf{Mod}_A, \mathbf{Mod}_\phi, \mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_\phi$ の定義は [3] §4.2.1 を参照せよ。

$f: V \rightarrow U$ を flat surjective morphism of S -schemes とし, $\phi: A \rightarrow B$ を f に対応する faithfully flat な環準同型とする。この時, $\mathbf{QCoh}(U) \simeq \mathbf{Mod}_A$ はよく知られている^{†10}。

主張 5.2

$\mathbf{QCoh}(f: V \rightarrow U) \simeq \mathbf{Mod}_\phi$ 。

したがって $\epsilon_f: \mathbf{QCoh}(U) \rightarrow \mathbf{QCoh}(f: V \rightarrow U)$ は関手 $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_\phi$ に対応する。この関手は, 可換環論によって圏同値であることが証明される。

参考文献

- [1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.
- [2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [3] Angelo Vistoli. Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008). <http://homepage.sns.it/vistoli/descent.pdf>.

^{†9} 圏 \mathbf{Sch}/S に fpqc topology を備えたもの。

^{†10} この命題は [1] Cor5.5 で詳しく述べられている