ゼミノート #11.5
Artin Stack の presentation についての短い概要

七条彰紀

2020 年 3 月 17 日

目次

一般に artin stack は algebraic space の groupoid の商として表現することが出来る．これを presentation of an artin stack と呼ぶ．このことについて，基本的な定義と命題をまとめておく．（ほとんど [Sta19] の和訳程度になるだろう．）

Stacks Project[Sta19] の記法について

[Sta19] section 88.16, 88.17 と chapter 72 に presentation of an artin stack についての命題が書かれているが，これらだけで読むと良く分からない記法が有るので，意味をまとめた．

- algebraic space :: F について $\mathcal{S}_F$ は F から grothandieck construction で得られる stack を意味する ([Sta19] 04M7).
- 自然変換の間の演算 $*$ は horizontal composition で $\circ$ は vertical composition ([Sta19] 044T).

1 Algebraic Groupoid Space

定義 1.1 ([Ols16], p.80, [LM99] 2.4.3, `https://en.wikipedia.org/wiki/Groupoid_object`)
圏 $\mathbf{C}$ を finite fiber product を持つ圏とする．圏 $\mathbf{C}$ の対象 X_0, X_1 と，次の 5 つの射の組 :: $(X_0, X_1, s, t, c, e, i)$ を考える．（この組をしばしば (X_0, X_1, s, t) や $X_0 \rightrightarrows^s_t X_1$ と略す．）

source and target	$s, t\colon X_1 \to X_0$
composition	$c\colon X_1 \times_{t,X_0,s} X_1 \to X_1$
identity	$e\colon X_0 \to X_1,$
inversion	$i\colon X_1 \to X_1.$

これらが次を満たす時，groupoid in $\mathbf{C}$ と呼ぶ．なお，以下では $\times_{s,X_0,t}, \times_{s,X_0,\mathrm{id}}, ..$ 等を $\times$ と略す．

(A)
- $s \circ e = t \circ e = \mathrm{id}_{X_0}$
- $s \circ m = s \circ \mathrm{pr}_0$
- $t \circ m = t \circ \mathrm{pr}_1$

ここで $\mathrm{pr}_i\colon X_1 \times_{t,X_0,s} X_1 \to X_1$ は射影．

(B) (Associativity) $m \circ (\mathrm{id}_{X_1} \times m) = m \circ (m \times \mathrm{id}_{X_1}),\quad m \circ (\mathrm{id}_{X_1} \times m) = m \circ (m \times \mathrm{id}_{X_1}),$

(C) (Identity) $m \circ (e \circ s, \mathrm{id}_{X_1}) = m \circ (\mathrm{id}_{X_1}, e \circ t) = \mathrm{id}_{X_1}$

(D) (Inverse)
- $i \circ i = \mathrm{id}_{X_1}$
- $s \circ i = t$, $t \circ i = s$
- $m \circ (\mathrm{id}_{X_1}, i) = e \circ s$, $m \circ (i, \mathrm{id}_{X_1}) = e \circ t$
- $m \circ (\mathrm{id}_{X_1}, i) = e \circ s$, $m \circ (i, \mathrm{id}_{X_1}) = e \circ t$

定義 1.2
B :: algebraic space over a scheme S とする．algebraic space over B の圏における groupoid 対象を，単に groupoid in algebraic spaces over B という．

groupoid in algebraic spaces over B には (U, R, s, t, c, e, i) ($(U, R, s, t), U \rightrightarrows^s_t R$) という記号が使われることが多い．

2 Quotients of Algebraic Space by Groupoid

定義 2.1
任意の scheme over B :: T について，組 $(U(T), R(T), s_T, t_T, c_T, e_T, i_T)$ から次の様に圏 $\{U(T)/R(T)\}$（あるいは $[U/_pR]$ と書く）が構成できる．

Object

$U(T)$ の元

Arrow

$u, u' \in U(T)$ について，$\mathrm{Hom}_{\{U/R\}(T)}(u, u') = \{\xi \in R(T) \mid s(\xi) = u, t(\xi) = u'\}$.

Identity Morphism

対象 $u \in U(T)$ の identity morphism は $e_T(u) \in R(T)$.

Composition of Morphisms

射 :: $\xi\colon u \to u', \eta\colon u' \to u''$ の合成 $\eta \circ \xi$ は $(\eta, \xi) \in R(T) \times_{s_T, U(T), t_T} R(T)$ の c_T による像.

Inverse Morphism

射 $\xi\colon u \to u'$ の逆射は $i_T(\xi) \in R(T)$.

関手 $\{U(-)/T(-)\}\colon \mathbf{Sch}/B \to (\mathbf{Groupoids})$ を Grothendieck construction で fibered category にしたものを $\{U/R\}$ と書く．さらにこれを stackification したものを $[U/R]$ と書き，quotient stack of U by R と呼ぶ.

一般に quotient stack は algebraic stack でない.

なお，組 (U, R, s, t, c, e, i) が groupoid in algebraic spaces over B であることは，以下で構成する圏 $\{U(T)/R(T)\}$ が groupoid となることと同値である.

3 Artin Stack から Presentation of an Artin Stack へ

artin stack over a scheme S :: $\mathcal{X}$ と atlas :: $f\colon U \to \mathcal{X}$ をとる．この時，$R := U \times_{\mathcal{X}} U$ が $(s := \mathrm{pr}_1, t = \mathrm{pr}_2$ とすれば)groupoid になっている．特に atlas が smooth であるから，$s, t\colon R \to U$ が smooth になっている.

定理 3.1 ([Sta19] 04T4, 04T5)
artin stack over a scheme S :: $\mathcal{X}$ と atlas :: $f\colon U \to \mathcal{X}$ をとる．すると groupoid space :: (U, R, s, t, c, i) が構成できる．さらに標準的な射 :: $f_{can}\colon [U/R] \to \mathcal{X}$ が存在し，これが圏同値となる.

証明の準備として以下の補題を置く.

補題 3.2 ([Sta19] 04T4 (1)–(3))
artin stack over a scheme S :: $\mathcal{X}$ と atlas :: $f\colon U \to \mathcal{X}$ をとる．この時，fiber product に関する次の命題が成り立つ.

(i) $R := U \times_{f, \mathcal{X}, f} U$ :: algebraic space.

(ii) 標準的圏同型 $U \times_{\mathcal{X}} U \times_{\mathcal{X}} U = R \times_U R$ が成り立つ.

(iii) $U \times U \times U$ の第 0 成分と第 2 成分から R への射影 :: $\mathrm{pr}_{0,2}$ は (ii) の同型により射 $\mathrm{pr}_{0,2}\colon R \times R \to R$ を誘導する.

補題 3.3 ([Sta19] 04T4 (4), 04T5 (1))
この時，groupoid :: (U, R, s, t, c, i) が構成できる．より詳しく，R, s, t, c, i を次のようにすれば良い.

- $R := U \times_{f,\mathcal{X},f} U$,
- $s := \mathrm{pr}_0 \colon R \to U$,
- $t := \mathrm{pr}_1 \colon R \to U$,
- $c := \mathrm{pr}_{0,2} \colon R \times R \to R$,
- $e \colon U \ni u \mapsto (u, u, \mathrm{id}_{f(u)}) \in R$,
- $i \colon R \ni (u, u', \alpha) \mapsto (u', u, \alpha^{-1}) \in R$,

fiber product of stacks の構成から，R の対象は $U(T)$ ($T \in \mathbf{Sch}/S$) の二つの対象 :: u, u' と $\mathcal{X}$ 内の同型 $\alpha \colon f(u) \to f(u')$ からなる 3 つ組であることに注意．また，s, t :: smooth にも注意．

補題 3.4 ([Sta19] 04T4 (5))
$f \colon U \to \mathcal{X}$ から標準的な射 :: $f_{can} \colon [U/R] \to \mathcal{X}$ が誘導される．

(証明)．([Sta19] 04T4) の証明内，“This proves that Groupoids in Spaces, Lemma 044U applies” で始まる段落に f_{can} の具体的な構成が記述されている． ∎

参考文献

[LM99] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs Algébriques*. Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999. ISBN: 978-3-540-65761-3.

[Ols16] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks*. American Mathematical Society Colloquium Publications 62. Amer Mathematical Society, Apr. 2016. ISBN: 978-1-4704-2798-6. URL: `https://doi.org/10.1365/s13291-017-0172-7`.

[Sta19] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. 2019. URL: `https://stacks.math.columbia.edu`.