冪級数の収束判定法

七条 彰紀

2017 年 7 月 18 日

$B(r; z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset \mathbb{C}$ とする．これは z_0 を中心とする半径 r の $\mathbb{C}$ における円盤である．冪級数についていくつかの収束判定法を紹介する．

1 Weierstrass M-test

収束判定法では次の事実が基本である．

定理 1.1. 関数列 $\{f_n : A \to \mathbb{C}\}_{n=0}^{\infty}$ の級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ を考える．ある実数列 $\{M_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ について

$$^{\forall} n = 1, 2, \ldots, \quad \sup_{x \in A} |f_n| \leq M_n$$

が成り立ち，かつ $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ が収束するとき，関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ も収束する．

この定理を満たす関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ は，特に正規収束すると言う．

2 Abel theorem

定理 2.1 (Abel theorem)**.** $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ とする．

$$z_0 \in \mathbb{C}, \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n < \infty \implies {}^{\forall} z \in B(|z_0|; 0), \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n < \infty$$

特に，この時 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は正規収束する．

(証明)．命題 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n < \infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$ と，$|\frac{z}{z_0}| < 1$ を用いて，Weierstrass M-test へ帰着する． ∎

3 Cauchy-Hadamard theorem

定理 3.1 (Cauchy-Hadamard theorem)**.** 一複素変数 z に関する，以下のような冪級数を考える．

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n.$$

ここで $a, c_n \in \mathbb{C}$ とする．このとき，f の収束半径は以下のように与えられる．

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \left(|c_n|^{\frac{1}{n}}\right) := \lim_{n\to\infty} \sup\{|c_n|^{\frac{1}{n}} : k \geq n\}.$$

(証明). $\limsup_{n\to\infty}\left(|c_n|^{\frac{1}{n}}\right)=0$ のとき冪級数の収束半径が ∞ であることだけ示す．

仮定より，任意の正数 ϵ に対し，十分大きい n について $0\le|c_n|^{\frac{1}{n}}<\epsilon$ が成立する．そこで任意の $z\in\mathbb{C}$ をとり，$\epsilon=\frac{1}{2|z|}$ とする．すると，

$$0\le|c_n|^{\frac{1}{n}}<\epsilon \implies 0\le|c_n|^{\frac{1}{n}}|z|<1/2 \implies 0\le|c_n||z|^n<(1/2)^n$$

よって Weierstrass M-test により，任意の $z\in\mathbb{C}$ について冪級数は収束する． ∎

4 Ratio test

定理 4.1 (Ratio test)**.** べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ について，任意の n について $a_n\neq0$，かつ

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

が存在するならば，$R=\frac{1}{\rho}$ がべき級数の収束半径に等しい．

(証明). 今，考えている冪級数を二つに分けて，

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{N-1}a_nz^n+\sum_{n=N}^{\infty}a_nz^n$$

としてみると，前半は有限級数であるから有限値に収束する．なので後半の収束だけを考える．$z=0$ での収束は自明なので，以下では $z\neq0$ とする

$0\le\rho<\infty$ とする．極限の定義から，以下が成立．

$$^{\forall}\epsilon>0,\quad ^{\exists}N\in\mathbb{N},\quad ^{\forall}n\in N,\quad n>N \implies 0\le\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\rho+\epsilon$$

ここで，任意の $n\in\mathbb{N}$ について，

$$|a_n|=\overbrace{\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\left|\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right|\cdots\left|\frac{a_N}{a_{N-1}}\right|}^{(n-N+1)\text{ 個}}|a_{N-1}|$$

となる，したがって次のように命題がつながる．

$$\begin{aligned}
&^{\forall}\epsilon>0,\quad ^{\exists}N\in\mathbb{N},\\
&\quad ^{\forall}n\in\mathbb{N},\quad n>N \implies 0\le\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<\rho+\epsilon\\
\iff &\quad ^{\forall}n\in\mathbb{N},\quad n>N \implies 0\le\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|,\ldots,\left|\frac{a_N}{a_{N-1}}\right|<\rho+\epsilon\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \implies 0\le|a_n|<(\rho+\epsilon)^{n-N+1}|a_N|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \iff 0\le|a_n||z^n|<(\rho+\epsilon)^{n-N+1}|a_N||z^n|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \iff 0\le|a_n||z^n|<\frac{|z|^n}{\frac{1}{(\rho+\epsilon)^{n-N+1}}}|a_N|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \iff 0\le|a_n||z^n|<\left(\frac{|z|}{\frac{1}{\rho+\epsilon}}\right)^n(\rho+\epsilon)^{-N+1}|a_N|
\end{aligned}$$

$0 < \rho < \infty$ の場合を考える．まず，$|z| < 1/\rho$ となる任意の各 z に対して適切に ϵ をとれば[†1]，$\left(\frac{|z|}{\frac{1}{\rho+\epsilon}}\right) < 1$ となる．したがって，

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{|z|}{\frac{1}{\rho+\epsilon}}\right)^n(\rho+\epsilon)^{-N+1}|a_N| = (\rho+\epsilon)^{-N+1}|a_N|\sum_{n=N}^{\infty}\left(\frac{|z|}{\frac{1}{\rho+\epsilon}}\right)^n$$

となる．N は各 ϵ に対して定まる有限値だから，これは収束する．Weierstrass M-test により，冪級数の収束半径は $1/\rho$.

$\rho = 0$ の場合を考える．このときは 0 でない任意の z について，同様に $0 < \epsilon < \frac{1}{|z|}$ の範囲の ϵ をとれば $\left(\frac{|z|}{\frac{1}{\epsilon}}\right) < 1$ とすることができて，Weierstrass M-test により収束半径は ∞ となる．

最後に，$\rho = \infty$ の場合．ここまでほとんどこのケースの考察はしていないことに注意しておく．しかし同様の議論をすると $\lim_{n\to\infty}|a_n| = \infty$ がわかる．したがって命題 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n < \infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0 \implies \lim_{n\to\infty}|a_n z^n| = 0$ の対偶より，冪級数は発散する． ∎

これは $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$ のように，十分先の項でも係数が 0 になることがあるとそのままでは使えない．しかし $\sin z$ や $\cos z$ には以下のように変形するとこの方法が使える．

$$\begin{aligned}
&\sin z \\
&\quad = 1\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \\
&\quad = (z\cdot 1/z)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} \\
&\quad = z\cdot\left(1/z\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\right) \\
&\quad = z\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n}
\end{aligned}$$

そこで，$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^n$ の収束半径を考える．以下の計算から，これの収束半径は ∞ と分かる．

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)} = 0$$

したがって $\sin z = zS(z^2)$ の収束半径は $(\infty)^{1/2} = \infty$ であることが示される．

[†1] $|z| \neq 0$ ならば $0 < \epsilon < \frac{1}{|z|} - \rho$ の範囲にある ϵ を，例えば $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|z|} - \rho\right)$ をとる．