ゼミノート #5
Categorical Part of Descent Theory, and Stacks

七条彰紀

2018 年 12 月 12 日

今回のノートで一貫して用いる記号と記法を定める．

$\mathbf{C}$ :: site, $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ :: fibered category を考える[†1]．

記法を定める．$U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i \colon U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ について，

$$U_{ij} := U_i \times_U U_j, \quad U_{ijk} := U_i \times_U U_j \times_U U_k \quad (i,j,k \in I)$$

と書くことにする．また，添字 $a, b = i$ or j or k について，fiber product からの射影を

$$\mathrm{pr}_a \colon U_{ij}(\text{ or } U_{ijk}) \to U_a, \qquad \mathrm{pr}_{a,b} \colon U_{ijk} \to U_{ab}$$

とする．さらに $\mathrm{pr}_i \colon U_{ij} \to U_i$ による pullback を $(-)|_{U_{ij}}$ などと書く．

1 The Category of Descent Data

1.1 Definition

定義 1.1 ($\mathcal{F}(\mathcal{U})$, [2] 4.2.4, [1] Def4.2)
圏 $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を次のように定める．

Object.
- $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ なる対象の class $\{\xi_i\}_{i\in I}$ と，
- $\mathcal{F}(U_{ij})$ 中の同型 $\sigma_{ij} \colon \xi_j|_{U_{ij}} \to \xi_i|_{U_{ij}}$ の class $\{\sigma_{ij}\}_{i,j\in I}$

の組 $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ であって，以下で述べる cocycle condition を満たすもの．このような組を object with descent data と呼ぶ[†2]．

Arrow.

射 $\{\alpha_i\}\colon (\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}) \to (\{\eta_i\}, \{\tau_{ij}\})$ とは，$\mathcal{F}(U_i)$ の射 $\alpha_i \colon \xi_i \to \eta_i$ の class であって，σ_{ij}, τ_{ij} と整合的であるもの．すなわち，任意の $i, j \in I$ について以下の図式が可換であるもの．

$$\begin{tikzcd}
\xi_j|_{U_{ij}} \arrow[r, "\alpha_j|_{U_{ij}}"] \arrow[d, "\sigma_{ij}"'] & \eta_j|_{U_{ij}} \arrow[d, "\tau_{ij}"] \\
\xi_i|_{U_{ij}} \arrow[r, "\alpha_i|_{U_{ij}}"'] & \eta_i|_{U_{ij}}
\end{tikzcd}$$

[†1] ほとんど fiber of π しか扱わないので，psuedo-functor $\mathbf{C} \to \mathbf{Cat}$ をとっても構わない．

[†2] 同型の class $\{\sigma_{ij}\}$ が descent data と呼ばれる．

■cocycle condition　組 $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ が cocycle condition を満たすとは，任意の $i, j, k \in I$ について以下が成り立つということ．

$$\sigma_{ik}|_{U_{ijk}} = (\sigma_{ij}|_{U_{ijk}}) \circ (\sigma_{jk}|_{U_{ijk}}).$$

図式でかけば，圏 $\mathcal{F}(U_{ijk})$ における以下の図式が可換であることと同値．

$$\begin{tikzcd} \xi_k|_{U_{ijk}} \arrow[rr, "\sigma_{jk}|_{U_{ijk}}"] \arrow[dr, "\sigma_{ik}|_{U_{ijk}}"'] & & \xi_j|_{U_{ijk}} \arrow[dl, "\sigma_{ij}|_{U_{ijk}}"] \\ & \xi_i|_{U_{ijk}} & \end{tikzcd}$$

注意 1.2
この定義に於いて fiber products :: U_{ij}, U_{ijk} を暗黙のうちに選択している．たが，どのように選択しても得られる圏は同型に成る．U_{ij}, U_{ijk} の選択も込めて $(\{\xi_i\}, \{\xi_{ij}\}, \{\xi_{ijk}\})$ を $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象とする定義の仕方も有るが，ここでは述べない．詳細は [1] Remark 4.3 にある．

定義 1.3 ([1] p.72)
$\xi \in \mathcal{F}(U)$,$\mathcal{U} = \{\phi_i : U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ について，$\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の元を以下のデータに対応させる:

- $\xi_i := \phi_i^* \xi$ の class $\{\xi_i\}_{i \in I}$.
- $\xi_i|_{U_{ij}}$ と $\xi_j|_{U_{ij}}$ が，いずれも
$$\phi_i \circ \mathrm{pr}_i = \phi_j \circ \mathrm{pr}_j : U_{ij} \to U$$
による ξ の pullback であることから得られる標準的同型の class $\{\sigma_{ji} : \xi_j|_{U_{ij}} \to \xi_i|_{U_{ij}}\}_{i,j}$.

このデータをまとめて $(\{\phi_i^* \xi\}, \mathrm{cano})$ などと書く．この対応を $\epsilon_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ と書く．$\mathcal{F}(U)$ の射 $\xi \to \eta$ から，ϕ_i に沿った pullback によって $(\{\phi_i^* \xi\}, \mathrm{cano}) \to (\{\phi_i^* \eta\}, \mathrm{cano})$ が得られるので，対応 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ は関手である．

1.2 Example

例 1.4 ([2], 4.2.1)
一つの射から成る cover :: $\mathcal{U} = \{f : V \to U\}$ について $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を考えてみる．この圏の対象は，

- 対象 $E \in \mathcal{F}(V)$
- $\mathcal{F}(V \times_U V)$ の中の同型射 $\sigma\colon\ \mathrm{pr}_1^* E \to \mathrm{pr}_2^* E$

の組である．

参考文献

[1] Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008).

[2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.