

Locally Ringed Space Morphism の合成について

七条 彰紀

2017 年 10 月 11 日

写像の合成は一々 $g \circ f$ の様にかかず、 gf と書く。

定義 0.1

X, Y を locally ringed space とする。 X, Y の間の map $f : X \rightarrow Y$ が locally ringed space morphism であるとは、任意の点 $x \in X$ について、 $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ の $f(x)$ における stalk $(f^\#)_{f(x)} : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)}$ と、 direct system の包含関係から誘導される写像 $\iota_{f,x} : (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ の合成

$$f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \rightarrow (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$$

が、 local ring homomorphism であるということである。

$X, Y, Z ::$ locally ringed space, $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z ::$ locally ringed space morphism とする。
 $gf : X \rightarrow Z$ は locally ringed space morphism になることはどのように示すべきだろうか。

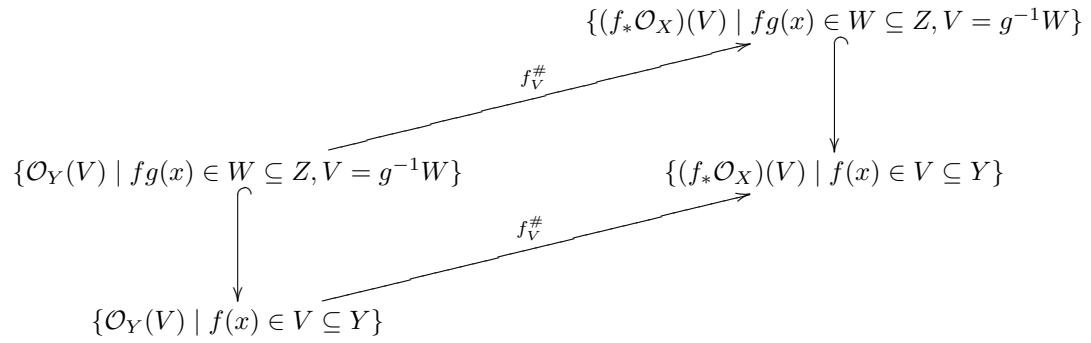
(証明). $x \in X$ を任意にとり、固定する。

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & & (g_*f_*\mathcal{O}_X)_{gf(x)} \\
 & & & \nearrow (g_*f^\#)_{gf(x)} & \downarrow \\
 & & (g_*\mathcal{O}_Y)_{gf(x)} & & (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \\
 & \nearrow (g^\#)_{gf(x)} & \downarrow & \nearrow (f^\#)_{f(x)} & \downarrow \\
 \mathcal{O}_{Z,gf(x)} & \xrightarrow{g_{gf(x)}^\#} & \mathcal{O}_{Y,f(x)} & \xrightarrow{f_x^\#} & \mathcal{O}_{X,x}
 \end{array}$$

斜めに伸びている $(g^\#)_{gf(x)}$ などの射は stalk を取ることで得られる射であり、 $g_{f(x)}^\#, f_x^\#$ はそれに direct system の包含関係から誘導される射 $(g_*\mathcal{O}_Y)_{gf(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{Y,f(x)}, (f_*\mathcal{O}_X)_{f(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ を合成したものである。(p.72 終わりから p.73 始めに記述がある。) したがって、この図式において、下の二つの三角形が可換であることは $g_{f(x)}^\#, f_x^\#$ の定義である。同様に $(gf)_x^\#$ は $\mathcal{O}_{Z,gf(x)} \rightarrow (g_*f_*\mathcal{O}_X)_{gf(x)} \rightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ である。(三つの相似な三角形が見えると思う。)

$g_{f(x)}^\#, f_x^\#$ は l.r.homo (local ring homomorphism) であり、その合成もまた l.r.homo である。示したいことは $(gf)_x^\#$ が l.r.homo であることだから、図式中心にあるの平行四辺形が可換であることを示せば良い。

問題の平行四辺形の頂点は、それぞれ次の 4 つの direct system の direct limit である.



したがって問題の平行四辺形は direct system のレベルで可換. ■