

n 変数多項式環を $A^n = k[x_0, \dots, x_n]$ とする. また, $S^n = A^{n+1}$ と置く. 一般の n 変数についての場合は A, S とだけ書く. isomorphic of variety は \cong で書き, homeomorphic of variety は \simeq で書く.

Ex3.1

(a) Any conic in $\mathbb{A}^2 \cong \mathbb{A}^1$ or $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

Ex1-1 より, 任意の conic curve $X \subset \mathbb{A}^2$ について, $A^2/\mathcal{I}_a(Y) \cong A^1/(0)$ or $A^1/(xy-1)$ となっている. したがって $\mathcal{I}_a(Y) \cong \mathcal{Z}_a(0) = \mathbb{A}^1$ or $\mathcal{Z}_a(xy-1)$ である.

写像 $\sigma: \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathcal{Z}_a(xy-1); x \mapsto (x, 1/x)$ を考える. これは明らかな逆写像 $\sigma^{-1}: (x, y) \mapsto x$ が存在するので全単射. あとは σ, σ^{-1} が morphism であることを見ればよいが, これは Lemma 3.6 からすぐに分かる. すなわち,

$$\bar{x} \circ \sigma(x, y) = x, \bar{y} \circ \sigma = 1/x; t \circ \sigma^{-1}(u, v) = u$$

よってこれらは morphism.

(b) Any proper open subset $X \subsetneq \mathbb{A}^1, \mathbb{A}^1 \not\cong X$.

任意の真の開部分集合 X は空でない有限集合 (=閉集合) T によって $X = \mathbb{A}^1 \setminus F$ と表せる. これに対して, $\omega(x) = \prod_{t \in T} (x-t) \in k[x, y]$ としよう. すると多項式 $f = 1 - y \cdot \omega(y)$ で定義される affine variety は X と同型である. 実際, 次の写像がその同型写像である.

$$\mu: X \rightarrow \mathcal{Z}_a(f); x \mapsto (x, 1/\omega(x))$$

逆写像は $(x, y) \mapsto x$ である. これが同型写像であることは Lemma 3.6 から明らか.

さて, $k[x, y]/(f)$ は $A(\mathbb{A}^1) = k[t]$ と同型でない. なぜなら $k[x, y]/(f)$ が $k[t]$ が同型であることは $1/\omega(x)$ が多項式として表せることを言っており, それは有限値の有限和が無限に大きくなることを意味するからである. よって $A(X) \cong k[x, y]/(f) \not\cong A(\mathbb{A}^1)$ すなわち $\mathbb{A}^1 \not\cong X$.

(c) Any conic in \mathbb{P}^2 is isomorphic to \mathbb{P}^1 .

\mathbb{P}^2 の conic curve は既約二次斉次式で定義される. その斉次式を $f \in k[x, y, z]^h$ とし, $X = \mathcal{Z}_p(f)$ としよう.

$(a:b:c) \in X^c$ をとり, さらに $P = (0:s:t) \in \mathcal{Z}_p(x)$ をとる. すると以下の直線 L は Q, P を通る.

$$L: (x:y:z) = (a:b-s:c-t)$$

これと

(d) \mathbb{A}^2 is not homeomorphic to \mathbb{P}^2 .

Ex3.7a から得られる.

(e) If an affine variety X is isomorphic to a projective variety, $X = \{p.t.\}$.

Theorem 3.2, 3.4 より

$$A/\mathcal{I}(X) = A(X) \cong \mathcal{O}(X) \cong k$$

最右辺は体なので $\mathcal{I}(X)$ は A の極大イデアル. 定義イデアルが極大イデアルとなる affine variety は 1 点集合なので, X は 1 点集合.

Ex3.2 Bijective Bicontinuous Morphism But Not Isomorphism.

affine variety を考える.

(a) $\phi : t \mapsto (t^2, t^3)$ is a bijective bicontinuous morphism on to $y^2 = x^3$, but not an isomorphism.

$\phi ::$ a bijective bicontinuous morphism を示そう. 全単射であることは逆写像が次のように構成できることから分かる.

$$\phi^{-1} : (x, y) \mapsto y/x; \text{ and } (0, 0) \mapsto 0$$

これは原点だけは y/x の様に計算できないので注意. bicontinuous は有限集合 (閉集合) を有限集合 (閉集合) に写すことから明らか.

$\phi ::$ not an isomorphism を示そう. Lemma 3.6 を用いて ϕ^{-1} が regular でないことを見れば十分.

$$t \circ \phi^{-1}(x, y) = \text{if } x = 0 \text{ then } 0 \text{ otherwise } y/x$$

これは明らかに $(0, 0)$ で連続でない. よってこの点で regular でない.

(b) Let the characteristic of the base field k be $p > 0$. $\phi : t \mapsto t^p$ is also.

逆写像は $\phi^{-1} : s \mapsto s^{1/p}$ である. $\phi ::$ a bijective bicontinuous morphism であることは (a) と同様である.

$\phi ::$ not an isomorphism を示そう.

$$t \circ \phi^{-1}(s) = s^{1/p}$$

これは多項式でも有理関数でも表示できない. 実際, $s^{1/p} = g(s)/h(s)$ と置くと, $g^p(s) = s \cdot h^p(s)$. 次数を考えると $p \cdot \deg g(s) = p \cdot \deg h + 1$ となるが, 両辺の整数は互いに素なのでこれはありえない.

Ex3.3 Induced homomorphisms between local rings.

(a) $\phi : X \rightarrow Y$ induces a local ring homomorphism $\phi_P^* : \mathcal{O}_{\phi(P), Y} \rightarrow \mathcal{O}_{P, X}$, for all $P \in X$.

誘導される写像は以下のようなものである.

$$\phi_P^* : \langle U, f \rangle \mapsto \langle \phi^{-1}(U), f \circ \phi \rangle$$

$\phi(P) \in U$ より $P \in \phi^{-1}(U)$ であることに注意.

ϕ_P^* が準同型であることを示そう. $\langle U, f \rangle, \langle V, g \rangle \in \mathcal{O}_{\phi(P), Y}$ をとる.

$$\begin{aligned} & \phi_P^*(\langle U, f \rangle + \langle V, g \rangle) \\ &= \langle \phi^{-1}(U \cap V), (f + g) \circ \phi \rangle \\ &= \langle \phi^{-1}(U \cap V), (f \circ \phi) + (g \circ \phi) \rangle \\ &= \langle \phi^{-1}(U), f \circ \phi \rangle + \langle \phi^{-1}(V), g \circ \phi \rangle \\ &= \phi_P^*(\langle U, f \rangle) + \phi_P^*(\langle V, g \rangle) \end{aligned}$$

積については上の式変形を $+$ から \times に変えるだけですむ. また $\langle Y, 0 \rangle, \langle Y, 1 \rangle$ は $\langle X, 0 \rangle, \langle X, 1 \rangle$ に写される. 以上より ϕ_P^* は準同型である.

さらに $\mathcal{O}_{\phi(P), Y}$ の極大イデアルを \mathfrak{m} としよう. これは $\mathfrak{m} = \{\langle U, f \rangle \mid \exists Q \in U, f(Q) = 0\}$ と書ける.

$$\phi_P^*(\mathfrak{m}) = \{\langle \phi_P^{-1}(U), f \circ \phi_P \rangle \mid \exists Q \in U, f(Q) = 0\}$$

さて, $\phi_P^*(\mathfrak{m})$ の元 $\langle \phi_P^{-1}(U), f \circ \phi_P \rangle$ をとる. $Q \in U$ において $f(Q) = 0$ だから, $Q' \in \phi_P^{-1}(Q)$ とすれば $f \circ \phi_P(Q') = f(Q) = 0$. したがって

$$\phi_P^*(\mathfrak{m}) \subseteq \{\langle \phi_P^{-1}(U), f \circ \phi_P \rangle \mid \exists Q' \in \phi_P^{-1}(U), f \circ \phi_P(Q') = 0\}$$

左辺は $\mathcal{O}_{P, X}$ の極大イデアルの部分集合であるから, ϕ_P^* は homomorphism of local rings.

(b) ϕ is an isomorphism $\iff \phi$ is a homeomorphism, and the induced map ϕ_P^* is an isomorphism, for all $P \in X$.

(\implies) 仮定は ϕ, ϕ^{-1} が morphism of varieties であることと同値. morphism of varieties は連続写像だから, $\phi::\text{homeomorphism}$ は良い. また, ϕ, ϕ^{-1} がどちらも regular function を regular function にするから, 以下は (a) で定めた ϕ^* の逆写像である.

$$\phi_P^{*-1} : \langle V, g \rangle \mapsto \langle \phi(V), g \circ \phi^{-1} \rangle$$

(\impliedby) $\phi::\text{homeomorphism}$ より ϕ, ϕ^{-1} は共に continuous. ϕ_P^*, ϕ_P^{*-1} がともに準同型写像ならば, $f::\text{regular on } U \subset X$ について $f \circ \phi^{-1}$ は regular on $\phi(U)$ で, $g::\text{regular on } V \subset Y$ について $g \circ \phi$ は regular on $\phi(V)$. したがって ϕ, ϕ^{-1} は共に morphism of varieties.

(c) $\phi(X)$ is dense in $Y \implies \phi_P^*$ is injective for all $P \in X$.

$P \in X$ を任意にとる. $\mathcal{O}_{P, X}$ の元を 1 つとり, $\langle U, f \rangle$ とする. これに対して集合 E を以下のように定める.

$$E = \{\langle V, g \rangle \mid \phi_P^*(\langle V, g \rangle) = \langle U, f \rangle\} = \phi_P^{*-1}(\langle U, f \rangle) \subseteq \mathcal{O}_{\phi(P), Y}$$

これが 1 つの同値類に含まれることを示す. これは $\phi_P^*(a) = \phi_P^*(b) \implies a = b$ と同値である.

$\langle V, g \rangle, \langle V', g' \rangle \in E$ を任意にとる. $\phi_P^*(\langle V, g \rangle) = \phi_P^*(\langle V', g' \rangle) = \langle U, f \rangle$ より,

$$g \circ \phi = g' \circ \phi \text{ on } \phi^{-1}(V \cap V' \cap \phi(X))$$

$\phi(X) :: \text{dense}$ より $(V \cap V') \cap \phi(X)$ は空でない。¹⁾ したがって $(V \cap V') \cap \phi(X)$ から点がとれて、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& \forall P \in \phi^{-1}(V \cap V' \cap \phi(X)), \quad g \circ \phi(P) = g' \circ \phi(P) \\
& \iff \forall Q \in V \cap V' \cap \phi(X), \quad g(\phi \circ \phi^{-1}(Q)) = g'(\phi \circ \phi^{-1}(Q)) \\
& \iff \forall Q \in V \cap V' \cap \phi(X), \quad g(Q) = g'(Q) \\
& \iff g = g' \text{ on } V \cap V' \cap \phi(X) \\
& \iff \langle V, g \rangle = \langle V', g' \rangle
\end{aligned}$$

よって E は 1 つの同値類に含まれる。

Ex3.4 Show that the d -uple embedding of \mathbb{P}^n (Ex. 2-12) is an isomorphism onto its image.

開集合 $U \subset \mathbb{P}^n$ での regular function f を考えよう。 $f \circ \rho_d : \rho_d^{-1}(U) \rightarrow k$ が regular であることを示す。

ρ_d は **morphism** ρ_d が連続であることは Ex2.12c で示した。 regular function $f : (\text{im } \rho_d \supset) U \rightarrow k$ を任意にとる。 $f \circ \rho_d : \rho_d^{-1}(U) \rightarrow k$ が regular であることを示そう。 任意の点 $P = \rho_d^{-1}(Q) \in \rho_d^{-1}(U)$ に対して P の開近傍 $\rho_d^{-1}(Z)$ が存在する。 この Z は ρ_d が同相写像であることから $Q \in U$ の開近傍である。 したがって同次な斉次多項式 $g, h \in S$ であって $f = g/h$ on Z なるものが存在する。 このことから直ちに以下が得られる。

$$f \circ \rho_d = \frac{g \circ \rho_d}{h \circ \rho_d} = \frac{\theta(g)}{\theta(h)} \text{ on } \rho_d^{-1}(Z)$$

$\theta(g), \theta(h)$ が同次な斉次多項式であることは θ の定義から分かる。 $\theta(h) \neq 0$ on $\rho_d^{-1}(Z)$ は $h \circ \rho_d(\rho_d^{-1}(z)) = h(z)$ から直ちに得られる。

ρ_d^{-1} は **morphism** さらに ρ_d^{-1} について証明が必要だが、証明は殆ど同様である。 ρ_d^{-1} が連続であることは Ex2.12c で示した。 実際、上の証明にある ρ_d を ρ_d^{-1} に、 θ を ϕ_i に書き換えればほとんど良い。 ただし i と開近傍をとるときに注意が必要である。 最初に任意に regular function をとり、 $g : (\mathbb{P}^n \supset) V \rightarrow k$ としよう。 任意に点 $Q = \rho_d(P) \in \rho_d(V)$ をとり、これに対して $Q \in V_i$ であるような i を選ぶ。 (V_i は Ex2.12 の解答で定義した。) すると Q に対して開近傍 $W \subset \mathbb{P}^n$ が存在し、そこでは g が有理関数として表せる。 しかし以降は開近傍として W 全体をとるのではなく、 $W \cap \rho_d^{-1}(V_i)$ をとる。 すると $\rho_d(W) \cap V_i$ では ρ_d^{-1} が σ_i のように具体的にかけ、 $g \circ \rho_d^{-1}$ が有理関数として表せることが分かる。

Ex3.5 $H \subseteq \mathbb{P}^n$ is any hypersurface, show that H^c is affine.

H が hypersurface ならば、 H は既約斉次多項式 f によって定義される。 $d := \deg f$ とすると、 H は $\rho_d(H)$ と同相になっている (Ex3.4)。

$f = \sum_{0 \leq i \leq N} c_i M_i$ としよう。 M_i は Ex2.12 で定義されている。 そのうえで $g = \sum_{0 \leq i \leq N} c_i y_i$ としよう。 $\rho_d(H) = \mathcal{Z}_p(g) \cap \text{im } \rho_d$ を示す。

$$\rho_d^{-1}(\mathcal{Z}_p(g) \cap \text{im } \rho_d) = \rho_d^{-1}(\mathcal{Z}_p(g)) \cap \mathbb{P}^n = \mathcal{Z}_p(\theta(g)) = \mathcal{Z}_p(f) = H$$

¹⁾ $\phi^{-1}(V) \cap \phi^{-1}(V')$ は $\phi_P^*(\langle V, g \rangle) = \phi_P^*(\langle V', g' \rangle)$ と比較できているので空でない。

したがって特に $\rho_d(H^c) = \text{im } \rho_d \cap \rho_d(H)^c \subset \mathcal{Z}_p(g)^c$.

以下で示す通り $\mathcal{Z}_p(g)^c$ は \mathbb{A}^N と同型. H^c が irreducible であることから $\rho_d(H^c)$ はその subvariety(?).
したがって $\rho_d(H^c)$ はある affine variety と同型 (?). よって H^c もある affine variety と同型である.

$c_0 \neq 0$ だと仮定し, 以下のように写像を定める. $c_1 \neq 0$ だと仮定した場合の写像は容易に類推できるであろう.

$$\begin{aligned} \phi: \quad \mathcal{Z}_p(g)^c &\rightarrow \mathbb{A}^{N+1} \rightarrow \mathbb{A}^N \\ P = (p_0 : \cdots : p_N) &\mapsto \left(\frac{p_0}{g(P)} : \cdots : \frac{p_N}{g(P)} \right) \mapsto \left(\frac{p_1}{g(P)} : \cdots : \frac{p_N}{g(P)} \right) \end{aligned}$$

中間をみると, $\sum_{i=1}^N c_i \frac{p_i}{g(P)} = g(P)/g(P) = 1$. なので逆写像を以下の様に作れる.

$$\begin{aligned} \phi^{-1}: \quad \mathbb{A}^N &\rightarrow \mathcal{Z}_p(g)^c \\ (q_1 : \cdots : q_N) &\mapsto \left(\frac{1}{c_0} \left[1 - \left(\sum_{i=1}^N c_i q_i \right) \right] : q_1 : \cdots : q_N \right) \end{aligned}$$

ϕ が morphism であることは Lemma3.6 から, ϕ^{-1} が morphism であることはこれが多項式で与えられることから直ちに分かる.

Ex3.6 $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0,0)\}$ is not affine.

$O := \{(0,0)\}$ としよう. $X := \mathbb{A}^2 \setminus O$ としたとき, X 上で定義される regular function は \mathbb{A}^2 上で定義される. したがって $X \neq \mathbb{A}^2$ かつ $\mathcal{O}(X) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^2)$ であることがわかり, prop3.5 より, X はいかなる affine variety とも同型ではないことが示される.

実際, X 上で定義される regular function $f: X \rightarrow k$ を考えよう. $P \in X$ をとり, f が P の開近傍 $U \setminus O (\subset X)$ で $f = g/h$ と表され, しかも $h \neq 0$ on $U \setminus O$ を満たすとしよう. $h \neq 0$ on $U \setminus O \implies h \neq 0$ on U を示す. 仮にこれが成り立たないとしよう. すると $(0,0) \in U$ かつ $h(0,0) = 0$ となっている. h の既約因子 h' であって $h'(0,0) = 0$ であるものが存在するのでそれを 1 つとろう. この時 $\mathcal{Z}_a(h') \cap U = O$.

$$\mathcal{Z}_a(h') \cap (U \cup U^c) = O \cup (\mathcal{Z}_a(h') \cap U^c) = \mathcal{Z}_a(h')$$

これは $\mathcal{Z}_a(h')$ が $(0,0)$ の 1 点である, あるいは O と $\mathcal{Z}_a(h') \cap U^c$ という disjoint な二つの閉集合に分解できることを言っている. 前者の場合はありえない. $\mathcal{Z}_a(h')$ が 1 点であるためにはイデアル (h') が極大イデアルであることが必要十分だが, (h') の高さは 1 であり, 一方極大イデアルは高さ 2 である. 後者の場合もありえない. h' は既約多項式としていたから, $\mathcal{Z}_a(h')$ は既約である. よって矛盾が生じたので以下が示された.

$$h \neq 0 \text{ on } U \setminus O \implies h \neq 0 \text{ on } U$$

これで最初の主張が示された.

Ex3.7 Intersection of two varieties in \mathbb{P}^n

(a) Any two curves in \mathbb{P}^2 have a nonempty intersection.

\mathbb{P}^2 における hypersurface は次元 1 の多様体なので (b) から従う.

(b) If $Y \subset \mathbb{P}^n$, $\dim Y \geq 1$, and H is a hypersurface, then $Y \cap H \neq \emptyset$.

背理法を用いるため、 $Y \cap H = \emptyset$ と仮定する。すると以下が得られる。

$$Y \cap (H \cup H^c) = (Y \cap H) \cup (Y \cap H^c) = Y \cap H^c = Y$$

すなわち $Y \subset H^c$ 。Ex3.5 で示したように、 $H :: \text{hypersurface}$ について $H^c :: \text{affine}$ なので $Y :: \text{affine}$ 。Ex3.1e よりこの時 Y は 1 点であるから、 $\dim Y \geq 1$ と矛盾する。よって $Y \cap H \neq \emptyset$ 。

Ex3.8 Any regular function on $\mathbb{P}^n - (H_i \cap H_j)$ is constant.

$i \neq j$ かつ $H_i = (Z_p(x_i))^c, H_j = (Z_p(x_j))^c$ と定義する。

Ex3.9 Let $X := \mathbb{P}^1, Y := \rho_2(\mathbb{P}^1)$. Then $X \cong Y$ but $S(X) \not\cong S(Y)$.

計算すると

$$Y = \{(s^2 : t^2 : st) \mid (s, t) \in k^2 \setminus \{(0, 0)\}\} = Z_p(xy - z^2) \subset \mathbb{P}^2.$$

Ex2.12 での議論から $S(Y) = k[x, y]/\ker \theta \cong \text{im } \theta \subsetneq k[x, y]$ 。これは明らかに $S(X) = k[x, y]$ と同型でない。

Ex3.10 Subvarieties

Ex3.11 1-1 correspondence

$$\text{Spec}(\mathcal{O}_P) \leftrightarrow \{\text{the closed subvarieties of } X \text{ containing } P\}.$$

X の subvariety Y を任意にとる。 $P \in Y \subset X$ から $\mathcal{I}(P) \supset \mathcal{I}(Y) \supset \mathcal{I}(X)$ であり、 X, Y は irreducible closed set なので $\mathcal{I}(Y)$ は素イデアル。

Ex3.12 If P is a point in a variety X , $\dim \mathcal{O}_P = \dim X$.

Ex3.13 $\mathcal{O}_{Y,X}$ is a local ring with residue field $K(Y)$ and dimension $= \dim X - \dim Y$.

Ex3.14 Projection from a Point.

\mathbb{P}^n を \mathbb{P}^{n+1} の hyperplane とみなし、 $P \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus \mathbb{P}^n$ を固定する。また、点 $Q \in \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{P\}$ を取った時の 2 点 P, Q を結ぶ直線を $L(P, Q)$ としよう。写像 $\phi: \mathbb{P}^{n+1} \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{P}^n$ を、 $\phi(Q) = L(P, Q) \cap \mathbb{P}^n$ で定める。

(a) ϕ is a morphism.

$L(P, Q)$ は以下の集合である.

$$L(P, Q) = \{sP + tQ \mid s, t \in k \wedge (s, t) \neq (0, 0)\}$$

ただし点の和は各成分ごとの和で定義される. さて, \mathbb{P}^n を 1 次斉次多項式 $F = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_i x_i$ で定義される $\mathcal{Z}_p(F)$ とみなそう. 2 変数関数 $F(sP + tQ)$ は s, t について一次式なので $F(sP + tQ) = 0$ の解は 1 つである. 具体的にこの解を求める. $P = (p_0 : \cdots : p_n), Q = (q_0 : \cdots : q_n)$ としよう.

$$0 = F(sP + tQ) = \sum_{0 \leq i \leq n+1} a_i (sp_i + tq_i) = sF(P) + tF(Q) \iff (s : t) = (F(Q) : -F(P))$$

したがって $\phi(Q) = F(Q)P - F(P)Q$. F は一次式だから $\phi(Q)$ も一次式で, しかも各成分は多項式で与えられる. regular function を有理関数表示した時の分子分母は多項式であり, 多項式に ϕ を合成しても多項式なのでこれは morphism.

(b) Projection of twisted cubic curve have a cusp.

$P = (0 : 0 : 1 : 0), F(x, y, z, w) = z$ とし, 点 Q を $T = \{(ttt : ttu : tuu : uuu) \mid t, u \in k \wedge (t, u) \neq (0, 0)\}$ からとる.

$$\phi(T) = \{(t^3 : t^2u : 0 : u^3) \mid t, u \in k \wedge (t, u) \neq (0, 0)\} = \{(a^3 : a^2 : 0 : 1) \mid a \in k\} \cup \{(1 : 0 : 0 : 0)\}$$

最右辺の表示から, この曲線が $\mathcal{Z}_p(wx^2 = y^3)$ で与えられることが分かる. これは原点にカスプを持つ.

Ex3.15 Products of Affine Varieties.

$X \subset \mathbb{A}^n, Y \subset \mathbb{A}^m$ を affine variety とする. $X \times Y$ を直積集合に \mathbb{A}^{n+m} の相対位相を入れたものとする.

例 **Ex3.15.1.** $X = \mathcal{Z}_a(xy - 1), Y = \mathcal{Z}_a(z^2 + w^2 - 1)$ としよう. すると $X \times Y = \{(x, y, z, w) \mid xy - 1 = 0 \wedge z^2 + w^2 - 1\}$.

(a) $X \times Y$ is closed.

$\mathcal{I}_a(X) \subset k[x_0, \dots, x_n], \mathcal{I}_a(Y) \subset k[y_0, \dots, y_n]$ とする. この二つのイデアルを埋め込み写像によって $k[x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_n]$ の部分集合とみなすと, $\mathfrak{I}_{XY} = \langle \mathcal{I}_a(X) \cup \mathcal{I}_a(Y) \rangle$ が $X \times Y$ を定義する. なぜなら

$$X \times Y = \{(x, y) \mid [\forall f \in \mathcal{I}(X), f(x) = 0] \wedge [\forall g \in \mathcal{I}(Y), g(y) = 0]\}$$

だからである. このイデアル \mathfrak{I}_{XY} は以下の事実から素イデアルである.

(b) $X \times Y$ is irreducible.

$X \times Y$ は二つの閉集合 Z_1, Z_2 の和集合で表せるとしよう. すなわち $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$ とする. これに対して集合 X_1, X_2 を以下で定める.

$$X_i = \{x \in X \mid x \times Y \subset Z_i\} \quad (i = 1, 2)$$

必要な同相写像を準備する． x を固定した時，以下の写像は同相写像である．

$$r_x : Y \rightarrow x \times Y; y \mapsto (x, y)$$

実際，これは全単射であり，しかも Lemma 3.6 から同型射である．同型射ならば同相写像なので良い．同様に定義される $l_y : X \rightarrow X \times y$ も同相写像である．

$X = X_1 \cup X_2$ を示そう． r_x が同相写像であることから $r_x(Y) = x \times Y$ は irreducible. Z_1, Z_2 は closed だから

$$x \times Y = (x \times Y) \cap (Z_1 \cup Z_2) = ((x \times Y) \cap Z_1) \cup ((x \times Y) \cap Z_2)$$

の最右辺も閉集合による分解であり，したがって

$$x \times Y = (x \times Y) \cap Z_1 \text{ or } (x \times Y) \cap Z_2$$

すなわち $x \times Y \subset Z_1$ or $x \times Y \subset Z_2$. よって $X_1 \cup X_2 = X$.

さらに $l_y^{-1}(Z_i) = \{x \in X \mid (x, y) \in Z_i\}$ は l_y が同相写像であることから閉集合である．すでに示した $(x, y) \in Z_i \iff x \times Y \subset Z_i$ から任意の y について $l_y^{-1}(Z_i) = X_i$ が得られる．

以上より $X \times Y = Z_1 \cup Z_2$ ならば， $X = X_1 \cup X_2$ のように X が二つの閉集合の和で表されることがわかった． X は irreducible だから $X = X_1$ or X_2 . したがって $X \times Y = Z_1$ or Z_2 .

(c) Show that $A(X \times Y) \cong A(X) \otimes_k A(Y)$

$k[x_i] \otimes_k k[y_j] \cong k[x_i, y_j]$ を示す． $\psi : (f, g) \mapsto fg$ とすると以下の図式が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc} k[x_i] \otimes_k k[y_j] & \xrightarrow{\exists! \phi} & k[x_i, y_j] \\ \uparrow \otimes_k & \nearrow \psi & \\ k[x_i] \times k[y_j] & & \end{array}$$

$\phi^{-1} : x_i \mapsto (x_i) \otimes 1; y_j \mapsto 1 \otimes y_j$ によって逆写像が出来るので，求める同型が示せた．このことから $A(X \times Y) \cong A(X) \otimes_k A(Y) / \phi^{-1}(\mathcal{I}_{XY})$. 以下の補題から残りが示せる．

補題 Ex3.15.2. $A, B :: k\text{-algebra}, \mathfrak{a} \subset A, \mathfrak{b} \subset B :: \text{ideal}$ とする．この時 $(A/\mathfrak{a}) \otimes_k (B/\mathfrak{b}) \cong (A \otimes_k B) / \langle \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} \rangle$.

(d) Show that $X \times Y$ is a product in the category of varieties.

k -代数の圏 $k\text{-alg}$ における coproduct がテンソル積であることを示せば，あとは Cor3.7 から得られる．

(e) Show that $\dim X \times Y = \dim X + \dim Y$

$r := \dim X, s := \dim Y$ としよう．ネーターの正規化定理より， $A(X)$ (resp. $A(Y)$) が $k[\{t_i\}_{i=1}^r]$ (resp. $k[\{u_i\}_{i=1}^s]$) 上整であるような代数独立な元 $\{t_i\}_{i=1}^r \subset A(X)$ (resp. $\{u_i\}_{i=1}^s \subset A(Y)$) が存在する．Cor3.7 から， $A(X) \otimes_k A(Y)$ が $k[\{t_i\}_{i=1}^r \cup \{u_i\}_{i=1}^s]$ 上整であることを示せば十分である．なぜなら，一般に環 B 上整な環 F について $\dim F = \dim B$ が成り立ち，しかも t_i, u_i が代数独立な元であることから $\dim k[t_i, u_i] = r + s = \dim X + \dim Y$ だからである．

Ati-Mac Ex5.3 から, $R(\subset S)$ と T が k -代数で, かつ S が R 上整ならば, $S \otimes_k T$ は $R \otimes_k T$ 上整である. したがって $k[\{t_i\}_{i=1}^r] \subset A(X)$ と $k[\{u_i\}_{i=1}^s] \subset A(Y)$ から

$$k[\{t_i\}_{i=1}^r] \otimes_k k[\{u_i\}_{i=1}^s] \subset k[\{t_i\}_{i=1}^r] \otimes_k A(Y) \subset A(X) \otimes_k A(Y)$$

は整従属の包含関係である. $k[t_i, u_i] \cong k[\{t_i\}_{i=1}^r] \otimes_k k[\{u_i\}_{i=1}^s]$ と整従属の推移律から主張が示された.

Ex3.16 Products of Quasi-Projective Varieties

Ex3.17 Normal Varieties

ある variety Y が点 P で normal とは, $\mathcal{O}_{P,Y}$ が整閉整域であることである. Y が任意の点で normal であるとき, 単に Y は normal という.

(a) Any conic in \mathbb{P}^2 is normal.

Ex3.1c より, 考えるべき多様体は $\mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$ と同型. Them 3.4b の証明から, $P \in U_i$ ならば $\mathcal{O}_{P,\mathbb{P}^1} = A(U_i)_{\mathfrak{m}'_P}$. なので $A(U_i)_{\mathfrak{m}'_P}$ が integrally closed domain であることを示せば良い. これは $A(U_i) = A(\mathbb{A}^1) = k[t]$ であり, これは integrally closed domain なので, それを局所化した $A(U_i)_{\mathfrak{m}'_P}$ も integrally closed domain.

(b) $Q_1 = \mathcal{Z}_p(xy - zw), Q_2 = \mathcal{Z}_p(xy - z^2) \subset \mathbb{P}^3$ are normal.

$\{U_i\}_i$ をアフィン開被覆だとする. Them3.4b の証明の前半から, $P \in Y$ について, $P \in U_i$ なる i を選ぶと, $\mathcal{O}_{P,Y} \cong S(Y)_{(\mathfrak{m}_P)} \cong A(Y_i)_{\mathfrak{m}'_P}$ が成立する. (ただし $Y_i := Y \cap U_i$ で, \mathfrak{m}'_P は $A(Y_i)$ で点 P に対応する極大イデアル.) したがって局所環を調べるには各アフィン開被覆との共通部分だけ見れば良い.

Case I: $Y = Q_1$. $Y_0 = Q_1 \cap U_0$ は $\mathcal{Z}_a(y - zw)$ の様に表される. $A(Y_0)$ は $y \mapsto st, z \mapsto s, w \mapsto t$ で写すことで $k[s, t]$ と同型であるから, これが integrally closed であることは (a) と同様の議論で分かる. $i = 1, 2, 3$ でも同様.

Case II: $Y = Q_2$. $Y_0 = Q_2 \cap U_0$ は $\mathcal{Z}_a(y - z^2)$ の様に表される. $A(Y_0)$ は $y \mapsto s^2, z \mapsto t$ で写すことで $k[s, t]$ と同型であり, 以下同様. Y_1 も同様である. Y_2 は $\mathcal{Z}_a(xy - 1)$ であり, $A(Y_2) = k[s, s^{-1}, t] = k[s, t]_s$ と Ati-Mac Prop 5.12 よりこれは integrally closed.

Case II-3 $Y_3 = \mathcal{Z}_a(xy - z^2)$ は $(x, y, z) = (s^2, t^2, st)$ というパラメータ表示を持つので, $A(Y_3) = k[s^2, t^2, st]$. 証明は2つあり, 最初のは一般の代数閉体で成立し, 後のものは体 k の標数が2でないときに成立する. 後のものは不要ではあるが美しいので残しておこう. 必要な観察をここでしておこう. $A = k[s, t], B = k[s^2, t^2, st]$ とする. $s^m t^n$ が B の元であるためには, $s^m t^n = (s^2)^i (t^2)^j (st)^k$ となる非負整数 i, j, k が存在することが必要十分である. これは指数を見て連立方程式を解くと, $\frac{m+n}{2}$ が非負整数であるとき, すなわち $m+n \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}$ であることと同値²⁾. また, これは体 k の標数が2でない時には, A の自己準同型写像 $\sigma_0: s \mapsto -s, t \mapsto -t$ についての不変元であることと同値である.

²⁾ $m = 2i + k, n = 2j + k (i, j, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を解くと $j = i - m + \frac{m+n}{2}, k = m - 2i (\frac{m-n}{2} \leq i \leq \frac{m}{2})$

(証明). $f/g \in \text{Quot}(B)$ をとる. 以下の式を満たす $\{c_i\}_i \subset B$ が存在したとしよう.

$$\left(\frac{f}{g}\right)^d + c_1 \left(\frac{f}{g}\right)^{d-1} + \cdots + c_d = 0$$

B は A の部分環であるから, $f/g \in \text{Quot}(A), \{c_i\}_i \subset A$ とみなすことで $f/g \in A$ が得られる. したがって $h = f/g \in \text{Quot}(B) \cap A$. あとは $h \in B$ が示せば良い. (ここまでは後の証明と共通.)

$f, g \in B, h \in A$ に注意する. $h \notin B$ と仮定して矛盾を導く. g の項であって, total degree が偶数であるもののうちで最大で, かつ s の次数が最大であるものを $g_{ab}s^a t^b$ とする. h の項であって, total degree が奇数であるもののうちで最大で, かつ s の次数が最大であるものを $h_{cd}s^c t^d$ とする.

この時, $s^{a+c}t^{b+d}$ の係数は,

$$\sum_{i,j \in \mathbb{Z}} g_{a-i,b-j} h_{c+i,d+j}$$

である. $g_{a-i,b-j} h_{c+i,d+j} \neq 0$ の必要条件を整理しよう.

$$\begin{aligned} & g_{a-i,b-j} h_{c+i,d+j} \neq 0 \\ \implies & i+j \in 2\mathbb{Z} & [a+b \in 2\mathbb{Z} \text{ かつ } a+b-(i+j) \in 2\mathbb{Z} \text{ から.}] \\ \implies & i+j \geq 0 & [g_{ab} \text{ は total degree } a+b-(i+j) \text{ (偶数) が } g \text{ で最大のもの.}] \\ \implies & i+j \leq 0 & [h_{cd} \text{ は total degree } c+d+(i+j) \text{ (奇数) が } h \text{ で最大のもの.}] \end{aligned}$$

ここまでで $i+j=0$ が得られた. なので $g_{a-i,b+i} h_{c+i,d-i} \neq 0$ を考えると, g_{ab}, h_{ab} はその total degree で s の次数が最大であるものとしていたから, $a-i \leq a$ かつ $c+i \leq c$. すなわち $i=0$ が得られる. まとめて, $i=j=0$. よって $f=gh$ の $s^{a+c}t^{b+d}$ の係数は $g_{ab}h_{cd} \neq 0$ であり, したがって $gh=f \notin B$ となる. しかし $f \in B$ であったから矛盾. ■

(証明). 最初の段落は前述の証明と同じである. A の自己準同型写像 $\sigma_1: s \mapsto -s, t \mapsto -t$ は明らかに巡回群を生成するので, それを $G = \langle \sigma_1 \rangle$ とおく. 前述の考察から, 体 k の標数が 2 でない時には以下が成立する.

$$B = A^G = \{x \in A \mid \forall \sigma \in G, \sigma(x) = x\}$$

さて, 前述の証明と同じく $h = fg$ を考えよう.

$$\forall \sigma \in G, g \cdot h = f = g \cdot \sigma(h) \iff \forall \sigma \in G, g \cdot (h - \sigma(h)) = 0 \iff \forall \sigma \in G, h = \sigma(h)$$

(ただし, $g \neq 0$ と $A^G \subset A$ から $A^G::\text{domain}$ を用いた.) よって $h = f/g \in A^G$ が得られた. ■

後者は一般化が容易に出来る. 実際, 1 の原始 d 乗根を ζ_d として $\sigma: x_i \mapsto \zeta_d x_i$ が生成する巡回群 G を考えると, $(k[x_0, \dots, x_n])^G$ が integrally closed であることが示される. これは k の標数が d の約数でない時, d -uple embedding ρ_d の像が projectively normal であることを意味する. Hartshorne p.159 に部分的に逆も成り立つことが書かれているらしい. 正確には: “when V is non-singular, it is projectively normal if and only if each such linear system is a complete linear system.”³⁾ という内容が書かれているらしいが, はっきりと読み取れない.

さらに後者は A が integrally closed であるとき A^G が integrally closed であることの証明になっていて, これはよく知られた結果らしい. これよりわずかに強い命題が “Foundations of Grothendieck Duality for Diagrams of Schemes” の Cor 32.7 にある.

(c) $C = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}^2$ is not normal.

Them3.2 より $\mathcal{O}(C)_P \cong A(C)_{\mathfrak{m}_P}$ である. $P = (0,0)$ とすると, $\mathfrak{m}_P = (x, y)$ だから, $\mathcal{O}(C)_{(0,0)} = A(C)_{(x,y)}$. これには y/x が属さないが, $(y/x)^2 = y^2/x^2 = x^3/x^2 = x$ から $(y/x)^2 - (x/1) = 0$. $x/1 \in A(C)_{(x,y)}$ なのでこれは $\mathcal{O}(C)_{(0,0)}$ が integrally closed でないことを示す.

³⁾ Wikipedia, Homogeneous coordinate ring

(d) If Y is affine, then Y is normal $\iff A(Y)$ is integrally closed.

Them3.2 より $\mathcal{O}_{P,Y} \cong A(Y)_{\mathfrak{m}_P}$ であるが, Ati-Mac Prop5.13 より integrally closed は局所的な性質なので主張が成り立つ.

(e) Normalization of an affine variety.

まず variety の間の射と局所環の間の射の関係を考えよう.

$$\bar{Y} \xrightarrow{\pi} Y \xleftarrow{\phi} Z$$

という射が存在する. Ex3.3 から, これは

$$\mathcal{O}_{\bar{Y}} \xleftarrow{\pi^*} \mathcal{O}_Y \xrightarrow{\phi^*} \mathcal{O}_Z$$

という射に対応する. ϕ は dominant だから, 同じく Ex3.3 より ϕ^* は injective である.

Ex3.18 Projectively Normal Varieties.

(a) If Y is projectively normal, then Y is normal.

$S(Y)$ が integrally closed だとする. これは $S(Y)$ が $\text{Quot}(S(Y))$ 上整閉であることと同値. Ati-MacProp 5.12 と Ati-Mac Ex 5.3 より, $S(Y)_{\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^1}}$ は $\text{Quot}(S(Y))_{\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^1}} = \text{Quot}(S(Y))$ 上整閉.

$f/g \in S(Y)_{((0))}$ に対して, 以下の式を満たす $\{a_i/s_i\} \subset S(Y)_{(\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^1})}$ が存在したとしよう.

$$\left(\frac{f}{g}\right)^d + \frac{a_1}{s_1} \left(\frac{f}{g}\right)^{d-1} + \cdots + \frac{a_d}{s_d} = 0$$

この式を $f/g \in \text{Quot}(S(Y))$ が $S(Y)_{\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^1}}$ 上整であることを表す式と見て, $f/g \in S(Y)_{\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^1}} \cap S(Y)_{((0))} = S(Y)_{(\mathfrak{m}_{\mathbb{P}^1})}$.

(b) $Y := \{(t^4 : t^3u : tu^3 : u^4)\}$ is normal but not projectively normal.

明らかに Y は U_0, U_3 で被覆される. $Y \cap U_0 \cong \{(s, s^3, s^4)\}, Y \cap U_3 \cong \{(s^4, s^3, s)\} \subset \mathbb{A}^3$ であり, $A(Y \cap U_0) = A(Y \cap U_3) = k[s, s^3, s^4] = k[s]$ なのでこれは normal.

一方, $S(Y)$ は integrally closed domain でない. 実際, $S(Y) \cong k[t^4, t^3u, tu^3, u^4]$ であり, $t^4u^4 \in S(Y), t^2u^2 \notin S(Y)$. しかし $t^2u^2 = (t^3u)^2/t^4 \in \text{Quot}(S(Y))$ なので integrally closed でない.

(c) Show $Y \equiv \mathbb{P}^1$.

$\mathbb{P}^1 \rightarrow Y$ の射が全単射であることが明らか. 逆写像は ρ_d と同様に与えられる. (Y は $\rho_4(\mathbb{P}^1)$ から t^2u^2 の部分を落としたものである.)

Ex3.19 Automorphisms of \mathbb{A}^n

morphism $\phi: \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$ を考える. これが多項式 f_1, \dots, f_n によって $f = (f_1, \dots, f_n)$ と表されるとしよう. この時ヤコビ行列 J_ϕ を $J_\phi = [\partial f_i / \partial x_j]$ としよう.

(a) $\phi :: \text{isomorphism} \implies \det J_\phi = (\text{non-zero constant})$

多変数解析学の結果から、ヤコビ行列は導関数と対応する。すなわち、点 $P \in \mathbb{A}^n$ において、

$$I = J_{\phi^{-1} \circ \phi}(P) = J_{\phi^{-1}}(\phi(P)) \cdot J_\phi(P)$$

したがって任意の点 P で $J_\phi(P)$ は正則である。これは $\det J_\phi(P) \neq 0$ すなわち $\mathcal{Z}_a(\det J_\phi)$ が必要十分条件であるが、これは更に $\det J_\phi$ が k の単元であることが必要十分である。

Ex3.20 Extension of Regular Function

$Y :: \text{variety}$, $P \in Y :: \text{normal point}$, $f :: \text{regular function on } Y \setminus P$ とする。

(a) If $\dim Y \geq 2$, then f extends to a regular function on Y .

regular function $x = \langle Y \setminus P, f \rangle \in K(Y)$ が Y へ拡張出来ないと仮定して矛盾を導く。 $U' = U \cup P$ が開集合であるような開集合 U で f が $f = g/h$ と有理関数表示されたとしよう。すると f は U' に拡張出来ないから、 g/h も U' へ拡張できない。このとき、有理関数表示は色々ありうるが、 P が normal point であることと $f \notin \mathcal{O}_{P,Y}$ から、どの有理関数表示をとっても問題ないことが分かる。実際、 $g/h = g'/h'$ かつ $g/h \notin \mathcal{O}_{P,Y}$ ならば、 $g/h - g'/h' = 0$ を g/h の整従属を表す式と見ることで $g'/h' \notin \mathcal{O}_{P,Y}$ が得られる。同様に $f^n = (g/h)^n \notin \mathcal{O}_{P,Y}$ も得られる。 h は P で 0 になるから、 h に含まれるある既約多項式 \bar{h} が P で 0 になる。

P で 0 になる既約多項式だから (\bar{h}) は $\mathcal{O}_{P,Y}$ の高さ 1 の素イデアルであり、したがって $H = \mathcal{Z}_a(\bar{h}) \cap Y$ は Y の subvariety である。これは hypersurface だから $\dim H = \dim Y - 1 \geq 1$ である。

今、 f は U で値を持つから、 \bar{h} は U の点全てで 0 にならず、 $H \cap U' = P$ である。

$$H = H \cap (U' \cup U'^c) = (H \cap U') \cup (H \cap U'^c) = P \cup (H \cap U'^c)$$

ただし $U'^c = Y \setminus U'$ である。 H は irreducible だから $P = \emptyset$ or $H \cap U'^c = \emptyset$ となる。しかしどちらもありえず、ここに矛盾がある。実際、前者は明らかにありえないし、後者は $H = P$ を意味するが、 $\dim H \geq 1$ だからありえない。

(b) Show this would be false for $\dim Y = 1$.

$Y = \mathbb{A}^1, P = 0, f = 1/x$ を考えよう。この時 $A(Y) = k[x]$ であり、明らかに f は Y へ拡張できない。一方、 $Y = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3)$ は 1 次元多様体だが、 $P = (0, 0), f = y^2/x^2$ とすると $f = x$ なのでこれは自然に Y へ拡張出来る。

Ex3.21 Group Varieties.

variety と morphism の圏 **Var** に於ける群対象を group variety と呼ぶ。群の圏を **Grp** と書くことにする。予め一点集合が **Var** の終対象であることを指摘しておこう。

- (a) $G_a = [\mathbb{A}^1 \text{ with } \mu : (a, b) \mapsto a + b]$ is a group variety.
- (b) $G_m = [\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \text{ with } \mu : (a, b) \mapsto ab]$ is a group variety.
- (c) If G is a group variety, show that $\text{Hom}(-, G)$ is a functor from \mathbf{Var} to \mathbf{Grp} .

$X \in \mathbf{Var}$ を任意にとって考える．自然に以下の写像が考えられる．

$$\mu^* : \text{Hom}(X, G) \times \text{Hom}(X, G) \rightarrow \text{Hom}(X, G); (f(x), g(x)) \mapsto \mu(f(x), g(x))$$

以下の図式を考えることで，このような写像はこれに限ることが分かる．

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\exists!(f,g)} & G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ & \searrow f & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \text{pr}_2 \\ & & G & & G \end{array}$$

G の演算 μ に対する単位元を u ，逆元を作る射を i とする．この時， μ^* に対する単位元 u^* と逆元 i^* は以下で与えられる．

$$u^* : X \ni x \mapsto u \in G; \quad i^* : \text{Hom}(X, G) \ni f \mapsto i \circ f \in \text{Hom}(X, G)$$

i^* は実際に計算すると $\mu^*(f, i^*(f)) = \mu(f(x), i(f(x))) = u = u^*$ となる．

- (d) $\text{Hom}(X, G_a) \cong \mathcal{O}(X)$, as groups under addition.

G_a の台集合は \mathbb{A}^1 なので， $\text{Hom}_{\mathbf{Var}}(X, G_a)$ は集合として $\mathcal{O}(X)$ に等しい． $f, g \in \text{Hom}_{\mathbf{Var}}(X, G_a) = \mathcal{O}(X)$ に対して $\mu^*(f, g) = f + g$ より同型であることも分かる．

- (e) $\text{Hom}(X, G_m) \cong \text{units of } \mathcal{O}(X)$, as groups under multiplication.

こちらも集合として一致する．実際， G_m の台集合は $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$ なので $\text{Hom}(X, G_m)$ の元は X 上で 0 にならない regular function であり，そのような regular function は明らかに $\mathcal{O}(X)$ の単元である．演算も $\mu^*(f, g) = fg$ だから合同．