定理 1 (p.44, 逆関数定理)**.** 正則関数 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ について、$z_0 \in \Omega, f'(z_0) \neq 0$ とする。この時、ある z_0 の開近傍 U, $f(z_0)$ の開近傍 V が存在して、f の逆関数 g が存在する。しかも、この g は正則である。

証明. $z = x + iy, w = u + iv$ とおき、$f(z) = F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ を考える。$z_0 = x_0 + iy_0$ における Jacobian は、Cauchy-Riemann の関係式 $u_x = v_y, u_y = -v_x$ より、以下のようになる。

$$|J| = \begin{vmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{vmatrix} = u_x(z_0)^2 + v_x(z_0)^2 = |f'(z_0)|^2 \neq 0$$

$|J| \neq 0$ だから、逆写像の定理より、U, V と g が存在する。

$z = g(w)$ が正則となることを示す。そのために Cauchy-Riemann の関係式が成立することを示す。

$$g(w) = g(u + iv) = x(u, v) + iy(u, v)$$

とおく。逆写像の微分公式より、

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}$$

であるから、最右辺での u, v の Cauchy-Riemann の関係式から、最左辺で x, y の Cauchy-Riemann の関係式が導出される。したがって g は微分可能。さらに、$(f \circ g)(w) = w$ の両辺を微分して、$g'(w) = \frac{1}{f'(g(w))}$ を得る。よって g は Cauchy-Riemann の関係式を満たし、連続であるから、正則関数。

∎

$f(z) = e^z$ についての逆関数を考える。$f'(z_0) = e^{z_0}$ だから、任意の $z_0 \in mathbbC$ で $f'(z_0) \neq 0$ である。よってある U, V が存在して f の逆関数 g が存在する。

$$w = f(z) = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = u + iv$$

ここから $w^2 + v^2 = e^{2x}$ かつ $y = \arg w$ が分かる。したがって $g(w) = \log |w| + i \arg w$ である。しかしこれは arg が多価関数なので、「主値」を別に定義する。

定義 2 (対数関数)**.** $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$ に対して、

- $\log w = \log |w| + i \arg w$
- $\operatorname{Log} w = \log |w| + i \operatorname{Arg} w$

とおく。ただし $-\pi < \operatorname{Arg} w \leq \pi$ である。また、右辺の log は実数関数である。

Log は log の主値（あるいは主ブランチ）と呼ばれる。$\log w = \operatorname{Log} w + 2k\pi i (i \in \mathbb{Z})$ となる。

$z \in \mathbb{C}$ について、$z^{\frac{1}{2}}$ を考える。

$$z^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log z} = e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log} z + 2k\pi i)}$$

$e^{\frac{1}{2}(2k\pi i)} = e^{k\pi i}$ の値は ± 1 のみなので、結局

$$z^{\frac{1}{2}} = \pm e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log} z}$$

となる。同様に $i^{\frac{1}{2}}$ や i^i を計算せよ。