

Ex8.1 Strengthen Some Results in the Text.

1.1

1.2

1.3

1.4

Ex8.2 $0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow 0$.

$X ::$ variety of dimension n over k , $\mathcal{E} ::$ locally free sheaf of rank $> n$, $V^\# \subset \Gamma(X, \mathcal{E}) :: k$ -vector space of global sections which generate \mathcal{E} とする. $X ::$ variety より $X ::$ connected なので \mathcal{E} の rank は X 全体で一定である. $\text{rank } \mathcal{E} = r(> n)$ としておこう.

主張 Ex8.2.1

ある $s \in V$ について次が成立する.

$$\forall x \in X, \quad s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x.$$

■Conventions and Notations. X の closed point 全体を X^+ と書く. Ex3.14 より, これは dense in X . また, $d = \dim_k V^\#, V = \mathbb{P}_k^{d-1}$ とし, $V^+ = (V^\# - \{0\})/k^*$ を V の closed points と同一視する. この同一視の仕方は Prop7.7 や dual projective space と同じである. $\dim_k V^\# - 1 = \dim V$ に注意. $V^\#$ の subspace も同様に V の subspace とみなす.

■Definition of B, B^+ . $B \subseteq X \times_k V$ を次のように置く.

$$B = \bigcap_{s \in V^\#} \text{pr}_1^{-1}(\{x \in X \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}).$$

B は $X \times V$ の closed subscheme である. ($\{\}$ 部分が closed であることは Ex2.16 を参照.) B には reduced structure を与えておく. $\text{pr}_1|_B : B \rightarrow X$ を p_1 と略す. B の closed points $:: B^+$ は次のような集合である.

$$B^+ = \{(x, s) \in X^+ \oplus V^+ \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}.$$

■Plot. 主張は, $\text{pr}_2(B) \not\subseteq V^+$ と言い換えられる. (詳細は後ほど.) これには B の次元が V の次元より小さいことを言えば良い. B の次元は Ex3.22 の結果を用いればその fiber $:: B_x$ から計算できる. 全ての $x \in X$ について $\dim B_x$ を計算することは難しい. しかし少し妥協して, $x \in X^+$ についての $\dim B_x$ を計算することは出来る. この場合でも Ex3.22c の結果を用いて $\dim B_x$ が計算できる.

■Definition of ϕ_x . $x \in X$ について次の写像を考える.

$$\begin{aligned} \phi_x : V^\# &\rightarrow \mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \\ s &\mapsto s_x \otimes 1 \end{aligned}$$

これが k -linear map であることは明らか. $k(x) := \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x$ より $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$. このことと ϕ_x の定義の仕方から, $\ker \phi_x = \{s \in V^\# \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}$.

■ ϕ_x for $x \in X^+$. この段落では $x \in X^+$ とする. すると $k(x) = k^{\dagger 1}$ なので $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x$. また $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$. さらに $V^\# ::$ global generators of \mathcal{E} であるから, ϕ_x は surjective. なので $x \in X^+$ について $\dim \ker \phi_x$ が分かる.

$$\dim_k \ker \phi_x = \dim_k V^\# \otimes_k k(x) - \dim_k \mathcal{E}_x = \dim_k V^\# - r.$$

■ Dimension of fiber :: $\dim B_x$. p_1 についての $x \in X^+$ の fiber :: B_x の base space は, Ex3.10 より, $\text{sp } B_x \approx p_1^{-1}(x)$. したがって次が分かる.

$$\text{sp } B_x \cap \text{sp } B^+ \approx p_1^{-1}(x) \cap \text{sp } B^+ = \{x\} \times \ker \phi_x.$$

ここで \times は集合としての直積を表す. よって B_x の次元が分かる^{†2}.

$$\dim B_x = \dim_k \ker \phi_x - 1 = \dim_k V^\# - r - 1 = \dim V - r.$$

■ $p_1 ::$ closed map. $V \rightarrow \text{Spec } k$ は projective であり, $V, \text{Spec } k$ 共に noetherian であるからこの射は proper. よって universally closed である.

$$\begin{array}{ccc} X \times_k V & \longrightarrow & V \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \text{universally closed} \\ X & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

$B ::$ closed なので B の closed subset は X でも closed. したがって $p_1 = \text{pr}_1|_B ::$ closed map.

■ $p_1(B) = X$ or $B = \emptyset$. $p_1(B) \supseteq X^+$ とする. すると $p_1(B) ::$ closed より $p_1(B) \supseteq \text{cl}_X(X^+) = X$. 次に $p_1(B) \not\supseteq X^+$ とする. すると上で述べたこと (全ての $x \in X^+$ について $\dim p_1^{-1}(x)$ が等しいこと) から, 結局 $p_1(B) \cap X^+ = \emptyset$ が分かる. $p_1(B)$ が空でないと仮定しよう. すると $p_1 ::$ closed map より, $x \in p_1(B)$ なら $\text{cl}_X(\{x\}) \subseteq p_1(B)$. $\text{cl}_X(\{x\})$ は closed point を含むので矛盾が生じる. よって $p_1(B) \not\supseteq X^+$ ならば $p_1(B) = \emptyset$. これは $B = \emptyset$ を意味し, さらにこれは 0 を除く全ての $V^\#$ の元が claim の条件を満たすことを意味する. 以下, $B \neq \emptyset$ と仮定する.

■ $p_1^{-1}(x) ::$ irreducible. 任意の closed point :: $x \in X^+$ について $p_1^{-1} = (\ker \phi_x - \{0\})/k^*$. これは projective linear space だから irreducible.

^{†1} $X ::$ variety より, $k ::$ algebraically closed field かつ $X ::$ finite type / k . $A = k[x_1, \dots, x_n], \mathfrak{a} \subseteq A$ とし, $\mathfrak{m}/\mathfrak{a} \in \text{Spec } A/\mathfrak{a} \subseteq X$ が x に対応する極大イデアルだとする. ここで \mathfrak{m} は A の極大イデアル. $S = A - \mathfrak{m}$ とすると

$$k(x) = \frac{S^{-1}(A/\mathfrak{a})}{S^{-1}(\mathfrak{m}/\mathfrak{a})} \cong S^{-1}\left(\frac{A/\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}\right) \cong S^{-1}(A/\mathfrak{m}).$$

$A/\mathfrak{m} \cong k$ は体だから, これは $k(x) \cong k$.

^{†2} closed subscheme of $B :: C$ について $\dim C = \dim C \cap B^+$ を示す. $C \cap B^+ \subset C$ より $\dim C \geq \dim C \cap B^+$ は明らか. $d = \dim C$ とし, C の irreducible closed subset が成す真の極大上昇鎖をとる: $Z_0 \subsetneq \dots \subsetneq Z_d$. closed immersion \implies finite type に注意すると, $Z_i ::$ finite type/ k . なので Ex3.14 より $Z_i \cap B^+ ::$ dense in Z_i . したがって $Z_i \cap B^+ = Z_j \cap B^+ \implies Z_i = Z_j$ となり, $Z_0 \cap B^+ \subsetneq \dots \subsetneq Z_d \cap B^+$ は B^+ の irreducible closed subset が成す真の上昇鎖. 以上から $\dim C \leq \dim C \cap B^+$ も成り立つ.

■ $B :: \text{irreducible}$. 以上から $B :: \text{irreducible}$ が分かる. B が二つの閉集合 C_1, C_2 の和であったとすると, $x \in X^+$ について $p_1^{-1}(x)$ は次のように書ける.

$$p_1^{-1}(x) = (C_1 \cap \text{pr}_1^{-1}(x)) \cup (C_2 \cap \text{pr}_1^{-1}(x)).$$

これは irreducible だから, $C_1 \cap \text{pr}_1^{-1}(x)$ か $C_2 \cap \text{pr}_1^{-1}(x)$ に一致する. $x_1, x_2 \in X^+$ について次のようになっていると仮定しよう.

$$p_1^{-1}(x_1) = C_1 \cap \text{pr}_1^{-1}(x), \quad p_1^{-1}(x_2) = C_2 \cap \text{pr}_1^{-1}(x).$$

すると, $x_1 \in, x_2 \notin p_1(C_1)$ となる. $p_1(C_2)$ も同様. すなわち $p_1(C_1), p_1(C_2)$ は $p_1(B)(= X)$ 空でないの真の閉集合である. しかし $X = p_1(B) = p_1(C_1) \cup p_1(C_2)$ であり $X :: \text{irreducible}$ であるから, これはありえない. よって任意の $x \in X^+$ について $p_1^{-1}(x) = C_1 \cap \text{pr}_1^{-1}(x)$ (あるいは $= C_2 \cap \dots$) となる. 両辺で $\bigcup_{x \in X^+}$ として

$$p_1^{-1}(X^+) = C_1 \cap p_1^{-1}(X^+).$$

$p_1^{-1}(X^+) = (X^+ \times V) \cap B \supset B^+$ であり, $B^+ :: \text{dense in } B$. $B^+ \cap C_1 :: \text{dense in } C_1$ も Ex3.14 から得られるので, 両辺の B での閉包を取って $B = C_1$. したがって $B :: \text{irreducible}$.

■ Dimension of B . $B :: \text{integral \& finite type}/k$ ($\implies \text{variety}/k$) なので, Ex3.22c から次が成り立つ: $x \in U$ ならば $\dim B_x = \dim B - \dim X$, となる $U :: \text{open dense subset in } X$ が存在する. $U :: \text{non-empty open subset}$ と $X^+ :: \text{dense}$ から, $U \cap X^+ \neq \emptyset$. $x \in X^+$ であるときの及び開集合 $\dim B_x$ が既に分かっているから, $\dim B$ も分かる.

$$\dim B = \dim B_x + \dim X = \dim V - r + n.$$

$r > n$ なので, $\dim B < \dim V$.

■ $\text{pr}_2(B) \supseteq V^+ \implies \dim B \geq \dim V$. $\text{pr}_2(B) \supseteq V^+$ としよう. B^+ の場合と同様に $\dim V^+ = \dim V$. ch I, Ex1.10 より, $\dim U = \dim V$ を満たす affine open subset of $V :: U$ がとれる. 適当に $\text{pr}_1(B)$ から affine open subset $:: U'$ をとると, X, V 共に finite type $/k$ だから, ch I, Ex3.15 (Products of Affine Varieties) が使える. よって $\dim U \times U' = \dim U + \dim U' \geq \dim U = \dim V$. $U \times_k U' \subset B$ だから $\dim B \geq \dim V$

■ Complete proof of the claim. 今はこれの対偶が成立する. すなわち, $s \in V^+ - \text{pr}_2(B)$ が存在する. この s と任意の $x \in X$ について $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ が成り立つ.

■ An exact sequence. Φ を以下で定める.

$$\begin{aligned} \Phi: \quad \mathcal{O}_X &\rightarrow \mathcal{E} \\ \langle U, \sigma \rangle &\mapsto \langle U, (s|_U) \cdot \sigma \rangle \end{aligned}$$

この $x \in X$ における stalk を見ると, $\Phi_x: \sigma_x \mapsto s_x \cdot \sigma_x$ と成っている. $\mathcal{E}_x \cong \mathcal{O}_x^{\oplus r}$ かつ $\mathcal{O}_x :: \text{domain}$ より, $\text{Ann}(\mathcal{E}_x) = 0$. そして $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ から, $s_x \neq 0$. なので Φ_x は, したがって Φ は injective. よって $\mathcal{E}' = \text{coker } \Phi$ とおくと以下は exact sequence.

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}' \rightarrow 0.$$

■ $\mathcal{E}' :: \text{locally free}$. \mathcal{E}' が locally free であることを示そう。Ex5.7b から、任意の点における stalk が free であることを示せば十分。以下、 $\mathcal{E}_x = \mathcal{O}_x^{\oplus r}$ (\cong でなく $=$) とする。点 $x \in X$ について

$$s_x = (s_x^{(i)})_i \in \mathcal{O}_x^{\oplus r} = \mathcal{E}_x$$

とする。 $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x = \mathfrak{m}_x^{\oplus r}$ から、ある i について $s_x^{(i)} \notin \mathfrak{m}_x$ 。すなわち $s_x^{(i)} :: \text{unit}$ 。ここでは $i = 0$ とし、

$$u = (s_x^{(0)})^{-1} s_x = \left(1, s_x^{(2)}(s_x^{(0)})^{-1}, \dots, s_x^{(r)}(s_x^{(0)})^{-1}\right) \in s_x \mathcal{O}_x$$

と置く。すると $\mathcal{E}'_x \cong \mathcal{E}_x / \text{im } \Phi_x = \mathcal{O}_x^{\oplus r} / s_x \mathcal{O}_x$ は次の写像で $\mathcal{O}_x^{\oplus r-1}$ と同型。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x^{\oplus r} / s_x \mathcal{O}_x &\rightarrow 0 \oplus \mathcal{O}_x^{\oplus r-1} \\ (t^{(j)})_j \bmod s_x \mathcal{O}_x &\mapsto (t^{(j)})_j - t^{(0)} u \end{aligned}$$

well-defined であることは明らか。逆写像は次のもの。

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x^{\oplus r-1} &\rightarrow \mathcal{O}_x^{\oplus r} / s_x \mathcal{O}_x \\ t &\mapsto (0 \oplus t) \bmod s_x \mathcal{O}_x \end{aligned}$$

2.0.1 B の別構成.

$d+1 = \dim_k V^\#$ とし、 $\mathcal{V} = (V^\#)^\sim$ とする。 $V^\# \cong k^{\oplus d+1}$ から \mathcal{V} は $\text{rank } \mathcal{V} = d+1$ の $\text{locally free sheaf}$ となる。そして全射 $\mathcal{V} \otimes_k \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E}$ が $\langle U, s \rangle \otimes \langle U, a \rangle \mapsto \langle U, sa \rangle$ の様に構成できる^{†3}。この \ker を \mathcal{B} とおく。

$$0 \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

構成から $\mathcal{B} :: \text{locally free}$ と $\text{rank } \mathcal{B} = d+1-r$ が分かる (?)。双対をとる。(すなわち $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_X)$ で写す。)

$$0 \longrightarrow \check{\mathcal{E}} \longrightarrow \check{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \check{\mathcal{B}} \longrightarrow 0$$

全射 $\check{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \check{\mathcal{B}}$ から、injective X -morphism $:: \mathbb{P}(\check{\mathcal{B}}) \rightarrow \mathbb{P}_k^d \times X$ が誘導される (?)。ここでの $\mathbb{P}(\check{\mathcal{B}})$ が B である (?)。構成の仕方から、 $\dim B = \text{rank } \check{\mathcal{B}} - 1$ 。

2.0.2 $\mathcal{E}' :: \text{locally free}$ の別証明.

任意の点 $x \in X$ における stalk を考える。

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_x \xrightarrow{\times s_x} \mathcal{E}_x \longrightarrow \mathcal{E}'_x \longrightarrow 0$$

これを $\otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)$ で写し、 $k(x)$ -module の exact sequence にする。

$$\mathcal{O}_x \otimes k(x) \xrightarrow{\times (s_x \otimes 1)} \mathcal{E}_x \otimes k(x) \longrightarrow \mathcal{E}'_x \otimes k(x) \longrightarrow 0$$

同型で書き換える。

$$k(x) \xrightarrow{\times (s_x)^-} \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x \longrightarrow \mathcal{E}'_x \otimes k(x) \longrightarrow 0$$

^{†3} \mathcal{O}_X が k -module であることは次のように分かる。今、 $f: X \rightarrow \text{Spec } k$ が存在するので $\mathcal{O}_{\text{Spec } k} \rightarrow f^* \mathcal{O}_X$ が存在する。これの adjoint $:: f^{-1} \mathcal{O}_{\text{Spec } k} \rightarrow \mathcal{O}_X$ を考えれば、開集合 $U \subseteq X$ について $\mathcal{O}_X(U)$ が k -module であることが分かる。また、ここで書いた $\mathcal{V} \otimes_k \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{E}$ の定義は presheaf $:: U \mapsto \mathcal{V}(U) \otimes_k \mathcal{O}_X(U)$ からの morphism なので sheafification が必要である。

ただし $(s_x)^- = s_x \bmod \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$. これは $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ から, 0 でない. したがって左の写像は $1 \in k(x)$ を非ゼロ元に写す. この exact sequence は $k(x)$ -module のものだったから, 左の写像は injective. よって次が分かる.

$$\dim_{k(x)} \mathcal{E}'_x \otimes k(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{E}_x \otimes k(x) - \dim_{k(x)} k(x) = r - 1.$$

すなわち $\dim_{k(x)} \mathcal{E}'_x \otimes k(x)$ は $x \in X$ について定数関数. Ex5.8 より, $\mathcal{E}' :: \text{locally free}$ と分かる.

Ex8.3 Product Schemes.

3.1 $\Omega_{X \times_S Y/S} \cong \text{pr}_X^* \Omega_{X/S} \oplus \text{pr}_Y^* \Omega_{Y/S}$.

$S :: \text{scheme}$, $X, Y :: \text{scheme} / S$ とする. Thm8.10 より, $\Omega_{X \times Y/Y} \cong \text{pr}_X^* \Omega_{X/S}$ が分かる. これと Thm8.11 を合わせて次の完全列が得られる.

$$\text{pr}_Y^* \Omega_{Y/S} \longrightarrow \Omega_{X \times Y/S} \longrightarrow \text{pr}_X^* \Omega_{X/S} \longrightarrow 0. \quad (*)$$

X と Y を交換したものと合わせて次の図式を得る. これは $\mathcal{O}_{X \times Y}$ -module の図式である.

$$\begin{array}{ccccccc} \text{pr}_X^* \Omega_{X/S} & \longrightarrow & \Omega_{X \times Y/S} & \longrightarrow & \text{pr}_Y^* \Omega_{Y/S} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \bar{\gamma} & & \parallel \text{id} & & & & \\ 0 \longleftarrow & \text{pr}_X^* \Omega_{X/S} & \longleftarrow & \Omega_{X \times Y/S} & \longleftarrow & \text{pr}_Y^* \Omega_{Y/S} & \end{array}$$

この図式において $\bar{\gamma}$ は $\Omega_{X \times Y/S}$ を経由する射の合成である. $\gamma = \text{id}_{\text{pr}_Y^* \Omega_{Y/S}}$ が示せれば, $\alpha :: \text{inj \& split}$ が得られる. これは $X \times Y$ の open affine cover をとって local に調べれば良い. $\text{Spec } R \subseteq S, \text{Spec } A \subseteq X, \text{Spec } B \subseteq Y$ を任意にとり, $C = A \otimes_R B$ とする. 図式全体を $\Gamma(\text{Spec } C, -)$ で写す. Ω の構成から, これは次のように成る. これは C -module の図式である.

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega_{A/S} \otimes_A C & \xrightarrow{\alpha} & \Omega_{C/S} & \longrightarrow & \Omega_{B/S} \otimes_B C & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \gamma & & \parallel \text{id} & & & & \\ 0 \longleftarrow & \Omega_{A/S} \otimes_A C & & \Omega_{C/S} & \longleftarrow & \Omega_{B/S} \otimes_B C & \\ \uparrow \cong & \nwarrow \beta & & & & & \\ & \Omega_{C/A} & & & & & \end{array}$$

それぞれの写像は次のように定義される (Matsumura, p.193 & Eisenbud, Prop16.4).

$$\begin{aligned} \alpha: & \quad [\text{d}_{A/S} a] \otimes c \mapsto [\text{d}_{C/S} (a \otimes 1_B)] \cdot c \\ \beta: & \quad \text{d}_{C/S} c \mapsto \text{d}_{C/A} c \\ \cong: & \quad \text{d}_{C/A} (a \otimes b) \mapsto [\text{d}_{A/S} a] \otimes (1_A \otimes b) \end{aligned}$$

よって γ は次のように成る.

$$[\text{d}_{A/S} a] \otimes c \mapsto [\text{d}_{C/S} (a \otimes 1_B)] \cdot c \mapsto [\text{d}_{C/A} (a \otimes 1_B)] \cdot c \mapsto ([\text{d}_{A/S} a] \otimes 1_C) \cdot c = [\text{d}_{A/S} a] \otimes c.$$

以上より $\gamma = \text{id}$ が示された.

3.2 $\omega_{X \times Y} \cong \text{pr}_X^* \omega_X \otimes \text{pr}_Y^* \omega_Y$.

X, Y :: nonsingular varieties over a field k とする. $d_X = \dim X, d_Y = \dim Y$ とする. この時 Thm8.15 より, $\Omega_{X/k}, \Omega_{Y/k}$ はそれぞれ $\text{rank} = d_X, d_Y$ の locally free sheaf である. また (a) の完全列 (*) より, $\text{rank } \Omega_{X \times_k Y/k} = d_X + d_Y$ ^{†4}.

Ex5.16d を (a) の完全列 (*) に用いれば,

$$\omega_{X \times Y} = \bigwedge^{d_X + d_Y} \Omega_{X \times Y/k} \cong \left(\bigwedge^{d_X} \text{pr}_X^* \Omega_{X/k} \right) \otimes \left(\bigwedge^{d_Y} \text{pr}_Y^* \Omega_{Y/k} \right).$$

Ex5.16e より $\text{pr}_X^*, \text{pr}_Y^*$ はそれぞれ \wedge と交換できる. よって $\omega_{X \times Y} \cong \text{pr}_X^* \omega_X \otimes \text{pr}_Y^* \omega_Y$.

3.3 An Example that Gives $p_g \neq p_a$.

$Y \subset \mathbb{P}_k^2$ を non-singular cubic curve とする. さらに $Y \times_k Y$ を Segre embedding で \mathbb{P}^8 に埋め込んだものを X とする.

Example8.20.3 より, $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(0) = \mathcal{O}_Y$. したがって (b) より $p_g(X)$ が計算できる.

$$p_g(X) = \dim_k \Gamma(X, \text{pr}_1^* \mathcal{O}_Y \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_Y) = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \dim_k k = 1.$$

ここで Ex5.11: $\mathcal{O}_X(1) \cong \text{pr}_1^* \mathcal{O}_Y(1) \otimes \text{pr}_2^* \mathcal{O}_Y(1)$ (両辺に逆元をテンソルすれば利用した同型が得られる) と Ex4.5d を順に用いた.

I, Ex7.2b より $p_a(Y) = \frac{1}{2}(3-1)(3-2) = 1$. 同じく I, Ex7.2e より $p_a(X)$ が計算できる.

$$p_a(X) = (p_a(Y))^2 - 2p_a(Y) = -1.$$

3.3.1 Direct Calc of ω_Y .

体 k の標数は 0 としておく. $U_z = \mathcal{Z}_p(z)^c \cong \mathbb{A}^2$ とし, $Y \cap U_z \subset \mathbb{A}^2$ の定義多項式を $y^2 - f(x) \in k[x, y]$ とする. ただし $\deg f = 3$.

$$B = k[x, y], \quad I = (y^2 - f(x))B, \quad C = B/I$$

と置いて加群 $\Omega_{C/k}$ を求めよう. $\omega_Y = \bigwedge^1 \Omega_{Y/k} \cong \Omega_{Y/k}$ だから, ω_Y も以下の計算から分かる. second exact sequence (Thm8.4) を用いると $\Omega_{C/k}$ が計算できる.

$$\begin{aligned} \Omega_{C/k} &\cong \frac{\Omega_{B/k} \otimes_B C}{\delta(I/I^2)} \\ &\cong \frac{(Bdx \oplus Bdy) \otimes C}{\langle d\alpha \otimes 1 \mid \alpha \in I \rangle} \\ &\cong \frac{Cd\bar{x} \oplus Cd\bar{y}}{\langle 2\bar{y} \cdot d\bar{y} - (\partial_x f)d\bar{x} \rangle}. \end{aligned}$$

ここで $\bar{x} = x \bmod I, \bar{y} = y \bmod I$ とした. 以下, これらの $\bar{}$ は省略する.

^{†4} 各点での stalk をとって rank が additive であることを使えば分かる.

点 $\mathfrak{p} \in C$ における $\Omega_{C/k}$ の局所化を計算する. $Y :: \text{non-singular}$ から, $2y, \partial_x f$ の両方が同時に 0 になることはない. なので任意の点において $dx = (*)dy$ あるいは $dy = (*)dx$ の形になる. より詳細には次の通り.

$$(\Omega_{C/k})_{\mathfrak{p}} \cong \begin{cases} C_{\mathfrak{p}} dx & \text{if } \mathfrak{p} \in D(y) \\ C_{\mathfrak{p}} dy & \text{if } \mathfrak{p} \in D(\partial_x f). \end{cases}$$

よって $\text{rank } \Omega_{C/k} = 1$. (TODO: $\Omega_{Y/k} \cong \mathcal{O}_Y$ は示せるか?)

Ex8.4 Complete Intersections in \mathbb{P}^n .

Ex8.5 Blowing Up a Nonsingular Subvariety.

Ex8.6 The Infinitesimal Lifting Property.

$k :: \text{algebraically closed field}$, $A :: \text{finitely generated } k\text{-algebra}$ とし, $\text{Spec } A :: \text{nonsingular variety}/k$ と仮定する. さらに $0 \rightarrow I \rightarrow B' \rightarrow B \rightarrow 0$ を $k\text{-algebra}$ の完全列とし, $I^2 = 0$ とする.

以下を示す.

定理 Ex8.6.1

A は Infinitesimal Lifting Property を持つ. すなわち, 任意の $k\text{-algebra homomorphism} :: f : A \rightarrow B$ に対し, 次の図式を可換にする $g : A \rightarrow B'$ がただひとつ存在する.

$$\begin{array}{ccc} & & 0 \\ & & \downarrow \\ & & I \\ & & \downarrow \\ & & B' \\ \nearrow \exists_1 g & & \downarrow \\ A & \xrightarrow{f} & B \\ & & \downarrow \\ & & 0 \end{array}$$

g は f の lifting と呼ばれる.

6.1 $\text{Der}_k(A, I) = \{g - g' \mid g, g' :: \text{lifting of } f\}$.

Matsumura, p.191 と同じ議論をする. $\pi : B' \rightarrow B$ を与えられた完全列中の全射としよう.

■ Consider I as A -module. $a \in A$ に対し, $\pi^{-1}(f(a))$ の元をひとつ取って $\tilde{a} \in B'$ とする. これをもちいて $i \in I$ に対し $a \cdot i = \tilde{a}i$ と置く. これが well-defined であることは $I^2 = 0$ から従う. 実際, $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in \pi^{-1}(f(a))$ をとると, $\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \in I$ なので

$$\tilde{a}_1 i - \tilde{a}_2 i \in Ii = 0.$$

■ \subseteq . g, g' を f の lifting とし, $\theta = g - g'$ とする. まず $\text{im } \theta \subseteq I$ を確かめよう. 図式の可換性から次が得られる.

$$\pi \circ \theta = \pi \circ g - \pi \circ g' = f - f = 0.$$

よって $\text{im } \theta \subseteq \ker \pi = I$. 次に $x, y \in A$ をとり, θ が Leibniz rule を満たすことを確かめる.

$$\begin{aligned}
& \theta(xy) \\
&= g(x)g(y) - g'(x)g'(y) \\
&= g(x)g(y) - g'(x)g(y) + g'(x)g(y) - g'(x)g'(y) \\
&= (g(x) - g'(x))g(y) + g'(x)(g(y) - g'(y)) \\
&= \theta(x)g(y) + g'(x)\theta(y) \\
&= \theta(x) \cdot y + x \cdot \theta(y)
\end{aligned}$$

ここで $\pi \circ g(y) = f(y)$ より $g(y) \in \pi^{-1}(f(y))$ であることに注意せよ. $g'(x)$ も同様. $\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$ は自明である.

■□. g を f の lifting とし, $\theta \in \text{Der}_k(A, I)$ をとる. $g' = g + \theta$ が f の lifting であることを示そう. まず準同型であることを示す. 和を保つことは明らかなので積を保つことを見る. $x, y \in A$ をとる.

$$\begin{aligned}
& g'(xy) \\
&= g(x)g(y) - \theta(x) \cdot y - x \cdot \theta(y) \\
&= g(x)g(y) - \theta(x)g(y) - g(x)\theta(y) + \theta(x)\theta(y) \\
&= (g(x) - \theta(x))(g(y) - \theta(y)) \\
&= g'(x)g'(y)
\end{aligned}$$

ここで $\theta(x)\theta(y) \in I^2 = 0$ と $g(x) \in \pi^{-1}(f(x)), g(y) \in \pi^{-1}(f(y))$ を用いた. 以上から g' も代数の準同型. さらに $\text{im } \theta \subseteq \ker \pi = I$ だから,

$$\pi \circ g' = f + \pi \circ \theta = f.$$

よって g' は lifting.

6.2 $P = k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow B'$.

$P = k[x_1, \dots, x_n]$ とし, $A = P/J$ とする. 次の図式を可換にする写像 h の存在を示す.

$$\begin{array}{ccc}
0 & & 0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
J & & I \\
\downarrow & & \downarrow \\
P & \xrightarrow{h} & B' \\
\rho \downarrow & & \downarrow \pi \\
A & \xrightarrow{f} & B \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

h は x_i の像で決定されるから, $b_i \in \pi^{-1}(f \circ \rho(x_i))$ を選び, $h: x_i \mapsto b_i$ で写像を定めれば良い. b_i のとり方から図式が可換になることは明らか.

可換性から, $\pi(h(J)) = f(\rho(J)) = 0$. したがって $h(J) \subseteq \pi^{-1}(0) = I$. また $h(J^2) = (h(J))^2 \subseteq I^2 = 0$. このことから, 次のように A -module homomorphism が定まる.

$$\begin{aligned}
\bar{h}: J/J^2 & \rightarrow I \\
j \bmod J^2 & \mapsto h(j)
\end{aligned}$$

6.3 Complete the proof.

$\text{Spec } A \subseteq \text{Spec } P = \mathbb{A}^n$ が non-singular であることから, Thm8.17 が使える. $\Gamma(\text{Spec } A, -)$ が left-exact であったことと Thm8.4 から, 次は exact.

$$0 \longrightarrow J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{P/k} \otimes_P A \longrightarrow \Omega_{A/k} \longrightarrow 0. \quad (*)$$

これを $\text{Hom}_A(-, I)$ で写して次を得る.

$$0 \longrightarrow \text{Der}_k(A, I) \longrightarrow \text{Der}_k(P, I) \xrightarrow{\delta^*} \text{Hom}_A(J/J^2, I). \quad (**)$$

ここで δ^* は 3 つの写像の合成である.

$$\begin{aligned} \text{Der}_k(P, I) &\xrightarrow{\cong} \text{Hom}_P(\Omega_{P/k}, I) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_A(\Omega_{P/k} \otimes_P A, I) \xrightarrow{(-) \circ \delta} \text{Hom}_A(J/J^2, I) \\ D &\longmapsto \phi \longmapsto \iota \circ (\phi \otimes_P \text{id}_A) \longmapsto (\iota \circ (\phi \otimes_P \text{id}_A)) \circ \delta. \end{aligned}$$

$\iota : I \otimes A \rightarrow I$ は標準的同型写像である. $\delta^*(D) = (\iota \circ (\phi \otimes_P \text{id}_A)) \circ \delta$ がどのようなものか計算しておこう. $x \in J$ をとり $\bar{x} = x \bmod J^2$ とおく.

$$\delta^*(D)(\bar{x}) = ((\iota \circ (\phi \otimes_P \text{id}_A)) \circ \delta)(\bar{x}) = \iota((\phi \otimes_P \text{id}_A)([d_{P/k} x] \otimes 1_A)) = \iota(Dx \otimes 1_A) = Dx.$$

主張 Ex8.6.2

$\delta^* : \text{Der}_k(P, I) (\cong \text{Hom}_P(\Omega_{P/k}, I)) \rightarrow \text{Hom}_A(J/J^2, I)$ は全射である.

この主張を仮定すると, $\delta^*(\theta) = \bar{h}$ を満たす $\theta \in \text{Der}_k(P, I) \subset \text{Hom}_k(P, B')$ が存在する. $x \in J$ とすると次のよう.

$$\delta^*(\theta)(x \bmod J^2) = \bar{h}(x \bmod J^2) = h(x).$$

一方, 上で述べた $\delta^*(\theta)$ の計算から, $\delta^*(\theta)(x \bmod J^2) = \theta(x)$. よって $x \in J$ について $h(x) = \theta(x)$ が成立する. すなわち $h' = h - \theta$ と置くと $h'(J) = 0$. なので $h' : P \rightarrow B'$ から $g : A \rightarrow B'$ が誘導される.

$$\begin{aligned} g : A &\rightarrow B' \\ x \bmod J &\mapsto h(x) - \theta(x) \end{aligned}$$

これが求めていた写像である. 実際, $x \in P$ について,

$$\pi \circ g(x \bmod J) = \pi(h(x) - \theta(x)) = f(x \bmod J) - \pi(\theta(x)) = f(x \bmod J).$$

$\text{im } \theta \subseteq I = \ker \pi$ に注意.

(証明). 完全列

$$0 \longrightarrow J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{P/k} \otimes_k A \longrightarrow \Omega_{A/k} \longrightarrow 0. \quad (*)$$

に現れる加群 $\Omega_{A/k}$ に対応する sheaf of modules on X は, Thm8.17 より locally free である. そのため $\Omega_{A/k} :: \text{projective } A\text{-module}$ (by Eisenbud, Ex4.11b). このことから, 完全列 (*) が split することがわ

かる。

$$\begin{array}{ccc} & \Omega_{A/k} & \\ \swarrow & \downarrow \text{id} & \\ \Omega_{P/k} \otimes_k A & \twoheadrightarrow & \Omega_{A/k} \end{array}$$

δ の restruct を $r : \Omega_{P/k} \otimes_k A \rightarrow J/J^2$ とおく。すると任意の $\phi \in \text{Hom}_A(J/J^2, I)$ に対して、

$$((-) \circ \delta)(\phi \circ r) = (\phi \circ r) \circ \delta = \phi \circ \text{id}_{J/J^2} = \phi.$$

すなわち、 $(-) \circ \delta (= \text{Hom}_A(\delta, I))$ は全射である。よってこれに二つの同型を合成した δ^* も全射。 ■

Notes

証明した図式で Spec をとると、次のように成る。

$$\begin{array}{ccc} & Y' & \\ \exists! g \swarrow & \uparrow & \\ X & \xleftarrow{\vee f} & Y \end{array}$$

$Y \rightarrow Y'$ が closed immersion であるとき、 $Y \subseteq Y'$ を infinitesimal thickening of Y と呼ぶ。Hartshorne, “Deformation Theory”を参照せよ。

Ex8.7 Classifying Infinitesimal Extension: One Case.

■Infinitesimal Extension. $X ::$ scheme of finite type $/k$, $\mathcal{F} ::$ coherent sheaf on X とする。この時、次の条件を満たす sheaf of ideal \mathcal{I} をもつ $X' ::$ scheme $/k$ の分類を考える：

1. $\mathcal{I}^2 = 0$,
2. $(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,
3. $\mathcal{I} \cong \mathcal{F}$ as \mathcal{O}_X -module.

X', \mathcal{I} の組を infinitesimal extension of X by \mathcal{F} と呼ぶ。

■Trivial One. trivial なものは次のように構成される。すなわち、 $\text{sp } X' = \text{sp } X$ とし、structure sheaf を $\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X * \mathcal{F}$ とする。これは Matsumura, p.191 にある trivial extension とほぼ同じ構成方法である。

■Setting. 次の場合の infinitesimal extension を考える: $X ::$ non-singular affine scheme of finite type $/k$. coherent sheaf $:: \mathcal{F}$ と、infinitesimal extension of X by $\mathcal{F} :: (X', \mathcal{I})$ を任意にとる。

■About Global Sections. $B' = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}), I = \Gamma(X', \mathcal{I}), A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ とする。 $\Gamma(X', -)$ は単射を保つ関手なので包含写像 $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ から $I \hookrightarrow B'$ が得られる。また \mathcal{I}^2 は $U \mapsto (\Gamma(U, \mathcal{I}))^2$ で定まる sheaf だから^{†5}, $I^2 = (\Gamma(X', \mathcal{I}))^2 = 0$ となる。 $B = B'/I = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I})$ とおこう。

^{†5} この presheaf が sheaf であることを示せば良い。問題は gluing axiom であるが、これは $(t|_{U_i})^2 = (t^2)|_{U_i}$ なので成立する。この等式自体は germ を見れば分かる。

■Lifting of $\text{id}: A \rightarrow A$. 同型 $(X', \mathcal{O}_{X'}/I) \cong (X, \mathcal{O}_X)$ から環同型 $u: A \xrightarrow{\cong} B'/I = B$ が得られる. 仮定より $X = \text{Spec } A$ は nonsingular なので, Ex8.6 から, $A \rightarrow A \cong B$ の lifting が存在する. ここで π' は標準的全射 $B' \rightarrow B'/I = B$ と環同型 $u^{-1}: B \xrightarrow{\cong} A$ の合成である.

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \downarrow \\
 I \\
 \downarrow \\
 B' \\
 \downarrow \pi' \\
 A \xrightarrow{\text{id}} A \\
 \downarrow \\
 0
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \nearrow \sigma \\
 \nearrow \iota
 \end{array}$$

よって $\pi': B' \rightarrow B$ は split する. また, I, B', B を A -module とみなすことが出来る. $M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ とすると条件 $\mathcal{I} \cong \mathcal{F}$ as A -module から $I \cong M$ as A -module. 以上をまとめて, 以下を示すことが出来る.

主張 Ex8.7.1

$$B' \cong A * M \text{ as } A\text{-module.}$$

よってこの設定では, infinitesimal extension of X by \mathcal{F} は trivial なものしかない.

(証明). five lemma を用いる. 以下の A -module の可換図式を見よ.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & A * M & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\
 \parallel & & \downarrow v & & \downarrow & \nearrow \sigma & \downarrow u & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\iota} & B' & \xleftarrow[\pi]{s} & B & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

ここで $M \rightarrow A * M, A * M \rightarrow A$ は標準的な入射と射影である (集合としては $A * M = A \oplus M$ であったことに注意せよ). また, u, v は既に述べた同型写像である. $A * M \rightarrow B'$ を $(a, m) \mapsto \iota \circ v(m) + s \circ u(a)$ で定めると, 図式が可換に成ることが分かる. よって five lemma より $A * M \cong B'$. ■

Ex8.8 Plurigenera and Hodge Numbers are Birational Invariants.

X ::projective nonsingular variety/ k とする. 正整数 $n(> 0)$ に対して, n -th plurigenus of X を

$$P_n = \dim_k \Gamma(X, \omega_X^{\otimes n})$$

と定める. また $0 \leq q \leq \dim X$ について Hodge numbers を

$$h^{q,0} = \dim_k \Gamma(X, \Omega_{X/k}^{\wedge q})$$

と定める. plurigenus と Hodge numbers が birational invariant であることを示す.

category of sheaves of modules on X の自己関手 M を, f^* (inverse image functor) と可換であるものとする. M は例えば $\square^{\otimes n}$ や $\square^{\wedge q}$ である. Thm8.19 (geometric genus is birational invarational invariant) の証明を見ると, この証明方法は, $\dim_k \Gamma(X, M\Omega_{X/k})$ が birational invariant であることの証明に使える.