ゼミノート #3
$\mathcal{M}_g$ の構成方針

七条彰紀

2018 年 7 月 3 日

以降は，curve と言えば

smooth complete (abstruct) variety of dimention 1 over $\mathbb{C}$

のことである．[1] II, 6.7 より，以上の意味での curve は projective である．(geometric) genus of curve は通常 g で表す．

1 Moduli spaces we'll be concerned with

以降で考えていく moduli space を簡単に紹介する．

1.1 $\mathcal{M}_g$ :: the coarse moduli space of curves of genus g.

これまで議論してきた．まだ存在は示されていない．trivial automorphism しか持たない curve に対応する $\mathcal{M}_g$ の点全体を $\mathcal{M}_g^0$ と書くことにする．これは $\mathcal{M}_g$ の開集合であることが知られている．

1.2 $\mathcal{M}_{g,n}$ :: the coarse moduli space of pairs of curve of genus g and n distinct points.

$\mathcal{C}_g = \mathcal{M}_{g,1}$ もここで述べる．

corve of genus g :: C と C の n 個の互いに異なる点 :: $p_1, \ldots, p_n$ を合わせた順序組 $(C, p_1, \ldots, p_n)$ の moduli space を $\mathcal{M}_{g,n}$ と呼ぶ．

[2] によれば，圏点をつけた条件（互いに異なる点の順序組）は，$\mathcal{M}_{d,g}$ の compactification を考える上で必要である．また，curve :: C と，互いに異なるとは限らない点の順序無し組の組 $(C, \{p_1, \ldots, p_n\})$ の coarse moduli space を構成することも出来る．

$(C, p_1, \ldots, p_n)$ から n 点 $p_1, \ldots, p_n$ の情報を忘れると，標準的な射 $\mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_g$ が得られる．

$\mathcal{M}_{g,n}$ は $\mathcal{M}_g$ に比べて次元が n 大きく，元の $\mathcal{M}_g$ の情報を得づらいという問題がある．しかし，$\mathcal{M}_{g,n}$ はしばしば自然に現れるので，文脈によっては大きな意味を持つ．

1.3 $\mathcal{P}_{d,g}$ :: the coarse moduli space of pairs of curve of genus g and line bundle of degree d.

$\mathcal{P}_{d,g}$ は，curve of genus g とその上の line bundle of degree d の組 $(C, \mathcal{L})$ から $\mathcal{L}$ の情報を忘れれば，標準的な射 $\phi : \mathcal{P}_{d,g} \to \mathcal{M}_g$ が得られる．

■ 次の同型が存在する．

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{P}_{d,g} & \cong & \mathcal{P}_{d+(2g-2),g}, & & \mathcal{P}_{d,g} & \cong & \mathcal{P}_{-d,g} \\ (C,\mathcal{L}) & \mapsto & (C, L \otimes K_C), & & (C,\mathcal{L}) & \mapsto & (C, L^{-1}) \end{array} .$$

このことと Exercise 2.6 から，互いに同型にならない $\mathcal{P}_{d,g}$ は，各 g に対して丁度 $g-1$ 個ある[†1]．

$$\mathcal{P}_{0,g}, \mathcal{P}_{1,g}, \ldots, \mathcal{P}_{d-1,g}.$$

$\mathcal{P}_{d,g}$ のうち，$\mathcal{P}_{g-1,g}$ は "Theta characteristic" と呼ばれるものを付加構造とした moduli space である．参考文献: Gavril Farkas "Theta characteristics and their moduli" [†2]

2 Constructions of $\mathcal{M}_g$

2.1 Generally Steps of Construction of Moduli Space.

moduli space の構成方法はある程度決まった手順がある．ここではそれを述べる．

まず，対象 X と付随する情報 (extra data) の組たちを，何らかの parameter space :: W の点に対応させる．parameter space は対象と付加情報の組そのもの（同値類でなく）が成す空間である．例えば平面上の原点を通る直線の parameter space は $\mathbb{P}^1$ である．1 つの対象の同型類 $[X]$ に対応する W の点たちが成す集合 $S_{[X]}$ を観察する．この集合 $S_{[X]}$ を何らかの群 G の W への作用に拠る軌道と考えることが出来れば ($S_{[X]} = Gw$ なる $w \in W$ が存在すれば)，求める moduli space は商空間 W/G として実現できる．

まとめると，moduli space を構成する際には以下の 4 つの要素を中心に考えることに成る．

Extra Data	分類対象 (Object) に付随させる情報.
Parameter Space	組 (Object, Extra Data) が成す空間.
Group	Parameter Space に作用し，1 つの Object に対応する点の集合が 1 つの軌道である群.

例 2.1

（[3]）k :: field とし，moduli space of hypersurface of degree d in $\mathbb{P}^n_k$ を構成しよう．H :: hypersurface of degree d in $\mathbb{P}^n_k$ は，次のような形の $k[x_1, \ldots, x_n]$ の斉次 d 次多項式で定まる．

$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha x^\alpha.$$

ただし α は多重添字である．そして多項式はその係数 a で定まる．a は $k^{\oplus N} (N := \binom{n+d}{d})$ の元である．したがって H は $\mathbb{A}^N_k$(Parameter Space) の点 $(a_{(d,0,\ldots,0)}, \ldots, a_{(0,\ldots,0,d)})$ に対応する．

[†1] $\mathbb{Z}$ を $s : d \mapsto d + (2g-2)$ と $t : d \mapsto -d$ の二つの自己同型で生成される群で割る．s が生成する群は $(2g-2)\mathbb{Z}(< \mathbb{Z})$ と同型で，t が生成する群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型．よって $\#(\mathbb{Z}/(2g-2)\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))) = (2g-2)/2 = g-1$.

[†2] https://arxiv.org/abs/1201.2557

しかし，a に正則行列 $g \in GL_{n+1}(k)$ (Group) を作用させた a' も，H と同型な hypersurface に対応する（g の作用のさせ方はここで述べない）．逆に H の同型な hypersurface に対応する $\mathbb{A}^N$ の点の全体は，$GL_{n+1}(k)$ による a の軌道として得られる．よって $\mathbb{A}_k^N / GL_{n+1}(k)$ がもとめる moduli space である．

以下では $\mathcal{M}_g$ :: the coarse moduli space of smooth curves of genus g の構成方法の概略を述べる．分類対象 (Object) に付随させる情報．方法は大きく分けて 3 つある．最初の二つは解析的な方法で，最後のものは完全に代数的である．

2.2 The Teichmüller approach

Extra Data	Normalized set of generators for $\pi_1(C)$, or Homeomorphism which C^{an} to standard compact orientable surface X_0.
Parameter Space	Teichmüller space :: $T_g \subseteq \mathbb{C}^{3g-3}$.
Group	Γ_G :: Group of diffeomorphisms of X_0, modulo isotopy.

この方法で構成された $\mathcal{M}_g$ は analytic variety になる．

この方法の利点は，$\mathcal{M}_g$ の位相を扱いやすいことと，$\mathcal{M}_g$ に自然な計量を入れられることである．

Teichmüller space :: T_g は，open ball であることが知られている．すなわち，contractable space となっている．そこで T_g の代わりに扱いやすい contractable space を考え，その Γ_g による商を考えることで $\mathcal{M}_g$ の cohomology について調べることが出来る．主に Harer がこの方法で成果をあげた．この成果についてはこのセミナーでものちに取り上げる．

$\mathcal{M}_g$ に計量を入れて，それをもちいて projective variety への埋め込みを与える，ということを Wolpert が行った．この埋め込み先の projective variety は Deligne–Mumford compactification と共通の良い性質を多く持っている．なお，計量の入れ方は複数存在する．参考文献は Kefeng Liu, Xiaofeng Sun, Shin-Tung Yau "Geometric Aspects of the Moduli Space of Riemann Surfaces" †3.

2.3 The Hodge theory approach

Extra Data	1. Symplectic basis of $H_1(C, \mathbb{Z})$ :: $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$, 2. Basis of $H^0(C, K_C)$ :: $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$, 3. The intersection pairing.
Parameter Space	$\mathfrak{c}_g \subseteq \mathfrak{h}_g$.
Correspondance	$P = [\int_{b_i} \omega_j]_{i,j} \in \mathfrak{h}_g$
Group	$Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ :: Symplectic group.

ここで $\mathfrak{h}_g$ は次のように定義される．

$$\mathfrak{h}_g = \left\{ \tau \in M_{g \times g}(\mathbb{C}) \mid \tau^T = \tau, \Im(\tau) \text{ :: positive difinite.} \right\}$$

これは Siegel upper-halfspace of dimension g と呼ばれている．$\mathfrak{h}_1$ が通常の upper-half plane と一致することに注意.

†3 https://arxiv.org/abs/math/0411247

$\{a_1, \ldots, a_g\} \subset H_1(C, \mathbb{Z})$ は $[\int_{b_i} \omega_j]_{i,j} = I_g$（単位行列）であるように選ばれる．$b_1, \ldots, b_g$ の選び方によって $P = [\int_{b_i} \omega_j]_{i,j} \in \mathfrak{c}_g$ は変わるが，これは以下の $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ による作用に対応する．

$$Sp_{2g}(\mathbb{Z}) = \left\{\gamma \in GL_{2g}(\mathbb{Z}) \mid \gamma^T \Omega \gamma = \Omega\right\}, \quad \text{where} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{bmatrix}.$$

構成方法から，$\mathcal{M}_g$ は $\mathcal{A}_g = \mathfrak{h}_g / Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ に含まれる．$\mathcal{A}_g$ は coarse moduli space for abelian varieties of dimension g である．

この方法は $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ が Γ_g よりも分かりやすいという点で Teichmüller approach に優っている．しかし $\mathfrak{c}_g$ の方は把握が難しく，「$\mathfrak{c}_g$ はどのようなものか」という問は the Schottky problem と呼ばれている．これについては様々な考察がなされているが，$\mathfrak{c}_g$ の具体的な記述は得られていない．

この方法の別の利点は，compactification of $\mathcal{A}_g$ :: $\tilde{\mathcal{A}}_g$ [†4] が自然に得られるということである．compactification of $\mathcal{M}_g$ :: $\tilde{\mathcal{M}}_g$ は Statake compactification と呼ばれ．$\tilde{\mathcal{A}}_g$ での $\mathcal{M}_g$ の閉包として得られる．

しかし，$\tilde{\mathcal{M}}_g$ はいかなる moduli functor の coarse moduli space でもないため，（以下で述べる例を除いては）$\mathcal{M}_g$ 自体の研究には役立てられない．実際，$\tilde{\mathcal{M}}_g - \mathcal{M}_g$ は種数が g より小さい smooth curve に対応しているため，$\tilde{\mathcal{M}}_g$ 上の family を考えるということは出来ない．種数 g の曲線と種数が g 未満の曲線の両方を fiber にもつ family は，どこかで singular な fiber を持つからである（種数は homotopy/birational 不変量であったことを想起せよ）．

$\tilde{\mathcal{M}}_g$ を用いた議論によって，$\mathcal{M}_g$ が projective でも affine でも無いことが分かる（TODO: ここでの $\mathcal{M}_g$ って scheme ではないでのは？）．

2.4 The geometric invariant theory (G.I.T.) approach

$n \geq 3$ を任意にとって固定する．

Extra Data	(Nothing.)
Parameter Space	$K \subseteq \mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}$ $(N := (2n-1)(g-1)-1)$.
Group	$PGL_{N+1}(\mathbb{C})$.

$\mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}$ は subscheme of degree $2(g-1)n$ and genus g in $\mathbb{P}^N$ の Hilbert scheme である．

この方法の利点は，代数的であることの他に二つある．

1. $\mathcal{M}_g$ が quasiprojective algebraic variety として得られる．
2. compactification of $\mathcal{M}_g$ についての考察が自然に得られる．

2.4.1 Compactification of $\mathcal{M}_g$ and Stable Curve.

compactification of $\mathcal{M}_g$（ここでは $\mathcal{M}_g$ を含む projetive scheme）を得る方法として，K の $\mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}$(=: $\mathcal{H}$) での閉包を取って $PGL_{N+1}(\mathbb{C})$ で割る，ということが思いつく．しかしこれで得られるのは K の compactification でなく，K を含む集合 $\tilde{K}$ の商 $\tilde{K}/PGL_{N+1}(\mathbb{C})$ の compactification である．これらの包含関係は $K \subset \tilde{K} \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{H}}(K)$ となる．

この拡張が必要な理由は，次のように説明される: 次のような $t \in \mathbb{A}^1 - \{0\}$ でパラメトライズされる family

[†4] $\mathcal{A}_g$ を analytic open subset として含む compact analytic variety の事．

of smooth curves を考える．has only nodes as singularities and has only finitely many automor- phisms.

$$C: y^2z = x^3 - t^2axz - t^3bz^3 \quad \text{where} \quad a, b, t \in \mathbb{C}, t \neq 0.$$

$t \neq 0$ ならば $C_t \cong C_1$ となる．しかし C_0 は cuspidal curve となる．$C \to \mathbb{A}^1 - \{0\}$ に対応する j-invariant map を $\chi : \mathbb{A}^1 - \{0\} \to \mathbb{A}^1$ とすると，$t \to 0$ で χ の値は $\mathbb{A}^1_j$ の外側の点に収束してしまう．なので $\mathcal{M}_1 = \mathbb{A}^1_j$ をコンパクト化するには，C_0 に対応する点を $\mathcal{M}_1$ に加えなければならない．なお，この曲線族は a, b の値を変えることで任意の楕円曲線を含むものに成る．

では $\tilde{K}$ に含まれる曲線は何だろうか，ということになるが，これは (Deligne-Mumford) stable curve と呼ばれるものである．次の session で詳しく述べる．

参考文献

[1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[2] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[3] 向井茂. モジュライ理論〈1〉. 岩波書店, 12 2008.