ゼミノート #4
Deformation Theory

七条彰紀

2018 年 8 月 1 日

1 Automorphism Group of Stable Curve

[5] 3.A, [7] §1 を参照する．

C, D :: stable curves of genus g over a scheme S の間の isomorphism group の scheme としての構造を与える．この scheme を $\mathrm{Isom}(C, D)$ と書く．そして $\mathrm{Aut}(C) = \mathrm{Isom}(C, C)$ と定義し，これの scheme としての特徴を調べる．

$\mathrm{Isom}(C, D)$ の特徴付けをするため，次の関手を考える．

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}som_S(C, D): & (\text{Scheme over } \mathbb{C}) & \to & (\text{Set}) \\ & S' & \mapsto & \{\, C \times_{\mathbb{C}} S' \to D \times_{\mathbb{C}} S' :: S'\text{-isomorphism}\} \end{array}$$

$\iota \in \mathcal{I}som(C, D)(S')$ から得られる ι^* は $\omega^\circ_{C\times S'/S'} = \iota^*(\omega^\circ_{D\times S'/S'})$ を満たす．また $\otimes$ と交換する（すなわち Picard 群の間の準同型である．[3] Ex II.6.8）．このことから $\mathrm{Isom}(C, D)$ が適当な r をとると $PGL(r + 1)$ の部分群として書けることが分かる．

もう少し詳しく $\mathrm{Isom}(C, D)$ を書く．$n \geq 3$ を整数とする．次のように r, d をとる．

$$r + 1 = h^0((\omega^\circ_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n}) = (2n - 1)(g - 1), \qquad d = \deg(\omega^\circ_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n} = 2n(g - 1).$$

すると [3] II.7 より，C, D は $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ の次数 d, arithmetic genus g の closed curve とみなせる（$\mathbb{P}^r$ に埋め込める）．なので Hildert scheme :: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{d,g,r}$ の点として扱うことが出来る．ここで次のように射を定める．

$$\begin{array}{rccc} \mu: & PGL(r + 1) & \to & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ & \alpha & \mapsto & (\alpha \cdot [C], [D]) \end{array}$$

すると，$\mathcal{I}som(C, D)$ は $\mu^{-1}(\Delta)$ によって表現される[†1]．これを group scheme over $\mathbb{C}$ :: $\mathrm{Isom}(C, D)$ とする．

scheme over $\mathbb{C}$ :: X について少々一般の理論を述べる．$\mathbb{I} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ とおく (ref. [5] 1)．[3] Ex II.2.8 より，$t \in \underline{X}(\mathbb{I})$ は X の $\mathbb{C}$-rational point :: x と $T_x(X) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathcal{T}_x$ の元に対応する．ここで $\mathcal{T}$ は tangent sheaf :: $\mathcal{T} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ のことである．[5] でいう regular vector field とは $\mathcal{T}$ の section のこと（と思われる）．

[†1] Δ は $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ の diagonal set. $\mu^{-1}(\Delta)$ は

$$\Delta \cap \mathrm{im}\,\mu = \{(\alpha \cdot [C], [D]) \mid \alpha \cdot [C] = [D]\}$$

の $PGL(r + 1)$ への逆像なので，この点と C, D の間の同型と対応することが分かるだろう．

定理 1.1
C :: stable curve of genus $g \geq 2$ について,

$$\mathrm{Ext}^0(\Omega_C, \mathcal{O}_C) = H^0(C, \mathcal{T}_C) = \mathcal{T}_C(C) = 0.$$

(証明). [7] §1.
$\pi : \tilde{C} \to C$ を normalization of C とする.また $\tilde{C}$ の connected component の個数を ν,それぞれの genus を g_i $(i = 1, \dots, \nu)$ とする.

今,$D \in \mathcal{T}_C(C)$ は pullback :: $\pi^* : \mathcal{T}_{\tilde{C}} \to \pi^*\mathcal{T}_C$ によって[†2].$\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ C の double point に π で対応する点 (point laying over double point, plodp) で 0 になるような regular vector field :: $\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ に対応する (TODO).このような $\tilde{D}$ は 0 しかないことを確かめれば,$\mathcal{T}_C(C) = 0$ がわかる.

主張 1.2
1 点 $P \in \tilde{C}$ で $\tilde{D}_P = 0$ ならば,$\tilde{D} = 0$ である.

(証明).C :: reduced connected scheme に注意する.$P \in C$ において $\tilde{D} \in \mathcal{T}_C(C)$ が $\tilde{D}_P = 0$ を満たすとしよう.C の irreducible affine open cover :: $\mathfrak{U}$ をとり,$P \in U$ なる $U = \operatorname{Spec} A \in \mathfrak{U}$ をとって固定する.すると C :: reduced より A :: integral domain. $\tilde{D}|_U \in \mathcal{T}_C(U)$ が $P \in U$ で 0 になるのだから,次が成立する.

$$^{\exists}u \in A - \mathfrak{p}_P, \quad u \cdot (\tilde{D}|_U) = 0.$$

A :: integral より,これは $\tilde{D}|_U = 0$ を意味する.U と交わる irreducible affine open subset of C :: $V \in \mathfrak{U}$ についても,$\tilde{D}|_{U \cap V} = 0$ なので $\tilde{D}|_V = 0$.C :: connected なので,このように V を取り続けることで,全ての $V \in \mathfrak{U}$ について $\tilde{D}|_V = 0$ であることがわかる.sheaf の Identity Axiom から,C 全体で $t = 0$. ∎

したがって我々は $\tilde{C}$ の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつこと示せば良い.

$\mathcal{T}_{\tilde{C}} = \mathcal{H}om(\Omega_{\tilde{C}/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$ なので,$\mathcal{T}_{\tilde{C}}$ に対応する divisor は $K_{\tilde{C}}$.$\deg K_{\tilde{C}} = 2\tilde{g} - 2$ なので,$\tilde{g} > 1$ ならば $\deg(-K_{\tilde{C}}) < 0$.したがって [3] Lemma IV.1.2 から $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\tilde{C}, \mathcal{T}_{\tilde{C}}) = 0$.すなわち $\mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C}) = 0$.なので以下では $\tilde{g}_i = 0, 1$ とする.

$\tilde{g}_i = 0, 1$ であるとき,$\tilde{C}$ の各 connected component は必ず plodp をもつ.実際,genus formula で $\delta = 0$ とすると

$$g = \sum_i (\tilde{g}_i - 1) + 1 \geq 2$$

したがって $\sum_i (\tilde{g}_i - 1) > 0$ ということになる.しかし仮定から $\tilde{g}_i - 1 \leq 0$ なので,$\delta > 0$.すなわち C は必ず node をもつ.$\tilde{C}$ の各 component は smooth であることと C が connected であることも踏まえて考えると,$\tilde{C}$ の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつことが分かる.(この辺りは [7] Lemma1.4 で詳しく述べられている). ∎

別証明として [4] Prop27.4 がある.

命題 1.3
任意の閉点 $P \in \mathrm{Aut}(C)$ について,$\mathcal{O}_{\mathrm{Aut}(C),P} \cong \mathbb{C}$.特に $\mathrm{Aut}(C)$ :: reduced scheme.

[†2] R :: ring, A, B :: ring over R とする.一般に,k-homomorphism :: $\phi : A \to B$ があるとき,$D \in \mathrm{Der}_R(B)$ は $\phi^* : D \mapsto D \circ \phi$ によって $\mathrm{Der}_R(A)$ へ写すことが出来る.

(証明). $X = \mathrm{Aut}(C)$ は group scheme over $\mathbb{C}$ であるから，X のある点での local な性質は transition を用いて単位元 e での性質と言い換えられる．なので $A := \mathcal{O}_{X,e}$ のみを考える．X :: group scheme over $\mathbb{C}$ より e :: $\mathbb{C}$-rational point なので，A が体ならばそれは $\mathbb{C}(= A/\mathfrak{m}_A)$ と同型である．よって我々は A が体であることのみ示せば良い．

上記の定理 (1.1) から，$\mathcal{T}_C(C) = 0$．これは $C \times \mathbb{I}$ の $\mathbb{I}$-automorphism は自明なものしか無いことを意味する（後述）．さらに $\mathrm{Aut}(C)$ の定義から，これは射 $\mathbb{I} \to \mathrm{Aut}(C)$ としては自明なものしか存在しないことを意味する．さらに [3] Ex II.2.8 より，これは $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 = 0$ を意味する．中山の補題から $\mathfrak{m}_A = 0$．よって A は体である． ∎

2 Definitions of Deformations and (Uni-)Versal Deformation.

定義 2.1 ($\mathbb{C}$-pointed scheme [8] §1.2.1)
scheme :: Y と $\mathbb{C}$-rational point :: $y_0 \in Y$ の組を $\mathbb{C}$-pointed scheme を呼び，(Y, y_0) と書く．

morphism of $\mathbb{C}$-pointed schemes :: $(S, s_0) \to (T, t_0)$ とは，moephism of schemes :: $\phi : S \to T$ であって，$\phi(s_0) = t_0$ を満たすもののこと．

定義 2.2 (Deformation of Scheme [8] §1.2.1, [5] §3.B)　(i) deformation of X とは，以下のような pullback diagram のことである．ψ から $X \cong \mathcal{X} \times_Y \mathbb{C}$ が誘導される．

$$\xi : \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "\text{flat, surj.}"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "s"'] & Y \end{tikzcd}$$

A' :: local artinian ring with $A'/\mathrm{Nil}(A') \cong \mathbb{C}$ を用いて $Y = \mathrm{Spec}\, A'$ と書ける場合，これは abstruct lifting of X to A' とも呼ばれる ([9] 4.2).

(ii) 上の deformation of X :: ξ について，S のことを ξ の parameter space, $\mathcal{X}$ を ξ の total space と呼ぶ.

(iii) 任意の scheme :: X と $\mathbb{C}$-pointed scheme :: (S, s_0) に対して，S が parameter space であるような deformation of X が存在する:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X \times_{\mathbb{C}} S \arrow[d] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

これを product family または trivial family と呼ぶ.

(iv) morphism of $\mathbb{C}$-pointed schemes :: $(T, t_0) \to (S, s_0)$ は，parameter space が S である deformation :: ξ から base change によって次の deformation を誘導する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \times_S T \arrow[d] \\ \mathbb{C} \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

これを元の deformation の $f : (T, t_0) \to (S, s_0)$ による pullback と呼び，$f^*\xi$ と書く（このノート独自？）.

(v) isomorphism of deformations of X :: $\xi \to \eta$ とは，以下の可換図式が成立する同型 $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}, S \cong T$ のこと．

$$\begin{tikzcd}
& & \mathcal{Y} \arrow[dd] \\
X \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[dd] & \mathcal{X} \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[dd] & \\
& & T \\
\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[urr] & S \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

isomorphism of parameter spaces :: $(S, s_0) \to (T, t_0)$ と deformation から誘導される deformation は元の deformation と同型である．

定義 2.3 (Universal Deformation, [5] 3.B, [4] §15)
universal deformation for X とは，次の性質を満たす deformation of X :: ξ (parameter space :: S): 任意の deformation of X ::η (parameter space :: T) にたいし，morphism of pointed schemes :: $f : T \to S$ が一意に存在し，$f^*\xi \cong \eta$ となる．

Universal Deformation は，次の関手の表現対象であると言える．

$$\mathbf{Sch}/\mathbb{C} \ni S \mapsto \{\text{Deformation of } X\}.$$

したがって全ての Deformation は universal deformation から得られる．しかし，当然ながらというべきか，universal deformation は殆どの場合で存在しない．そこで universal deformation への要求を

- $S' \to S$ を locally about S' にとるものとし，
- $U \to S$ の一意性は要求しない

と弱める．一意 (uni-) ではないので，これを versal deformation と呼ぶ．

定義 2.4 (Versal Deformation)
（versal deformation の定式化が見つからないので保留．見つけた限りでは versal deformation for scheme は次で意義する formal derormation でのみ定義されている．[1] では versal deformation for (complex) manifold が定義されているのみである．）

定義 2.5 (First Order Deformation)
$D = \mathbb{C}[x]/(x^2), \epsilon = x \bmod (x^2)$ とする．$\mathbb{I} = \operatorname{Spec} D$ の唯一の閉点を 0 で表す．$(\mathbb{I}, 0)$ 上の deformation を，first order deformation (or infinitesimal deformation) と呼ぶ．

注意 2.6
X :: stable curve of genus g とする．first order deformation :: $\mathcal{X} \to \mathbb{I}$ は，moduli space の定義から，$0 \in \mathbb{I}$ を $[X] = [\mathcal{X}_0] \in \overline{\mathcal{M}}_g$ へ写す $\mathbb{I} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ に対応する．そしてこの射は，既に知られている通り Zariski tangent space at $[X]$ :: $T_{[X]}$ の元に対応する．よって X の first order deformation から $T_{[X]}$ の元への対応がある．この対応は一対一であろうか？

補題 2.7

次の first order deformation of X を考える．

$$\begin{CD} X @>{\psi}>> \mathcal{X} \\ @VVV @VVV \\ \mathbb{C} @>>{0}> \mathbb{I} \end{CD}$$

この時，ψ は closed imm. かつ同相写像である．

(証明)．まず $\mathbb{C} \to \mathbb{I}$ が closed imm. であり，closed imm. が stable under base extension であることから，ψ も closed imm. また closed imm. ならば finite である ([3] Ex II.5.5b)．ψ が homeomorphism であることは local on codomain(target) なもの[†3]なので，$\mathcal{X}$ :: affine と仮定して証明すれば十分．

以上から，$\mathcal{X} = \operatorname{Spec} A, X = \operatorname{Spec} R$, R :: A-algebra, finitely generated as module と仮定して良い．また，ψ :: closed imm. であるから，$A \cong R/I$ なる I :: ideal of R が存在する．また仮定から $A \otimes_D \mathbb{C} \cong R$ かつ A :: flat D-module．そこで以下の D-module 完全列に $\otimes_D R$ とする．

$$0 \longrightarrow \epsilon D \longrightarrow D \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

すると次のように成る．

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & (\epsilon D) \otimes_D R & \longrightarrow & D \otimes_D R & \longrightarrow & \mathbb{C} \otimes_D R & \longrightarrow & 0 \\ & & \wr\| & & \wr\| & & \wr\| & & \\ 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

よって $(\epsilon D) \otimes_D R$ 同様 I は nilpotent ideal (i.e.$I^2 = 0$)．

$X = \operatorname{Spec} R$ の閉集合として

$$\mathcal{X} = \operatorname{Spec} A = V(I) = V(I^2) = V((0)) = X$$

なので $\operatorname{im} \psi = \mathcal{X}$．$\psi$ :: closed imm. なので，これで ψ :: homeo が証明できた． ∎

定義 2.8 (Restriction of First Order Deformation)
上の命題にある first order deformation of X について，U :: open subset of X をとる．locally ringed space :: $(\psi(U), \mathcal{O}_{\mathcal{X}}|_{\psi(U)})$ を $\mathcal{X}|_U$ と書く．

3 First Order Deformation of a Nonsingular Variety.

補題 3.1
A :: ring, $X = \operatorname{Spec} A$ とする．この時，first order deformation of X :: $\mathcal{X}$ も affine scheme である．

(証明)．[3] Ex II.3.1 への回答でもある．

$\mathcal{I} = \ker(X \hookrightarrow \mathcal{X})$ とし，$\mathcal{F}$ :: quasi-coherent sheaf on X とする．今，補題 (2.7) の証明から $\mathcal{I}^2 = 0$ が得られる．また，明らかに $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_X$．したがって次の SES(short exact sequence) が存在する．

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^d\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

[†3] local on codomain に考えれば，特に全単射性が示せる．

次の LES が誘導される．

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d}\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d}\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X)$$

$$\longrightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d}\mathcal{F}) \longrightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d}\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X)$$

$$\cdots$$

sheaf cohomology は abelian group の cohomology として構成されており，module structure とは無関係に定まっている．そして X と $\mathcal{X}$ は homeo．したがって

$$H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) = H^i(X, \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) = 0.$$

最後の等号は $\mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X$ :: quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-module と [3] Thm III.3.7 から得られる．

$d = 1(\implies \mathcal{I}^{d+1} = 0)$ からはじめて d についての帰納法により

$$H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F}) = H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) = 0 \ (i > 0).$$

よって LES から $H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F}) = 0 (i > 0)$．[3] Thm III.3.7 から $\mathcal{X}$ :: affine. ∎

補題 3.2 ([8] Thm1.2.4)
X :: affine, nonsingular, finite type scheme over a field k とする．この時，X の first order deformation は自明な deformation :: $X \times_k \operatorname{Spec} D$ しか存在しない．

(証明)．上の補題から，deformation of $X = \operatorname{Spec} A$ は affine．そこで $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} B$ とする．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads] & A \\ D \arrow[u, "f"] \arrow[r, two heads] \arrow[ur, phantom, "\text{p.b.}"] & k \arrow[u] \end{tikzcd}$$

f :: flat と，f の唯一の fiber :: $X = \operatorname{Spec} A$ が smooth であることから，[3] Thm III.10.2 より f :: smooth.

次の commutative diagram を考える．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, two heads] & A \\ D \arrow[u, "f"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & A \otimes_k D \arrow[u, "\bmod \epsilon A"'] \end{tikzcd}$$

f :: (ϵD-)smooth over D なので，図式を可換にする射 $\phi : B \to A \otimes D$ が存在する．以下の主張から ϕ :: iso なので，任意の deformation of X :: $\operatorname{Spec} B$ は自明な deformation :: $\operatorname{Spec} A \otimes D = X \times \mathbb{I}$ と同型である． ∎

主張 3.3 ([8] Lemma A.4)
R :: ring, I :: ideal of R, F, G :: R-module, G :: flat, $f : F \to G$ :: homomorphism of R-modules.

I :: nilponent とし，誘導される homomorphism $f \otimes_R \mathrm{id}_{R/I} : F/IF \to G/IF$ が同型であるとする．この時，f :: iso.

(証明). $C = \operatorname{coker} f$ とする．完全列 $F \to G \to C \to 0$ に $\otimes_R (R/I)$ を作用させる．

$$F/IF \longrightarrow G/IG \longrightarrow C/IC \longrightarrow 0$$

仮定から $C/IC = 0$．今 I :: nilponent なので $I \subset \mathrm{Jac}(R)$．したがって中山の補題から $C = 0$．すなわち f :: surj.

$K = \ker f$ とする．完全列 $0 \to K \to F \to G \to 0$ に $\otimes_R (R/I)$ を作用させる．

$$0 \longrightarrow K/IK \longrightarrow F/IF \longrightarrow G/IG \longrightarrow 0$$

今，G :: flat から $\mathrm{Tor}_R(G, R/I) = 0$．なのでこの SES から誘導される $\mathrm{Tor}_R(-, R/I)$ の LES を考えると，$K \otimes (R/I) \cong K/IK = 0$ が得られる．再び中山の補題から $K = 0$．よって f :: inj. ∎

補題 3.4 ([8] Lemma1.2.6)
任意の k-algebra :: A について，次の群同型がある．

$$\left\{\begin{matrix} D\text{-automorphism of } A \otimes_k D \\ \text{inducing identity on } A \end{matrix}\right\} \cong \mathrm{Der}_k(A).$$

D-automorphism of $A \otimes_k D$ のことを infinitesimal automorphism と呼ぶ.

(証明). 仮定から automorphism of $A \otimes_k D = A[\epsilon]$ は D-module homomorphism で，$\mathrm{mod}\epsilon A \otimes (\epsilon D)$ を合成すると identity になる．したがって次のように書ける．

$$\theta(x) = x + \epsilon D(x).$$

θ が積を保つことと D-module homo. であることから，$D : A \otimes D \to A$ :: D-derivation.

$\Omega_{A \otimes_k D/D} \cong \Omega_{A/k} \otimes_k D$ に注意すると，θ と $\mathrm{Der}_k(A)$ の対応が分かる．この対応が群準同型であることは明らか. ∎

定理 3.5 ([8] Prop1.2.9)
X :: separated nonsingular scheme of finite type over k とする．特に，X :: nonsingular (abstruct) variety over K であればよい．この時，first oder deformation of X の同値類は $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元と一対一に対応する．

(証明). $\mathcal{X}$ :: first oder deformation of X を任意の取る．そして affine open cover of X:: $\{U_i\}_{i \in I}$ を任意に取る．この cover についての Čech cohomology を考えていく．

今，$\mathcal{X}|_{U_i}$ :: first order deformation of U_i．定理 (3.2) より，$\theta_i : U_i \times_k \mathbb{I} \to \mathcal{X}|_{U_i}$ が得られる．これを用いて，各 $i, j \in I$ について

$$\theta_{ij} = \theta_i^{-1} \circ \theta_j : U_{ij} \times \mathbb{I} \to U_{ij} \times \mathbb{I}$$

が得られる．ただし $U_{ij} = U_i \cap U_j$（以降の U_{ijk} なども同様）．補題 (3.4) から，これは $d_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{T}_X)$ に対応する．

θ_{ij} は貼り合わせることが出来るのだから，Gluing Lemma を参照すれば $\theta_{ij}\theta_{jk}\theta_{ik}^{-1} = \mathrm{id}_{U_{ijk} \times \mathbb{I}}$ が得られる．補題 (3.4) の準同型で写せば，

$$d_{ij} + d_{jk} - d_{ik} = 0$$

すなわち Čeck 1-cocycle condition が得られる．

first order deformation of X が 2 つあり，その間に同型があるとしよう: $\Psi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$．$\mathcal{X}'$ について θ'_{ij}, d'_{ij} を $\mathcal{X}$ 同様に定める．次の infiniterimal automorphism を考える．

$$\alpha_i = \theta'_i \circ \Psi|_{U_i} \circ \theta_i : U_i \times \mathbb{I} \to \mathcal{X}|_{U_i} \to \mathcal{X}'|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{I}.$$

α_i に $a_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{T}_X)$ が対応しているとする．計算すると $(\alpha_i|_{U_{ij}})^{-1}\theta'_{ij}(\alpha_j|_{U_{ij}}) = \theta_{ij}$ が得られる．すなわち，

$$d'_{ij} - d_{ij} = a_i - a_j.$$

よって $\{d_{ij}\}$ の同値類と $\{d'_{ij}\}$ の同値類は $\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X)$ の中で等しい．

以上より，$\mathcal{X}$ から $\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元への対応は単射的である．逆に $\{d_{ij}\}$ から $\{\theta_{ij}\}$ の対応，θ_{ij} による $U_i \times \mathbb{I}$ の貼り合わせへと手順を遡れば，$\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元と first order deformation of X への対応が全射だと分かる．

最後に，[3] Thm III.4.5 から $\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X) \cong H^1(X, \mathcal{T}_X)$． ∎

4 Extension of Sheaves

4.1 Definitions

定義 4.1 (Extension of Sheaves) (i) $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: $\mathcal{O}_X$-module on ringed space X とする．extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ とは，次のような完全列のこと．

$$(\mathcal{E}, \iota, \kappa) :\ 0 \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{\kappa} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

(ii) $(\mathcal{E}, \iota, \kappa) \to (\mathcal{E}', \iota', \kappa')$ :: homomorphism of extensions of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ とは，次の図式を可換にする homomorphism of sheaves :: $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ のこと．

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{E} \arrow[dd, "\phi"] \arrow[dr, "\kappa"] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & & \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\ & & \mathcal{E}' \arrow[ur, "\kappa'"'] & & \end{tikzcd}$$

(iii) $f : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ と $(\mathcal{E}, \iota, \kappa)$ :: extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ について，$\mathcal{E}f^*$ :: pullback of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ を次で定める．これが extension of $\mathcal{F}'$ by $\mathcal{G}$ になっていることは簡単に確かめられる．まず，sheaf としては $\mathcal{E}f^*$ は

$$\mathcal{E}f^* = \{\langle U, e \oplus x' \rangle \in \mathcal{E} \oplus \mathcal{F}' \mid \kappa_U(e) = f_U(x')\}.$$

$\iota_{\mathcal{E}f^*}, \kappa_{\mathcal{E}f^*}$ は次で定める．

$$\begin{aligned} \iota_{\mathcal{E}f^*} &: \mathcal{G} \to \mathcal{E}f^*; \qquad \langle U, y \rangle \mapsto \langle U, \iota(y) \oplus 0 \rangle \\ \kappa_{\mathcal{E}f^*} &: \mathcal{E}f^* \to \mathcal{F}'; \qquad \langle U, e \oplus x' \rangle \mapsto \langle U, y' \rangle \end{aligned}$$

定義を終えた後に，$\mathcal{E}f^*$ が実際に pullback of f and κ であることを示す．

(iv) $g : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ と $(\mathcal{E}, \iota, \kappa)$ :: extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ について，$g_*\mathcal{E}$ :: pushout of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ を次で定める．これが extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}'$ になっていることは簡単に確かめられる．まず，sheaf としては $g_*\mathcal{E}$ は次の準同型の cokernel である．

$$\mathcal{G} \to \mathcal{G}' \oplus \mathcal{E}; \qquad \langle U, y \rangle \mapsto \langle U, g_U(y) \oplus (-\iota_U(y)) \rangle.$$

$\iota_{g_*\mathcal{E}}, \kappa_{g_*\mathcal{E}}$ は次で定める．

$$\begin{aligned}\iota_{g_*\mathcal{E}} :& \mathcal{G}' \to g_*\mathcal{E}; \qquad \langle U, y'\rangle \mapsto \langle U, [y', 0]\rangle \\ \kappa_{g_*\mathcal{E}} :& g_*\mathcal{E} \to \mathcal{F}; \qquad \langle U, [y', e]\rangle \mapsto \kappa_U(e)\end{aligned}$$

定義を終えた後に，$g_*\mathcal{E}$ が実際に pushout of g and ι であることを示す．

extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ が成す集合を $E(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ と書く．

定理 4.2
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: $\mathcal{O}_X$-modules on ringed scheme :: X とする．この時，extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ :: $\mathcal{E} : 0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to 0$ から誘導される doundary map

$$d_{\mathcal{E}} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{G}') \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{G}')$$

は，$g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{G}')$ を $g_*\mathcal{E}$ の同型類に写す．特に，

$$\Phi : E(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \ni \mathcal{E} \mapsto d_{\mathcal{E}}(\mathrm{id}_{\mathcal{G}}) \in \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$$

は全単射である．

「特に」以降は特に有名で，例えば [3] ExIII.6.1 に証明の方針が述べられているし，加群の場合の類似の結果としては [10] pp.259-264 に詳しい証明がある．

定義 4.3(1) split extesion of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ を $0_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ あるいは単に 0 と書く．

$$0_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : \ 0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

(2) $(\mathcal{E}, \iota, \kappa)$ :: extension of sheaves について，$-\mathcal{E} := (\mathcal{E}, -\iota, \kappa)$ と定める．
(3) (The Baer sum) $(\mathcal{E}, \iota, \kappa), (\mathcal{E}', \iota', \kappa')$ :: extensions of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ に対し，$\mathcal{E} + \mathcal{E}'$ を以下のように定める．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \arrow[r, "\iota \oplus \iota'"] \arrow[d, "\nabla"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}' \arrow[r, "\kappa \oplus \kappa'"] \arrow[d] & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{M} \arrow[r] & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{E} + \mathcal{E}' \arrow[r] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"'] & 0
\end{tikzcd}$$

ただし $\Delta : a \mapsto (a, a), \nabla : (a, b) \mapsto a + b$.

4.2 Propositions.

補題 4.4
以下の図式が可換であり，各行は完全であるとする．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{P} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"'] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

この時，$\mathcal{P}$ は pullback of f and κ.

(証明). 以下，$x \in \mathcal{X}$ と書いたら，x は適当な開集合 U 上の $\mathcal{X}$ の section :: $x \in \mathcal{X}(U)$ を意味する．各射に次のように名前を付ける．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{X} \arrow[ddr, bend right=10, "\beta"'] \arrow[drr, bend left, "\alpha"] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\bar{\iota}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{P} \arrow[r, "\bar{\kappa}"] \arrow[d, "\bar{f}"] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"'] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

■$\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{P}$ **の構成．**　任意の $x \in \mathcal{X}$ をとり，これに対して $y \in \mathcal{P}$ を以下のように定める．

1. $x' \in \mathcal{P}$ を $\bar{\kappa}(x') = \alpha(x)$ なるものとする．
   $\bar{\kappa}$ :: surj ゆえ x' が存在することに注意.
2. $t' \in \mathcal{G}$ を $\iota(t') = \beta(x) - \bar{f}(x')$ なるものとする．
   $\beta(x) - \bar{f}(x') \in \ker\kappa = \operatorname{im}\iota$ ゆえ t' が存在することに注意.
3. $p = x' + \bar{\iota}(t')$ とする．

こうして得られる写像 $x \mapsto p$ が $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{P}$ を与える．
　可換性を確認しよう．

$$\begin{aligned}
&\bar{\kappa}(\psi(x)) = \bar{\kappa}(x') + \bar{\kappa}(\bar{\iota}(t')) = \bar{\kappa}(x') = \alpha(x), \\
&\bar{f}(\psi(x)) = \bar{f}(x') + \bar{f}(\bar{\iota}(t')) = \bar{f}(x') + \iota(t') = \bar{f}(x') + \beta(x) - \bar{f}(x') = \beta(x).
\end{aligned}$$

■ϕ :: **well-defined.**　$x = 0$ の時 $\phi(x) = 0$ であることを見れば十分．$x = 0$ ならば $\bar{\kappa}(x') = 0$ すなわち $x' \in \ker\bar{\kappa} = \operatorname{im}\bar{\iota}$．なので，$\bar{\iota}(h) = x'$ となる $h \in \mathcal{G}$ がとれる．

$$\iota(t') = \beta(0) - \bar{f}(x') = -\bar{f}\bar{\iota}(h) = \iota(-h).$$

ι :: inj. より $t' = -h$. したがって

$$p = x' + \bar{\iota}(t') = \bar{\iota}(h) + \bar{\iota}(-h) = 0.$$

■$\mathcal{X} \to \mathcal{P}$ **の一意性．**　最後に $\phi, \phi' : \mathcal{Z} \to \mathcal{E}f^*$ が同じ可換性を持つと仮定して $\psi = \phi - \phi' = 0$ を示す．仮定から $\bar{\kappa}\psi = 0, \bar{f}\psi = 0$ が成立する．まず前者から

$$\operatorname{im}\psi \subseteq \ker\bar{\kappa} = \operatorname{im}\bar{\iota}$$

なので任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して $g \in \mathcal{G}$ が存在し，$\bar{\iota}(g) = \psi(x)$ となる．図式の可換性から次が成立する．

$$\iota(g) = \bar{f}\bar{\iota}(g) = \bar{f}\psi(x) = 0.$$

行の完全性から ι は単射なので $g = 0$．任意の x に対して $\psi(x) = \bar{\iota}(g) = \bar{\iota}(0) = 0$．すなわち $\psi = 0$.　■

補題 4.5
以下の図式が可換であり，各行は完全であるとする．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}' \arrow[r] & \mathcal{P} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

この時，$\mathcal{P}$ は pushout of g and ι.

(証明)．各射に次のように名前を付ける．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\bar{g}"] \arrow[ddr, bend left, "\alpha"] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}' \arrow[r, "\bar{\iota}"'] \arrow[dr, bend right, "\beta"'] & \mathcal{P} \arrow[r, "\bar{\kappa}"'] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\
& & & \mathcal{X} &
\end{tikzcd}$$

■$\mathcal{P} = \bar{g}(\mathcal{E}) + \bar{\iota}(\mathcal{G}')$.　$p \in \mathcal{P}$ を任意に取る．

1. $\kappa(e) = \bar{\kappa}(p)$ となる $e \in \mathcal{E}$ をとる．κ :: surj. ゆえ e が存在することに注意．
2. $\bar{\iota}(g') = p - \bar{g}(e)$ となる $g' \in \mathcal{G}'$ をとる．$p - \bar{g}(e) \in \ker \bar{\kappa} = \operatorname{im} \bar{\iota}$ ゆえ g' が存在することに注意．

すると $p = \bar{g}(e) + \bar{\iota}(g')$ となる．実際，

$$\bar{g}(e) + \bar{\iota}(g') = \bar{g}(e) + (p - \bar{g}(e)) = p.$$

■**$\phi : \mathcal{P} \to \mathcal{X}$ の構成．**　$p \in \mathcal{P}$ に対して，$p = \bar{g}(e) + \bar{\iota}(g')$ となる $e \in \mathcal{E}, g' \in \mathcal{G}'$ をとる．これを元に $\phi(p) = \alpha(e) + \beta(g')$ とする．すると明らかに $\phi \circ \bar{g} = \alpha, \phi \circ \bar{\iota} = \beta$ が成立する．ϕ が well-defined なら module homomorphism になることは明らか．

■ϕ :: well-defined.　$(p =)\bar{g}(e) + \bar{\iota}(g') = 0$ となる $e \in \mathcal{E}, g' \in \mathcal{G}'$ をとる．$\alpha(e) + \beta(g') = 0$ となることを示せば良い．まず，$0 = \bar{\kappa}(\bar{g}(e) + \bar{\iota}(g')) = \kappa(e)$．したがって $e \in \ker \kappa = \operatorname{im} \iota$ であり，$\iota(h) = e$ を満たす $h \in \mathcal{G}$ が存在する．

$$0 = \bar{g}(e) + \bar{\iota}(g') = \bar{g}\iota(h) + \bar{\iota}(g') = \bar{\iota}(g(h) + g').$$

$\bar{\iota}$ :: inj より $g(h) + g' = 0$. よって

$$\alpha(e) + \beta(g') = \alpha\iota(h) + \beta(-g(h)) = 0.$$

■ϕ :: unique.　$\phi' : \mathcal{P} \to \mathcal{X}$ も ϕ と同様の条件を満たすとする．$P = \bar{\iota}(\mathcal{G}') + \bar{g}(\mathcal{E})$ なので，

$$\phi'(p) = \phi'(\bar{g}(e) + \bar{\iota}(g')) = \alpha(e) + \beta(g') = \phi(p).$$

■

補題 4.6
$g, g' : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ と，extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ をとる．

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

以下が成り立つ．

(a) $0_*\mathcal{E} = 0_{\mathcal{F},\mathcal{G}'}$,
(b) $g_*(-\mathcal{E}) = -g_*\mathcal{E}$,
(c) $g_*\mathcal{E} + g'_*\mathcal{E} = (g+g')_*\mathcal{E}$.

(証明).
■proof of (a). 以下の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "0"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "i_2\circ\kappa"] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}' \arrow[r, "i_1"'] & \mathcal{G}' \oplus \mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

よって pushout の一意性から $0_*\mathcal{E} \cong \mathcal{G}' \oplus \mathcal{F} = 0_{\mathcal{F},\mathcal{G}'}$.

■proof of (b). 以下の可換図式を見よ．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "(-1)"] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}' \arrow[r, equal] & \mathcal{G}' \arrow[r] & g_*(-\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(-1) は同型であることと，$g \circ (-1) = (-1) \circ g$ から，以下も可換図式.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, equal] \arrow[d, "g"'] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G}' \arrow[r, "(-1)"'] & \mathcal{G}' \arrow[r] & g_*(-\mathcal{E}) \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

よって pushout の一意性から $g_*(-\mathcal{E}) \cong -g_*\mathcal{E}$．また $g_*(\mathcal{E}) \cong (-g)_*\mathcal{E}$ も分かる．

■proof of (c).

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \arrow[r, "\iota\oplus\iota"] \arrow[d, equal] & \mathcal{E} \oplus \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa\oplus\kappa"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\mathrm{pr}_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \arrow[r] & (\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^* \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\Delta"] & 0
\end{tikzcd}$$

今，この図式は可換であり，各行は完全列である．$(\kappa \oplus \kappa) \circ \Delta = \Delta \circ \kappa$ なので，pullback $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^*$ の普遍

性から，図式を可換に保つ $\phi = \langle \Delta, \kappa \rangle : \mathcal{E} \to (\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^*$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[dd, "\phi"'] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0 \\
& \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \arrow[d, equal] & & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \arrow[r] & (\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^* \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

右の縦の射は合成すると恒等射．したがって左の四角形は pushout diagram. pushout の一意性から一意性から $(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^* \cong \Delta^*\mathcal{E}$.

このことから求める同型が得られる．

$$\begin{aligned}
g_*\mathcal{E} + g'_*\mathcal{E} =& \nabla_*(g_*\mathcal{E} \oplus g'_*\mathcal{E})\Delta^* \\
=& \nabla_*(g \oplus g')_*(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E})\Delta^* \\
=& (\nabla_*(g \oplus g')_*\Delta_*)\mathcal{E} \\
=& (\nabla \circ (g \oplus g') \circ \Delta)_*\mathcal{E} \\
=& (g + g')_*\mathcal{E}.
\end{aligned}$$

（2 つめの等号は自明.） ∎

補題 4.7

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: $\mathcal{O}_X$-modules on ringed scheme :: X とする．この時，$E(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ には加法群の構造が定まる．

(証明). $0_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ が Bear sum についての単位元であること，

$$\mathcal{E} + 0 = \mathrm{id}_*\mathcal{E} + 0_*\mathcal{E} = (\mathrm{id} + 0)_*\mathcal{E} = \mathrm{id}_*\mathcal{E} = \mathcal{E}.$$

$-\mathcal{E}$ が逆元であること，

$$\mathcal{E} + (-\mathcal{E}) = \mathrm{id}_*\mathcal{E} + (-\mathrm{id})_*\mathcal{E} = (\mathrm{id} - \mathrm{id})_*\mathcal{E} = 0_*\mathcal{E} = 0.$$

可換性.

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}' = \nabla_*(\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}')\Delta^* = \nabla_*(\mathcal{E}' \oplus \mathcal{E})\Delta^* = \mathcal{E}' + \mathcal{E}.$$

結合律が成り立つこと，

$$\begin{aligned}
& (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) + \mathcal{E}_3 \\
=& \nabla_*((\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2) \oplus \mathcal{E}_3)\Delta^* \\
=& \nabla_*((\nabla_*(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2)\Delta^*) \oplus \mathcal{E}_3)\Delta^*
\end{aligned}$$

(TODO) ∎

補題 4.8

全単射 $\Phi : E(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ は加法群の間の同型である．

(証明). 最初に次のことに注意する: $f + f' = \nabla \circ (f \oplus f') \circ \Delta$. したがって $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ の加法は次のように定まる．

$$+ : \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})^{\oplus 2} = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^{\oplus 2}, \mathcal{G}^{\oplus 2}) \xrightarrow{(\circ\Delta)} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^{\oplus 2}, \mathcal{G}) \xrightarrow{(\nabla\circ)} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

(TODO) ∎

5 First Order Deformation of a Local Complete Intersection.

この節は 5.14 を証明するための必要最低限の定義と命題のまとめである．元の命題と比較して，このノートでは X を $\mathbb{C}$ 上のものに限定し，defoemation も一般の local artinian ring ではなく $D = \mathbb{C}[\epsilon]$ に限定している．したがって formal deformation([9] 6.1), abstruct lifting([9] 4.2), first order deformation が一致している．

以下，この節では X を以下のようなものとする ([9] Hypotheses4.1)．この条件を (†) と呼ぶ．

- flat,
- generically smooth,
- local complete intersection,
- finite type

scheme over $\mathbb{C}$.

特に stable curve over $\mathbb{C}$ はこれらの条件を満たす．

"local complete intersection"の定義を改めて書き下しておく．

定義 5.1 ((local) complete intersection [9] p.21, [3] p.185)
X :: scheme of finite type over $\mathbb{C}$ が complete intersection であるとは次が成立すること: X は P :: smooth scheme over $\mathbb{C}$ ([3] III.10) に埋め込まれ，さらに ideal sheaf :: $\ker(X \hookrightarrow P)$ が $\mathrm{codim}(P, X)$ 個の global section で生成されること ([3] p.121).

X :: scheme of finite type over $\mathbb{C}$ が locally complete intersection であるとは $\mathfrak{U}$ :: open covering of X が存在し，任意の $U \in \mathfrak{U}$ が complete intersection であること．

議論は，$\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$，$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$，$e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ の対応の連鎖である．これらはいずれも first order deformations :: $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ の「差」を表現する量である．ここでの「差」の意味を理解するには，最初に命題 (5.10), (5.11) のステートメントを見るのが良い．そして自明な first order deformation of X :: $X \times D$ と与えられた first order deformation の「差」である $e(\mathcal{X}, X \times D)$ によって first order deformation of X を分類する（定義 5.13)．

定理 5.2
M' :: flat scheme of finite type over D とし，$M = M'_0$ (fiber of $M' \to \mathrm{Spec}\, D$ at 0) とする．

$X \subseteq M$ が (†) を満たす時，$\mathcal{X} \subseteq M'$ :: first order deformation of X も local complete intersection である．

5.1 $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

定義 5.3
X :: **complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とする．これの ideal sheaf を $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_P$ とする．$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformation of X とすると，$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1$ :: embedded in P となる．そこで ideal sheaf をそれぞれ $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{O}_P$ とする．first order deformation of X の定義から，$\mathcal{I}_i / \epsilon \mathcal{I}_i \cong \mathcal{I}$ $(i = 1, 2)$.

写像 $\mathcal{I} \to (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ を以下のように定める．まず，$\langle U, f \rangle \in \mathcal{I}$ に対し，

$$\langle U, \tilde{f}_i \rangle \bmod \epsilon \mathcal{I}_i = \langle U, f \rangle \ (i = 1, 2)$$

となる $\langle U, \tilde{f}_i \rangle$ が存在する．そこで

$$\langle U, f \rangle \mapsto \langle U, \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 \rangle \bmod (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{I} \in (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_P/\mathcal{I}) = (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$$

と写す．これは $\tilde{f}_i$ のとり方に依らず，well-defined．この写像を $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1)$ と書く．

以下の $\mathbb{C}$-module としての同型があるため，$\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ を以下のいずれの集合の元ともみなす．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{I}, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \\
\cong &\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \\
\cong &H^0(X, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{}\,) \\
\cong &(\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{}\,) \\
\cong &H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{}\,)
\end{aligned}$$

命題 5.4 ([9] Prop2.8a,b,c,d,e)

P' :: flat scheme of finite type over D, $P = P'_0$, X :: **complete intersection** embedded in P とする．

(a) $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = 0 \iff \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$.
(b) $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) + \nu(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) = \nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3)$.
(c) $\nu(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1) = -\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.
(d) 任意の $\mathcal{X}$ :: first order deformation of X, 任意の $\nu \in H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{}\,)$ に対し，$\mathcal{Y}$ :: first order deformation of X が存在して，$\nu = \nu(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ となる．
(e) U :: open subset of X について，$\nu(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U) = \nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)|_U : (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)|_U \to (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$.

(証明)．(d) のみ証明する．他は自明であろう．

$\mathcal{I}$ :: ideal sheaf of X, $\mathcal{I}'$ :: ideal sheaf of $\mathcal{X}$ とし，sheaf of ideal :: $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_{P'}$ を次のように定める．ただし $\mathcal{I}_P = \ker(P \hookrightarrow P')$．sheaf の section は全て open subset in P' :: U 上のものである．（これが sheaf of ideal であることは自明．）

$$\mathcal{J} = \{\tilde{f}' \in \mathcal{O}_{P'} \mid \tilde{f}' \bmod \epsilon\mathcal{I}_P =: f \in \mathcal{I} \text{ and } {}^{\exists} f' \in \mathcal{I}', \ \ (f' - \tilde{f}') \bmod \epsilon\mathcal{I} = v_U(f)\}$$

$\mathcal{J}$ で定まる P の subscheme :: $\mathcal{Y}$ が X の deformation であることを示す．これは自然な全射 $(\times\epsilon)$: $\mathcal{J}/\epsilon\mathcal{J} \to \epsilon\mathcal{J}$ が単射（したがって同型）であることを示せば良い ([9] Lemma 2.6)．(TODO) ∎

5.2 $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

補題 5.5

X :: **complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とし，ideal sheaf は $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_P$ であるとする．この時，$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ :: locally free sheaf of rank $n := \dim X$.

(証明)．local な問題なので，$x \in X \subset P$ での $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ の stalk が free module であることを示す．$A := \mathcal{O}_{P,x}$ とし，$I := \mathcal{I}_x$ を生成する regular sequence を $x_1, \ldots, x_r$ とする．[2] Lemma A.6.1 より（この文献の証明は

同値な命題 [6] Thm16.2 のものより美しい)，graded ring として $(A/I)[t_1,\dots,t_r] \cong \bigoplus_{d\geq 0}(I^d/I^{d+1})$．1 次成分の同型から $(A/I)^{\oplus r} \cong I/I^2$． ■

補題 5.6 (First Fundamental Exact Sequence)
X :: **complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とし，ideal sheaf は $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_P$ であるとする．この時，以下は exact．

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \xrightarrow{d} (\Omega_{P/\mathbb{C}})|_X \longrightarrow \Omega_{X/\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

すなわち，$(\Omega_{P/\mathbb{C}})|_X$ :: extension of $\Omega_{X/\mathbb{C}}$ by $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$．

(証明)．よく知られている通り，最初の射が単射であることを示しさえすれば良い．

$\mathcal{K} = \ker d$ とすると，$\mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$．したがって $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ 同様 $\mathcal{K}$ も locally free．一方，[3] ThmII.8.17(2) の証明より d は irreducible point の近傍で injective．したがって $\mathrm{Supp}\,\mathcal{K}$ :: support of $\mathcal{K}$ は $\mathrm{Sing}\,X$ :: X の singular points である．X についての仮定からこれは離散集合で，すなわち開集合を含まない．もし $\mathcal{K}_x \neq 0$ ならば，$\mathcal{K}$ は trivialization open cover を持たないので，$\mathcal{K}$ :: locally free に反する．よって $\mathcal{K} = \ker d = 0$． ■

定義 5.7
$U \subseteq X$ :: **complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とする．$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformation of X について，

$$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U) := \nu(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U)_*((\Omega_{P/\mathbb{C}})|_U) = (\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)|_U)_*((\Omega_{P/\mathbb{C}})|_U)$$

を extension of $\Omega_{U/\mathbb{C}}$ by $(\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$ として定める．

補題 5.8
$U \subseteq X$ :: **affine complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とする．この時 X :: finite type over $\mathbb{C}$ なので $U \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ :: closed embedding が存在する．$\mathcal{U}$ :: first order deformation of U [†4] について，$U \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ の拡張 $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathbb{A}^n_D$ が存在する．

(証明)．[9] Lemma 4.8. ■

補題 5.9
$U \subseteq X$ :: **affine complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とする．P_1, P_2, P_3 :: nonsingular affine scheme over $\mathbb{C}$ と $U \hookrightarrow P_i$ が与えられているとする．$\mathcal{P}_i = P_i \times_{\mathbb{C}} D$ への U の lifting (first order deformation) :: $\mathcal{U}_i \to \mathcal{P}_i$ を任意にとり，対応する extension of $\Omega_{U/\mathbb{C}}$ by $(\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$ を $\mathcal{E}_i$ とする．

この時同型 $\alpha_{j,i} : \mathcal{E}_i \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_j$ が存在し，cocycle condition :: $\alpha_{1,3} = \alpha_{1,2} \circ \alpha_{2,3}$ が成立する．

(証明)．[9] p.24. ■

したがって $\{U_i\}$ :: open affine, complete intersection covering of X について，$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1|_{U_i}, \mathcal{X}_2|_{U_i})$ の貼り合わせることが出来[†5]，こうして $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ を得る．

[†4] 補題 (3.1) よりこれも affine.

[†5] 次のことに注意して上の二つの補題を使う：restriction of sheaves to open subset は left adjoint functor であるから，pushout of extensions (colimit) を保つ，よって $V \subseteq U$ について

$$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U)|_V \cong (\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)|_V)_*(\Omega_{P/\mathbb{C}}|_V) \cong \nu(\mathcal{X}_1|_V, \mathcal{X}_2|_V)_*(\Omega_{P/\mathbb{C}}|_V).$$

命題 5.10 ([9] Prop4.9a,b,c,f)
$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformations of X とする．

(a) $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \cong 0_{\Omega_{X/\mathbb{C}}, (\epsilon D)\otimes \mathcal{O}_X}$.
(b) $\mathcal{E}(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1) = -\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.
(c) $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) + \mathcal{E}(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) \cong \mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3)$.
(d) 任意の $\mathcal{E}$ :: extension of $\Omega_{X/\mathbb{C}}$ by $(\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ と任意の $\mathcal{X}$ :: first order deformation of X に対し，

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

なる $\mathcal{Y}$ :: first order deformation of X が存在する．

(d) を命題 (5.11) の後に証明する．他は命題 (5.4) の対応する命題と補題 (4.6) から得られる．

命題 5.11 ([9] Prop3.9, Prop4.10) (a) $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformation of X とする．この時，splittings of $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ と isomorphisms :: $\mathcal{X}_1 \cong \mathcal{X}_2$ の間に一対一対応がある．さらにこの対応を通して，extensions の加法と同型の合成が対応する[†6]．
(b) また，$\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ :: extension of sheaves とする．この時 splittings of $\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ と isomorphisms :: $\mathcal{E}_1 \cong \mathcal{E}_2$ の間に一対一対応がある．

命題 *(5.10)(d)* の証明. まず $\{X_\alpha\}_\alpha$ を X の affine open cover とし，$\mathcal{X}_\alpha = \mathcal{X}|_{X_\alpha}$ とおく．$\mathcal{X}$ :: finite type over $\mathbb{C}$ なので，うまく cover を取れば $\mathcal{X}_\alpha \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ が存在するように出来る．この embedding に対応する conormal bundle of X_α を $\mathcal{C}_\alpha$ とする．すると以下の SES が存在する．

$$E:\ 0 \longrightarrow \mathcal{C}_\alpha \longrightarrow \Omega_{\mathbb{A}^{n_\alpha}}|_{X_\alpha} \longrightarrow \Omega_{X_\alpha} \longrightarrow 0$$

この extension を $E := \Omega_{\mathbb{A}^{n_\alpha}}|_{X_\alpha}$ と略す．ここから Ext の LES が誘導される．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_\alpha}}(\mathcal{C}_\alpha, (\epsilon D)\otimes \mathcal{O}_{X_\alpha}) \xrightarrow{d_E} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_\alpha}}(\Omega_{X_\alpha}, (\epsilon D)\otimes \mathcal{O}_{X_\alpha}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{X_\alpha}}(\Omega_{\mathbb{A}^{n_\alpha}}|_{X_\alpha}, (\epsilon D)\otimes \mathcal{O}_{X_\alpha}) = 0$$

右の $=0$ は [3] Prop III.6.7, Prop III.6.3, Thm III.3.7 から得られる．したがって d_E :: surj.
なので定理 (4.2) より，$f_\alpha : \mathcal{C}_\alpha \to (\epsilon D)\otimes \mathcal{O}_{X_\alpha}$ と同型 $(f_\alpha)_* E \cong \mathcal{E}|_{X_\alpha}$ が存在する．一方命題 (5.4) より，$f_\alpha = \nu(\tilde{\mathcal{X}}_\alpha, \mathcal{X}_\alpha)$ を満たす first order deformation of X_α :: $\tilde{\mathcal{X}}_\alpha \subseteq \mathbb{A}^{n_\alpha}_D$ が存在する．
こうして得られる $\{\mathcal{X}_\alpha\}_\alpha$ を貼り合わせる．命題 (5.11) (TODO) ∎

5.3 $e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

定義 5.12
$T^i(X) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ とおく．$\mathcal{X}$ :: first order deformation of X に対し，

$$e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in \mathrm{Ext}^1(\Omega_{X/\mathbb{C}}, (\epsilon D)\otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \cong (\epsilon D)\otimes T^1(X) \cong T^1(X) \cong \mathrm{Hom}((\epsilon D)^*, T^1(X))$$

を，$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ に対応する元とする (4.2).

補題 (4.8) より，命題 (5.10), (5.11) と同様の命題が $e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ についても性質する．

[†6] すなわち $\phi_1 : \mathcal{X}_1 \cong \mathcal{X}_2, \phi_2 : \mathcal{X}_2 \cong \mathcal{X}_3$ について，$\phi_2\phi_1 : \mathcal{X}_1 \cong \mathcal{X}_3$ は $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3)$ に対応する．

定義 5.13 (Kodaira-Spencer class/map, [9])
$T^i(X) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ とおく．$\mathcal{X}$ :: first order deformation of X に対し，

$$k_{\mathcal{X}} = e(\mathcal{X}, X \times D) \in T^1(X) \cong \mathrm{Hom}((\epsilon D)^*, T^1(X))$$

とおく．この $k_{\mathcal{X}}$ を Kodaira-Spencer class of $\mathcal{X}$ と呼ぶ．対応する写像 $K_{\mathcal{X}} : (\epsilon D)^*, T^1(X)$ を Kodaira-Spencer map of $\mathcal{X}$ と呼ぶ.

5.4 Complete Classification.

定理 5.14
First order deformation of X の同値類と $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ の元は一対一に対応する．(cf. [9] Prop 6.12)

(証明)．命題 (5.10), (5.11) より，$\mathcal{X} \mapsto k_{\mathcal{X}}$ がこの対応を与えることは明らか. ∎

系 5.15
X :: nonsingular and have finite dimention ならば，First order deformation of X の同値類と $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元は一対一に対応する.

(証明)．仮定より，$\Omega_{X/\mathbb{C}}$ :: locally free sehaf of finite rank．したがって [3] PropIII.6.7, Prop II.6.3 から次の同型が成立する.

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X \otimes \Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{O}_X) \cong H^1(X, \mathcal{T}_X)$$

∎

6 Two Examples of Other Deformation Theories

deformation theory の対象は scheme の他にもある．例えば，次の二つがある.

Deformation of a coherent sheaf :: F on a scheme X, over a fixed scheme

$\mathcal{X}$ :: deformation of X over (S, s_0) とする．deformation of F over X とは，$\mathcal{F}$ :: flat coherent sheaf on $\mathcal{X}$ と homomorphism :: $\phi : \mathcal{F} \to F$ の組であって，誘導される射

$$\phi \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} 1_{\mathcal{O}_X} : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{O}_X \to F$$

が同型であるもの．(ref. [4] §7, p.53)

Deformation of a map $f : X \to Y$ with both X and Y fixed

X, Y :: scheme, (S, s_0) :: $\mathbb{C}$-pointed scheme, $f : X \to Y$ :: morphism とする．Deformation of a map $f : X \to Y$ with both X and Y fixed とは morphism :: $\bar{f} : X \times S \to Y \times S$ であって，$\bar{f}|_{X \times \{s_0\}} = f$ であるもの．(ref. [5]p.93)

それぞれ，first order deformation が成す空間が分かっている.

定理 6.1 ([4] Thm2.7)
X :: scheme over $\mathbb{C}$, F :: coherent sheaf on X とする．この時，F の first order deformation とは，$\mathcal{F}$ :: cohenrent sheaf on $\mathcal{X} = X \times_{\mathbb{C}} D$ と homomorphism :: $\phi : F \to \mathcal{F}$ の組であって誘導される射 $\phi \otimes_D 1_{\mathbb{C}} : \mathcal{F} \otimes \mathbb{C} \to F$ が同型であるものとする．

この時，first order deformation of F over $\mathcal{X}$ の同型類と $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F, F)$ の元とが，一対一対応する．

系 6.2 ([4] Prop2.6)
上の定理で F を invertible sheaf に限定すると，first order deformation of F over $\mathcal{X} = X \times D$ の同型類は $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の元と一対一対応する．

(証明)．系 (5.15) の証明と全く同様． ∎

定理 6.3
X, Y :: fiexed scheme, $f : X \to Y$ をとる．この時，first order deformation of a map f with both X and Y fixed の同型類と，$H^0(X, f^*\mathcal{T}_Y)$ の元とが一対一対応する．

こちらについては詳しい文献が見つかっていない．しかし，“Deformation of a map $f : X \to Y$ with only Y fixed”については，解析的な場合について [1] §8 で述べられている．

7 Functor of Artin Rings - Abstruct Deformation Theory

3 つの圏を次のように定める．L :: local noetherian $\mathbb{C}$-algebras with residue field $\mathbb{C}$ とする．

$(\mathrm{LA})_L$: the category of local artinian L-algebras with residue field $\mathbb{C}$.
$(\mathrm{CLN})_L$: the category of complete local noetherian L-algebras with residue field $\mathbb{C}$.
$(\mathrm{LN})_L$: the category of local noetherian L-algebras with residue field $\mathbb{C}$.

$L = \mathbb{C}$ の時は添字を略す．(ref. [8] p.1)

$(\mathrm{LA})_L \subset (\mathrm{CLN})_L \subset (\mathrm{LN})_L$ という包含関係があることに注意．

定義 7.1 ([8] §2.2)
以下のような functor を functor of artin rings と呼ぶ．

$$F : (\mathrm{LA})_L \to (\mathrm{Sets}).$$

ここで $L \in (\mathrm{CLN})$.

$F(\mathbb{C})$ が 1 元集合 (singleton) ならば，F は特に predeformation functor と呼ばれる．

F が functor

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{CLN})_L}(R, -) \qquad R \in (\mathrm{CLN})_L$$

と同型である時，F :: prorepresentable と言う．

定義 7.2 ([8] §2.2)
formal element semiuniversal formal element universal formal element

predeformation functor :: F が (semi)universal formal element を持つか，ということについては，以下の定理が大変有用である．逆に以下の定理が predeformation functor を考える重要性を示している．

定理 7.3 ([8] Thm 2.3.2, p.56)

参考文献

[1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, and Phillip Griffiths. *Geometry of Algebraic Curves: Volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 2011 edition, 4 2011.

[2] William Fulton. *Intersection Theory*. Springer, 2nd ed. 1998 edition, 7 1998.

[3] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[4] Robin Hartshorne. *Deformation Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2010 edition, 12 2009.

[5] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[6] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge University Press, revised edition, 5 1989.

[7] David Mumford Pierre Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.

[8] Edoardo Sernesi. *Deformations of Algebraic Schemes (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 11 2010.

[9] Angelo Vistoli. The deformation theory of local complete intersections. https://arxiv.org/abs/alg-geom/9703008.

[10] 志甫淳. 層とホモロジー代数 (共立講座 - 数学の魅力). 共立出版, 1 2016.