ゼミノート #12
Quotients of Algebraic Spaces

七条彰紀

2019 年 8 月 6 日

目次

1 Notes on Topology 1
  1.1 Constructible Topology 1
  1.2 Equivalence Relation on Topological Space Induced by Groupoid 3

2 Quotients 3
  2.1 Definitions 3
  2.2 Propositions : Paraphase 5

1 Notes on Topology

1.1 Constructible Topology

以下を参考にした．

- [2] §1
- http://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/Perfseminar/Notes/L3.pdf by B.Conrad
- [4] 08YF https://stacks.math.columbia.edu/tag/08YF

定義 1.1
X :: topological space とする．

(i) X の locally closed subset とは，closed subset と open subset の共通部分で表せる subset である．

(ii) X の constructible set とは，X の有限個の locally closed subset の和集合で表せる subset のことである．

(iii) $U \subseteq X$ が X の locally constructible set であるとは，U のある開被覆 $\{U_i\}$ について，各 $U \cap U_i$ が constructible set である，ということ．

(iv) X の constructible topology とは，X の constructible set を開基とする位相のことである．X の underlying set に X の constructible topology を与えた位相空間を X_{cons} と書く．

(v) 有限個とは限らない X の constructible set の，和集合を ind-constructible subset と呼び，共通部分を pro-constructible subset と呼ぶ[†1].

(vi) map of topological spaces :: $f\colon X \to Y$ について，f^{cons} を constructible topology での map とする．(map of sets としては $f = f^{\mathrm{cons}}$ である．)

命題 1.2

X :: topological space とする．

(i) X の open subset と closed subset は constructible set である．

(ii) 有限個の constructible set の和，共通部分は constructible set である．constructible set の補集合も constructible set である．

(iii) X の constructible topology に於ける open subset は ind-constructible subset に限る．同様に，closed subset は pro-constructible subset に限る．

(iv) map of topological spaces :: $f\colon X \to Y$ について，f^{cons} :: continuous.

(証明)．自明．∎

命題 1.3 (i) qcqs(=quasi-compact and quasi-separated) scheme の pro-constructible subset は，affine scheme からの射の像に限る．

(ii) locally of finite presentation morphism は constructible topology において open.

(iii) quasi-compact morphism は constructible topology において closed.

(iv) f :: surjective morphism で f :: locally of finite presentation or quasi-compact ならば f^{cons} :: submersive.

(証明)．(i) は Rydh10 の Prop1.1 である．(ii) は Chevalley's theorem からの帰結．(iii) は locally に調べれば容易に分かる．(iv) は (ii), (iii) からの帰結である．∎

注意 1.4

constructible topology は spectral space [†2] と共に扱われることが多い．例えば qcqs scheme の underlying space は spectral である．

命題 1.5

[2] Prop1.7 morphism of schemes :: $f\colon X \to Y, g\colon Y' \to Y$ を考え，f の g による pullback を f' と書く．

(i) P を open, closed, submersive のいずれかとする．g が submersive ならば，f' :: P と f :: P は同値．

(ii) P を universally open, universally closed, universally submersive, separated のいずれかとする．g が universally submersive ならば，f' :: P と f :: P は同値．

(iii) g^{cons} が universally submersive ならば，f' :: quasi-compact と f :: quasi-compact は同値．

(証明)．(TODO) (iii) だけ証明を与える．∎

[†1] "ind-" は inductive limit を意味し，"pro-" は projective limit を意味する．

[†2] spectral space とは，以下の性質をもつ位相空間: sober, quasi-compact, the intersection of two quasi-compact opens is quasi-compact, and the collection of quasi-compact opens forms a basis for the topology ([4] 08FG).

注意 1.6
おそらく，[3] はこの命題を利用するために，topological quotient に「q^{cons} :: universal submersive」を要求している．より詳しく言うと以下の命題で使われている．

命題 1.7 ([3] Prop2.12 (ii))
$R \rightrightarrows^s_t X$ :: groupoid とし，$q\colon X \to Y$ を topological quotient とする．j :: quasi-compact と，Y :: quasi-separated かつ $j_{/Y}$ :: quasi-compact は同値.

これを経由して，$X \to S$ :: quasi-separated ならば GC quotient :: $Y \to S$ が quasi-separated であることなどを示している (Prop4.7).

1.2 Equivalence Relation on Topological Space Induced by Groupoid

S :: algebraic space とし，groupoid in algebraic S-space :: $R \rightrightarrows^s_t X$ を考える．
topological space :: $|U|$ に，次のようにして同値関係 $\sim_R$ を定義する．

定義 1.8
点 $x_1, x_2 \in |X|$ について，

$$x_1 \sim_R x_2 \iff {}^{\exists} r \in |R|, \quad |s|(r) = x_1, |t|(r) = x_2$$

と定義する．

$|R \times_x R| \to |R| \times_{|X|} |R|$ が全射であることを用いると，groupoid の定義から，$\sim_R$ が同値関係であることが分かる．

定義 1.9
点 $x \in |X|$ の同値類を orbit と呼び，$R(x)$ と書く．$R(x)$ は $|t|(|s|^{-1}(x))$ と等しい．
また，$W \subseteq |X|$ が R-stable であるとは，W が $\sim_R$ について stable であること．すなわち，

$$\{x \in |X| \mid {}^{\exists} w \in W, \quad w \sim_R x\} = R$$

となること．これは $|s|^{-1}(W) = |t|^{-1}(W)$ in $|R|$ とも同値.

注意 1.10
[4] 04XJ には，$S = |X| \times_{|[X/R]|} |X|$ とすると位相空間として $|[X/R]| = |X|/S$，という命題が有る．

2 Quotients

以降は引き続き S :: algebraic space とし，groupoid in algebraic S-space :: $R \rightrightarrows^s_t X$ を考える．

2.1 Definitions

定義 2.1 (equivariant morphism)
morphism :: $q\colon X \to Y$ について，$q \circ s = q \circ t$ であるとき，q を equivariant morphism という．

定義 2.2 (j, j_Y)
$s, t\colon R \to X$ から $X \times_S X$ の普遍性により得られる射 :: $R \to X \times_S X$ を j と書く．

また，equivariant morphism :: $q\colon X \to Y$ について，s, t から $X \times_Y X$ の普遍性により得られる射 :: $R \to X \times_Y X$ を $j_{/Y}$ と書く．

stabilizer はまたの機会に定義する．

注意 2.3
fiber product の普遍性から，$j_{/Y}$ に $X \times_Y X \to X \times_S X$ を合成すると j に一致する．

注意 2.4
equivariant morphism :: $R \rightrightarrows_t^s X \to Y$ は，quotient stack からの射 $[X/R] \to Y$ に一対一に対応する．(TODO: proof)

定義 2.5
equivariant morphism :: $q\colon X \to Y$ を考える．

Zariski quotient
Constructible quotient
Topological quotient
Strongly topological quotient
Geometric quotient
Strongly geometric quotient

定義 2.6 (universal, uniform quotient)
$q\colon X \to Y$ を上記のいずれかの quotient とする．

- 任意の射 $Y' \to Y$ による pullback :: $q'\colon X \times_Y Y' \to Y'$ も同じ種類の quotient であるとき，q は universal であると言う．
- 任意の flat 射 $Y' \to Y$ による pullback :: $q'\colon X \times_Y Y' \to Y'$ も同じ種類の quotient であるとき，q は uniform であると言う．

注意 2.7
$j_{/Y}\colon X \times_Y X \to X \times_S X$ が universally submersive であることは，$X \times_Y X$ に適切な位相が入っていることを意味する．

注意 2.8
geometric quotient in [1]

- q :: surjective and equivariant.
- $\mathcal{O}_Y = (q_* \mathcal{O}_X)^R$.
- 任意の点 $y \in Y$ について，$q^{-1}(y)$ はただ一つの orbit からなる．
- $W_1, W_2 \subseteq X$ :: disjoint closed subset について $\mathrm{cl}_Y(q(W_1)), \mathrm{cl}_Y(q(W_2))$ :: disjoint.

以下のように言い換えても良い．

- q :: Zariski quotient.
- $\mathcal{O}_Y = (q_* \mathcal{O}_X)^R$.
- q の open immersion による pullback も上記を満たす．

ref. E.Viehweg “D. Mumford’s Geometric Invariant Theory”．なお，[1] の初版では q :: universally submersive を仮定している．

2.2 Propositions : Paraphase

命題 2.9 ([3], Prop2.3)
R-equivariant morphism :: $q\colon X \to Y$ を考える．以下の $3 \times 3 = 9$ 個の命題を考える．

(i) 任意の体 k と射 $y\colon k \to Y$ [†3]について $|X \times_Y k|$ は，
少なくとも 1 つの / 多くとも一つの / 丁度一つの，$(R \times_Y k)$-orbit を含む．

(ii) q :: surjective / $j_{/Y}$ :: surjective / $q, j_{/Y}$:: surjective.

(iii) 任意の代数閉体 K について，$\bar{q}_K\colon X(K)/R(K) \to Y(K)$ [†4]は
surjective / injective / bijective.

この時，(iii) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longleftrightarrow$ (i) がそれぞれ成り立つ．さらに $q, j_{/Y}$ :: locally of finite type or integral ならば，(iii) $\Longleftarrow$ (ii) も成り立つ．

(証明). ∎

注意 2.10
したがって quotient の定義の幾つかは次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} q \text{ :: univ. Zariski} &\iff q \text{ :: univ. submersive and } j_{/Y} \text{ :: surjective.} \\ q \text{ :: topological} &\iff q, q^{\mathrm{cons}} \text{ :: univ. submersive and } j_{/Y} \text{ :: surjective.} \\ q \text{ :: strongly topological} &\iff q, q^{\mathrm{cons}}, j_{/Y} \text{ :: univ. submersive} \end{aligned}$$

補題 2.11
Remark 2.5 when univ. Zariski quot. is top. quot.?

命題 2.12
Prop2.10

参考文献

[1] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric Invariant Theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34)*. Springer-Verlag, 3rd ed. edition, 1992.

[†3] Spec k を k と略した．
[†4] $X(K)/R(K)$ は $R(K) \rightrightarrows^{s_K}_{t_K} X(K)$ の coequalizer で，$\bar{q}_K$ は coequalizer による $q_K\colon X(K) \to Y(K)$ の一意な分解である．

[2] David Rydh. Submersions and effective descent of étale morphisms. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, Vol. 138, No. 2, pp. 181–230, 2010.

[3] David Rydh. Existence and properties of geometric quotients. *Journal of Algebraic Geometry*, Vol. 22, pp. 629–669, 08 2013.

[4] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2019.