

実数集合 \mathbb{R} のコンパクト集合

七条 彰紀

2017 年 8 月 14 日

1 準備

補題 1.1

コンパクト空間の閉部分集合はコンパクト.

(証明). $C \subseteq X$ で X はコンパクトだとする. C の開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ をとると, $\{C^c \cup U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は X の開被覆になる. X がコンパクトであることから, 以下を満たす有限部分集合 $\Lambda_f \subseteq \Lambda$ が存在する.

$$C \subseteq X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda_f} (C^c \cup U_\lambda).$$

よって $C \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda_f} U_\lambda$. ■

補題 1.2

ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合.

(証明). X がハウスドルフ空間で, $C \subseteq X$ はコンパクトだとする. C^c の任意の点が内点であること, すなわち C^c の任意の点が C^c に含まれる開近傍を持つことを示そう.

$x \in C^c$ と $y \in C$ を任意にとると, X がハウスドルフであることから, 以下を満たす開集合 $U_y, V_y \subset X$ がとれる.

$$x \in U_y, \quad y \in V_y, \quad U_y \cap V_y = \emptyset.$$

この時 $C = \bigcup_{y \in C} V_y$. C はコンパクトだから, $y_1, \dots, y_r \in C$ を適当に選ぶことで $C \subseteq \bigcup_{i=1}^r V_{y_i}$ とできる. $U_{y_i} \subseteq (V_{y_i})^c$ から,

$$U = \bigcap_{i=1}^r U_{y_i}$$

とおけば $x \in U$ かつ $U \subseteq C^c$. ■

注意 1.3

このノートでは以下を公理として認める.

(カントールの公理あるいは区間縮小法の原理) 閉区間の減少列 $\mathbb{R} \supset I_1 \supsetneq I_2 \supsetneq \dots$ が任意に与えられた時, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i \neq \emptyset$.

2 主定理

定理 2.1

\mathbb{R} のコンパクト部分集合は有界閉集合.

(証明). \mathbb{R} のコンパクト部分集合 C を考える.

$$C \subset \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (-n, +n)$$

という開被覆を考えると, C がコンパクトであることから, この内の有限個で C は被覆できる.

$$C \subset (-n_1, +n_1) \cup (-n_2, +n_2) \cup \cdots \cup (-n_r, +n_r).$$

$N = \max_{1 \leq i \leq r} n_i$ とすれば $C \subset (-N, +N)$. ■

定理 2.2

\mathbb{R} の有界閉集合はコンパクト.

証明を二つ述べる. この二つの証明は

(証明). 補題 1.1 から, 有界閉区間 $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}, a < b$) がコンパクトであることを示せば十分である. $[a, b]$ がコンパクトでないとすると, 有限部分被覆を持たない $[a, b]$ の開被覆 \mathfrak{U} が存在する.

これは $[a_0, b_0] = [a, b]$ から始めて $\{[a_k, b_k]\}_{k \geq 0}$ を次のように作る. すなわち, $[a_k, b_k]$ が構成されている時, $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ は

$$\left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2} \right], \left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k \right]$$

のうちで, \mathfrak{U} の有限部分で被覆できないものである. こうして出来る $[a, b]$ の閉部分集合鎖

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supsetneq [a_1, b_1] \supsetneq \cdots$$

は無限に伸ばすことが出来る (特に任意の $k \geq 0$ について $[a_k, b_k]$ は空でない). 実際, $[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}]$, $[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k]$ の両方が \mathfrak{U} の有限部分で被覆できるのであれば, 前者, 後者を覆い尽くす有限部分被覆を合わせて, $[a_k, b_k]$ が \mathfrak{U} の有限部分で被覆できる. これを繰り返すと, 結局 \mathfrak{U} は $[a, b]$ の有限部分被覆をもつということになってしまう.

こうして出来た閉区間列の幅は $0 < |a_k - b_k| \leq \frac{|a-b|}{2^k}$ の様に縮小していく. したがって注意 1.3 で述べたカントールの公理から, $c \in \bigcap_{k \geq 0} [a_k, b_k] \subseteq [a, b]$ がとれる. \mathfrak{U} は $[a, b]$ の開被覆だから, $c \in U$ なる $U \in \mathfrak{U}$ が存在する. U は開集合だから, 十分小さい $\varepsilon > 0$ について

$$(-\varepsilon + c, c + \varepsilon) \subseteq U$$

とできる. ε に対して, 整数 N を $\frac{|a-b|}{2^N} < \frac{\varepsilon}{2}$ が成り立つものとすれば, 次のようになる.

$$[a_N, b_N] \subseteq (-\varepsilon + c, c + \varepsilon) \subseteq U.$$

これは $[a_k, b_k]$ のとり方 ($[a_k, b_k]$ は U の有限部分で被覆できない) に反する. ■

(証明). 閉区間 $[a, b]$ ($a < b$) を考えれば十分であることは 1 つめの証明と変わらない. $[a, b]$ の任意の開被覆 \mathfrak{U} をとる. 明らかに, \mathfrak{U} は $[a, x]$ ($x \in [a, b]$) の開被覆でもある. そこで I を以下のように取る.

$$I = \{x \in [a, b] \mid \mathfrak{U} \text{ は } [a, x] \text{ の有限部分被覆をもつ}\}.$$

$b \in I$ が我々の目標である.

$c \in I$ を任意にとると, \mathfrak{U} は $[a, b]$ の被覆であることから $c \in U \in \mathfrak{U}$ なる U が存在する. U が開集合であることから, 十分小さい $2\varepsilon > 0$ について

$$[-\varepsilon + c, c + \varepsilon] \subsetneq (-2\varepsilon + c, c + 2\varepsilon) \subseteq U.$$

\mathfrak{U} がもつ $[a, c]$ の有限開被覆に U を付け加えると, $[-\varepsilon + c, c + \varepsilon] \cap [a, b] \subset I$ が分かる. すなわち, I の任意の点は $[a, b]$ の位相で閉近傍をもつ.

以上から直ちに I が $[a, b]$ の開集合であることが分かる. また, I が閉集合であることも, 次の様に考えれば分かる. l を I の集積点としよう. 集積点の定義から, l の開近傍 $U \in \mathfrak{U}$ は I と交わる. 開近傍の閉包を取れば, これは任意の l の閉近傍と言い換えても良いことが分かる. この閉近傍を十分小さく取れば $[c, l] \subset I$ の様に出来る. これを I の点 c の閉近傍と見れば, 前段落から $l \in I$ が得られる.

よって I は $[a, b]$ の閉かつ開な部分集合. $a \in I$ から $I \neq \emptyset$ で, しかも $[a, b]$ は連結だから, $I = [a, b]$. ■