ゼミノート #4
Deformation Theory

七条彰紀

2018 年 7 月 24 日

1　Automorphism Group of Stable Curve

[4] 3.A, [6] §1 を参照する．

C, D :: stable curves of genus g over a scheme S の間の isomorphism group の scheme としての構造を与える．この scheme を $\mathrm{Isom}(C, D)$ と書く．そして $\mathrm{Aut}(C) = \mathrm{Isom}(C, C)$ と定義し，これの scheme としての特徴を調べる．

$\mathrm{Isom}(C, D)$ の特徴付けをするため，次の関手を考える．

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}som_S(C, D) : & (\text{Scheme over } \mathbb{C}) & \to & (\text{Set}) \\ & S' & \mapsto & \{\ C \times_{\mathbb{C}} S' \to D \times_{\mathbb{C}} S' :: S'\text{-isomorphism}\} \end{array}$$

$\iota \in \mathcal{I}som(C, D)(S')$ から得られる ι^* は $\omega^{\circ}_{C\times S'/S'} = \iota^*(\omega^{\circ}_{D\times S'/S'})$ を満たす．また $\otimes$ と交換する（すなわち Picard 群の間の準同型である．[2] Ex II.6.8）．このことから $\mathrm{Isom}(C, D)$ が適当な r をとると $PGL(r + 1)$ の部分群として書けることが分かる．

もう少し詳しく $\mathrm{Isom}(C, D)$ を書く．$n \geq 3$ を整数とする．次のように r, d をとる．

$$r + 1 = h^0((\omega^{\circ}_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n}) = (2n - 1)(g - 1), \qquad d = \deg(\omega^{\circ}_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n} = 2n(g - 1).$$

すると [2] II.7 より，C, D は $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ の次数 d, arithmetic genus g の closed curve とみなせる（$\mathbb{P}^r$ に埋め込める）．なので Hildert scheme :: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{d,g,r}$ の点として扱うことが出来る．ここで次のように射を定める．

$$\begin{array}{rccc} \mu : & PGL(r + 1) & \to & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ & \alpha & \mapsto & (\alpha \cdot [C], [D]) \end{array}$$

すると，$\mathcal{I}som(C, D)$ は $\mu^{-1}(\Delta)$ によって表現される[†1]．これを group scheme over $\mathbb{C}$ :: $\mathrm{Isom}(C, D)$ とする．

scheme over $\mathbb{C}$ :: X について少々一般の理論を述べる．$\mathbb{I} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ とおく (ref. [4] 1)．[2] Ex II.2.8 より，$t \in \underline{X}(\mathbb{I})$ は X の $\mathbb{C}$-rational point :: x と $T_x(X) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathcal{T}_x$ の元に対応する．ここで $\mathcal{T}$ は tangent sheaf :: $\mathcal{T} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ のことである．[4] でいう regular vector field とは $\mathcal{T}$ の section のこと（と思われる）．

[†1] Δ は $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ の diagonal set. $\mu^{-1}(\Delta)$ は

$$\Delta \cap \mathrm{im}\,\mu = \{(\alpha \cdot [C], [D]) \mid \alpha \cdot [C] = [D]\}$$

の $PGL(r + 1)$ への逆像なので，この点と C, D の間の同型と対応することが分かるだろう．

定理 1.1
C :: stable curve of genus $g \geq 2$ について，

$$\mathrm{Ext}^0(\Omega_C, \mathcal{O}_C) = H^0(C, \mathcal{T}_C) = \mathcal{T}_C(C) = 0.$$

(証明). [6] §1.
$\pi : \tilde{C} \to C$ を normalization of C とする．また $\tilde{C}$ の connected component の個数を ν，それぞれの genus を g_i $(i = 1, \ldots, \nu)$ とする．

今，$D \in \mathcal{T}_C(C)$ は pullback :: $\pi^* : \mathcal{T}_{\tilde{C}} \to \pi^*\mathcal{T}_C$ によって[†2]．$\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ C の double point に π で対応する点 (point laying over double point, plodp) で 0 になるような regular vector field :: $\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ に対応する (TODO)．このような $\tilde{D}$ は 0 しかないことを確かめれば，$\mathcal{T}_C(C) = 0$ がわかる．

主張 1.2
1 点 $P \in \tilde{C}$ で $\tilde{D}_P = 0$ ならば，$\tilde{D} = 0$ である．

(証明). C :: reduced connected scheme に注意する．$P \in C$ において $\tilde{D} \in \mathcal{T}_C(C)$ が $\tilde{D}_P = 0$ を満たすとしよう．C の irreducible affine open cover :: $\mathfrak{U}$ をとり，$P \in U$ なる $U = \mathrm{Spec}\, A \in \mathfrak{U}$ をとって固定する．すると C :: reduced より A :: integral domain. $\tilde{D}|_U \in \mathcal{T}_C(U)$ が $P \in U$ で 0 になるのだから，次が成立する．

$$^{\exists} u \in A - \mathfrak{p}_P, \quad u \cdot (\tilde{D}|_U) = 0.$$

A :: integral より，これは $\tilde{D}|_U = 0$ を意味する．U と交わる irreducible affine open subset of C :: $V \in \mathfrak{U}$ についても，$\tilde{D}|_{U \cap V} = 0$ なので $\tilde{D}|_V = 0$．C :: connected なので，このように V を取り続けることで，全ての $V \in \mathfrak{U}$ について $\tilde{D}|_V = 0$ であることがわかる．sheaf の Identity Axiom から，C 全体で $t = 0$. ∎

したがって我々は $\tilde{C}$ の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつこと示せば良い．

$\mathcal{T}_{\tilde{C}} = \mathscr{H}\!om(\Omega_{\tilde{C}/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$ なので，$\mathcal{T}_{\tilde{C}}$ に対応する divisor は $K_{\tilde{C}}$．$\deg K_{\tilde{C}} = 2\tilde{g} - 2$ なので，$\tilde{g} > 1$ ならば $\deg(-K_{\tilde{C}}) < 0$．したがって [2] Lemma IV.1.2 から $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\tilde{C}, \mathcal{T}_{\tilde{C}}) = 0$．すなわち $\mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C}) = 0$．なので以下では $\tilde{g}_i = 0, 1$ とする．

$\tilde{g}_i = 0, 1$ であるとき，$\tilde{C}$ の各 connected component は必ず plodp をもつ．実際，genus formula で $\delta = 0$ とすると

$$g = \sum_i (\tilde{g}_i - 1) + 1 \geq 2$$

したがって $\sum_i (\tilde{g}_i - 1) > 0$ ということになる．しかし仮定から $\tilde{g}_i - 1 \leq 0$ なので，$\delta > 0$．すなわち C は必ず node をもつ．$\tilde{C}$ の各 component は smooth であることと C が connected であることも踏まえて考えると，$\tilde{C}$ の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつことが分かる．（この辺りは [6] Lemma1.4 で詳しく述べられている）． ∎

別証明として [3] Prop27.4 がある．

命題 1.3
任意の閉点 $P \in \mathrm{Aut}(C)$ について，$\mathcal{O}_{\mathrm{Aut}(C),P} \cong \mathbb{C}$．特に $\mathrm{Aut}(C)$ :: reduced scheme.

[†2] R :: ring, A, B :: ring over R とする．一般に，k-homomorphism :: $\phi : A \to B$ があるとき，$D \in \mathrm{Der}_R(B)$ は $\phi^* : D \mapsto D \circ \phi$ によって $\mathrm{Der}_R(A)$ へ写すことが出来る．

(証明). $X=\mathrm{Aut}(C)$ は group scheme over $\mathbb{C}$ であるから，X のある点での local な性質は transition を用いて単位元 e での性質と言い換えられる．なので $A:=\mathcal{O}_{X,e}$ のみを考える．X :: group scheme over $\mathbb{C}$ より e :: $\mathbb{C}$-rational point なので，A が体ならばそれは $\mathbb{C}(=A/\mathfrak{m}_A)$ と同型である．よって我々は A が体であることのみ示せば良い．

上記の定理 (1.1) から，$\mathcal{T}_C(C)=0$．これは $C\times\mathbb{I}$ の $\mathbb{I}$-automorphism は自明なものしか無いことを意味する（後述）．さらに $\mathrm{Aut}(C)$ の定義から，これは射 $\mathbb{I}\to\mathrm{Aut}(C)$ としては自明なものしか存在しないことを意味する．さらに [2] Ex II.2.8 より，これは $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2=0$ を意味する．中山の補題から $\mathfrak{m}_A=0$．よって A は体である． ∎

2 Definitions of Deformations and (Uni-)Versal Deformation.

定義 2.1 ($\mathbb{C}$-pointed scheme [7] §1.2.1)
scheme :: Y と $\mathbb{C}$-rational point :: $y_0\in Y$ の組を $\mathbb{C}$-pointed scheme を呼び，(Y,y_0) と書く．

morphism of $\mathbb{C}$-pointed schemes :: $(S,s_0)\to(T,t_0)$ とは，moephism of schemes :: $\phi:S\to T$ であって，$\phi(s_0)=t_0$ を満たすもののこと．

定義 2.2 (Deformation of Scheme [7] §1.2.1, [4] §3.B)　(i) deformation of X とは，以下のような pullback diagram のことである．ψ から $X\cong\mathcal{X}\times_Y\mathbb{C}$ が誘導される．

$$\xi:\quad\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "\text{flat, surj.}"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "s"'] & Y \end{tikzcd}$$

A' :: local artinian ring with $A'/\mathrm{Nil}(A')\cong\mathbb{C}$ を用いて $Y=\mathrm{Spec}\,A'$ と書ける場合，これは abstruct lifting of X to A' とも呼ばれる ([8] 4.2).

(ii) 上の deformation of X :: ξ について，S のことを ξ の parameter space, $\mathcal{X}$ を ξ の total space と呼ぶ.

(iii) 任意の scheme :: X と $\mathbb{C}$-pointed scheme :: (S,s_0) に対して，S が parameter space であるような deformation of X が存在する:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X\times_{\mathbb{C}} S \arrow[d] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

これを product family または trivial family と呼ぶ.

(iv) morphism of $\mathbb{C}$-pointed schemes :: $(T,t_0)\to(S,s_0)$ は，parameter space が S である deformation :: ξ から base change によって次の deformation を誘導する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X}\times_S T \arrow[d] \\ \mathbb{C} \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

これを元の deformation の $f:(T,t_0)\to(S,s_0)$ による pullback と呼び，$f^*\xi$ と書く（このノート独自？）.

(v) isomorphism of deformations of X :: $\xi \to \eta$ とは，以下の可換図式が成立する同型 $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}, S \cong T$ のこと．

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{Y} \arrow[dd] \\
X \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[dd] & \mathcal{X} \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[dd] & \\
 & & T \\
\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[urr] & S \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

isomorphism of parameter spaces :: $(S, s_0) \to (T, t_0)$ と deformation から誘導される deformation は元の deformation と同型である．

定義 2.3 (Universal Deformation, [4] 3.B, [3] §15)
universal deformation for X とは，次の性質を満たす deformation of X :: ξ (parameter space :: S): 任意の deformation of X ::η (parameter space :: T) にたいし，morphism of pointed schemes :: $f : T \to S$ が一意に存在し，$f^*\xi \cong \eta$ となる．

Universal Deformation は，次の関手の表現対象であると言える．

$$\mathbf{Sch}/\mathbb{C} \ni S \mapsto \{\text{Deformation of } X\}.$$

したがって全ての Deformation は universal deformation から得られる．しかし，当然ながらというべきか，universal deformation は殆どの場合で存在しない．そこで universal deformation への要求を

- $S' \to S$ を locally about S' にとるものとし，
- $U \to S$ の一意性は要求しない

と弱める．一意 (uni-) ではないので，これを versal deformation と呼ぶ．

定義 2.4 (Versal Deformation)
（versal deformation の定式化が見つからないので保留．見つけた限りでは versal deformation for scheme は次で意義する formal derormation でのみ定義されている．[1] では versal deformation for (complex) manifold が定義されているのみである．）

定義 2.5 (First Order Deformation)
$D = \mathbb{C}[x]/(x^2), \epsilon = x \bmod (x^2)$ とする．$\mathbb{I} = \operatorname{Spec} D$ の唯一の閉点を 0 で表す．$(\mathbb{I}, 0)$ 上の deformation を，first order deformation (or infinitesimal deformation) と呼ぶ．

注意 2.6
X :: stable curve of genus g とする．first order deformation :: $\mathcal{X} \to \mathbb{I}$ は，moduli space の定義から，$0 \in \mathbb{I}$ を $[X] = [\mathcal{X}_0] \in \overline{\mathcal{M}}_g$ へ写す $\mathbb{I} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ に対応する．そしてこの射は，既に知られている通り Zariski tangent space at $[X]$ :: $T_{[X]}$ の元に対応する．よって X の first order deformation から $T_{[X]}$ の元への対応がある．この対応は一対一であろうか？

補題 2.7

次の first order deformation of X を考える．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "0"'] & \mathbb{I} \end{tikzcd}$$

この時，ψ は closed imm. かつ同相写像である．

(証明)．まず $\mathbb{C} \to \mathbb{I}$ が closed imm. であり，closed imm. が stable under base extension であることから，ψ も closed imm. また closed imm. ならば finite である ([2] Ex II.5.5b)．ψ が homeomorphism であることは local on codomain(target) なもの[†3]なので，$\mathcal{X}$ :: affine と仮定して証明すれば十分．

以上から，$\mathcal{X} = \operatorname{Spec} A, X = \operatorname{Spec} R$, R :: A-algebra, finitely generated as module と仮定して良い．また，ψ :: closed imm. であるから，$A \cong R/I$ なる I :: ideal of R が存在する．また仮定から $A \otimes_D \mathbb{C} \cong R$ かつ A :: flat D-module．そこで以下の D-module 完全列に $\otimes_D R$ とする．

$$0 \longrightarrow \epsilon D \longrightarrow D \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow 0$$

すると次のように成る．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (\epsilon D) \otimes_D R \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & D \otimes_D R \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & \mathbb{C} \otimes_D R \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & 0 \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[r] & R \arrow[r] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

よって $(\epsilon D) \otimes_D R$ 同様 I は nilpotent ideal (i.e.$I^2 = 0$)．

$X = \operatorname{Spec} R$ の閉集合として

$$\mathcal{X} = \operatorname{Spec} A = V(I) = V(I^2) = V((0)) = X$$

なので $\operatorname{im} \psi = \mathcal{X}$．$\psi$ :: closed imm. なので，これで ψ :: homeo が証明できた． ∎

定義 2.8 (Restriction of First Order Deformation)
上の命題にある first order deformation of X について，U :: open subset of X をとる．locally ringed space :: $(\psi(U), \mathcal{O}_{\mathcal{X}}|_{\psi(U)})$ を $\mathcal{X}|_U$ と書く．

3 First Order Deformation of a Nonsingular Variety.

補題 3.1
A :: ring, $X = \operatorname{Spec} A$ とする．この時，first order deformation of X :: $\mathcal{X}$ も affine scheme である．

(証明)．[2] Ex II.3.1 への回答でもある．

$\mathcal{I} = \ker(X \hookrightarrow \mathcal{X})$ とし，$\mathcal{F}$ :: quasi-coherent sheaf on X とする．今，補題 (2.7) の証明から $\mathcal{I}^2 = 0$ が得られる．また，明らかに $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\mathcal{I} \cong \mathcal{O}_X$．したがって次の SES(short exact sequence) が存在する．

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^d\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{O}_X \longrightarrow 0$$

[†3] local on codomain に考えれば，特に全単射性が示せる．

次の LES が誘導される．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F}) \arrow[r] & H^0(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d}\mathcal{F}) \arrow[r] & H^0(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d}\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & H^1(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F}) \arrow[r] & H^1(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d}\mathcal{F}) \arrow[r] & H^1(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d}\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X)
\end{tikzcd}
$$

$\cdots$

sheaf cohomology は abelian group の cohomology として構成されており，module structure とは無関係に定まっている．そして X と $\mathcal{X}$ は homeo．したがって

$$H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) = H^i(X, \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) = 0.$$

最後の等号は $\mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X$ :: quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-module と [2] Thm III.3.7 から得られる．

$d = 1(\implies \mathcal{I}^{d+1} = 0)$ からはじめて d についての帰納法により

$$H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^{d+1}\mathcal{F}) = H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X) = 0 \ (i > 0).$$

よって LES から $H^i(\mathcal{X}, \mathcal{I}^d\mathcal{F}) = 0 (i > 0)$．[2] Thm III.3.7 から $\mathcal{X}$ :: affine. ∎

補題 3.2 ([7] Thm1.2.4)
X :: affine, nonsingular, finite type scheme over a field k とする．この時，X の first order deformation は自明な deformation :: $X \times_k \operatorname{Spec} D$ しか存在しない．

(証明)．上の補題から，deformation of $X = \operatorname{Spec} A$ は affine．そこで $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} B$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, two heads] & A \\
D \arrow[u, "f"] \arrow[r, two heads] \arrow[ur, phantom, "\text{p.b.}"] & k \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

f :: flat と，f の唯一の fiber :: $X = \operatorname{Spec} A$ が smooth であることから，[2] Thm III.10.2 より f :: smooth.

次の commutative diagram を考える．

$$
\begin{tikzcd}
B \arrow[r, two heads] & A \\
D \arrow[u, "f"] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & A \otimes_k D \arrow[u, "\text{mod } \epsilon A"']
\end{tikzcd}
$$

f :: (ϵD-)smooth over D なので，図式を可換にする射 $\phi : B \to A \otimes D$ が存在する．以下の主張から ϕ :: iso なので，任意の deformation of X :: $\operatorname{Spec} B$ は自明な deformation :: $\operatorname{Spec} A \otimes D = X \times \mathbb{I}$ と同型である． ∎

主張 3.3 ([7] Lemma A.4)
R :: ring, I :: ideal of R, F, G :: R-module, G :: flat, $f : F \to G$ :: homomorphism of R-modules.

I :: nilponent とし，誘導される homomorphism $f \otimes_R \mathrm{id}_{R/I} : F/IF \to G/IF$ が同型であるとする．この時，f :: iso.

(証明). $C=\operatorname{coker} f$ とする．完全列 $F\to G\to C\to 0$ に $\otimes_R(R/I)$ を作用させる．

$$F/IF \longrightarrow G/IG \longrightarrow C/IC \longrightarrow 0$$

仮定から $C/IC=0$．今 I :: nilponent なので $I\subset \operatorname{Jac}(R)$．したがって中山の補題から $C=0$．すなわち f :: surj.

$K=\ker f$ とする．完全列 $0\to K\to F\to G\to 0$ に $\otimes_R(R/I)$ を作用させる．

$$0 \longrightarrow K/IK \longrightarrow F/IF \longrightarrow G/IG \longrightarrow 0$$

今，G :: flat から $\operatorname{Tor}_R(G,R/I)=0$．なのでこの SES から誘導される $\operatorname{Tor}_R(-,R/I)$ の LES を考えると，$K\otimes(R/I)\cong K/IK=0$ が得られる．再び中山の補題から $K=0$．よって f :: inj. ∎

補題 3.4 ([7] Lemma1.2.6)
任意の k-algebra :: A について，次の群同型がある．

$$\left\{\begin{matrix} D\text{-automorphism of } A\otimes_k D \\ \text{inducing identity on } A \end{matrix}\right\} \cong \operatorname{Der}_k(A).$$

D-automorphism of $A\otimes_k D$ のことを infinitesimal automorphism と呼ぶ．

(証明). 仮定から automorphism of $A\otimes_k D=A[\epsilon]$ は D-module homomorphism で，mod$\epsilon A\otimes(\epsilon D)$ を合成すると identity になる．したがって次のように書ける．

$$\theta(x)=x+\epsilon D(x).$$

θ が積を保つことと D-module homo. であることから，$D:A\otimes D\to A$ :: D-derivation.

$\Omega_{A\otimes_k D/D}\cong\Omega_{A/k}\otimes_k D$ に注意すると，θ と $\operatorname{Der}_k(A)$ の対応が分かる．この対応が群準同型であることは明らか. ∎

定理 3.5 ([7] Prop1.2.9)
X :: separated nonsingular scheme of finite type over k とする．特に，X :: nonsingular (abstruct) variety over K であればよい．この時，first oder deformation of X の同値類は $H^1(X,\mathcal{T}_X)$ の元と一対一に対応する．

(証明). $\mathcal{X}$ :: first oder deformation of X を任意の取る．そして affine open cover of X:: $\{U_i\}_{i\in I}$ を任意に取る．この cover についての Čech cohomology を考えていく．

今，$\mathcal{X}|_{U_i}$ :: first order deformation of U_i．定理 (3.2) より，$\theta_i:U_i\times_k\mathbb{I}\to\mathcal{X}|_{U_i}$ が得られる．これを用いて，各 $i,j\in I$ について

$$\theta_{ij}=\theta_i^{-1}\circ\theta_j:U_{ij}\times\mathbb{I}\to U_{ij}\times\mathbb{I}$$

が得られる．ただし $U_{ij}=U_i\cap U_j$（以降の U_{ijk} なども同様）．補題 (3.4) から，これは $d_{ij}\in\Gamma(U_{ij},\mathcal{T}_X)$ に対応する．

θ_{ij} は貼り合わせることが出来るのだから，Gluing Lemma を参照すれば $\theta_{ij}\theta_{jk}\theta_{ik}^{-1}=\mathrm{id}_{U_{ijk}\times\mathbb{I}}$ が得られる．補題 (3.4) の準同型で写せば，

$$d_{ij}+d_{jk}-d_{ik}=0$$

すなわち Čeck 1-cocycle condition が得られる．

first order deformation of X が 2 つあり，その間に同型があるとしよう: $\Psi : \mathcal{X} \to \mathcal{X}'$．$\mathcal{X}'$ について θ'_{ij}, d'_{ij} を $\mathcal{X}$ 同様に定める．次の infiniterimal automorphism を考える．

$$\alpha_i = \theta'_i \circ \Psi|_{U_i} \circ \theta_i : U_i \times \mathbb{I} \to \mathcal{X}|_{U_i} \to \mathcal{X}'|_{U_i} \to U_i \times \mathbb{I}.$$

α_i に $a_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{T}_X)$ が対応しているとする．計算すると $(\alpha_i|_{U_{ij}})^{-1}\theta'_{ij}(\alpha_j|_{U_{ij}}) = \theta_{ij}$ が得られる．すなわち，

$$d'_{ij} - d_{ij} = a_i - a_j.$$

よって $\{d_{ij}\}$ の同値類と $\{d'_{ij}\}$ の同値類は $\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X)$ の中で等しい．

以上より，$\mathcal{X}$ から $\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元への対応は単射的である．逆に $\{d_{ij}\}$ から $\{\theta_{ij}\}$ の対応，θ_{ij} による $U_i \times \mathbb{I}$ の貼り合わせへと手順を遡れば，$\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元と first order deformation of X への対応が全射だと分かる．

最後に，[2] Thm III.4.5 から $\check{H}^1(X, \mathcal{T}_X) \cong H^1(X, \mathcal{T}_X)$． ∎

4 Extension of Sheaves

定義 4.1 (Extension of Sheaves) (i) $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: $\mathcal{O}_X$-module on ringed space X とする．extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ とは，次のような完全列のこと．

$$(\mathcal{E}, \iota, \kappa) : \ 0 \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\ \iota\ } \mathcal{E} \xrightarrow{\ \kappa\ } \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

(ii) $(\mathcal{E}, \iota, \kappa) \to (\mathcal{E}', \iota', \kappa')$ :: homomorphism of extensions of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ とは，次の図式を可換にする homomorphism of sheaves :: $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ のこと．

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{E} \arrow[dd, "\phi"] \arrow[dr, "\kappa"] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & & \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\ & & \mathcal{E}' \arrow[ur, "\kappa'"'] & & \end{tikzcd}$$

(iii) $f : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ と $(\mathcal{E}, \iota, \kappa)$ :: extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ について，$f^*\mathcal{E}$ :: pullback of $\mathcal{E}$ by f を，f と $\kappa : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ の pullback とする．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & f^*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"'] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$f^*\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E} \oplus \mathcal{G}'$ とすると，$\mathcal{G} \to f^*\mathcal{E}$ は $g \mapsto (\iota(g), 0)$ と書ける．

(iv) $g : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ と $(\mathcal{E}, \iota, \kappa)$ :: extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ について，$g_*\mathcal{E}$ :: pushfoward of $\mathcal{E}$ by g を，g と $\iota : \mathcal{G} \to \mathcal{E}$ の pushout とする．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & g_*\mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$g_*\mathcal{E} \subseteq (\mathcal{E} \oplus \mathcal{G}')/\mathcal{S}$ とすると，$g_*\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ は $[e, g'] \mapsto \kappa(e)$ と書ける．

extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ が成す集合を $E(\mathcal{F},\mathcal{G})$ と書く．

定理 4.2
$\mathcal{F},\mathcal{G}$ :: $\mathcal{O}_X$-modules on ringed scheme :: X とする．この時，全単射 $\Phi : E(\mathcal{F},\mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{G})$ が存在する．

これは有名な結果なので証明を書かない．例えば [2] ExIII.6.1 に証明の方針が述べられているし，加群の場合の類似の結果としては [9] pp.259-264 に詳しい証明がある．

定義 4.3(1) split extesion of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ を $0_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ あるいは単に 0 と書く．

$$0_{\mathcal{F},\mathcal{G}} :\ 0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F}\oplus\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

(2) $(\mathcal{E},\iota,\kappa)$ :: extension of sheaves について，$-\mathcal{E} := (\mathcal{E},-\iota,\kappa)$ と定める．
(3) (The Baer sum) $(\mathcal{E},\iota,\kappa),(\mathcal{E}',\iota',\kappa')$ :: extensions of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ に対し，$\mathcal{E}+\mathcal{E}'$ を以下のように定める．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G}\oplus\mathcal{G} \arrow[r, "\iota\oplus\iota'"] \arrow[d, "\nabla"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & \mathcal{E}\oplus\mathcal{E}' \arrow[r, "\kappa\oplus\kappa'"] \arrow[d] & \mathcal{F}\oplus\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{F}\oplus\mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{E}+\mathcal{E}' \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"'] & 0
\end{tikzcd}$$

ただし $\Delta : a \mapsto (a,a), \nabla : (a,b) \mapsto a+b$.

補題 4.4
以下の図式が可換であり，各行は完全であるとする．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{P} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"'] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

この時，$\mathcal{P}$ は pullback of f and κ. 双対により，pushback についても同様の命題が成り立つ．

(証明). 以下，$x \in \mathcal{X}$ と書いたら，x は適当な開集合 U 上の $\mathcal{X}$ の section :: $x \in \mathcal{X}(U)$ を意味する．各射に次のように名前を付ける．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{X} \arrow[drr, bend left, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "\beta"'] & & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\bar{\iota}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{P} \arrow[r, "\bar{\kappa}"] \arrow[d, "\bar{f}"] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"'] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

■$\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{P}$ の構成．　任意の $x \in \mathcal{X}$ をとり，これに対して $y \in \mathcal{P}$ を以下のように定める．

1. x' を $\kappa(x') = \alpha(x)$ なるものとする．
   κ :: surj ゆえ x' が存在することに注意．

2. t' を $\iota(t') = \beta(x) - \bar{f}(x')$ なるものとする．
   $\beta(x) - \bar{f}(x') \in \ker\kappa = \operatorname{im}\iota$ ゆえ t' が存在することに注意．
3. $p = x' + \bar{\iota}(t')$ とする．

こうして得られる写像 $x \mapsto p$ が $\phi : \mathcal{X} \to \mathcal{P}$ を与える．

可換性を確認しよう．

$$\begin{aligned}
\bar{\kappa}(\psi(x)) &= \bar{\kappa}(x') + \bar{\kappa}(\bar{\iota}(t')) = \bar{\kappa}(x') = \beta(x),\\
\bar{f}(\psi(x)) &= \bar{f}(x') + \bar{f}(\bar{\iota}(t')) = \bar{f}(x') + \iota(t') = \bar{f}(x') + \alpha(x) - \bar{f}(x') = \alpha(x).
\end{aligned}$$

■$\mathcal{X} \to \mathcal{P}$ の一意性．　最後に $\phi, \phi' : \mathcal{Z} \to \mathcal{E}f^*$ が同じ可換性を持つと仮定して $\psi = \phi - \phi' = 0$ を示す．仮定から $\bar{\kappa}\psi = 0, \bar{f}\psi = 0$ が成立する．まず前者から

$$\operatorname{im}\psi \subseteq \ker\bar{\kappa} = \operatorname{im}\bar{\iota}$$

なので任意の $x \in \mathcal{X}$ に対して $g \in \mathcal{G}$ が存在し，$\bar{\iota}(g) = \psi(x)$ となる．図式の可換性から次が成立する．

$$\iota(g) = \bar{f}\bar{\iota}(g) = \bar{f}\psi(x) = 0.$$

行の完全性から ι は単射なので $g = 0$．任意の x に対して $\psi(x) = \bar{\iota}(g) = \bar{\iota}(0) = 0$．すなわち $\psi = 0$．　■

補題 4.5

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: $\mathcal{O}_X$-modules on ringed scheme :: X とする．この時，$E(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ には加法群の構造が定まる．

(証明)．$0_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ が Bear sum についての単位元であること，$-\mathcal{E}$ が逆元であること，結合律が成り立つこと，可換性を確かめる．　■

補題 4.6

全単射 $\Phi : E(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ は加法群の間の同型である．

補題 4.7

$g, g' : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ と，extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ をとる．

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

この時，$g_*\mathcal{E} + g'_*\mathcal{E} = (g + g')_*\mathcal{E}$．

(証明)．$g_*\mathcal{E} + g'_*\mathcal{E}$ は以下の pullback/pushout diagram に収まる (fit)．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \arrow[r, "\iota\oplus\iota'"] \arrow[d, "g\oplus g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & \mathcal{E} \oplus \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa\oplus\kappa'"] \arrow[d] & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\nabla"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & g_*\mathcal{E} \oplus g'_*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & g_*\mathcal{E} + g'_*\mathcal{E}' \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u, "\Delta"'] & 0
\end{tikzcd}$$

一行増やして次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \arrow[r, "\iota\oplus\iota"] \arrow[d, "g\oplus g'"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & \mathcal{E} \oplus \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa\oplus\kappa"] \arrow[d] & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \oplus \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, "\nabla"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.o.}"] & g_*\mathcal{E} \oplus g'_*\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{F} \oplus \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, shift left, "\mathrm{pr}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & g_*\mathcal{E} + g'_*\mathcal{E}' \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[u, shift left, "\Delta"] & 0
\end{tikzcd}
$$

左端の縦の射 $\Delta \circ (g \oplus g') \circ \nabla$ は $g + g'$ に等しい[†4]．また，右端の縦の射 $\Delta \circ \mathrm{pr}$ は $\mathrm{id}_{\mathcal{F}}$ に等しい．さらに中央最上部の $\mathcal{E}$ から $\mathcal{M}$ への射と，同じ $\mathcal{E}$ から右下の $\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}$ への射を見ると，pullback の普遍性から所望の射 $\mathcal{E} \to g_*\mathcal{E} + g'_*\mathcal{E}$ の存在が言える．

まとめて，以下の可換図式が得られた．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "g+g'"'] & \mathcal{E} \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & g_*\mathcal{E} + g'_*\mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

補題 (4.4) から左の四角形は pushout diagram であり，pushout の普遍性から $g_*\mathcal{E} + g'_*\mathcal{E} \cong (g + g')_*\mathcal{E}$． ∎

$g_*(-\mathcal{E}) = -g_*\mathcal{E}$,

5 First Order Deformation of a Local Complete Intersection.

この節は 5.11 を証明するための必要最低限の定義と命題のまとめである．元の命題と比較して，このノートでは X を $\mathbb{C}$ 上のものに限定し，defoemation も一般の local artinian ring ではなく $D = \mathbb{C}[\epsilon]$ に限定している．したがって formal deformation([8] 6.1), abstruct lifting([8] 4.2), first order deformation が一致している．

以下，この節では X を以下のようなものとする ([8] Hypotheses4.1)．

- flat,
- generically smooth,
- local complete intersection,
- finite type

scheme over $\mathbb{C}$.

特に stable curve over $\mathbb{C}$ はこれらの条件を満たす．

[†4] この等式を元に考えて一行増やした．

“local complete intersection”の定義を改めて書き下しておく．

定義 5.1 ((local) complete intersection [8] p.21, [2] p.185)
X :: scheme of finite type over $\mathbb{C}$ が complete intersection であるとは次が成立すること: X は P :: smooth scheme over $\mathbb{C}$ ([2] III.10) に埋め込まれ，さらに ideal sheaf :: $\ker(X \hookrightarrow P)$ が $\operatorname{codim}(P, X)$ 個の global section で生成されること ([2] p.121).

X :: scheme of finite type over $\mathbb{C}$ が locally complete intersection であるとは $\mathfrak{U}$ :: open covering of X が存在し，任意の $U \in \mathfrak{U}$ が complete intersection であること．

議論は，$\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$，$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$，$e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ の対応の連鎖である．これらはいずれも first order deformations :: $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ の「差」を表現する量である．ここでの「差」の意味を理解するには，最初に命題 (5.7), (5.8) のステートメントを見るのが良い．そして自明な first order deformation of X :: $X \times D$ と与えられた first order deformation の「差」である $e(\mathcal{X}, X \times D)$ によって first order deformation of X を分類する（定義 5.10）.

5.1 $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

定義 5.2
X :: **complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とする．これの ideal sheaf を $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_P$ とする．$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformation of X とすると，$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1$ :: embedded in P となる．そこで ideal sheaf をそれぞれ $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{O}_P$ とする．first order deformation of X の定義から，$\mathcal{I}_i/\epsilon\mathcal{I}_i \cong \mathcal{I}$ $(i = 1, 2)$.

写像 $\mathcal{I} \to (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ を以下のように定める．まず，$\langle U, f, \in \rangle \mathcal{I}$ に対し，

$$\langle U, \tilde{f}_i \rangle \bmod \epsilon\mathcal{I}_i = \langle U, f \rangle \ (i = 1, 2)$$

となる $\langle U, \tilde{f}_i \rangle$ が存在する．そこで

$$\langle U, f \rangle \mapsto \langle U, \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 \rangle \bmod (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{I} \in (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_P/\mathcal{I}) = (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$$

と写す．これは $\tilde{f}_i$ のとり方に依らず，well-defined．この写像を $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1)$ と書く．

以下の $\mathbb{C}$-module としての同型があるため，$\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ を以下のいずれの集合の元ともみなす．

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{I}, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \\
\cong &\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \\
\cong &H^0(X, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{\ }) \\
\cong &(\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{\ }) \\
\cong &H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{\ })
\end{aligned}$$

命題 5.3 ([8] Prop2.8a,b,c,d,e)
X :: **complete intersection** embedded in P とする．

(a) $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = 0 \iff \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$.
(b) $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) + \nu(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) = \nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3)$.
(c) $\nu(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1) = -\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.
(d) 任意の $\mathcal{X}$ :: first order deformation of X，任意の $\nu \in H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{\ })$ に対し，$\mathcal{Y}$ :: first order deformation of X が存在して，$\nu = \nu(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ となる．

(e) U :: open subset of X について，$\nu(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U) = \nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)|_U : (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)|_U \to (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$.

(証明). (d) のみ証明する．他は自明であろう． ∎

5.2 $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

補題 5.4

X :: **complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とし，ideal sheaf は $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_P$ であるとする．この時，$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ :: locally free sheaf of rank $n := \dim X$.

(証明). local な問題なので，$x \in X \subset P$ での $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ の stalk が free module であることを示す．$A := \mathcal{O}_{P,x}$ とし，$I := \mathcal{I}_x$ を生成する regular sequence を $x_1, \ldots, x_r$ とする．

次の写像を考える．

$$\begin{array}{cccc} \phi : & (A/I)^{\oplus n} & \to & I/I^2 \\ & (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_r) & \mapsto & \sum \bar{a}_i x_i \end{array}$$

ϕ :: surjective は明らかなので injective であることを示す．

$A^{\oplus n} \to (A/I)^{\oplus n}$ と ϕ の合成で 0 になる元を $(a_1, \ldots, a_r) \in A^{\oplus n}$ とする．各 $i = 1, \ldots, r$ について $a_i \in I$ を示す．今，$\sum a_i x_i \in I^2$ なので (TODO)

$$a_r x_r = 0 \text{ in } A/(x_1, \ldots, x_{r-1}).$$

$x_1, \ldots, x_r$ :: regular sequence より，x_r は $A/(x_1, \ldots, x_{r-1})$ において non-zerodivisor なので，$a_r = 0$ in $A/(x_1, \ldots, x_{r-1})$．よって $a_r \in (x_1, \ldots, x_{r-1}) \subseteq I$．[5] p.127 より，各 $a_1, \ldots, a_{r-1}$ についても同様の議論が出来る． ∎

補題 5.5 (First Fundamental Exact Sequence)

X :: **complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とし，ideal sheaf は $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_P$ であるとする．この時，以下は exact.

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow (\Omega_{P/\mathbb{C}})|_X \longrightarrow \Omega_{X/\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

すなわち，$(\Omega_{P/\mathbb{C}})|_X$ :: extension of $\Omega_{X/\mathbb{C}}$ by $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$.

(証明). (TODO) よく知られている通り，最初の射が単射であることを示しさえすれば良い． ∎

定義 5.6

$U \subseteq X$ :: **complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とする．$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformation of X について，

$$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U) := \nu(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U)_*((\Omega_{P/\mathbb{C}})|_X)$$

を extension of $\Omega_{U/\mathbb{C}}$ by $(\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$ として定める．

（TODO: 張り合わせが出来ることに言及．）貼りあわせによって $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ を定める．

命題 5.7 ([8] Prop4.9a,b,c,f)

$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformations of X とする．

(a) $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \cong 0_{\Omega_{X/\mathbb{C}}, (\epsilon D)\otimes \mathcal{O}_X}$.
(b) $\mathcal{E}(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1) = -\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.
(c) $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) + \mathcal{E}(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) \cong \mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3)$.
(d) 任意の $\mathcal{E}$ :: extension of $\Omega_{X/\mathbb{C}}$ by $(\epsilon) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ と任意の $\mathcal{X}$ :: first order deformation of X に対し,

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

なる $\mathcal{Y}$ :: first order deformation of X が存在する.

(証明). (TODO) ∎

命題 5.8 ([8] Prop4.10)
$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformations of X とする. この時, 以下は同値.

1. $\mathcal{X}_1$ と $\mathcal{X}_2$ は同型.
2. $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ :: split extension.

[8] pp.22-23 では更に詳しく, 同型 $\mathcal{X}_1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{X}_2$ が $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ の元に一対一対応することが述べられている. この集合は $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ の中で 0 に潰れていることに注意.

(証明). (TODO) ∎

5.3 $e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

定義 5.9
$T^i(X) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ とおく. $\mathcal{X}$ :: first order deformation of X に対し,

$$e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in \mathrm{Ext}^1(\Omega_{X/\mathbb{C}}, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \cong (\epsilon D) \otimes T^1(X) \cong T^1(X) \cong \mathrm{Hom}((\epsilon D)^*, T^1(X))$$

を, $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X \times D)$ に対応する元とする (4.2).

補題 (4.6) より, 命題 (5.7), (5.8) と同様の命題が $e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ についても性質する.

定義 5.10 (Kodaira-Spencer class/map, [8])
$T^i(X) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ とおく. $\mathcal{X}$ :: first order deformation of X に対し,

$$k_{\mathcal{X}} = e(\mathcal{X}, X \times D) \in T^1(X) \cong \mathrm{Hom}((\epsilon D)^*, T^1(X))$$

とおく. この $k_{\mathcal{X}}$ を Kodaira-Spencer class of $\mathcal{X}$ と呼ぶ. 対応する写像 $K_{\mathcal{X}} : (\epsilon D)^*, T^1(X)$ を Kodaira-Spencer map of $\mathcal{X}$ と呼ぶ.

5.4 Complete Classification.

定理 5.11
First order deformation of X の同値類と $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ の元は一対一に対応する. (cf. [8] Prop 6.12)

(証明). 命題 (5.7), (5.8) より, $\mathcal{X} \mapsto k_{\mathcal{X}}$ がこの対応を与えることは明らか. ∎

系 5.12
X :: nonsingular and have finite dimention ならば，First order deformation of X の同値類と $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元は一対一に対応する．

(証明)．仮定より，$\Omega_{X/\mathbb{C}}$ :: locally free sehaf of finite rank．したがって [2] PropIII.6.7, Prop II.6.3 から次の同型が成立する．

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X \otimes \Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{T}_X \otimes \mathcal{O}_X) \cong H^1(X, \mathcal{T}_X)$$

∎

6 Two Examples of Other Deformation Theories

deformation theory の対象は scheme の他にもある．例えば，次の二つがある．

Deformation of a coherent sheaf :: F on a scheme X, over a fixed scheme

$\mathcal{X}$ :: deformation of X over (S, s_0) とする．deformation of F over X とは，$\mathcal{F}$ :: flat coherent sheaf on $\mathcal{X}$ と homomorphism :: $\phi : \mathcal{F} \to F$ の組であって，誘導される射

$$\phi \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} 1_{\mathcal{O}_X} : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{O}_X \to F$$

が同型であるもの．(ref. [3] §7, p.53)

Deformation of a map $f : X \to Y$ with both X and Y fixed

X, Y :: scheme, (S, s_0) :: $\mathbb{C}$-pointed scheme, $f : X \to Y$ :: morphism とする．Deformation of a map $f : X \to Y$ with both X and Y fixed とは morphism :: $\bar{f} : X \times S \to Y \times S$ であって，$\bar{f}|_{X \times \{s_0\}} = f$ であるもの．(ref. [4]p.93)

それぞれ，first order deformation が成す空間が分かっている．

定理 6.1 ([3] Thm2.7)
X :: scheme over $\mathbb{C}$, F :: coherent sheaf on X とする．この時，F の first order deformation とは，$\mathcal{F}$ :: cohenrent sheaf on $\mathcal{X} = X \times_{\mathbb{C}} D$ と homomorphism :: $\phi : F \to \mathcal{F}$ の組であって誘導される射 $\phi \otimes_D 1_{\mathbb{C}} : \mathcal{F} \otimes \mathbb{C} \to F$ が同型であるものとする．

この時，first order deformation of F over $\mathcal{X}$ の同型類と $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(F, F)$ の元とが，一対一対応する．

系 6.2 ([3] Prop2.6)
上の定理で F を invertible sheaf に限定すると，first order deformation of F over $\mathcal{X} = X \times D$ の同型類は $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ の元と一対一対応する．

(証明)．系 (5.12) の証明と全く同様． ∎

定理 6.3
X, Y :: fiexed scheme, $f : X \to Y$ をとる．この時，first order deformation of a map f with both X and Y fixed の同型類と，$H^0(X, f^*\mathcal{T}_Y)$ の元とが一対一対応する．

こちらについては詳しい文献が見つかっていない．しかし，“Deformation of a map $f : X \to Y$ with only Y fixed”については，解析的な場合について [1] §8 で述べられている．

7 Functor of Artin Rings - Abstruct Deformation Theory

3 つの圏を次のように定める．L :: local noetherian $\mathbb{C}$-algebras with residue field $\mathbb{C}$ とする．

$(\mathrm{LA})_L$: the category of local artinian L-algebras with residue field $\mathbb{C}$.
$(\mathrm{CLN})_L$: the category of complete local noetherian L-algebras with residue field $\mathbb{C}$.
$(\mathrm{LN})_L$: the category of local noetherian L-algebras with residue field $\mathbb{C}$.

$L = \mathbb{C}$ の時は添字を略す．(ref. [7] p.1)

$(\mathrm{LA})_L \subset (\mathrm{CLN})_L \subset (\mathrm{LN})_L$ という包含関係があることに注意．

定義 7.1 ([7] §2.2)
以下のような functor を functor of artin rings と呼ぶ．

$$F : (\mathrm{LA})_L \to (\mathrm{Sets}).$$

ここで $L \in (\mathrm{CLN})$.

$F(\mathbb{C})$ が 1 元集合 (singleton) ならば，F は特に predeformation functor と呼ばれる．

F が functor

$$\mathrm{Hom}_{(\mathrm{CLN})_L}(R, -) \qquad R \in (\mathrm{CLN})_L$$

と同型である時，F :: prorepresentable と言う．

定義 7.2 ([7] §2.2)
formal element semiuniversal formal element universal formal element

predeformation functor :: F が (semi)universal formal element を持つか，ということについては，以下の定理が大変有用である．逆に以下の定理が predeformation functor を考える重要性を示している．

定理 7.3 ([7] Thm 2.3.2, p.56)

参考文献

[1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, and Phillip Griffiths. *Geometry of Algebraic Curves: Volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 2011 edition, 4 2011.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[3] Robin Hartshorne. *Deformation Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2010 edition, 12 2009.

[4] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[5] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge University Press, revised edition, 5 1989.

[6] David Mumford Pierre Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.

[7] Edoardo Sernesi. *Deformations of Algebraic Schemes (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 11 2010.

[8] Angelo Vistoli. The deformation theory of local complete intersections. `https://arxiv.org/abs/alg-geom/9703008`.

[9] 志甫淳. 層とホモロジー代数 (共立講座 - 数学の魅力). 共立出版, 1 2016.