Ex4.9　Suitable Stereographic Projection Gives Birational Map.

X :: projective variety in $\mathbb{P}_k^n$ とし，$r = \dim X \leq n-2$ とする．また H :: hyperplane in $\mathbb{P}^n$ とし，適宜 $\mathbb{P}^{n-1}$ と同一視する．適切に点 $P \notin X$ をとれば，P から H への stereographic projection :: $\pi : X \to \mathbb{P}^{n-1}$ が X と $\pi(X)$ の間の birational map になることを示す．

ある morphism が birational map であるかどうかというのは local な問題なので，X の affine open subset に絞って考える．X は射影変換によって $(1 : \cdots : 1) \in X$ かつ $(1 : 0 : \cdots : 0) \notin X$ であるように出来るのでそのようにし，$Y := X \cap (\mathcal{Z}_p(x_0))^c \subseteq \mathbb{A}^n$ とおく．すると $Y \neq \emptyset, (0, \ldots, 0) \notin Y$ となる．

$I = \mathcal{I}_a(Y) \subseteq k[y_1, \ldots, y_n]$ とし，$\bar{y}_i = y_i \bmod I, K := K(Y) = k(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ とおくと，$K = K(X)$．Thm4.8 より拡大 K/k は finitely and separably generated．Thm4.7 より，$\{\bar{y}_i\}_{i=1}^n$ は separating transcendence base を部分集合として含む．そこで番号を付け替えて，$\{\bar{y}_i\}_{i=1}^n$ に含まれる separating transcendence base を $\{\bar{y}_i\}_{i=1}^r$ としよう．base の濃度が $r(= \dim X = \dim Y)$ であることは Thm3.2 による．そして以下の拡大は finite generated extension である．

$$k(\{\bar{y}_i\}_{i=1}^n)/k(\{\bar{y}_i\}_{i=1}^r).$$

$J = k(\{\bar{y}_i\}_{i=1}^r)$ とおけばこの拡大は K/J と書ける．Thm4.6 から，この拡大は以下のような元 η で生成することが出来る．

$$\eta = \sum_{i=r+1}^n \eta_i x_i \quad \text{where} \quad \eta_{r+1}, \ldots, \eta_n \in J.$$

stereographic projection の像 :: $\pi(Y) \subseteq H$ の function field を L とする．π から誘導される準同型 π^* を次で定める．

$$\begin{array}{cccc} \pi^* : & L & \to & K \\ & f & \mapsto & f \circ \pi \end{array}$$

π は $Q \in Y$ を直線 :: $tP + Q$ と H の交点へ写す写像であった．($P \notin H$ なので $P = 1 \cdot P + 0 \cdot Q$ は予め除いている．) したがって $R \in \pi(Y)$ をとると $(\pi^* f)(tP + R)$ は $t \in k$ について定数．この値は $f(R)$ であるから π^* は単射である．逆に $g \in K$ から得られる関数 $g(tP + Q)$ が t について定数ならば，$f(R)$ $(R \in \pi(Y))$ を $g(\pi^{-1}(R))$ [†1] と置くことで $g = \pi^* f$ となる $f \in L$ が取れる．以上から，K の任意の元 g について次の条件 $\mathcal{C}(g)$ が成立すれば π^* は同型写像と成る: 任意の $Q \in X$ に対し $g(tP + Q)$ は $t \in k$ について定数である．

さて，既に分かっている通り $K = k(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r, \eta)$ であった．なので $\mathcal{C}(\bar{y}_1), \ldots, \mathcal{C}(\bar{y}_r), \mathcal{C}(\eta)$ の全てが成立すれば良い．

引き続き $Q \in Y$ とする．$P = (p_1, \ldots, p_n), Q = (q_1, \ldots, q_n)$ とすると

$$tP + Q = (tp_1 + q_1, \ldots, tp_n + q_n).$$

なので $p_1 = \cdots = p_r = 0$ すなわち $P \in \mathcal{Z}_a(y_1, \ldots, y_r) \subseteq \mathbb{A}^n$ であれば $\mathcal{C}(\bar{y}_1), \ldots, \mathcal{C}(\bar{y}_r)$ は成立する．以下，P はこのようにとる．$tP + Q \in X$ であるような t について $\eta(tP + Q)$ は次のように成る．

$$\eta(tP+Q) = \sum_{i=r+1}^n \eta_i(q_1, \ldots, q_r)(tp_i + q_i) = \left(\sum_{i=r+1}^n \eta_i(q_1, \ldots, q_r) p_i \right) t + \left(\sum_{i=r+1}^n \eta_i(q_1, \ldots, q_r) q_i \right)$$

[†1] これは $\{g(tP + R) \mid t \in k, tP + R \in Y\}$ に等しい．単元集合なので関数 f を定めることが出来る．

よって $p_{r+1} = \cdots = p_n = 0$ であれば $\mathcal{C}(\eta)$ も成立する．結局，$P = (0, \ldots, 0)$ であれば良い．最初に $(0, \ldots, 0) \notin Y$ としていたから，これは正しく stereographic projection を定める．この stereographic projection はもとの射影空間で言うと $P = (1 : 0 : \cdots : 0) \notin X$ から定まるものに一致する．