Ex8.1　Strengthen Some Results in the Text.

(a)

(b)

(c)

(d)

Ex8.2　$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 0$.

X :: variety of dimension n over k, $\mathcal{E}$ :: locally free sheaf of rank $> n$, $V^{\#} \subset \Gamma(X, \mathcal{E})$ :: k-vector space of global sections which generate $\mathcal{E}$ とする．X :: variety より X :: connected なので $\mathcal{E}$ の rank は X 全体で一定である．$\operatorname{rank} \mathcal{E} = r (> n)$ としておこう．

主張 Ex8.2.1
ある $s \in V$ について次が成立する．

$$^{\forall} x \in X, \quad s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x.$$

■Convensions and Notations.　X の closed point 全体を X^+ と書く．Ex3.14 より，これは dense in X．また，$d = \dim_k V^{\#}, V = \mathbb{P}_k^{d-1}$ とし，$V^+ = (V^{\#} - \{0\})/k^*$ を V の closed points と同一視する．この同一視の仕方は Prop7.7 や dual projective space と同じである．$\dim_k V^{\#} - 1 = \dim V$ に注意．$V^{\#}$ の subspace も同様に V の subspace とみなす．

■Definition of B, B^+.　$B \subseteq X \times_k V$ を次のように置く．

$$B = \bigcap_{s \in V^{\#}} \operatorname{pr}_1^{-1}(\{x \in X \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}).$$

B は $X \times V$ の closed subscheme である．($\{\}$ 部分が closed であることは Ex2.16 を参照．) B には reduced structure を与えておく．$\operatorname{pr}_1|_B : B \to X$ を p_1 と略す．B の closed points :: B^+ は次のような集合である．

$$B^+ = \{(x, s) \in X^+ \oplus V^+ \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}.$$

■Plot.　主張は，$\operatorname{pr}_2(B) \not\supseteq V^+$ と言い換えられる．（詳細は後ほど．）これには B の次元が V の次元より小さいことを言えば良い．B の次元は Ex3.22 の結果を用いればその fiber :: B_x から計算できる．全ての $x \in X$ について $\dim B_x$ を計算することは難しい．しかし少し妥協して，$x \in X^+$ についての $\dim B_x$ を計算することは出来る．この場合でも Ex3.22c の結果を用いて $\dim B_x$ が計算できる．

■Definition of ϕ_x.　$x \in X$ について次の写像を考える．

$$\begin{array}{cccc} \phi_x : & V^{\#} & \to & \mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \\ & s & \mapsto & s_x \otimes 1 \end{array}$$

これが k-linear map であることは明らか．$k(x) := \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x$ より $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$．このことと ϕ_x の定義の仕方から，$\ker \phi_x = \{s \in V^{\#} \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}$.

■ϕ_x for $x \in X^+$.　この段落では $x \in X^+$ とする．すると $k(x) = k$ [†1] なので $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x$．また $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$．さらに $V^\#$ :: global generators of $\mathcal{E}$ であるから，ϕ_x は surjective．なので $x \in X^+$ について $\dim \ker \phi_x$ が分かる．

$$\dim_k \ker \phi_x = \dim_k V^\# \otimes_k k(x) - \dim_k \mathcal{E}_x = \dim_k V^\# - r.$$

■Dimension of fiber :: $\dim B_x$.　p_1 についての $x \in X^+$ の fiber :: B_x の base space は，Ex3.10 より，$\operatorname{sp} B_x \approx p_1^{-1}(x)$．したがって次が分かる．

$$\operatorname{sp} B_x \cap \operatorname{sp} B^+ \approx p_1^{-1}(x) \cap \operatorname{sp} B^+ = \{x\} \times \ker \phi_x.$$

ここで $\times$ は集合としての直積を表す．よって B_x の次元が分かる[†2]．

$$\dim B_x = \dim_k \ker \phi_x - 1 = \dim_k V^\# - r - 1 = \dim V - r.$$

■p_1 :: closed map.　$V \to \operatorname{Spec} k$ は projective であり，$V, \operatorname{Spec} k$ 共に noetherian であるからこの射は proper．よって universally closed である．

$$\begin{tikzcd}
X \times_k V \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & V \arrow[d, "\substack{\text{universally}\\ \text{closed}}"] \\
X \arrow[r] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

B :: closed なので B の closed subset は X でも closed．したがって $p_1 = \mathrm{pr}_1|_B$ :: closed map.

■$p_1(B) = X$ or $B = \emptyset$.　$p_1(B) \supseteq X^+$ とする．すると $p_1(B)$ :: closed より $p_1(B) \supseteq \mathrm{cl}_X(X^+) = X$．次に $p_1(B) \not\supseteq X^+$ とする．すると上で述べたこと（全ての $x \in X^+$ について $\dim p_1^{-1}(x)$ が等しいこと）から，結局 $p_1(B) \cap X^+ = \emptyset$ が分かる．$p_1(B)$ が空でないと仮定しよう．すると p_1 :: closed map より，$x \in p_1(B)$ なら $\mathrm{cl}_X(\{x\}) \subseteq p_1(B)$．$\mathrm{cl}_X(\{x\})$ は closed point を含むので矛盾が生じる．よって $p_1(B) \not\supseteq X^+$ ならば $p_1(B) = \emptyset$．これは $B = \emptyset$ を意味し，さらにこれは 0 を除く全ての $V^\#$ の元が claim の条件を満たすことを意味する．以下，$B \neq \emptyset$ と仮定する．

■$p_1^{-1}(x)$ :: irreducible.　任意の closed point :: $x \in X^+$ について $p_1^{-1} = (\ker \phi_x - \{0\})/k^*$．これは projective linear space だから irreducible.

■B :: irreducible.　以上から B :: irreducible が分かる．B が二つの閉集合 C_1, C_2 の和であったとすると，$x \in X^+$ について $p_1^{-1}(x)$ は次のように書ける．

$$p_1^{-1}(x) = (C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)) \cup (C_2 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)).$$

[†1] X :: variety より，k :: algebraically closed field かつ X :: finite type / k. $A = k[x_1, \ldots, x_n], \mathfrak{a} \subseteq A$ とし，$\mathfrak{m}/\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \subseteq X$ が x に対応する極大イデアルだとする．ここで $\mathfrak{m}$ は A の極大イデアル．$S = A - \mathfrak{m}$ とすると

$$k(x) = \frac{S^{-1}(A/\mathfrak{a})}{S^{-1}(\mathfrak{m}/\mathfrak{a})} \cong S^{-1}\left(\frac{A/\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}\right) \cong S^{-1}(A/\mathfrak{m}).$$

$A/\mathfrak{m} \cong k$ は体だから，これは $k(x) \cong k$.

[†2] closed subscheme of B :: C について $\dim C = \dim C \cap B^+$ を示す．$C \cap B^+ \subset C$ より $\dim C \geq \dim C \cap B^+$ は明らか．$d = \dim C$ とし，C の irreducible closed subset が成す真の極大上昇鎖をとる: $Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_d$. closed immersion $\implies$ finite type に注意すると，Z_i :: finite type/k. なので Ex3.14 より $Z_i \cap B^+$ :: dense in Z_i．したがって $Z_i \cap B^+ = Z_j \cap B^+ \implies Z_i = Z_j$ となり，$Z_0 \cap B^+ \subsetneq \cdots \subsetneq Z_d \cap B^+$ は B^+ の irreducible closed subset が成す真の上昇鎖．以上から $\dim C \leq \dim C \cap B^+$ も成り立つ．

これは irreducible だから，$C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ か $C_2 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ に一致する．$x_1, x_2 \in X^+$ について次のようになっていたと仮定しよう．

$$p_1^{-1}(x_1) = C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x), \quad p_1^{-1}(x_2) = C_2 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x).$$

すると，$x_1 \in, x_2 \notin p_1(C_1)$ となる．$p_1(C_2)$ も同様．すなわち $p_1(C_1), p_1(C_2)$ は $p_1(B)(= X)$ 空でないの真の閉集合である．しかし $X = p_1(B) = p_1(C_1) \cup p_1(C_2)$ であり X :: irreducible であるから，これはありえない．よって任意の $x \in X^+$ について $p_1^{-1}(x) = C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)$（あるいは $= C_2 \cap \ldots$）となる．両辺で $\bigcup_{x \in X^+}$ として

$$p_1^{-1}(X^+) = C_1 \cap p_1^{-1}(X^+).$$

$p_1^{-1}(X^+) = (X^+ \times V) \cap B \supset B^+$ であり，B^+ :: dense in B．$B^+ \cap C_1$ :: dense in C_1 も Ex3.14 から得られるので，両辺の B での閉包を取って $B = C_1$．したがって B :: irreducible.

■Dimension of B.　B :: integral & finite type/k ($\implies$ variety/k) なので，Ex3.22c から次が成り立つ: $x \in U$ ならば $\dim B_x = \dim B - \dim X$，となる U :: open dense subset in X が存在する．U :: non-empty open subset と X^+ :: dense から，$U \cap X^+ \neq \emptyset$．$x \in X^+$ であるときの及び開集合 $\dim B_x$ が既に分かっているから，$\dim B$ も分かる．

$$\dim B = \dim B_x + \dim X = \dim V - r + n.$$

$r > n$ なので，$\dim B < \dim V$.

■$\mathrm{pr}_2(B) \supseteq V^+ \implies \dim B \geq \dim V$.　$\mathrm{pr}_2(B) \supseteq V^+$ としよう．B^+ の場合と同様に $\dim V^+ = \dim V$．ch I, Ex1.10 より，$\dim U = \dim V$ を満たす affine open subset of V :: U がとれる．適当に $\mathrm{pr}_1(B)$ からも affine open subset :: U' をとると，X, V 共に finite type $/k$ だから，ch I, Ex3.15 (Products of Affine Varieties) が使える．よって $\dim U \times U' = \dim U + \dim U' \geq \dim U = \dim V$．$U \times_k U' \subset B$ だから $\dim B \geq \dim V$

■Complete proof of the claim.　今はこれの対偶が成立する．すなわち，$s \in V^+ - \mathrm{pr}_2(B)$ が存在する．この s と任意の $x \in X$ について $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ が成り立つ.

■An exact sequence.　Φ を以下で定める.

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{E} \\ & \langle U, \sigma \rangle & \mapsto & \langle U, (s|_U) \cdot \sigma \rangle \end{array}$$

これの $x \in X$ における stalk を見ると，$\Phi_x : \sigma_x \mapsto s_x \cdot \sigma_x$ と成っている．$\mathcal{E}_x \cong \mathcal{O}_x^{\oplus r}$ かつ $\mathcal{O}_x$ :: domain より，$\mathrm{Ann}(\mathcal{E}_x) = 0$．そして $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ から，$s_x \neq 0$．なので Φ_x は，したがって Φ は injective．よって $\mathcal{E}' = \mathrm{coker}\, \Phi$ とおくと以下は exact sequence.

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 0.$$

■$\mathcal{E}'$ :: locally free.　$\mathcal{E}'$ が locally free であることを示そう．Ex5.7b から，任意の点における stalk が free であることを示せば十分．以下，$\mathcal{E}_x = \mathcal{O}_x^{\oplus r}$（$\cong$ でなく $=$）とする．点 $x \in X$ について

$$s_x = (s_x^{(i)})_i \in \mathcal{O}_x^{\oplus r} = \mathcal{E}_x$$

とする．$s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x = \mathfrak{m}_x^{\oplus r}$ から，ある i について $s_x^{(i)} \notin \mathfrak{m}_x$．すなわち $s_x^{(i)}$ :: unit．ここでは $i = 0$ とし，

$$u = (s_x^{(0)})^{-1} s_x = \left(1, s_x^{(2)}(s_x^{(0)})^{-1}, \ldots, s_x^{(r)}(s_x^{(0)})^{-1}\right) \in s_x \mathcal{O}_x$$

と置く．すると $\mathcal{E}'_x \cong \mathcal{E}_x / \mathrm{im}\, \Phi_x = \mathcal{O}_x^{\oplus r} / s_x \mathcal{O}_x$ は次の写像で $\mathcal{O}_x^{\oplus r-1}$ と同型.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_x^{\oplus r}/s_x\mathcal{O}_x & \to & 0 \oplus \mathcal{O}_x^{\oplus r-1} \\ (t^{(j)})_j \bmod s_x\mathcal{O}_x & \mapsto & (t^{(j)})_j - t^{(0)}u \end{array}$$

well-defined であることは明らか．逆写像は次のもの．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_x^{\oplus r-1} & \to & \mathcal{O}_x^{\oplus r}/s_x\mathcal{O}_x \\ t & \mapsto & (0 \oplus t) \bmod s_x\mathcal{O}_x \end{array}$$

(i)　B の別構成.

$d+1 = \dim_k V^\#$ とし，$\mathcal{V} = (V^\#)^\sim$ とする．$V^\# \cong k^{\oplus d+1}$ から $\mathcal{V}$ は $\operatorname{rank}\mathcal{V} = d+1$ の locally free sheaf となる．そして全射 $\mathcal{V} \otimes_k \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$ が $\langle U, s\rangle \otimes \langle U, a\rangle \mapsto \langle U, sa\rangle$ の様に構成できる[†3]．これの ker を $\mathcal{B}$ とおく．

$$0 \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

構成から $\mathcal{B}$ :: locally free と $\operatorname{rank}\mathcal{B} = d+1-r$ が分かる（？）．双対をとる．（すなわち $\mathscr{H}\!om(-, \mathcal{O}_X)$ で写す.）

$$0 \longrightarrow \check{\mathcal{E}} \longrightarrow \check{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \check{\mathcal{B}} \longrightarrow 0$$

全射 $\check{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{O}_X \to \check{\mathcal{B}}$ から，injective X-morphism :: $\mathbb{P}(\check{\mathcal{B}}) \to \mathbb{P}_k^d \times X$ が誘導される（？）．ここでの $\mathbb{P}(\check{\mathcal{B}})$ が B である（？）．構成の仕方から，$\dim B = \operatorname{rank}\check{\mathcal{B}} - 1$.

(ii)　$\mathcal{E}'$ :: locally free の別証明.

任意の点 $x \in X$ における stalk を考える．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_x \xrightarrow{\times s_x} \mathcal{E}_x \longrightarrow \mathcal{E}'_x \longrightarrow 0$$

これを $\otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)$ で写し，$k(x)$-module の exact sequence にする．

$$\mathcal{O}_x \otimes k(x) \xrightarrow{\times(s_x \otimes 1)} \mathcal{E}_x \otimes k(x) \longrightarrow \mathcal{E}'_x \otimes k(x) \longrightarrow 0$$

同型で書き換える．

$$k(x) \xrightarrow{\times(s_x)^-} \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x \longrightarrow \mathcal{E}'_x \otimes k(x) \longrightarrow 0$$

ただし $(s_x)^- = s_x \bmod \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$．これは $s_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ から，0 でない．したがって左の写像は $1 \in k(x)$ を非ゼロ元に写す．この exact sequence は $k(x)$-module のものだったから，左の写像は injective．よって次が分かる．

$$\dim_{k(x)} \mathcal{E}'_x \otimes k(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{E}_x \otimes k(x) - \dim_{k(x)} k(x) = r - 1.$$

すなわち $\dim_{k(x)} \mathcal{E}'_x \otimes k(x)$ は $x \in X$ について定数関数．Ex5.8 より，$\mathcal{E}'$ :: locally free と分かる．

[†3] $\mathcal{O}_X$ が k-module であることは次のように分かる．今，$f : X \to \operatorname{Spec} k$ が存在するので $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k} \to f^*\mathcal{O}_X$ が存在する．これの adjoint :: $f^{-1}\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k} \to \mathcal{O}_X$ を考えれば，開集合 $U \subseteq X$ について $\mathcal{O}_X(U)$ が k-module であることが分かる．また，ここで書いた $\mathcal{V} \otimes_k \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$ の定義は presheaf :: $U \mapsto \mathcal{V}(U) \otimes_k \mathcal{O}_X(U)$ からの morphism なので sheafification が必要である．

Ex8.3 Product Schemes.

(a) $\Omega_{X\times_S Y/S} \cong \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/S} \oplus \mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/S}$.

S :: scheme, X, Y :: scheme $/S$ とする．Thm8.10 より，$\Omega_{X\times Y/Y} \cong \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/S}$ が分かる．これと Thm8.11 を合わせて次の完全列が得られる．

$$\mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/S} \longrightarrow \Omega_{X\times Y/S} \longrightarrow \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/S} \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

X と Y を交換したものと合わせて次の図式を得る．これは $\mathcal{O}_{X\times Y}$-module の図式である．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/S} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\gamma}"] & \Omega_{X\times Y/S} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] & \mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/S} \arrow[r] & 0 \\
0 & \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/S} \arrow[l] & \Omega_{X\times Y/S} \arrow[l] & \mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/S} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

この図式において $\bar{\gamma}$ は $\Omega_{X\times Y/S}$ を経由する射の合成である．$\gamma = \mathrm{id}_{\mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/S}}$ が示せれば，α :: inj & split が得られる．これは $X \times Y$ の open affine cover をとって local に調べれば良い．$\operatorname{Spec} R \subseteq S, \operatorname{Spec} A \subseteq X, \operatorname{Spec} B \subseteq Y$ を任意にとり，$C = A \otimes_R B$ とする．図式全体を $\Gamma(\operatorname{Spec} C, -)$ で写す．Ω の構成から，これは次のように成る．これは C-module の図式である．

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega_{A/S} \otimes_A C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & \Omega_{C/S} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] & \Omega_{B/S} \otimes_B C \arrow[r] & 0 \\
0 & \Omega_{A/S} \otimes_A C \arrow[l] & \Omega_{C/S} \arrow[dl, "\beta"] & \Omega_{B/S} \otimes_B C \arrow[l] & \\
 & \Omega_{C/A} \arrow[u, "\cong"] & & &
\end{tikzcd}$$

それぞれの写像は次のように定義される (Matsumura, p.193 & Eisenbud, Prop16.4)．

$$\begin{array}{rccc}
\alpha: & [\mathrm{d}_{A/S}\, a] \otimes c & \mapsto & [\mathrm{d}_{C/S}\, (a \otimes 1_B)] \cdot c \\
\beta: & \mathrm{d}_{C/S}\, c & \mapsto & \mathrm{d}_{C/A}\, c \\
\cong: & \mathrm{d}_{C/A}\, (a \otimes b) & \mapsto & [\mathrm{d}_{A/S}\, a] \otimes (1_A \otimes b)
\end{array}$$

よって γ は次のように成る．

$$[\mathrm{d}_{A/S}\, a] \otimes c \mapsto [\mathrm{d}_{C/S}\, (a \otimes 1_B)] \cdot c \mapsto [\mathrm{d}_{C/A}\, (a \otimes 1_B)] \cdot c \mapsto ([\mathrm{d}_{A/S}\, a] \otimes 1_C) \cdot c = [\mathrm{d}_{A/S}\, a] \otimes c.$$

以上より $\gamma = \mathrm{id}$ が示された．

(b) $\omega_{X\times Y} \cong \mathrm{pr}_X^* \omega_X \otimes \mathrm{pr}_Y^* \omega_Y$.

X, Y :: nonsingular varieties over a field k とする．$d_X = \dim X, d_Y = \dim Y$ とする．この時 Thm8.15 より，$\Omega_{X/k}, \Omega_{Y/k}$ はそれぞれ rank $= d_X, d_Y$ の locally free sheaf である．また (a) の完全列 $(*)$ より，$\operatorname{rank} \Omega_{X\times_k Y/k} = d_X + d_Y$ [†4]．

Ex5.16d を (a) の完全列 $(*)$ に用いれば，

$$\omega_{X\times Y} = \bigwedge^{d_X+d_Y} \Omega_{X\times Y/k} \cong \left(\bigwedge^{d_X} \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/k} \right) \otimes \left(\bigwedge^{d_X} \mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/k} \right).$$

[†4] 各点での stalk をとって rank が additive であることを使えば分かる．

Ex5.16e より $\mathrm{pr}_X^*, \mathrm{pr}_Y^*$ はそれぞれ $\bigwedge$ と交換できる．よって $\omega_{X\times Y} \cong \mathrm{pr}_X^* \omega_X \otimes \mathrm{pr}_Y^* \omega_Y$.

(c) An Example that Gives $p_g \neq p_a$.

$Y \subset \mathbb{P}_k^2$ を non-singluar cubic curve とする．さらに $Y \times_k Y$ を Segre embedding で $\mathbb{P}^8$ に埋め込んだものを X とする．

Example8.20.3 より，$\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(0) = \mathcal{O}_Y$．したがって (b) より $p_g(X)$ が計算できる．

$$p_g(X) = \dim_k \Gamma(X, \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}_Y \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{O}_Y) = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \dim_k k = 1.$$

ここで Ex5.11: $\mathcal{O}_X(1) \cong \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{O}_Y(1)$（両辺に逆元をテンソルすれば利用した同型が得られる）と Ex4.5d を順に用いた．

I, Ex7.2b より $p_a(Y) = \frac{1}{2}(3-1)(3-2) = 1$．同じく I, Ex7.2e より $p_a(X)$ が計算できる．

$$p_a(X) = (p_a(Y))^2 - 2p_a(Y) = -1.$$

(i) Direct Calc of ω_Y.

体 k の標数は 0 としておく．$U_z = \mathcal{Z}_p(z)^c \cong \mathbb{A}^2$ とし，$Y \cap U_z \subset \mathbb{A}^2$ の定義多項式を $y^2 - f(x) \in k[x,y]$ とする．ただし $\deg f = 3$.

$$B = k[x,y], \quad I = (y^2 - f(x))B, \quad C = B/I$$

と置いて加群 $\Omega_{C/k}$ を求めよう．$\omega_Y = \bigwedge^1 \Omega_{Y/k} \cong \Omega_{Y/k}$ だから，ω_Y も以下の計算から分かる．second exact sequence (Thm8.4) を用いると $\Omega_{C/k}$ が計算できる．

$$\begin{aligned}\Omega_{C/k} &\cong \frac{\Omega_{B/k} \otimes_B C}{\delta(I/I^2)} \\ &\cong \frac{(B\mathrm{d}x \oplus B\mathrm{d}y) \otimes C}{\langle \mathrm{d}\alpha \otimes 1 \mid \alpha \in I \rangle} \\ &\cong \frac{C\mathrm{d}\bar{x} \oplus C\mathrm{d}\bar{y}}{\langle 2\bar{y} \cdot \mathrm{d}\bar{y} - (\partial_x f)\mathrm{d}\bar{x} \rangle}.\end{aligned}$$

ここで $\bar{x} = x \bmod I, \bar{y} = y \bmod I$ とした．以下，これらの $\bar{\square}$ は省略する．

点 $\mathfrak{p} \in C$ における $\Omega_{C/k}$ の局所化を計算する．Y :: non-singular から，$2y, \partial_x f$ の両方が同時に 0 になることはない．なので任意の点において $\mathrm{d}x = (*)\mathrm{d}y$ あるいは $\mathrm{d}y = (*)\mathrm{d}x$ の形になる．より詳細には次の通り．

$$(\Omega_{C/k})_{\mathfrak{p}} \cong \begin{cases} C_{\mathfrak{p}}\mathrm{d}x & \text{if} \quad \mathfrak{p} \in D(y) \\ C_{\mathfrak{p}}\mathrm{d}y & \text{if} \quad \mathfrak{p} \in D(\partial_x f). \end{cases}$$

よって $\operatorname{rank} \Omega_{C/k} = 1$.（TODO: $\Omega_{Y/k} \cong \mathcal{O}_Y$ は示せるか？）

Ex8.4 Complete Intersections in $\mathbb{P}^n$.

k :: algebraically closed field とする．nonsingular は variety にのみ定義されている性質であることに注意.

定義 Ex8.4.1

closed subscheme of $\mathbb{P}_k^n$ :: Y は，Y の定義イデアル $I \subseteq S = k[x_0, \ldots, x_n]$ が $r = \operatorname{codim}(Y, \mathbb{P}^n)$ 個の元で生成される時，(strict, global) complete intersetion と呼ばれる．

(a) Y :: complete intersetion $\iff Y = H_1 \cap \cdots \cap H_r$.

主張 Ex8.4.2
$Y(\neq \emptyset)$ :: closed subscheme of $\mathbb{P}^n$ が codim $= r(< n)$ の complete intersection であることと，hypersurfaces :: $H_1, \dots, H_r \subseteq \mathbb{P}^n$ が存在して scheme として $Y = H_1 \cap \cdots \cap H_r$，すなわち $\mathcal{I}_Y = \mathcal{I}_{H_1} + \cdots + \mathcal{I}_{H_r}$ となることは同値.

$I = \Gamma_*(\mathcal{I}_Y), I_i = \Gamma_*(\mathcal{I}_{H_i})$ とおく.

補題 Ex8.4.3
nonempty closed subscheme に対応する ideal sheaf $\mathcal{I} \subsetneq \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}$ が locally principal であるとき，$I = \Gamma_*(\mathcal{I}) \subsetneq S, S_+$ は principal ideal.

(証明). Remark 6.17.1 を参照すると，$\mathcal{I}$ は effective Cartier divisor に対応し，$\mathbb{P}^n_k$ の effective Cartier divisor は effective Weil divisor に対応する．したがって $\mathcal{I}$ は有限個の prime Weil divisor(=irreducible hypersurface) の和に対応する．それぞれの irreducible hypersurface の定義多項式の積を f とすれば $Y \cong \operatorname{Spec} S/(f)$．$(f)$ は saturated ideal であり，I も saturated ideal. よって Ex5.10 より $I \cong (f)$ (as sub S-module). ∎

補題 Ex8.4.4
$\tilde{\square}$ はイデアルの和と可換.

(証明). $I = I_1 + I_2 \subseteq S$ とし，定義にしたがって $\tilde{I}$ を計算する．U :: open in $\mathbb{P}^n$ を任意にとる．まず $\tilde{I}(U)$ の元は $U \to \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} I_{(\mathfrak{p})}$ という型の関数であった．局所化は和と交換できるから，

$$(I_1 + I_2)_{(\mathfrak{p})} = (I_1)_{(\mathfrak{p})} + (I_2)_{(\mathfrak{p})}.$$

よって

$$\bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} I_{(\mathfrak{p})} = \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} (I_1)_{(\mathfrak{p})} + \bigsqcup_{\mathfrak{p} \in U} (I_2)_{(\mathfrak{p})}.$$

$\phi \in \tilde{I}(U)$ は，以下の条件を満たす関数だと定義されている: 任意の点 $\mathfrak{p} \in U$ について

$$\mathfrak{p} \in D_+(f) \subseteq U \text{ and } {}^\forall \mathfrak{q} \in D_+(f), \quad \phi_{\mathfrak{q}} \in I_{(f)} \subseteq I_{(\mathfrak{q})}.$$

を満たす $f \in S_+$ が存在する．$I_{(f)} = (I_1)_{(f)} + (I_2)_{(f)}$ であるから，ϕ は $\phi_1 \in \tilde{I}_1(U), \phi_2 \in \tilde{I}_2(U)$ の和で書ける． ∎

一方，一般に Γ_* は和と可換でない（と思う）.

■ $\Longrightarrow$. I の生成元を $f_1, \dots, f_r$ とし，$H_i = \operatorname{Proj} S/(f_i)$ とする．$I = \sum_i (f_i)$ は明らか．よって補題と Prop5.15 ($\Gamma_*(\mathcal{F})\tilde{} \cong \mathcal{F}$) から $\mathcal{I}_Y \cong \tilde{I} = \sum_i \mathcal{I}_{H_i}$ が得られる.

■ $\Longleftarrow$. $I_i = (f_i), J = \sum_i I_i = (f_1, \dots, f_r)$ とおく．補題から次が得られる.

$$\tilde{J} = \left(\sum_i I_i \right)\tilde{} = \sum_i \tilde{I}_i = \sum_i \mathcal{I}_{H_i} = \mathcal{I}_Y.$$

よって $\Gamma_*(\tilde{J}) = I$. Ex5.10c から $\Gamma_*(\tilde{J})$ は J の saturation :: $\bar{J}$ である．したがって J は r 個の元で生成され，また Ex5.10b から $\operatorname{Spec} S/J = \operatorname{Spec} S/I = Y$ も成立する．しかし complete intersection は特定のイデアル $I = \Gamma_*(\mathcal{I}_Y)$ が r 個の元で生成されるという性質である．なので最後に $J = \Gamma_*(\tilde{J})$，すなわち J :: saturated を示そう.

主張 Ex8.4.5
J の最短準素イデアル分解を $J=\bigcap_l \mathfrak{q}_l$ とし，$\mathfrak{p}_l=\sqrt{\mathfrak{q}_l}$ と置く．J :: not saturated ならば，ある l について $\mathfrak{p}_l=\mathfrak{m}:=(x_0,\ldots,x_n)$.

今 height $J=\dim\operatorname{Spec}S/J=\dim Y=r$ であり，これは J の生成元の個数に等しい．したがって Matsumura, Thm17.6 と S :: Cohen-Macaulay ring より，J は unmixed，すなわち，J に属す極小素イデアルの高さは全て $r(<n)$ に等しい．一方，height $\mathfrak{m}=n$ であるから，$\mathfrak{m}$ は J に属す極小素イデアルでない．よって J :: saturated.

(証明)．J :: saturated は，Ex5.10 において次のように定義されている．

$$^\forall s\in S,\quad s\in J \iff {}^\forall i=0,\ldots,n,\quad {}^\exists t\geq 0,\quad x_i^t s\in J.$$

これは次のように書き直せる．

$$^\forall s\in S,\quad s\in J \iff \mathfrak{m}\subseteq\sqrt{(J:s)}.$$

$\sqrt{(J:s)}=\bigcap_l\sqrt{(\mathfrak{q}_l:s)}$ と Ati-Mac Lemma4.4 を使えば更にわかりやすく成る．

$$^\forall s\in S,\quad s\in J \iff \mathfrak{m}\subseteq\bigcap_{s\notin\mathfrak{q}_l}\mathfrak{p}_l.$$

J :: not saturated であるから，次を満たす $s\in S$ が存在する．

$$s\notin J=\bigcap_l\mathfrak{q}_l \text{ and } \mathfrak{m}\subseteq\bigcap_{s\notin\mathfrak{q}_l}\mathfrak{p}_l.$$

前半から $s\notin\mathfrak{q}_l$ なる l が存在する．この l について後半から $\mathfrak{m}\subseteq\mathfrak{p}_l$．$\mathfrak{m}$ :: maximal ideal なので $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}_l$．この条件を満たす l が複数あったとしても，$\mathfrak{m}$ :: maximal ideal であるからそのような全ての l について $\mathfrak{m}=\mathfrak{p}_l$．（最短準素イデアル分解を考えていたからこのような場合は起こりえないのだが.） ∎

(b) Y :: normal complete intersection of dim ≥ 1 in $\mathbb{P}^n$ is projectively normal.

$Y=\operatorname{Proj}S/I$ の代わりに affine cone :: $C=\operatorname{Spec}S/I\subset\mathbb{A}_k^{n+1}$ を考える．これが normal であるとき，I, Ex3.17d から S/I :: integrally closed. すなわち Y :: projectively normal. Thm8.23b より C :: regular in codim 1 から C :: normal が得られるので，こちらを示す．

C の projective closure を $\bar{C}\subseteq\mathbb{P}^{n+1}$ とする．$P\in\bar{C}$ を the vertex of cone(:: closed point)，$\pi:\bar{C}-P\to Y$ を projection とする．この時 Ex6.3a(Cone) より $\pi^{-1}(U_i)\cong U_i\times\mathbb{A}^1$ を満たす open cover of Y :: $\{U_i\}$ が存在する．各 U_i が regular なので Prop6.6($\mathrm{Cl}(X)\cong\mathrm{Cl}(X\times\mathbb{A}^1)$) の証明から $U_i\times\mathbb{A}^1$ :: regular in codim 1．合わせて，$\bar{C}-P$ :: regular in codim 1. $U_0=(V(x_0))^c\cong\mathbb{A}^{n+1}$ とすると，$C-P\cong(\bar{C}-P)\cap U_0$．regular in codim 1 は local な性質だから $C-P$ :: regular in codim 1 $\dim C=\dim Y+1>1$ だから，$\operatorname{codim}(P,C)=\dim C-0>1$．よって結局 C :: regular in codim 1.

(c) With same hypotheses as (b), $\Gamma(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l))\to\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y(l))$ is surj.

(b) と Ex5.14d から，

$$\Gamma(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(l))\to\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y(l))$$

は任意の $l\geq 0$ について surjective. Ex4.5 より $\Gamma(\mathbb{P}^n,\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n})=k$ だから，これは k-algebra homomorphism である．

さらに $l=0$ とすると，Y :: connected が示せる．Ex5.14a の証明から Y は integral scheme の disjoint union である．なので Y の connected component の個数を m とすると，再び Ex4.5 を用いて，

$$\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = k^{\oplus m}$$

となる．$\Gamma(U \sqcup V, \mathcal{O}_Y) = \Gamma(U, \mathcal{O}_Y) \oplus \Gamma(V, \mathcal{O}_Y)$ に注意．今，$k \to k^{\oplus m}$ が全射なのだから $m=1$．すなわち Y は connected.

(d) For given integers $r < n$ and $d_1, \dots, d_r \geq 1$, there exists complete intersection of codim$= r$ in $\mathbb{P}^n$.

次の条件を満たす schemes :: $H_1, \dots, H_r \subseteq \mathbb{P}^n$ の存在を示す．

- $H_1, \dots, H_r$ :: hypersurface in $\mathbb{P}^n$,
- and nonsingular.
- $\deg H_i = d_i$.
- $Y = H_1 \cap \cdots \cap H_r$ :: irreducible,
- nonsingular,
- and $\operatorname{codim}(Y, \mathbb{P}^n) = r$.

r についての帰納法で示そう．$r=1$ については I, Ex5.5 で存在を示した[†5]．$H_1, \dots, H_r$ と Y は条件を満たしていると仮定して，条件を満たす $r+1$ 個目の hypersurface :: H $(\deg H = d)$ の存在を示す．（当然 $r+1<n$ とする．）

まず Y と $X=\mathbb{P}^n$ を d_{r+1}-uple embedding :: ρ で $\mathbb{P}^N$ へ埋め込む．ここで N は n, d_{r+1} で定まる整数である．すると $\mathbb{P}^N$ の hyperplane は $\mathbb{P}^n$ の d_{r+1} 次の hypersurface に対応する．

Example 7.8.3 より，$\mathbb{P}^N$ の hyperplane 全体の集合は complete linear system を成す．これを L としよう．Thm8.18 より，$\rho(X)$ との交わりが nonsingular であるような hyperplane 全体は L の open dense subset である．$\rho(Y)$ についても同様に L の open dense subset が存在する．どちらもの open dense subset であるから，その交わりが存在する．これを $\bar{H} \in L$ とし，$\rho^{-1}(\bar{H}) = H$ としよう．すると先程述べたように H は degree d の hypersurface であり，ρ :: isomorphism から $X \cap H (=H), Y \cap H$ は nonsingular. 残るは $Y \cap H$ :: irreducible と $\operatorname{codim}(Y \cap H, X) = r+1$ であるが，前者は $r+1 < n (\iff \dim Y = n-r > 1)$ と Thm8.18 から，後者は (a) から[†6] 分かる．

(e) Y as in (d), $\omega \cong \mathcal{O}_Y(\sum d_i - n - 1)$.

これも r についての帰納法で示す．$r=1$ については Example8.20.3 の通り．$Y' = Y \cap H_{r+1}$ とおくと $\operatorname{codim}(Y', Y) = 1$ だから，Prop8.20 より次が成立する．

$$\omega_{Y'} \cong \omega_Y \otimes \mathcal{O}_Y(d_{r+1}) \otimes \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_Y\left(\sum_{i=1}^{r} d_i - n - 1\right) \otimes \mathcal{O}_Y(d_{r+1}) \otimes \mathcal{O}_Y \cong \mathcal{O}_Y\left(\sum_{i=1}^{r+1} d_i - n - 1\right).$$

ここで $Y \cap H_{r+1} \subseteq Y$ に対応する invertible sheaf on Y を $\mathcal{O}_Y(d_{r+1})$ とした (TODO).

[†5] 私の解答では，$x_0 x_1^{d-1} + x_1 x_2^{d-1} + x_2 x_0^{d-1}$ で定まる hypersurface を取っている．これは Klein quartic の自然な拡張である．

[†6] $Y \cap H$ を scheme theoretic intersection と解釈しても $Y \cap H$ :: nonsingular ということは変わらない．Thm8.17 のステートメントから，irreducible closed subscheme of X:: $Y \cap H$ の structure sheaf(あるいは $\mathcal{I}_{Y \cap H}$) がどのようであるかは nonsingular と関係ないからである．

(f) Calc geometric genus of nonsingular hyper surface of degree d in $\mathbb{P}^n$.

(e) より $\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(d-n-1)$. (c) より次の surjective k-algebra homomorphism が存在する.

$$S^{(d-n-1)} = \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-n-1)) \to \Gamma(Y, \omega_Y).$$

よって次の k-module の完全列が存在する.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Y(d-n-1)) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-n-1)) & \longrightarrow & \Gamma(Y, \omega_Y) & \longrightarrow & 0 \\ & & \| & & \| & & & & \\ & & I^{(d-n-1)} & & S^{(d-n-1)} & & & & \end{array}$$

$I = f \cdot S$ ($f \in S^{homo}$) とすると，さらに別の k-module 完全列が得られる.

$$0 \longrightarrow 0 \longrightarrow S^{(-n-1)} \xrightarrow{\cdot f} I^{(d-n-1)} \longrightarrow 0$$

$(I^{(d-n-1)})^{\sim} = \mathcal{I}_Y(d-n-1), (S^{(-n-1)})^{\sim} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)$ なので $\dim_k \Gamma(Y, \mathcal{I}_Y(d-n-1)) = \dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-n-1)) = 0$. 以上をまとめると $p_g(Y)$ が得られる.

$$p_g(Y) = \dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-n-1)) - \dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Y(d-n-1)) = \binom{(d-n-1)+n}{n} - 0 = \binom{d-1}{n}.$$

以上と I, Ex7.2 の結果を比較すると，$p_g(Y) = p_a(Y)$. 特に $Y \subseteq \mathbb{P}^2$ （Y :: nonsingular plane curve of degree d）ならば $p_g(Y) = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$.

(g) Calc geometric genus of complete intersection of nonsingular surfaces of degree d, e in $\mathbb{P}^3$.

(f) と同様に計算する. $I = f \cdot S + g \cdot S$ ($f, g \in S^{homo}$), $d = \deg f, e = \deg g$ とすると，次の k-module 完全列が得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & S^{(-n-1)} & \longrightarrow & S^{(e-n-1)} \oplus S^{(d-n-1)} & \longrightarrow & I^{(d+e-n-1)} & \longrightarrow & 0 \\ & & a & \longmapsto & (ga, -fa) & & & & \\ & & & & (u, v) & \longmapsto & fu + gv & & \end{array}$$

したがって $\dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Y(d+e-n-1))$ が計算できる.

$$\dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{I}_Y(d+e-n-1)) = \binom{e-1}{n} + \binom{d-1}{n} - 0.$$

$n = 3$ なので $p_g(Y)$ は次のよう.

$$\begin{aligned} p_g(Y) =& \dim_k \Gamma(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(d+e-4)) - \dim_k \Gamma(\mathbb{P}^3, \mathcal{I}_Y(d+e-4)) \\ =& \binom{d+e-1}{3} - \binom{e-1}{3} - \binom{d-1}{3} \\ =& \frac{1}{2}de(d+e-4) + 1 \end{aligned}$$

Ex8.5　Blowing Up a Nonsingular Subvariety.

Ex8.6　The Infinitesimal Lifting Property.

k :: algebraically closed field, A :: finitely generated k-algebra とし, Spec A :: nonsingular variety/k と仮定する．さらに $0 \to I \to B' \to B \to 0$ を k-algebra の完全列とし，$I^2 = 0$ とする．

以下を示す．

定理 Ex8.6.1

A は Infinitesimal Lifting Property を持つ．すなわち，任意の k-algebra homomorphism :: $f : A \to B$ に対し，次の図式を可換にする $g : A \to B'$ がただひとつ存在する．

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] \\
& I \arrow[d] \\
& B' \arrow[d] \\
A \arrow[r, "{}^{\forall} f"'] \arrow[ur, dashed, "{}^{\exists_1} g"] & B \arrow[d] \\
& 0
\end{tikzcd}$$

g は f の lifting と呼ばれる．

(a)　$Der_k(A, I) = \{g - g' \mid g, g' ::$ lifting of $f\}$.

Matsumura, p.191 と同じ議論をする．$\pi : B' \to B$ を与えられた完全列中の全射としよう．

■Consider I as A-module.　$a \in A$ に対し，$\pi^{-1}(f(a))$ の元をひとつ取って $\tilde{a} \in B'$ とする．これをもちいて $i \in I$ に対し $a \cdot i = \tilde{a}i$ と置く．これが well-defined であることは $I^2 = 0$ から従う．実際，$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in \pi^{-1}(f(a))$ をとると，$\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \in I$ なので

$$\tilde{a}_1 i - \tilde{a}_2 i \in Ii = 0.$$

■$\subseteq$.　g, g' を f の lifting とし，$\theta = g - g'$ とする．まず $\operatorname{im}\theta \subseteq I$ を確かめよう．図式の可換性から次が得られる．

$$\pi \circ \theta = \pi \circ g - \pi \circ g' = f - f = 0.$$

よって $\operatorname{im}\theta \subseteq \ker \pi = I$. 次に $x, y \in A$ をとり，θ が Leibniz rule を満たすことを確かめる．

$$\begin{aligned}
&\theta(xy) \\
=&g(x)g(y) - g'(x)g'(y) \\
=&g(x)g(y) - g'(x)g(y) + g'(x)g(y) - g'(x)g'(y) \\
=&(g(x) - g'(x))g(y) + g'(x)(g(y) - g'(y)) \\
=&\theta(x)g(y) + g'(x)\theta(y) \\
=&\theta(x) \cdot y + x \cdot \theta(y)
\end{aligned}$$

ここで $\pi \circ g(y) = f(y)$ より $g(y) \in \pi^{-1}(f(a))$ であることに注意せよ．$g'(x)$ も同様．$\theta(x + y) = \theta(x) + \theta(y)$ は自明である．

■$\supseteq$. g を f の lifting とし，$\theta \in Der_k(A, I)$ をとる．$g' = g + \theta$ が f の lifting であることを示そう．まず準同型であることを示す．和を保つことは明らかなので積を保つことを見る．$x, y \in A$ をとる．

$$\begin{aligned}
&g'(xy)\\
=&g(x)g(y) - \theta(x) \cdot y - x \cdot \theta(y)\\
=&g(x)g(y) - \theta(x)g(y) - g(x)\theta(y) + \theta(x)\theta(y)\\
=&(g(x) - \theta(x))(g(y) - \theta(y))\\
=&g'(x)g'(y)
\end{aligned}$$

ここで $\theta(x)\theta(y) \in I^2 = 0$ と $g(x) \in \pi^{-1}(f(x)), g(y) \in \pi^{-1}(f(y))$ を用いた．以上から g' も代数の準同型．さらに $\operatorname{im}\theta \subseteq \ker\pi = I$ だから，

$$\pi \circ g' = f + \pi \circ \theta = f.$$

よって g' は lifting.

(b) $P = k[x_1, \dots, x_n] \to B'$.

$P = k[x_1, \dots, x_n]$ とし，$A = P/J$ とする．次の図式を可換にする写像 h の存在を示す．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
J \arrow[d] & I \arrow[d] \\
P \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "\rho"'] & B' \arrow[d, "\pi"] \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

h は x_i の像で決定されるから，$b_i \in \pi^{-1}(f \circ \rho(x_i))$ を選び，$h : x_i \mapsto b_i$ で写像を定めれば良い．b_i のとり方から図式が可換になることは明らか.

可換性から，$\pi(h(J)) = f(\rho(J)) = 0$．したがって $h(J) \subseteq \pi^{-1}(0) = I$．また $h(J^2) = (h(J))^2 \subseteq I^2 = 0$. このことから，次のように A-module homomorphism が定まる．

$$\begin{array}{cccc}
\bar{h}: & J/J^2 & \to & I\\
& j \bmod J^2 & \mapsto & h(j)
\end{array}$$

(c) Complete the proof.

$\operatorname{Spec} A \subseteq \operatorname{Spec} P = \mathbb{A}^n$ が non-singular であることから，Thm8.17 が使える．$\Gamma(\operatorname{Spec} A, -)$ が left-exact であったことと Thm8.4 から，次は exact.

$$0 \longrightarrow J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{P/k} \otimes_P A \longrightarrow \Omega_{A/k} \longrightarrow 0. \tag{$*$}$$

これを $\operatorname{Hom}_A(-, I)$ で写して次を得る．

$$0 \longrightarrow Der_k(A, I) \longrightarrow Der_k(P, I) \xrightarrow{\delta^*} \operatorname{Hom}_A(J/J^2, I). \tag{$**$}$$

ここで δ^* は 3 つの写像の合成である．

$$
\begin{tikzcd}
Der_k(P,I) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_P(\Omega_{P/k}, I) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{P/k} \otimes_P A, I) \arrow[r, "(-)\circ\delta"] & \mathrm{Hom}_A(J/J^2, I) \\
D \arrow[r, mapsto] & \phi \arrow[r, mapsto] & \iota \circ (\phi \otimes_P \mathrm{id}_A) \arrow[r, mapsto] & (\iota \circ (\phi \otimes_P \mathrm{id}_A)) \circ \delta.
\end{tikzcd}
$$

$\iota : I \otimes A \to I$ は標準的同型写像である．$\delta^*(D) = (\iota \circ (\phi \otimes_P \mathrm{id}_A)) \circ \delta$ がどのようなものか計算しておこう．$x \in J$ をとり $\bar{x} = x \bmod J^2$ とおく．

$$\delta^*(D)(\bar{x}) = ((\iota \circ (\phi \otimes_P \mathrm{id}_A)) \circ \delta)(\bar{x}) = \iota((\phi \otimes_P \mathrm{id}_A)([\mathrm{d}_{P/k}\, x] \otimes 1_A)) = \iota(Dx \otimes 1_A) = Dx.$$

主張 Ex8.6.2

$\delta^* : Der_k(P,I)(\cong \mathrm{Hom}_P(\Omega_{P/k}, I)) \to \mathrm{Hom}_A(J/J^2, I)$ は全射である．

この主張を仮定すると，$\delta^*(\theta) = \bar{h}$ を満たす $\theta \in Der_k(P,I) \subset \mathrm{Hom}_k(P, B')$ が存在する．$x \in J$ とすると次のよう．

$$\delta^*(\theta)(x \bmod J^2) = \bar{h}(x \bmod J^2) = h(x).$$

一方，上で述べた $\delta^*(\theta)$ の計算から，$\delta^*(\theta)(x \bmod J^2) = \theta(x)$．よって $x \in J$ について $h(x) = \theta(x)$ が成立する．すなわち $h' = h - \theta$ と置くと $h'(J) = 0$. なので $h' : P \to B'$ から $g : A \to B'$ が誘導される．

$$
\begin{array}{cccc}
g: & A & \to & B' \\
 & x \bmod J & \mapsto & h(x) - \theta(x)
\end{array}
$$

これが求めていた写像である．実際，$x \in P$ について，

$$\pi \circ g(x \bmod J) = \pi(h(x) - \theta(x)) = f(x \bmod J) - \pi(\theta(x)) = f(x \bmod J).$$

$\mathrm{im}\,\theta \subseteq I = \ker \pi$ に注意.

(証明)．完全列

$$0 \longrightarrow J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{P/k} \otimes_k A \longrightarrow \Omega_{A/k} \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

に現れる加群 $\Omega_{A/k}$ に対応する sheaf of modules on X は，Thm8.17 より locally free である．そのため $\Omega_{A/k}$ :: projective A-module (by Eisenbud, Ex4.11b)．このことから，完全列 (*) が split することがわかる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \Omega_{A/k} \arrow[dl] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\Omega_{P/k} \otimes_k A \arrow[r, two heads] & \Omega_{A/k}
\end{tikzcd}
$$

δ の retruct を $r : \Omega_{P/k} \otimes_k A \to J/J^2$ とおく．すると任意の $\phi \in \mathrm{Hom}_A(J/J^2, I)$ に対して，

$$((-) \circ \delta)(\phi \circ r) = (\phi \circ r) \circ \delta = \phi \circ \mathrm{id}_{J/J^2} = \phi.$$

すなわち，$(-) \circ \delta (= \mathrm{Hom}_A(\delta, I))$ は全射である．よってこれに二つの同型を合成した δ^* も全射． ∎

Notes

証明した図式で Spec をとると，次のように成る．

$$
\begin{tikzcd}
 & Y' \arrow[dl, dashed, "\exists_1 g"'] \\
X & Y \arrow[l, "\forall f"] \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

$Y \to Y'$ が closed immersion であるとき，$Y \subseteq Y'$ を infinitesimal thickening of Y と呼ぶ．Hartshorne, “Deformation Theory”を参照せよ．

Ex8.7　Classifying Infinitesimal Extension: One Case.

■Infinitesimal Extension.　X :: scheme of finite type $/k$, $\mathcal{F}$ :: coherent sheaf on X とする．この時，次の条件を満たす sheaf of ideal :: $\mathcal{I}$ をもつ X' :: scheme$/k$ の分類を考える:

1. $\mathcal{I}^2 = 0$,
2. $(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,
3. $\mathcal{I} \cong \mathcal{F}$ as $\mathcal{O}_X$-module.

$X', \mathcal{I}$ の組を infinitesimal extension of X by $\mathcal{F}$ と呼ぶ．

■Trivial One.　trivial なものは次のように構成される．すなわち，$\operatorname{sp} X' = \operatorname{sp} X$ とし，structure sheaf を $\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X * \mathcal{F}$ とする．これは Matsumura, p.191 にある trivial extension とほぼ同じ構成方法である．

■Setting.　次の場合の infinitesimal extension を考える: X :: non-singular affine scheme of finite type $/k$. coherent sheaf :: $\mathcal{F}$ と，infinitesimal extension of X by $\mathcal{F}$ :: $(X', \mathcal{I})$ を任意にとる．

■About Global Sections.　$B' = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}), I = \Gamma(X', \mathcal{I}), A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ とする．$\Gamma(X', -)$ は単射を保つ関手なので包含写像 $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ から $I \hookrightarrow B'$ が得られる．また $\mathcal{I}^2$ は $U \mapsto (\Gamma(U, \mathcal{I}))^2$ で定まる sheaf だから[†7]，$I^2 = (\Gamma(X', \mathcal{I}))^2 = 0$ となる．$B = B'/I = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I})$ とおこう．

■Lifting of $\mathrm{id} : A \to A$.　同型 $(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}) \cong (X, \mathcal{O}_X)$ から環同型 $u : A \xrightarrow{\cong} B'/I = B$ が得られる．仮定より $X = \operatorname{Spec} A$ は nonsingular なので，Ex8.6 から，$A \to A \cong B$ の lifting が存在する．ここで π' は標準的全射 $B' \to B'/I = B$ と環同型 $u^{-1} : B \xrightarrow{\cong} A$ の合成である．

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] \\
& I \arrow[d] \\
& B' \arrow[d, "\pi'"] \\
A \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, dashed, "\sigma"] & A \arrow[d] \\
& 0
\end{tikzcd}$$

よって $\pi' : B' \to B$ は split する．また，I, B', B を A-module とみなすことが出来る．$M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ とすると条件 $\mathcal{I} \cong \mathcal{F}$ as A-module から $I \cong M$ as A-module. 以上をまとめて，以下を示すことが出来る．

主張 Ex8.7.1

$$B' \cong A * M \text{ as } A\text{-module.}$$

よってこの設定では，infinitesimal extension of X by $\mathcal{F}$ は trivial なものしかない．

[†7] この presheaf が sheaf であることを示せば良い．問題は gluability axiom であるが，これは $(t|_{U_i})^2 = (t^2)|_{U_i}$ なので成立する．この等式自体は germ を見れば分かる．

(証明)．five lemma を用いる．以下の A-module の可換図式を見よ．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "v"] & A * M \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "u"] \arrow[dl, "\sigma"'] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\iota"'] & B' \arrow[r, shift right, "\pi"'] & B \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで $M \to A * M, A * M \to A$ は標準的な入射と射影である（集合としては $A * M = A \oplus M$ であったことに注意せよ）．また，u, v は既に述べた同型写像である．$A * M \to B'$ を $(a, m) \mapsto \iota \circ v(m) + s \circ u(a)$ で定めると，図式が可換に成ることが分かる．よって five lemma より $A * M \cong B'$. ∎

Ex8.8　Plurigenera and Hodge Numbers are Birational Invariants.

X ::projective ninsingular variety/k とする．正整数 $n(> 0)$ に対して，n-th plurigenus of X を

$$P_n = \dim_k \Gamma(X, \omega_X^{\otimes n})$$

と定める．また $0 \leq q \leq \dim X$ について Hodge numbers を

$$h^{q,0} = \dim_k \Gamma(X, \Omega_{X/k}^{\wedge q})$$

と定める．plurigenus と Hodge numbers が birational invariant であることを示す．

category of sheaves of modules on X の自己関手 M を，f^* (inverse image functor) と可換であるものとする．M は例えば $\square^{\otimes n}$ や $\square^{\wedge q}$ である．Thm8.19 (geometric genus is birational invarational invariant) の証明を見ると，この証明方法は，$\dim_k \Gamma(X, M\Omega_{X/k})$ が birational invariant であることの証明に使える．