

以下での  $(*)$  とは、次のもの:

- integral,
- separated,
- noetherian, and
- regular in codimension one.

また,  $(\dagger)$  は次のもの:  $X ::$  noetherian scheme,  $\mathcal{S} ::$  graded  $\mathcal{O}_X$ -algebra となっている. また,  $d \in \mathbb{Z}, d \geq 0$  について,  $\mathcal{S}_d ::$  homogeneous part of  $\mathcal{S}$  を  $U \mapsto \mathcal{S}(U)_d$ .  $X, \mathcal{S}$  は次をすべて満たす.

- $\mathcal{S} ::$  quasi-coherent.
- $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_d$ .
- $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$ .
- $\mathcal{S}_1 ::$  coherent  $\mathcal{O}_X$ -module.
- $\mathcal{S} ::$  locally generated by  $\mathcal{S}_1$  as  $\mathcal{O}_X$ -algebra.

## Ex7.1 Surjective Morphism between Invertible Sheaves is Isomorphic.

$X ::$  locally ringed space,  $\mathcal{L}, \mathcal{M} ::$  invertible sheaves on  $X$ ,  $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M} ::$  surjective morphism, とする.

■Proof 1. 任意の点  $x \in X$  をとり,  $A = \mathcal{O}_{X,x}$  とおく.  $f_x : \mathcal{L}_x \rightarrow \mathcal{M}_x$  は同型写像を合成することで  $\phi : A \rightarrow A ::$  surjective  $A$ -morphism と同一視出来る.  $\phi ::$  surjective より,  $\phi(\alpha) = 1 \in A$  となる  $\alpha \in A$  がとれる. また  $\phi$  は  $A$ -module morphism だから,  $\alpha\phi(1) = 1$ . そこで  $\psi : A \rightarrow A$  を  $a \mapsto \alpha a$  と定義すれば, これが  $\phi$  の逆写像になる. よって  $\phi, f_x$  は同型. Prop1.1 から,  $f ::$  iso.

■Proof 2. Matsumura, Thm2.4 から分かる. これは NAK (or Nakayama's Lemma) からの帰結である.

### 注意 Ex7.1.1

$k(x) ::$  residue field と  $f_x : \mathcal{L}_x \rightarrow \mathcal{M}_x$  をテンソルすると,  $f_x \otimes \text{id}_{k(x)} ::$  surjective  $k(x)$ -module morphism が得られる. よって  $\ker(f_x \otimes \text{id}_{k(x)}) = 0$ . しかし, ここから NAK をつかって  $\ker f_x = 0$  を導くことは出来ない.  $k(x)$  が flat  $\mathcal{O}_{X,x}$ -module でなく, したがって  $\ker(f_x \otimes \text{id}_{k(x)})$  と  $(\ker f_x) \otimes k(x)$  の間に同型があることが言えないからである. このことは flat  $\implies$  torsion-free に気をつければすぐに分かる. 同様の議論が  $f_x ::$  injective (と  $\text{coker } f_x$ ) の場合に出来ることにも気づくが, このときは  $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2; 1 \mapsto 3$  という反例がある.

## Ex7.2 Two Sets of Global Generators and Corresponding Morphisms.

$k ::$  field,  $X ::$  scheme  $/k$ ,  $\mathcal{L} ::$  invertible sheaf on  $X$ ,  $S = \{s_0, \dots, s_m\}, T = \{t_0, \dots, t_n\} ::$  global generators of  $\mathcal{L}$ . とする. ここで  $S, T$  は同じ線形 (部分) 空間  $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$  を張るとする. また  $n \leq m, d = \dim_k V$  とする.

$S, T$  からそれぞれ Thm7.1 のように定まる morphism を  $\phi_S, \phi_T$  とする.  $\phi_S$  が次のように分解できる

ことを示す.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\phi_T} & \text{im } \phi_T & \hookrightarrow & \mathbb{P}^m - L & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n \\ & & & & & \searrow & \uparrow \\ & & & & & \phi_S & \end{array}$$

ここで  $\pi, \alpha$  はそれぞれ linear projection と automorphism である.

$X \rightarrow \mathbb{P}^n$  の morphism を考えることは,  $k[y_0, \dots, y_n]$  の元  $y_0, \dots, y_n$  の変換を考えることと同じである. これは Thm7.1 の証明を観察すれば分かる. 二つの  $k$ -linear map は  $\phi_S^*, \phi_T^*$  はそれぞれ,  $y_i \mapsto s_i (i = 0, \dots, n), y_i \mapsto t_i (i = 0, \dots, m)$  で定まっている. したがって問題は,  $t_0, \dots, t_m$  を  $s_0, \dots, s_n$  へ変換する projection と automorphism をつくる問題, と言い換えられる.

今, 次のような  $(m+1) \times (n+1)$  行列  $Q$  が存在する.

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}.$$

$S, T$  が  $V$  の生成系であることから  $\text{rank } Q = \dim V =: d$ .  $Q$  は基本行列をいくつもかける (あるいは基本変形を繰り返す) ことにより, 次の形に分解できる.

$$Q = LP_dR \quad \text{where } L \in PGL(m, k), R \in PGL(n, k)$$

ただし行列  $P_r$  ( $r = 1, \dots, n+1$ ) は  $r \times r$ -identity matrix  $I_r$  をもちいて  $P_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  と定義される行列である. (TODO:  $P_d$  を  $P_{n+1}$  に交換しても問題ない?)  $L, P_{n+1}, R$  が誘導する morphism をそれぞれ  $\beta, \tilde{\pi}, \alpha$  とすれば,  $\alpha, \beta$  は automorphism であり,  $\tilde{\pi}$  は projection である.

$$\mathbb{P}^m \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^m \xrightarrow{i} \mathbb{P}^m - L \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{P}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n$$

求める写像はこの  $\alpha$  と,  $\pi = \beta \circ i \circ \tilde{\pi}$  である. また,  $L = \mathcal{Z}_p(y_0, \dots, y_n) \subseteq \mathbb{P}^m$  の次元は  $m - (n+1)$  である.

### Ex7.3 Morphism of $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ can be Decomposed into Common Ones.

$\phi : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^m$  を考える.  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) ::$  invertible sheaves の global generator をそれぞれ  $\{x_0, \dots, x_m\}, \{y_0, \dots, y_n\}$  とする.

(a)  $\text{im } \phi = pt$  or  $m \geq n$  and  $\dim \text{im } \phi = n$ .

$s_i = \phi^*(x_i)$  ( $i = 0, \dots, m$ ) とおくと,  $s_0, \dots, s_m$  は  $\mathcal{L} := \phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$  の global generator である.  $\mathcal{L}$  は  $\mathbb{P}^n$  上の invertible sheaf だから, Cor6.17 より,  $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$  となる  $d \in \mathbb{Z}$  が存在する. Example7.8.3 同様,  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$  は  $|d|$  次斉次単項式で生成される.

■  $m < n \implies \dim \text{im } \phi = 0$ .

■  $m \geq n \implies \dim \text{im } \phi = n$ .

- Ex7.4 If  $X$  Admits an Ample Invertible Sheaf, then  $X$  is Separated.
- Ex7.5 Ample and Very Ample are Inherited by Tensor Products.
- Ex7.6 The Riemann-Roch Problem.
- Ex7.7 Some Rational Surfaces.
- Ex7.8 Sections of  $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X \leftrightarrow$  Quotient Invertible Sheaves of  $\mathcal{E}$ .
- Ex7.9
- Ex7.10  $P^n$ -Bundles Over a Scheme.
- Ex7.11 Different Sheaves of Ideals can Give Rise to Isomorphic Blown Up Schemes.
- Ex7.12
- Ex7.13 \* A Complete Nonprojective Variety.
- Ex7.14