ゼミノート #7
Descent Theory

七条彰紀

2018 年 12 月 26 日

1 Motivation

(TODO)

2 Definition

定義 2.1
関手 $\epsilon_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ を用いて以下のように定義する．

(i) $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: equivalence となる $\mathcal{U}$ を of effective descent for $\mathcal{F}$ と呼ぶ．

(ii) $\epsilon_{\mathcal{U}}$ の像と同型である $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象を，effective data という．

3 Criterion for fpqc Stacks

定理 3.1 ([2] Lemma 4.25)
S :: scheme, $\mathcal{F} \to (\mathbf{Sch}/S)$ :: fibration とする．以下が成り立つとする．

(a) $\mathcal{F}$ は Zariski topology での stack である．

(b) 任意の flat surjective morphism of affine S-scheme :: $V \to U$ について，
$\epsilon_{\{V \to U\}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\{V \to U\})$ は圏同値．

この時，$\mathcal{F}$ は fpqc topology での stack である．

注意 3.2
“flat”という条件は以下の証明では利用されない．

3.1 Step 1 / 準備

以前示した命題から，$\mathcal{F}$ :: split fibered category と仮定しても一般性を失わないので，以下そのように仮定する．

補題 3.3
$\mathbf{C}$ を site とし，$\mathcal{F} \to \mathbf{C}$ を split fibration とする．さらに $U \in \mathbf{C}$，$\mathcal{U} = \{\phi_i : U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ と $\mathcal{U}$ の細分[†1] $\mathcal{V} = \{\psi_{ij} : V_{ij} \to U\}$ をとる．

この時，関手 $R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V})$ が存在し，以下は厳密な可換図式である。

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "\epsilon_{\mathcal{V}}"'] & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \arrow[dl, "R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}"] \\ \mathcal{F}(\mathcal{V}) & \end{tikzcd}$$

(証明).
■関手 $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V})$ の構成.　細分の定義から，各 i, k について以下が可換に成る射 $\iota_{ik} : V_{ik} \to U_i$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} V_{ik} \arrow[r, "\iota_{ik}"'] \arrow[rr, bend left, "\psi_{ik}"] & U_i \arrow[r, "\phi_i"'] & U \end{tikzcd}$$

この射 ι_{ik} を用いて，関手 $R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}$ を次のように定義する。

$$\begin{array}{llcl} R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}} : & \mathcal{F}(\mathcal{U}) & \to & \mathcal{F}(\mathcal{V}) \\ \textbf{Objects} & (\{\eta_i\}, \{\sigma_{ij}\}) & \mapsto & \left(\{(\iota_{ik})^* \eta_i\}, \left\{ \left(\iota^{jl}_{ik}\right)^* \sigma_{ij} \right\}\right) \\ \textbf{Arrows} & \{\alpha_i\} & \mapsto & \{(\iota_{ik})^* \alpha_i\} \end{array}$$

ここで ι^{jl}_{ik} は，以下の可換図式のように fiber product の一意性から得られる射である．

$$\begin{tikzcd} V_{ik} \times_U V_{jl} \arrow[rr, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dd, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[dr, "\iota^{jl}_{ik}", red] & & V_{ik} \arrow[d, "\iota_{ik}"] \arrow[dd, bend left, "\psi_{ik}"] \\ & U_i \times_U U_j \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & U_i \arrow[d, "\phi_i"] \\ V_{jl} \arrow[r, "\iota_{jl}"] \arrow[rr, bend right, "\psi_{jl}"'] & U_j \arrow[r, "\phi_j"] & U \end{tikzcd}$$

$\{\sigma_{ij}\}$ が cocycle condition を満たすので，$\left\{ \left(\iota^{jl}_{ik}\right)^* \sigma_{ij} \right\}$ も cocycle condition を満たす[†2]．同様に $\{(\iota_{ik})^* \alpha_i\}$ が $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ の射であることも確認できる．

[†1] 細分の定義を確認しておく：任意の $\mathcal{V}$ の元 $V_{ij} \to U$ に対して $\mathcal{U}$ の元 $U_i \to U$ が存在し，$V_{ij} \to U$ が $U_i \to U$ を通して $V_{ij} \to U_i \to U$ と分解する．特に射 $V_{ij} \to U_i$ が存在する．
[†2] 証明は fiber product の普遍性から得られる射 $V_{il} \times V_{jm} \times V_{kn} \to U_i \times U_j \times U_k$ を用いれば良い．

■対象について $R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}} = \epsilon_{\mathcal{V}}$． $R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}}$ を計算する．まず $\xi \in \mathcal{F}(U)$ をとり，$R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$ を計算しよう．

$$\begin{aligned} R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) =& R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\Big((\{\phi_i^*\xi\}, \{\sigma_{ij}\})\Big) \\ =& \left(\{(\iota_{ik})^*\phi_i^*\xi\}, \left\{\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^* \sigma_{ij}\right\}\right) \\ =& \left(\{(\psi_{ik})^*\xi\}, \left\{\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^* \sigma_{ij}\right\}\right) \end{aligned}$$

今，$\mathcal{F}$ :: split fibered category としているので，

$$\mathrm{pr}_2^*\,\phi_j^*\xi = (\phi_j \circ \mathrm{pr}_2)^*\xi = (\phi_i \circ \mathrm{pr}_1)^*\xi = \mathrm{pr}_1^*\,\phi_i^*\xi.$$

σ_{ij} は fiber product の普遍性から得られる $\mathrm{pr}_2^*\,\phi_j^*\xi$ から $\mathrm{pr}_1^*\,\phi_i^*\xi$ への同型であるから，$\sigma_{ij} = \mathrm{id}$．このことと $\mathcal{F}$ :: split から $\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^* \sigma_{ij} = \mathrm{id}$ も分かる．まとめると，$R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) = \left(\{(\psi_{ik})^*\xi\}, \{\mathrm{id}_{(\psi_{ik})^*\xi}\}\right)$．

一方，

$$\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^* \mathrm{pr}_2^*\,\phi_j^*\xi = (\psi_{jl} \circ \mathrm{pr}_2)^*\xi = \mathrm{pr}_2^*(\psi_{jl})^*\xi = \mathrm{pr}_1^*(\psi_{ik})^*\xi = (\psi_{ik} \circ \mathrm{pr}_1)^*\xi = \left(\iota_{ik}^{jl}\right)^* \mathrm{pr}_1^*\,\phi_i^*\xi.$$

なので，fiber product の普遍性から得られる $\mathrm{pr}_2^*(\psi_{jl})^*\xi$ から $\mathrm{pr}_1^*(\psi_{ik})^*\xi$ への同型は id である．したがって $\epsilon_{\mathcal{V}}(\xi) = \left(\{(\psi_{ik})^*\xi\}, \{\mathrm{id}_{(\psi_{ik})^*\xi}\}\right)$ となり，$R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) = \epsilon_{\mathcal{V}}(\xi)$．

■射について $R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}} = \epsilon_{\mathcal{V}}$． $\mathcal{F}(U)$ の射 $\alpha\colon \xi_1 \to \xi_2$ をとる．すると $\mathcal{F}$ :: split なので

$$R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\alpha) = \{(\iota_{ik})^*\phi_i^*\alpha\} = \{(\phi_i \circ \iota_{ik})^*\alpha\} = \{\psi_{ik}^*\alpha\} = \epsilon_{\mathcal{V}}(\alpha).$$

∎

注意 3.4
$\mathcal{F}$ :: split を仮定しない場合，可換図式が厳密であることを主張できないのは明白であろう．実はさらに，2 圏の意味でも図式が可換にならない．なぜなら自然変換 $\mathrm{pr}_1^*\,\phi_i^* \to (\phi_i \circ \mathrm{pr}_1)^*$ などが存在する保証がないからである．同型 $\mathrm{pr}_1^*\,\phi_i^*\xi \to (\phi_i \circ \mathrm{pr}_1)^*\xi$ は ξ 毎に存在が保証されているのみで，それらが自然であることは保証されない．

3.2 Step 2 / single morphism cover の場合に帰着させる．

系 3.5 ([3] p.87)
$\mathbf{C}, \mathcal{F}$ 等を補題 (3.3) の様にとる．$\mathcal{U} = \{\phi_i\colon V_i \to U\}, V' = \bigsqcup V_i$ とする．さらに，$f\colon V' \to U$ を $\mathcal{U}$ から誘導される射とする．

このとき，圏同値 $R^{\mathcal{U}}_{V' \to U}\colon \mathcal{F}(V' \to U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ が存在し，合成

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\epsilon_{\{f\}}} \mathcal{F}(V' \to U) \xrightarrow{E} \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

が関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ と厳密に一致する．

(証明). $\mathcal{U}$ は $\{U' \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ の細分であるから，補題 (3.3) から明らか． ∎

注意 3.6
ここで，各 ϕ_i が quasi-compact（特に fpqc）であったとしても，誘導される射 $f\colon V' \to U$ が必ずしも quasi-compact でないことに注意する．例えば $\{\operatorname{Spec} k[x_i] \to \bigsqcup_i \operatorname{Spec} k[x_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ を考えれば分かる．

以上のことに注意すると，我々は次のことを証明することに成る:

主張 3.7
条件 (a), (b) が成り立つならば，以下の条件 $(*)$ を満たす任意の flat surjective morphism :: $f\colon V \to U$ について，$\epsilon_{\{f\}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(f\colon V \to U)$ :: equivalence.

$(*)$ affine Zariski cover :: $U = \bigcup_i U_i$ と，各 i について $f^{-1}(U_i)$ の affine Zariski cover :: $f^{-1}(U_i) = \bigcup_i V_{ij}$ が存在し，V_{ij} :: quasi-compact かつ $f(V_{ij}) = U_i$ となる．

条件 $(*)$ は U, V :: locally noetherian であるような任意の fppf morphism について成立する ([2] Cor1.1.6).

注意 3.8
以下，$\mathcal{F}$ :: split fibered category とする．session 4.5 定理 1.2 より，このように仮定しても一般性を失わない．

3.3 Step 3 / affine scheme への quasi-compact morphism の場合.

$f\colon V \to U$ を U :: affine である quasi-compact morphism とする．$\{V_i\}_i$ を V の open affine cover とし，$V' = \bigsqcup_i V_i$ とおく．V' :: affine なので，仮定 (b) から圏同値 $\mathcal{F}(U) \simeq \mathcal{F}(V' \to U)$ が存在する．

以下の図式 (1) を考える．$\leftrightarrow$ は圏同値を意味する．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\epsilon_f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\epsilon_{\{V_i\to U\}}"'] \arrow[dd, leftrightarrow, bend right=60, "\epsilon_{V'\to U}"'] & \mathcal{F}(f\colon V \to U) \arrow[dl, "R_f^{V_i\to U}"] \\
\mathcal{F}(\{V_i \to U\}) \arrow[d, leftrightarrow, "R^{\{V_i\to U\}}_{V'\to U}"] & \\
\mathcal{F}(V' \to U) &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

ここで関手 ϵ_f は次で与えられる．ただし $\mathrm{pr}_k\colon V \times_U V \to V$ は第 k 成分への射影である．

$$\begin{array}{llcl}
\epsilon_f\colon & \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{F}(f\colon V \to U) \\
\textbf{Objects}: & \xi & \mapsto & (f^*\xi, \sigma) \\
\textbf{Arrows}: & \alpha & \mapsto & f^*\alpha
\end{array}$$

ここで $\sigma\colon \mathrm{pr}_2^* f^*\xi \to \mathrm{pr}_1^* f^*\xi \in \mathrm{Arr}(\mathcal{F}(V \times_U V))$ は，恒等射 $\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_2^* f^*\xi}$ である．これは $\mathrm{pr}_2^* f^*\xi, \mathrm{pr}_1^* f^*\xi$ がいずれも $f \circ \mathrm{pr}_2 = f \circ \mathrm{pr}_1$ による ξ の pullback であることと，$\mathcal{F}$ :: split から得られる

この図式の可換性から，関手の同型 $(R_f^{V_i\to U}) \circ \epsilon_f = \epsilon_{\{V_i\to U\}}$ が得られる（$\mathcal{F}$ :: split fibered category を利用する)．(よって上の図式 (1) は可換である．）したがって ϵ_f の psuedo-inverse functor :: $(\epsilon_{\{V_i\to U\}})^{-1} \circ (R_f^{V_i\to U})$ が得られた．

3.4 Step 4 / 条件 $(*)$ を満たす affine scheme への射の場合.

([3] p.88) 仮定 $(*)$ より，Zariski cover :: $\{\iota_i \colon V_i \to V\}$ が存在し，V_i :: quasi-compact.

注意 3.9
前段の議論のうち，図式 (1) の $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V' \to U)$ が圏同値でない．なので新しい議論が必要である．

補題 (3.3) から得られる以下の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\epsilon_f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\epsilon_{V_i \to U}" left, "\text{equivalence}" left] & \mathcal{F}(f \colon V \to U) \arrow[dl, "R_f^{V_i \to U}", "\text{essentially surjective \& full}"'] \\
\mathcal{F}(V_i \to U) &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

左にある縦の射は Step 3 から圏同値である．したがって $\mathcal{F}(V \to U) \to \mathcal{F}(V_i \to U)$（定義はおおよそ関手 E と同様に与えられる）は essentially surjective かつ full である．なのでこの関手が更に faithfull であることが証明できれば，図式の可換性から ϵ_f が圏同値であることが証明できる．

$\mathcal{F}(V \to U)$ の射 β, β' が，$\beta|_{V_i} = \beta'|_{V_i}$ を満たすとする．この時，$\beta = \beta'$ を証明すれば良い．まず，以下の厳密な可換図式から，任意の添字 j について $R^{V_i \to U}_{V_i \cup V_j \to U} \colon \mathcal{F}(V_i \to U) \to \mathcal{F}(V_i \cup V_j \to U)$ が圏同値だと分かる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, leftrightarrow, "\epsilon_{V_i \cup V_j \to U}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\epsilon_{V_i \to U}"'] & \mathcal{F}(V_i \cup V_j \to U) \arrow[dl, "R^{V_i \to U}_{V_i \cup V_j \to U}"] \\
\mathcal{F}(V_i \to U) &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

したがって以下が得られる．

$$\mathcal{F}(V \to U) \xrightarrow{R^{V_i \to U}_{V \to U}} \mathcal{F}(V_i \to U) \xrightarrow{\left(R^{V_i \to U}_{V_i \cup V_j \to U}\right)^{-1}} \mathcal{F}(V_i \cup V_j \to U) \xrightarrow{R^{V_j \to U}_{V_i \cup V_j \to U}} \mathcal{F}(V_j \to U)$$

$\beta|_{V_i} = \beta'|_{V_i}$ から，$\beta|_{V_i \cup V_j} = \beta'|_{V_i \cup V_j}$ が得られる．よって任意の j について

$$\beta|_{V_j} = (\beta|_{V_i \cup V_j})|_{V_j} = (\beta'|_{V_i \cup V_j})|_{V_j} = \beta'|_{V_j}$$

が得られる．$\mathcal{F}$ :: Zariski stack なので，$\beta = \beta'$.

3.5 Step 5 / 一般の場合.

条件 $(*)$ を満たす任意の射 $f \colon V \to U$ をとり，affine Zarisiki cover :: $\{U_i \to U\}$ をとる．さらに $V_i := f^{-1}(U_i)$ とおき，$\phi_i = f|_{V_i}$ とおく．

今，

$$\Phi_i = \epsilon_{V_i \to U_i} \colon \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(V_i \to U_i)$$

と置く．同様に $\Phi_{ij} = \epsilon_{V_{ij}\to U_{ij}}, \Phi_{ijk} = \epsilon_{V_{ijk}\to U_{ijk}}$ と置く．この時，以下は厳密な可換図式である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, "\Phi_i"'] & \mathcal{F}(U_{ij}) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, "\Phi_{ij}"] & \mathcal{F}(U_{ijk}) \arrow[d, "\Phi_{ijk}"] \\
\mathcal{F}(V_i \to U_i) \arrow[r, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{F}(V_{ij} \to U_{ij}) \arrow[r, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{F}(V_{ijk} \to U_{ijk})
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

ここで，各 Φ_* はいずれも Step 4 から圏同値である．

次の関手を考える．

$$
\begin{array}{lccc}
P_i\colon & \mathcal{F}(f\colon V \to U) & \to & \mathcal{F}(V_i \to U_i) \\
\textbf{Objects} & (\eta, \sigma) & \mapsto & (\eta|_{V_i}, (\gamma_{ii})^* \sigma) \\
\textbf{Arrows} & \alpha & \mapsto & \alpha|_{V_i}
\end{array}
$$

同様に $P_{ij}\colon \mathcal{F}(f) \to \mathcal{F}(V_{ij} \to U_{ij})$ を定義する．すると step 4 の結果から $\mathcal{F}(U_i) \simeq \mathcal{F}(V_i \to U_i)$ なので，$\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ と同型

$$\alpha_i\colon \Phi_i(\xi_i) \xrightarrow{\cong} P_i((\eta, \sigma))$$

が得られる．上の図式 (4) が可換であることから，

$$\alpha_i|_{V_{ij}}\colon \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}}) = (\Phi_i(\xi_i))|_{V_{ij}} \xrightarrow{\cong} P_{ij}((\eta, \sigma))$$

すると，

$$\alpha_i^{-1}\alpha_j\colon \Phi_{ij}(\xi_j|_{V_{ij}}) \to \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}})$$

Φ_{ij} :: equivalence なので，この同型射の逆像として $\sigma_{ij}\colon \xi_j|_{V_{ij}} \to \xi_i|_{V_{ij}}$ が得られる．

以上で得られる $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ は cocycle condition を満たすため（TODO），$\mathcal{F}(\{U_i \to U\})$ の object である．$\mathcal{F}$ :: Zariski stack なので，これは $\mathcal{F}(U)$ と圏同値．よって ξ が得られる．（TODO: 射についても）

4 Application : $\mathbf{QCoh}/S \to \mathbf{Sch}/S$ is a fpqc stack.

定義 4.1

$S \in \mathbf{Sch}$ に対し，圏 $\mathbf{QCoh}/S$ を以下のように定める．

Objects.

Fpqc(S) [†3]の対象 :: U と，U 上の quasi-coherent sheaf (on fpqc topology):: $\mathcal{U}$ の組．

Arrows.

射 $(U,\mathcal{U}) \to (V,\mathcal{V})$ は，$\mathbf{Sch}/S$ の射 $f\colon U \to V$ と，morphism of sheaves on V :: $f^\#\colon \mathcal{V} \to f_*\mathcal{U}$ の組．

この時，$\mathbf{QCoh}/S \to \mathbf{Sch}/S$; $(U,\mathcal{U}) \mapsto U$ は fibration である．

$\mathbf{Mod}_A, \mathbf{Mod}_\phi, \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_\phi$ の定義は [3] §4.2.1 を参照せよ．

$f\colon V \to U$ を flat surjective morphism of S-schemes とし，$\phi\colon A \to B$ を f に対応する faithfully flat な環準同型とする．この時，$\mathbf{QCoh}(U) \simeq \mathbf{Mod}_A$ はよく知られている[†4]．

[†3] 圏 $\mathbf{Sch}/S$ に fpqc topology を備えたもの．

[†4] この命題は [1] Cor5.5 で詳しく述べられている

主張 4.2
$\mathbf{QCoh}(f\colon V \to U) \simeq \mathbf{Mod}_\phi$.

したがって $\epsilon_f\colon \mathbf{QCoh}(U) \to \mathbf{QCoh}(f\colon V \to U)$ は関手 $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_\phi$ に対応する．この関手は，可換環論によって圏同値であることが証明される．

参考文献

[1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[3] Angelo Vistoli. Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008). http://homepage.sns.it/vistoli/descent.pdf.