Ex2.1 $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \approx (\operatorname{Spec} A_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f})$

A :: ring, $X = \operatorname{Spec} A$, $f \in A$ とし，$D(f) = (V((f)))^c$ とする．$S = \{1, f, f^2, \dots\}$ とし，以下のように写像を定める．

$$\begin{array}{cccc} \phi: & D(f) & \to & \operatorname{Spec} A_f \\ & \mathfrak{p} & \mapsto & S^{-1}\mathfrak{p} \\ & \mathfrak{q} \cap A & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

$\mathfrak{p}$ は S と共通部分を持たない素イデアルだから，Ati-Mac Prop3.11 より，ϕ は全単射．

C :: open in $D(f)$ とする．この時，

$$C = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{p}, (f) \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

となるイデアル $\mathfrak{I} \subset A$ が存在する．Ati-Mac Prop3.3 より，ϕ は単射を保つから，$\phi(C)$ も closed．逆に D :: open in $\operatorname{Spec} A_f$ をとる．再び Ati-Mac Prop3.11 より，$\operatorname{Spec} A_f$ の任意の元は拡大イデアルだから，

$$D = \{\phi(\mathfrak{p}') \in \operatorname{Spec} A_f \mid \phi(\mathfrak{I}') \subseteq \phi(\mathfrak{p}'), \phi(f) \not\subseteq \phi(\mathfrak{p}')\}$$

と書ける．つまり，$D = \phi(V(\mathfrak{I}'))$．$\phi$ は全単射なので $\phi^{-1}(D) = V(\mathfrak{I}')$ となり，これは closed．以上より ϕ が同相写像であることがわかった．

Prop2.3 と同様に locally ringed space の射を構成しておく．これは

$$f : \mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p}), \quad f^{\#} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f}(-) \mapsto \mathcal{O}_X|_{D(f)}(\phi(-))$$

で定義される．

Ex2.2 IF X :: scheme, and U :: open in X, then $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ :: scheme.

X は scheme だから，開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が存在し，$(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda})$ は affine scheme となる．すなわち，R_λ :: ring が存在して

$$(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda}) \approx (\operatorname{Spec} R_\lambda, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_\lambda})$$

と書ける．

$V_\lambda = U \cap U_\lambda$ とすると，$\{V_\lambda\}$ は U の開被覆である．そして各 $V_\lambda \subseteq U_\lambda$ は affine scheme の開集合．教科書 pp.70-71 から，affine scheme の open base は $D(f)$ $(f \in R_\lambda)$ の形の開集合全体である．したがって，各 V_λ について，以下のような条件を満たす R_λ の部分集合 F_λ が取れる．

$$V_\lambda = \bigcup_{f\in F_\lambda} D(f).$$

まとめると，

$$U = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcup_{f\in F_\lambda} D(f).$$

$f \in R_\lambda$ であるとき，$D(f) \subseteq U_\lambda = \operatorname{Spec} R_\lambda$ と Ex2.1 より $(D(f), \mathcal{O}_{U_\lambda}|_{D(f)})$ は affine．よって U は affine scheme で被覆される．（$\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U$ に注意．）

Ex2.3 Reduced Schemes.

scheme $(X, \mathcal{O}_X)$ が reduced とは，任意の開集合 $U \subseteq X$ について $\mathcal{O}_X(U)$ がベキ零元を持たない，すなわち $\mathcal{O}_X(U)$ が reduced ring である，ということ．$(X, \mathcal{O}_X)$ の reduced scheme $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ を，presheaf $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)/\operatorname{Nil}(\mathcal{O}_X(U))$ の sheafification とする．この X から得られた reduced scheme を X_{red} と書く．

(a) $(X, \mathcal{O}_X)$ :: reduced $\iff$ ${}^\forall P \in X,\ \ \mathcal{O}_{X,P}$ :: reduced.

両者の対偶を示す．

■($\Longleftarrow$) U :: open in $X, s \in \mathcal{O}_X(U), s \neq 0$ とする．s が nilpotent であったと仮定すると，$s^n = 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する．$s \neq 0$ から，ある点 $P \in U$ においては $s(P) \neq 0$．しかし $s^n(P) = 0 = (s(P))^n$ なので，$s(P) \in \mathcal{O}_{X,P}$ は nilpotent.

■($\Longrightarrow$)． ある点 P において，$a/f \in \mathcal{O}_{X,P} \cong A_{\mathfrak{p}_P}$ が nilpotent であったとする．この時，P の開近傍 $D(f)$ 上で定義される定値写像 $c(*) = a/f$ が取れる．明らかにこの写像は $\mathcal{O}_X(D(f))$ の元で，しかも nilpotent.

(b) $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ :: scheme.

$(X, \mathcal{O}_X)$ が affine scheme だと仮定して証明する．調べる必要があるのは，$(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}$ は sheaf of ring on $\operatorname{Spec} A$ であること，すなわち以下が成り立つことである．

$$ {}^\forall U :: \text{open in } X,\ \ {}^\forall s \in (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}(U),\ \ {}^\forall \mathfrak{P} \in X,\ \ P \in {}^\exists V \subseteq U {}^\forall \mathfrak{q} \in V,\ \ s(Q) \in A_{\mathfrak{q}}. $$

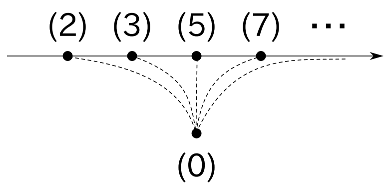
$s \in (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}(U)$ を任意に取る．sheafification のやり方から，点 P の十分小さな開近傍 V について $s \in \mathcal{O}_X(U)/\operatorname{Nil}(\mathcal{O}_X(U))$ と言える（正確には presheaf を sheaf に埋め込む射が必要）．（TODO）

(c) If X :: reduced scheme, then $X \to Y$ is uniquely factored into $X \to Y_{\text{red}} \to Y$.

Ex2.4 Functor Γ and Affine Schemes.

Ex2.5 $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ is the Final Object in $\mathbf{Sch}$.

$\mathbb{Z}$ は次元 1 の環だから，$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ は以下の図のようになる．



任意の環 R について，homomorphism $\phi : \mathbb{Z} \to R$ を考える．準同型だから $\phi(0) = o, \phi(1) = e, \phi(-1) = -e$（ただし o, e はそれぞれ R の加法/乗法単位元．）となる．そして $\mathbb{Z}$ は無限巡回群だから，$\phi(n-m) = \sum_{i=1}^n e + \sum_{i=1}^m (-e)$ となり，よって準同型 $\mathbb{Z} \to R$ はただひとつ．つまり $|\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, R)| = 1$.

$\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ は affine space だから，Ex2.4 より，任意の scheme X について $|\operatorname{Hom}(X, \operatorname{Spec}\mathbb{Z})| = 1$．すなわち，$\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ は **Sch** の final object となる．

Ex2.6　$\operatorname{Spec}\{0\}$ is the Initial Object in $\mathbf{Sch}$.

零環 $\{0\}$ はただひとつのイデアル（したがって素イデアル）(0) を持つから，$\operatorname{Spec}\{0\}$ は 1 点集合．零環から別の環への準同型写像は $0 \mapsto 0$ なるものしか無い．scheme の間の射は環の間の準同型から作られるものしかないから（Prop2.3c），$\operatorname{Spec}\{0\}$ から別の scheme への射は $0 \mapsto 0$ から得られるものしか無い．よって $\operatorname{Spec}\{0\}$ は initial object.

Ex2.7　Residue Field.

Residue field of x on X とは，剰余体 $k(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ のことである．

K :: field, $O := (0) \subset K$ とする．すると $\operatorname{Spec} K = \{O\}$ であり，開集合は $\emptyset, \operatorname{Spec} K = \{O\}$ の二つのみ．したがって $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} K) = K$ となる．$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O}$ は $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} K)$ のみからなる direct system の direct limit だから，これらは厳密に等しい．

■$(f, f^\#) \to (x, \phi)$　$(f, f^\#) : (\operatorname{Spec} K, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ を考えよう．$f : \operatorname{Spec} K \to X$ は，$\operatorname{Spec} K$ が 1 点空間であることから，$f(O)$ の値のみで定まる．この値を $x := f(O)$ としておこう．$f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}$ は

$$f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(U) = \begin{cases} K & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases}$$

で定まる．これは K の skyscraper sheaf (Ex.1.17) である．すると，$f^\# : \mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}$ は

$$(f^\#)_x : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, f^{-1}(x)} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O} = K$$

を誘導する[†1]．これは以下の図式を可換にする射である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "(f^\#)_x"] & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O} \arrow[d, equal] \\
\mathcal{O}_X(U) \arrow[u, "\mu_U"] \arrow[r, "(f^\#)_U"] & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(\{O\})
\end{tikzcd}$$

ただしこの図式では $x \in U \subseteq X$．$\operatorname{im}(f^\#)_x \subseteq K$ は体だから，第一同型定理より，$\ker(f^\#)_x$ は極大イデアル．よって $(f^\#)_x$ は

$$\mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} = k(x) \xrightarrow{\phi} K$$

へと分解される．こうして $(f, f^\#)$ から $x \in X$ と $\phi_f : k(x) \to K$ が得られた．

■$(x, \phi) \to (f, f^\#)$　逆に $x \in X$ と $\phi : k(x) \to K$ から $(f, f^\#)$ を作る．これには以上の手順を逆にたどればよい．まず f は以下のものになる．

$$\begin{array}{cccc} f: & \operatorname{Spec} K & \to & X \\ & O & \mapsto & x \end{array}$$

$\phi : k(x) \to K$ から $f^\#$ を復元するには，以下のようにする．

[†1] $(f_*\mathcal{O})_P = \mathcal{O}_{f^{-1}(P)}$ を使った．

$$\begin{array}{rccl} f^{\#}_U: & \mathcal{O}_X(U) & \to & (f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,K})(U) \\ & s & \mapsto & \begin{cases} \Phi_U(s) & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases} \end{array}$$

ここでの Φ_U (with $x \in U$) は，以下のような写像の結合である．

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \varinjlim_{x \in V} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} = k(x) \xrightarrow{\phi} K = (f_*\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}\,K})(U)$$

$f^{\#}$ から ϕ を作った時，ϕ から再び $f^{\#}$ に戻ることは，前段落で見た二つの図式から分かる．

Ex2.8

Ex2.9　Uniquely-Existence of Generic Point.

X を scheme とし，Z をその nonempty irreducible closed subset とする．この時，Z がただひとつの generic point を持つことを示す．

■Useful Fact (!).　一般に，$D \subset X$ が X の dense subset ならば，$X \setminus D$ は空集合の他に開集合を含まない．これは直ちに理解できるが重要なので記しておく．

■Affine Case.

■General Case.　affine open subset $U \subseteq X$ であって，$U \cap Z \neq \emptyset$ であるものをとる．この時，$U \cap Z$ (:: closed in U) は affine scheme の closed subset だから，前段落より，必ず generic point ζ を持つ．この ζ は Z の generic point でもある．このことを示すために，$\{\zeta\}$ が Z で dense でないとしよう．すると $Z \setminus \{\zeta\}$ は $V(\neq \emptyset)$ :: open in Z を含む．Z は irreducible だから $V \cap U \neq \emptyset$．今 ζ は $Z \cap U$ の generic point としたから，$(U \cap Z) \setminus \{\zeta\} = U \cap (Z \setminus \{\zeta\})$ は $U \cap Z$ の開集合を含まない．しかし今

$$V \subseteq Z \setminus \{\zeta\} \text{ であり，} \quad \emptyset \neq V \cap U \subseteq U \cap (Z \setminus \{\zeta\}).$$

よって $\zeta \in U \cap Z$ は Z の generic point である．また，ζ の他に generic point ζ' が存在したとしよう．$\zeta' \notin Z \cap U$ であれば $Z \setminus \{\zeta'\}$ は空でない開集合 $Z \cap U$ を含むことになるので，$\zeta, \zeta' \in Z \cap U$．前段落の結果より，$\zeta = \zeta'$ が得られる．

Ex2.10

Ex2.11

Ex2.12

Ex2.13

Ex2.14

Ex2.15

Ex2.16

Ex2.17

Ex2.18

Ex2.19