Ex4.9 Suitable Stereographic Projection Gives Birational Map.

X :: projective variety in $\mathbb{P}^n_k$ とし，$r = \dim X \leq n-2$ とする．また H :: hyperplane in $\mathbb{P}^n$ とし，適宜 $\mathbb{P}^{n-1}$ と同一視する．適切に点 $P \notin X$ をとれば，P から H への stereographic projection :: $\pi : X \to \mathbb{P}^{n-1}$ が X と $\pi(X)$ の間の birational map になることを示す．

$I = \mathcal{I}_p(X)$ とする．$\bar{x}_i = x_i \bmod I, \bar{y}_i = \frac{\bar{x}_i}{\bar{x}_0}$ とすると，$K := K(X) = k(\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_n)$．Thm4.8 より拡大 K/k は finitely and separably generated．Thm4.7 より，$\{\bar{y}_i\}_{i=1}^n$ は separating transcendence base を部分集合として含む．そこで番号を付け替えて，$\{\bar{y}_i\}_{i=1}^n$ に含まれる separating transcendence base を $\{\bar{y}_i\}_{i=1}^r$ としよう．base の濃度が $r(= \dim X)$ であることは Thm3.2 による．そして以下の拡大は finite generated extension である．

$$k(\{\bar{y}_i\}_{i=1}^n)/k(\{\bar{y}_i\}_{i=1}^r)$$

Thm4.6 から，この拡大は以下のような元 $\bar{\eta}$ で生成することが出来る．

$$\bar{\eta} = \eta \bmod I \quad \text{where} \quad d \geq 0,\ \eta_{r+1}, \ldots, \eta_n \in k[\{x_i\}_{i=1}^r]^d,\ \eta = \frac{1}{x_0^d} \sum_{i=r+1}^n \eta_i x_i.$$

$\pi(X) \subseteq H$ の function field を L とする．π から誘導される準同型 (TODO)π^* を次で定める．

$$\begin{array}{rccc} \pi^* : & L & \to & K \\ & f & \mapsto & f \circ \pi \end{array}$$

π は $Q \in X$ を直線 :: $tP + Q$ と H の交点へ写す写像であった．($P \notin H$ なので $P = 1 \cdot P + 0 \cdot Q$ は予め除いている．) したがって $R \in \pi(X)$ をとると $(\pi^* f)(tP + R)$ は $t \in k$ について定数．この値は $f(R)$ であるから π^* は単射である．逆に $g \in K$ から得られる関数 $g(tP + Q)$ が t について定数ならば，$f(R)$ $(R \in \pi(X))$ を $g(\pi^{-1}(R))$ †1 と置くことで $g = \pi^* f$ となる $f \in L$ が取れる．以上から，K の任意の元 g について次の条件 $\mathcal{C}(g)$ が成立すれば π^* は同型写像と成る: 任意の $Q \in X$ に対し $g(tP + Q)$ は $t \in k$ について定数である．

さて，既に分かっている通り $K = k(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_r, \bar{\eta})$ であった．なので $\mathcal{C}(\bar{y}_1), \ldots, \mathcal{C}(\bar{y}_r), \mathcal{C}(\bar{\eta})$ の全てが成立すれば良い．

引き続き $Q \in X$ とする．$P = (p_0 : \cdots : p_n), Q = (q_0 : \cdots : q_n)$ とすると

$$tP + Q = (tp_0 + q_0, \ldots, tp_n + q_n).$$

なので $p_0 = \cdots = p_r = 0$ すなわち $P \in \mathcal{Z}_p(x_0, \ldots, x_r)$ であれば $\mathcal{C}(\bar{y}_1), \ldots, \mathcal{C}(\bar{y}_r)$ は成立する．以下，P はこのようにとる．

$tP + Q \in X$ であるような t について $\bar{\eta}(tP + Q)$ は次のように成る．(分母を払って考えれば $Q \in X \cap \mathcal{Z}_p(x_0)^c$ に限る必要はない．)

$$q_0^d \cdot \eta(tP + Q) = \sum_{i=r+1}^n \eta_i(q_0, \ldots, q_r)(tp_i + q_i) = \left(\sum_{i=r+1}^n \eta_i(q_0, \ldots, q_r) p_i \right) t + \left(\sum_{i=r+1}^n \eta_i(q_0, \ldots, q_r) q_i \right)$$

この t の係数が任意の $Q \in X$ について 0 であるような P が目標の点である．

X から $\mathcal{Z}_p(x_{r+1}, \ldots, x_n)$ へ射影した像を Z とする．また $B \subseteq \mathbb{A}^r \times \mathbb{A}^{n-r}$ を次のように置く．

$$B = \mathcal{Z}_a(\eta)^c \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(Z).$$

†1 これは $\{g(tP + R) \mid t \in k, tP + R \in X\}$ に等しい．単元集合なので関数 f を定めることが出来る．

これは次のようにも書ける．

$$B = \left\{ (Q,P) \in \mathbb{A}^r \times \mathbb{A}^{n-r} \,\middle|\, \sum_{i=r+1}^{n} \eta_i(q_1,\ldots,q_r)p_i \neq 0 \right\}$$

したがって $\mathrm{pr}_2(B)$ に含まれない点が我々が求める点 P である．