ゼミノート #4
Deformation Theory

七条彰紀

2018 年 7 月 11 日

1 Automorphism Group of Stable Curve

[5] 3.A, [7] §1 を参照する．

C, D :: stable curves of genus g over a scheme S の間の isomorphism group の scheme としての構造を与える．この scheme を $\mathrm{Isom}(C, D)$ と書く．そして $\mathrm{Aut}(C) = \mathrm{Isom}(C, C)$ と定義し，これの scheme としての特徴を調べる．

$\mathrm{Isom}(C, D)$ の特徴付けをするため，次の関手を考える．

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}som_S(C, D) : & (\text{Scheme over } \mathbb{C}) & \to & (\text{Set}) \\ & S' & \mapsto & \{\ C \times_{\mathbb{C}} S' \to D \times_{\mathbb{C}} S' \ ::\ S'\text{-isomorphism}\} \end{array}$$

$\iota \in \mathcal{I}som(C, D)(S')$ から得られる ι^* は $\omega^\circ_{C\times S'/S'} = \iota^*(\omega^\circ_{D\times S'/S'})$ を満たす．また $\otimes$ と交換する（すなわち Picard 群の間の準同型である．[3] Ex II.6.8）．このことから $\mathrm{Isom}(C, D)$ が適当な r をとると $PGL(r+1)$ の部分群として書けることが分かる．

もう少し詳しく $\mathrm{Isom}(C, D)$ を書く．$n \geq 3$ を整数とする．次のように r, d をとる．

$$r + 1 = h^0((\omega^\circ_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n}) = (2n-1)(g-1), \qquad d = \deg(\omega^\circ_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n} = 2n(g-1).$$

すると [3] II.7 より，C, D は $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ の次数 d, arithmetic genus g の closed curve とみなせる（$\mathbb{P}^r$ に埋め込める）．なので Hildert scheme :: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{d,g,r}$ の点として扱うことが出来る．ここで次のように射を定める．

$$\begin{array}{rccc} \mu : & PGL(r+1) & \to & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ & \alpha & \mapsto & (\alpha \cdot [C], [D]) \end{array}$$

すると，$\mathcal{I}som(C, D)$ は $\mu^{-1}(\Delta)$ によって表現される[†1]．これを group scheme over $\mathbb{C}$ :: $\mathrm{Isom}(C, D)$ とする．

scheme over $\mathbb{C}$ :: X について少々一般の理論を述べる．$\mathbb{I} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ とおく (ref. [5] 1)．[3] Ex II.2.8 より，$t \in \underline{X}(\mathbb{I})$ は X の $\mathbb{C}$-rational point :: x と $T_x(X) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathcal{T}_x$ の元に対応する．ここで $\mathcal{T}$ は tangent sheaf :: $\mathcal{T} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ のことである．[5] でいう regular vector field とは $\mathcal{T}$ の section のこと（と思われる）．

[†1] Δ は $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ の diagonal set．$\mu^{-1}(\Delta)$ は

$$\Delta \cap \mathrm{im}\,\mu = \{(\alpha \cdot [C], [D]) \mid \alpha \cdot [C] = [D]\}$$

の $PGL(r+1)$ への逆像なので，この点と C, D の間の同型と対応することが分かるだろう．

定理 1.1
C :: stable curve of genus $g \geq 2$ について，

$$\mathrm{Ext}^0(\Omega_C, \mathcal{O}_C) = H^0(C, \mathcal{T}_C) = \mathcal{T}_C(C) = 0.$$

(証明). [7] §1.

$\pi : \tilde{C} \to C$ を normalization of C とする．また $\tilde{C}$ の connected component の個数を ν，それぞれの genus を g_i $(i = 1, \ldots, \nu)$ とする．

今，$D \in \mathcal{T}_C(C)$ は pullback :: $\pi^* : \mathcal{T}_{\tilde{C}} \to \pi^*\mathcal{T}_C$ によって[†2]．$\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ C の double point に π で対応する点 (point laying over double point, plodp) で 0 になるような regular vector field :: $\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ に対応する (TODO)．このような $\tilde{D}$ は 0 しかないことを確かめれば，$\mathcal{T}_C(C) = 0$ がわかる．

主張 1.2
1 点 $P \in \tilde{C}$ で $\tilde{D}_P = 0$ ならば，$\tilde{D} = 0$ である．

(証明). C :: reduced connected scheme に注意する．$P \in C$ において $\tilde{D} \in \mathcal{T}_C(C)$ が $\tilde{D}_P = 0$ を満たすとしよう．C の irreducible affine open cover :: $\mathfrak{U}$ をとり，$P \in U$ なる $U = \operatorname{Spec} A \in \mathfrak{U}$ をとって固定する．すると C :: reduced より A :: integral domain. $\tilde{D}|_U \in \mathcal{T}_C(U)$ が $P \in U$ で 0 になるのだから，次が成立する．

$$^{\exists}u \in A - \mathfrak{p}_P, \quad u \cdot (\tilde{D}|_U) = 0.$$

A :: integral より，これは $\tilde{D}|_U = 0$ を意味する．U と交わる irreducible affine open subset of C :: $V \in \mathfrak{U}$ についても，$\tilde{D}|_{U \cap V} = 0$ なので $\tilde{D}|_V = 0$. C :: connected なので，このように V を取り続けることで，全ての $V \in \mathfrak{U}$ について $\tilde{D}|_V = 0$ であることがわかる．sheaf の Identity Axiom から，C 全体で $t = 0$. ∎

したがって我々は $\tilde{C}$ の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつこと示せば良い．

$\mathcal{T}_{\tilde{C}} = \mathscr{H}\!om(\Omega_{\tilde{C}/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$ なので，$\mathcal{T}_{\tilde{C}}$ に対応する divisor は $K_{\tilde{C}}$. $\deg K_{\tilde{C}} = 2\tilde{g} - 2$ なので，$\tilde{g} > 1$ ならば $\deg(-K_{\tilde{C}}) < 0$. したがって [3] Lemma IV.1.2 から $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\tilde{C}, \mathcal{T}_{\tilde{C}}) = 0$. すなわち $\mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C}) = 0$. なので以下では $\tilde{g}_i = 0, 1$ とする．

$\tilde{g}_i = 0, 1$ であるとき，$\tilde{C}$ の各 connected component は必ず plodp をもつ．実際，genus formula で $\delta = 0$ とすると

$$g = \sum_i (\tilde{g}_i - 1) + 1 \geq 2$$

したがって $\sum_i (\tilde{g}_i - 1) > 0$ ということになる．しかし仮定から $\tilde{g}_i - 1 \leq 0$ なので，$\delta > 0$. すなわち C は必ず node をもつ．$\tilde{C}$ の各 component は smooth であることと C が connected であることも踏まえて考えると，$\tilde{C}$ の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつことが分かる．（この辺りは [7] Lemma1.4 で詳しく述べられている）. ∎

命題 1.3
任意の閉点 $P \in \mathrm{Aut}(C)$ について，$\mathcal{O}_{\mathrm{Aut}(C),P} \cong \mathbb{C}$. 特に $\mathrm{Aut}(C)$ :: reduced scheme.

(証明). $X = \mathrm{Aut}(C)$ は group scheme over $\mathbb{C}$ であるから，X のある点での local な性質は transition を用いて単位元 e での性質と言い換えられる．なので $A := \mathcal{O}_{X,e}$ のみを考える．X :: group scheme over $\mathbb{C}$ より

[†2] R :: ring, A, B :: ring over R とする．一般に，k-homomorphism :: $\phi : A \to B$ があるとき，$D \in \mathrm{Der}_R(B)$ は $\phi^* : D \mapsto D \circ \phi$ によって $\mathrm{Der}_R(A)$ へ写すことが出来る．

e :: $\mathbb{C}$-rational point なので，A が体ならばそれは $\mathbb{C}(= A/\mathfrak{m}_A)$ と同型である．よって我々は A が体であることのみ示せば良い．

上記の定理 (1.1) から，$\mathcal{T}_C(C) = 0$．これは $C \times \mathbb{I}$ の $\mathbb{I}$-automorphism は自明なものしか無いことを意味する（後述）．さらに $\mathrm{Aut}(C)$ の定義から，これは射 $\mathbb{I} \to \mathrm{Aut}(C)$ としては自明なものしか存在しないことを意味する．さらに [3] Ex II.2.8 より，これは $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2 = 0$ を意味する．中山の補題から $\mathfrak{m}_A = 0$．よって A は体である．∎

2 Definitions of Deformations and Versal Deformation.

定義 2.1 ($\mathbb{C}$-pointed scheme [8] §1.2.1)
scheme :: Y と $\mathbb{C}$-rational point :: $y_0 \in Y$ の組を $\mathbb{C}$-pointed scheme を呼び，(Y, y_0) と書く．

morphism of $\mathbb{C}$-pointed schemes :: $(S, s_0) \to (T, t_0)$ とは，moephism of schemes :: $\phi : S \to T$ であって，$\phi(s_0) = t_0$ を満たすもののこと．

定義 2.2 (Deformation of Scheme [8] §1.2.1, [5] §3.B)

(i) deformation of X とは，以下のような pullback diagram のことである．ψ から $X \cong \mathcal{X} \times_Y \mathbb{C}$ が誘導される．

$$\xi : \begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathcal{X} \arrow[d, "\text{flat, surj.}"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "s"'] & Y \end{tikzcd}$$

A' :: local artinian ring with $A'/\mathrm{Nil}(A') \cong \mathbb{C}$ を用いて $Y = \mathrm{Spec}\, A'$ と書ける場合，これは abstruct lifting of X to A' とも呼ばれる ([9] 4.2).

(ii) 上の deformation of X :: ξ について，S のことを ξ の parameter space, $\mathcal{X}$ を ξ の total space と呼ぶ.

(iii) 任意の scheme :: X と $\mathbb{C}$-pointed scheme :: (S, s_0) に対して，S が parameter space であるような deformation of X が存在する:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X \times_{\mathbb{C}} S \arrow[d] \\ \mathbb{C} \arrow[r, "s"'] & S \end{tikzcd}$$

これを product family または trivial family と呼ぶ.

(iv) morphism of $\mathbb{C}$-pointed schemes :: $(T, t_0) \to (S, s_0)$ は，parameter space が S である deformation :: ξ から base change によって次の deformation を誘導する．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{X} \times_S T \arrow[d] \\ \mathbb{C} \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

これを元の deformation の $f : (T, t_0) \to (S, s_0)$ による pullback と呼び，$f^*\xi$ と書く（このノート独自？）.

(v) isomorphism of deformations of X :: $\xi \to \eta$ とは，以下の可換図式が成立する同型 $\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}, S \cong T$ の

こと．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{Y} \arrow[dd] \\
X \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[dd] & \mathcal{X} \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[dd] & \\
 & & T \\
\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[urr] & S \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}
$$

isomorphism of parameter spaces :: $(S, s_0) \to (T, t_0)$ と deformation から誘導される deformation は元の deformation と同型である．

定義 2.3 (Universal Deformation, [5] 3.B, [4] §15)
universal deformation for X とは，次の性質を満たす deformation of X :: ξ (parameter space :: S): 任意の deformation of X ::η (parameter space :: T) にたいし，morphism of pointed schemes :: $f : T \to S$ が一意に存在し，$f^*\xi \cong \eta$ となる．

Universal Deformation は，次の関手の表現対象であると言える．

$$\mathbf{Sch}/\mathbb{C} \ni S \mapsto \{\text{Deformation of } X\}.$$

したがって全ての Deformation は universal deformation から得られる．しかし，当然ながらというべきか，universal deformation は殆どの場合で存在しない．そこで universal deformation への要求を

- $S' \to S$ を locally about S' にとるものとし，
- $U \to S$ の一意性は要求しない

と弱める．一意 (uni-) ではないので，これを versal deformation と呼ぶ．

定義 2.4 (Versal Deformation)
（versal deformation の定式化が見つからないので保留．見つけた限りでは versal deformation for scheme は次で意義する formal derormation でのみ定義されている．[1] では versal deformation for (complex) manifold が定義されているのみである．）

定義 2.5 (First Order Deformation)
$D = \mathbb{C}[x]/(x^2), \epsilon = x \bmod (x^2)$ とする．$\mathbb{I} = \operatorname{Spec} D$ の唯一の閉点を 0 で表す．$(\mathbb{I}, 0)$ 上の deformation を，first order deformation (or infinitesimal deformation) と呼ぶ．

補題 2.6
次の first order deformation of X を考える．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathcal{X} \arrow[d] \\
\mathbb{C} \arrow[r, "s"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

この時，ψ は同相写像である．

(証明)．(TODO) ∎

定義 2.7 (Restriction of First Order Deformation)
上の命題にある first order deformation of X について，U :: open subset of X をとる．locally ringed space :: $(\psi(U), \mathcal{O}_{\mathcal{X}}|_{\psi(U)})$ を $\mathcal{X}|_U$ と書く．

3 First Order Deformation of a Nonsingular Variety.

補題 3.1 ([2] Cor6.2)
D-module :: M が flat であることは，$M/\epsilon M \xrightarrow{\times\epsilon} \epsilon M$ が同型であることと同値．

補題 3.2 ([6] Prop5.1)
X :: affine, nonsingular, finite type scheme over a field k とする．この時，X の first order deformation は自明な deformation :: $X \times_k \operatorname{Spec} D$ しか存在しない．

(証明). $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{I}, \psi : X \to \mathcal{X}$ を X の first order deformation とする．ϕ :: flat と上の補題を用いると，$X \xrightarrow{\cong} \mathcal{X} \times_D \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ から $\psi^{\#} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\epsilon\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{O}_X$ が同型であることが得られる．逆にこの同型が存在する時 $\mathcal{X} \to \mathbb{I}$ が flat であることが言える．したがって X の first order deformation は infinitesimal extension of X by $\mathcal{O}_X$ ([3] Ex II.8.7) に対応する．しかし [3] Ex II.8.7 より，これは自明なものしか存在しない． ■

補題 3.3 ([6] Prop5.2)
X :: nonsingular scheme of finite type over k とする．この時，次の sheaf を考える．

$$X \supseteq U \mapsto \{\mathbb{I}\text{-automorphisms of } D \times_k \mathbb{I}\}.$$

するとこの sheaf は tangent sheaf of X :: $\mathcal{T}_X$ と同型である．

(証明). ■

定理 3.4 ([6] p.7)
X :: separated nonsingular scheme of finite type over k とする．特に，X :: nonsingular (abstruct) variety over K であればよい．この時，first oder deformation of X の同値類は $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元と一対一に対応する．

(証明). ■

4 Extension of Sheaves

定義 4.1 (Extension of Sheaves) (i) $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: $\mathcal{O}_X$-module on ringed space X とする．extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ とは，次のような完全列のこと．

$$(\mathcal{E}, \iota, \kappa) :\ 0 \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\iota} \mathcal{E} \xrightarrow{\kappa} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

(ii) $(\mathcal{E}, \iota, \kappa) \to (\mathcal{E}', \iota', \kappa')$ :: homomorphism of extensions of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ とは，次の図式を可換にする

homomorphism of sheaves :: $\phi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ のこと．

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{E} \arrow[dd, "\phi"] \arrow[dr, "\kappa"] & & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[ur, "\iota"] \arrow[dr, "\iota'"'] & & \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\ & & \mathcal{E}' \arrow[ur, "\kappa'"'] & & \end{tikzcd}$$

(iii) $g : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ と $(\mathcal{E}, \iota, \kappa)$ :: extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ について，$g_*\mathcal{E}$ :: pushfoward of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ を次で定める．これが extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}'$ になっていることは簡単に確かめられる．
まず，sheaf としては $g_*\mathcal{E}$ は次の準同型の cokernel である．

$$\mathcal{G} \to \mathcal{G}' \oplus \mathcal{E}; \qquad \langle U, y\rangle \mapsto \langle U, g_U(y)\rangle \oplus \langle U, -\iota_U(y)\rangle.$$

$\iota_{g_*\mathcal{E}}, \kappa_{g_*\mathcal{E}}$ は次で定める．

$$\begin{aligned} \iota_{g_*\mathcal{E}} &: \mathcal{G}' \to g_*\mathcal{E}; && y' \mapsto [y', 0] \\ \kappa_{g_*\mathcal{E}} &: g_*\mathcal{E} \to \mathcal{F}; && [y', e] \mapsto \kappa_{\mathcal{E}}(e) \end{aligned}$$

extension of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ が成す集合を $E(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ と書く．

定理 4.2
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: $\mathcal{O}_X$-modules on ringed scheme :: X とする．この時，全単射 $\Phi : E(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ が存在する．

これは有名な結果なので証明を書かない．例えば [3] ExIII.6.1 に証明の方針が述べられているし，加群の場合の類似の結果としては [10] pp.259-264 に詳しい証明がある．

定義 4.3(1) split extesion of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ を $0_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ あるいは単に 0 と書く．

$$0_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : \ 0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

(2) $(\mathcal{E}, \iota, \kappa)$ :: extension of sheaves について，$-\mathcal{E} := (\mathcal{E}, -\iota, \kappa)$ と定める．

(3) (The Baer sum) $(\mathcal{E}, \iota, \kappa), (\mathcal{E}', \iota', \kappa')$ :: extensions of $\mathcal{F}$ by $\mathcal{G}$ に対し，$\mathcal{E} + \mathcal{E}'$ を以下のように定める．まず sheaf としては，次のよう．

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}' = \frac{\{(e, e') \in \mathcal{E} \oplus \mathcal{E} \mid \kappa(e) = \kappa'(e') \in \mathcal{G}\}}{\{(\iota(f), 0) - (0, \iota'(f)) \mid f \in \mathcal{F}\}}.$$

$\iota_{\mathcal{E}+\mathcal{E}'}, \kappa_{\mathcal{E}+\mathcal{E}'}$ は次のように定める．

$$\begin{aligned} \iota_{\mathcal{E}+\mathcal{E}'} &: \mathcal{G} \to \mathcal{E} + \mathcal{E}'; && y \mapsto [\iota(y), 0] = [0, \iota'(y)] \\ \kappa_{\mathcal{E}+\mathcal{E}'} &: \mathcal{E} + \mathcal{E}' \to \mathcal{F}; && [e, e'] \mapsto \kappa(e) = \kappa'(e') \end{aligned}$$

補題 4.4
$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: $\mathcal{O}_X$-modules on ringed scheme :: X とする．この時，$E(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ には加法群の構造が定まる．

補題 4.5
全単射 $\Phi : E(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ は加法群の間の同型である．

5 First Order Deformation of a Local Complete Intersection.

この節は 5.10 を証明するための必要最低限の定義と命題のまとめである．元の命題と比較して，このノートでは X を $\mathbb{C}$ 上のものに限定し，defoemation も一般の local artinian ring ではなく $D = \mathbb{C}[\epsilon]$ に限定している．したがって formal deformation([9] 6.1), abstruct lifting([9] 4.2), first order deformation が一致している．

以下，この節では X を以下のようなものとする ([9] Hypotheses4.1).

- flat,
- generically smooth,
- local complete intersection,
- finite type

scheme over $\mathbb{C}$.

特に stable curve over $\mathbb{C}$ はこれらの条件を満たす．

“local complete intersection”の定義を改めて書き下しておく．

定義 5.1 ((local) complete intersection [9] p.21, [3] p.185)
X :: scheme of finite type over $\mathbb{C}$ が complete intersection であるとは次が成立すること: X は P :: smooth scheme over $\mathbb{C}$ ([3] III.10) に埋め込まれ，さらに ideal sheaf :: $\ker(X \hookrightarrow P)$ が $\mathrm{codim}(P, X)$ 個の global section で生成されること ([3] p.121).

X :: scheme of finite type over $\mathbb{C}$ が locally complete intersection であるとは $\mathfrak{U}$ :: open covering of X が存在し，任意の $U \in \mathfrak{U}$ が complete intersection であること．

議論は，$\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$，$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$，$e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ の対応の連鎖である．これらはいずれも first order deformations :: $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ の「差」を表現する量である．ここでの「差」の意味を理解するには，最初に命題 (5.6), (5.7) のステートメントを見るのが良い．そして自明な first order deformation of X :: $X \times D$ と与えられた first order deformation の「差」である $e(\mathcal{X}, X \times D)$ によって first order deformation of X を分類する（定義 5.9)．

5.1 $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

定義 5.2
X :: **complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とする．これの ideal sheaf を $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_P$ とする．$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformation of X とすると，$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1$ :: embedded in P となる．そこで ideal sheaf をそれぞれ $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2 \subseteq \mathcal{O}_P$ とする．first order deformation of X の定義から，$\mathcal{I}_i / \epsilon \mathcal{I}_i \cong \mathcal{I}$ $(i = 1, 2)$.

写像 $\mathcal{I} \to (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ を以下のように定める．まず，$\langle U, f, \in \rangle \mathcal{I}$ に対し，

$$\langle U, \tilde{f}_i \rangle \bmod \epsilon \mathcal{I}_i = \langle U, f \rangle \ (i = 1, 2)$$

となる $\langle U, \tilde{f}_i \rangle$ が存在する．そこで

$$\langle U, f \rangle \mapsto \langle U, \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2 \rangle \bmod (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{I} \in (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{O}_P / \mathcal{I}) = (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$$

と写す．これは $\tilde{f}_i$ のとり方に依らず，well-defined．この写像を $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_1)$ と書く．

以下の $\mathbb{C}$-module としての同型があるため，$\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ を以下のいずれの集合の元ともみなす．

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{I}, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \\
\cong &\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \\
\cong &H^0(X, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{}) \\
\cong &(\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{}) \\
\cong &H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{})
\end{aligned}$$

命題 5.3 ([9] Prop2.8a,b,c,d,e)
X :: **complete intersection** embedded in P とする．

(a) $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) = 0 \iff \mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$.
(b) $\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) + \nu(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) = \nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3)$.
(c) $\nu(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1) = -\nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.
(d) 任意の $\mathcal{X}$ :: first order deformation of X, 任意の $\nu \in H^0(X, (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)\hat{})$ に対し，$\mathcal{Y}$ :: first order deformation of X が存在して，$\nu = \nu(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ となる．
(e) U :: open subset of X について，$\nu(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U) = \nu(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)|_U : (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)|_U \to (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$.

(証明). (d) のみ証明する．他は自明であろう． ∎

5.2 $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

補題 5.4 (First Fundamental Exact Sequence)
X :: **complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とし，ideal sheaf は $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_P$ であるとする．この時，以下は exact.

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow (\Omega_{P/\mathbb{C}})|_X \longrightarrow \Omega_{X/\mathbb{C}} \longrightarrow 0$$

すなわち，$(\Omega_{P/\mathbb{C}})|_X$ :: extension of $\Omega_{X/\mathbb{C}}$ by $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$.

(証明). (TODO) よく知られている通り，最初の射が単射であることを示しさえすれば良い． ∎

定義 5.5
$U \subseteq X$ :: **complete intersection** over $\mathbb{C}$ embedded in P とする．$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformation of X について，

$$\mathcal{E}(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U) := \nu(\mathcal{X}_1|_U, \mathcal{X}_2|_U)_*((\Omega_{P/\mathbb{C}})|_X)$$

を extension of $\Omega_{U/\mathbb{C}}$ by $(\epsilon) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_U$ として定める．

（TODO: 張り合わせが出来ることに言及．）貼りあわせによって $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ を定める．

命題 5.6 ([9] Prop4.9a,b,c,f)
$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformations of X とする．

(a) $\mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{X}) \cong 0_{\Omega_{X/\mathbb{C}}, (\epsilon D) \otimes \mathcal{O}_X}$.
(b) $\mathcal{E}(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_1) = -\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$.

(c) $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) + \mathcal{E}(\mathcal{X}_2, \mathcal{X}_3) \cong \mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_3)$.

(d) 任意の $\mathcal{E}$ :: extension of $\Omega_{X/\mathbb{C}}$ by $(\epsilon) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ と任意の $\mathcal{X}$ :: first order deformation of X に対し,

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{E}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

なる $\mathcal{Y}$ :: first order deformation of X が存在する.

(証明). (TODO) ∎

命題 5.7 ([9] Prop4.10)
$\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ :: first order deformations of X とする. この時, 以下は同値.

1. $\mathcal{X}_1$ と $\mathcal{X}_2$ は同型.
2. $\mathcal{E}(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ :: split extension.

[9] pp.22-23 では更に詳しく, 同型 $\mathcal{X}_1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{X}_2$ が $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ の元に一対一対応することが述べられている. この集合は $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ の中で 0 に潰れていることに注意.

(証明). (TODO) ∎

5.3 $e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$

定義 5.8
$T^i(X) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ とおく. $\mathcal{X}$ :: first order deformation of X に対し,

$$e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2) \in \mathrm{Ext}^1(\Omega_{X/\mathbb{C}}, (\epsilon D) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X) \cong (\epsilon D) \otimes T^1(X) \cong T^1(X) \cong \mathrm{Hom}((\epsilon D)^*, T^1(X))$$

を, $\mathcal{E}(\mathcal{X}, X \times D)$ に対応する元とする (4.2).

補題 (4.5) より, 命題 (5.6), (5.7) と同様の命題が $e(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2)$ についても性質する.

定義 5.9 (Kodaira-Spencer class/map, [9])
$T^i(X) = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ とおく. $\mathcal{X}$ :: first order deformation of X に対し,

$$k_{\mathcal{X}} = e(\mathcal{X}, X \times D) \in T^1(X) \cong \mathrm{Hom}((\epsilon D)^*, T^1(X))$$

とおく. この $k_{\mathcal{X}}$ を Kodaira-Spencer class of $\mathcal{X}$ と呼ぶ. 対応する写像 $K_{\mathcal{X}} : (\epsilon D)^*, T^1(X)$ を Kodaira-Spencer map of $\mathcal{X}$ と呼ぶ.

定理 5.10
First order deformation of X の同値類と $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_{X/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_X)$ の元は一対一に対応する. (cf. [9] Prop 6.12)

(証明). 命題 (5.6), (5.7) より, $\mathcal{X} \mapsto k_{\mathcal{X}}$ がこの対応を与えることは明らか. ∎

参考文献

[1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, and Phillip Griffiths. *Geometry of Algebraic Curves: Volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 2011 edition, 4 2011.

[2] David Eisenbud. *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1st ed. 1995. corr. 3rd printing 1999 edition, 3 1999.

[3] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[4] Robin Hartshorne. *Deformation Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2010 edition, 12 2009.

[5] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[6] Brian Osserman. A glimpse of deformation theory. https://www.math.ucdavis.edu/~osserman/classes/256A/notes/deform.pdf.

[7] David Mumford Pierre Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.

[8] Edoardo Sernesi. *Deformations of Algebraic Schemes (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 11 2010.

[9] Angelo Vistoli. The deformation theory of local complete intersections. https://arxiv.org/abs/alg-geom/9703008.

[10] 志甫淳. 層とホモロジー代数 (共立講座 - 数学の魅力). 共立出版, 1 2016.