

ゼミノート #12

Quotients of Algebraic Spaces

七条彰紀

2019 年 8 月 17 日

目次

1	Notes on Topology	1
1.1	Constructible Topology	1
1.2	Equivalence Relation on Topological Space Induced by Groupoid	3
2	Quotients	3
2.1	Definitions	3
2.2	Propositions : Paraphrase	5

1 Notes on Topology

1.1 Constructible Topology

以下を参考にした.

- [2] §1
- <http://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/Perfseminar/Notes/L3.pdf> by B.Conrad
- [4] 08YF <https://stacks.math.columbia.edu/tag/08YF>

定義 1.1

X :: topological space とする.

- X の locally closed subset とは, closed subset と open subset の共通部分で表せる subset である.
- X の constructible set とは, X の有限個の locally closed subset の和集合で表せる subset のことである.
- $U \subseteq X$ が X の locally constructible set であるとは, U のある開被覆 $\{U_i\}$ について, 各 $U \cap U_i$ が constructible set である, ということ.
- X の constructible topology とは, X の constructible set を開基とする位相のことである. X の underlying set に X の constructible topology を与えた位相空間を X_{cons} と書く.

- (v) 有限個とは限らない X の constructible set の, 和集合を ind-constructible subset と呼び, 共通部分を pro-constructible subset と呼ぶ^{†1}.
- (vi) map of topological spaces $:: f: X \rightarrow Y$ について, f^{cons} を constructible topology での map とする. (map of sets としては $f = f^{\text{cons}}$ である.)

命題 1.2

$X :: \text{topological space}$ とする.

- (i) X の open subset と closed subset は constructible set である.
- (ii) 有限個の constructible set の和, 共通部分は constructible set である. constructible set の補集合も constructible set である.
- (iii) X の constructible topology に於ける open subset は ind-constructible subset に限る. 同様に, closed subset は pro-constructible subset に限る.
- (iv) map of topological spaces $:: f: X \rightarrow Y$ について, $f^{\text{cons}} :: \text{continuous}$.

(証明). 自明. ■

命題 1.3 (i) qcqs(=quasi-compact and quasi-separated) scheme の pro-constructible subset は, affine scheme からの射の像に限る.

- (ii) locally of finite presentation morphism は constructible topology において open.
- (iii) quasi-compact morphism は constructible topology において closed.
- (iv) $f :: \text{surjective morphism}$ で $f :: \text{locally of finite presentation or quasi-compact}$ ならば $f^{\text{cons}} :: \text{submersive}$.

(証明). (i) は Rydh10 の Prop1.1 である. (ii) は Chevalley's theorem からの帰結. (iii) は locally に調べれば容易に分かる. (iv) は (ii), (iii) からの帰結である. ■

注意 1.4

constructible topology は spectral space^{†2} と共に扱われることが多い. 例えば qcqs scheme の underlying space は spectral である.

命題 1.5

[2] Prop1.7 morphism of schemes $:: f: X \rightarrow Y, g: Y' \rightarrow Y$ を考え, f の g による pullback を f' と書く.

- (i) P を open, closed, submersive のいずれかとする. g が submersive ならば, $f' :: P$ と $f :: P$ は同値.
- (ii) P を universally open, universally closed, universally submersive, separated のいずれかとする. g が universally submersive ならば, $f' :: P$ と $f :: P$ は同値.
- (iii) g^{cons} が universally submersive ならば, $f' :: \text{quasi-compact}$ と $f :: \text{quasi-compact}$ は同値.

(証明). (TODO) (iii) だけ証明を与える. ■

^{†1} “ind-”は inductive limit を意味し, “pro-”は projective limit を意味する.

^{†2} spectral space とは, 以下の性質をもつ位相空間: sober, quasi-compact, the intersection of two quasi-compact opens is quasi-compact, and the collection of quasi-compact opens forms a basis for the topology ([4] 08FG).

注意 1.6

おそらく, [3] はこの命題を利用するために, topological quotient に「 $q^{\text{cons}} :: \text{universal submersive}$ 」を要求している. より詳しく言うと以下の命題で使われている.

命題 1.7 ([3] Prop2.12 (ii))

$R \rightrightarrows_t^s X :: \text{groupoid}$ とし, $q: X \rightarrow Y$ を topological quotient とする. $j :: \text{quasi-compact}$ と, $Y :: \text{quasi-separated}$ かつ $j/Y :: \text{quasi-compact}$ は同値.

これを経由して, $X \rightarrow S :: \text{quasi-separated}$ ならば GC quotient $:: Y \rightarrow S$ が quasi-separated であることなどを示している (Prop4.7).

1.2 Equivalence Relation on Topological Space Induced by Groupoid

$S :: \text{algebraic space}$ とし, groupoid in algebraic S -space $:: R \rightrightarrows_t^s X$ を考える.

topological space $:: |U|$ に, 次のようにして同値関係 \sim_R を定義する.

定義 1.8

点 $x_1, x_2 \in |X|$ について,

$$x_1 \sim_R x_2 \iff \exists r \in |R|, \quad |s|(r) = x_1, |t|(r) = x_2$$

と定義する.

$|R \times_x R| \rightarrow |R| \times_{|X|} |R|$ が全射であることを用いると, groupoid の定義から, \sim_R が同値関係であることが分かる.

定義 1.9

点 $x \in |X|$ の同値類を orbit と呼び, $R(x)$ と書く. $R(x)$ は $|t|(|s|^{-1}(x))$ と等しい.

また, $W \subseteq |X|$ が R -stable であるとは, W が \sim_R について stable であること. すなわち,

$$\{x \in |X| \mid \exists w \in W, \quad w \sim_R x\} = R$$

となること. これは $|s|^{-1}(W) = |t|^{-1}(W)$ in $|R|$ と同値.

注意 1.10

[4] 04XJ には, $S = |X| \times_{|[X/R]|} |X|$ とすると位相空間として $|[X/R]| = |X|/S$, という命題が有る.

2 Quotients

以降は引き続き $S :: \text{algebraic space}$ とし, groupoid in algebraic S -space $:: R \rightrightarrows_t^s X$ を考える.

2.1 Definitions

定義 2.1 (equivariant morphism)

morphism $:: q: X \rightarrow Y$ について, $q \circ s = q \circ t$ であるとき, q を equivariant morphism という.

定義 2.2 (j, j_Y)

$s, t: R \rightarrow X$ から $X \times_S X$ の普遍性により得られる射 $:: R \rightarrow X \times_S X$ を j と書く.

また, equivariant morphism $:: q: X \rightarrow Y$ について, s, t から $X \times_Y X$ の普遍性により得られる射 $:: R \rightarrow X \times_Y X$ を j_Y と書く.

stabilizer はまたの機会に定義する.

注意 2.3

fiber product の普遍性から, j_Y に $X \times_Y X \rightarrow X \times_S X$ を合成すると j に一致する.

注意 2.4

equivariant morphism $:: R \rightrightarrows_t^s X \rightarrow Y$ は, quotient stack からの射 $[X/R] \rightarrow Y$ に一対一に対応する.
(TODO: proof)

定義 2.5 (universal, uniform quotient)

$q: X \rightarrow Y$ が性質 P をもつとする.

- 任意の射 $Y' \rightarrow Y$ による pullback $:: q': X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ も性質 P をもつ時, P は universal であると言う.
- 任意の flat 射 $Y' \rightarrow Y$ による pullback $:: q': X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ も性質 P をもつ時, P は uniform であると言う.

定義 2.6

equivariant morphism $:: q: X \rightarrow Y$ を考える.

Categorical quotient

任意の equivariant morphism $:: r: X \rightarrow Z$ が q を介して一意に分解する時, すなわち $\bar{r} \circ q = r$ を満たす射 $:: \bar{r}: Y \rightarrow Z$ が一意に存在するとき, q を categorical quotient と呼ぶ.

Zariski quotient

$|q|: |X| \rightarrow |Y|$ が topological space の圏における $|R| \rightrightarrows_{|t|}^{|s|} |X|$ の coequalizer である時, q を Zariski quotient と呼ぶ. 同値な言い換えとして, 任意の点の $|q|$ による逆像が丁度一つの orbit から成り, かつ $|q| :: \text{submersive}$ である, というものが有る.

Constructible quotient

$|q|^{\text{cons}}: |X|^{\text{cons}} \rightarrow |Y|^{\text{cons}}$ が topological space の圏における $|R|^{\text{cons}} \rightrightarrows_{|t|^{\text{cons}}}^{|s|^{\text{cons}}} |X|^{\text{cons}}$ の coequalizer である時, q を constructible quotient と呼ぶ. 言い換えについては Zariski quotient と同様である.

Topological quotient

$q :: \text{universal Zariski \& universal constructible quotient}$ である時, q を topological quotient と呼ぶ.

Strongly topological quotient

$q :: \text{topological quotient}$ かつ $j_Y :: \text{universally submersive}$ である時, q を strongly topological quotient と呼ぶ.

Geometric quotient

q が topological quotient であり, かつ \mathcal{O}_Y が Y_{ET} (category of etale sheaves on Y) における s^*, t^*

の equalizer である時, q を geometric quotient と呼ぶ.

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow q_* \mathcal{O}_X \xrightarrow[t^*]{s^*} (q \circ s)_* \mathcal{O}_R$$

Strongly geometric quotient

$q ::$ geometric quotient & strongly topological quotient であるとき, すなわち $q ::$ geometric quotient
かつ $j_Y ::$ universally submersive であるとき, q を strongly geometric quotient と呼ぶ.

注意 2.7

strongly topological quotient では $j_Y: R \rightarrow X \times_Y X$ が univ. submersive であるから, $X \times_Y X \rightarrow X \times_S X$ も univ. submersive. このことは $X \times_Y X$ に「適切な」位相が入っていることを意味する.

注意 2.8

geometric quotient in [1]

- $q ::$ surjective and equivariant.
- $\mathcal{O}_Y = (q_* \mathcal{O}_X)^R$.
- 任意の点 $y \in Y$ について, $q^{-1}(y)$ はただ一つの orbit からなる.
- $W_1, W_2 \subseteq X ::$ disjoint closed subset について $\text{cl}_Y(q(W_1)), \text{cl}_Y(q(W_2)) ::$ disjoint.

以下のように言い換えても良い.

- $q ::$ Zariski quotient.
- $\mathcal{O}_Y = (q_* \mathcal{O}_X)^R$.
- q の open immersion による pullback も上記を満たす.

ref. E.Viehweg “D. Mumford’s Geometric Invariant Theory”. なお, [1] の初版では $q ::$ universally submersive を仮定している.

2.2 Propositions : Paraphase

命題 2.9 ([3], Prop2.3)

R -equivariant morphism $q: X \rightarrow Y$ を考える. 以下の $3 \times 3 = 9$ 個の命題を考える.

- (i) 任意の体 k と射 $y: k \rightarrow Y$ ^{†3} について $|X \times_Y k|$ は,
少なくとも 1 つの / 多くとも一つの / 丁度一つの, $(R \times_Y k)$ -orbit を含む.
- (ii) $q ::$ surjective / $j_Y ::$ surjective / $q, j_Y ::$ surjective.
- (iii) 任意の代数閉体 K について, $\bar{q}_K: X(K)/R(K) \rightarrow Y(K)$ ^{†4} は
surjective / injective / bijective.

この時, (i) \iff (ii) \iff (iii) がそれぞれ成り立つ. さらに $q, j_Y ::$ locally of finite type or integral ならば, (ii) \implies (iii) も成り立つ.

^{†3} Spec k を k と略した.

^{†4} $X(K)/R(K)$ は $R(K) \rightrightarrows_{t_K}^{s_K} X(K)$ の coequalizer で, \bar{q}_K は coequalizer による $q_K: X(K) \rightarrow Y(K)$ の一意な分解である.

(証明). 以下で計 6 つの命題の証明を行う. そのために, 取り扱う 6 つの命題を以下のようにまとめる.

	a	b
1	(i) 少なくとも 1 つの	(i) 多くとも一つの
2	(ii) $q :: \text{surjective}$	(ii) $j/Y :: \text{surjective}$
3	(iii) surjective	(iii) injective

例えば “(1a)” という記号は, (i) に含まれる「任意の体 k と射 $y: k \rightarrow Y$ について $|X \times_Y k|$ は少なくとも 1 つの $(R \times_Y k)$ -orbit を含む。」という命題を意味する.

体 $:: k$, morphism $:: y: \text{Spec } k \rightarrow Y$ をとる. $\text{Spec } k$ を k と略し, $X \times_Y \text{Spec } k$ や $R \times_Y k$ をそれぞれ X_y, R_y と略す.

■(1a) \implies (2a) 仮定より $|X_y| \neq \emptyset$ である. この集合から $|q|^{-1}(y)$ への写像が存在するので $|q|^{-1}(y) \neq \emptyset$. よって q は全射.

$$|X_y| \longrightarrow |X| \times_{|Y|} |k| \xrightarrow{\text{pr}_{|X|}} |q|^{-1}(y)$$

■(2a) \implies (1a) 仮定から直ちに次がわかる.

$$q: X \rightarrow Y :: \text{surj} \implies y^*q: X_y \rightarrow k :: \text{surj} \iff |y^*q| :: \text{surj} \iff \forall t \in |\text{Spec } k|, |y^*q|^{-1}(t) \neq \emptyset$$

R_y -equiv. morphism による一点の逆像は R_y -orbit を含む^{†5}から, $|X_y|$ は R_y -orbit $:: |y^*q|^{-1}(t) \subseteq |X_y|$ を含む.

■(3a) \implies (2a) k の代数閉包を K と書く. この時, y と $k \hookrightarrow K$ から誘導される射を合成すると, y と同値な点 $\text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } k \rightarrow X$ が得られる. これを改めて $y: \text{Spec } K \rightarrow X$ と命名する. 以下, $\text{Spec } K$ を K と略す. すると仮定 $(X(K)/R(K) \rightarrow Y(K) :: \text{surj})$ と米田の補題により, $q \circ z = y$ を満たす $z: K \rightarrow X$ が存在する. よって $|q| :: \text{surj}$.

■(2b) \implies (1b) まず, $(X \times_Y X) \times_Y k \cong X_y \times_k X_y$ に注意する. 以下の pullback 図式の $(j/Y)_y$ を考える. 仮定からこれは全射.

$$\begin{array}{ccccc} R_y & \xrightarrow{(j/Y)_y} & X_y \times_k X_y & \longrightarrow & k \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow y \\ R & \xrightarrow{j/Y} & X \times_Y X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

こうして全射 $|R_y| \rightarrow |X_y \times_k X_y| \rightarrow |X_y| \times_{|k|} |X_y|$ が得られる. j/Y の定義から, これらと $\text{pr}_i: |X_y| \times_{|k|} |X_y| \rightarrow |X_y|$ ($i = 1, 2$) を合成すればそれぞれ $|s|, |t|$ となる. よって任意の $u, v \in |X_y|$ について $|s|(r) = u, |t|(r) = v$ となる $r \in |R_y|$ が存在する. すなわち, 任意の $u, v \in |X_y|$ について $u \sim_{R_y} v$.

■(3b) \implies (2b) 点 $z: \text{Spec } k \rightarrow X \times_Y X$ を任意にとると, 上述のとおり, k をその代数閉包 K に取り替えることが出来る. したがってここでは $z: \text{Spec } K \rightarrow X \times_Y X$ を扱う. $z_i := \text{pr}_i \circ z, y := q \circ \text{pr}_i \circ z$ とする. $q \circ \text{pr}_1 = q \circ \text{pr}_2$ に注意. 以下, $\text{Spec } K$ を K と略し, 米田の補題によって対応するもの (例えば射 $z: K \rightarrow X$ と $X(K)$ の元) を同じ記号で書く.

^{†5} 点 $t \in |\text{Spec } k|$ について $q_y(t) = q_y(R_y(t))$ だから.

$q_K(z_1) = q_K(z_2) = y$ なので, 仮定から $s_K(r) = z_1, t_K(r) = z_2$ を満たす元 $r \in R(K)$ が存在する.
 $s = \text{pr}_1 \circ j_{/Y}, t = \text{pr}_2 \circ j_{/Y}$ なので, さらに以下の図式が可換に成る.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & z_1 & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 K & \xrightarrow{r} & R & \xrightarrow{j_{/Y}} & X \times_Y X & \xrightarrow{\text{pr}_1} & X \\
 & \searrow z_2 & & \downarrow \text{pr}_2 & \downarrow p.b. & \downarrow q & \\
 & & & X & \xrightarrow{q} & Y
 \end{array}$$

$X \times_Y X$ の普遍性から $r \circ j_{/Y} = z$ が分かる. すなわち, $|j_{/Y}|$ は, したがって $j_{/Y}$ は全射である.

■(1b) \implies (2b) 一つ前の段落と同じく $z, z_i (i = 1, 2), y$ をとる. この y で $X \times_Y X \rightarrow X \rightarrow Y$ を pullback する. すると z と id_K から点 $z_y: K \rightarrow X_y \times_K X_y$ が誘導される.

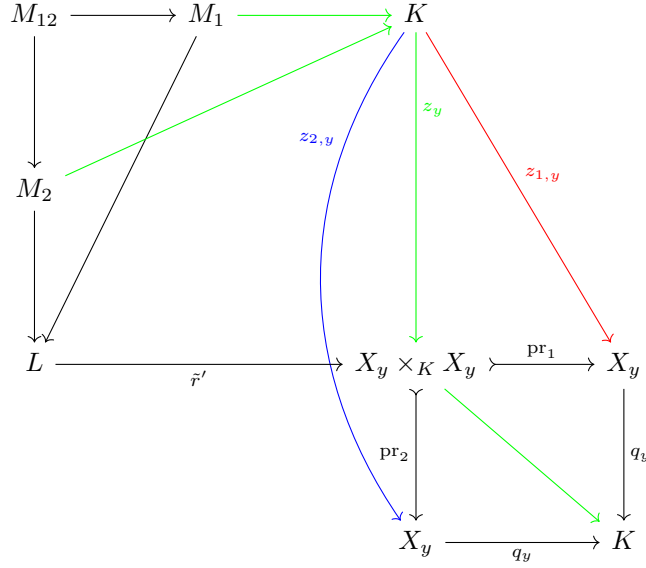
$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \text{id} & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 K & \xrightarrow{z_y} & R_y & \xrightarrow{(j_{/Y})_y} & X_y \times_K X_y & \xrightarrow{\text{pr}_{i,y}} & X_y \xrightarrow{q_y} K \\
 & \downarrow \text{id} & \downarrow p.b. & \downarrow p.b. & \downarrow p.b. & \downarrow y & \\
 K & \xrightarrow{z} & R & \xrightarrow{j_{/Y}} & X \times_Y X & \xrightarrow{\text{pr}_i} & X \xrightarrow{q} Y
 \end{array}$$

そこで $z_{i,y} := \text{pr}_{i,y} \circ z_y$ とおく. これは $z_{i,y}$ が z_i と id_K から誘導されると言っても同じである.

主張 2.10

(1b) が成立するならば, 任意の点 z について $|(j_{/Y})_y|(r) = [z_y]$ を満たす $r \in |R_y|$ が存在する.

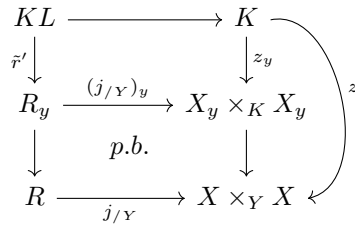
(証明). 今, 仮定から, $r \in |R_y|$ が存在し, $|s_y|(r) = [z_{1,y}], |t_y|(r) = [z_{2,y}]$ を満たす. この r の代表元として $\tilde{r}: \text{Spec } L \rightarrow R_y$ をとる. あとは $z_y, \tilde{r}' := (j_{/Y})_y \circ \tilde{r}$ が同値であることを示せば良い.



まず $\text{pr}_1 \circ z_y = z_{1,y} \sim \text{pr}_1 \circ \tilde{r}'$ なので、点の同値関係の定義より、図式中の体 M_1 と射 $M_1 \rightarrow K, M_1 \rightarrow L$ が存在する。そして M_1 から $X_y \times X_y$ を経由して pr_1 を通る 2 つの path が等しい。しかし $\text{pr}_1 :: \text{monomorphism}$ なので、 M_1 から $X_1 \times X_y$ への 2 つの path が等しい。 M_2 からの path についても同様である。

ここで緑で示した 2 つの path に注目する。右下の四角形は可換であるから、この 2 つの path $M_1 \rightarrow K, M_2 \rightarrow K$ は同値である。よって体 M_{12} と射 $M_{12} \rightarrow M_1, M_{12} \rightarrow M_2$ が存在し、これらと緑の path (M_{12} から右下の K へ至る path) が等しいことがわかる。一方で z_y のとり方から $K \rightarrow X_y \times X_y \rightarrow K$ は恒等射、特に monomorphism である。したがって左上に有る M_{12}, M_1, M_2, K が成す四角形（潰れて三角形になっているが）は可換である。まとめて、 $M_{12}, L, K, X_y \times X_y$ が成す正方形は可換であることが分かる。すなわち z_y と \tilde{r}' は同値。 ■

以上から任意の点 z について $|(j/Y)_y|$ は全射である。このことから $|j/Y|$ による像が z である点 $KL \rightarrow R_y \rightarrow R$ の存在が言える。



よって j/Y は全射。 ■

注意 2.11

[3] では (1b) \implies (2b) の証明を、「 $z_y, z_{1,y}, z_{2,y}$ の residue field が K である」ことを用いて証明している。これは [4] 03K4 の “If X is descent” 以降を用いていると思われる。今は $X :: \text{descent}$ を仮定しないので、かなり面倒な証明になった。

注意 2.12

したがって quotient の定義の幾つかは次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} q :: \text{univ. Zariski} &\iff q :: \text{univ. submersive and } j_Y :: \text{surjective.} \\ q :: \text{topological} &\iff q, q^{\text{cons}} :: \text{univ. submersive and } j_Y :: \text{surjective.} \\ q :: \text{strongly topological} &\iff q, q^{\text{cons}}, j_Y :: \text{univ. submersive} \end{aligned}$$

補題 2.13 ([3] Prop2.4, Remark2.5)

$q: X \rightarrow Y :: \text{universal Zariski quotient}$ とする. 以下の時, $q :: \text{topological quotient}$.

- (i) $q :: \text{quasi-compact}$,
- (ii) $q :: \text{locally of finite presentation}$,
- (iii) $q :: \text{universally open/closed}$,
- (iv) $s :: \text{universally open/closed}$.

(証明). $q^{\text{cons}} :: \text{univ. submersive}$ を示す. これには $q^{\text{cons}} :: \text{univ. open or univ. closed}$ を示せば十分である. なので (i),(ii) については命題 (1.3) から分かる. (iii) について $q^{\text{cons}} :: \text{univ. open}$ は自明. (iv) を証明する.

$s :: \text{univ. open/closed}$ と仮定する. j_Y の定義から, s は以下のように分解できる.

$$R \xrightarrow{j_Y} X \times_Y X \xrightarrow{\text{pr}} X$$

一つ前の命題から, 今 $j_Y :: \text{surjective}$ となっている. $U \subseteq X \times_Y X$ を open/closed とすると, $\text{pr}(U) = s(j_Y^{-1}(U))$ も open/closed. よって $\text{pr} :: \text{open/closed map}$. univ. open/closed や surj. は pullback で保たれるので, 特に $\text{pr} :: \text{univ. open/closed}$. $q :: \text{univ. submersive}$ なので, 命題 (1.5) と合わせて $q :: \text{univ. open/closed}$ を得る. ■

命題 2.14 ([3] Prop2.10)

$q: X \rightarrow Y :: \text{equivariant}$ とし, $f: Y' \rightarrow Y$ による q の pullback を $q': X \times_Y Y' \rightarrow Y'$ とする.

- (i) $q :: \text{topological quotient}$, ならば $q' :: \text{topological quotient}$.
- (ii) $f :: \text{flat}$ かつ $q :: \text{geometric quotient}$, ならば $q' :: \text{geometric quotient}$.
- (iii) $f :: \text{fpqc or fppf}^{\dagger 6}$ かつ $q' :: \text{topological / geometric / universal geometric quotient}$ ならば, q もそうである.

いずれも “topological” を “strongly topological” に, “geometric” を “strongly geometric” に置き換えても成立する.

参考文献

- [1] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric Invariant Theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34)*. Springer-Verlag, 3rd ed. edition, 1992.

^{†6} faithfully flat and quasi-compact または faithfully flat and locally of finite presentation

- [2] David Rydh. Submersions and effective descent of étale morphisms. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, Vol. 138, No. 2, pp. 181–230, 2010.
- [3] David Rydh. Existence and properties of geometric quotients. *Journal of Algebraic Geometry*, Vol. 22, pp. 629–669, 08 2013.
- [4] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2019.