

ゼミノート #11

Overview of

“Existence and properties of geometric quotients” (D.Rydh, 2013)

七条彰紀

2019 年 7 月 22 日

目次

1	事実のまとめ	2
1.1	stack から scheme まで	2
1.2	coarse moduli space が存在するための十分条件	2
1.3	coarse moduli space が存在するための必要条件	2
1.4	その他の moduli space	3
2	論文 “Existence and properties of geometric quotients” [7] の構成	3
2.1	証明の構成	3
2.2	中心的概念	4

このノートは, [7] を理解することを目的とするゼミのためのノートである. Algebraic stack については既に私のノート [9] の内容程度のことを分かっているものとする.

注意 0.1

著者 “Rydh” はスウェーデン語で, 大体「リード」と発音する. 参考: https://forvo.com/word/annika_rydh/

Conventions and Nootations

- 定義は私のノート [9] ch.5 “Algebraic Stacks and Spaces”にあるものとする. 特に, diagonal map が quasi-compact, quasi-separatedであることを仮定しない. これは [7] と同じである. algebraic stack という語は基本的に使わず, artin stack を中心的に扱う.
- artin stack の moduli space というとき, 特別な algebraic space のことを意味することも有るし, artin stack から algebraic space への特別な射のことを意味することもある. (このノートでは後者の意味であることが多い.)

- unramified という語は locally of finite type かつ formally unramified を意味する．私のノートでは locally of finite presentation まで要求するので注意せよ．
- presentation of an artin stack とは, surjective, flat^{†1}, locally of finite presentation であるような algebraic space から artin stack への射を言う．
- geometric point とは $\mathrm{Spec} k$ ($k ::$ algebraically closed field) からの射のことである．

1 事実のまとめ

1.1 stack から scheme まで

moduli 問題を含む多くの問題では, まず stack(in groupoids) が得られる．得られた stack が scheme であればとても取り扱いやすいが, そうなることはめったに無い．

一方で stack と scheme の間には, artin stack, Deligne-Mumford(DM) stack, algebraic space といった中間的概念がある．いつどれになるのか, という条件は既によく研究されていて, 同値条件も得られている．以下でそれらを列挙する．

まず, 得られた moduli stack が artin stack であるか否かは, “Criteria for Representability”として [8] ch.91 にまとめられている．また, artin stack over a scheme $:: \mathcal{X}$ が Deligne-Mumford stack であるかどうかは, 例えば任意の geometric point の自己同型群が reduced finite group scheme であることと同値である ([6] Thm8.3.3)．さらに, \mathcal{X} が algebraic space であることは, 例えば任意の geometric point の自己同型群が自明であることと同値である ([4] Thm2.2.5, [8] tag 04SZ)．

1.2 coarse moduli space が存在するための十分条件

しかし, 得られた artin stack が algebraic space であることもまためったに無い．筆者の感覚では, DM stack で既に綺麗すぎる (too neat) 対象である．そこで, artin stack を algebraic space や scheme で近似出来ないか, という問題が生まれる．この近似を coarse moduli space と呼ぶ．なお, これは歴史的な経緯から来た命名であり, 一般には必ずしも moduli 問題と関係が有るわけではない．

artin stack が coarse moduli space をもつための条件も 90 年代から考えられているが, 必要十分条件を得るには程遠い．十分条件として有名なのは Keel-Mori の定理 ([5]) が提示した「inertia stack が \mathcal{X} -finite」である．当初は多くの追加条件付きで証明されたが, [3] で base scheme に関する条件が取り外され, 最終的に [7] で artin stack に関する条件が全て取り外された．

他に, gerbe は必ず coarse moduli space を持つ．artin stack が berbe であることは, inertia stack $:: \mathcal{I}_{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ が flat and locally of finite presentation であることと同値である．

1.3 coarse moduli space が存在するための必要条件

一方で, coarse moduli space が存在するための必要条件についてはほとんど知られていない．([3] Cor5.2) では様々な前提条件付きで「separated coarse moduli space が存在する」と「inertia stack が \mathcal{X} -finite」が同値であることを示している．一方で [7] では反例を構成し, 「inertia stack が \mathcal{X} -proper」さえ必要条件では

^{†1} surjective+flat=falshfully flat に注意．

ないことを示している.

1.4 その他の moduli space

また, 「inertia stack が \mathcal{X} -finite」より強い条件を課したものとして, 「quasi-coherent sheaf の pushforward が exact」を追加した tame Artin stack がある. これは coarse moduli space が etale local に綺麗なものとなっている.

違う方向性では, J.Alper が提案した adquate moduli space と good moduli space がある. good moduli space は quotient map にはなっていないが, GIT quotient に似た優れた性質を持つ ([1]). さらに, artin stack が good moduli space を持つための必要十分条件が分かっている ([2]).

2 論文 “Existence and properties of geometric quotients” [7] の構成

今回取り扱う [7] で述べられている命題のうち, 次のものを特に研究する.

定理 2.1

\mathcal{X} を artin stack とする. \mathcal{X} が \mathcal{X} -finite inertia stack を持つならば, \mathcal{X} が coarse moduli space を持つ.

論文は基本的に algebraic space の groupoid による商を扱っており, 最後の §6 でそれらが stack の言葉に翻訳される. この方針は [5] と同じである.

2.1 証明の構成

証明の手順を説明する. 未定義の用語がかなり多くなるが, 適宜無視して欲しい.

$$\begin{array}{c}
 \mathcal{X} \text{ は } \mathcal{X}\text{-finite inertia stack を持つ.} \\
 \Downarrow \text{Thm 6.11} \\
 \mathcal{X} \text{ は fpr etale cover with finite locally free presentation } :: \mathcal{W} \text{ を持つ.} \\
 \Downarrow \text{Thm 5.3} \\
 \mathcal{W} \text{ は strongly geometric quotient を持つ.} \\
 \Downarrow \text{Thm 3.19} \\
 \mathcal{X} \text{ は strongly geometric quotient を持つ.} \\
 \Downarrow \text{Thm 3.8} \\
 \mathcal{X} \text{ は coarse moduli space を持つ. (Thm 6.12)}
 \end{array}$$

命題番号を見ると, 結論に近い部分から述べられていることが分かる.

また, ここに挙げられていないが coarse moduli space を考える上で重要な命題として次が有る.

定理 2.2 (Part of [7] Thm 3.16)

$R \rightrightarrows X$ を groupoid とし, $q: X \rightarrow Z$ をその strongly geometric quotient とする. この時, q が universally open であり, かつ q が proper または integral であれば, q は categorical quotient でもある.

全体として, この論文による D.Rydh の貢献は, geometric quotient 等の概念と categorical quotient の概

念, また descent condition などの概念の関係性を解明した点に有ると思う.

2.2 中心的概念

上で述べたなかに頻出したとおり, strongly geometric quotient という概念が頻出である. この定義を述べよう.

定義 2.3 (strongly geometric quotient, stack version, [7] Def 6.1)

\mathcal{X} を artin stack とし, q を algebraic space への射 $q: \mathcal{X} \rightarrow Z$ とする. 次の条件を満たす時, q は strongly geometric quotient と呼ばれる.

- $q ::$ universal homeomorphism,
- the diagonal $\Delta_q ::$ universal submersive,
- $q^\# : \mathcal{O}_Z \rightarrow q_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}} ::$ isomorphism.

最初の二つが成立する時, q は strongly topological quotient と呼ばれる.

[7] Prop3.8 (と Def 6.1 の上の段落) より, これは categorical quotient でもある. 見ての通り, これはかなり強い条件である. なお, 最後の条件が成立するためには, q の smooth 射による pullback がまた categorical quotient であることが十分である^{†2}.

参考文献

- [1] Jarod Alper. Good moduli spaces for artin stacks. *Annales de l'Institut Fourier*, Vol. 63, No. 6, pp. 2349–2402, 2013.
- [2] Jarod Alper, Daniel Halpern-Leistner, and Jochen Heinloth. Existence of moduli spaces for algebraic stacks. <https://arxiv.org/abs/1812.01128>, 12 2018.
- [3] Brian Conrad. The keel-mori theorem via stacks. <https://math.stanford.edu/conrad/papers/corespace.pdf>, 2005.
- [4] Brian Conrad. Arithmetic moduli of generalized elliptic curves. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, Vol. 6, pp. 209–278, 04 2007.
- [5] Sean Keel and Shigefumi Mori. Quotients by groupoids. *Annals of Mathematics*, Vol. 145, No. 1, pp. 193–213, 1997.
- [6] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [7] David Rydh. Existence and properties of geometric quotients. *Journal of Algebraic Geometry*, Vol. 22, pp. 629–669, 08 2013.
- [8] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2019.
- [9] 七条彰紀. Algebraic stacks, Sep 2018. <https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/tree/master/AlgebraicStacks>.

^{†2} 特に q が uniform categorical quotient であれば十分. 証明には, [9] で証明した $(q_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}})(U) = \Gamma(U \times_Z \mathcal{X}, \text{pr}_2^{-1} \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ と, 関手 $\Gamma(-, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ が affine line $:: \mathbb{A}_{\mathbb{Z}}^1$ で表現可能であることを用いる