第 4 章

Stacks and Descent Theory

七条彰紀

2019 年 7 月 21 日

1 The Category of Descent Data.

今回のノートで一貫して用いる記号と記法を定める．

$\mathbf{C}$ :: site, $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ :: fibered category を考える[†1]．

記法を定める．$U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i \colon U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ について，

$$U_{ij} := U_i \times_U U_j, \quad U_{ijk} := U_i \times_U U_j \times_U U_k \quad (i, j, k \in I)$$

と書くことにする．また，添字 $a, b = i$ or j or k について，fiber product からの射影を

$$\mathrm{pr}_a \colon U_{ij}(\text{ or } U_{ijk}) \to U_a, \qquad \mathrm{pr}_{a,b} \colon U_{ijk} \to U_{ab}$$

とする．さらに $\mathrm{pr}_i \colon U_{ij} \to U_i$ による pullback を $(-)|_{U_{ij}}$ などと書く．

1.1 Definition

定義 1.1 ($\mathcal{F}(\mathcal{U})$, [2] 4.2.4, [3] Def4.2)
圏 $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を次のように定める．

Object.

- $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ なる対象の class $\{\xi_i\}_{i\in I}$ と，
- $\mathcal{F}(U_{ij})$ 中の同型 $\sigma_{ij} \colon \xi_j|_{U_{ij}} \to \xi_i|_{U_{ij}}$ の class $\{\sigma_{ij}\}_{i,j\in I}$

の組 $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ であって，以下で述べる cocycle condition を満たすもの．このような組を object with descent data と呼ぶ[†2]．

Arrow.

射 $\{\alpha_i\} \colon (\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}) \to (\{\eta_i\}, \{\tau_{ij}\})$ とは，$\mathcal{F}(U_i)$ の射 $\alpha_i \colon \xi_i \to \eta_i$ の class であって，

[†1] ほとんど fiber of π しか扱わないので，psuedo-functor $\mathbf{C} \to \mathbf{Cat}$ をとっても構わない．

[†2] 同型の class $\{\sigma_{ij}\}$ が descent data と呼ばれる．

σ_{ij}, τ_{ij} と整合的であるもの．すなわち，任意の $i, j \in I$ について以下の図式が可換であるもの．

$$\begin{tikzcd} \xi_j|_{U_{ij}} \arrow[r, "\alpha_j|_{U_{ij}}"] \arrow[d, "\sigma_{ij}"'] & \eta_j|_{U_{ij}} \arrow[d, "\tau_{ij}"] \\ \xi_i|_{U_{ij}} \arrow[r, "\alpha_i|_{U_{ij}}"'] & \eta_i|_{U_{ij}} \end{tikzcd}$$

■cocycle condition　組 $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ が cocycle condition を満たすとは，任意の $i, j, k \in I$ について以下が成り立つということ．

$$\sigma_{ik}|_{U_{ijk}} = (\sigma_{ij}|_{U_{ijk}}) \circ (\sigma_{jk}|_{U_{ijk}}).$$

図式でかけば，圏 $\mathcal{F}(U_{ijk})$ における以下の図式が可換であることと同値．

$$\begin{tikzcd} \xi_k|_{U_{ijk}} \arrow[rr, "\sigma_{jk}|_{U_{ijk}}"] \arrow[dr, "\sigma_{ik}|_{U_{ijk}}"'] & & \xi_j|_{U_{ijk}} \arrow[dl, "\sigma_{ij}|_{U_{ijk}}"] \\ & \xi_i|_{U_{ijk}} & \end{tikzcd}$$

注意 1.2
この定義に於いて fiber products :: U_{ij}, U_{ijk} を暗黙のうちに選択している．たが，どのように選択しても得られる圏は同型に成る．U_{ij}, U_{ijk} の選択も込めて $(\{\xi_i\}, \{\xi_{ij}\}, \{\xi_{ijk}\})$ を $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象とする定義の仕方も有るが，ここでは述べない．詳細は [3] Remark 4.3 にある．

定義 1.3 ([3] p.72)
$\xi \in \mathcal{F}(U)$,$\mathcal{U} = \{\phi_i \colon U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ について，$\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の元を以下のデータに対応させる:

- $\xi_i := \phi_i^* \xi$ の class $\{\xi_i\}_{i \in I}$.
- $\xi_i|_{U_{ij}}$ と $\xi_j|_{U_{ij}}$ が，いずれも
$$\phi_i \circ \mathrm{pr}_i = \phi_j \circ \mathrm{pr}_j \colon U_{ij} \to U$$
による ξ の pullback であることから得られる標準的同型の class $\{\sigma_{ji} \colon \xi_j|_{U_{ij}} \to \xi_i|_{U_{ij}}\}_{i,j}$.

このデータをまとめて $(\{\phi_i^* \xi\}, \mathrm{cano})$ などと書く．この対応を $\epsilon_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ と書く．$\mathcal{F}(U)$ の射 $\xi \to \eta$ から，ϕ_i に沿った pullback によって $(\{\phi_i^* \xi\}, \mathrm{cano}) \to (\{\phi_i^* \eta\}, \mathrm{cano})$ が得られるので，対応 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ は関手である．

1.2 Example

例 1.4 ([2], 4.2.1)
一つの射から成る cover :: $\mathcal{U} = \{f \colon V \to U\}$ について $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を考えてみる．この圏の対象は，

- 対象 $E \in \mathcal{F}(V)$
- $\mathcal{F}(V \times_U V)$ の中の同型射 $\sigma \colon \mathrm{pr}_1^* E \to \mathrm{pr}_2^* E$

の組である．

2 Prestack / Stack.

2.1 Definitions.

定義 2.1 (Prestack, Stack)
関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ を用いて以下のように定義する．

(i) 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ について $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: fully faithfull である時，fibered category $\mathcal{F} \to \mathbf{C}$ は prestack である，という．

(ii) 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ について $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: equivalence である時，fibered category $\mathcal{F} \to \mathbf{C}$ は stack である，という．

(pre)stacks の間の射は，fibered category としての射である．

注意 2.2
prestack の定義は以下のように言い換えられる: 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i\colon U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ をとる．さらに $\xi, \eta \in \mathcal{F}(U)$ をとり，$\epsilon_{\mathcal{U}}$ による像を

$$\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) = (\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}), \quad \epsilon_{\mathcal{U}}(\eta) = (\{\eta_i\}, \{\tau_{ij}\}) \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

とする．この時，任意の射 $\{\alpha_i\}\colon \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) \to \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$（射 $\alpha_i\colon \xi_i \to \eta_i$ の集合）について，$\mathcal{F}(U)$ の射 $\alpha\colon \xi \to \eta$ が一意に存在し，$\alpha_i = (\phi_i)^*\alpha(\iff \{\alpha_i\} = \epsilon_{\mathcal{U}}(\alpha))$ となる．

標語的に言えば，prestack は「貼り合わせられる射を持つ psuedo-functor」となる．同型射の貼り合わせは同型射であるから，prestack は「貼り合わせが（存在すれば）一意な対象を持つ psuedo-functor」である．

注意 2.3
このノートでは，fiber が条件を満たす fibered category として (pre)stack は定義されている（fiber を用いずに (pre)stack を定義することも出来るが，今回は採用しなかった）．なので形式上，(pre)stack は fibered category を経由せず，特別な psuedo-functor として定義できる．しかし実際にそのように定義されることは少ない．

では psuedo-functor として定義しない積極的な理由はと言うと，実用上，元の fibered category にも言及する場合が多いからであると思われる．fiber だけでなく元の fibered category に言及する理由については，このセミナーのノート session 4.5 †3，注意 2.8 を参考にして欲しい．

定義 2.4 (Sub(pre)stack)
stack :: $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ の sub(pre)stack とは，$\mathcal{F}$ の部分圏 $\mathcal{G}$ であって，π と包含関手の合成 $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}$ が fibration であり，さらにその fiber が (pre)stack であるもの．

†3 URL：https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/AlgebraicStacks/session4_5_FiberedCategoriesContinued.pdf

2.2 Examples.

命題 2.5 ([3] Prop4.9)

(i) separated presheaf of sets is a prestack.

(ii) sheaf of sets is a stack.

(証明). $\mathbf{C}$ :: site, $\mathcal{F}\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$ :: presheaf とする．$U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ を任意に取る．

今，圏 $\mathcal{F}(U), \mathcal{F}(\mathcal{U})$ は集合（離散圏）である．なので関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ は写像である．さらに射 σ_{ij} も恒等射しかないから，$\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象は，任意の i,j について $\xi_i|_{U_{ij}} = \xi_j|_{U_{ij}}$ を満たす $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ の族 $\{\xi_i\}_i$ であると考えて良い．このセミナーノートの session3 の記号を用いれば，$\mathcal{F}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ということに成る．

二つのデータ $\{\xi_i\}, \{\eta_i\}$ の間の射もやはり恒等射しかないから，「関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が fully faithful である」という仮定は「写像 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が単射である」と言い換えられる．これはすなわち，$\mathcal{F}$ が separated presheaf であるということである．

「関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が essentially surjective である」という仮定は「写像 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が全射である」と言い換えられるから．$\epsilon_{\mathcal{U}}$ が equivalence であることは $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と $\mathcal{F}(U)$ の間に全単射が存在するということである．これはすなわち，$\mathcal{F}(U)$ が sheaf であるということである． ∎

注意 2.6

この命題で分かるとおり，prestack は presheaf の抽象化ではなく，separated presheaf の抽象化である．そうすると，我々は psuedo-functor $\mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$ を prestack と呼び，今 prestack と呼んでいるものは separated prestack と呼ぶべきなのかも知れない．我々がそうしないのは，後に定義される “separated stack” との混乱を避けるためである．

以下の二つの例は後にセミナーでも証明を扱う．

例 2.7

$X \in \mathbf{C}$ に対し，圏 $\mathbf{Shv}/X$ を以下のように定める．

Objects.

X への射を持つような $\mathbf{C}$ の対象 :: U と，U 上の sheaf :: $\mathcal{U}$ の組.

Arrows.

射 $(U, \mathcal{U}) \to (V, \mathcal{V})$ は，$\mathbf{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と，morphism of sheaves on V :: $f^{\#}\colon \mathcal{V} \to f_*\mathcal{U}$ の組.

この時，fibered category :: $\mathbf{Shv}/X \to \mathbf{C}/X$; $(U, \mathcal{U}) \mapsto U$ は stack である．この例で考える sheaf を quasi-coherent sheaf に制限してて得られる fibered category :: $\mathbf{QCoh}/X \to \mathbf{C}/X$ も stack である．この二つの例については，このセミナーでも後に証明を扱う．

例 2.8

$X \in \mathbf{Sch}$ に対し，圏 $\mathbf{QCoh}/X$ を以下のように定める．

Objects.

Fpqc(X) †4の対象 :: U と，U 上の sheaf (on fpqc topology):: $\mathcal{U}$ の組．

Arrows.

射 $(U,\mathcal{U}) \to (V,\mathcal{V})$ は，$\mathbf{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と，morphism of sheaves on V :: $f^{\#}\colon \mathcal{V} \to f_*\mathcal{U}$ の組．

この時，fibered category :: $\mathbf{QCoh}/X \to \mathbf{C}/X$; $(U,\mathcal{U}) \mapsto U$ は stack である．

例 2.9 ([2] 4.4.1)
以下で定まる fibered category は stack である．

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c}\text{pair of scheme over } S :: Y \\ \text{and closed imm. } W \hookrightarrow Y\end{array}\right\} & \to & \mathrm{Fppf}(S) \\ (Y, W \hookrightarrow Y) & \mapsto & Y \end{array}$$

例 2.10 ([2] 4.4.4)
以下で定まる fibered category は stack である．

$$\begin{array}{ccc} \left\{\begin{array}{c}\text{pair of scheme over } S :: Y \\ \text{and open imm. } W \hookrightarrow Y\end{array}\right\} & \to & \mathrm{Fppf}(S) \\ (Y, W \hookrightarrow Y) & \mapsto & Y \end{array}$$

以下の二つの例は後に一般化される．

例 2.11 ([3] §4.3.1)
arrow category :: $\mathbf{Sch}^{\to}$ の対象を affine morphism に制限したものを圏 $\mathbf{Aff}$ とする．以下で定まる fibered category は stack である．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Aff} & \to & \mathrm{Fppf}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \\ [X \to Y] & \mapsto & Y \end{array}$$

例 2.12 ([2] 4.4.15)
quasi-compact open imbedding の後に affine morphism を合成した射のことを quasi-affine morphism という．arrow category :: $\mathbf{Sch}^{\to}$ の対象を quasi-affine morphism に制限したものを $\mathbf{QAff}$ とする．以下で定まる fibered category は stack である．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{QAff} & \to & \mathrm{Fppf}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \\ [X \to Y] & \mapsto & Y \end{array}$$

2.3 Propositions.

命題 2.13 ([2] Prop4.12)
二つの equivalent な fibered category があり，かつ一方が stack ならば，もう一方も stack である．

(証明). $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: fibered categories over $\mathbf{C}$ とし，$F\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ :: morphism of fibered categories とする．この時 cover of $U \in \mathbf{C}$ :: $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}$ について $F_{\mathcal{U}}$ を定義する．

†4 圏 $\mathbf{Sch}/X$ に fpqc topology を備えたもの．

$$\begin{array}{llcl} F_{\mathcal{U}}\colon & \mathcal{F}(\mathcal{U}) & \to & \mathcal{G}(\mathcal{U}) \\ \textbf{Objects}: & (\{\xi_i\},\{\sigma_{ij}\}) & \mapsto & (\{F\xi_i\},\{F\sigma_{ij}\}) \\ \textbf{Arrows}: & \{\alpha_i\} & \mapsto & \{F\alpha_i\} \end{array}$$

更に二つの射 $F,G\colon \mathcal{F}\to\mathcal{G}$ とその間の base-preserving natural transformation :: $\rho\colon F\to G$ に対し，$\rho_{\mathcal{U}}\colon F_{\mathcal{U}}\to G_{\mathcal{U}}$ を次のように定義する．

$$(\rho_{\mathcal{U}})_{(\{\xi_i\},\{\sigma_{ij}\})} = \{\rho_{\xi_i}\}.$$

以上から，F が equivalence ならば $F_{\mathcal{U}}$ も quivalence である．したがって以下の commutative diagram of weak 2-category [†5] が得られる．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \arrow[d, "F_{\mathcal{U}}"] \\ \mathcal{G}(U) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{U}}"'] & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \end{tikzcd}$$

この可換図式から，主張が得られる． ∎

命題 2.14 ([2] Exc 4.I)
$\mathcal{F},\mathcal{F}'$ :: stack on $\mathbf{C}$, $f\colon\mathcal{F}\to\mathcal{F}'$ :: morphism of stacks とする．f :: isomorphism は以下の 2 条件が成立することと同値.

(a) 任意の $X\in\mathbf{C}$ について，fiber の間の射 $f_X\colon\mathcal{F}(X)\to\mathcal{F}'(X)$ は fully-faithful.

(b) 任意の $X\in\mathbf{C}$ と $x\in\mathcal{F}'(X)$ について，covering of X :: $\{\phi_i\colon X_i\to X\}\in\mathrm{Cov}(X)$ が存在し，全ての x の pullback :: $\phi_i^* x\in\mathcal{F}'(X_i)$ が $\mathcal{F}(X_i)$ の essential image に属す.

(証明). (TODO) ∎

補題 2.15
site :: $\mathbf{C}$ を，空集合の cover として空集合を持つ ($\emptyset\in\mathrm{Cov}(\emptyset)$) ものとする．$\pi\colon\mathcal{F}\to\mathbf{C}$ :: stack について，以下の圏同値が成立する．

$$\mathcal{F}(\emptyset)\simeq\mathbf{1}.$$

特に，$\mathcal{F}(\emptyset)$ の任意の二つの対象の間には，ただ一つの同型射が存在する．

(証明). category of descent data :: $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象を考える．これは $\mathcal{U}$ で添字付けられた対象の族の二つ組である．なので $\mathcal{U}=\emptyset$ について，$\mathcal{F}(\emptyset)$ の対象は $(\emptyset,\emptyset)$ しかない．射も $\mathcal{U}$ で添字付けられた族であるから，非自明な射は存在しない． ∎

この補題の仮定は奇妙に見えるかも知れないが，以下の通り，このように仮定しても問題はないし，我々が扱う殆どの site はこの仮定を満たす．

主張 2.16
圏 $\mathbf{C}$ の任意の対象 $U\in\mathbf{C}$ について，命題「$\emptyset\in\mathrm{Cov}(U)$」は Grothendieck topology の公理（定義）と独立である．すなわち，$\emptyset\in\mathrm{Cov}(U)$ としてもしなくても矛盾は生じない．

[†5] 射の合成の間に natural isomorphism が存在するという意味で可換.

(証明). 命題「$\emptyset \in \mathrm{Cov}(U)$」を P と書く．Grothendieck topology の定義を見直そう．cover of $\emptyset$ :: $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ が満たすべき条件を記号で書き下す．

(a) ${}^\forall[V \to U] \in \mathbf{C}/U,\quad \left[{}^\forall[U' \to U] \in \mathcal{U},\ {}^\exists U' \times_U V\right] \implies \{U' \times_U V \to V \mid [U' \to U] \in \mathcal{U}\} \in \mathrm{Cov}(V)$.

(b) ${}^\forall\mathcal{V} := \{\mathcal{U}'_{U'} \mid \mathcal{U}'_{U'} \in \mathrm{Cov}(U')\}_{U' \in \mathcal{U}},\quad \{U'' \to U' \to U \mid [U' \to U] \in \mathcal{U}, [U'' \to U'] \in \mathcal{U}'_{U'}\} \in \mathrm{Cov}(U)$.

クラス X と述語 F について "${}^\forall x \in X,\quad F(x)$" という文は "${}^\forall x,\quad [x \in X \implies F(x)]$" の省略形である．したがって，$X = \emptyset$ であるとき，"${}^\forall x \in X,\quad F(x)$" という文は任意の F について真．また，$\{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$.

なので，以上の文を $\mathcal{U} = \emptyset$ の場合に考えると（すなわち P を仮定すると），いずれも P と同値に成る．よって $P \implies P$ ということになる．一方，否定 $\neg P$ を仮定しても矛盾が生じないことは明らか． ∎

例 2.17

圏 $\mathbf{C}$ を $\mathbf{Sch}$ の部分圏や $\mathbf{Sch}/S$ (S :: scheme) とする．morphism of schemes のクラス $\mathcal{P} \subset \mathrm{Arr}(\mathbf{C})$ をとり，以下のように $\mathbf{C}$ 上の Cov を定めたとする:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U) &= \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} :: \text{jointly surjective family and } {}^\forall\phi \in \mathcal{U},\quad \phi \in \mathcal{P}\} \\ &= \left\{\mathcal{U} \;\middle|\; \coprod_{U' \in \mathcal{U}} U' \to U :: \text{surjective and } {}^\forall\phi,\quad [\phi \in \mathcal{U} \implies \phi \in \mathcal{P}]\right\}.\end{aligned}$$

この時，$\coprod_{U' \in \emptyset} U' = \emptyset$ なので $\emptyset \in \mathrm{Cov}(\emptyset)$.

このセミナーで定義した Zariski site, etale site, ... などは全てこの主張のように定義されている．

補題 2.18

圏 $\mathbf{C}$ を $\mathbf{Sch}$ の部分圏や $\mathbf{Sch}/S$ (S :: scheme) とする．$U \in \mathbf{C}, \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ をとり，$V = \coprod_i U_i$ と置く．

$\{U_i \to V\} \in \mathrm{Cov}(V)$ と仮定する[†6]と $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ :: stack について，圏同値 (TODO: strict 2-equivalence? ここは ϵ と圏同型の合成)

$$\mathcal{F}\left(\coprod_i U_i\right) \simeq \prod_i \mathcal{F}(U_i)$$

が成立する．

(証明). 瑣末なことでは有るが: $\{U_i \to V\}$ の添字について，$i \neq j$ ならば $U_i \neq U_j$ である，と仮定して一般性を失わない．

$\mathcal{U} = \{\mathrm{inj}_i\colon U_i \to V\} (\in \mathrm{Cov}(V))$ と置く．次の関手が圏同値であることを示す．

$$\begin{array}{llcl} E\colon & \mathrm{im}\,\epsilon_{\mathcal{U}} & \to & \prod_i \mathcal{F}(U_i) \\ \textbf{Objects}\colon & (\{(\mathrm{inj}_i)^*\xi\}_i, \{\sigma_{ij}\}_{i,j}) & \mapsto & ((\mathrm{inj}_i)^*\xi)_i \\ \textbf{Arrows}\colon & \{\alpha_i\}_i & \mapsto & (\alpha_i)_i \end{array}$$

$\xi_i := (\mathrm{inj}_i)^*$ とおく．これが示せれば，$\mathcal{F}$ :: stack なので主張も得られる．

まず，仮定の状況では，injection map (coprojection) :: $U_i \to V$ についての fiber product は次のように

[†6] 例えば，Zariski topology より細かい位相ならばこの仮定は成立する．

成る．

$$U_{ij} = U_i \times_V U_j = \begin{cases} U_i & (U_i = U_j) \\ \emptyset & (U_i \neq U_j). \end{cases}$$

■**E :: essentially surjective.** $i \neq j$ の時，σ_{ij} は $\mathcal{F}(U_{ij}) = \mathcal{F}(\emptyset)$ の射であるから，$\xi_i|_\emptyset$ と $\xi_j|_\emptyset$ の間に存在するただ一つの射である．一方，$i = j$ の時は，$(\mathrm{pr}_i)^*(\mathrm{inj}_i)^*\xi$ と $(\mathrm{pr}_j)^*(\mathrm{inj}_j)^*\xi$ が完全に等しいので，$\sigma_{ij} = \mathrm{id}_{\xi_i}$．以上より，対象同士の次の対応は $\mathrm{Ob}(E)$ の逆対応と成る．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ob}\left(\prod_i \mathcal{F}(U_i)\right) & \to & \mathrm{Ob}\,(\mathrm{im}\,\epsilon_{\mathcal{U}}) \\ (\xi_i)_i & \mapsto & (\{\xi_i\}_i, \{\sigma_{ij}\}_{i\neq j} \cup \{\mathrm{id}_{\xi_i}\}_i) \end{array}$$

これは E :: essentially surjective を意味する．

■**E :: fully-faithfull.** また，上で述べたことから，射 $\{\alpha_i\}\colon \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) \to \epsilon_{\mathcal{U}}(\eta)$ に課された条件が，任意の射の組み合わせ $(\alpha_i\colon \xi_i \to \eta_i)_i$ について成立することも分かる（$i \neq j$ と $i = j$ の場合で証明は異なる）．なので全単射

$$\mathrm{Hom}(\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi), \epsilon_{\mathcal{U}}(\eta)) = \mathrm{Hom}((\xi_i)_i, (\eta_i)_i) = \mathrm{Hom}(E(\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)), E(\epsilon_{\mathcal{U}}(\eta)))$$

が得られる．これは E :: fully-faithfull を意味する． ∎

定理 2.19 (Stackification of category fibered by groupoids.)
$\mathbf{C}$ :: site, $\mathcal{F}$ :: category fibered by groupoids over $\mathbf{C}$ とする．この時，$\bar{\mathcal{F}}$ :: stack in groupoids over $\mathbf{C}$ と $\theta\colon \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$ :: morphism of fibered category が存在し，

$$(-) \circ \theta\colon\ \mathrm{HOM}_{\mathbf{C}}(\bar{\mathcal{F}}, -) \to \mathrm{HOM}_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}, -)$$

が圏同値となる．

（TODO: これは [2] Thm4.6.5 からとった．しかし，`https://stacks.math.columbia.edu/tag/02ZM` に一般の場合が書かれている．出来ればこちらを理解したい）

例 2.20
presheaf の stackification は sheafification と一致する．

例 2.21 (arXiv:math/0305243v1, Prop3.6)
S :: scheme, $\mathcal{M}$ :: algebraic stack over $\mathbf{Sch}/S$, $\mathcal{G}$ :: sheaf in groups over $\mathbf{Sch}/S$, acting on $\mathcal{M}$ とする．この時，$\mathcal{M}$ の $\mathcal{G}$ による categorical quotient :: $\mathcal{M}/\mathcal{G}$ は，以下の prestack（2-functor として定義する）:: $\mathcal{P}$ の stackification として定義される．

Objects of $\mathcal{P}(U)$. $\mathcal{M}(U)$ の対象と同じ．
Arrows of $\mathcal{P}(U)$. $g \in \mathcal{G}(T)$ と $\mathcal{M}(U)$ の射 $g * x \to y$ の組．

ただし $U \in \mathbf{Sch}/S$ は任意．

3 Descent Theory.

3.1 Motivation.

(TODO)

3.2 Definitions.

定義 3.1
関手 $\epsilon_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ を用いて以下のように定義する．

(i) $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: equivalence となる $\mathcal{U}$ を of effective descent for $\mathcal{F}$ と呼ぶ．

(ii) $\epsilon_{\mathcal{U}}$ の像と同型である $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象を，effective data という．

4 Criterion for fpqc Stacks.

定理 4.1 ([2] Lemma 4.25)
S :: scheme, $\mathcal{F} \to (\mathbf{Sch}/S)$ :: fibration とする．以下が成り立つとする．

(a) $\mathcal{F}$ は Zariski topology での stack である．

(b) 任意の flat surjective morphism of affine S-scheme :: $V \to U$ について，
$\epsilon_{\{V \to U\}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\{V \to U\})$ は圏同値．

この時，$\mathcal{F}$ は fpqc topology での stack である．

注意 4.2
“flat” という条件は以下の証明では利用されない．

4.1 Step 1 / 準備

以前示した命題から，$\mathcal{F}$ :: split fibered category と仮定しても一般性を失わないので，以下そのように仮定する．

補題 4.3
$\mathbf{C}$ を site とし，$\mathcal{F} \to \mathbf{C}$ を<u>split</u> fibration とする．さらに $U \in \mathbf{C}$，$\mathcal{U} = \{\phi_i \colon U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ と $\mathcal{U}$ の細分[†7] $\mathcal{V} = \{\psi_{ij} \colon V_{ij} \to U\}$ をとる．

[†7] 細分の定義を確認しておく：任意の $\mathcal{V}$ の元 $V_{ij} \to U$ に対して $\mathcal{U}$ の元 $U_i \to U$ が存在し，$V_{ij} \to U$ が $U_i \to U$ を通して $V_{ij} \to U_i \to U$ と分解する．特に射 $V_{ij} \to U_i$ が存在する．

この時，関手 $R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V})$ が存在し，以下は厳密な可換図式である。

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "\epsilon_{\mathcal{V}}"'] & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \arrow[dl, "R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}"] \\
\mathcal{F}(\mathcal{V}) &
\end{tikzcd}
$$

(証明).

■関手 $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{F}(\mathcal{V})$ の構成. 細分の定義から，各 i, k について以下が可換に成る射 $\iota_{ik}\colon V_{ik} \to U_i$ が存在する.

$$
\begin{tikzcd}
V_{ik} \arrow[r, "\iota_{ik}"'] \arrow[rr, bend left, "\psi_{ik}"] & U_i \arrow[r, "\phi_i"'] & U
\end{tikzcd}
$$

この射 ι_{ik} を用いて，関手 $R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}$ を次のように定義する。

$$
\begin{array}{lccc}
R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\colon & \mathcal{F}(\mathcal{U}) & \to & \mathcal{F}(\mathcal{V}) \\
\textbf{Objects} & (\{\eta_i\}, \{\sigma_{ij}\}) & \mapsto & \left(\{(\iota_{ik})^*\eta_i\}, \left\{\left(\iota^{jl}_{ik}\right)^* \sigma_{ij}\right\}\right) \\
\textbf{Arrows} & \{\alpha_i\} & \mapsto & \{(\iota_{ik})^*\alpha_i\}
\end{array}
$$

ここで ι^{jl}_{ik} は，以下の可換図式のように fiber product の一意性から得られる射である.

$$
\begin{tikzcd}
V_{ik} \times_U V_{jl} \arrow[rr, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[dd, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[dr, red, "\iota^{jl}_{ik}"] & & V_{ik} \arrow[d, "\iota_{ik}"'] \arrow[dd, bend left, "\psi_{ik}"] \\
& U_i \times_U U_j \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & U_i \arrow[d, "\phi_i"'] \\
V_{jl} \arrow[r, "\iota_{jl}"] \arrow[rr, bend right, "\psi_{jl}"'] & U_j \arrow[r, "\phi_j"] & U
\end{tikzcd}
$$

$\{\sigma_{ij}\}$ が cocycle condition を満たすので，$\left\{\left(\iota^{jl}_{ik}\right)^* \sigma_{ij}\right\}$ も cocycle condition を満たす[†8]．同様に $\{(\iota_{ik})^*\alpha_i\}$ が $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ の射であることも確認できる.

■対象について $R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}} = \epsilon_{\mathcal{V}}$. $R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}}$ を計算する．まず $\xi \in \mathcal{F}(U)$ をとり，$R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$ を計算しよう.

$$
\begin{aligned}
R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) &= R^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}\Big((\{\phi_i^*\xi\}, \{\sigma_{ij}\})\Big) \\
&= \left(\{(\iota_{ik})^*\phi_i^*\xi\}, \left\{\left(\iota^{jl}_{ik}\right)^* \sigma_{ij}\right\}\right) \\
&= \left(\{(\psi_{ik})^*\xi\}, \left\{\left(\iota^{jl}_{ik}\right)^* \sigma_{ij}\right\}\right)
\end{aligned}
$$

今，$\mathcal{F}$ :: split fibered category としているので，

$$
\mathrm{pr}_2^*\, \phi_j^*\xi = (\phi_j \circ \mathrm{pr}_2)^*\xi = (\phi_i \circ \mathrm{pr}_1)^*\xi = \mathrm{pr}_1^*\, \phi_i^*\xi.
$$

[†8] 証明は fiber product の普遍性から得られる射 $V_{il} \times V_{jm} \times V_{kn} \to U_i \times U_j \times U_k$ を用いれば良い.

σ_{ij} は fiber product の普遍性から得られる $\mathrm{pr}_2^*\,\phi_j^*\xi$ から $\mathrm{pr}_1^*\,\phi_i^*\xi$ への同型であるから，$\sigma_{ij} = \mathrm{id}$. このことと $\mathcal{F}$ :: split から $\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^* \sigma_{ij} = \mathrm{id}$ も分かる．まとめると，$R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) = \left(\{(\psi_{ik})^*\xi\}, \{\mathrm{id}_{(\psi_{ik})^*\xi}\}\right)$.

一方，

$$\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^* \mathrm{pr}_2^*\,\phi_j^*\xi = (\psi_{jl}\circ \mathrm{pr}_2)^*\xi = \mathrm{pr}_2^*(\psi_{jl})^*\xi = \mathrm{pr}_1^*(\psi_{ik})^*\xi = (\psi_{ik}\circ \mathrm{pr}_1)^*\xi = \left(\iota_{ik}^{jl}\right)^* \mathrm{pr}_1^*\,\phi_i^*\xi.$$

なので，fiber product の普遍性から得られる $\mathrm{pr}_2^*(\psi_{jl})^*\xi$ から $\mathrm{pr}_1^*(\psi_{ik})^*\xi$ への同型は id である．したがって $\epsilon_{\mathcal{V}}(\xi) = \left(\{(\psi_{ik})^*\xi\}, \{\mathrm{id}_{(\psi_{ik})^*\xi}\}\right)$ となり，$R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) = \epsilon_{\mathcal{V}}(\xi)$.

■射について $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \epsilon_{\mathcal{U}} = \epsilon_{\mathcal{V}}$. $\mathcal{F}(U)$ の射 $\alpha\colon \xi_1 \to \xi_2$ をとる．すると $\mathcal{F}$ :: split なので

$$R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \epsilon_{\mathcal{U}}(\alpha) = \{(\iota_{ik})^*\phi_i^*\alpha\} = \{(\phi_i\circ\iota_{ik})^*\alpha\} = \{\psi_{ik}^*\alpha\} = \epsilon_{\mathcal{V}}(\alpha).$$

■

注意 4.4
$\mathcal{F}$ :: split を仮定しない場合，さらに base preserving isomorphism :: $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} \epsilon_{\mathcal{U}} \to \epsilon_{\mathcal{V}}$ を構成する必要がある．

4.2 Step 2 / single morphism cover の場合に帰着させる．

系 4.5 ([3] p.87)
$\mathbf{C}, \mathcal{F}$ 等を補題 (4.3) の様にとる．$\mathcal{U} = \{\phi_i\colon V_i \to U\}, V' = \coprod V_i$ とする．さらに，$f\colon V' \to U$ を $\mathcal{U}$ から誘導される射とする．

このとき，圏同値 $R_{V'\to U}^{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(V'\to U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ が存在し，合成

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\epsilon_{\{f\}}} \mathcal{F}(V'\to U) \xrightarrow{E} \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

が関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ と厳密に一致する．

(証明). $\mathcal{U}$ は $\{U' \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ の細分であるから，補題 (4.3) から明らか． ■

注意 4.6
ここで，各 ϕ_i が quasi-compact（特に fpqc）であったとしても，誘導される射 $f\colon V' \to U$ が必ずしも quasi-compact でないことに注意する．例えば $\{\mathrm{Spec}\, k[x_i] \to \coprod_i \mathrm{Spec}\, k[x_i]\}_{i\in\mathbb{N}}$ を考えれば分かる．

以上のことに注意すると，我々は次のことを証明することに成る:

主張 4.7
条件 (a), (b) が成り立つならば，以下の条件 $(*)$ を満たす任意の flat surjective morphism :: $f\colon V \to U$ について，$\epsilon_{\{f\}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(f\colon V\to U)$ :: equivalence.

$(*)$ affine Zariski cover :: $U = \bigcup_i U_i$ と，各 i について $f^{-1}(U_i)$ の affine Zariski cover :: $f^{-1}(U_i) = \bigcup_i V_{ij}$ が存在し，V_{ij} :: quasi-compact かつ $f(V_{ij}) = U_i$ となる．

条件 $(*)$ は U, V :: locally noetherian であるような任意の fppf morphism について成立する ([2] Cor1.1.6).

注意 4.8

以下，$\mathcal{F}$ :: split fibered category とする．session 4.5 定理 1.2 より，このように仮定しても一般性を失わない．

4.3 Step 3 / affine scheme への quasi-compact morphism の場合.

$f\colon V \to U$ を U :: affine である quasi-compact morphism とする．$\{V_i\}_i$ を V の open affine cover とし，$V' = \coprod_i V_i$ とおく．V' :: affine なので，仮定 (b) から圏同値 $\mathcal{F}(U) \simeq \mathcal{F}(V' \to U)$ が存在する．

以下の図式 (1) を考える．$\leftrightarrow$ は圏同値を意味する．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\epsilon_f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\epsilon_{\{V_i\to U\}}"'] \arrow[dd, leftrightarrow, bend right=60, "\epsilon_{V'\to U}"'] & \mathcal{F}(f\colon V \to U) \arrow[dl, "R_f^{V_i\to U}"] \\
\mathcal{F}(\{V_i \to U\}) \arrow[d, leftrightarrow, "R_{V'\to U}^{\{V_i\to U\}}"] & \\
\mathcal{F}(V' \to U) &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

ここで関手 ϵ_f は次で与えられる．ただし $\mathrm{pr}_k\colon V \times_U V \to V$ は第 k 成分への射影である．

$$\begin{array}{lccc}
\epsilon_f: & \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{F}(f\colon V \to U) \\
\textbf{Objects}: & \xi & \mapsto & (f^*\xi, \sigma) \\
\textbf{Arrows}: & \alpha & \mapsto & f^*\alpha
\end{array}$$

ここで $\sigma\colon \mathrm{pr}_2^* f^*\xi \to \mathrm{pr}_1^* f^*\xi \in \mathrm{Arr}(\mathcal{F}(V \times_U V))$ は，恒等射 $\mathrm{id}_{\mathrm{pr}_2^* f^*\xi}$ である．これは $\mathrm{pr}_2^* f^*\xi, \mathrm{pr}_1^* f^*\xi$ がいずれも $f \circ \mathrm{pr}_2 = f \circ \mathrm{pr}_1$ による ξ の pullback であることと，$\mathcal{F}$ :: split から得られる

この図式の可換性から，関手の同型 $(R_f^{V_i\to U}) \circ \epsilon_f = \epsilon_{\{V_i\to U\}}$ が得られる（$\mathcal{F}$ :: split fibered category を利用する)．（よって上の図式 (1) は可換である.）したがって ϵ_f の psuedo-inverse functor :: $(\epsilon_{\{V_i\to U\}})^{-1} \circ (R_f^{V_i\to U})$ が得られた．

4.4 Step 4 / 条件 $(*)$ を満たす affine scheme への射の場合.

([3] p.88) 仮定 $(*)$ より，Zariski cover :: $\{\iota_i\colon V_i \to V\}$ が存在し，V_i :: quasi-compact.

注意 4.9
前段の議論のうち，図式 (1) の $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V' \to U)$ が圏同値でない．なので新しい議論が必要である．

補題 (4.3) から得られる以下の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\epsilon_f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\substack{\epsilon_{V_i\to U} \\ \text{equivalence}}"'] & \mathcal{F}(f\colon V \to U) \arrow[dl, "\substack{R_f^{V_i\to U} \\ \text{essentially surjective \& full}}"] \\
\mathcal{F}(V_i \to U) &
\end{tikzcd}$$

左にある縦の射は Step 3 から圏同値である．したがって $\mathcal{F}(V \to U) \to \mathcal{F}(V_i \to U)$（定義はおおよそ関手 E と同様に与えられる）は essentially surjective かつ full である．なのでこの関手が更に faithfull であること

が証明できれば，図式の可換性から ϵ_f が圏同値であることが証明できる．

$\mathcal{F}(V \to U)$ の射 β, β' が，$\beta|_{V_i} = \beta'|_{V_i}$ を満たすとする．この時，$\beta = \beta'$ を証明すれば良い．まず，以下の厳密な可換図式から，任意の添字 j について $R^{V_i \to U}_{V_i \cup V_j \to U} \colon \mathcal{F}(V_i \to U) \to \mathcal{F}(V_i \cup V_j \to U)$ が圏同値だと分かる．この関手を略して R を書くことにする．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, leftrightarrow, "\epsilon_{V_i \cup V_j \to U}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\epsilon_{V_i \to U}"'] & \mathcal{F}(V_i \cup V_j \to U) \arrow[dl, red, "R := R^{V_i \to U}_{V_i \cup V_j \to U}"] \\
\mathcal{F}(V_i \to U) &
\end{tikzcd}
$$

したがって R^{-1} が存在する．関手 R は $\mathcal{F}(V_i \cup V_j \to U)$ の射 $\beta|_{V_i \cup V_j}$ を $\beta|_{V_i}$ に一対一に写すのだから，R^{-1} は $\beta|_{V_i}$ を $\beta|_{V_i \cup V_j}$ に一対一に写す．

さて，以下の関手の合成で β, β' を写す．

$$
\mathcal{F}(V \to U) \xrightarrow{R^{V_i \to U}_{V \to U}} \mathcal{F}(V_i \to U) \xrightarrow{R^{-1}} \mathcal{F}(V_i \cup V_j \to U) \xrightarrow{R^{V_j \to U}_{V_i \cup V_j \to U}} \mathcal{F}(V_j \to U)
$$

$\beta|_{V_i} = \beta'|_{V_i}$ を R^{-1} で写して $\beta|_{V_i \cup V_j} = \beta'|_{V_i \cup V_j}$ が得られる．よって，任意の j について

$$
\beta|_{V_j} = (\beta|_{V_i \cup V_j})|_{V_j} = (\beta'|_{V_i \cup V_j})|_{V_j} = \beta'|_{V_j}
$$

が成立する．$\mathcal{F}$ :: Zariski stack なので，$\beta = \beta'$．

4.5 Step 5 / 一般の場合．

条件 $(*)$ を満たす任意の射 $f \colon V \to U$ をとり，affine Zarisiki cover :: $\{U_i \to U\}$ をとる．さらに $V_i := f^{-1}(U_i)$ とおき，$\phi_i = f|_{V_i}$ とおく．

今，

$$
\Phi_i = \epsilon_{V_i \to U_i} \colon \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(V_i \to U_i)
$$

と置く．同様に $\Phi_{ij} = \epsilon_{V_{ij} \to U_{ij}}, \Phi_{ijk} = \epsilon_{V_{ijk} \to U_{ijk}}$ と置く．この時，以下は厳密な可換図式である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U_i) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, "\Phi_i"'] & \mathcal{F}(U_{ij}) \arrow[r, "\mathrm{res}"] \arrow[d, "\Phi_{ij}"] & \mathcal{F}(U_{ijk}) \arrow[d, "\Phi_{ijk}"] \\
\mathcal{F}(V_i \to U_i) \arrow[r, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{F}(V_{ij} \to U_{ij}) \arrow[r, "\mathrm{res}"'] & \mathcal{F}(V_{ijk} \to U_{ijk})
\end{tikzcd}
\tag{4}
$$

ここで，各 Φ_* はいずれも Step 4 から圏同値である．

次の関手を考える．

$$
\begin{array}{lccc}
P_i \colon & \mathcal{F}(f \colon V \to U) & \to & \mathcal{F}(V_i \to U_i) \\
\textbf{Objects} & (\eta, \sigma) & \mapsto & (\eta|_{V_i}, (\gamma_{ii})^* \sigma) \\
\textbf{Arrows} & \alpha & \mapsto & \alpha|_{V_i}
\end{array}
$$

同様に $P_{ij} \colon \mathcal{F}(f) \to \mathcal{F}(V_{ij} \to U_{ij})$ を定義する．すると step 4 の結果から $\mathcal{F}(U_i) \simeq \mathcal{F}(V_i \to U_i)$ なので，$\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ と同型

$$
\alpha_i \colon \Phi_i(\xi_i) \xrightarrow{\cong} P_i((\eta, \sigma))
$$

が得られる．上の図式 (4) が可換であることから，

$$\alpha_i|_{V_{ij}}\colon \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}}) = (\Phi_i(\xi_i))|_{V_{ij}} \xrightarrow{\cong} P_{ij}((\eta,\sigma))$$

すると，

$$\alpha_i^{-1}\alpha_j\colon \Phi_{ij}(\xi_j|_{V_{ij}}) \to \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}})$$

Φ_{ij} :: equivalence なので，この同型射の逆像として $\sigma_{ij}\colon \xi_j|_{V_{ij}} \to \xi_i|_{V_{ij}}$ が得られる．

以上で得られる $(\{\xi_i\},\{\sigma_{ij}\})$ は cocycle condition を満たすため（TODO），$\mathcal{F}(\{U_i \to U\})$ の object である．$\mathcal{F}$ :: Zariski stack なので，これは $\mathcal{F}(U)$ と圏同値．よって ξ が得られる．（TODO: 射についても）

5 Application : $\mathbf{QCoh}/S \to \mathbf{Sch}/S$ is a fpqc stack.

定義 5.1

$S \in \mathbf{Sch}$ に対し，圏 $\mathbf{QCoh}/S$ を以下のように定める．

Objects.

Fpqc(S) [†9]の対象 :: U と，U 上の quasi-coherent sheaf (on fpqc topology):: $\mathcal{U}$ の組．

Arrows.

射 $(U,\mathcal{U}) \to (V,\mathcal{V})$ は，$\mathbf{Sch}/S$ の射 $f\colon U \to V$ と，morphism of sheaves on V :: $f^{\#}\colon \mathcal{V} \to f_*\mathcal{U}$ の組．

この時，$\mathbf{QCoh}/S \to \mathbf{Sch}/S$; $(U,\mathcal{U}) \mapsto U$ は fibration である．

$\mathbf{Mod}_A, \mathbf{Mod}_\phi, \mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_\phi$ の定義は [3] §4.2.1 を参照せよ．

$f\colon V \to U$ を flat surjective morphism of S-schemes とし，$\phi\colon A \to B$ を f に対応する faithfully flat な環準同型とする．この時，$\mathbf{QCoh}(U) \simeq \mathbf{Mod}_A$ はよく知られている[†10]．

主張 5.2

$\mathbf{QCoh}(f\colon V \to U) \simeq \mathbf{Mod}_\phi$.

したがって $\epsilon_f\colon \mathbf{QCoh}(U) \to \mathbf{QCoh}(f\colon V \to U)$ は関手 $\mathbf{Mod}_A \to \mathbf{Mod}_\phi$ に対応する．この関手は，可換環論によって圏同値であることが証明される．

参考文献

[1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[3] Angelo Vistoli. Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008). http://homepage.sns.it/vistoli/descent.pdf.

†9 圏 $\mathbf{Sch}/S$ に fpqc topology を備えたもの．

†10 この命題は [1] Cor5.5 で詳しく述べられている