Ex7.1 Find the Degree of the Two Embedding.

(a) Find the degree of the d-uple embedding of $\mathbb{P}^n$ in $\mathbb{P}^N$.

記号 $\theta, \rho_d, M_i, N = \binom{n+d}{n} - 1$ は Ex2.12 の物を使う．計算するのは $\mathcal{M} = S/\ker\theta$ の Hilbert polynomial である．$\mathcal{M} \cong k[\{M_i\}_{i=0}^N]$ かつ $\deg M_i = d$ が Ex2.12 でわかっている．したがって，$\mathcal{M}_l$ は dl 次単項式全体を基底に持つ k-ベクトル空間．

$$P_{\mathcal{M}}(t) = \binom{dt+n}{n} = \frac{1}{n!}(d^n t^n + \dots).$$

よって $\deg \operatorname{im} \rho_d = d^n$.

(b) Find the degree of the Segre embedding of $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ in $\mathbb{P}^N$.

記号 ψ, ϕ は Ex2.14 の解答で使った物を使う．計算するのは $\mathcal{N} = S/\ker\phi$ の Hilbert polynomial である．Segre embedding は $x_i y_j$ で parametrize されるから，$\mathcal{N}_l$ は

$$\left(\{x_i\}_{i=1}^r \text{の } l \text{ 次単項式}\right) \cdot \left(\{y_j\}_{j=1}^s \text{の } l \text{ 次単項式}\right)$$

と書ける元全体を基底に持つ．よって，

$$P_{\mathcal{N}}(t) = \binom{t+r}{r}\binom{t+s}{s} = \frac{1}{r!}\frac{1}{s!}t^{r+s} + \dots.$$

なので $\deg \mathcal{N} = \frac{1}{r!}\frac{1}{s!} \cdot (r+s)! = \binom{r+s}{r}$.

Ex7.2 The Arithmetic Genus.

Y :: variety in $\mathbb{P}^n$, $\dim Y = r$ のとき，$p_a(Y) = (-1)^r(P_Y(0) - 1)$ を the arithmetic genus of Y とよぶ.

(a) $p_a(\mathbb{P}^n) = 0$.

すでに得られている通り，

$$P_{\mathbb{P}^n}(t) = \binom{t+n}{n} = \frac{1}{n!}(t+n)(t+n-1)\cdots(t+1) = \frac{1}{n!}((\cdots)t + n!).$$

なので $P_{\mathbb{P}^n}(0) = 1$．よって $p_a(\mathbb{P}^n) = 0$.

(b) If Y :: curve in $\mathbb{P}^2$ and $\deg Y = d$, then $p_a(Y) = \binom{d-1}{2}$.

次の問題の特殊な場合に過ぎないので省略.

(c) If Y :: hypersurface in $\mathbb{P}^n$ and $\deg Y = d$, then $p_a(Y) = \binom{d-1}{n}$.

Prop7.6d より，$P_Y(t) = \binom{t+n}{n} - \binom{t-d+n}{n}$.

$$\begin{aligned} & P_Y(0) \\ =& \frac{1}{n!}\left[n! - (-d+n)\cdots(-d+1)\right] \\ =& 1 + \frac{1}{n!}(-1)^{n+1}(d-n)\cdots(d-1) \\ =& 1 + \frac{1}{n!}(-1)^{n+1}(d-1)\cdots(d-n). \end{aligned}$$

よって $p_a(Y) = \frac{1}{n!}(-1)^{2n}(d-1)\cdots(d-n) = \binom{d-1}{n}$.

(d) Arithmetic Genus of Compelete Intersection.

$Y \subset \mathbb{P}^3$ が complete intersection, すなわち 2 元 $f, g \in S$ で $Y = \mathcal{Z}_p(\{f, g\})$ で表せる curve とする．この時，以下は完全列である[1]．

$$0 \to S/(fg) \to S/(f) \oplus S/(g) \to S/(f,g) \to 0.$$

Prop7.6d と全く同様に $S/(fg)$, $S/(f) \oplus S/(g)$ の Hilbert Polynomial が計算できる．

$$P_{S/(f,g)}(t) = (P_{S/(f)}(t) + P_{S/(g)}(t)) - P_{S/(fg)}(t).$$

よって $S/(f,g)$ の Arithmetic Genus は $(-1)^1((-\frac{1}{2}ab(a+b-4)) - 1) = \frac{1}{2}ab(a+b-4) + 1$.

(e) Arithmetic Genus of Product Variety.

$Y \subseteq \mathbb{P}^n, Z \subseteq \mathbb{P}^m$ かつ $\dim Y = r, \dim Z = s$ とする．$Y \times Z \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ を $\mathbb{P}^N$ へ Segre embedding で埋め込む．$\mathbf{y} = \{y_i\}_{0\le i\le n}, \mathbf{z} = \{z_j\}_{0\le j\le m}, \mathbf{x} = \{x_{(i,j)}\}_{0\le i\le n, 0\le j\le m}$ とすると，以下の k-代数としての同型が成り立つ．

$$\frac{k[\mathbf{x}]}{\mathcal{I}_p(Y\times Z)} = \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \left(\frac{k[\mathbf{x}]}{\mathcal{I}_p(Y\times Z)}\right)_d \cong \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \left[\left(\frac{k[\mathbf{y}]}{\mathcal{I}_p(Y)}\right)_d \otimes_k \left(\frac{k[\mathbf{z}]}{\mathcal{I}_p(Z)}\right)_d\right]$$

これは次のように示せる．まず，以下の準同型は全射[2]．

$$\begin{array}{cccc} \gamma: & k[\mathbf{x}] & \to & \displaystyle\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} \left[\left(\frac{k[\mathbf{y}]}{\mathcal{I}_p(Y)}\right)_d \otimes_k \left(\frac{k[\mathbf{z}]}{\mathcal{I}_p(Z)}\right)_d\right] \\ & x_{(i,j)} & \mapsto & (y_i + \mathcal{I}_p(Y)) \otimes_k (z_j + \mathcal{I}_p(Z)) \end{array}$$

さらに $\mathrm{pr}_{\mathbf{y}} : x_{(i,j)} \mapsto y_i$ とする．$\mathrm{pr}_{\mathbf{y}}$ に対応して，射影写像 $(p_{(i,j)}) \mapsto (p_{(i,l)})$ が定義できるのでこれも $\mathrm{pr}_{\mathbf{y}}$ と書く．（ただし l はある i について $p_{(i,l)} \neq 0$ であるようなもの．）すると $\mathrm{pr}_{\mathbf{y}}(\mathcal{Z}_p(\ker\gamma)) = \mathcal{Z}_p(\mathrm{pr}_{\mathbf{y}}(\ker\gamma)) = \mathcal{Z}_p(\mathcal{I}_p(Y)) = Y$．よって $\mathcal{Z}_p(\ker\gamma)$ の $\mathbf{y}$ 方向への射影は Y である．同様に $\mathbf{z}$ 方向への射影は Z だから，$\ker\gamma = \mathcal{I}_p(Y\times Z)$．これで同型が証明できた．

---

1) ただし，$S/(fg) \to S/(f) \oplus S/(g)$ は $x + (fg) \mapsto (x + (f), x + (g))$，$S/(f) \oplus S/(g) \to S/(f,g)$ は $(x + (f), y + (g)) \mapsto x - y + (f,g)$ である．$x - y + (f,g) = 0 \iff x + (f,g) = y + (f,g)$ かつ $(f), (g) \subset (f,g)$ だからこれは確かに完全列．

2) 任意の $\prod_{i=1}^d y_{a_i} \otimes \prod_{i=1}^d z_{b_i}$ に対して $\prod_{i=1}^d x_{(a_i,b_i)}$ を取ればよい．

以上の同型から $P_{Y\times Z}=P_Y\cdot P_Z$．両辺の次数を見ることで $\dim Y\times Z=r+s$ もわかる．なので，以下のように $Y\times Z$ の Arithmetic Genus が計算できる．

$$\begin{aligned}
&p_a(Y\times Z)\\
=&(-1)^{r+s}(P_Y\cdot P_Z-1)\\
=&(-1)^{r+s}\left(((-1)^r p_a(Y)+1)((-1)^s p_a(Z)+1)-1\right)\\
=&(-1)^{r+s}\left((-1)^{r+s}p_a(Y)p_a(Z)+(-1)^s p_a(Y)+(-1)^r p_a(Z)\right)\\
=&p_a(Y)p_a(Z)+(-1)^r p_a(Y)+(-1)^s p_a(Z)
\end{aligned}$$

Ex7.3　The Dual Curve.

$(\mathbb{P}^2)^*=\{a_0x_0+a_1x_1+a_2x_2=0\mid(a_0:a_1:a_2)\in\mathbb{P}^2\}$ とする．Y :: curve in $\mathbb{P}^2$ とする．また，Y の定義多項式を f としておく．

(a)　Uniquely Existence of Tangent Line.

■$\deg Y>1$ が必要であること．　任意の nonsingular point $P=(p_0:p_1:p_2)\in Y$ に対して，$i(Y,L;P)>1$ となる直線 L を $T_P(Y)$ と書く．これがただひとつ存在することを示す．まず，Cor7.8(Bézout's Theorem) から，

$$1\leq i(Y,T_P(Y);P)\leq(\deg Y)\cdot(\deg T_P(Y))=\deg Y.$$

したがって $i(Y,T_P(Y);P)>1$ には $\deg Y>1$ が必要である．

■示すべき主張の言い換え．　$Q(\neq P)\in\mathbb{P}^2$ を任意にとり，直線 $L:(x_0:x_1:x_2)=uP+vQ$ $((u:v)\in\mathbb{P}^1)$ を考える．Q を変えれば P を通る任意の直線がこれで書けることに注意せよ．さらに L と別に直線 $T:\sum_{i=0,1,2}(\partial_{x_i}f)(P)\cdot x_i=0$ を定義する．$P\in Y$ は nonsingular point だから Ex5.8 より，これは確かに直線を定義している．さらに Ex5.8 の Euler's lemma から $\sum_{i=0,1,2}(\partial_{x_i}f)(P)\cdot p_i=(\deg f)\cdot f(P)=0$ なので $P\in T$．$i(Y,L;P)>1$ であることと $Q\in T$ すなわち $L=T$ [3] であることは同値である．これを示そう．

■$i(Y,L;P)$ の解体．　$i(Y,L;P)$ を計算したい．そのためにこの段落で $i(Y,L;P)$ を計算しやすいものへ帰着させる．$I=\mathcal{I}_p(Y)+\mathcal{I}_p(L), M=S/I$ とし，P に対応する S の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ とする．$\mathrm{Ann}(M)=I$ であり，$\mathcal{Z}_p(I)=Y\cap L$ は有限集合なので，$\mathfrak{m}$ は $\mathrm{Ann}(M)$ の極小イデアル．まず，$S_\mathfrak{m}$-加群 $M_\mathfrak{m}$ の組成列を考える．

$$0=\mathfrak{a}_l\subsetneq\mathfrak{a}_{l-1}\subsetneq\cdots\subsetneq\mathfrak{a}_0=M_\mathfrak{m}.$$

$M_\mathfrak{m}$ は環なので各 $\mathfrak{a}_i$ はイデアルである．Ati-Mac Prop3.11-i) より，これらはすべて拡大イデアルである．したがって以下のように書き換えられる．

$$0=\mathfrak{b}_l^e\subsetneq\mathfrak{b}_{l-1}^e\subsetneq\cdots\subsetneq\mathfrak{b}_0^e=M_\mathfrak{m}.$$

各 $\mathfrak{b}_i$ は環 M のイデアルである．さらに Ati-Mac Prop3.11-ii) より，$\mathfrak{b}^e\neq M_\mathfrak{m}\iff\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{m}/I\subsetneq M$．また，$\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{m}/I$ については，Ati-Mac Cor3.4, Prop3.8 により，

$$\mathfrak{c}=\mathfrak{b}\iff\mathfrak{b}/\mathfrak{c}=0\iff(\mathfrak{b}/\mathfrak{c})^e=0\iff\mathfrak{b}^e=\mathfrak{c}^e.$$

[3] $P,Q\in T$ であれば，L は T に含まれる独立なベクトルの線形和であることになり，したがって $L=T$．

なので $S_\mathfrak{m}$-加群 $M_\mathfrak{m}$ の組成列から次のようにイデアル列が得られる．

$$0 = \mathfrak{b}_l \subsetneq \mathfrak{b}_{l-1} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{b}_0 = \mathfrak{m}/I.$$

このイデアル列からもとの組成列が得られることは Ati-Mac Prop3.3 から理解る．だから，我々は $\mathfrak{m}/I$ の部分イデアル列として極大な物を考えれば良い．

■$\mathbb{P}^2$ から L へ，L から $\mathbb{P}^1$ へ． 同型定理から $\mathfrak{m}/I \cong \frac{\mathfrak{m}/\mathcal{I}_p(L)}{I/\mathcal{I}_p(L)}$ であり，以下で見るように右辺のほうが扱いやすい．計算すると $I/\mathcal{I}_p(L) = \mathcal{I}_p(Y)/\mathcal{I}_p(L) \subset S(L)$．$L$ は定義から u, v によるパラメトライズを持つから $S(L) \cong k[u,v]^h$．$\mathfrak{m}/\mathcal{I}_p(L)$ をこの同型写像で写すと，

$$\mathfrak{m}/\mathcal{I}_p(L) = (\{p_i x_j - p_j x_i\}_{i,j=0,1,2})/\mathcal{I}_p(L) \to (\{(p_i q_j - p_j q_i)v\}_{i,j=0,1,2}) = (v).$$

[4] ただし $P = (p_0 : p_1 : p_2), Q = (q_0 : q_1 : q_2)$ としている．幾何的に見れば，これは $\mathbb{P}^2$ 上の点 P を L 上の点 P とみなし，さらに $\mathbb{P}^1$ の点をみなしたことになる．同様に $\mathcal{I}_p(Y)/\mathcal{I}_p(L) = (f)/\mathcal{I}_p(L)$ を写すことで，(f) を $k[u,v]^h$ の元とみなせる．$\bar{f} = f(p_0u + q_0v, p_1u + q_1v, p_2u + q_2v)$ としておけば，$\frac{\mathfrak{m}/\mathcal{I}_p(L)}{I/\mathcal{I}_p(L)} \cong (v)/(\bar{f})$ になる．

■再び $i(Y, L; P)$． $\mathfrak{m}/\mathcal{I}_p(L) = (v)$ の部分加群列を考えよう．まず，明らかに $(v) \subsetneq (v^2) \subsetneq \ldots$ という部分加群列がある．$\mathbb{P}^1$ が nonsingular curve であることから $\dim_k \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \dim \mathbb{P}^1 = 1$．（ここだけが curve に特有の議論である．）なので $(v)/(v^2)$ は単純加群であり，(v) と (v^2) の間に更なる部分加群は無い．したがって $(v)/(\bar{f})$ が長さ 2 以上の部分加群列を持つこと，(v^2) が $(v)/(\bar{f})$ の部分加群に写せることは同値である．さらにそれは $(v^2) \supseteq (\bar{f})$ と同値である．

■計算と結論． 以上で $i(Y, L; P) > 1 \iff (v^2) \supseteq (\bar{f})$ がわかった．$\bar{f}$ を計算してみると，dual number での自動微分[5]を考えることにより，以下のように書ける．

$$\begin{aligned}
&\bar{f}(u,v) \\
=&f(p_0u + q_0v, p_1u + q_1v, p_2u + q_2v) \\
=&f(P)u^d + \left(\sum_{i=0,1,2} \partial_{x_i} f(P) \cdot q_i\right) u^{d-1}v + \cdots + f(Q)v^d \\
=&\left(\sum_{i=0,1,2} \partial_{x_i} f(P) \cdot q_i\right) u^{d-1}v + \cdots + f(Q)v^d
\end{aligned}$$

ただし $d := \deg f$．最後の等号は $P \in Y = \mathcal{Z}_p(f)$ による．$u^{d-1}v$ の係数が 0 であることと $(v^2) \supseteq (\bar{f})$ が同値であることが直ちに理解る．よって $Q \in T$．これで $i(Y, L; P) > 1 \iff Q \in T \iff T = L$ が示された．

■$P \in Y$ :: singular である時． $P \in Y$ :: singular であるとき，$\partial_{x_i} f(P)$ は $i = 0, 1, 2$ で 0．なので最後に現れる $\sum_{i=0,1,2} \partial_{x_i} f(P) \cdot q_i$ は任意の Q について 0 となる．したがって P を通る任意の直線 L について $i(Y, L; P) > 1$ となってしまう．

---

[4] $p_i q_j - p_j q_i \neq 0$ は欄外で示す．P, Q の代表元を適当にとって $\mathbb{A}^3$ のベクトルと見よう．$p_i q_j - p_j q_i = \det \begin{bmatrix} p_i & q_i \\ p_j & q_j \end{bmatrix}$．したがってこれがすべての i, j で 0 になるということは，P, Q が $\mathbb{A}^3$ のベクトルとして平行であることと同値である．今 $\mathbb{P}^2$ の元として $P \neq Q$ としていたから，$p_i q_j - p_j q_i \neq 0$．

[5] $\varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0$ とすると，$F \in k[x]$ について $F(a + \varepsilon) = F(a) + F'(a)\varepsilon$．

(b) A Map $P \mapsto T_P(Y)$ Defines a Morphism $\operatorname{Reg} Y \to (\mathbb{P}^2)^*$.

写像 α を $(a_0 : a_1 : a_2) \mapsto a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ としておく．これによって $\mathbb{P}^2$ と $(\mathbb{P}^2)^*$ は同一視される．（問題文では明示されていないが，おそらくこれは定義の一部である．）示すべきことは以下の写像が morphism であること．

$$\begin{array}{cccc} \phi : & \operatorname{Reg} Y & \to & (\mathbb{P}^2)^* \\ & P & \mapsto & T_P(Y) = \alpha(\nabla f(P)) \end{array}$$

ただし $\operatorname{Reg} Y$ は Y の nonsingular な点全体である．α は同型写像だから $\alpha^{-1} \circ \phi = \nabla f$ が morphism であることが示せれば良い．適当に $\mathbb{P}^2$ の affine open covering をとって Lemma3.6 を適用すればこのことが得られる．

(c) The Dual Curve.

（問題ではないが次の問題で使うので書いておく．）上で定義した ϕ の像の closure を Y の dual curve と呼ぶ．すなわち，Y の dual curve は以下のもの．

$$\alpha\left(\mathrm{cl}_{\mathbb{P}^2}\left(\{\nabla(f)(P) \mid P \in \operatorname{Reg} Y\}\right)\right).$$

$\partial_{x_i} f$ は $d-1$ 次斉次式だから，$\{\}$ 内は次のイデアルの零点だと言える．

$$I_{DC} = (\{\partial_{x_i} f \cdot x_j - \partial_{x_j} f \cdot x_i\}_{i,j=0,1,2}).$$

（このイデアルの生成元は $P \in \operatorname{Sing} Y$ ですべて 0 になる．）したがって $\{\}$ は閉集合であり，I_{DC} が Y の dual curve の定義イデアル．

Ex7.4 Lines which Meet Y Extactly in d Points.

Y :: curve in $\mathbb{P}^2$, $d := \deg Y$ とする．さらに写像 α を $(a_0 : a_1 : a_2) \mapsto a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ としておく．$U \subset \mathbb{P}^2$ を $\alpha(U)$ の元（直線）が Y と丁度 d 個の点で交わるようなものとしよう．この時，U :: nonempty open subset を示す．そのために U^c :: proper closed subset を示す．

直線 $L \in (\mathbb{P}^2)^*$ を考える．$Y \cap L = \{P_i\}_{i=1}^r$ としよう．Cor7.8 と，直線の degree が 1 であることから，

$$\sum_{i=1}^r i(Y, L; P_i) = d.$$

したがって交点が d 個，すなわち $r = d$ であることと，すべての i について $i(Y, L; P) = 1$ であることが同値であることが理解る．任意の L について $i(Y, L; P) \geq 1$ だから，Ex7.3 と合わせて以下が理解る．

$$L \in \alpha(U^c) \iff {}^\exists P \in Y \cap L,\ i(Y, L; P) > 1 \iff [{}^\exists P \in \operatorname{Reg} Y,\ L = T_P(Y)] \vee [{}^\exists P \in \operatorname{Sing} Y,\ P \in L].$$

この 2 条件のうち，${}^\exists P \in \operatorname{Reg} Y,\ \ L = T_P(Y)$ を満たす L 全体は

$$\alpha(\{\nabla(f)(P) \mid P \in \operatorname{Reg} Y\})$$

と書ける．これは Ex7.3 の結果の言い換えである．Ex7.3 の解答で示したとおり，これは $\mathcal{Z}_p(I_{DC})$ と書ける閉集合．さらに ${}^\exists P \in \operatorname{Sing} Y,\ \ P \in L$ を満たす L 全体を考える．各 $P \in \operatorname{Sing} Y$ に対して，P を通る直線全体は次の集合である．

$$\left\{\sum q_i x_i = 0 \;\middle|\; \sum q_i p_i = 0\right\} = \alpha(\{Q \mid (P, Q) = 0\}) = \alpha(\mathcal{Z}_p(\alpha(P))).$$

以上より，

$$U^c = \mathcal{Z}_p(I_{DC}) \cup \left(\bigcup_{P \in \operatorname{Sing} Y} \mathcal{Z}_p(\alpha(P)) \right).$$

Y が曲線であることと $\operatorname{Sing} Y$ が Y の proper closed subset であることから $\operatorname{Sing} Y$ は有限集合．だから U^c は closed subset．proper であること，すなわち $U^c \neq \mathbb{P}^2$ であることは $\mathbb{P}^2$ の既約性による．

Ex7.5　An Irreducible Curve of Degree $d > 1$.

(a)　"cannot have a point of multiplicity $\geq d$ ".

Y :: irreducible curve in $\mathbb{P}^2$, $\deg Y =: d > 1$ とする．このとき，Y は斉次既約多項式 $F \in k[x,y]^h$ で表すことができる．そして $\deg Y = d = \deg F$ が成り立つ（Porp7.6d)．

$U_z = (\mathcal{Z}_a(z))^c$ とする．点 $(a:b:1) \in Y \cap U_z$ での multiplicity を考えよう．F を z について非斉次化したものを f とする．明らかに $\deg f \leq d = \deg F$．さらに $(x,y) \mapsto (x-a, y-b)$ と平行移動したものを f' とする．この変換は 1 次変換だから $\deg f' = \deg f$．Ex5.3 で定義されている multiplicity は（$\mathbb{A}^2$ の曲線にしか定義されていないが）$\mu_{(a:b:1)}(Y) = \operatorname{ord} f'$．

$$d = \deg F \geq \deg f = \deg f' \geq \operatorname{ord} f' = \mu_{(0,0)}(\mathcal{Z}_a(f')).$$

よって Y の点 $(a:b:1)$ における multiplicity は d 以下．

さらに，等号が成り立つと仮定しよう．すると f' は $k[x,y]^h$ の斉次 d 次多項式となる．この時 f' は重複を含めて $d(>1)$ 個の斉次 1 次多項式の積に分解できるから，$\mathcal{Z}_a(f')$ は irreducible になり得ない．しかし $Y \cap U_z$ から $\mathcal{Z}_a(f')$ への変換は irreducibility を損なわない．[6]なので等号は成り立たず，$\mu_{(a:b:1)}(Y) = \deg f' < d$.

(b)　"is a rational curve".

Y :: irreducible curve, $\deg Y =: d > 1$ とする．ある点 $P \in Y$ において $\mu_P(Y) = d-1$ であるとき，Y :: rational curve となることを示す．

調べたいのは $K(Y) \cong K(\mathbb{P}^1)$ か否かということなので，Prop4.9 を用いて Y を $\mathbb{P}^2$ の hypersurface とみなす．定義多項式を $F \in k[x,y,z]^h$ としよう．このとき Prop7.6d より $\deg F = \deg Y = d$．また，適当な射影変換によって $P \in Y$ は $(0:0:1)$ へ写せる．すると仮定されているのは，$f = F(x,y,1)$ が以下のように斉次分解出来るということである．

$$f = F(x,y,1) = f_d + f_{d-1} = \prod_{i=1}^{d}(a_i x - b_i y) + \prod_{j=1}^{d-1}(c_j x - d_j y).$$

ただし $a_i, b_i, c_i, d_i \in k$ である．また，$\mathcal{Z}_a(f)(\equiv Y \cap U_z)$ が irreducible であることから，任意の i,j について (a_i, b_i) と (c_j, d_j) は平行でない．仮に平行であるものがあればそれに対応する一次因子をくくりだして因数分解できてしまうからである．

任意の点 $(x,y) \in Y$ において次が成り立つ．

$$f(x,y) = \prod_{i=1}^{d}(a_i x - b_i y) + \prod_{j=1}^{d-1}(c_j x - d_j y) = 0.$$

[6] $Y \cap U_z \to \mathcal{Z}_a(f)$ は Prop2.2 より同相写像で，$\mathcal{Z}_a(f) \to \mathcal{Z}_a(f')$ は平行移動なので同相写像．

したがって次が得られる．

$$a_d x - b_d y = -\frac{\prod_{j=1}^{d-1}(c_j x - d_j y)}{\prod_{i=1}^{d-1}(a_i x - b_i y)} =: G(x,y).$$

$(a_i, b_i) \not\parallel (c_j, d_j)$ であるから G の分子分母に共通因子はなく，G の分子分母は共に斉次式．なので $G(x,y) = G(x/y, 1)$．今，$a_d \neq 0$ と仮定し，$t = x/y$ とする．($a_d = 0$ の時は $t = y/x$ とする．) すると $y \cdot (a_d t - b_d) = G(t,1)$ となるから，結局次の birational map が得られる．

$$\begin{array}{cccc} \phi : & Y & \overset{\cong}{\dashrightarrow} & \mathbb{P}^1 \\ & (x,y) & \mapsto & (x/y : 1) \\ & \dfrac{G(t,1)}{a_d t - b_d}(t,1) & \leftarrow\!\shortmid & (t:1) \end{array}$$

$\frac{G(t,1)}{a_d t - b_d} = -\frac{\prod_{j=1}^{d-1}(c_j t - d_j)}{\prod_{i=1}^{d}(a_i t - b_i)}$ である．スカラー倍を用いて書いているので注意せよ．

Ex7.6 Linear Varieties.

Y :: algebraic set in $\mathbb{P}^n$ の各 irreducible component の次元が r だとする．$\deg Y = 1 \iff Y$ :: linear variety，を示す．Y の irreducible components を $\{C_i\}_{i=1}^s$ とし，$\mathfrak{p}_i = \mathcal{I}_p(C_i)$ ておく．

(a) Proof of $\deg Y = 1 \implies Y$ :: linear variety

$M = S/\mathcal{I}_p(Y)$ に対して Them7.7 の証明の後半と同じ議論をすると，M の Hilbert polynomial は以下のようになる．

$$P_M(z) = \sum_{i=1}^{s} \mu_{\mathfrak{p}_i}(M) \cdot P_{S/\mathfrak{p}_i}(z).$$

すべての i に対して $\dim C_i = r$ であるから，$\deg P_{S/\mathfrak{p}_i}(z) = r$．したがって leading cofficient を足すことにより，以下が理解る．

$$1 = \deg Y = \sum_{i=1}^{s} \mu_{\mathfrak{p}_i}(M) \cdot \deg C_i \geq s \geq 1.$$

よって $s = 1$ すなわち Y :: variety が得られる．

$\mathcal{I}_p(Y)$ の生成元を $g_1, \ldots, g_t, g$ とする．$\mathcal{I}_p(Y)$ は素イデアルだから，これらはすべて既約である．$d = \deg g$ としておく．さらに $Y^- = \mathcal{Z}_p(\{g_1, \ldots, g_t\})$ としよう．Y^- が irreducible とは限らないことに注意せよ．すると Them7.7 の証明の前半と同様の議論が使える．以下は完全列である．

$$0 \to (S/\mathcal{I}_p(Y^-))(-d) \to S/\mathcal{I}_p(Y^-) \to M \to 0.$$

よって $P_M(t) = P_{S/\mathcal{I}_p(Y^-)}(t) - P_{S/\mathcal{I}_p(Y^-)}(t-d)$．なので Them7.7 の証明の前半から $\deg Y = 1 = \deg Y^- \cdot d$. このことから $d = 1$ が得られる．g は $\mathcal{I}_p(Y)$ の生成元のいずれでも良いから，$\mathcal{I}_p(Y)$ は一次斉次多項式で生成される．以上から Y :: linear variety.

(b) Proof of $\deg Y = 1 \impliedby Y$ :: linear variety

Y が hyperplane であるときは Prop7.6d より $\deg Y = 1$ は明らかである．Ex2.11a より，Y :: linear variety であるとき Y は hyperplane の交わりとして書ける．さらに Ex2.11b より，$\mathcal{I}_p(Y)$ は $(t :=) n - r$ 個の（線形独立な）一次斉次多項式で生成される．その多項式を $h_1, \ldots, h_t$ としよう．$I_i = \langle h_1, \ldots, h_i \rangle$ としておく．同時に $Y_i = \mathcal{Z}_p(I_i)$ としておく．$I_{i+1} = I_i + (h), Y_{i+1} = \cap \mathcal{Z}_p(h_{i+1})$ に注意せよ．

$\deg Y_i = 1$ ならば $\deg Y_{i+1} = 1$ であることを示す．intersection multiplicity と degree は 1 以上の値だから，Them7.7 より $\deg Y_{i+1} = (\deg Y_i)(\deg \mathcal{Z}_p(h_{i+1}))$．仮定より $\deg Y_i = 1$ で，Prop7.6d より $\deg \mathcal{Z}_p(h_{i+1}) = \deg h_{i+1} = 1$ なので主張が示された．

Ex7.7　The Closure of the Union of All Lines from Nonsingular Point.

Y :: variety in $\mathbb{P}^n$, $\dim Y = r, \deg Y = d > 1$ について考える．$P \in Y$ :: nonsingular point として，X を以下のように定める．

$$X = \mathrm{cl}_{\mathbb{P}^n}\left(\bigcup_{Q \in Y-P} L_{PQ}\right).$$

ただし L_{PQ} は二点 P, Q を通る直線で，$L_{PQ} = \{uP + vQ \mid (u:v) \in \mathbb{P}^1\}$ と書ける．射影変換を用いて $P = (1:0:\cdots:0)$ とする．

■X の別表現.　$\tilde{X} = \bigcup_{Q \in Y-P} L_{PQ}$ としよう．$R \in \tilde{X}$ を任意にとると，L_{PR} は P と異なる Y 上の点を通る．逆に，L_{PR} が P と異なる Y 上の点を通らなければ R は $\tilde{X}$ の元でない．$R \in \mathbb{P}^n$ に対し，$L_{PR} \cap Y$ の元は Ex7.3 の議論と同様に以下の集合に一対一対応する．

$$(\{P\} \subseteq)\mathcal{Z}_p(\{f(uP + vR) \mid f \in \mathcal{I}_p(Y)\})(\subseteq \mathbb{P}^1).$$

l_{PR} を $f \mapsto f(uP + vR)$ なる準同型とすれば，

$$\tilde{X}^c = \left\{R \in \mathbb{P}^n \middle| \sqrt{l_{PR}(\mathcal{I}_p(Y))} = (v)\right\}.$$

(a)　X :: variety, $\dim X = r + 1$.

■X :: variety.　X :: irreducible を示す．$X = C \cup D$ となる C, D :: closed in X が存在したとしよう．$C' = Y \cap C, D' = Y \cap D$ とおくと $Y \subset X$ なので C', D' :: closed in Y．そして $C' \cup D' = Y \cap (C \cup D) = Y \cap X = Y$ となる．したがって Y が irreducible でないということになり，これは仮定に矛盾する．よって X :: variety.

■道具　$Z \subset X$ に対して $\hat{C}(Z) = \mathrm{cl}_{\mathbb{P}^n}\left(\bigcup_{Q \in Z-P} L_{PQ}\right)$ とおく．(cone のつもりで C とした．) $\hat{C}(Y) = X$ で，また Z が irreducible ならば前段落と同様の議論により $C(Z)$ も irreducible である．Ex2.10 で定義された cone を $C(Y)$ で書く．

■$\dim X = r + 1$.　$\hat{C}(Y) \cong C(Y)$ を示そう．この結果と Ex2.10c, Ex3.12 から $\dim \mathcal{O}_{P,\hat{C}(Y)} = \dim \mathcal{O}_{P,C(Y)} = \dim C(Y) = r + 1$ のように主張が示せる．以下が birational map になる．

$$\begin{array}{cccc}
\xi : & \hat{C}(Y) & \to & C(Y) \\
& P + t(1:q_1:\cdots:q_n) & \mapsto & t(1, q_1, \ldots, q_n) \\
& P + (r_0:r_1:\cdots:r_n) & \leftarrow & (r_0, r_1, \ldots, r_n)
\end{array}$$

(b)　$\deg X < d$.

この問題では Y を irreducible と限らない algebraic set とする．$\dim Y$ についての帰納法で示そう．

■Case $\dim Y = 0$.　$\dim Y = 0$ の時，Y は d 個の点で，$X = \hat{C}(Y)$ は $d - 1$ 本の直線．したがって $\deg \hat{C}(Y) = \deg Y - 1 < \deg Y$ となる．

■Induction Hypothesis. $r > 0$ について，$\dim Y = r-1$ の時 $\deg \hat{C}(Y) < \deg Y$ であるとする．以下，$\dim Y = r$ の場合にもこれが成り立つことを示す．

■Case $\dim Y = r+1$. H :: hyperplane in $\mathbb{P}^n$, $P \in H$ とする．$X \cap H$ の irreducible component を $\{Z_j\}_{j=1}^t$ とすると，うまく H をとることですべての j について $i(X, H; Z_j) = 1$ であるように出来る（？）．（この条件は Them7.7 より $t = \deg X$ と同値である．）そのとき，Them7.7, Prop7.6b より以下が成り立つ．

$$\deg(X \cap H) = \sum_{j=1}^{t} \deg Z_j = \sum_{j=1}^{t} i(X, H; Z_j) \cdot \deg Z_j = \deg X \cdot \deg H = \deg X.$$

一方，$Y \cap H$ の irreducible component を $\{W_j\}_{j=1}^s$ とすると，Ex1.8（の類似）より $\dim W_j = r-1$．その degree は再び Them7.7, Prop7.6b より以下のようになる．

$$\deg(Y \cap H) = \sum_{j=1}^{s} \deg W_j \leq \sum_{j=1}^{s} i(Y, H; W_j) \cdot \deg W_j = \deg Y \cdot \deg H = \deg Y = d.$$

H は P を含む hyperplane だから $H = C(H)$．したがって $X \cap H = \hat{C}(Y) \cap \hat{C}(H) = \hat{C}(Y \cap H)$．しかも $\dim Y \cap H = r-1$ だから，induction hypothesis より $\deg(X \cap H) < \deg(Y \cap H)$．以上より，以下の不等式が得られる．

$$\deg X = \deg(X \cap H) < \deg(Y \cap H) \leq \deg Y.$$

Ex7.8 A Variety of Degree 2 in $\mathbb{P}^n$.

Y :: variety in $\mathbb{P}^n$, $\deg Y = 2$ とおく．Y に対して Ex7.7 の方法で構成される variety を X としよう．すると Ex7.7b より $1 \leq \deg X < \deg Y = 2$ なので $\deg X = 1$．Ex7.7a から $\dim X = \dim Y + 1$．Ex7.6 より，X は linear variety である．以上より，Y は $\dim X = \dim Y + 1$ の linear variety に含まれている．