1　アーベル圏

一般的な圏の定義、（始, 終, 零）対象、（余）極限、Hom 関手、米田の補題については既知とする。

定義 1.1 (前加法圏/preadditive category (or Ab-category))**.** 圏 $\mathbf{C}$ が前加法圏であるとは、任意の対象 $X, Y \in \mathbf{C}$ について $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ が非可換環の構造を持つことである。ただし加法は余積が誘導するもの、乗法は射の合成、加法単位元は零射、乗法単位元は単位射である。

前加法圏においては、積（product）と余積（coproduct）は（存在すれば）一致する。なのでこれを双積（biproduct）と呼ぶ。双積は加群における直和の一般化である。一致することの証明は自明である。ただしこの「自明」は「すぐ分かる」を意味しない。丁寧な説明は `https://ncatlab.org/nlab/show/additive+category#properties` にある。

定義 1.2 (加法圏/additive category)**.** 圏 $\mathbf{C}$ が加法圏であるとは、$\mathbf{C}$ が前加法圏であり、かつ有限個の任意の対象について双積が存在することである。

定義 1.3 ((ver.I) アーベル圏/abelian category)**.** 圏 $\mathbf{C}$ がアーベル圏であるとは、$\mathbf{C}$ が加法圏であり、以下を満たすものである。

- 任意の射が核を持つ
- 任意の射が余核を持つ
- 任意の mono 射はある射の核である
- 任意の epi 射はある射の余核である

定義 1.4 ((ver.II) アーベル圏/abelian category)**.** 圏 $\mathbf{C}$ がアーベル圏であるとは、以下を満たすということである。

- 零対象を持つ
- 任意の有限個の対象について、双積が存在する
- 任意の射が核を持つ
- 任意の射が余核を持つ
- 任意の mono 射はある射の核である
- 任意の epi 射はある射の余核である

定義 1.5 (核/kernel, 余核/cokernel, 像/image, 余像/coimage)**.** アーベル圏に於ける射 $f : X \to Y$ について定義する。

- 射 f の核 ($\ker f$) とは、f と零射 0_{XY} の equalizer のことである
- 射 f の余核 ($\mathrm{coker}\, f$) とは、f と零射 0_{XY} の coequalizer のことである
- 射 f の像 ($\mathrm{im}\, f$) とは、$\ker \mathrm{coker}\, f$ のことである
- 射 f の余像 ($\mathrm{coim}\, f$) とは、$\mathrm{coker} \ker f$ のことである

像の定義は以下のように述べることも出来る。

定義 1.6 (像/image)**.** 射 $f : X \to Y$ の像とは、射 f を $X \to I \hookrightarrow Y$ と分解する対象 I と mono 射 $I \hookrightarrow Y$ の組であって、そのような分解が作る圏に於ける始対象である。

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] \arrow[ddr, bend right, "\forall"'] & & Y \\
& I \arrow[ur, hook] \arrow[d, dashed, "\exists_1"'] & \\
& {}^{\forall}Z \arrow[uur, hook, bend right, "\forall"'] &
\end{tikzcd}
$$

2 完全関手

定義 2.1 (完全列/exact sequence)**.** アーベル圏の対象と射の列

$$\cdots \to X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_n \xrightarrow{f_n} X_{n+1} \to \cdots$$

であって、

$$\operatorname{im} f_{n-1} = \ker f_n$$

を満たすものを完全列と呼ぶ。したがって $f_n \circ f_{n-1}$ は零射である。特に完全列

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

は短完全列と呼ばれ、左側にしか 0 が無いものは左完全列、右側にしか 0 が無いものは右完全列と呼ばれる。

定義 2.2 (加法的関手/additive functor)**.** アーベル圏同士の間の関手であって、任意の有限双積を保つものを加法的関手と呼ぶ。

定義 2.3 (左（右）完全関手/left(right) exact functor)**.** アーベル圏同士の間の関手であって、任意の左 (resp. 右) 完全列を保つものを左 (resp. 右) 完全関手と呼ぶ。

定理 2.4. 加法的関手 $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ について、以下は同値。

(i) F は左完全関手

(ii) F は核を保つ

(iii) F は有限極限を保つ

(iv) F は左短完全列を保つ

(証明). (i) $\Longrightarrow$ (ii): アーベル圏 $\mathbf{A}$ に属す任意の射 $f : X \to Y$ を取る。すると

$$0 \to \ker f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y$$

は左完全列である。ただし i は埋め込み射（したがって単射)。これを F で写すと、

$$0 \to F(\ker f) \xrightarrow{F(i)} F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y)$$

となる。これが左完全列であることから、$\mathrm{im}\, F(i) \cong \ker F(f)$ が得られ、また $F(i)$ が monic であることから、$F(\ker f) \cong \mathrm{im}\, F(i)$ となる [1)]。 合わせて

$$F(\ker f) \cong \ker F(f).$$

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): F は加法的関手であるから、有限双積を保つ。さらに仮定から核も保つ。一般の圏において、任意の有限極限は有限積とイコライザで表すことができる [2)] が、アーベル圏においては有限積とは有限双積のことであり、またイコライザは核で表される（イコライザが mono 射であることに注意)。したがってアーベル圏において任意の有限極限は有限双積とイコライザで表され、よって関手 F は任意の有限極限を保つ。

(iii) $\Longrightarrow$ (iv): アーベル圏 $\mathbf{A}$ における任意の左短完全列を取る。

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z.$$

これを F で写す。

$$0 \to F(X) \xrightarrow{F(f)} F(Y) \xrightarrow{F(g)} F(Z).$$

るこれが再び左短完全列であることを確かめるのは容易である。

$$\begin{aligned} \ker F(f) &\cong F(\ker f) = F(0) = 0 \\ \ker F(g) &\cong F(\ker g) = F(\mathrm{im}\, f) \cong \mathrm{im}\, F(f). \end{aligned}$$

$\mathrm{im} = \ker \mathrm{coker}$ を有限極限として表せることに注意。

(iv) $\Longrightarrow$ (i): 自明。

∎

1) im の定義 (1.6) にある可換図式において $Z = X, X \to Z = 1_{\mathrm{X}}$ として確認できる。

2) Awodey 本等にある