# ゼミノート #11
# Overview of
# “Existence and properties of geometric quotients”(D.Rydh, 2013)

七条彰紀

2019 年 8 月 19 日

## 目次



このノートは，[7] を理解することを目的とするゼミのためのノートである．Algebraic stack については既に私のノート [9] の内容程度のことを分かっているものとする．

**注意 0.1**
著者 “Rydh”はスウェーデン語で，大体「リード」と発音する．参考: https://forvo.com/word/annika_rydh/

## Conventions and Nootations

- 定義は私のノート [9] ch.5 “Algebraic Stacks and Spaces”にあるものとする．特に，diagonal map が quasi-compact，quasi-separated であることを仮定しない．これは [7] と同じである．algebraic stack という語は基本的に使わず，artin stack を中心的に扱う．
- artin stack の moduli space というとき，特別な algebraic space のことを意味することも有るし，artin stack から algebraic space への特別な射のことを意味することもある．（このノートでは後者の意味であることが多い．）

- unramified という語は locally of finite type かつ formally unramified を意味する．私のノートでは locally of finite presentation まで要求するので注意せよ．
- fppf atlas of an artin stack とは，surjective, flat [†1], locally of finite presentation であるような algebraic space から artin stack への射を言う．取り扱う論文 [7] ではこれを presentation と呼んでいるが，我々は presentation を quotient stack による artin stack の表示のことを言う．
- geometric point とは $\operatorname{Spec} k$ ($k$ :: algebraically closed field) からの射のことである．

# 1 事実のまとめ

## 1.1 stack から scheme まで

moduli 問題を含む多くの問題では，まず stack(in groupoids) が得られる．得られた stack が scheme であればとても取り扱いやすいが，そうなることはめったに無い．

一方で stack と scheme の間には，artin stack, Deligne-Mumford(DM) stack, algebraic space といった中間的概念がある．いつどれになるのか，という条件は既によく研究されていて，同値条件も得られている．以下でそれらを列挙する．

まず，得られた moduli stack が artin stack であるか否かは，“Criteria for Representability” として [8] ch.91 にまとめられている．また，artin stack over a scheme :: $\mathcal{X}$ が Deligne-Mumford stack であるかどうかは，例えば任意の geometric point の自己同型群が reduced finite group scheme であることと同値である ([6] Thm8.3.3)．さらに，$\mathcal{X}$ が algebraic space であることは，例えば任意の geometric point の自己同型群が自明であることと同値である ([4] Thm2.2.5, [8] tag 04SZ)．最後に，algebraic space :: $X$ が scheme であるためには，例えば representable sheaf による (Zariski) open covering を持てば十分である ([8] 01JJ)．

## 1.2 coarse moduli space が存在するための十分条件

しかし，得られた artin stack が algebraic space であることもまためったに無い．筆者の感覚では，DM stack で既に綺麗すぎる (too neat) 対象である．そこで，artin stack を algebraic space や scheme で近似出来ないか，という問題が生まれる．この近似を coarse moduli space と呼ぶ．なお，これは歴史的な経緯から来た命名であり，一般には必ずしも moduli 問題と関係が有るわけではない．

artin stack が coarse moduli space をもつための条件も 90 年代から考えられているが，必要十分条件を得るには程遠い．十分条件として有名なのは Keel-Mori の定理 ([5]) が提示した「inertia stack が $\mathcal{X}$-finite」である．当初は多くの追加条件付きで証明されたが，[3] で base scheme に関する条件が取り外され，最終的に [7] で artin stack に関する条件が全て取り外された．

他に，gerbe は必ず coarse moduli space を持つ．artin stack が gerbe であることは，inertia stack :: $\mathcal{I}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ が flat and locally of finite presentation であることと同値である．

[†1] surjective+flat=falthfully flat に注意．

### 1.3 coarse moduli space が存在するための必要条件

一方で，coarse moduli space が存在するための必要条件についてはほとんど知られていない．([3] Cor5.2) では様々な前提条件付きで「separated coarse moduli space が存在する」と「inertia stack が $\mathcal{X}$-finite」が同値であることを示している．一方で [7] では反例を構成し，「inertia stack が $\mathcal{X}$-proper」さえ必要条件ではないことを示している．

### 1.4 その他の moduli space

また，「inertia stack が $\mathcal{X}$-finite」より強い条件を課したものとして，「quasi-coherent sheaf の pushforward が exact」を追加した tame Artin stack がある．これは coarse moduli space が etale local に綺麗なものとなっている．

違う方向性では，J.Alper が提案した adiquate moduli space と good moduli space がある．good moduli space は quotient map にはなっていないが，GIT quotient に似た優れた性質を持つ ([1])．さらに，artin stack が good moduli space を持つための必要十分条件が分かっている ([2])．

## 2 論文 "Existence and properties of geometric quotients" [7] の構成

今回取り扱う [7] で述べられている命題のうち，次のものを特に研究する．

**定理 2.1**
$\mathcal{X}$ を artin stack とする．$\mathcal{X}$ が $\mathcal{X}$-finite inertia stack を持つならば，$\mathcal{X}$ が coarse moduli space を持つ．

論文は基本的に algebraic space の groupoid による商を扱っており，最後の §6 でそれらが stack の言葉に翻訳される．この方針は [5] と同じである．

### 2.1 証明の構成

証明の手順を説明する．未定義の用語がかなり多くなるが，適宜無視して欲しい．

$$
\begin{array}{c}
\mathcal{X} \text{ は } \mathcal{X}\text{-finite inertia stack を持つ．} \\
\Big\Downarrow \text{Thm6.11} \\
\mathcal{X} \text{ は fpr etale cover with finite locally free presentation :: } \mathcal{W} \text{ を持つ．} \\
\Big\Downarrow \text{Thm5.3} \\
\mathcal{W} \text{ は strongly geometric quotient を持つ．} \\
\Big\Downarrow \text{Thm3.19} \\
\mathcal{X} \text{ は strongly geometric quotient を持つ．} \\
\Big\Downarrow \text{Thm3.8} \\
\mathcal{X} \text{ は coarse moduli space を持つ．(Thm 6.12)}
\end{array}
$$

命題番号を見ると，結論に近い部分から述べられていることが分かる．

また，ここに挙げられていないが coarse moduli space を考える上で重要な命題として次が有る．

**定理 2.2** (Part of [7] Thm 3.16)
$R \rightrightarrows X$ を groupoid とし，$q\colon X \to Z$ をその strongly geometric quotient とする．この時，$q$ が universally open であり，かつ $q$ が proper または integral であれば，$q$ は categorical quotient でもある．

全体として，この論文による D.Rydh の貢献は，geometric quotient 等の概念と categorical quotient の概念，また descent condtion などの概念の関係性を解明した点に有ると思う．

## 2.2 中心的概念

上で述べたなかに頻出したとおり，strongly geometric quotient という概念が頻出である．この定義を述べよう．

**定義 2.3** (strongly geometric quotient, stack version, [7] Def 6.1)
$\mathcal{X}$ を artin stack とし，$q$ を algebraic space への射 $q\colon \mathcal{X} \to Z$ とする．次の条件を満たす時，$q$ は strongly geometric quotient と呼ばれる．

- $q$ :: universal homeomorphism,
- the diagonal $\Delta_q$ :: universally submersive,
- $q^{\#}\colon \mathcal{O}_Z \to q_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ :: isomorphism.

最初の二つが成立する時，$q$ は strongly topological quotient と呼ばれる．

[7] Prop3.8（と Def 6.1 の上の段落）より，これは categorical quotient でもある．見ての通り，これはかなり強い条件である．なお，最後の条件が成立するためには，$q$ の smooth 射による pullback がまた categorical quotient であることが十分である[†2]．

# 参考文献


[1] Jarod Alper. Good moduli spaces for artin stacks. *Annales de l'Institut Fourier*, Vol. 63, No. 6, pp. 2349–2402, 2013.

[2] Jarod Alper, Daniel Halpern-Leistner, and Jochen Heinloth. Existence of moduli spaces for algebraic stacks. https://arxiv.org/abs/1812.01128, 12 2018.

[3] Brian Conrad. The keel-mori theorem via stacks. https://math.stanford.edu/conrad/papers/coarsespace.pdf, 2005.

[4] Brian Conrad. Arithmetic moduli of generalized elliptic curves. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, Vol. 6, pp. 209–278, 04 2007.

[5] Sean Keel and Shigefumi Mori. Quotients by groupoids. *Annals of Mathematics*, Vol. 145, No. 1, pp. 193–213, 1997.

[6] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.


[†2] 特に $q$ が uniform categorical quotient であれば十分．証明には，[9] で証明した $(q_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}})(U) = \Gamma(U \times_Z \mathcal{X}, \mathrm{pr}_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ と，関手 $\Gamma(-, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ が affine line :: $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ で表現可能であることを用いる

[7] David Rydh. Existence and properties of geometric quotients. *Journal of Algebraic Geometry*, Vol. 22, pp. 629–669, 08 2013.

[8] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2019.

[9] 七条彰紀. Algebraic stacks, Sep 2018. https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/tree/master/AlgebraicStacks.