## Ex2.1 $(D(f), \mathcal{O}_X|_{D(f)}) \approx (\operatorname{Spec} A_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f})$

$A$ :: ring, $X = \operatorname{Spec} A$, $f \in A$ とし，$D(f) = (V((f)))^c$ とする．$S = \{1, f, f^2, \dots\}$ とし，以下のように写像を定める．

$$\begin{array}{cccc} \phi: & D(f) & \to & \operatorname{Spec} A_f \\ & \mathfrak{p} & \mapsto & S^{-1}\mathfrak{p} \\ & \mathfrak{q} \cap A & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{q} \end{array}$$

$\mathfrak{p}$ は $S$ と共通部分を持たない素イデアルだから，Ati-Mac Prop3.11 より，$\phi$ は全単射．

$C$ :: open in $D(f)$ とする．この時，

$$C = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{p}, (f) \not\subseteq \mathfrak{p}\}$$

となるイデアル $\mathfrak{I} \subset A$ が存在する．Ati-Mac Prop3.3 より，$\phi$ は単射を保つから，$\phi(C)$ も closed．逆に $D$ :: open in $\operatorname{Spec} A_f$ をとる．再び Ati-Mac Prop3.11 より，$\operatorname{Spec} A_f$ の任意の元は拡大イデアルだから，

$$D = \{\phi(\mathfrak{p}') \in \operatorname{Spec} A_f \mid \phi(\mathfrak{I}') \subseteq \phi(\mathfrak{p}'), \phi(f) \not\subseteq \phi(\mathfrak{p}')\}$$

と書ける．つまり，$D = \phi(V(\mathfrak{I}'))$．$\phi$ は全単射なので $\phi^{-1}(D) = V(\mathfrak{I}')$ となり，これは closed．以上より $\phi$ が同相写像であることがわかった．

Prop2.3 と同様に locally ringed space の射を構成しておく．これは

$$f : \mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p}), \quad f^{\#} : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f}(-) \mapsto \mathcal{O}_X|_{D(f)}(\phi(-))$$

で定義される．

## Ex2.2 IF $X$ :: scheme, and $U$ :: open in $X$, then $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ :: scheme.

$X$ は scheme だから，開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在し，$(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda})$ は affine scheme となる．すなわち，$R_\lambda$ :: ring が存在して

$$(U_\lambda, \mathcal{O}_X|_{U_\lambda}) \approx (\operatorname{Spec} R_\lambda, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R_\lambda})$$

と書ける．

$V_\lambda = U \cap U_\lambda$ とすると，$\{V_\lambda\}$ は $U$ の開被覆である．そして各 $V_\lambda \subseteq U_\lambda$ は affine scheme の開集合．教科書 pp.70-71 から，affine scheme の open base は $D(f)$ $(f \in R_\lambda)$ の形の開集合全体である．したがって，各 $V_\lambda$ について，以下のような条件を満たす $R_\lambda$ の部分集合 $F_\lambda$ が取れる．

$$V_\lambda = \bigcup_{f \in F_\lambda} D(f).$$

まとめると，

$$U = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \bigcup_{f \in F_\lambda} D(f).$$

$f \in R_\lambda$ であるとき，$D(f) \subseteq U_\lambda = \operatorname{Spec} R_\lambda$ と Ex2.1 より $(D(f), \mathcal{O}_{U_\lambda}|_{D(f)})$ は affine．よって $U$ は affine scheme で被覆される．（$\mathcal{O}_U := \mathcal{O}_X|_U$ に注意.）

## Ex2.3 Reduced Schemes.

scheme $(X, \mathcal{O}_X)$ が reduced とは，任意の開集合 $U \subseteq X$ について $\mathcal{O}_X(U)$ がベキ零元を持たない，すなわち $\mathcal{O}_X(U)$ が reduced ring である，ということ．$(X, \mathcal{O}_X)$ の reduced scheme $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ を，presheaf $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)/\operatorname{Nil}(\mathcal{O}_X(U))$ の sheafification とする．この $X$ から得られた reduced scheme を $X_{\mathrm{red}}$ と書く．

### (a) $(X, \mathcal{O}_X)$ :: reduced $\iff$ $^\forall P \in X,\quad \mathcal{O}_{X,P}$ :: reduced.

両者の対偶を示す．

■( $\Longleftarrow$ )　$U$ :: open in $X, s \in \mathcal{O}_X(U), s \neq 0$ とする．$s$ が nilpotent であったと仮定すると，$s^n = 0$ となる $n \in \mathbb{N}$ が存在する．$s \neq 0$ から，ある点 $P \in U$ においては $s(P) \neq 0$．しかし $s^n(P) = 0 = (s(P))^n$ なので，$s(P) \in \mathcal{O}_{X,P}$ は nilpotent.

■( $\Longrightarrow$ ).　ある点 $P$ において，$a/f \in \mathcal{O}_{X,P} \cong A_{\mathfrak{p}_P}$ が nilpotent であったとする．この時，$P$ の開近傍 $D(f)$ 上で定義される定値写像 $c(*) = a/f$ が取れる．明らかにこの写像は $\mathcal{O}_X(D(f))$ の元で，しかも nilpotent.

### (b) $(X, (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}})$ :: scheme.

$(X, \mathcal{O}_X)$ が affine scheme だと仮定して証明する．調べる必要があるのは，$(\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}$ は sheaf of ring on $\operatorname{Spec} A$ であること，すなわち以下が成り立つことである．

$$^\forall U :: \text{open in } X,\quad ^\forall s \in (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}(U),\quad ^\forall \mathfrak{P} \in X,\quad P \in {}^\exists V \subseteq U ^\forall \mathfrak{q} \in V,\quad s(Q) \in A_{\mathfrak{q}}.$$

$s \in (\mathcal{O}_X)_{\mathrm{red}}(U)$ を任意に取る．sheafification のやり方から，点 $P$ の十分小さな開近傍 $V$ について $s \in \mathcal{O}_X(U)/\operatorname{Nil}(\mathcal{O}_X(U))$ と言える（正確には presheaf を sheaf に埋め込む射が必要）.（TODO）

### (c) If $X$ :: reduced scheme, then $X \to Y$ is uniquely factored into $X \to Y_{\mathsf{red}} \to Y$.

## Ex2.4 Functor $\Gamma$ and Affine Schemes.

$A$ :: ring, $X$ :: scheme とする．写像 $\alpha$ を以下で定める．

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}}(X, SpecA) & \to & \operatorname{Hom}_{\mathbf{Rings}}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \\ & (f, f^\#) & \mapsto & f^\#_{\operatorname{Spec} A}. \end{array}$$

これが bijective であることを示す．

■Definition of $\beta : \operatorname{Hom}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X)) \to \operatorname{Hom}(X, SpecA)$.　$X$ の open affine cover を $\{U_i\}_{i \in I}$ とおく．また，$B_i$ :: ring を

$$(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \equiv (\operatorname{Spec} B_i, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B_i})$$

となるものとして定める．この時，写像 $\beta$ を次のように定める．$\phi \in \operatorname{Hom}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ とすると，

$$\phi_i := \operatorname{res}^{U_i}_X \circ \phi : A \to \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) = B_i$$

が得られる．ここから誘導される morphism of schemes $(f_i, f_i^{\#}) : U_i \to \operatorname{Spec} A$ を用いて，$(f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$ を

$$f(x) = x \in U_i \text{ となる } i \text{ について } f_i(x); f_U^{\#}(s) = s \circ f$$

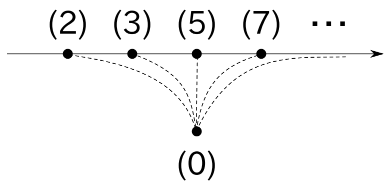
とおく．ここまでの $\phi$ から $(f, f^{\#})$ を得る操作を，まとめて $\beta$ とおく．

■$\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$.

■$\alpha \circ \beta = \mathrm{id}$.

## Ex2.5　$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ is the Final Object in $\mathbf{Sch}$.

$\mathbb{Z}$ は次元 1 の環だから，$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ は以下の図のようになる．




任意の環 $R$ について，homomorphism $\phi : \mathbb{Z} \to R$ を考える．準同型だから $\phi(0) = o, \phi(1) = e, \phi(-1) = -e$（ただし $o, e$ はそれぞれ $R$ の加法/乗法単位元．）となる．そして $\mathbb{Z}$ は無限巡回群だから，$\phi(n-m) = \sum_{i=1}^n e + \sum_{i=1}^m (-e)$ となり，よって準同型 $\mathbb{Z} \to R$ はただひとつ．つまり $|\operatorname{Hom}(\mathbb{Z}, R)| = 1$. $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ は affine space だから，Ex2.4 より，任意の scheme $X$ について $|\operatorname{Hom}(X, \operatorname{Spec} \mathbb{Z})| = 1$．すなわち，$\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ は $\mathbf{Sch}$ の final object となる．

## Ex2.6　$\operatorname{Spec}\{0\}$ is the Initial Object in $\mathbf{Sch}$.

零環 $\{0\}$ はただひとつのイデアル（したがって素イデアル）$(0)$ を持つから，$\operatorname{Spec}\{0\}$ は 1 点集合．零環から別の環への準同型写像は $0 \mapsto 0$ なるものしか無い．scheme の間の射は環の間の準同型から作られるものしかないから（Prop2.3c），$\operatorname{Spec}\{0\}$ から別の scheme への射は $0 \mapsto 0$ から得られるものしか無い．よって $\operatorname{Spec}\{0\}$ は initial object.

## Ex2.7　Residue Field.

Residue field of $x$ on $X$ とは，剰余体 $k(x) := \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x}$ のことである．

$K$ :: field, $O := (0) \subset K$ とする．すると $\operatorname{Spec} K = \{O\}$ であり，開集合は $\emptyset, \operatorname{Spec} K = \{O\}$ の二つのみ．したがって $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} K) = K$ となる．$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O}$ は $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(\operatorname{Spec} K)$ のみからなる direct system の direct limit だから，これらは厳密に等しい．

■$(f, f^{\#}) \to (x, \phi)$　$(f, f^{\#}) : (\operatorname{Spec} K, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}) \to (X, \mathcal{O}_X)$ を考えよう．$f : \operatorname{Spec} K \to X$ は，$\operatorname{Spec} K$ が 1 点空間であることから，$f(O)$ の値のみで定まる．この値を $x := f(O)$ としておこう．$f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}$ は

$$f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(U) = \begin{cases} K & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases}$$

で定まる．これは $K$ の skyscraper sheaf (Ex.1.17) である．すると，$f^{\#} : \mathcal{O}_X \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}$ は

$$(f^{\#})_x : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, f^{-1}(x)} = \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O} = K$$

を誘導する[†1]．これは以下の図式を可換にする射である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "(f^\#)_x"] & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K, O} \arrow[d, equal] \\ \mathcal{O}_X(U) \arrow[u, "\mu_U"] \arrow[r, "(f^\#)_U"] & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K}(\{O\}) \end{tikzcd}$$

ただしこの図式では $x \in U \subseteq X$．$\mathrm{im}(f^\#)_x \subseteq K$ は体だから，第一同型定理より，$\ker(f^\#)_x$ は極大イデアル．よって $(f^\#)_x$ は

$$\mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} = k(x) \xrightarrow{\phi} K$$

へと分解される．こうして $(f, f^\#)$ から $x \in X$ と $\phi_f : k(x) \to K$ が得られた．

■$(x, \phi) \to (f, f^\#)$　逆に $x \in X$ と $\phi : k(x) \to K$ から $(f, f^\#)$ を作る．これには以上の手順を逆にたどればよい．まず $f$ は以下のものになる．

$$\begin{array}{cccc} f: & \operatorname{Spec} K & \to & X \\ & O & \mapsto & x \end{array}$$

$\phi : k(x) \to K$ から $f^\#$ を復元するには，以下のようにする．

$$\begin{array}{cccc} f^\#_U: & \mathcal{O}_X(U) & \to & (f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K})(U) \\ & s & \mapsto & \begin{cases} \Phi_U(s) & (x \in U) \\ 0 & (x \notin U) \end{cases} \end{array}$$

ここでの $\Phi_U$ (with $x \in U$) は，以下のような写像の結合である．

$$\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \varinjlim_{x \in V} \mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_{X,x} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_{X,x} = k(x) \xrightarrow{\phi} K = (f_*\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} K})(U)$$

$f^\#$ から $\phi$ を作った時，$\phi$ から再び $f^\#$ に戻ることは，前段落で見た二つの図式から分かる．

## Ex2.8　$\mathrm{Hom}(\operatorname{Spec} k[\epsilon]/(\epsilon^2), X) \cong \mathrm{Rat}(X) \times T_x X$.

## Ex2.9　Uniquely-Existence of Generic Point.

　$X$ を scheme とし，$Z$ をその nonempty irreducible closed subset とする．この時，$Z$ がただひとつの generic point を持つことを示す．

■Affine Case.　affine scheme $\operatorname{Spec} A$ の irreducible closed subset $C$ を考えよう．これは $\{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}\}$ のように表される素イデアルの集合である．Ati-Mac Exc1.8 [†2] から，$C$ は包含関係に関しての極小元を持つ．この極小元全体を $G$ とおくと，これは 1 点からなる．これを示すため，$G$ が 2 点以上からなると仮定しよう．すると $G$ は空でない二つの真の部分集合の和 $G = G_0 \cup G_1$ として書くことが出来る．すると $G, G_0, G_1$ の定義から

$$\mathrm{cl}_C(G_0), \mathrm{cl}_C(G_1) \subsetneq C \text{ and } \mathrm{cl}_C(G) = C.$$

[†1] $(f_*\mathcal{O})_P = \mathcal{O}_{f^{-1}(P)}$ を使った．

[†2] これは以下のように解く．$C$ の全順序部分集合 $\Gamma$ を考え，$\gamma = \bigcap \Gamma$ とする．$\gamma \in C$ を示せば良い．非自明な部分は $\gamma \in \operatorname{Spec} A$ のみ．$x, y \in A$ について $x, y \notin \gamma$ であったと仮定しよう．すると $x \notin \mathfrak{p}, y \notin \mathfrak{q}$ となる $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \Gamma$ が存在する．$\Gamma$ は全順序なので，$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ と仮定できる．すると $x, y \notin \mathfrak{p}$．$\mathfrak{p}$ は素イデアルなので $xy \notin \mathfrak{p}$ が得られる．よって $x, y \notin \gamma$ ならば $xy \notin \gamma$.

閉包に関する general topology の結果から

$$C = \mathrm{cl}_C(G) = \mathrm{cl}_C(G_0 \cup G_1) = \mathrm{cl}_C(G_0) \cup \mathrm{cl}_C(G_1) = C.$$

こうして $C$ は空でない真の閉部分集合の和で書けることがわかった．これは $C$ は irreducible であることに反する．よって背理法により $G$ が 1 点集合であることがわかった．これは $C$ がただ 1 つの generic point を持つことを意味する．

■Useful Fact (!). 一般に，$D \subset X$ が $X$ の dense subset ならば，$X \setminus D$ は空集合の他に開集合を含まない．これは直ちに理解できるが重要なので記しておく．

■General Case. affine open subset $U \subseteq X$ であって，$U \cap Z \neq \emptyset$ であるものをとる．この時，$U \cap Z$ ( :: closed in $U$) は affine scheme の closed subset だから，前段落より，必ず generic point $\zeta$ を持つ．この $\zeta$ は $Z$ の generic point でもある．このことを示すために，$\{\zeta\}$ が $Z$ で dense でないとしよう．すると $Z \setminus \{\zeta\}$ は $V(\neq \emptyset)$ :: open in $Z$ を含む．$Z$ は irreducible だから $V \cap U \neq \emptyset$．今 $\zeta$ は $Z \cap U$ の generic point としたから，$(U \cap Z) \setminus \{\zeta\} = U \cap (Z \setminus \{\zeta\})$ は $U \cap Z$ の開集合を含まない．しかし今

$$V \subseteq Z \setminus \{\zeta\} \text{ であり，} \quad \emptyset \neq U \cap V \subseteq U \cap (Z \setminus \{\zeta\}).$$

これは $\zeta$ が $U \cap Z$ の generic point で無いことを意味し，$\zeta$ のとり方に反する．よって $\zeta \in U \cap Z$ は $Z$ の generic point である．また，$\zeta$ の他に generic point $\zeta'$ が存在したとしよう．$\zeta' \notin Z \cap U$ であれば $Z \setminus \{\zeta'\}$ は空でない開集合 $Z \cap U$ を含むことになるので，$\zeta, \zeta' \in Z \cap U$．前段落の結果より，$\zeta = \zeta'$ が得られる．

## Ex2.10 $\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]$

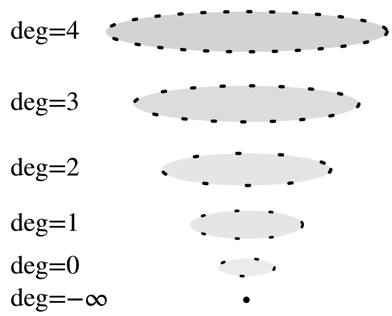
$\operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]$ の元は，既約多項式または 0 が生成する単項イデアルである．$\mathbb{R}[x]$ の既約多項式は，一次式または二次式に限られる（代数学の基本定理の初期バージョン）．したがって $\mathbb{R}[x]$ の既約多項式は

$$\mathbb{C}_{\Im \geq 0} = \{x + iy \mid y \geq 0\}$$

の元と一対一に対応する．

## Ex2.11 $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[x]$

図を書くと次のようになる．この円錐は上へ限りなく続く．



## Ex2.12 Gluing Lemma.

## Ex2.13 Quasi-Compact/Noetherian Space.

### (a) Noethrian $\iff$ Every Open Subset is Quasi-Compact.

■($\Longrightarrow$). Ch.I, Ex1.7 ですべて示した.

■($\Longleftarrow$). 可算開集合族 $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ が昇鎖 $U_0 \subseteq U_1 \subseteq \dots$ をなすとしよう．$U=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ とすると，$\mathfrak{U}$ は $U$ の open cover である．なので仮定より finite sub-cover $\mathfrak{U}_{fin}$ が存在する．$\mathfrak{U}$ は昇鎖なので，$\mathfrak{U}_{fin}$ も有限昇鎖をなす．その有限昇鎖の中でもっとも大きい物をとれば，それは $U$ と一致する．これで主張が示せた．

### (b)

$X=\operatorname{Spec} A$ とする．以下を示す: $X$ の開集合 $U$ が quasi-compact $\iff$ $U$ は基本開集合 $D(f)$ の有限和で表せる．

■($\Longrightarrow$).

■($\Longleftarrow$).

### (c) $A$ :: Noethrian $\Longrightarrow$ $\operatorname{Spec} A$ :: Noethrian.

### (d) Give Example: $A$ :: Noethrian $\not\Longleftarrow$ $\operatorname{Spec} A$ :: Noethrian.

$x_1, x_2, \dots$ を不定元とし，$A=\mathbb{Z}[x_1,x_2,\dots]/(x_1,x_2,\dots)^2$ を考える．$x_i$ の $R$ における像を $e_i$ とすると，任意の $i,j$ について $e_ie_j=0$．イデアル $(e_1,e_2,\dots)$ は有限生成でないから，この環は Noethrian ring でない．$\operatorname{Spec} A$ が Noethrian であることを示そう．実は，$\operatorname{Spec} A$ の任意の開集合は基本開集合 $D(f)$ の形に書ける．$V(\mathfrak{a})=V(\sqrt{\mathfrak{a}})$ だから，任意のイデアル $\mathfrak{a}\subset A$ について，$\sqrt{(f)}=\sqrt{\mathfrak{a}}$ となる元 $f\in A$ が存在することを示せば良い．

$A$ の元は，$e_ie_j=0$ より，$1, e_1, e_2, \dots$ の有限線形和で表される．$\mathfrak{a}$ の元 $a$ をとると，これは定義より生成元の有限線形和．なので結局，以下のように表される．

$$a = c_0 + c_1e_1 + \cdots + c_re_r \text{ where } r\in\mathbb{N}, \{c_i\}_{i=0}^r \subseteq \mathbb{Z}.$$

$n>0$ について $a^n$ は，

$$a^n = c_0^n + nc_0^{n-1}(c_1e_1+\cdots+c_re_r).$$

## Ex2.14 $\operatorname{Proj} S$

## Ex2.15 The Fuctor $t$.

## Ex2.16 $X_f$.

$X$ :: scheme, $f\in\Gamma(X,\mathcal{O}_X)=:A$ について，$X_f$ を次のように定める．

$$x\in X_f \iff f_x \text{ :: unit in } \mathcal{O}_{X,x}.$$

## (a) For $X \supseteq U = \operatorname{Spec} B$, $X_f \cap U = D(\bar{f})$.

$U \subseteq X$ を open affine subscheme とし，$U = \operatorname{Spec} B$ とする．さらに $\bar{f}$ で $f|_U \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X|_U) = B$ を表す．この時，以下が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
& x \in X_f \cap U \\
\iff & [f_x :: \text{unit in } \mathcal{O}_{X,x}] \wedge [x \in U] \\
\iff & \bar{f}_x = \frac{\bar{f}}{1} :: \text{unit in } B_{\mathfrak{p}_x} \\
\iff & \bar{f} \notin \mathfrak{p}_x \\
\iff & x \in D(\bar{f})
\end{aligned}
$$

ただし $\mathfrak{p}_x \subseteq B$ は点 $x$ に対応する素イデアル．よって $X_f \cap U = D(\bar{f})$.

$U$ :: open in $X$ かつ $X_f \cap U = D(\bar{f})$ :: open in $U$ なので，$X_f \cap U$ :: in $X$．$X$ の open affine cover を考えれば，$X_f$ :: open in $X$ が分かる．

## (b) For $a \in A$，If $X$ :: quasi-compact and $a|_{X_f} = 0$ then $^\exists n > 0, \quad f^n a = 0$.

$\{U_i\}_{i \in I}$ を $X$ の open affine cover とする．$X$ :: quasi-compact という仮定から，$I$ は有限であると仮定して構わない．また，$U_i = \operatorname{Spec} B_i$ とする．

$a \in A$ をとり，$a|_{X_f} = 0$ であるとする．すると任意の $i$ について $a|_{U_i} = 0 (= 0/1)$，$a|_{U_i} \in B_i$．前 section から $X_f \cap U = D(f|_{U_i})$ なので，以下が成り立つ[†3]．

$$
^\forall i \in I, \quad ^\exists n_i > 0, \quad (f|_{U_i})^{n_i} (a|_{U_i} \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (f^{n_i} a)|_{U_i} = 0.
$$

$I$ は有限だから，$n = \max_{i \in I} n_i$ が存在する．明らかに任意の $i$ について $(f^n a)|_{U_i} = 0$ だから，Identity Axiom により $f^n a = 0$ in $A$.

## (c) Under Some Assumption, $^\forall b \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f}), \quad ^\exists n > 0, \quad ^\exists a \in A, \quad f^n b = a|_{X_f}$.

$X$ は finite affine open cover $\{U_i\}_{i=1}^r$ を持ち，任意の $i, j$ について $U_i \cap U_j$ :: quasi-compact であるとする．$U_i = \operatorname{Spec} B_i$ とする．（次の問題 (d) でも $X$ にこの仮定を置く）

(a) より $U_i \cap X_f = D(f|_{U_i})$, かつ Prop2.2 より $\mathcal{O}_{U_i}(D(f|_{U_i})) = (B_i)_{f|_{U_i}}$．なので $b|_{D(f|_{U_i})} \in (B_i)_{f|_{U_i}}$ について以下が成り立つ．ただし $f_i = f|_{U_i}$ とした．

$$
^\exists m_i > 0, \quad ^\exists b_i \in B_i, \quad (f^{m_i} b)|_{D(f_i)} = b_i|_{D(f_i)}.
$$

$m = \max_i m_i$ とすれば以下のようにまとめられる．

$$
^\exists a_i \in B_i, \quad (f^m b)|_{D(f_i)} = a_i|_{D(f_i)}.
$$

次に $a_i \in B_i = \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ を貼りあわせる．そのために (b) を，$X = U_i \cap U_i$ として利用しよう．$X_{ij} = U_i \cap U_j, f_{ij} = f|_{U_i \cap U_j} \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_{ij}})$ とおく．すると $(X_{ij})_{f_{ij}} = X_f \cap X_{ij}$ となる．$a_i - a_j \in \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_ij})$ を $(X_{ij})_{f_{ij}} \subset D(f_i)$ に制限すると 0 になるから，(b) より，以下が成り立つ．

$$
^\exists n_{ij} > 0, \quad (f_{ij})^{n_{ij}} (a_i - a_j) = 0.
$$

[†3] 商環の等号の定義からは $n_i \geq 0$ であるが，$n_i > 0$ としても問題ない．

これをすべての組 $(i,j)$ について考えれば，以下が得られる．

$$^{\exists}n>0,\quad (f^n a_i)|_{U_{ij}} = (f^n a_j)|_{U_{ij}} \text{ in } \Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_ij}).$$

よって Gluability Axiom により，$(f^n a)|_{U_i} = f^n a_i$ となる $a \in A$ がある．

もとの $f^m b$ へ戻ると，今以下が成り立つ．

$$(f^{m+n}b)|_{D(f_i)} = (f^n a)|_{D(f_i)}.$$

Identity Axiom により，$f^{m+n}b = (f^n a)|_{X_f}$．

### (d) $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f}) = A_f$.

(c) から，以下が成り立つ．

$$^{\forall}b \in \Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f}),\quad ^{\exists}a \in A,\quad ^{\exists}n>0,\quad b = \frac{a}{f^n}.$$

よって $\Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f}) \subseteq A_f$．$\supseteq$ は明らかなので，$\Gamma(X_f, \mathcal{O}_{X_f}) \subseteq A_f$．

## Ex2.17 A Criterion for Affineness.

### (a) $f|_{f^{-1}(U_i)}$ :: iso $\implies f$ :: iso.

$f: X \to Y$ :: morphism of schemes について，open cover $\{U_i\}$ が存在し，各 $i$ について $f_i := f|_{f^{U_i}} : f^{-1}(U_i) \to U_i$ が iso であったとする．この時 $f$ :: iso を示す．$V_i = \{f^{-1}(U_i)\}$ としておく．これは $X$ を被覆する．

$$f_i|_{V_i \cap V_j} = (f|_{V_i})|_{V_i \cap V_j} = (f|_{V_j})|_{V_i \cap V_j} = f_i|_{V_i \cap V_j}$$

なので，$f$ は $f_i$ 達の張り合わせとして矛盾なく書くことが出来る．つまり，「$f(x) = f_i(x)$（ここでの $i$ は $x \in V_i$ を満たすもの）」と書くことが出来る．さらに $V, U$ :: open in $X, Y$ について，以下が成り立つ．

$$f(V) = f\left(\bigcup (V \cap V_i)\right) = \bigcup f(V \cap V_i);\quad f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup (U \cap U_i)\right) = \bigcup f^{-1}(U \cap U_i).$$

$f_i$:: homeo からこの二つは開集合．よって $f$ :: homeo.

$f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ も次のように $f_i^{\#}$ で書ける．

$$\mathcal{O}_Y(U) \to f_*\mathcal{O}_Y(U):\ s \longmapsto \bigoplus (s|_{U \cap U_i}) \xmapsto{\bigoplus (f_i^{\#})_{U \cap U_i}} \bigoplus (f_i^{\#})_{U \cap U_i}(s|_{U \cap U_i}) = \bigoplus t_i \longmapsto t$$

$(f_i^{\#})_{U \cap U_i}$ が iso なのでこの写像は iso.

### (b) For scheme $X$, $X$ :: affine $\iff$ ....

$X$ :: scheme を考える．$A := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ とする．以下を条件 (*) と呼ぶ．

$$^{\exists}f_1, \ldots, f_r \in A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X),\quad [^{\forall}i = 1, \ldots, r,\quad X_{f_i} :: \text{affine}] \wedge [(f_1, \ldots, f_r) = (1) = A.]$$

$X$ :: affine $\iff$ (*)，ということを示す．Affine scheme は quasi-compact である (Ex2.13b)，ということを何度も使う．

■ $\Longrightarrow$． この時 $X = \operatorname{Spec} A$ である．主張の成立は自明．

■ $\Longleftarrow$． 核心となるのは，$\{X_{f_i}\}$ が Ex2.16c で $\{U_i\}$ に課せられている条件を満たす，ということ．$X = \bigcup X_{f_i}$ は

$$\left(\bigcup X_{f_i}\right)^c = \left(\bigcap \{x \mid (f_i)_x \in \mathfrak{m}_{X,x} \subset \mathcal{O}_{X,x}\}\right)^c$$

と $(f_1, \ldots, f_r) = (1)$ から得られる．$X_{f_i} \cap X_{f_j}$ ::quasi-compact は，$X_{f_i} = \operatorname{Spec} F_i$ とすると，

$$X_{f_i} \cap X_{f_j} = D(f_j|_{X_{f_i}}) = \operatorname{Spec}(F_i)_{f_j}$$

は affine scheme だから quasi-compact．以上から Ex2.16d, Ex2.4, Ex2.17a が全部使えて，この順に使えば $X = \operatorname{Spec} A$ が示せる．

## Ex2.18 Ring Homomorphism vs. the Induced Morphism of the Spectra.

## Ex2.19 $\operatorname{Spec} A$ :: disconnected $\Longleftrightarrow$ ....