ゼミノート #8
Algebraic-ness of Spaces and Stacks

七条彰紀

2019 年 1 月 16 日

目次

affine scheme, scheme. algebraic space, algebraic stack という貼り合わせの連なりを意識した定義をした後，algebraic stack が scheme の貼り合わせとして定義できることを示す．algebraic space と algebraic stack の定義は全く平行に行われる．そのことが分かりやすい記述を志向する．

1 Fiber Product

命題 1.1
任意の site :: $\mathbf{C}$ について，$\mathbf{C}$ 上の sheaf の圏 $\mathbf{Shv}(\mathbf{C})$ は fiber poduct を持つ．

(証明). 二つの射 $\mathcal{F} \to \mathcal{H}, \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ をとる．

$$\mathbf{C} \ni U \mapsto \mathcal{F}(U) \times_{\mathcal{H}(U)} \mathcal{G}(U)$$

とすれば，これは fiber product となる． ∎

$\mathbf{B}$ :: category とする．この時，$\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ は以下のような圏であった．

Objects: fibered categories over $\mathbf{B}$.

Arrows: base-preserving natural transtormation.

新たに圏 $\mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ を以下のように定義する．

Objects: categories fibered in groupoids(CFG) over $\mathbf{B}$.

Arrows: base-preserving natural transtormation.

重要なのは次の存在命題である．

命題 1.2 ([3] p.10)
任意の圏 $\mathbf{C}$ について，$\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ と $\mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ は fibered product を持つ．

(証明). $\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ の射 $F\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Z}$ と $F\colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{Z}$ をとり，F, G の fiber product を実際に構成する．

■圏 P の構成　圏 $\mathbf{P}$ を以下のように定義する．

Objects: 以下の 4 つ組

(i) $b \in \mathbf{B}$,

(ii) $x \in \mathfrak{X}(b)$,

(iii) $y \in \mathfrak{Y}(b)$,

(iv) $\mathfrak{Z}$ の恒等射上の同型射 $\alpha\colon Fx \to Gy$.

Arrows:

射 $(b, x, y, \alpha) \to (b', x', y', \alpha')$ は，二つの射 $\phi_{\mathfrak{X}}\colon x \to x', \phi_{\mathfrak{Y}}\colon y \to y'$ であって以下を満たすもの: $\phi_{\mathfrak{X}}, \phi_{\mathfrak{Y}}$ は同じ射 $b' \to b$ 上の射で，以下の可換図式を満たすもの．

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F\phi_{\mathfrak{X}}"'] & Gy \arrow[d, "G\phi_{\mathfrak{Y}}"] \\ Fx' \arrow[r, "\alpha'"'] & Gy' \end{tikzcd}$$

■Cartesian Lifting in P.　この圏は $\pi\colon (b, x, y, \alpha) \mapsto b$ によって fibered category と成る．$f\colon b' \to b$ の $\xi = (b, x, y, \alpha)$ に関する Cartesian Lifting :: $f^*\xi \to \xi$ は次のように定義される．

$$\chi_\xi = (f^*x \xrightarrow{\chi_x} x, f^*y \xrightarrow{\chi_y} y)\colon f^*\xi = (b', f^*x, f^*y, \bar{\alpha}) \to \xi.$$

ここで $\chi_x\colon f^*x \to x$ は f の x に関する Cartesian Lifting である．χ_y も同様．さらに $\bar{\alpha}$ は以下の Triangle Lifting で得られる射である[†1]．

[†1] $f^*\alpha\colon f^*Fx \to f^*Gy$ とは異なる．同型 $Ff^*x \to F^*Fx, Gf^*y \to f^*Gy$ と $f^*\alpha\colon Fx \to Gy$ を合成しても $\bar{\alpha}$ は得られる．

in $\mathscr{Z}$

$$
\begin{tikzcd}
F f^* x \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "F\chi_x"'] & G f^* y \arrow[d, "G\chi_y"] \\
Fx \arrow[r, "\alpha"'] & Gy
\end{tikzcd}
$$

$$\Big\downarrow \pi_{\mathscr{Z}}$$

$$
\begin{tikzcd}
b' \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "f"'] & b' \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, "\mathrm{id}"] & b
\end{tikzcd}
$$

in $\mathbf{B}$

fibered category の間の射は cartesian arrow を保つので $F\chi_x, G\chi_y$ も cartesian．したがって Triangle Lifting が出来る．$\bar{\alpha}$ が同型であることは Triangle Lifting の一意性を用いて容易に証明できる．また，この可換図式から χ_ξ が $\mathbf{P}$ の射であることも分かる．

■$\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Z}$ が category fibered in groupoids(CFG) ならば P も CFG　$\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Z}$ が CFG ならば $\mathbf{P}$ も CFG となる．実際，$\phi_{\mathscr{X}} \colon x \to x'$ と $\phi_{\mathscr{Y}} \colon y \to y'$ の両方が cartesian ならば $(\phi_{\mathscr{X}}, \phi_{\mathscr{Y}}) \colon (b, x, y, \alpha) \to (b', x', y', \alpha')$ は cartesian である．

■P からの射影写像．　定義から明らかに $\mathrm{pr}_1 \colon \mathbf{P} \to \mathscr{X}, \mathrm{pr}_2 \colon \mathbf{P} \to \mathscr{Y}$ が定義できる．射の定義にある可換図式は，以下の A が natural transformation であることを意味している．

$$
\begin{array}{rccc}
A\colon & F\,\mathrm{pr}_1 & \to & G\,\mathrm{pr}_2 \\
 & (F\,\mathrm{pr}_1)((b,x,y,\alpha)) = Fx & \mapsto & \alpha(Fx) = \alpha((F\,\mathrm{pr}_1)((b,x,y,\alpha)))
\end{array}
$$

A が base-preserving であることは α が恒等射上のもの (i.e. $\pi_{\mathscr{Z}}(\alpha) = \mathrm{id}$) であることから，isomorphism であることは α が同型であることから示される．

■P :: fiber product．　今，$\mathscr{W} \in \mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ と射 $S \colon \mathscr{W} \to \mathscr{X}, T \colon \mathscr{W} \to \mathscr{Y}$ 及び base-preserving isomorphism :: $\delta \colon FS \to GT$ をとる．base-preserving なので，任意の $w \in \mathscr{W}$ について $\pi_{\mathscr{Z}}(FS(w)) = \pi_{\mathscr{Z}}(GT(w))$．そこで次のように関手が定義できる．

$$
\begin{array}{lccc}
H\colon & \mathscr{W} & \to & \mathbf{P} \\
\textbf{Object} & w & \mapsto & (\pi_{\mathscr{Z}}(FS(w)), Sw, Tw, \delta_w) \\
\textbf{Arrow} & [\phi \colon w \to w'] & \mapsto & (S\phi \colon Sw \to Sw', T\phi \colon Tw \to Tw')
\end{array}
$$

このように置くと，$S = \mathrm{pr}_1 H, T = \mathrm{pr}_2 H$ となる．逆に $S \cong \mathrm{pr}_1 H', T \cong \mathrm{pr}_2 H'$ となる関手 $H' \colon \mathscr{W} \to \mathbf{P}$ は H と同型に成ることが直ちに分かる． ∎

注意 1.3

session4 命題 4.5 より，CFG の恒等射上の射は同型射である．したがって $\alpha \colon Fx \to Gy$ に課せられた条件は，$\mathscr{Z}$ が CFG ならば一つしか無い．

例 1.4
representable fibered category の fiber product.

sheaf に対応する fibered category の fiber product $\int \mathcal{F} \times_{\int \mathcal{H}} \int \mathcal{G}$ に対応する sheaf は，sheaf の fiber product に対応する．

$$\left(\int \mathcal{F} \times_{\int \mathcal{H}} \int \mathcal{G}\right)(-) = \mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} \quad \in \mathbf{Shv}(\mathbf{C})$$

我々が扱うのは stack であるから，stack という性質が fiber product で保たれていて欲しいが，果たしてそうなる．

命題 1.5 ([5] Prop 4.6.4)
$\mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{Z}$ :: stack over $\mathbf{C}$ とし，morphism of stacks :: $F\colon \mathscr{X} \to \mathscr{Z}, G\colon \mathscr{Y} \to \mathscr{Z}$ をとる．この時，F, G についての fiber product :: $\mathscr{X} \times_{\mathscr{Z}} \mathscr{Y}$ は stack である．

したがって結局 $\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B}), \mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ と，stack の圏及び stack in groupoids の圏は fiber product を持つ．我々が実際に扱うのは stack in groupoids である．

(証明). $\mathscr{P} = \mathscr{X} \times_{\mathscr{Z}} \mathscr{Y}$ とおく．$U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i\colon U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ を任意にとり，$\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathscr{P}(U) \to \mathscr{P}(\mathcal{U})$ を計算する．

■$\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$. $\xi = (b, x, y, \alpha)$ をとり，$\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$ を計算する．まず $\{\phi_i^* \xi\}_i$ は既に詳しく説明した．注意が必要なのは同型 $\sigma_{ij}\colon \mathrm{pr}_2^* \phi_i^* \xi \to \mathrm{pr}_1^* \phi_j^* \xi$ である．可換性は以下の図式から分かる．

in $\mathscr{Z}$

$$\begin{tikzcd}
F \,\mathrm{pr}_2^* \phi_j^* x \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "\sigma_{ij}^x"'] & G \,\mathrm{pr}_2^* \phi_j^* y \arrow[d, "\sigma_{ij}^y"] \\
F \,\mathrm{pr}_1^* \phi_i^* x \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] \arrow[d] & G \,\mathrm{pr}_1^* \phi_i^* y \arrow[d] \\
Fx \arrow[r, "\alpha"'] & Gy
\end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi_{\mathscr{Z}}$$

$$\begin{tikzcd}
b' \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & b' \arrow[d, equal] \\
b' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\phi_j \circ \mathrm{pr}_2"'] & b' \arrow[d, "\phi_i \circ \mathrm{pr}_1"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

■$\epsilon_{\mathcal{U}}(\kappa)$. (TODO)

∎

2 Diagonal Map

注意 2.1
以降は S :: scheme をとり，$\mathbf{C} = \mathrm{ET}(S)$ :: big etale site over S 上の sheaf あるいは stack in groupoids のみを考える．

定義 2.2 (Diagonal Map)
sheaf あるいは stack in groupoids over S:: $\mathfrak{X}/S$（すなわち射 $\mathfrak{X} \to S$）の diagonal map :: Δ とは，以下の可換図式に収まる射のことである．

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X} \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathfrak{X} \arrow[d] \\
& \mathfrak{X} \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

3 Local Property of Scheme/Morphism of Them

定義 3.1 ([2] p.100, Local Property for the topology.)
S :: scheme とし，$(\mathbf{Sch}/S)$ 上の site :: $\mathbf{C}$ を考える．X, Y :: scheme とし，$\{\phi_i \colon X_i \to X\} \in \mathrm{Cov}(X), \{\psi_i \colon Y_i \to Y\} \in \mathrm{Cov}(Y)$ を任意に取る．

(i) P を scheme の性質とする．P が local for the topology であるとは，以下が成り立つということ:
X が P であることは，全ての U_i が P であることと同値．

(ii) P を scheme の射の性質とする．P が local on source であるとは，以下が成り立つということ:
$f \colon X \to Y$ が P であることは，全ての $f \circ \phi_i$ が P であることと同値．

(iii) P を scheme の射の性質とする．P が local on target であるとは，以下が成り立つということ:
$f \colon X \to Y$ が P であることは，全ての $\mathrm{pr}_2 \colon X \times_Y Y_i \to Y_i$ が P であることと同値．

(iv) ([5] 5.1.3) P を scheme の射の性質とする．以下が全て成り立つ時，P は stable であると呼ばれる．
- 任意の同型は P.
- P は，射の合成で保たれれる．
- P は，任意の $\mathbf{C}$ の射による base change で保たれれる．
- local on target.

(v) ([4] p.33, [3] p.16) P を scheme の射の性質とする．以下が全て成り立つ時，P は smooth (resp. etale) local on source and target であると呼ばれる．: $X' \to Y' \times X, Y' \to Y$ が smooth (resp. etale) surjective であるような，次の形の任意の可換図式をとる．

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & Y' \times X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

この時，f が P であることは f' が P であることと同値．

例 3.2 ([6] Tag 0238)
etale topology での定義を挙げる．

local for the topology である性質の例
: locally Noetherian, reduced, normal, regular.

local on source である性質の例
: flat, locally of finite presentation, locally of finite type, open, smooth, etale, unramified, locally quasi-finite.

local on target である性質の例
: quasi-compact, quasi-separated, universally closed, separated, surjective, locally of finite type, locally of finite presentation, proper, smooth, etale, unramified, flat.

local on source and target である性質の例
: flat, locally of finite presentation, locally finite type, smooth, etale, unramified...

注意 3.3
“local on source and target”は，algebraic space, algebraic stack の射について性質を定めるときに必要に成る．この定義は文献に寄って数種類ある．私が知る限りのものを以下に列挙する．

SP
: [6] Tag 04QZ.

DM
: X, Y を scheme とし，$\{\phi_i\colon X_i \to X\} \in \mathrm{Cov}(X), \{\psi_i\colon Y_i \to Y\} \in \mathrm{Cov}(Y)$ を任意の cover とする．$\{f_i\colon X_i \to Y_i\}$ を以下の可換図式を満たす射の族とする．

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\phi_i} & X \\ {\scriptstyle f_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y_i & \xrightarrow[\psi_i]{} & Y \end{array}$$

この時，射 f が P であることと，全ての射 f_i が P であることは同値．[2], p.100 より．

DM’
: 以下の scheme の可換図式が成立しているとする．

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

ただし $X' \to X, Y' \to Y$ は cover である．この時，射 f が P であることと，射 f' が P であることは同値．[6] Tag 04R4 で Deligne-Mumford の定義として参照されている．

ST
: local on source かつ local on target.

ST+
: 次の 5 条件を合わせたもの．
- 同型について成立する，

- stable under composition,
- stable under base change,
- local on source,
- local on target.

[5] Def 5.1.3, 5.4.11 で採用されている．

La

X, Y :: scheme とし，射 $Y' \to Y, X' \to Y' \times X$ を cover とする．この時，$f\colon X \to Y$ と合わせると次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & Y' \times X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

この時，f が P であることは f' が P であることと同値．[4] p.33, [3] p.16 で採用されている．

La'

X, Y :: scheme とし，射 $Y' \to Y, X' \to X$ を cover とする．この時，$f\colon X \to Y$ と合わせると次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} X' \times_Y Y' \arrow[rr] \arrow[d, "f'"'] \arrow[drr, phantom, "\text{p.b.}"] & & Y' \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

この時，f が P であることは f' が P であることと同値．

強弱関係は次の通り．

$$\begin{tikzcd} ST+ \arrow[r, Rightarrow] & SP \arrow[r, Rightarrow] & DM \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & DM' \arrow[r, Rightarrow] & La \arrow[r, Rightarrow] & La' \\ & & & ST \arrow[u, Rightarrow] & & \end{tikzcd}$$

SP $\Longrightarrow$ DM $\Longrightarrow$ ST は [6] Tag 04R4 による．SP $\Longrightarrow$ DM $\Longrightarrow$ ST, DM' $\Longrightarrow$ La $\Longrightarrow$ La' のそれぞれの $\Longrightarrow$ は逆が成り立たないことも分かっている．また，DM' と local on target を合わせたものは DM と同値である．

我々としては，「便利な性質」をもち，かつ弱い定義を取りたい．後に示すとおり，La を仮定すれば十分「便利」である．

4 Algebraic Space

4.1 Representable Ones.

定義 4.1 (Representable Space)
stack :: $\mathfrak{X}$ が representable (by scheme) であるとは，ある scheme :: X が存在し，$\mathfrak{X} \cong \underline{X} = \mathbf{Sch}/X$ であるということ．

定義 4.2 (Representable Morphism of Spaces)
morphism of spaces :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が representable (by scheme) であるとは，任意の S-scheme :: U と $\mathbf{C}$ の射 $U \to \mathcal{Y}$ について，fiber product :: $U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ が representable (by scheme) であるということ．

命題 4.3 (Representable Diagonal Morphism)
$\mathscr{F}$ :: stack on $\tau(S)$ 以下は同値である．

(i) $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ は表現可能．

(ii) 任意の scheme :: U と射 $U \to \mathcal{X}$ について，$U \to \mathfrak{X}$ :: representable.

(iii) 任意の scheme :: U, V と射 $u\colon U \to \mathcal{X}, v\colon V \to \mathcal{X}$ について $U \times_{\mathcal{X}} V$ :: representable.

(証明). (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) は representable morphism の定義から直ちに分かる．(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) は以下が pullback diagram であることから分かる．

$$\begin{tikzcd}
U \times_{\mathcal{X}} V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & U \times_S V \arrow[d, "u \times v"] \\
\mathcal{X} \arrow[r, "\Delta"'] & \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

(TODO: もう少し詳しく．) ∎

定義 4.4 (Property of Representable Spaces/Morphism of Them)

(i) $\mathcal{P}$ を scheme の性質で local for etale topology であるものとする．この時，representable space :: $\mathcal{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathcal{X}$ を represent する scheme が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(ii) $\mathcal{P}$ を morphism of schemes の性質で local on target かつ stable under base change であるものとする．この時，representable morphism of spaces :: $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，任意の $U \in \mathbf{C}$ と射 $U \to \mathcal{Y}$ について，$\mathrm{pr}\colon \mathfrak{X} \times_{\mathcal{Y}} U \to U$ （に対応する morphism of algebraic schemes）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

4.2 Definition of Algebraic Space

定義 4.5 (Algebraic Space)
S :: scheme とし，$\mathcal{X}$ を space over S（すなわち big etale site $\mathrm{Et}(S)$ 上の sheaf）とする．$\mathcal{X}$ が algebraic であるとは，次が成り立つということである．

(i) diagonal morphism :: $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が representable である．

(ii) scheme :: U からの etale surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ が存在する．

Algebraic space の射は space としてのものである．

以下では scheme の性質と scheme の射の性質を algebraic space へ拡張する．

4.3 Properties of Algebraic Space/Morphism of Algebraic Spaces

定義 4.6 (Property of Algebraic Spaces)

(i) $\mathcal{P}$ を scheme の性質であって，local for etale topology であるものとする．この時，algebraic stack :: $\mathcal{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathcal{X}$ のある atlas が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(ii) algebraic stack :: $\mathcal{X}$ が quasi-compact [†2]であるとは，$\mathcal{X}$ のある atlas が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

定義 4.7 (Property of Morphism of Algebraic Spaces)
$\mathcal{P}$ を morphism of scheme の性質であって，local on source and target であるものとする．以下の可換図式で，$V \to \mathcal{Y}, U \to V \times \mathcal{X}$ は cover であるとする．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & V \times \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ & V \arrow[r] & \mathcal{Y} \end{tikzcd} \tag{PM}$$

この時，morphism of algebraic spaces :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，この可換図式にある f'（に対応する morphism of scheme）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

補題 4.8

(a) $\mathcal{X}$ を representable space とし，P を algebraic space の性質とする．f が algebraic space として性質 P を持つことと，representable space として性質 P を持つことは同値．

(b) $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を representable morphism とし，P を algebraic space の射の性質とする．f が algebraic space の射として性質 P を持つことと，representable morphism として性質 P を持つことは同値．

(証明). $\mathcal{X}$ が scheme :: X で表現されるならば $X \to \mathbf{Sch}/X \cong \mathcal{X}$ が atlas なので (a) が成立する．

以下の図式で id: $V \to V$ が etale surjective なので $U \to V \times \mathcal{X}$ も etale surjective である．また representable morphism の性質は，scheme の射の性質として local on target であるものに限っていた．したがって (b) が成立する．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & V \times \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, "\text{id}"'] & V \arrow[r] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

∎

補題 4.9

(a) P を scheme の性質で local for etale topology なものとする．
一つの etale surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ について U が性質 P を持つならば，
任意の etale surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ について U が性質 P を持つ．

(b) P を morphism of scheme の性質であって，local on source and target であるものとする．
一つの $V \to \mathcal{Y}, U \to U \times \mathcal{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つならば，
任意の $V \to \mathcal{Y}, U \to U \times \mathcal{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つ．

(証明). [6] Tag 06FM ∎

[†2] 明らかに，これは local for etale topology ではない．

補題 4.10
P を algebraic space の射の性質とする．

(a) P が scheme の射の性質として stable under base change ならば，algebraic space の射の性質としても stable under base change.

(b) P が scheme の射の性質として stable under composition ならば，algebraic space の射の性質としても stable under composition.

(証明). (a) は [6] Tag 0CII を参考にすれば良い．

(b) を示す．準備として次を示す．

主張 4.11
U :: scheme とする．$f\colon U \to \mathcal{X}, g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が etale, surjective ならば，合成 $g \circ f\colon U \to \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ も etale, surjective である．

(証明). etale, surjective は scheme の射の性質として stable under base change かつ stable under composition であることに注意する．

$V \to \mathcal{Y}, W \to V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ を scheme からの etale surjective (e.s.) 射とする．この時 fiber product を組み合わせて以下の可換図式が得られる．（pullback lemma を暗黙のうちに用いている．）

$$\begin{tikzcd}
W \times_{\mathcal{X}} U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & V \times_{\mathcal{X}} U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & U \arrow[d, "f"] \\
W \arrow[r] \arrow[dr] & V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "g"] \\
 & V \arrow[r] & \mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

この時，以下のように $W \times U \to W \to V$ と $W \times U \to V \times U$ が e.s. であることが示せる．

- $f\colon U \to \mathcal{X}$ :: e.s. かつ representable $\implies W \times U \to W$ :: e.s.
- $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ :: e.s. $\implies W \to V$ :: e.s.
- $W \times U \to W, W \to V$ :: e.s. $\implies W \times U \to W \to V$ :: e.s.
- $W \to V \times \mathcal{X}$ :: e.s. かつ representable $\implies W \times U = W \times (V \times U) \to V \times U$ :: e.s.

etale は local on source な性質なので $V \times U \to V \times X \to V$ も etale. また surjective の圏論的な性質から surjective であることも分かる．この二つから，representable morphism :: $g \circ f\colon U \to \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ は e.s. である． ∎

この主張を用いて (b) を示す．

etale surjective 射 :: $W \to \mathcal{Z}, V \to W \times \mathcal{Y}, U \to V \times \mathcal{X}$ から次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & W \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\
 & V \arrow[r] \arrow[dr, "g'"'] & W \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{Y} \arrow[d, "g"] \\
 & & W \arrow[r] & \mathcal{Z}
\end{tikzcd}$$

定義から g が P であることと g' が P であることは同値．また，主張から $W \to W \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ は etale surjective 射である．したがって再び定義から，f が P であることと f' が P であることは同値．最後に，$U \to V \times \mathcal{X} \to W \times \mathcal{X}$ も etale surjective であるから，$g \circ f$ が P であることと $g' \circ f'$ が P であることは同値である． ∎

5 Algebraic Stack

節 5.2 以外は algebraic space の節にある定義文を

- "Space" $\to$ "Stack",
- "Scheme" $\to$ "Algebraic Space"

と置換しただけで得られるので読み飛ばして構わない．

5.1 Representable Ones

定義 5.1 (#Representable Stack)
stack :: $\mathfrak{X}$ が representable であるとは，ある algebraic space :: $\mathcal{X}$ が存在し，$\mathfrak{X} \cong \mathcal{X} = \int \mathcal{X}$ であるということ．

定義 5.2 (#Representable Morphism of Stacks)
morphism of stacks :: $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ が representable であるとは，任意の S-algebraic space :: U と $\mathbf{C}$ の射 $U \to \mathfrak{Y}$ について，fiber product :: $U \times_{\mathfrak{Y}} \mathfrak{X}$ が representable であるということ．

補題 5.3 (#)
$\mathfrak{X}$ :: stack in groupoids on $\mathbf{C}$ とする．以下は同値である．

(i) $\Delta \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ は表現可能．

(ii) 任意の algebraic space :: U と射 $U \to \mathfrak{X}$ について，$U \to \mathfrak{X}$ :: representable.

(iii) 任意の algebraic space :: U, V と射 $U \to \mathfrak{X}, V \to \mathfrak{X}$ について $U \times_{\mathfrak{X}} V$ :: representable.

定義 5.4 (#Property of Representable Stacks/Morphism of Them)

(i) $\mathcal{P}$ を scheme の性質で local for etale topology であるものとする．この時，representable stack :: $\mathfrak{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathfrak{X}$ を represent する algebraic space が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(ii) $\mathcal{P}$ を morphism of scheme の性質で local on target かつ stable under base change であるものとする．この時，representable morphism of stacks :: $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，任意の $U \in \mathbf{C}$ と射 $U \to \mathfrak{Y}$ について，$\mathrm{pr} \colon \mathfrak{X} \times_{\mathfrak{Y}} U \to U$ （に対応する morphism of algebraic algebraic spaces）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

5.2 Definition of Algebraic Stack

定義 5.5 (Algebraic Stack (Artin Stack))
S :: scheme とし，$\mathfrak{X}$ を stack on $\mathrm{ET}(S)$ とする．$\mathfrak{X}$ が algebraic であるとは，次が成り立つということである．

(a) diagonal morphism :: $\Delta\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ が representable である．

(b) algebraic space :: U からのsmooth surjective morphism :: $U \to \mathfrak{X}$ が存在する．

射は stack in groupoids としての射である．

補題 (5.3) から，二つの条件は意味を成す．

定義 5.6 (#Deligne-Mumford(DM) Stack)
S :: scheme とし，$\mathfrak{X}$ を stack on $\mathrm{ET}(S)$ とする．$\mathfrak{X}$ が algebraic であるとは，次が成り立つということである．

(a) diagonal morphism :: $\Delta\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ が representable である．

(b) algebraic space :: U からのetale surjective morphism :: $U \to \mathfrak{X}$ が存在する．

射は stack in groupoids としての射である．

以下，Algebraic Stack と言った時は DM か Artin かを限定しない．

注意 5.7
我々が採用する algebraic stack の定義は，しばしば Artin stack の定義として参照される．

歴史的には，DM stack の方が先に定義された．これは 1969 年の論文 [2] でのことである．動機は algebraic stack $\bar{\mathcal{M}}_g$ を通して，coarse moduli scheme の性質を調べることだった．しばしば DM stack の定義として $\Delta\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ は quasi-compact かつ separated であるものとする．しかしこれは [2] では要求されて居ない．

一方，Artin stack は 1974 年の論文 [1] で DM stack の一般化として定義された．我々が扱う Algebraic stack の定義（したがって多くの文献での “Artin stack” の定義）は，原論文のものとは異なる．Artin stack をどの site 上の stack として定義するか，という部分にも文献に寄って違いがある．[1], [6] では fppf site を考え，[4], [5] では etale site を考える．

5.3 Properties of Algebraic Stack/Morphism of Algebraic Stacks

以下では scheme の性質と scheme の射の性質を algebraic stack へ拡張する．

定義 5.8 (#Property of Algebraic Stack)

(i) $\mathcal{P}$ を scheme の性質であって，local for etale topology であるものとする．この時，algebraic stack :: $\mathfrak{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathfrak{X}$ のある atlas が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(ii) algebraic stack :: $\mathfrak{X}$ が quasi-compact [†3]であるとは，$\mathfrak{X}$ のある atlas が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

定義 5.9 (#Property of Morphism of Algebraic Stack, [4] p.33, [2] p.100)
$\mathcal{P}$ を morphism of scheme の性質であって，smooth local on source and target であるものとする．あるいは，DM stack を考えるならば etale local on source and target であるものとする．以下の可換図式で，$V \to \mathfrak{Y}, U \to V \times \mathfrak{X}$ は atlas であるとする[†4]．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & V \times \mathfrak{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathfrak{X} \arrow[d, "f"] \\ & V \arrow[r] & \mathfrak{Y} \end{tikzcd} \tag{PM}$$

この時，morphism of algebraic spaces :: $f \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，この可換図式にある f'（に対応する morphism of scheme）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

補題 5.10 (#)
(i) $\mathcal{X}$ を representable stack とし，P を algebraic stack の性質とする．f が algebraic stack として性質 P を持つことと，representable stack として性質 P を持つことは同値．

(ii) $f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を representable morphism とし，P を algebraic stack の射の性質とする．f が algebraic stack の射として性質 P を持つことと，representable morphism として性質 P を持つことは同値．

補題 5.11 (#)
(i) P を scheme の性質で local for etale topology なものとする．
一つの etale surjective morphism :: $U \to \mathfrak{X}$ について U が性質 P を持つならば，
任意の etale surjective morphism :: $U \to \mathfrak{X}$ について U が性質 P を持つ．

(ii) P を morphism of scheme の性質であって，local on source and target であるものとする．
一つの $V \to \mathfrak{Y}, U \to U \times \mathfrak{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つならば，
任意の $V \to \mathfrak{Y}, U \to U \times \mathfrak{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つ．

(証明). [6] Tag 06FM ∎

補題 5.12 (#)
P を algebraic stack の射の性質とする．

(i) P が scheme の射の性質として stable under base change ならば，algebraic stack の射の性質としても stable under base change.

(ii) P が scheme の射の性質として stable under composition ならば，algebraic stack の射の性質としても stable under composition.

(証明). algebraic space の場合の繰り返しである． ∎

[†3] 明らかに，これは local for etale topology ではない．
[†4] すなわち，algebraic stack(Artin stack) を考えているならば smooth surjective morphism を考え，DM stack を考えているならば etale surjective morphism を考える．

参考文献

[1] M. Artin. Versal deformations and algebraic stacks. *Inventiones mathematicae*, Vol. 27, No. 3, pp. 165–189, Sep 1974.

[2] Pierre Deligne and David Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.

[3] Tomàs L. Gòmez. Algebraic stacks. https://arxiv.org/abs/math/9911199v1.

[4] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[5] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[6] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.