Group Schemes

七条 彰紀

2018 年 1 月 3 日

1 Preface

このノートの想定読者は，[4] の II, §3 までを読んだ，Geometric Invariant Theory と Moduli Problem に興味がある者である．主な参考文献は [1],[2],[3] である．大まかな議論の流れは前者の流れを採用し，用語などの定義は [1] で述べられているものより一般的なものを [2] と [3] から採る．[1] で使われる定義は素朴すぎるからである．一般的な定義で概念を導入した後，特別な場合では [1] での定義と同値に成ることを確かめる，という方針を採る．

このノートでは，次の順に定義していく．

1. T-valued point (where T :: scheme),
2. group scheme,
3. fine/corse moduli,
4. categorical/good/geometric/GIT quotient,
5. representation of group (scheme),
6. linearly reductive group,
7. closure equivalence,
8. unstable/semi-stable/stable.

目標とする命題は次のものである．

定理 1.1
X :: affine scheme, G :: linearly reductive group scheme acting on X とする．affine GIT quotient of X by G :: $X /\!\!/ G$ は good quotient である．X の stable points を X^s とすると，$X /\!\!/ G$ の制限 :: X^s/G は geometric quotient of X^s by G である．

2 T-valued Points

圏論で言う “generalized point”の概念を，名前を変えて用いる．

定義 2.1
(i) $X, T \in \mathbf{Sch}/S$ に対し，$\underline{X}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/S}(T, X)$ を X の T**-valued points** と呼ぶ．
(ii) field extension :: $k \subseteq K$ について $S = \operatorname{Spec} k, T = \operatorname{Spec} K$ であるときには，$\underline{X}(T)$ を $\underline{X}(K)$ と書き，

X の K**-rational points** と呼ぶ．

(iii) morphism :: $h: G \to H$ について自然変換 $\underline{h}: \underline{G} \to \underline{H}$ は $\phi \mapsto h \circ \phi$ のように射を写す．

この関手 $\underline{X}$ は functor of points と呼ばれる．

K-rational point については，$\underline{X}(K) = \{x \in X \mid k(x) \subseteq K\}$ とおく定義もある．ここで $k(x)$ は x での residue field である．しかし [4] Chapter.2 Ex2.7 から分かる通り，この二つの定義は翻訳が出来る．すなわち，$k(x) \subseteq K$ を満たす $x \in X$ と，$\operatorname{Spec} k$-morpsihm :: $\operatorname{Spec} K \to X$ は一対一に対応する．

また X :: finite type $/k$ であるとき，closed point :: $x \in X$ について，$k(x)$ は k の有限次代数拡大体である．これは Zariski's Lemma の帰結である．したがって $\underline{X}(\bar{k})$ は X の closed point 全体に対応する．ただし $\bar{k}$ は k の代数閉包である．

例 2.2

$\mathbb{R}$ 上の affine scheme $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$ の $\mathbb{R}$-rational point と $\mathbb{C}$-rational point を考えよう．

$\operatorname{Spec} \mathbb{R} \to X$ の射は環準同型 $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2) \to \mathbb{R}$ と一対一に対応する．しかし直ちに分かる通り，このような環準同型は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (0, 0)$$

で定まるものしか存在し得ない．ここで $\bar{x} = x \bmod (x^2 + y^2), \bar{y} = y \bmod (x^2 + y^2)$ と置いた．よって $\underline{X}(\mathbb{R})$ は 1 元集合．また，この環準同型が誘導する $\operatorname{Spec} R \to X$ の射は 1 点空間 $\operatorname{Spec} \mathbb{R}$ を原点へ写す．

一方，環準同型 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \to \mathbb{C}$ は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (a, \pm ia)$$

（ここで $i = \sqrt{-1}, a \in \mathbb{R}$）で定まることが分かる．すなわち，$\mathcal{Z}_a(x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ の点に対応して，$\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \to \mathbb{C}$ の環準同型が定まる．逆の対応も明らか．よって $\underline{X}(\mathbb{C})$ の元は $\mathcal{Z}_a(x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ の点に対応している．

例 2.3

体 k 上の affine variety :: $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ を多項式系 :: $F_1, \ldots, F_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$ で定まるものとする．すると k 上の環 R に対して，次の集合が考えられる．

$$V_R = \left\{p = (r_1, \ldots, r_n) \in R^{\oplus n} \;\middle|\; F_1(p) = \cdots = F_n(p) = 0\right\}.$$

この集合の元も R-value point と呼ばれる．([1] ではこちらのみを R-value point と呼んでいる．実際，こちらのほうが字句 “value point”の意味が分かりやすいだろう．) V_R の点が $\underline{X}(R)$ の元と一対一に対応することを見よう．

X の affine coordinate ring を $A = k[x_1, \ldots, x_n]/(F_1, \ldots, F_n)$ とし，$\bar{x}_i = x_i \bmod (F_1, \ldots, F_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおく．$\phi: A \to R$ を考えてみると，これは次のようにして定まる．

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \mapsto (r_1, \ldots, r_n) \in V_R.$$

すなわち，V_R の点に対して $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ の元が定まる．逆の対応は明らか．そして，$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ が $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}/\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} R, X) = \underline{X}(R)$ と一対一対応することはよく知られている．

3 Fine/Corse Moduli

moduli 問題を語るには用語 “family”が必要である．

定義 3.1
$\mathcal{P}$ を集合のクラス[†1] とする．集合 B について，B の構造と整合的な構造を持った集合 $\mathcal{F}$ と写像 $\pi : \mathcal{F} \to B$ の組が $\mathcal{P}$ の B 上の **family** であるとは，各 $b \in B$ について $\pi^{-1}(s)$ は空であるか $\mathcal{P}$ に属すということ．

「何らかの上部構造」というのは，例えば，S が位相空間であって写像 $\mathcal{M}(S) \to S$ を連続にするような位相が $\mathcal{M}(S)$ に入っている，ということである．

用語 “family”を厳密に定義しているものは全くと言っていいほど無いが，ここでは Renzo のノート[†2] の定義を参考にした．ただし，Renzo のノートの定義は一般化されすぎている．Renzo のノートでは $\mathcal{P}$ を “Let $\mathcal{P}$ define a class of objects in some category $\mathcal{C}$.” としているが，これでは写像 $\mathcal{F} \to B$ が定義できるか怪しい．なので私のこのノートでは $\mathcal{P}$ を集合のクラスに限定している．結果的に，内容としては “The Encyclopedia of Mathematics” [†3] と同様になった．“family”を上のように解釈して不整合が生じたことは，私の経験の中ではない．

例 3.2
X, B :: scheme, morphism of schemes :: $f : X \to B$ をとる．f の fibre が成す集合 $\{X_b \mid b \in B\}$ は，$\pi : X_b \mapsto b$ によって B 上の family を成す．fibre が代数幾何学的対象（例えば smooth curve）であるような family は deformation theory の対象である．

例 3.3
k を適当な体とし，$\mathbb{P}^1_k$ の点 O_i $(i = 1, 2, 3)$ を順に $(0:1), (1:0), (1:1)$ とする．この時，$PGL_2(k)$ は次の全単射で $\mathbb{P}^1_k$ の自己同型写像の $(\mathbb{P}^1_k)^{\oplus 3}$ 上の family になる．

$$\begin{array}{rccc} \pi : & PGL_2(k) & \to & (\mathbb{P}^1_k)^{\oplus 3} \\ & \phi & \mapsto & (\phi^{-1}(O_i))_{i=1}^3. \end{array}$$

以下の定義は [8] など，Moduli 問題に関する殆どの入門書で述べられている．

定義 3.4
contravariant functor :: $\mathcal{M} : \mathbf{Sch} \to \mathbf{Set}$ が **moduli functor**（または functor of families）であるとは，各 scheme :: S に対して，$\mathcal{M}(S)$ が代数幾何学的対象の S 上の family 達を family の間の同値関係で割ったもの (“$\{$families over $S\}/\sim_S$” in [3]) である，ということ．$\mathcal{M}(S)$ には S の構造と「整合的」な構造が与えられる．

moduli functor の定義はあえて曖昧に述べられている．これは「出来る限り多くのものを moduli theory の範疇に取り込みたい」という思いがあるからである ([8])．

[†1] 集合 X を変数とする述語 $X \in \mathcal{C}$ の意味を「X はある条件を満たす対象である」と定義した，と考えて良い．「属す」の意味は集合と同様に定める．
[†2] `http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topics10/Notes.pdf`
[†3] “Moduli theory”のページ．`https://www.encyclopediaofmath.org/index.php/Moduli_theory`

定義 3.5
scheme :: M が moduli fuctor :: $\mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるとは，M が $\mathcal{M}$ を表現する (represent) ということである．言い換えれば，関手 $\underline{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, M)$ が $\mathcal{M}$ と自然同型，ということである．

注意 3.6
$X \in \mathbf{Sch}$ をとる．moduli functor :: $\mathcal{M}$ の fine moduli space :: M が存在したとしよう．この時，$\mathcal{M}(X) \cong \underline{M}(X)$．これは X 上の代数幾何学的対象が成す同値類が M の X-value point と一対一に対応していることを意味する．したがって，$\mathcal{M}$ が指定する代数幾何学的対象の集合の同値類を M が「パラメトライズ」していると考えられる．

残念ながら，多くの moduli functor に対して fine moduli space が存在し得ない．（このあたりの議論は [8] p.3 や [5] p.150 にある．）そのため Mumford は（おそらく GIT 本で）fine moduli space の代わりとして coarse moduli space を提唱した．

定義 3.7
moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対して，以下を満たす scheme :: M を $\mathcal{M}$ の coarse moduli space と呼ぶ．

(i) 自然変換 $\rho : \mathcal{M} \to \underline{M}$ が存在する．
(ii) ρ は自然変換 $\mathcal{M} \to \underline{\tilde{M}}$ の中で最も普遍的である:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{M} \arrow[dl, "^{\forall}\tau"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
^{\forall}\underline{\tilde{M}} \arrow[rr, "^{\exists!}\underline{f}"'] & & \underline{M}
\end{tikzcd}$$

この図式で $\tilde{M}$ :: scheme, $f : M \to \tilde{M}$.

(iii) 任意の代数閉体 :: k について $\rho_{\mathrm{Spec}\, k} : \mathcal{M}(\mathrm{Spec}\, k) \to \underline{M}(\mathrm{Spec}\, k)$ は全単射である．

例 3.8
[5] の §26 で，elliptic curve の moduli が fine moduli を持たず，coarse moduli のみをもつことが述べられている．一般に，対象が非自明な自己同型写像をもつときには fine moduli space が存在し得ない．これを述べるには universal family の定義が必要と思われるので省略する．

命題 3.9
moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対して coarse moduli space は同型を除いて一意である．

命題 3.10 ([5], Prop23.6)
scheme :: M が moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるならば，M は $\mathcal{M}$ の coarse moduli space でもある．

命題 3.11 ([5], Prop23.5)
S :: scheme の open subscheme と包含写像が成す圏を $\mathbf{OpenSubSch}(S)$ と書くことにする．これは $\mathbf{Sch}/S$ の full subcategory である．

moduli functor :: $\mathcal{M}$ が fine moduli space をもつならば，任意の S :: scheme について $\mathcal{M}|_{\mathbf{OpenSubSch}(S)}$ は S 上の sheaf である．

(証明). M :: fine moduli scheme for $\mathcal{M}$ とし，S :: scheme を固定する．$\mathcal{F} := \underline{M}|_{\mathbf{OpenSubSch}(S)}$ は開集合系からの contravariant functor だから presheaf であることは定義から従う．また $\mathcal{F}$ の元は scheme の morphism である．このことから sheaf の公理 Identity Axiom と Gluability Axiom を満たすことも簡単に分かる．（一応，[4] II, Thm3.3 Step3 を参考に挙げる．） ∎

family の同値関係は，しばしば群作用の軌道分解で与えられる．この場合，moduli 問題は適当な scheme を群作用で「割」ったものを求めることに帰着する．

4 Definition of Group Schemes

S :: scheme 上の scheme と S-morphism が成す圏を $\mathbf{Sch}/S$ で表す．これは slice category の一般的な notation から来ている．

group scheme は圏論的に定義される．まずは圏論の言葉で述べよう．

定義 4.1

S :: scheme とする．G :: scheme over S が group scheme (over S) であるとは，G が $\mathbf{Sch}/S$ における group object であるということである．group scheme over S と homomorphisms が成す圏を $\mathbf{GrpSch}(S)$ と書く．

group object と homomorphisms の定義を展開すれば次のよう．

定義 4.2

(i) S :: scheme とする．G :: scheme over S と次の 3 つの射から成る 4 つ組が **group scheme (over S)** であるとは，任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について $\underline{G}(T)$ の群構造が誘導されるということである．

$$\begin{array}{ll} \mu : G \times G \to G & \text{multiplication} \\ \epsilon : S \to G & \text{identity section} \\ \iota : G \to G & \text{inverse} \end{array}$$

μ は group law とも呼ばれる．なお，$x, y \in \underline{G}(T)$ の積 $x * y \in \underline{G}(T)$ は次のように誘導される．

$$x * y :\ T \xrightarrow{\langle x,y \rangle} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

ここで $\langle x, y\rangle$ は $G \xleftarrow{x} T \xrightarrow{y} G$ から product の普遍性により誘導される射である．単位元は $\epsilon ! : T \to S \xrightarrow{\epsilon} G$ [†4]，$x \in \underline{G}(T)$ の逆元は $i \circ x$ である．

(ii) group scheme over S :: G, H の間の射 $h : G \to H$ が **homomorphism** であるとは，任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について $\underline{h}(T) : \underline{G}(T) \to \underline{H}(T)$ が群準同型であることである．

(iii) group schemes over S とその間の homomorphisms が成す圏を $\mathbf{GrpSch}(S)$ とする．

以下の例では k を適当な体とし，k 上の affine group scheme を定義する．

例 4.3 ($\mathbb{G}_a$)

finitely generated k-algebra :: $A = k[x]$ と次の 3 つの k-linear map から，k 上の group scheme :: $\mathbb{G}_a$ &

[†4] この射は $T \to G \to S \to G$ と書いても同じである．

μ, ϵ, ι が誘導される．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} &: A \to A \otimes_k A; & x &\mapsto (x \otimes 1) + (1 \otimes x) \\
\tilde{\epsilon} &: A \to k; & x &\mapsto 1 \\
\tilde{\iota} &: A \to A; & x &\mapsto -x
\end{aligned}$$

群構造を無視すれば $\mathbb{G}_a = \mathbb{A}_k^1$．この $\mathbb{G}_a$ は additive group と呼ばれる．

$x_1 = x \otimes 1, x_2 = 1 \otimes x$ とすると，$A \otimes A \cong k[x_1, x_2]$ となる．したがって $f \in A$ について $\tilde{\mu}(f)(x_1, x_2) \in k[x_1, x_2]$ とみなせる．そして $k[x]$ の algebra としての和は $\tilde{\mu}(f)(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2)$ のように co-algebra に反映されている．単位元と逆元は $\tilde{\epsilon}(f)(x) = f(1), \tilde{\iota}(f)(x) = f(-x)$ のように反映されている．

$\mathbb{G}_a$ に備わった群構造は closed point :: (a, b) を $a + b$ に写す．これを確かめておこう．$\mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^1 \cong \mathbb{A}_k^2$ の $\bar{k}$-rational point :: (a, b)（$\bar{k}$ は k の代数閉体）は素イデアル

$$\mathfrak{p} = (x_1 - a, x_2 - b) = \{f \in k[x_1, x_2] \mid f(a, b) = 0\}$$

に対応する．したがって $\mu(\mathfrak{p}) = \tilde{\mu}^{-1}(\mathfrak{p})$ は次のよう．

$$\tilde{\mu}^{-1}(\mathfrak{p}) = \{g \in A = k[x] \mid \tilde{\mu}(g)(a, b) = g(a + b) = 0\}.$$

これは $a + b$ に対応する素イデアル $(x - (a + b))$ に他ならない．

例 4.4

finitely generated k-algebra :: $A = k[x, x^{-1}]$ と次の 3 つの k-linear map から，k 上の group scheme :: $\mathbb{G}_m$ & μ, ϵ, ι が誘導される．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} &: A \to A \otimes_k A; & x &\mapsto (x \otimes 1) \cdot (1 \otimes x) \\
\tilde{\epsilon} &: A \to k; & x &\mapsto 1 \\
\tilde{\iota} &: A \to A; & x &\mapsto -x
\end{aligned}$$

群構造を無視すれば $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$．

こちらも $\tilde{\mu}(f)(x_1, x_2) = f(x_1 x_2)$ の様に積が入っている．$\mu : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ が $\bar{k}$-rational point :: $(a, b) \in \mathbb{A}^2 - \{(a, b) \mid ab = 0\}$ を $ab \in \mathbb{A}^1$ に写すことは $\mathbb{G}_a$ の場合と同様である．

例 4.5

正整数 n に対し finitely generated k-algebra :: $A = k[x_{ij}]_{i,j=1}^n[\det^{-1}]$ とおく．ここで det は不定元が成す n 次正方行列 $X = \Big[x_{ij}\Big]_{i,j=1}^n$ の determinant である．A と次の 3 つの k-linear map から，k 上の group scheme :: GL_n & μ, ϵ, ι が誘導される．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} &: A \to A \otimes_k A; & X &\mapsto (X \otimes 1) \cdot (1 \otimes X) \\
\tilde{\epsilon} &: A \to k; & X &\mapsto I \\
\tilde{\iota} &: A \to A; & X &\mapsto X^{-1}
\end{aligned}$$

I は n 次単位行列．ここで $\tilde{\iota} : X \mapsto I$ は (X の (i, j) 成分)$\mapsto$(I の (i, j) 成分) という意味である．$\tilde{\mu}, \tilde{\iota}$ の定義も同様である．

$X_1 = X \otimes 1 = \Big[x_{ij} \otimes 1\Big]_{i,j=1}^n, X_2 = 1 \otimes X = \Big[1 \otimes x_{ij}\Big]_{i,j=1}^n$ とおけば，$f \in k[x_{ij}]$ について $\tilde{\mu}(f)(X_1, X_2) = f(X_1 X_2)$ となっている．$\mu : GL_n \times GL_n \to GL_n$ が $\bar{k}$-rational point :: $(M, N) \in GL_n \times GL_n$ を $MN \in GL_n$ へ写すことは $\mathbb{G}_a$ での議論と同様である．$n = 1$ の時 $GL_n = \mathbb{G}_m$ であることに留意せよ．

3 つの例に現れた準同型 $\tilde{\mu}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\iota}$ はそれぞれ co-multiplication，co-unit, co-inversion と呼ばれる．この 3 つの準同型によってそれぞれの k-finitely generated に Hopf algebra [†5] の構造が入る．一般に affine group scheme と Hopf algbra が一対一に対応する ([7] II,Thm5.1).

5 Categorical/Good/Geometric/GIT Quotients

6 Linearly Reductive Group

7 Affine GIT Quotient is Good Quotient.

参考文献

[1] 向井茂 (2008)『モジュライ理論 I』岩波書店

[2] Gerard van der Geer, Ben Moonen "Abelian Varieties" `https://www.math.ru.nl/~bmoonen/research.html` （Preliminary Version. 2017/12/31 参照）

[3] Victoria Hoskins (2016) "Moduli Problems and Geometric Invariant Theory" `https://userpage.fu-berlin.de/hoskins/M15_Lecture_notes.pdf`

[4] Robin Hartshorne(1977) "Algebraic Geometry" Springer

[5] Robin Hartshorne "Deformation Theory" Springer

[6] David Eisenbud(1999) "Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry" Springer

[7] J. Milne, "The basic theory of affine group schemes", `www.jmilne.org/math/CourseNotes/AGS.pdf`

[8] J. Harris,I. Morrison "Moduli of Curves"

[†5] algebra, co-algebra の構造をもつ finitely generated k-module であって antipode と呼ばれる自己準同型射を備えるもの.