

# ゼミノート #10

## Topology and Shaves on Algebraic Stacks

七条彰紀

2020 年 3 月 17 日

### 目次

1	Points of Artin Stack	1
2	Topology on $ \mathcal{X} $	4
2.1	Atlases of Artin Stacks . . . . .	4
2.2	Definitions. . . . .	5
2.3	Propositions . . . . .	6
3	Sheaves on Algebraic Stacks	8
3.1	Definitions . . . . .	8
3.2	Propositions . . . . .	10

ここまでで artin stack が定義できたが, これは scheme で言えば structure sheaf だけ定義したような状態である. artin stack の Zariski 位相空間と, (Grothendieck topology 上の) sheaf を導入する.

## 1 Points of Artin Stack

いずれも [Sta19] Tag 04XE, [LM99] section 5. を参照せよ.

**定義 1.1** ([LM99] section 5)

体の Spec からの射  $x_1: \text{Spec } k_1 \rightarrow \mathcal{X}, x_2: \text{Spec } k_2 \rightarrow \mathcal{X}$  について  $x_1 \sim x_2$  であるとは, ある  $k_{12} :: \text{field}$  と以下の 2-可換図式が存在すること.

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } k_{12} & \longrightarrow & \text{Spec } k_1 \\ \downarrow & & \downarrow x_1 \\ \text{Spec } k_2 & \xrightarrow{x_2} & \mathcal{X} \end{array}$$

**命題 1.2** ([Sta19] 04XF)

ここで定義した  $\sim$  は同値関係である。

(証明).  $\sim$  は反射律, 対称律を満たすことは自明なので, 推移律の成立を示す.

体から  $\mathcal{X}$  への 3 つの射  $x_1, x_2, x_3$  を考える. これらが  $x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3$  を同時に満たすとは, 体  $k_{12}, k_{23}$  と次の 2-可換図式が存在するということである.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec} k_{12} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} k_2 & \longleftarrow & \mathrm{Spec} k_{23} \\ \downarrow & & \downarrow x_2 & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k_1 & \xrightarrow{x_1} & \mathcal{X} & \xleftarrow{x_3} & \mathrm{Spec} k_3 \end{array}$$

この時,  $k_{12}, k_{23}$  の合成体 (すなわち最小の共通の拡大体) を  $k_{123}$  とする.  $k_{12} \cap k_{23}$  は  $k_{123}$  の部分体として  $k_2$  に一致する (あるいは, 一致するように 2 つの準同型  $k_{12}, k_{23} \rightarrow k_{123}$  を選ぶ). すると可換図式は次のように拡張される.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Spec} k_{123} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathrm{Spec} k_{12} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} k_2 & \longleftarrow & \mathrm{Spec} k_{23} \\ \downarrow & & \downarrow x_2 & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k_1 & \xrightarrow{x_1} & \mathcal{X} & \xleftarrow{x_3} & \mathrm{Spec} k_3 \end{array}$$

上の新たな四辺形は scheme の図式として可換なので, この artin stack の拡張後の図式も可換. ■

### 注意 1.3

以上の定義は scheme の点に対応している. scheme  $X$  について, 体の  $\mathrm{Spec} k$  から  $X$  への射は点  $x \in X$  と体の準同型  $\phi: \kappa(x) \rightarrow k$  に対応する ([Har97] ch II, Ex2.7, [Sta19] 01J5). ここで  $\kappa(x)$  は residue field である. したがって一点  $x$  に対応する射は  $\kappa(x)$  から体への準同型の数だけ有る. これらを全て同値なものとする同値関係を定めたい.

体から  $X$  への二つの射

$$x_1: \mathrm{Spec} k_1 \rightarrow \mathcal{X}, \quad x_2: \mathrm{Spec} k_2 \rightarrow \mathcal{X}$$

について, 以下は同値.

- (a) 位相空間の 2 つの写像  $|x_1|, |x_2|$  の像が  $x$  である.
- (b) すなわち, 体  $k_{12}$  と次の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} k_{12} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} k_1 \\ \downarrow & & \downarrow x_1 \\ \mathrm{Spec} k_2 & \xrightarrow{x_2} & X \end{array}$$

(a)  $\implies$  (b) は明らか. (a)  $\Longleftarrow$  (b) は次のように示す. まず  $k_{12}$  は合成体  $k_1 k_2$  と置けば良い. すると包含射  $k_1 \hookrightarrow k_{12}, k_2 \hookrightarrow k_{12}$  が存在する. 体の準同型は単射しか無いから,  $x_1, x_2$  からそれぞれ得られる  $\kappa(x) \rightarrow k_1, \kappa(x) \rightarrow k_2$  は包含射に取り替えられる. 包含関係は推移律を満たすから, 以下が可換ということ

に成る.

$$\begin{array}{ccc} k_{12} & \longleftarrow & k_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ k_2 & \longleftarrow & \kappa(x) \end{array}$$

上で述べた, 体から  $X$  への射と  $\kappa(x)$  から体への射の対応より, これは (b) の可換図式が存在することを意味する.

**定義 1.4** ( $|\mathcal{X}|, |f|$ , [Sta19] 04XG and the below paragraph)

points of  $\mathcal{X}$  とは, field の Spec から  $\mathcal{X}$  の射の,  $\sim$  による同値類のことである. set of points of  $\mathcal{X}$  を  $|\mathcal{X}|$  と表す. すなわち,

$$|\mathcal{X}| = \{\text{Spec } k \rightarrow \mathcal{X} \mid k :: \text{ algebraically closed field}\} / \sim.$$

射  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  について,  $|f|$  を次で定義する.

$$\begin{array}{ccc} |f|: & |\mathcal{X}| & \rightarrow & |\mathcal{Y}| \\ & x & \mapsto & f \circ x \end{array}$$

**定義 1.5** ([Sta19] 0EMW)

$X :: \text{ algebraic space over a scheme } S$  とする. 点  $x \in |X|$  の residue field とは,  $x$  を代表する monomorphism  $:: \text{Spec } k \rightarrow X$  が存在するような体  $k$  のことである.

**注意 1.6**

residue field は常に存在するとは限らない. “descent algebraic space” と呼ばれる重要な種類の algebraic space では, 任意の点が residue field をもつ.

**補題 1.7**

$X :: \text{ algebraic space over a scheme } S$  とする. 点  $x \in |X|$  をとり,

- $x$  を代表する monomorphism  $:: \phi: \text{Spec } k \rightarrow X$  と
- $x$  を代表する任意の射  $:: \psi: \text{Spec } l \rightarrow X$

をとる. この時  $\psi$  は  $\phi$  を通じて一意に分解する.

(証明). fiber product  $:: Y = (\text{Spec } k) \times_{\phi, X, \psi} (\text{Spec } l)$  をとる.  $\phi, \psi$  が同値であるから,  $Y$  は空でない. mono

は pullback で保たれるから  $Y \rightarrow \operatorname{Spec} l$  も mono. よって [Sta19] 03DP<sup>†1</sup> から  $Y \cong \operatorname{Spec} l$ .

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \operatorname{Spec} k \\ \downarrow \cong & & \downarrow \phi \\ \operatorname{Spec} l & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

こうして  $\psi$  の  $\phi$  を通じた分解が存在する.  $\phi$  が mono なのでこの分解は一意. ■

### 系 1.8

$X$  :: algebraic space over a scheme  $S$  とする. 点  $x \in |X|$  を代表する monomorphism は高々一つ.

## 2 Topology on $|\mathcal{X}|$

### 2.1 Atlases of Artin Stacks

下準備として artin stack の atlas について幾つか命題を述べる. 最初は読み飛ばして構わない.

#### 補題 2.1

任意の artin stack は atlas by a scheme, すなわち scheme からの smooth surjective 射を持つ.

(証明). この証明では “smooth surjective” を “sm.surj.”, “etale surjective” を “et.surj.” と略す. artin stack と algebraic space の定義より,

- algebraic space から artin stack への sm.surj. 射 ::  $\alpha: X \rightarrow \mathcal{X}$ ,
- scheme から algebraic space への et.surj. 射 ::  $a: U \rightarrow X$

が存在する. 合成すれば scheme から artin stack への sm.surj. 射 ::  $\alpha \circ a: U \rightarrow \mathcal{X}$  が得られる.

$\alpha$  と  $a$  ではそれぞれ “smooth surjective”, “etale surjective” の定義の方法が異なるので, 射  $\alpha \circ a$  が sm.surj. であることは調べる必要が有る. scheme からの sm.surj. 射 ::  $V \rightarrow \mathcal{X}$  をとり, 以下の pullback 図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} U \times_{\mathcal{X}} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow a \\ X \times_{\mathcal{X}} V & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ V & \longrightarrow & \mathcal{X} \end{array}$$

この図式から次の 3 つが分かる.

- $V \rightarrow \mathcal{X}$  は scheme からの sm. surj. 射,

<sup>†1</sup> 証明を簡単にまとめると次のように成る. (1) 可換代数の命題「体から代数への全射準同型  $\phi: k \rightarrow R$  は同型 (特に単射)」に帰着させる. (2)  $R \rightarrow R \otimes_k R; r \mapsto r \otimes 1$  は,  $\tilde{r} \in \phi^{-1}(r)$  について  $r \otimes 1 = \tilde{r}(1 \otimes 1)$  なので単射. (3)  $R$  は体上の代数なので free, 特に faithfully flat  $k$ -module.

- $a: U \rightarrow X$  が sm. surj. なので  $U \times V \rightarrow X \times V$  も sm. surj.,
- $\alpha: X \rightarrow \mathcal{X}$  も sm. surj. 射.

artin stack の射の性質の定義 ( $\alpha$  が sm. surj. であることの定義) から,  $U \times V \rightarrow X \times V \rightarrow V$  は sm. surj.. two pullback lemma も合わせて考えれば, これは  $\alpha \circ a :: \text{sm. surj.}$  を意味する. ■

### 補題 2.2 ([Sta19] tag 04T1)

artin stack  $:: \mathcal{X}, \mathcal{Y}$  と  $\mathcal{Y}$  の atlas  $:: V \rightarrow \mathcal{Y}$  をとる. morphism of artin stacks  $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  に対して,  $\mathcal{X}$  の atlas  $:: U \rightarrow \mathcal{X}$  と atlas の間の射  $:: \bar{f}: U \rightarrow V$  が存在し, 以下が可換図式となる.

$$\begin{array}{ccc} \exists U & \xrightarrow{\exists \bar{f}} & \forall V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\forall f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

scheme の射の性質  $P$  を, smooth surjective morphism による composition と base change で保たれるものとする.<sup>a</sup>  $f$  が性質  $P$  を持つならば  $\bar{f}$  も性質  $P$  を持つ.

<sup>a</sup> 例えば  $P = \text{smooth, surjective, flat, locally finite presentation, universally open.}$  [Sta19] tag 01V4.

(証明). atlas of  $\mathcal{X} :: U \rightarrow \mathcal{X}$  を適当にとり, 次の fiber product をとる.

$$\begin{array}{ccc} U \times_{\mathcal{Y}} V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \end{array}$$

artin stack の定義から  $U \times_{\mathcal{Y}} V :: \text{alg. sp.}$  である. また smooth, surjective は stable under base change/composition なので  $U \times_{\mathcal{Y}} V \rightarrow U \rightarrow \mathcal{X}$  は smooth surjective. よって  $\bar{V} = U \times_{\mathcal{Y}} V, \bar{f} = \text{pr}: U \times_{\mathcal{Y}} V \rightarrow V$  と置けばこれらが主張の条件を満たす. また, この証明から最後の段落の主張は明らかである. ■

## 2.2 Definitions.

### 定義 2.3 (Zariski Topology on Points of Scheme/Algebraic Space/Artin Stack)

- (i) scheme  $:: X$  とする.  $|X|$  の (Zariski) open subset とは, ある open subscheme of  $X :: i: U \rightarrow X$  によって  $|i|(|U|)$  とかける集合のこと.
- (ii) algebraic space  $:: X$  とし,  $A$  が scheme である atlas  $:: a: A \rightarrow X$  をとる.  $U \subseteq |X|$  が (Zariski) open subset であるとは,  $|a|^{-1}(U)$  が  $|A|$  の open subset であること.
- (iii) artin stack  $:: \mathcal{X}$  とし,  $A$  が scheme である atlas  $:: a: A \rightarrow \mathcal{X}$  をとる.  $U \subseteq |\mathcal{X}|$  が (Zariski) open subset であるとは,  $|a|^{-1}(U)$  が  $|A|$  の open subset であること.

#### 定義 2.4

$P$  を位相空間の性質 (e.g. irreducible, connected, quasi-compact, ...) とする. artin stack  $:: |\mathcal{X}|$  が  $P$  であるとは,  $|\mathcal{X}|$  が  $P$  であるということ.

$Q$  を位相空間の射の性質 (e.g. open, closed, dense, ...) とする. artin stack の射  $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  が  $Q$  であるとは,  $|f|$  が  $Q$  であるということ.

#### 補題 2.5

$X :: \text{scheme}$  について,  $|X|$  は  $X$  の台位相空間と一致する. さらに scheme の射  $:: f: X \rightarrow Y$  について,  $|f|$  は  $X$  と  $Y$  の間の台位相空間の射と一致する.

(証明). 注意 (1.3) より明らか. ■

#### 補題 2.6

artin stack  $:: \mathcal{X}$  について,  $|\mathcal{X}|$  の Zariski topology は atlas に関わらず一意である.

(証明). scheme から  $\mathcal{X}$  への smooth surjective morphism を二つとり, それらの fiber product を作る.

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow u \\ V & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & & \downarrow v \end{array}$$

artin stack の定義から,  $W :: \text{scheme}$ . また smooth ならば universally open である ([Sta19] 04XL) から,  $W \rightarrow U, W \rightarrow V$  は continuous, surjective, open. よって集合の間の射  $|W| \rightarrow |U|, |W| \rightarrow |V|$  も continuous, surjective, open.

なので以上の可換図式をたどれば, 任意の  $O \subseteq |\mathcal{X}|$  について,  $|u|^{-1}(O) \subseteq |U|$  が open であることと  $|v|^{-1}(O) \subseteq |V|$  が open であることが同値であると分かる. これは  $|\mathcal{X}|$  の Zariski topology は atlas に関わらず一意であることを意味する. ■

## 2.3 Propositions

#### 命題 2.7 ([Sta19] 04XL)

- (i) artin stack 間の任意の射  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  について,  $|f|: |\mathcal{X}| \rightarrow |\mathcal{Y}|$  は continuous.
- (ii) algebraic space からの universally open 射  $:: f: U \rightarrow \mathcal{X}$  に対して,  $|f|$  は continuous かつ open.

なお, smooth 射は flat and locally of finite presentation 射であり, したがって universally open である ([Sta19] tag 01VE, 01VF, 01UA).

(証明). (i) は補題 (2.2) を用いれば容易に分かる. ■

### 2.3.1 Surjectivity.

#### 補題 2.8

任意の artin stack  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$  について,

$$|\mathcal{Z} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}| \rightarrow |\mathcal{Z}| \times_{|\mathcal{Y}|} |\mathcal{X}|$$

は全射である.

#### 補題 2.9

$f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  が全射であることと,  $|f|: |\mathcal{X}| \rightarrow |\mathcal{Y}|$  が全射であることは同値である.

### 2.3.2 Open sub-stack maps to open subset bijectively.

#### 注意 2.10

artin stack の射にも “open immersion” であるものは存在するのだから, これを用いても open morphism などの概念が定義できる. この流儀での open morphism 等の概念と, 我々の points of artin stack  $:: |\mathcal{X}|$  を使う流儀での open morphism 等の概念は同値なものである, ということを次の命題 (2.13) で示す.

points of artin stack を使うと, 台集合を  $|\mathcal{X}|$  とする, 通常の意味での位相空間が定義できる. その為, 位相空間に関する概念を全て取り扱うことが出来る, というのが我々の流儀のアドバンテージである.

#### 定義 2.11 ([Sta19] 04YM)

artin stack  $\mathcal{X}$  の open sub-stack とは,  $\mathcal{X}$  の **strictly full** sub-category  $:: \mathcal{U}^a$  で artin stack であるものであってかつ  $\mathcal{X}$  への inclusion  $:: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  が open immersion であるもの. closed sub-stack も同様である.

<sup>a</sup> すなわち  $\mathcal{U}$  は  $\mathcal{X}$  の全ての対象と同型射を含んでいる.

#### 注意 2.12

equivalence of artin stacks  $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  があっても, open sub-stack of  $\mathcal{X}$  の  $f$  による像が strictly full sub-category であるとは限らないことに注意.

#### 命題 2.13 ([Sta19] 06FJ, [LM99] Cor5.6.1)

- (i)  $\mathcal{U}$  が open sub-stack of  $\mathcal{X}$  ならば  $|\mathcal{U}|$  は  $|\mathcal{X}|$  の open sub-set.
- (ii) open sub-stack of  $\mathcal{X}$  の集まりからの対応  $\mathcal{U} \mapsto |\mathcal{U}|$  は一対一.

これらは closed についても同様である.

(証明). (TODO)

### 2.3.3 Topological Property of $|\mathcal{X}|$ .

**命題 2.14** ([LM99] 5.6.1(iii), 5.7.2)

artin stack  $\mathcal{X}$  を考える. 位相空間  $|\mathcal{X}|$  について次が成り立つ.

- (i)  $|\mathcal{X}|$  :: quasi-compact.
- (ii)  $|\mathcal{X}|$  :: sober (すなわち, 任意の irreducible component はただ一つの generic point を持つ.)

**命題 2.15** ([LM99] 5.7)

artin stack の quasi-compact 射  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  について,  $|f|(\mathcal{X})$  :: stable under specialization.

## 3 Sheaves on Algebraic Stacks

### 3.1 Definitions

**定義 3.1**

artin stack over  $S$   $\mathcal{X}$  について,  $\mathcal{X}$  上の big etale site  $ET(\mathcal{X}) = (\mathbf{Sch}/\mathcal{X})_{ET}$  を次のように定める.

**Objects** scheme から  $\mathcal{X}$  への (任意の) 射.

**Arrow** 射  $[f: U \rightarrow \mathcal{X}] \rightarrow [g: V \rightarrow \mathcal{X}]$  は  $f = g \circ \phi$  を満たす scheme の射  $\phi: U \rightarrow V$ .

**Covering** scheme  $U$  からの射  $U \rightarrow \mathcal{X}$  の cover は,  $U$  への etale 射が成す jointly surjective な族.

$ET(\mathcal{X})$  の sheaf と associated topos は通常と同様に定義する.

**注意 3.2**

ここで定義した  $ET(\mathcal{X})$  は [Sta19] 06TN で定義されている  $\mathcal{X}_{\acute{e}tale}$  と同じものである. この Grothendieck topology が [Sta19] で言う inherited topology ([Sta19] 06NV) であることは,  $\mathcal{X}$  が category fibered in groupoids であり, したがって全ての射が cartesian arrow ([Sta19] 02XJ で言う strongly cartesian morphism) であることから従う.

[Sta19] 06TN では他に big Zariski site on  $\mathcal{X}$ , big smooth site on  $\mathcal{X}$  など定義されているが, 我々は etale site のみ考える.

**注意 3.3**

歴史的には smooth morphism を underlying category にとり etale topology を備え付ける site, lisse-etale site が使われている. これは etale cohomology の点で有利だが, artin stack の射から誘導される functor  $f^*, f^{-1}, f_*$  などが exact で無いといった不満点がある. このせいで sheaves on scheme の時のアナロジーも働かなくなる. 定義も少々面倒なので, 我々は big etale site を使う.



**定義 3.4**

site  $:: \mathcal{S}$  上の sheaf  $:: \mathcal{F}$  について, set of global sections を以下で定める.

$$\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathbf{Shv}(\mathcal{S})}(*, \mathcal{F}).$$

ただし  $*$  は category of sheaves of sets  $:: \mathbf{Shv}(\mathcal{S})$  の terminal object である.

scheme  $:: U$  について,  $\Gamma(U, \mathcal{F})$  と  $\mathcal{F}(U)$  は異なるものであることに注意せよ.

**注意 3.5**

category of sheaves of sets の terminal object は, 単元集合の constant sheaf である. したがって terminal object として特に単元集合  $\{*\}$  の constant sheaf をとると,  $s \in \Gamma(\mathcal{F})$  は

$$\mathcal{S} \ni U \mapsto s_U(*) \in \mathcal{F}(U)$$

という対応を成す.  $\mathcal{S}$  は scheme 上の site であれば,  $\Gamma(\mathcal{F})$  の元が自然な方法で global section に一対一対応する.

**注意 3.6**

set of global sections は単純な limit として書くことが出来る.

$$\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{F}) = \lim_{U \in \mathcal{S}} \mathcal{F}(U).$$

詳しくは nLab ( [https://ncatlab.org/nlab/show/limit#local\\_definition\\_in\\_terms\\_of\\_representable\\_functors](https://ncatlab.org/nlab/show/limit#local_definition_in_terms_of_representable_functors) ) あるいは以下で定義されている  $\text{id}_* \mathcal{F}(= \mathcal{F})$  を考えても理解できる.

したがって  $\mathcal{S} :: \text{scheme}$  について  $\mathcal{S} = \text{Zar}(\mathcal{S})$  あるいは  $\text{ZAR}(\mathcal{S})$  ならば,  $\text{id}_{\mathcal{S}}$  が  $\mathcal{S}$  の terminal object だから,  $\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}) = \mathcal{O}_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})$  となる.

**定義 3.7** ([Sta19] 06TU)

$\mathcal{X}$  の structure sheaf  $:: \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  を次で定める.

$$\text{ET}(\mathcal{X}) \ni U \mapsto \mathcal{O}_U(U).$$

$\mathcal{O}_U$  は scheme  $:: U$  の structure sheaf である.

$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$  が確かに sheaf であることは [Sta19] 03DT で証明されている.

**定義 3.8** (  $u^p, p_u$  in [Sta19] 00VC, 00XF )

artin stack over a scheme  $\mathcal{S} :: \mathcal{X}, \mathcal{Y}$  の間の射  $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  を考える. この  $f$  から topos の間の射  $:: \mathcal{X}_{\text{ET}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\text{ET}}$  が誘導される.

まず sheaf  $:: \mathcal{G} \in \mathcal{Y}_{\text{ET}}$  について,

$$(f^{-1}\mathcal{G})( (U, u) ) = \mathcal{G}( (U, f \circ u) ) \quad \text{where } (U, u) \in \text{ET}(\mathcal{X})$$

で  $f^{-1}\mathcal{G} \in \mathcal{X}_{\text{ET}}$  を定める. 同じく,  $\text{sheaf} :: \mathcal{F} \in \mathcal{X}_{\text{ET}}$  について,

$$(f_*\mathcal{F})(V, v) = \lim \left( I_{(V,v)}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{pr}_2} \text{ET}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Set} \right) \quad \text{where } (V, v) \in \text{ET}(\mathcal{Y})$$

で  $f_*\mathcal{F} \in \mathcal{Y}_{\text{ET}}$  を定める.

ここで  $I_{(V,v)}$  は次の圏である.

**Objects:** 以下の可換図式を満たす射の組  $(U \rightarrow V, U \rightarrow \mathcal{X})$ :

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow v \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

**Arrows:** 射  $(U \rightarrow V, U \rightarrow \mathcal{X}) \rightarrow (U' \rightarrow V, U' \rightarrow \mathcal{X})$  は, 以下を可換にする射  $U \rightarrow U'$  である.

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \downarrow & \searrow & \\ U' & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow v \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

$(f_*\mathcal{G})(V, v)$  の定義に有る  $I_{(V,v)}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{pr}_2} \text{ET}(\mathcal{X})$  は

$$(U \rightarrow V, U \rightarrow \mathcal{X}) \mapsto [U \rightarrow \mathcal{X}] \in \mathbf{Sch}/\mathcal{X}$$

で与えられる.

## 3.2 Propositions

**補題 3.9** ([Sta19] 06NW)

artin stack  $:: \mathcal{X}, \mathcal{Y}$  と  $\mathcal{F} \in \text{ET}(\mathcal{X}), \mathcal{G} \in \text{ET}(\mathcal{Y})$  をとる. 任意の射  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  について  $f^{-1}\mathcal{F}, f_*\mathcal{G}$  は確かに sheaf である.

**命題 3.10** ([Sta19] 00XF)

$f^{-1}$  は  $f_*$  の left adjoint functor である.

(証明).  $(f \circ): (\mathbf{Sch}/\mathcal{X}) \rightarrow (\mathbf{Sch}/\mathcal{Y})$  を  $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  の合成で得られる関手とする. すると関手  $f^{-1}$  は関手  $(\text{sheaf})(\mathbf{Sch}/\mathcal{Y}) \rightarrow \mathbf{Set}$  と  $(f \circ)$  の合成としてかける.

これを用いると上の定義は次のように変形できる.

$$(f_*\mathcal{F})(V, v) = \lim \left( ((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}^{\text{op}} \xrightarrow{\pi_1} (\mathbf{Sch}/\mathcal{Y}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Set} \right)$$

$((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}^{\text{op}}$  は圏  $(f \circ) \downarrow (V, v)$  の双対圏に etale Grothendieck topology を与えてできる site である.

また  $\pi_1: [(f \circ)(U, u) \rightarrow (V, v)] \mapsto (U, u)$ .

右辺は各点右 Kan 拡張  $(\text{Ran}_{(f \circ)} \mathcal{F})(V, v)$  なので, Kan 拡張の一般論により随伴性が分かる. ■

**命題 3.11** ([Sta19] 06WS)

artin stack over a scheme  $S :: \mathcal{X}, \mathcal{Y}$  を考える. 射  $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  と sheaf  $:: \mathcal{F} \in \mathcal{X}_{\text{ET}}$  について,

$$(f_* \mathcal{F})(V, v) = \Gamma(\text{ET}(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X}), \text{pr}_2^{-1} \mathcal{F}).$$

ただし  $\text{pr}_2: V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  は射影である.

(証明). 一般的な次の命題を用いる. 証明は省略する.

**補題 3.12** ([https://ncatlab.org/nlab/show/limit#limit\\_of\\_a\\_setvalued\\_functor](https://ncatlab.org/nlab/show/limit#limit_of_a_setvalued_functor))

site  $:: \mathcal{S}$  上の set-value sheaf  $:: \mathcal{F}$  を考える. この時,

$$\lim(\mathcal{S}^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Set}) = \Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{F}).$$

今, 一つ前の命題と合わせて

$$(f_* \mathcal{F})(V, v) = \lim \left( ((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \pi_1} \mathbf{Set} \right) = \Gamma(((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}, \mathcal{F} \circ \pi_1).$$

なので  $((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}^{\text{op}} = \text{ET}(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X})$  と  $\mathcal{F} \circ \pi_1 = \text{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$  を確かめれば良い.

■  $((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}^{\text{op}} = \text{ET}(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X})$ . ET や  $^{\text{op}}$  の部分は単に site として必要な部分なので,

$$(f \circ) \downarrow (V, v) = \mathbf{Sch}/(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X})$$

を示せば十分. 2-Yoneda embedding を用いて証明する.

対象から見ていく. 図式

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow v \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

を図式  $(*)$  と呼ぶことにする. 圏  $(f \circ) \downarrow (V, v)$  の対象は

- 射  $U \rightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$  と,
- 図式  $(*)$  を 2-可換にする射  $U \rightarrow V$

の組である. 一方,  $V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$  の対象  $(U, x, y, \alpha)$  の対象は 2-Yoneda embedding によって次のように対応する:

- $U \in \mathbf{Sch}/S$  がそのまま scheme  $:: U$  に,
- $x \in (\mathbf{Sch}/V)(U)$  が射  $U \rightarrow V$  に,
- $y \in \mathcal{X}(U)$  が射  $U \rightarrow \mathcal{X}$  に,
- $\alpha: v(x) \xrightarrow{\cong} f(y)$  の存在が図式  $(*)$  の 2-可換性に対応する.

射についても見ていく. 圏  $(f \circ) \downarrow (V, v)$  の射  $(U \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, U \rightarrow V) \rightarrow (U' \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, U' \rightarrow V)$  は, 以

下（の特に  $U$  を頂点とする二つの三角形）を 1-可換にする射  $U \rightarrow U'$  である．

$$\begin{array}{ccccc}
 U & & & & \\
 \searrow & & & \searrow & \\
 & U' & \longrightarrow & V & \\
 & \downarrow & & \downarrow v & \\
 & \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} & 
 \end{array}$$

$V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$  の対象の射

$$(U \rightarrow U', \phi_V: x \rightarrow x', \phi_{\mathcal{X}}: y \rightarrow y')$$

は，それぞれ

- $U \rightarrow U'$  はそのまま  $U \rightarrow U'$  に，
- $\phi_V: x \rightarrow x'$  は  $U, U', V$  の可換な三角形に，
- $\phi_{\mathcal{X}}: y \rightarrow y'$  は  $U, U', V$  の可換な三角形に

対応する．これらの射が満たす条件は，二つの三角形の可換性と右下の四角形の 2-可換性とは整合的であることを意味している．

以上より，所望の圏同値が得られた．

■  $\mathcal{F} \circ \pi_1 = \text{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$ .  $\pi_1: (f \circ) \downarrow (V, v) \rightarrow (\mathbf{Sch}/\mathcal{X})$ ,  $\text{pr}_2: V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  はそれぞれ次のように定義されている．

$$\pi_1: [(f \circ) (U, u) \rightarrow (V, v)] \mapsto (U, u: U \rightarrow \mathcal{X}), \quad \text{pr}_2: (U, x, y, \alpha) \mapsto y: U \rightarrow \mathcal{X}$$

よって  $\mathcal{F} \circ \pi_1 = \mathcal{F} \circ \text{pr}_2 = \text{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$ . な， $\mathcal{F} \circ \pi_1$  は関手の合成， $\text{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$  は関手  $\text{pr}_2^{-1}$  による像であるが，結局同じものである． ■

### 注意 3.13

lisse-etale site を採用する場合は， $f^{-1}$  は colimit として定義される ([LM99] section 12.5)．これは [Sta19] 00XF における  $u_p$  であるが， $f_*$  と adjoint ではない ( $f^{-1} \dashv f_*$  は上で述べた)．

## 参考文献

- [Har97] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. 1st ed. 1977. Corr. 8th printing 1997. Graduate Texts in Mathematics 52. Springer, Apr. 1997.
- [LM99] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs Algébriques*. Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999. ISBN: 978-3-540-65761-3.
- [Sta19] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. 2019. URL: <https://stacks.math.columbia.edu>.