n 変数多項式環を $A^n = k[x_0, \dots, x_n]$ とする．また，$S^n = A^{n+1}$ と置く．一般の n 変数についての場合は A, S とだけ書く．isomorphic of variety は $\equiv$ で書き，homeomrophic of variety は $\cong$ で書く．

問 1

(a) Any conic in $\mathbb{A}^2 \equiv \mathbb{A}^1$ or $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$.

Ex1-1 より，任意の conic curve $X \subset \mathbb{A}^2$ について，$A^2/\mathcal{I}_a(Y) \cong A^1/(0)$ or $A^1/(xy-1)$ となっている．したがって $\mathcal{I}_a(Y) \cong \mathcal{Z}_a(0) = \mathbb{A}^1$ or $\mathcal{Z}_a(xy-1)$ である．

写像 $\sigma : \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} \to \mathcal{Z}_a(xy-1);\quad x \mapsto (x, 1/x)$ を考える．これは明らかな逆写像 $\sigma^{-1} : (x,y) \mapsto x$ が存在するので全単射．あとは σ, σ^{-1} が morphism であることを見ればよいが，これは Lemma 3.6 からすぐに分かる．すなわち，

$$\bar{x} \circ \sigma(x,y) = x, \bar{y} \circ \sigma = 1/x;\ t \circ \sigma^{-1}(u,v) = u$$

よってこれらは morphism.

(b) Any proper open subset $X \subsetneq \mathbb{A}^1$, $\mathbb{A}^1 \not\equiv X$.

任意の真の開部分集合 X は空でない有限集合（=閉集合）T によって $X = \mathbb{A}^1 \setminus F$ と表せる．これに対して，$\omega(x) = \prod_{t \in T}(x-t) \in k[x,y]$ としよう．すると多項式 $f = 1 - y \cdot \omega(y)$ で定義される affine variety は X と同型である．実際，次の写像がその同型写像である．

$$\mu : X \to \mathcal{Z}_a(f);\ x \mapsto (x, 1/\omega(x))$$

逆写像は $(x,y) \mapsto x$ である．これが同型写像であることは Lemma 3.6 から明らか.

さて，$k[x,y]/(f)$ は $A(\mathbb{A}^1) = k[t]$ と同型でない．なぜなら $k[x,y]/(f)$ が $k[t]$ が同型であることは $1/\omega(x)$ が多項式として表せることを言っており，それは有限値の有限和が無限に大きくなることを意味するからである．よって $A(X) \cong k[x,y]/(f) \not\cong A(\mathbb{A}^1)$ すなわち $\mathbb{A}^1 \not\equiv X$.

(c) Any conic in $\mathbb{P}^2$ is isomorphic to $\mathbb{P}^1$.

$\mathbb{P}^2$ の conic curve は既約二次斉次式で定義される．その斉次式を $f \in k[x,y,z]^h$ とし，$X = \mathcal{Z}_p(f)$ としよう．これを 2-uple emdebedding の θ で引き戻す.

$$f = a_0x^2 + a_1xy + a_2y^2 + a_3yz + a_4z^2 \mapsto \theta^{-1}(f) = a_0w_0 + a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + a_4w_4$$

するとこれは $\mathbb{P}^4$ の hyperplane を定義する．

(d) $\mathbb{A}^2$ is not homeomorphic to $\mathbb{P}^2$.

Proposition 3.5 より $\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^2, \mathbb{A}^2) \simeq \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(\mathbb{A}^2), \mathcal{O}(\mathbb{P}^2))$．これらは Theorem3.2, 3.4 より $\mathrm{Hom}(A(\mathbb{A}^2), \mathcal{O}(\mathbb{P}^2)) = \mathrm{Hom}(k[x,y], k)$．これには可逆元すなわち同型写像が属していないので，$\mathrm{Hom}(\mathbb{P}^2, \mathbb{A}^2)$ にも同型写像はない．

(e) If an affine variety X isomorphic to a projective variety, $X = \{one\ point\}$.

Theorem 3.2, 3.4 より

$$A/\mathcal{I}(X) = A(X) \cong \mathcal{O}(X) \cong k$$

最右辺は体なので $\mathcal{I}(X)$ は A の極大イデアル．定義イデアルが極大イデアルとなる affine variety は 1 点集合なので，X は 1 点集合．

問 2

affine variety を考える．

(a) $\phi : t \mapsto (t^2, t^3)$ is a bijective bicontinuous morphism on to $y^2 = x^3$, but not an isomorphism.

ϕ :: a bijective bicontinuous morphism を示そう．全単射であることは逆写像が次のように構成できることから分かる．

$$\phi^{-1} : (x, y) \mapsto y/x; \text{ and } (0, 0) \mapsto 0$$

これは原点だけは y/x の様に計算できないので注意．bicontinuous は有限集合（閉集合）を有限集合（閉集合）に写すことから明らか．

ϕ :: not an isomorphism を示そう．Lemma 3.6 を用いて ϕ^{-1} が regular でないことを見れば十分．

$$t \circ \phi^{-1}(x, y) = \text{if } x = 0 \text{ then } 0 \text{ otherwise } y/x$$

これは明らかに $(0, 0)$ で連続でない．よってこの点で regular でない．

(b) Let the characteristic of the base field k be $p > 0$. $\phi : t \mapsto t^p$ is also.

逆写像は $\phi^{-1} : s \mapsto s^{1/p}$ である．ϕ :: a bijective bicontinuous morphism であることは (a) と同様である．

ϕ :: not an isomorphism を示そう．

$$t \circ \phi^{-1}(s) = s^{1/p}$$

これは多項式でも有理関数でも表示できない．実際，$s^{1/p} = g(s)/h(s)$ と置くと，$g^p(s) = s \cdot h^p(s)$．次数を考えると $p \cdot \deg g(s) = p \cdot \deg h + 1$ となるが，両辺の整数は互いに素なのでこれはありえない．

問 3

(a) $\phi : X \to Y$ induces a local ring homomorphism $\phi_P^* : \mathcal{O}_{\phi(P),Y} \to \mathcal{O}_{P,X}$, for all $P \in X$.

誘導される写像は以下のようなものである．

$$\phi_P^* : \langle U, f \rangle \mapsto \langle \phi^{-1}(U), f \circ \phi \rangle$$

$\phi(P) \in U$ より $P \in \phi^{-1}(U)$ であることに注意．

ϕ_P^* が準同型であることを示そう．$\langle U, f\rangle, \langle V, g\rangle \in \mathcal{O}_{\phi(P),Y}$ をとる．

$$\begin{aligned}
&\phi_P^*(\langle U, f\rangle + \langle V, g\rangle) \\
&= \langle \phi^{-1}(U \cap V), (f+g)\circ\phi\rangle \\
&= \langle \phi^{-1}(U \cap V), (f\circ\phi) + (g\circ\phi)\rangle \\
&= \langle \phi^{-1}(U), f\circ\phi\rangle + \langle \phi^{-1}(V), g\circ\phi\rangle \\
&= \phi_P^*(\langle U, f\rangle) + \phi_P^*(\langle V, g\rangle)
\end{aligned}$$

積については上の式変形を $+$ から $\times$ に変えるだけですむ．また $\langle Y, 0\rangle, \langle Y, 1\rangle$ は $\langle X, 0\rangle, \langle X, 1\rangle$ に写される．以上より ϕ_P^* は準同型である．

さらに $\mathcal{O}_{\phi(P),Y}$ の極大イデアルを $\mathfrak{m}$ としよう．これは $\mathfrak{m} = \{\langle U, f\rangle \mid {}^\exists Q \in U,\ \ f(Q) = 0\}$ と書ける．

$$\phi_P^*(\mathfrak{m}) = \{\langle \phi_P^{-1}(U), f\circ\phi_P\rangle \mid {}^\exists Q \in U,\ \ f(Q) = 0\}$$

さて，$\phi_P^*(\mathfrak{m})$ の元 $\langle \phi_P^{-1}(U), f\circ\phi_P\rangle$ をとる．$Q \in U$ において $f(Q) = 0$ だから，$Q' \in \phi_P^{-1}(Q)$ とすれば $f\circ\phi_P(Q') = f(Q) = 0$．したがって

$$\phi_P^*(\mathfrak{m}) \subseteq \{\langle \phi_P^{-1}(U), f\circ\phi_P\rangle \mid {}^\exists Q' \in \phi_P^{-1}(U),\ \ f\circ\phi_P(Q') = 0\}$$

左辺は $\mathcal{O}_{P,X}$ の極大イデアルの部分集合であるから，ϕ_P^* は homomorphism of local rings.

(b) ϕ is an isomorphism $\iff$ ϕ is a homeomorphism, and the induced map ϕ_P^* is an isomorphism, for all $P \in X$.

($\Longrightarrow$) 仮定は ϕ, ϕ^{-1} が morphism of varieties であることと同値．morphism of varieties は連続写像だから，ϕ::homeomorphism は良い．また，ϕ, ϕ^{-1} がどちらも regular funciton を regular function にするから，以下は (a) で定めた ϕ^* の逆写像である．

$$\phi_P^{*-1} : \langle V, g\rangle \mapsto \langle \phi(V), g\circ\phi^{-1}\rangle$$

($\Longleftarrow$) ϕ::homeomorphism より ϕ, ϕ^{-1} は共に continuous. ϕ_P^*, ϕ_P^{*-1} がともに準同型写像ならば，f::regular on $U \subset X$ について $f\circ\phi^{-1}$ は regular on $\phi(U)$ で，g::regular on $V \subset Y$ について $g\circ\phi$ は regular on $\phi(V)$．したがって ϕ, ϕ^{-1} は共に morphism of varieties.

(c) $\phi(X)$ is dense in Y $\Longrightarrow$ ϕ_P^* is injective for all $P \in X$.

$P \in X$ を任意にとる．$\mathcal{O}_{P,X}$ の元を 1 つとり，$\langle U, f\rangle$ とする．これに対して集合 E を以下のように定める．

$$E = \{\langle V, g\rangle \mid \phi_P^*(\langle V, g\rangle) = \langle U, f\rangle\} \subseteq \mathcal{O}_{\phi(P),Y}$$

これが 1 つの同値類に含まれることを示す．これは $\phi_P^*(a) = \phi_P^*(b) \implies a = b$ と同値である．

$\langle V, g\rangle, \langle V', g'\rangle \in E$ を任意にとる．$\phi_P^*(\langle V, g\rangle) = \phi_P^*(\langle V', g'\rangle) = \langle U, f\rangle$ より，

$$g\circ\phi = g'\circ\phi \text{ on } \phi^{-1}(V \cap V' \cap \phi(X))$$

$\phi(X)$::dense より $(V \cap V') \cap \phi(X)$ は空でない．[1] したがって $(V \cap V') \cap \phi(X)$ から点がとれて，以下のようになる．

$$\begin{aligned}
&{}^\forall P \in \phi^{-1}(V \cap V' \cap \phi(X)),\quad g \circ \phi(P) = g' \circ \phi(P) \\
\iff &{}^\forall Q \in V \cap V' \cap \phi(X),\quad g \circ \phi(\phi^{-1}(Q)) = g' \circ \phi(\phi^{-1}(Q)) \\
\iff &{}^\forall Q \in V \cap V' \cap \phi(X),\quad g(Q) = g'(Q) \\
\iff &g = g' \text{ on } V \cap V' \cap \phi(X) \\
\iff &\langle V, g\rangle = \langle V', g'\rangle
\end{aligned}$$

よって E は 1 つの同値類に含まれる．

問 4　Show that the d-uple embedding of $\mathbb{P}^n$ (Ex. 2-12) is an isomorphism onto its image.

ρ_d が continuous であることは Ex2.12 で示した．開集合 $U \subset \mathbb{P}^n$ での regular function$f$ を考えよう．$f \circ \rho_d : \rho_d^{-1}(U) \to k$ が regular であることを示す．

まず $P \in \rho_d^{-1}(U)$ をとる．この時 $\rho_d(P) \in U$ なので，これの開近傍 $Z(\ni \rho_d(P))$ と，$f = g/h$ on Z かつ $h \neq 0$ on Z なる次数が等しい斉次多項式 g, h が存在する．したがって任意の点 $Q \in \rho_d^{-1}(Z)$ について，$\rho_d(Q) \in Z$ だから

$$f \circ \rho_d(Q) = \frac{g(\rho_d(Q))}{h(\rho_d(Q))} = \left(\frac{g \circ \rho_d}{h \circ \rho_d}\right)(Q)$$

$g \circ \rho_d = \theta(g), h \circ \rho_d = \theta(h)$ より，これらは次数が等しい斉次多項式である (cf.Ex2.12)．また，ρ_d は同相写像なので $\rho_d^{-1}(Z)$ は P の開近傍．

以上より，任意の点 $P \in \rho_d^{-1}(U)$ に対して P の開近傍 $\rho_d^{-1}(Z)$ が存在し，$f \circ \rho_d$ は $\rho_d^{-1}(Z)$ において，多項式 $g \circ \rho_d, h \circ \rho_d$ によって $f \circ \rho_d = g \circ \rho_d / h \circ \rho_d$ と表せる．$h \circ \rho_d \neq 0$ on $\rho_d^{-1}(Z)$ は $h \circ \rho_d(\rho_d^{-1}(z)) = h(z)$ から直ちに得られる．

さらに ρ_d^{-1} について証明が必要だが，これは ρ_d^{-1} が同相写像であり，$g \mapsto g \circ \rho_d^{-1}$ も斉次多項式を斉次多項式に移す (cf.Ex2.12) から，全く同様に証明できる．実際，Ex2.12 の証明で用いた ϕ_i によって $g \circ (\rho_d^{-1}|_{V_i}) = \phi_i(g)$ であり，これは $x_j \mapsto y_{s(i,j)}$ という単射写像である．ρ_d は全単射だから逆写像 $\sigma_i : V_i \to \mathbb{P}^n$ を貼り合わせることが出来る．

問 5　$H \subseteq \mathbb{P}^n$ is any hypersurface, show that $\mathbb{P}^n \setminus H$ is affine.

H が hypersurface ならば，H は既約斉次多項式 f によって定義される．$d := \deg f$ とすると，H は $\rho_d(H)$ と同相になっている (Ex3.4)．$\rho_d(H) \subset \mathbb{P}^N$ は hyperplane なので，$\mathbb{P}^n \setminus H = H^c$ の代わりに $\mathbb{P}^N \setminus \rho_d(H) = \rho_d(H)^c$ を考えよう．以下で示す通り $\rho_d(H)^c$ はある affine variety と同型なので H^c もある affine variety と同型である．

$f = \sum_{0 \le i \le N} c_i M_i$ としよう．M_i は Ex2.12 で定義されている．そのうえで $g = \sum_{0 \le i \le N} c_i y_i$ としよう．まず $\rho_d(H) = \mathcal{Z}_p(g) \cap \operatorname{im} \rho_d$ を示す．

$$\rho_d^{-1}(\mathcal{Z}_p(g) \cap \operatorname{im} \rho_d) = \rho_d^{-1}(\mathcal{Z}_p(g)) \cap \mathbb{P}^n = \mathcal{Z}_p(\theta(g)) = \mathcal{Z}_p(f) = H$$

[1] $\phi^{-1}(V) \cap \phi^{-1}(V')$ は $\phi_P^*(\langle V, g\rangle) = \phi_P^*(\langle V', g'\rangle)$ と比較できているので空でない．

問 6

問 7

問 8

問 9

問 10

問 11

問 12

問 13

問 14

問 15

問 16

問 17

問 18

問 19

問 20

問 21