

以下での (\*) とは、次のもの:  $X :: \text{integral noetherian separated (over } \mathbb{Z}) \text{ scheme which is regular in codimension one.}$

**Ex6.1** If  $X$  Satisfies (\*),  $\text{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \text{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$ .

$X' = X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n = \mathbb{P}_X^n$  とおく. また,  $S = \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]$  とし,  $\mathbb{P}^n = \text{Proj } S$  とみなす.

■  $X' :: \text{integral noetherian separated.}$   $X$  の affine open cover を  $\{\text{Spec } A_i\}_{i=0}^r$  とすると,  $A_i :: \text{integral noetherian } \mathbb{Z}\text{-algebra.}$   $\mathbb{P}^n$  の affine open cover は  $\{\text{Spec } S_{(x_j)}\}_{j=0}^n$  で与えられる.  $S_{(x_j)}$  も integral noetherian  $\mathbb{Z}$ -algebra. したがって  $R_{ij} = A_i \otimes_{\mathbb{Z}} S_{(x_j)}$  とおくと,  $X'$  は  $\text{Spec } R_{ij}$  の張り合わせであり (Thm3.3),  $R_{ij} :: \text{integral noetherian } \mathbb{Z}\text{-algebra.}$  任意の  $(i, j), (i', j')$  について  $R_{ij}, R_{i'j'}$  が交わることから,  $X'$  全体でも irreducible. よって  $X' :: \text{integral noetherian scheme. being separated :: stable under base extension より, } X' :: \text{separated.}$

■  $X' :: \text{regular in codimension one.}$   $x = \tilde{\mathfrak{p}} \in \text{Spec } R_{ij}$  とする.  $A_i \otimes \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_{(x_j)} \cong A_i[x_0, \dots, x_n]_{(x_j)}$  を, 簡単のため  $j = 0$  とし,  $R_0 := A[\{x_j\}_{j=0}^n]$  とおく. Ati-Mac Prop3.1 より,  $\tilde{\mathfrak{p}} \subset (R_0)_{(x_0)}$  に対応する height = 1 の素イデアル  $\mathfrak{p} \subset R_0$  がただひとつ存在し,  $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(x_0)}$  となる. これを使って計算すると, 以下のようになる.

$$\mathcal{O}_{X',x} = ((R_0)_{(x_0)})_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a/x_0^d}{b/x_0^e} \mid d, e \geq 0, a \in (R_0)_d, b \in (R_0 - \mathfrak{p})_e \right\} \cong A[\{x_j\}_{j=1}^n]_{\mathfrak{p}'} =: R_1.$$

最後の同型は次のように与えられる.

$$\begin{aligned} (R_0)_{(x_0)} = A[\{x_j\}_{j=0}^n]_{(x_0)} &\rightarrow R_1 = A[\{x_j\}_{j=1}^n] \\ f(x_0, x_1, \dots, x_n) &\mapsto f(1, x_1, \dots, x_n) \\ g(x_1/x_0, \dots, x_n/x_0) &\leftarrow g(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$\mathfrak{p}'$  はこの写像による  $\mathfrak{p}$  の像である.  $R_1$  は  $A$  と同様に integral noetherian ring.  $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}' \cap A$  とおく.  $A \subset R_1$  は flat extension だから, going-down theorem が成立し, height  $\mathfrak{q} \leq \text{height } \mathfrak{p}' = 1$ . また, 計算すると

$$(R_1)_{\mathfrak{p}'} \cong (A_{\mathfrak{q}}[\{x_j\}_{j=1}^n])_{\mathfrak{p}''}.$$

ただし  $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}' A_{\mathfrak{q}}$ . height  $\mathfrak{q} = 1$  の時, 仮定から  $A_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{X,\mathfrak{q}} :: \text{regular local ring.}$  よって  $(R_1)_{\mathfrak{p}'}$  は D.V.R. height  $\mathfrak{q} = 0$  すなわち  $\mathfrak{q} = 0$  の時, 同様に  $(R_1)_{\mathfrak{p}'}$  は体  $A_{(0)}$  上の多項式環の  $\mathfrak{p}$  における局所化だから D.V.R.

■ Another Proof:  $X' :: \text{regular in codimension one.}$   $\mathbb{P}^n$  は  $n+1$  個の  $\mathbb{A}^n$  で被覆出来るから,  $X \times \mathbb{P}^n$  は  $n+1$  個の  $X \times \mathbb{A}^n$  で被覆できる.  $X \times \mathbb{A}^n$  は Prop6.6 のとおり (\*) を満たすから, (\*) のうち local な性質はすべて満たす. global な性質は noetherian と irreducible のみであるが, これらはそれぞれ  $R_{ij}$  が noetherian であること, 任意の  $(i, j), (i', j')$  について  $\text{Spec } R_{ij} \cap \text{Spec } R_{i'j'} \neq \emptyset$  であることからわかる. よって  $X \times \mathbb{P}^n$  も (\*) を満たす.

■ Definition of  $\text{pr}_1, \text{pr}_2, \pi$ .  $X \times \mathbb{P}^n$  から  $X, \mathbb{P}^n$  への projection をそれぞれ  $\text{pr}_1, \text{pr}_2$  とする. また  $X \times \mathbb{A}^n \rightarrow X$  の projection を  $\pi$  とする. Prop6.6 の証明から  $\pi^*: \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(X \times \mathbb{A}^n)$  は全単射.

■Exact Sequence in Prop6.5.  $\mathfrak{p} = (x_0) \in \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n] = S$  とする.  $Z = \text{pr}_2^{-1}(V(\mathfrak{p}))$  とおくと,  $Z$  :: irreducible closed subset of codim = 1 in  $X \times \mathbb{P}^n$  <sup>†1</sup>.  $U = Z^c = \text{pr}_2^{-1}(V(\mathfrak{p})^c) \cong X \times \mathbb{A}^n$  だから, Ex3.9a と Prop6.6 より,  $\text{Cl}(U) \cong \text{Cl}(X)$ . したがって Prop6.5 の完全列は以下のようになる.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \text{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{j} \text{Cl}(X) \longrightarrow 0$$

$\text{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \text{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$  を示すには,  $i: 1 \mapsto 1 \cdot Z$  が単射であること, および  $j: Y \mapsto (\pi^*)^{-1}(Y \cap U)$  が split することを示せば十分である. 後者はすぐに分かる.  $\pi^*: \text{Cl}(X) \rightarrow \text{Cl}(U)$  は全単射だから,  $W$  :: prime divisor in  $X$  について,

$$j(\text{pr}_1^*(W)) = (\pi^*)^{-1}(\text{pr}_1^*(W) \cap U) = (\pi^*)^{-1}(\text{pr}_1|_U)^{-1}W = (\pi^*)^{-1}\pi^{-1}W = (\pi^*)^{-1}\pi^*W = W.$$

$(\text{pr}_1^*W) \cap U = (\text{pr}_1^{-1}W) \cap U = (\text{pr}_1|_U)^{-1}W$  を用いた.

■ $i$  :: injective.  $X' = X \times \mathbb{P}^n, K$  :: function field of  $X'$  とし,  $d \in \mathbb{Z} - \{0\}$  をとる. 示すべきことは,  $dZ = (f)$  を満たす  $f \in K^\times$  が存在しないこと. 正次数の斉次元  $t \in A[x_0, \dots, x_n]$  をとり,  $V = \text{Spec } A[x_0, \dots, x_n]_{(t)} = D_+(t) \subset X'$  において  $f$  が regular (pole を持たない) だしよう.  $D_+(t)$  は基本開集合を成すから, このようにすることは可能である. また,  $V \cap Z \neq \emptyset$ , したがって  $t \notin (x_0)$  とする. この時,  $f \in A[x_0, \dots, x_n]_{(t)}, V \cap Z = V((x_0))$ .  $V \cap Z$  の generic point を  $\eta = x_0 \cdot A[x_0, \dots, x_n]_{(t)}$  <sup>†2</sup> とおくと,  $\eta$  に対応する valuation は  $v_{V \cap Z}(f) = \sup\{d \mid f \in \eta^d - \eta^{d+1}\}$  で定まる. なので  $v(f) = d$  ならば,  $f$  は次のようになる.

$$f = \left(\frac{x_0^m}{t}\right)^d \frac{g}{t^e} \text{ where } m := \deg t, \quad e \geq 0, \quad g \in A[x_0, \dots, x_n]_{em}, \quad t, x_0^m \nmid g$$

$d \neq 0$  と仮定する.  $e = \deg g = 0$  の時,  $t$  の既約因数によって定まる prime divisor  $T$  上で  $v_T(f) < 0$  となる.  $e > 0$  の時,  $g$  の既約因数によって定まる prime divisor  $G$  上で  $v_G(f) > 0$  となる. 以上から,  $dZ = (f)$  となるならば  $d = 0$ . よって  $i$  :: injective.

## Ex6.2 Varieties in Projective Space.

### Ex6.3 Cones.

### Ex6.4 $A = k[x_1, \dots, x_n, z]/(z^2 - f)$ :: integrally closed.

$\text{char } k \neq 2$  とする.  $x_1, \dots, x_n$  を  $\vec{x}$  と略す.  $f \in k[\vec{x}]$  :: square-free とし,  $A = k[\vec{x}, z]/(z^2 - f)$  とおく. また,  $\bar{z} = z + (z^2 - f)$  とする. ( $\bar{z} = \sqrt{f}, A = k[\vec{x}, \sqrt{f}]$  と考えて良い.)  $f$  :: square-free より  $z^2 - f$  :: irreducible,  $A$  :: integral domain.

■ $K$  の同定. この時,  $K = \text{Quot}(A)$  は  $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f)$  である. 実際,  $K$  の元は  $g, h \in A$  の元によって  $g/h$  と表されるが,  $z^2 = f$  なので,  $g/h$  は分母の「有理化」によって  $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f)$  に属することが分かる. したがって  $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f) \subseteq K$  であり, 逆の包含関係は明らか.

<sup>†1</sup>  $\text{Spec } A_i \subseteq X, U_{ij} = \text{Spec } A_i \otimes S_{(x_j)}, j \neq 0$  とする.  $\text{pr}_2|_{U_{ij}}$  は  $s \mapsto 1 \otimes s$  から誘導されるから,

$$Z \cap U_{ij} = (\text{pr}_2|_{U_{ij}})^{-1}(V(\mathfrak{p})) = V(1 \otimes \mathfrak{p}) = V((1 \otimes x_0)) \subset \text{Spec } A_i \otimes S_{(x_j)}$$

$1 \otimes x_0$  は非単元かつ不定元だから, Krulls Hauptidealsatz より,  $(1 \otimes x_0) \subset A_i \otimes S_{(x_j)}$  が高さ 1 の素イデアルであることは明らか. よって  $\text{codim}(Z \cap U_{ij}, U_{ij}) = 1, \text{codim}(Z, X') = 1$ .

<sup>†2</sup>  $\text{pr}_1$  は埋め込み写像  $A \rightarrow A \otimes \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_{(t)}$  で誘導されるから,  $Z = \text{pr}_1^{-1}V((x_0)) = V((x_0 \otimes 1))$ .  $x_0 \otimes 1$  は  $A \otimes \mathbb{Z}[x_0, \dots, x_n]_{(t)} \cong A[x_0, \dots, x_n]_{(t)}$  の同型写像で  $x_0$  へ写る.

■  $K/k(\bar{x})$ .  $K$  は  $k(\bar{x})$  上の 2 次式  $\bar{z}^2 - f$  の最小分解体だから,  $K/k(\bar{x})$  は 2 次のガロア拡大である.  $\text{Gal}(K/k(\bar{x}))$  は,  $\sigma: \bar{z} \mapsto -\bar{z}$  で生成される位数 2 の群.

■  $A :: \text{integral closure of } k[\bar{x}] \text{ in } K$ .  $\alpha \in K$  をとると, これは  $g, h \in k(\bar{x})$  を用いて  $g + h\bar{z}$  と書ける.  $\alpha$  の最小多項式は,

$$(X - \alpha)(X - \sigma(\alpha)) = X^2 - 2gX + (g^2 - h^2f).$$

この多項式の各係数が  $k[\bar{x}]$  に属しているとしよう. すると, まず明らかに  $g \in k[\bar{x}]$  である. また  $f :: \text{square-free}$  より,  $h \notin k[\bar{x}]$  ならば  $h^2$  の分母は  $f$  の因子で打ち消されず,  $h^2f, g^2 - h^2f \notin k[\bar{x}]$  となる. よって  $\alpha :: \text{integral} / k[\bar{x}]$  ならば  $\alpha \in k[\bar{x}]$ . 逆に  $\alpha \in k[\bar{x}]$  ならば  $g, h \in k[\bar{x}]$  だから  $\alpha$  の最小多項式は  $k[\bar{x}]$  係数多項式になる. 以上をまとめて  $A :: \text{integrally closed}$  が分かる.

■ 系. 以上から,  $z^2 - f = 0$  で定まる hypersurface は affine variety として normal である. 特に,  $f(x) \in k[x]$  が重根を持たない 3 次多項式であるとき, 楕円曲線  $y^2 = f(x)$  は normal curve である.

## Ex6.5 Quadric Hypersurfaces.

$k :: \text{field, char } k \neq 2$  とし,

$$f = x_0^2 + \cdots + x_r^2 \in k[x_0, \dots, x_n], \quad A(X) = k[x_0, \dots, x_n]/(f), \quad X = \text{Spec } A(X)$$

とおく. ch I, Ex3.12 より,  $\mathbb{A}^{n+1}$  の任意の  $r$  変数 quadric hypersurfaces は  $X$  と同型である.

(a)  $X :: \text{normal if } r \geq 2$ .

$f = x_0^2 - (-x_1^2 - \cdots - x_n^2)$  なので, Ex6.4 より  $A(X) :: \text{integrally closed}$ . よって任意の点における  $A(X)$  の局所化も integrally closed である. すなわち  $X :: \text{normal}$

Ex6.6 Consider  $X = \mathcal{Z}_p(y^2z - x^3 + xz^2)$ .

Ex6.7 For  $X = \mathcal{Z}_p(y^2z - x^3 - x^2z)$ ,  $\text{CaCl}^0(X) \cong \mathbf{G}_m$ .

$k :: \text{algebraically closed field, char } k \neq 2$  とし,  $\mathbb{P}_k^2$  内の曲線を考えていく.  $f = y^2z - x^3 - x^2z, X = \text{Proj } k[x, y, z]/(f) \subset \mathbb{P}_k^2$  とする.  $S(X) = k[x, y, z]/(f)$  と書く.  $X$  の codimension 1 の点は,  $\dim X = 1$  より, closed point に他ならない.  $X$  は  $Z = (0 : 0 : 1)$  に node をもつ.

■  $\text{CaCl}^0(X) \cong \text{Cl}(X - Z)$ .  $X$  の singular point は  $Z$  しかない. これは ch I, Ex5.8 をつかって確認できる.  $X = \text{Proj } S(X)$  が noetherian scheme であることから, Thm4.9 より  $X - Z :: \text{nonsingular \& separated \& finite type}$ . 明らかに integral であることと合わせれば,  $X - Z$  が (\*) を満たすことが分かる.  $X$  全体でも integral だから,  $\mathcal{K}_X :: \text{sheaf of total quotient rings of } \mathcal{O}_X$  は function field  $K$  である.  $P \in X - Z$  に対する Cartier Divisor  $D_P$  の定め方,  $\text{CaCl}^0(X)$  の任意の元に対して, それが  $D_P$  と線形同値になる closed point  $X - Z$  が存在することの議論は Example6.11.4 と全く同様である.

■  $X - Z \cong \mathbb{A}^1 - \{0\}$ .  $(s : t : 0) \in V(z) \cong \mathbb{P}^1$  をとり,  $(s : t : 0)$  と  $Z = (0 : 0 : 1)$  を結ぶ直線  $sy - tx = 0$  と  $X$  の交点を計算する. すると  $\mathbb{P}^1 \rightarrow X$  の写像が得られる.

$$(s : t) \mapsto (x : y : z) = (s(t^2 - s^2) : t(t^2 - s^2) : s^3)$$

$(1 : 1), (1 : -1)$  はこの写像で  $Z$  へうつる. そこで以下のように置くと, isomorphism になる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 - \{(1:1), (1:-1)\} & \rightarrow & X - Z \\ (s:t) & \mapsto & (s(t^2 - s^2) : t(t^2 - s^2) : s^3) \\ (x:y) & \leftarrow & (x:y:z) \end{array}$$

$\mathbb{P}^1 - \{(1:1), (1:-1)\}$  は  $(s:t) \mapsto \frac{s+t}{s-t} = u \mapsto (1-u:1+u)$  によって  $\mathbb{A}^1 - \{0\}$  と同型である。したがって、結局次の同型が出来る。

$$\begin{array}{ccc} \phi: \mathbb{A}^1 - \{0\} & \rightarrow & X - Z \\ t & \mapsto & (4(1-t)t : 4(1+t)t : (1-t)^3) \\ \frac{-x+y}{x+y} & \leftarrow & (x:y:z) \end{array}$$

■  $\text{Cl}(X)$  の特徴.  $\phi(1) = P_1 = (0:1:0)$  とおく。計算すると  $(x:y:z) \in X$  について  $P_1, (x:y:z), (x:-y:z)$  が一直線上にある。つまり、 $P_1, (x:y:z), (x:-y:z)$  を零点に持つ一次式  $l$  が存在する。よって  $P_1 + (x:y:z) + (x:-y:z) \sim 0$  が得られる。(TODO: Example 6.10.2 の  $P+Q+R \sim 3P_1$  は更に  $3P_1 = (z) \sim 0$  ということで良いのか?)

■  $\text{CaCl}^0(X) \cong \text{Cl}(X - Z) \cong \mathbf{G}_m$ .  $\phi(1) = P_1$  に注意する。計算すると、 $\phi(t), \phi(u)$  と  $\phi(tu)$  の  $y$  成分の符号を反転させたものが一直線上にある。

$$\phi(t) + \phi(u) - (\phi(tu) + P_1) \sim 0.$$

変形して、

$$\begin{aligned} \phi(t) + \phi(u) - (\phi(tu) + P_1) &\sim 0 \\ \phi(t) + \phi(u) - P_1 &\sim \phi(tu) \\ (\phi(s) - P_1) + (\phi(t) - P_1) &\sim \phi(st) - P_1. \end{aligned}$$

よって、 $P_1$  を単位元とすれば、 $\text{CaCl}^0(X) \cong \text{Cl}(X - Z) \cong \mathbf{G}_m$ 。

## Ex6.8 Morphism of Schemes Induces Homomorphism of Pic / Cl.

## Ex6.9 (Culating the Picard Groups of ) Singular Curves.

$X ::$  projective curve  $/k$ ,  $\tilde{X} ::$  normalization of  $X$  (Ex3.8),  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X ::$  projection,  $\tilde{\mathcal{O}}_P ::$  integral closure of  $\mathcal{O}_P$  ( $P \in X$ ) とする。p.136 にある curve  $/k$  の定義から、 $X ::$  integral, separated, finite type  $/k$ . このことと Ex3.8 より、 $\pi ::$  finite morphism.

(a) Show there is an exact sequence.

次の完全列を示す。

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^* / \mathcal{O}_P^* \longrightarrow \text{Pic } X \xrightarrow{\pi^*} \text{Pic } \tilde{X} \longrightarrow 0.$$

Prop6.15 から、 $\text{Pic } X, \text{Pic } \tilde{X}$  はそれぞれ  $\text{CaCl } X, \text{CaCl } \tilde{X}$  と同型である。次の写像を考える。

$$\begin{array}{ccc} \phi: (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^* & \rightarrow & \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^* \\ \phi_U: s + \mathcal{O}_X(U)^* & \mapsto & s/1 + \mathcal{O}_X(U)^* \end{array}$$

単元を単元に写す写像だから、これは単射<sup>†3</sup>。したがって次の完全列が得られる。

$$0 \longrightarrow (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}^* / (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* \longrightarrow 0$$

( $\text{coker } \phi$  は加群の同型定理と sheafification を通して得られる。) (これは  $0 \rightarrow \ker \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow \text{coker} \rightarrow 0$  という形の完全列である。) この exact sequence について、各点  $P \in X$  での stalk をとると、再び exact sequence になる (Ex1.2)。それらを  $\bigoplus_{P \in X}$  でまとめても exact。

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} [(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^*]_P \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} [\mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^*]_P \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} [\mathcal{K}^* / (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^*]_P \longrightarrow 0 \quad (*)$$

(\*) の最初の要素を見よう。  $P \in X$  について、  $[(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^*]_P = (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^*_P / \mathcal{O}_P^*$  は明らか。  
( $\varinjlim_{P \in U} \mathcal{O}_X^*(U)$  の元はすべて可逆であることに注意。)  $P \in U = \text{Spec } A \subseteq X$  とすると、  $\tilde{X}$  の作り方から  $\pi^{-1} \text{Spec } A = \text{Spec } \tilde{A}$  である ( $\tilde{A}$  は  $A$  の整閉包)。 (正確には、このように  $U$  がとれるということであり、  $U$  を適当にとって良いということは分らない。) よって  $\Gamma(U, (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})|_U) = \tilde{A}$ 。  $(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})|_U :: \text{sheaf on affine scheme}$  だから

$$[(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})|_U]_P = \varinjlim_{(\pi|_U)^{-1}(\{P\}) \subseteq V} \mathcal{O}_{\text{Spec } \tilde{A}}(V).$$

$\mathfrak{p}$  を  $P \in \text{Spec } A$  に対応する素イデアルとする。

$S = A - \mathfrak{p}$  とおくと、  $(\pi|_U)^{-1}(\{P\})$  は  $\mathfrak{q} \cap A = \mathfrak{p}$  となる  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \tilde{A}$  の全体である。 (この  $\mathfrak{q}$  が存在すること、すなわち  $(\pi|_U)^{-1}(\{P\})$  が空でないことは Ati-Mac Thm5.10 により分かる。) ( $\pi|_U$  は埋め込み準同型  $A \hookrightarrow \tilde{A}$  に対応する。)  $S = A - \mathfrak{p}$  とおけば、これは  $S \cap \mathfrak{q} = \emptyset$  となる  $\mathfrak{q} \in \text{Spec } \tilde{A}$  の全体に一致する。したがって次のようになる。

$$(\pi|_U)^{-1}(\{P\}) = \bigcup_{f \in S} \{\mathfrak{q} \in \text{Spec } \tilde{A} \mid f \notin \mathfrak{q}\} = \bigcup_{f \in S} V^c(f), \quad \varinjlim_{(\pi|_U)^{-1}(\{P\}) \subseteq V} \mathcal{O}_{\text{Spec } \tilde{A}}(V) = \varinjlim_{f \in S} \tilde{A}_f = S^{-1} \tilde{A}.$$

ただし  $\varinjlim_{f \in S}$  は  $\{D(f) \hookrightarrow D(f') \mid f, f' \in S\}$  という direct system についての direct limit である。一方、  $S^{-1} \tilde{A}$  は  $S^{-1} A = A_{\mathfrak{p}}$  の整閉包である (Ati-Mac Prop5.12)。 よって  $[(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})]_P \cong (A_{\mathfrak{p}})^{\sim} = \tilde{\mathcal{O}}_P$ 。 以上から  $(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^*_P / \mathcal{O}_P^* \cong \tilde{\mathcal{O}}_P^* / \mathcal{O}_P^*$ 。

$\mathcal{K}$  は  $X :: \text{integral}$  より constant sheaf である。 よって (\*) の他の部分も同様に計算できる。

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^* / \mathcal{O}_P^* \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_P^* \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} \mathcal{K}^* / \tilde{\mathcal{O}}_P^* \longrightarrow 0 \quad (*')$$

次に  $\bigoplus_{P \in X} \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_P^* \cong \text{CaCl } X$  を示したい。

## Ex6.10 The Grothendieck Group $K(X)$ .

■Fundamental Property of  $K(X)$ .  $\gamma \mathcal{F} = \gamma \mathcal{G} + \gamma \mathcal{H}$  となっている時、次の完全列が存在する。

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

したがって  $\mathcal{H} \cong \mathcal{F} / \mathcal{G}$ 。 単位元は  $0 :: \text{zero sheaf}$  の像  $\gamma 0$  である。 また  $\gamma \mathcal{F} = \gamma \mathcal{F}' (+ \gamma 0)$  ならば  $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$ 。

(a) If  $X = \mathbb{A}_k^1$ ,  $K(X) \cong \mathbb{Z}$ .

$A = k[x]$  とし、  $\mathcal{F} :: \text{coherent sheaf on } X = \text{Spec } A$  をとる。  $\mathcal{I} = \mathcal{O}_X = \tilde{A}$  と書くことにする。

まず、  $\gamma \mathcal{F} = n(\gamma \mathcal{I})$  となる  $n \in \mathbb{Z}$  が存在することを示す。

<sup>†3</sup>  $\phi(1) = \phi(x)\phi(x^{-1}) = 1$  なので  $\phi(x), \phi(x^{-1}) \neq 0$ 。

■Reduce Into  $\mathcal{F} = \tilde{M}$  Case.  $X ::$  noetherian affine scheme と Cor5.5 より, finitely generated  $A$ -module の exact sequence と coherent sheaf on  $X$  の exact sequence が一対一に対応する. なので  $\mathcal{F}$  が finitely generated module  $M$  によって  $\tilde{M}$  と書ける場合のみ考えれば良い.

■Case:  $\mathcal{F} = \mathcal{I}^{\oplus n}$ . 次の完全列が存在する.

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow A^{\oplus n-1} \longrightarrow 0.$$

$A \rightarrow A^{\oplus n}$  は  $x \mapsto (x, 0, \dots, 0)$  である. この完全列の存在から  $\gamma\mathcal{I}^{\oplus n} = \gamma\mathcal{I} + \gamma\mathcal{I}^{\oplus n-1}$  が得られる. よって帰納的に  $\gamma\mathcal{I}^{\oplus n} = n(\gamma\mathcal{I})$ .

■Case:  $\mathcal{F} = \tilde{M}$ .  $M ::$  finitely generated module なので,  $n > 0, N \subseteq A^{\oplus n}$  が存在し, 次の完全列が成立する (Ati-Mac Prop2.3).

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

よって  $\gamma\tilde{M} = \gamma\mathcal{I}^{\oplus n} - \gamma\tilde{N}$ . また,  $A$  が PID であることから,  $A$  上の自由加群の部分加群はまた自由である. したがって前段落と合わせて,  $\gamma\tilde{M} = k(\gamma\mathcal{I})$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) が示された.

■対応が一対一であること, 及び準同型であること. 対応が単射的であることは明らか. 全射的であること, すなわち任意の  $n \in \mathbb{Z}$  に対して  $n(\gamma\mathcal{I}) \in K(X)$  であることは,  $K(X)$  が free  $\mathbb{Z}$ -module であることから. また, 次の完全列から  $(m+n)(\gamma\mathcal{I}) = m(\gamma\mathcal{I}) + n(\gamma\mathcal{I})$  も成り立つ.

$$0 \longrightarrow A^{\oplus m} \longrightarrow A^{\oplus(m+n)} \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow 0.$$

(これによると任意の  $M$  について  $\tilde{M} \cong \tilde{A}^{\oplus n}$ , したがって  $M$  が free となる.)

(b)  $\text{rank} : K(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  is surjective homomorphism.

$X ::$  integral scheme,  $\zeta ::$  generic point of  $X$ ,  $k = \mathcal{O}_{X,\zeta} ::$  function field of  $X$  とする.  $x = \sum_i n_i(\gamma\mathcal{F}_i) \in K(X)$  に対して,  $\text{rank } x = \sum_i n_i \dim_k(\mathcal{F}_i)_{\zeta}$  と定める. この rank を考える.

■rank :: well-defined homomorphism.  $\gamma\mathcal{F} = \gamma\mathcal{F}'$  の時,  $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$ . なので  $\text{rank } \gamma\mathcal{F} = \text{rank } \gamma\mathcal{F}'$ . また,  $x$  の表現はいろいろあるので, これについて整合的であることを確かめなくてはならない.  $\gamma\mathcal{F}, \gamma\mathcal{G}, \gamma\mathcal{H} \in K(X)$  をとり,  $\gamma\mathcal{F} + \gamma\mathcal{G} = \gamma\mathcal{H}$  だとする. この時, 次の完全列が存在する.

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

stalk を取る操作は exact functor (Ex1.2) だから, 次が得られる.

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{\zeta} \longrightarrow \mathcal{H}_{\zeta} \longrightarrow \mathcal{G}_{\zeta} \longrightarrow 0.$$

これは  $\mathcal{O}_{X,\zeta} = k$ -module の exact sequence.  $\dim_k$  は additive だから  $\text{rank } \gamma\mathcal{H} = \text{rank } \gamma\mathcal{F} + \text{rank } \gamma\mathcal{G}$  となる.  $x, y \in K(X)$  について  $\text{rank}(x+y) = \text{rank } x + \text{rank } y$  となることは定義と以上のことから分かる.

■rank :: surjective.  $\text{rank } n(\gamma\mathcal{O}_X) = n \text{rank}(\gamma\mathcal{O}_X) = n \dim_k k = n$  より, 全射.

(c) For  $Y ::$  closed subscheme of  $X$ ,  $K(Y) \rightarrow K(X) \rightarrow K(X - Y) \rightarrow 0 ::$  exact.

$X ::$  noetherian scheme,  $Y ::$  closed subscheme of  $X$  とする.  $i : Y \rightarrow X$  を closed immersion,  $j : X - Y \rightarrow X$  を open immersion とする. 次の写像の列を考える.

$$K(Y) \xrightarrow{\epsilon} K(X) \xrightarrow{\rho} K(X - Y) \longrightarrow 0.$$

ここで  $\epsilon$  は extension of coherent sheaf on  $Y$ ,  $\gamma\mathcal{F} \mapsto \gamma(i_*\mathcal{F})$  (Ex1.19),  $\rho$  は restriction,  $\gamma\mathcal{G} \mapsto \gamma(j^{-1}\mathcal{G})$  である.

■Easy Parts. Ex5.15 から  $\rho$  は全射. また  $\text{im } \rho \circ \epsilon$  ( $Y$  上の sheaf を  $X$  上に 0 で拡張して  $X - Y$  に制限したもの) が 0 であること, すなわち  $\text{im } \epsilon \subseteq \ker \rho$  は明らか. したがって, ここで示すべきは  $\text{im } \epsilon \supseteq \ker \rho$  である.

■Map a Course.  $\mathcal{F} \in \ker \rho$  をとる. 言い換えれば,  $\mathcal{F}$  を  $X$  上の coherent sheaf であって  $\text{Supp } \mathcal{F} \subseteq Y$  であるものとする. Ex5.6c より,  $\text{Supp } \mathcal{F} ::$  closed in  $X$ . この  $\mathcal{F}$  から, 次のような finite filtration の存在を示す:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F}_n = 0$$

ここで  $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1}$  は  $\text{im } \epsilon$  の元. すると次の完全列が存在する.

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1} \longrightarrow 0.$$

したがって  $\gamma\mathcal{F}_k = \gamma\mathcal{F}_{k+1} + \gamma(\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1})$ . 帰納的に  $\gamma\mathcal{F} = \gamma\mathcal{F}_0 = \sum_{k=1}^n \gamma(\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1})$  が得られる.  $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1}$  は  $\text{im } \epsilon$  の元としていたから,  $\gamma\mathcal{F} \in \text{im } \epsilon$ .

#### 主張 Ex6.10.1

次の finite filtration が存在する.

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F}_n = 0$$

ここで  $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1}$  は  $\text{im } \epsilon$  の元.

(証明).

■surjective map  $\phi_k : \mathcal{F}_k \rightarrow i_*i^*\mathcal{F}_k$ . surjective map  $\phi_0 : \mathcal{F} \rightarrow i_*i^*\mathcal{F}$  が存在することを示す.  $U = \text{Spec } A \subseteq X$  をとる.  $Y \cap U$  は  $U$  の closed subscheme なので, Cor5.10 より  $\mathfrak{a} \subseteq A ::$  ideal によって  $V := V \cong \text{Spec } A/\mathfrak{a}$  となる. したがって  $i|_V : \text{Spec } A/\mathfrak{a} \rightarrow \text{Spec } A$ .  $\mathcal{F}|_V = \tilde{M} ::$  finitely generated  $A/\mathfrak{a}$ -module とする. Prop5.2 より, 次のように計算できる.

$$(i_*i^*\mathcal{F})|_V \cong ({}_A(M \otimes_A A/\mathfrak{a}))^\sim \cong (M/\mathfrak{a}M)^\sim.$$

よって  $M \rightarrow M/\mathfrak{a}M$  から誘導される surjective map  $\mathcal{F}|_V \rightarrow (i_*i^*\mathcal{F})|_V$  が存在する. これが gluing できることは明らか. こうして所望の  $\phi_0$  が得られる. (adjoint の counit から作りたかったが, これは素性がよくわからない.)

■ $\mathcal{F}_{k+1} := \ker \phi_k$ . したがって次の完全列がある.

$$0 \longrightarrow \ker \phi_0 \longrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow i_*i^*\mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Ex1.6 より  $\epsilon(\gamma(i^*\mathcal{F})) = \gamma(i_*i^*\mathcal{F}) \cong \gamma(\mathcal{F}/\ker \phi_0)$  となり,  $\mathcal{F}_1 = \ker \phi_0$  とすれば良いことが分かる. 以下, 帰納的に  $\phi_k : \mathcal{F}_k \rightarrow i_*i^*\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+1} = \ker \phi_k$  とすれば良い. 上での構成法から,  $(\mathcal{F}_k)|_V \cong (\mathfrak{a}^k M)^\sim$  がわかる.

■ This filtration is finite. 最後に、この列が有限であることを見る。  $(\mathcal{F}_k)|_V \cong (\mathfrak{a}^k M)^\sim$  なので、十分大きい  $k > 0$  について  $\mathfrak{a}^k M = 0$  であること、すなわち  $\mathfrak{a}^k \subseteq \text{Ann}(M)$  となることを示せば良い。  $V(\text{Ann}(M)) = \text{Supp } \mathcal{F}|_V \subseteq V \cong V(\mathfrak{a})$  (Ex5.6b) より、  $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\text{Ann}(M)}$ .  $A ::$  noetherian ring より、  $\mathfrak{a}$  の生成元は有限個である。したがって十分大きな  $k > 0$  をとると、  $\mathfrak{a}$  の任意の生成元 (集合の一元)  $g$  に対して  $g^k \in \text{Ann}(M)$  であるように出来る。この  $k$  について  $\mathfrak{a}^k \subseteq \text{Ann}(M)$ .  $Y$  は  $\mathfrak{V} ::$  finite affine open cover を持つから、  $n = \max_{V \in \mathfrak{V}} \min_{(\mathcal{F}_k)|_V = 0} k$  とすれば、任意の  $V \in \mathfrak{V}$  について  $(\mathcal{F}_n)|_V = 0$ , つまり (Identity Axiom から)  $\mathcal{F}_n = 0$  となる. ■

## Ex6.11 The Grothendieck Group of a Nonsingular Curve.

$k ::$  algebraically closed field,  $X ::$  nonsingular curve /  $k$  とする.  $K(X) \cong \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z}$  を示そう.

## Ex6.12 The Degree of Coherent Sheaf.

Ex6.11 の続きと言える.  $X ::$  complete nonsingular curve とする. Ex6.11 より  $K(X) \cong \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z}$ . また nonsingular  $\implies$  regular  $\implies$  locally factorial なので Cor6.16 より  $\text{Pic } X \cong \text{Cl } X$ . そこで、  $\mathcal{F} ::$  coherent sheaf on  $X$  に対する  $\deg \mathcal{F}$  を、

$$\gamma(\mathcal{F}) \in K(X) \xrightarrow{\cong} \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \text{Pic } X \xrightarrow{\cong} \text{Cl } X \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

で定める. 右端の  $\deg$  は degree of Weil divisor である.  $D ::$  Weil divisor に対し、  $\gamma(\mathcal{L}(D))$  は上の写像で  $D$  へ写る. なので、The Grothendieck Group の定義と合わせて、以下が成立する.

- (1) If  $D ::$  divisor,  $\deg \mathcal{L}(D) = \deg D$ .
- (2) If  $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'' \rightarrow 0 ::$  exact sequence, then  $\deg \mathcal{F} = \deg \mathcal{F}' + \deg \mathcal{F}''$ .

次を示す: If  $\mathcal{T}$  is a torsion sheaf, then  $\deg \mathcal{T} = \sum_{P \in X} \text{length } \mathcal{T}_P$ .

$U = \text{Spec } A \subseteq X$  を任意にとり、  $T ::$  torsion  $A$ -module について  $\mathcal{T}|_U \cong \tilde{T}$  であるとする.  $\mathfrak{p} \in U$  に対し、  $T_{\mathfrak{p}}$  は  $A - \mathfrak{p}$  が  $\mathfrak{a} = \text{Ann}(T)$  の元を含む時 0 になる. したがって  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$  の時のみ  $T_{\mathfrak{p}} \neq 0$ . そこで  $V = V(\mathfrak{a})$  とする.  $\mathfrak{a} \neq (0)$  かつ  $X$  は 1 次元だから、  $V$  は有限個の点のみからなる.

$\tilde{T} \in K(U)$  に対応する  $D_T \in \text{Cl } U$  を考える. Ex6.11a の構成によると、  $D_T$  の the structure sheaf of the associated subscheme が  $\tilde{T}$  である. したがって  $D_T$  は以下ようになる.

$$D_T = \sum_{P \in V} v_P(f_P) \{P\}.$$

ただし  $f_P \in A$  は  $V(f_P) = \{P\} \subseteq U$  を満たす. したがって  $v_P(f_P) = \text{length } T_P$  を示せば十分.