

ゼミノート #11.5

Artin Stack の presentation についての短い概要

七条彰紀

2019 年 8 月 3 日

目次

1	Algebraic Groupoid Space	1
2	Quotients of Algebraic Space by Groupoid	2
3	Artin Stack から Presentation of an Artin Stack へ	3

一般に artin stack は algebraic space の groupoid の商として表現することが出来る．これを presentation of an artin stack と呼ぶ．このことについて，基本的な定義と命題をまとめておく．（ほとんど [3] の和訳程度になるだろう．）

Stacks Project[3] の記法について

[3] section 88.16, 88.17 と chapter 72 に presentation of an artin stack についての命題が書かれているが，これらだけで読むと良く分からない記法が有るので，意味をまとめた．

- algebraic space $:: F$ について \mathcal{S}_F は F から grothendieck construction で得られる stack を意味する ([3] 04M7).
- 自然変換の間の演算 $*$ は horizontal composition で \circ は vertical composition ([3] 044T).

1 Algebraic Groupoid Space

定義 1.1 ([2], p.80, [1] 2.4.3, https://en.wikipedia.org/wiki/Groupoid_object)

圏 \mathbf{C} を finite fiber product を持つ圏とする. 圏 \mathbf{C} の対象 X_0, X_1 と, 次の 5 つの射の組 $:: (X_0, X_1, s, t, c, e, i)$ を考える. (この組をしばしば (X_0, X_1, s, t) や $X_0 \rightrightarrows_t^s X_1$ と略す.)

source and target	$s, t: X_1 \rightarrow X_0$
composition	$c: X_1 \times_{t, X_0, s} X_1 \rightarrow X_1$
identity	$e: X_0 \rightarrow X_1,$
inversion	$i: X_1 \rightarrow X_1.$

これらが次を満たす時, groupoid in \mathbf{C} と呼ぶ. なお, 以下では $\times_{s, X_0, t}, \times_{s, X_0, \text{id}}, \dots$ 等を \times と略す.

- (A) $\bullet s \circ e = t \circ e = \text{id}_{X_0}$
 $\bullet s \circ m = s \circ \text{pr}_0$
 $\bullet t \circ m = t \circ \text{pr}_1$

ここで $\text{pr}_i: X_1 \times_{t, X_0, s} X_1 \rightarrow X_1$ は射影.

- (B) (Associativity) $m \circ (\text{id}_{X_1} \times m) = m \circ (m \times \text{id}_{X_1}), \quad m \circ (\text{id}_{X_1} \times m) = m \circ (m \times \text{id}_{X_1}),$

- (C) (Identity) $m \circ (e \circ s, \text{id}_{X_1}) = m \circ (\text{id}_{X_1}, e \circ t) = \text{id}_{X_1}$

- (D) (Inverse)

- $\bullet i \circ i = \text{id}_{X_1}$
- $\bullet s \circ i = t, \quad t \circ i = s$
- $\bullet m \circ (\text{id}_{X_1}, i) = e \circ s, \quad m \circ (i, \text{id}_{X_1}) = e \circ t$
- $\bullet m \circ (\text{id}_{X_1}, i) = e \circ s, \quad m \circ (i, \text{id}_{X_1}) = e \circ t$

定義 1.2

$B ::$ algebraic space over a scheme S とする. algebraic space over B の圏における groupoid 対象を, 単に groupoid in algebraic spaces over B という.

groupoid in algebraic spaces over B には (U, R, s, t, c, e, i) ($(U, R, s, t), U \rightrightarrows_t^s R$) という記号が使われることが多い.

2 Quotients of Algebraic Space by Groupoid

定義 2.1

任意の scheme over $B :: T$ について, 組 $(U(T), R(T), s_T, t_T, c_T, e_T, i_T)$ から次の様に圏 $\{U(T)/R(T)\}$ (あるいは $[U/pR]$ と書く) が構成できる.

Object

$U(T)$ の元

Arrow

$u, u' \in U(T)$ について, $\text{Hom}_{\{U/pR\}(T)}(u, u') = \{\xi \in R(T) \mid s(\xi) = u, t(\xi) = u'\}.$

Identity Morphism

対象 $u \in U(T)$ の identity morphism は $e_T(u) \in R(T).$

Composition of Morphisms

射 $:: \xi: u \rightarrow u', \eta: u' \rightarrow u''$ の合成 $\eta \circ \xi$ は $(\eta, \xi) \in R(T) \times_{s_T, U(T), t_T} R(T)$ の c_T による像.

Inverse Morphism

射 $\xi: u \rightarrow u'$ の逆射は $i_T(\xi) \in R(T)$.

関手 $\{U(-)/T(-)\}: \mathbf{Sch}/B \rightarrow (\mathbf{Groupoids})$ を Grothendieck construction で fibered category にしたもの $\{U/R\}$ と書く. さらにこれを stackification したものを $[U/R]$ と書き, quotient stack of U by R と呼ぶ.

一般に quotient stack は algebraic stack でない.

なお, 組 (U, R, s, t, c, e, i) が groupoid in algebraic spaces over B であることは, 以下で構成する圏 $\{U(T)/R(T)\}$ が groupoid となることと同値である.

3 Artin Stack から Presentation of an Artin Stack へ

artin stack over a scheme $S :: \mathcal{X}$ と atlas $:: f: U \rightarrow \mathcal{X}$ をとる. この時, $R := U \times_{\mathcal{X}} U$ が $(s := \text{pr}_1, t = \text{pr}_2$ とすれば)groupoid になっている. 特に atlas が smooth であるから, $s, t: R \rightarrow U$ が smooth になっている.

定理 3.1 ([3] 04T4, 04T5)

artin stack over a scheme $S :: \mathcal{X}$ と atlas $:: f: U \rightarrow \mathcal{X}$ をとる. すると groupoid space $:: (U, R, s, t, c, i)$ が構成できる. さらに標準的な射 $:: f_{can}: [U/R] \rightarrow \mathcal{X}$ が存在し, これが圏同値となる.

証明の準備として以下の補題を置く.

補題 3.2 ([3] 04T4 (1)–(3))

artin stack over a scheme $S :: \mathcal{X}$ と atlas $:: f: U \rightarrow \mathcal{X}$ をとる. この時, fiber product に関する次の命題が成り立つ.

- (i) $R := U \times_{f, \mathcal{X}, f} U ::$ algebraic space.
- (ii) 標準的圏同型 $U \times_{\mathcal{X}} U \times_{\mathcal{X}} U = R \times_U R$ が成り立つ.
- (iii) $U \times U \times U$ の第 0 成分と第 2 成分から R への射影 $:: \text{pr}_{0,2}$ は (ii) の同型により射 $\text{pr}_{0,2}: R \times R \rightarrow R$ を誘導する.

補題 3.3 ([3] 04T4 (4), 04T5 (1))

この時, groupoid $:: (U, R, s, t, c, i)$ が構成できる. より詳しく, R, s, t, c, i を次のようにすれば良い.

- $R := U \times_{f, \mathcal{X}, f} U,$
- $s := \text{pr}_0: R \rightarrow U,$
- $t := \text{pr}_1: R \rightarrow U,$
- $c := \text{pr}_{0,2}: R \times R \rightarrow R,$
- $e: U \ni u \mapsto (u, u, \text{id}_{f(u)}) \in R,$
- $i: R \ni (u, u', \alpha) \mapsto (u', u, \alpha^{-1}) \in R,$

fiber product of stacks の構成から, R の対象は $U(T)$ ($T \in \mathbf{Sch}/S$) の二つの対象 $:: u, u'$ と \mathcal{X} 内の同型

$\alpha: f(u) \rightarrow f(u')$ からなる 3 つ組であることに注意. また, $s, t :: \text{smooth}$ にも注意.

補題 3.4 ([3] 04T4 (5))

$f: U \rightarrow \mathcal{X}$ から標準的な射 $:: f_{\text{can}}: [U/R] \rightarrow \mathcal{X}$ が誘導される.

(証明). ([3] 04T4) の証明内, “This proves that Groupoids in Spaces, Lemma 044U applies” で始まる段落に f_{can} の具体的な構成が記述されている. ■

参考文献

- [1] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [3] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2019.