以下での (*) とは，次のもの: X :: integral noetherian separated (over $\mathbb{Z}$) scheme which is regular in codimension one.

Ex6.1 If X Satisfies (*), $\mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$.

$X' = X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \mathbb{P}^n_X$ とおく．また，$S = \mathbb{Z}[x_0, \ldots, x_n]$ とし，$\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$ とみなす．

■X' :: integral noetherian separated. X の affine open cover を $\{\operatorname{Spec} A_i\}_{i=0}^r$ とすると，A_i :: integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. $\mathbb{P}^n$ の affine open cover は $\{\operatorname{Spec} S_{(x_j)}\}_{j=0}^n$ で与えられる．$S_{(x_j)}$ も integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. したがって $R_{ij} = A_i \otimes_{\mathbb{Z}} S_{(x_j)}$ とおくと，X' は $\operatorname{Spec} R_{ij}$ の張り合わせであり（Thm3.3），R_{ij} :: integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. 任意の $(i,j), (i',j')$ について $R_{ij}, R_{i'j'}$ が交わることから，X' 全体でも irreducible. よって X' :: integral noetherian scheme. being separated :: stable under base extension より，X' :: separated.

■X' :: regular in codimension one. $x = \tilde{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec} R_{ij}$ とする．$A_i \otimes \mathbb{Z}[x_0, \ldots, x_n]_{(x_j)} \cong A_i[x_0, \ldots, x_n]_{(x_j)}$ を，簡単のため $j = 0$ とし，$R_0 := A[\{x_j\}_{j=0}^n]$ とおく．Ati-Mac Prop3.1 より，$\tilde{\mathfrak{p}} \subset (R_0)_{(x_0)}$ に対応する height $= 1$ の素イデアル $\mathfrak{p} \subset R_0$ がただひとつ存在し，$\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(x_0)}$ となる．これを使って計算すると，以下のようになる．

$$\mathcal{O}_{X',x} = ((R_0)_{(x_0)})_{\mathfrak{p}} = \left\{ \left. \frac{a/x_0^d}{b/x_0^e} \;\right|\; d, e \geq 0, a \in (R_0)_d, b \in (R_0 - \mathfrak{p})_e \right\} \cong A[\{x_j\}_{j=1}^n]_{\mathfrak{p}'} =: R_1.$$

最後の同型は次のように与えられる．

$$\begin{array}{ccc} (R_0)_{(x_0)} = A[\{x_j\}_{j=0}^n]_{(x_0)} & \to & R_1 = A[\{x_j\}_{j=1}^n] \\ f(x_0, x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(1, x_1, \ldots, x_n) \\ g(x_1/x_0, \ldots, x_n/x_0) & \leftarrow\!\shortmid & g(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

$\mathfrak{p}'$ はこの写像による $\mathfrak{p}$ の像である．R_1 は A と同様に integral noetherian ring. $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}' \cap A$ とおく．$A \subset R_1$ は flat extension だから，going-down theorem が成立し，$\operatorname{height} \mathfrak{q} \leq \operatorname{height} \mathfrak{p}' = 1$. また，計算すると

$$(R_1)_{\mathfrak{p}'} \cong (A_{\mathfrak{q}}[\{x_j\}_{j=1}^n])_{\mathfrak{p}''}.$$

ただし $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}' A_{\mathfrak{q}}$. $\operatorname{height} \mathfrak{q} = 1$ の時，仮定から $A_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{X,\mathfrak{q}}$ :: regular local ring. よって $(R_1)_{\mathfrak{p}'}$ は D.V.R. $\operatorname{height} \mathfrak{q} = 0$ すなわち $\mathfrak{q} = 0$ の時，同様に $(R_1)_{\mathfrak{p}'}$ は体 $A_{(0)}$ 上の多項式環の $\mathfrak{p}$ における局所化だから D.V.R.

■Another Proof: X' :: regular in codimension one. $\mathbb{P}^n$ は $n+1$ 個の $\mathbb{A}^n$ で被覆出来るから，$X \times \mathbb{P}^n$ は $n+1$ 個の $X \times \mathbb{A}^n$ で被覆できる．$X \times \mathbb{A}^n$ は Prop6.6 のとおり (*) を満たすから，(*) のうち local な性質はすべて満たす．global な性質は noetherian と irreducible のみであるが，これらはそれぞれ R_{ij} が noetherian であること，任意の $(i,j), (i',j')$ について $\operatorname{Spec} R_{ij} \cap \operatorname{Spec} R_{i'j'} \neq \emptyset$ であることからわかる．よって $X \times \mathbb{P}^n$ も (*) を満たす．

■Definition of $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2, \pi$. $X \times \mathbb{P}^n$ から $X, \mathbb{P}^n$ への projection をそれぞれ $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ とする．また $X \times \mathbb{A}^n \to X$ の projection を π とする．Prop6.6 の証明から $\pi^* : \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(X \times \mathbb{A}^n)$ は全単射.

■Exact Sequence in Prop6.5.　$\mathfrak{p} = (x_0) \in \mathbb{Z}[x_0, \ldots, x_n] = S$ とする．$Z = \mathrm{pr}_2^{-1}(V(\mathfrak{p}))$ とおくと，Z :: irreducible closed subset of codim $= 1$ in $X \times \mathbb{P}^n$ [†1]．$U = Z^c = \mathrm{pr}_2^{-1}(V(\mathfrak{p})^c) \cong X \times \mathbb{A}^n$ だから，Ex3.9a と Prop6.6 より，$\mathrm{Cl}(U) \cong \mathrm{Cl}(X)$．したがって Prop6.5 の完全列は以下のようになる．

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \overset{j}{\twoheadrightarrow} \mathrm{Cl}(X) \longrightarrow 0$$

$\mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$ を示すには，$i : 1 \mapsto 1 \cdot Z$ が単射であること，および $j : Y \mapsto (\pi^*)^{-1}(Y \cap U)$ が split することを示せば十分である．後者はすぐに分かる．$\pi^* : \mathrm{Cl}(X) \to \mathrm{Cl}(U)$ は全単射だから，W :: prime divisor in X について，

$$j(\mathrm{pr}_1^*(W)) = (\pi^*)^{-1}(\mathrm{pr}_1^*(W) \cap U) = (\pi^*)^{-1}(\mathrm{pr}_1|_U)^{-1}W = (\pi^*)^{-1}\pi^{-1}W = (\pi^*)^{-1}\pi^* W = W.$$

$(\mathrm{pr}_1^* W) \cap U = (\mathrm{pr}_1^{-1} W) \cap U = (\mathrm{pr}_1|_U)^{-1}W$ を用いた．

■i :: injective.　$X' = X \times \mathbb{P}^n, K$ :: function field of X' とし，$d \in \mathbb{Z} - \{0\}$ をとる．示すべきことは，$dZ = (f)$ を満たす $f \in K^\times$ が存在しないこと．正次数の斉次元 $t \in A[x_0, \ldots, x_n]$ をとり，$V = \mathrm{Spec}\, A[x_0, \ldots, x_n]_{(t)} = D_+(t) \subset X'$ において f が regular（pole を持たない）だとしよう．$D_+(t)$ は基本開集合を成すから，このようにすることは可能である．また，$V \cap Z \neq \emptyset$，したがって $t \notin (x_0)$ とする．この時，$f \in A[x_0, \ldots, x_n]_{(t)}, V \cap Z = V((x_0))$．$V \cap Z$ の generic point を $\eta = x_0 \cdot A[x_0, \ldots, x_n]_{(t)}$ [†2] とおくと，η に対応する valuation は $v_{V \cap Z}(f) = \sup\{d \mid f \in \eta^d - \eta^{d+1}\}$ で定まる．なので $v(f) = d$ ならば，f は次のようになる．

$$f = \left(\frac{x_0^m}{t}\right)^d \frac{g}{t^e} \quad \text{where} \quad m := \deg t, \quad e \geq 0, \quad g \in A[x_0, \ldots, x_n]_{em}, \quad t, x_0^m \not| \, g$$

$d \neq 0$ と仮定する．$e = \deg g = 0$ の時，t の既約因数によって定まる prime divisor T 上で $v_T(f) < 0$ となる．$e > 0$ の時，g の既約因数によって定まる prime divisor G 上で $v_G(f) > 0$ となる．以上から，$dZ = (f)$ となるならば $d = 0$．よって i :: injective.

Ex6.2　Varieties in Projective Space.

Ex6.3　Cones.

Ex6.4　$A = k[x_1, \ldots, x_n, z]/(z^2 - f)$ :: integrally closed.

$\mathrm{char}\, k \neq 2$ とする．$x_1, \ldots, x_n$ を $\vec{x}$ と略す．$f \in k[\vec{x}]$ :: square-free とし，$A = k[\vec{x}, z]/(z^2 - f)$ とおく．また，$\bar{z} = z + (z^2 - f)$ とする．（$\bar{z} = \sqrt{f}, A = k[\vec{x}, \sqrt{f}]$ と考えて良い．）f :: square-free より $z^2 - f$ :: irreducible, A :: integral domain.

■K の同定.　この時，$K = \mathrm{Quot}(A)$ は $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f)$ である．実際，K の元は $g, h \in A$ の元によって g/h と表されるが，$z^2 = f$ なので，g/h は分母の「有理化」によって $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f)$ に属すことが分かる．したがって $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f) \subseteq K$ であり，逆の包含関係は明らか.

[†1] $\mathrm{Spec}\, A_i \subseteq X, U_{ij} = \mathrm{Spec}\, A_i \otimes S_{(x_j)}, j \neq 0$ とする．$\mathrm{pr}_2|_{U_{ij}}$ は $s \mapsto 1 \otimes s$ から誘導されるから，

$$Z \cap U_{ij} = (\mathrm{pr}_2|_{U_{ij}})^{-1}(V(\mathfrak{p})) = V(1 \otimes \mathfrak{p}) = V((1 \otimes x_0)) \subset \mathrm{Spec}\, A_i \otimes S_{(x_j)}$$

$1 \otimes x_0$ は非単元かつ不定元だから，Krulls Hauptidealsatz より，$(1 \otimes x_0) \subset A_i \otimes S_{(x_j)}$ が高さ 1 の素イデアルであることは明らか．よって $\mathrm{codim}(Z \cap U_{ij}, U_{ij}) = 1, \mathrm{codim}(Z, X') = 1.$

[†2] pr_1 は埋め込み写像 $A \to A \otimes \mathbb{Z}[x_0, \ldots, x_n]_{(t)}$ で誘導されるから，$Z = \mathrm{pr}_1^{-1} V((x_0)) = V((x_0 \otimes 1))$．$x_0 \otimes 1$ は $A \otimes \mathbb{Z}[x_0, \ldots, x_n]_{(t)} \cong A[x_0, \ldots, x_n]_{(t)}$ の同型写像で x_0 へ写る．

■$K/k(\vec{x})$.　K は $k(\vec{x})$ 上の 2 次式 $\bar{z}^2 - f$ の最小分解体だから，$K/k(\vec{x})$ は 2 次のガロア拡大である．$\mathrm{Gal}(K/k(\vec{x}))$ は，$\sigma : \bar{z} \mapsto -\bar{z}$ で生成される位数 2 の群.

■A :: integral closure of $k[\vec{x}]$ in K.　$\alpha \in K$ をとると，これは $g, h \in k(\vec{x})$ を用いて $g + h\bar{z}$ と書ける．α の最小多項式は,

$$(X - \alpha)(X - \sigma(\alpha)) = X^2 - 2gX + (g^2 - h^2 f).$$

この多項式の各係数が $k[\vec{x}]$ に属しているとしよう．すると，まず明らかに $g \in k[\vec{x}]$ である．また f :: square-free より，$h \notin k[\vec{x}]$ ならば h^2 の分母は f の因子で打ち消されず，$h^2 f, g^2 - h^2 f \notin k[\vec{x}]$ となる．よって α :: integral / $k[\vec{x}]$ ならば $\alpha \in k[\vec{x}]$．逆に $\alpha \in k[\vec{x}]$ ならば $g, h \in k[\vec{x}]$ だから α の最小多項式は $k[\vec{x}]$ 係数多項式になる．以上をまとめて A :: integrally closed が分かる．

■系.　以上から，$z^2 - f = 0$ で定まる hypersurface は affine variety として normal である．特に，$f(x) \in k[x]$ が重根を持たない 3 次多項式であるとき，楕円曲線 $y^2 = f(x)$ は normal curve である．

Ex6.5　Quadric Hypersurfaces.

k :: field, $\mathrm{char}\, k \neq 2$ とし，

$$f = x_0^2 + \cdots + x_r^2 \in k[x_0, \ldots, x_n], \quad A(X) = k[x_0, \ldots, x_n]/(f), \quad X = \mathrm{Spec}\, A(X)$$

とおく．ch I, Ex3.12 より，$\mathbb{A}^{n+1}$ の任意の r 変数 quadric hypersurfaces は X と同型である．

(a)　X :: normal if $r \geq 2$.

$f = x_0^2 - (-x_1^2 - \cdots - x_n^2)$ なので，Ex6.4 より $A(X)$ :: integrally closed．よって任意の点における $A(X)$ の局所化も integrally closed である．すなわち X :: nornal

Ex6.6　Consider $X = \mathcal{Z}_p(y^2 z - x^3 + xz^2)$.

Ex6.7　For $X = \mathcal{Z}_p(y^2 z - x^3 - x^2 z)$, $\mathrm{CaCl}^0(X) \cong \mathbf{G}_m$.

k :: algebraically closed field, $\mathrm{char}\, k \neq 2$ とし，$\mathbb{P}_k^2$ 内の曲線を考えていく．$f = y^2 z - x^3 - x^2 z, X = \mathrm{Proj}\, k[x, y, z]/(f) \subset \mathbb{P}_k^2$ とする．$S(X) = k[x, y, z]/(f)$ と書く．X の codimension 1 の点は, $\dim X = 1$ より，closed point に他ならない．X は $Z = (0 : 0 : 1)$ に node をもつ．

■$\mathrm{CaCl}^0(X) \cong \mathrm{Cl}(X - Z)$.　　X の singular point は Z しかない．これは ch I, Ex5.8 をつかって確認できる．$X = \mathrm{Proj}\, S(X)$ が noetherian scheme であることから，Thm4.9 より $X - Z$ :: nonsingular & separated & finite type．明らかに integral であることと合わせれば，$X - Z$ が (*) を満たすことが分かる．X 全体でも integral だから，$\mathcal{K}_X$ :: sheaf of total quotient rings of $\mathcal{O}_X$ は function field K である．$P \in X - Z$ に対する Cartier Divisor D_P の定め方，$\mathrm{CaCl}^0(X)$ の任意の元に対して，それが D_P と線形同値になる closed point $X - Z$ が存在することの議論は Example6.11.4 と全く同様である．

■$X - Z \cong \mathbb{A}^1 - \{0\}$.　$(s : t : 0) \in V(z) \cong \mathbb{P}^1$ をとり，$(s : t : 0)$ と $Z = (0 : 0 : 1)$ を結ぶ直線 $sy - tx = 0$ と X の交点を計算する．すると $\mathbb{P}^1 \to X$ の写像が得られる．

$$(s : t) \mapsto (x : y : z) = (s(t^2 - s^2) : t(t^2 - s^2) : s^3)$$

$(1 : 1), (1 : -1)$ はこの写像で Z へうつる．そこで以下のように置くと，isomorphism になる．

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}^1 - \{(1:1),(1:-1)\} & \to & X - Z \\
(s:t) & \mapsto & (s(t^2-s^2):t(t^2-s^2):s^3) \\
(x:y) & \leftarrow\!\shortmid & (x:y:z)
\end{array}
$$

$\mathbb{P}^1 - \{(1:1),(1:-1)\}$ は $(s:t) \mapsto \frac{-s+t}{s+t} = u \mapsto (1-u:1+u)$ によって $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ と同型である．したがって，結局次の同型が出来る．

$$
\begin{array}{cccc}
\phi: & \mathbb{A}^1 - \{0\} & \to & X - Z \\
 & t & \mapsto & (4(1-t)t:4(1+t)t:(1-t)^3) \\
 & \dfrac{-x+y}{x+y} & \leftarrow\!\shortmid & (x:y:z)
\end{array}
$$

■Cl(X) の特徴. $\phi(1) = P_1 = (0:1:0)$ とおく．計算すると $(x:y:z) \in X$ について $P_1, (x:y:z), (x:-y:z)$ が一直線上にある．つまり，$P_1, (x:y:z), (x:-y:z)$ を零点に持つ一次式 l が存在する．よって $P_1 + (x:y:z) + (x:-y:z) \sim 0$ が得られる．（TODO: Example6.10.2 の $P+Q+R \sim 3P_1$ は更に $3P_1 = (z) \sim 0$ ということで良いのか？）

■CaCl$^0(X) \cong$ Cl$(X-Z) \cong \mathbf{G}_m$. $\phi(1) = P_1$ に注意する．計算すると，$\phi(t), \phi(u)$ と $\phi(tu)$ の y 成分の符号を反転させたものが一直線上にある．

$$\phi(t) + \phi(u) - (\phi(tu) + P_1) \sim 0.$$

変形して，

$$
\begin{aligned}
\phi(t) + \phi(u) - (\phi(tu) + P_1) &\sim 0 \\
\phi(t) + \phi(u) - P_1 &\sim \phi(tu) \\
(\phi(s) - P_1) + (\phi(t) - P_1) &\sim \phi(st) - P_1.
\end{aligned}
$$

よって，P_1 を単位元とすれば，CaCl$^0(X) \cong$ Cl$(X-Z) \cong \mathbf{G}_m$.

Ex6.8 Morphism of Schemes Induces Homomorphism of Pic / Cl.

Ex6.9 (Culating the Picard Groups of) Singular Curves.

X :: projective curve $/k$，$\tilde{X}$ :: normalization of X (Ex3.8), $\pi : \tilde{X} \to X$ :: projection, $\widetilde{\mathcal{O}}_P$ :: integral closure of $\mathcal{O}_P$ $(P \in X)$ とする．p.136 にある curve $/k$ の定義から，X :: integral, separated, finite type$/k$．このことと Ex3.8 より，π :: finite morphism.

(a) Show there is an exact sequence.

次の完全列を示す．

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^* / \mathcal{O}_P^* \longrightarrow \operatorname{Pic} X \xrightarrow{\pi^*} \operatorname{Pic} \tilde{X} \longrightarrow 0.$$

Prop6.15 から，$\operatorname{Pic} X, \operatorname{Pic} \tilde{X}$ はそれぞれ $\operatorname{CaCl} X, \operatorname{CaCl} \tilde{X}$ と同型である．次の写像を考える．

$$
\begin{array}{cccc}
\phi: & (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^* & \to & \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^* \\
\phi_U & s + \mathcal{O}_X(U)^* & \mapsto & s/1 + \mathcal{O}_X(U)^*
\end{array}
$$

単元を単元に写す写像だから，これは単射[†3]．したがって次の完全列が得られる．

$$0 \longrightarrow (\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}^*/(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})^* \longrightarrow 0$$

（$\operatorname{coker}\phi$ は加群の同型定理と sheafification を通して得られる．）（これは $0 \to \ker \to M \to N \to \operatorname{coker} \to 0$ という形の完全列である．）この exact sequence について，各点 $P \in X$ での stalk をとると，再び exact sequence になる (Ex1.2)．それらを $\bigoplus_{P\in X}$ でまとめても exact.

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{P\in X}[(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})^*/\mathcal{O}_X^*]_P \longrightarrow \bigoplus_{P\in X}[\mathcal{K}^*/\mathcal{O}_X^*]_P \longrightarrow \bigoplus_{P\in X}[\mathcal{K}^*/(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})^*]_P \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

$(*)$ の最初の要素を見よう．$P \in X$ について，$[(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})^*/\mathcal{O}_X^*]_P = (\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_P^*/\mathcal{O}_P^*$ は明らか．($\varinjlim_{P\in U}\mathcal{O}_X^*(U)$ の元はすべて可逆であることに注意．）$P \in U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ とすると，$\tilde{X}$ の作り方から $\pi^{-1}\operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}\tilde{A}$ である（$\tilde{A}$ は A の整閉包）．（正確には，このように U がとれるということであり，U を適当にとって良いということは分からない．）よって $\Gamma(U,(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})|_U) = \tilde{A}$．$(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})|_U$ :: sheaf on affine scheme だから

$$[(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})|_U]_P = \varinjlim_{(\pi|_U)^{-1}(\{P\})\subseteq V}\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\tilde{A}}(V).$$

$\mathfrak{p}$ を $P \in \operatorname{Spec} A$ に対応する素イデアルとする．

$S = A - \mathfrak{p}$ とおくと，$(\pi|_U)^{-1}(\{P\})$ は $\mathfrak{q}\cap A = \mathfrak{p}$ となる $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}\tilde{A}$ の全体である．（この $\mathfrak{q}$ が存在すること，すなわち $(\pi|_U)^{-1}(\{P\})$ が空でないことは Ati-Mac Thm5.10 により分かる．）（$\pi|_U$ は埋め込み準同型 $A \hookrightarrow \tilde{A}$ に対応する．）$S = A - \mathfrak{p}$ とおけば，これは $S \cap \mathfrak{q} = \emptyset$ となる $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}\tilde{A}$ の全体に一致する．したがって次のようになる．

$$(\pi|_U)^{-1}(\{P\}) = \bigcup_{f\in S}\{\mathfrak{q}\in\operatorname{Spec}\tilde{A} \mid f \notin \mathfrak{q}\} = \bigcup_{f\in S}V^c(f), \qquad \varinjlim_{(\pi|_U)^{-1}(\{P\})\subseteq V}\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}\tilde{A}}(V) = \varinjlim_{f\in S}\tilde{A}_f = S^{-1}\tilde{A}.$$

ただし $\varinjlim_{f\in S}$ は $\{D(f)\hookrightarrow D(f') \mid f,f'\in S\}$ という direct system についての direct limit である．一方，$S^{-1}\tilde{A}$ は $S^{-1}A = A_{\mathfrak{p}}$ の整閉包である (Ati-Mac Prop5.12)．よって $[\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}]_P \cong (A_{\mathfrak{p}})\tilde{\ } = \tilde{\mathcal{O}}_P$．以上から $(\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}})_P^*/\mathcal{O}_P^* \cong \tilde{\mathcal{O}}_P^*/\mathcal{O}_P^*$.

$\mathcal{K}$ は X :: integral より constant sheaf である．よって $(*)$ の他の部分も同様に計算できる．

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{P\in X}\tilde{\mathcal{O}}_P^*/\mathcal{O}_P^* \longrightarrow \bigoplus_{P\in X}K^*/\mathcal{O}_P^* \longrightarrow \bigoplus_{P\in X}K^*/\tilde{\mathcal{O}}_P^* \longrightarrow 0 \qquad (*')$$

次に $\bigoplus_{P\in X}K^*/\mathcal{O}_P^* \cong \operatorname{CaCl} X$ を示したい．これは以下の準同型を用いる．

$$\begin{array}{cccc} \phi: & \operatorname{CaCl} X & \to & \displaystyle\bigoplus_{P\in X}K^*/\mathcal{O}_P^* \\ & \{\langle U_i, s_i\rangle\}_i & \mapsto & \displaystyle\sum_i\bigoplus_{P\in U_i}((s_i)_P \bmod \mathcal{O}_P^*) \end{array}$$

$\{\langle U_i,s_i\rangle\}_i \in \operatorname{CaCl} X$ と任意の i について，$\{P \in X \mid (s_i)_P \notin \mathcal{O}_P^*\}$ は閉集合である．X は 1 次元だから，これは有限集合．よって $(s_i)_P \bmod \mathcal{O}_P^*$ は有限個の点以外で 0 になる．i は有限個だから，確かに像は $\bigoplus_{P\in X}K^*/\mathcal{O}_P^*$ の元.

ϕ の逆写像は次のように作る．$\Sigma \in \bigoplus_{P\in X}K^*/\mathcal{O}_P^*$ をとる．germ と混同しないよう．Σ の $P \in X$ 成分を Σ^P と書くことにする．$U = \{P \in X \mid \Sigma^P = 0\}$ とおくと，これは X から有限個の点を除いたものだから開集合．そして $D = \{\langle U \cup \{P\}, \Sigma^P\rangle\}_{P,\Sigma^P\neq 0}$ とする．$U \cup \{P\}$ はやはり開集合であり，$\mathcal{K}_P^* = K^*$ だから $\Sigma^P \in K^* = K - \{0\}$．よって $D \in \operatorname{CaCl} X$.

[†3] $\phi(1) = \phi(x)\phi(x^{-1}) = 1$ なので $\phi(x), \phi(x^{-1}) \neq 0$.

Ex6.10 The Grothendieck Group $K(X)$.

■Fundamental Property of $K(X)$. $\gamma\mathcal{F} = \gamma\mathcal{G} + \gamma\mathcal{H}$ となっている時，次の完全列が存在する．

$$0 \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0.$$

したがって $\mathcal{H} \cong \mathcal{F}/\mathcal{G}$．単位元は 0 :: zero sheaf の像 $\gamma 0$ である．また $\gamma\mathcal{F} = \gamma\mathcal{F}'(+\gamma 0)$ ならば $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$．

(a) If $X = \mathbb{A}^1_k$, $K(X) \cong \mathbb{Z}$.

$A = k[x]$ とし，$\mathcal{F}$ :: coherent sheaf on $X = \operatorname{Spec} A$ をとる．$\mathcal{I} = \mathcal{O}_X = \tilde{A}$ と書くことにする．
まず，$\gamma\mathcal{F} = n(\gamma\mathcal{I})$ となる $n \in \mathbb{Z}$ が存在することを示す．

■Reduce Into $\mathcal{F} = \tilde{M}$ Case. X :: noetherian affine scheme と Cor5.5 より，finitely generated A-module の exact sequence と coherent sheaf on X の exact sequence が一対一に対応する．なので $\mathcal{F}$ が finitely generated module M によって $\tilde{M}$ と書ける場合のみ考えれば良い．

■Case: $\mathcal{F} = \mathcal{I}^{\oplus n}$. 次の完全列が存在する．

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow A^{\oplus n-1} \longrightarrow 0.$$

$A \to A^{\oplus n}$ は $x \mapsto (x, 0, \ldots, 0)$ である．この完全列の存在から $\gamma\mathcal{I}^{\oplus n} = \gamma\mathcal{I} + \gamma\mathcal{I}^{\oplus n-1}$ が得られる．よって帰納的に $\gamma\mathcal{I}^{\oplus n} = n(\gamma\mathcal{I})$.

■Case: $\mathcal{F} = \tilde{M}$. M :: finitely generated module なので，$n > 0, N \subseteq A^{\oplus n}$ が存在し，次の完全列が成立する (Ati-Mac Prop2.3).

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

よって $\gamma\tilde{M} = \gamma\mathcal{I}^{\oplus n} - \gamma\tilde{N}$．また，$A$ が PID であることから，A 上の自由加群の部分加群はまた自由である．したがって前段落と合わせて，$\gamma\tilde{M} = k(\gamma\mathcal{I})$ $(k \in \mathbb{Z})$ が示された．

■対応が一対一であること，及び準同型であること． 対応が単射的であることは明らか．全射的であること，すなわち任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して $n(\gamma\mathcal{I}) \in K(X)$ であることは，$K(X)$ が free $\mathbb{Z}$-module であることから．また，次の完全列から $(m+n)(\gamma\mathcal{I}) = m(\gamma\mathcal{I}) + n(\gamma\mathcal{I})$ も成り立つ．

$$0 \longrightarrow A^{\oplus m} \longrightarrow A^{\oplus(m+n)} \longrightarrow A^{\oplus n} \longrightarrow 0.$$

（これによると任意の M について $\tilde{M} \cong \tilde{A}^{\oplus n}$，したがって M が free となる．）

(b) $\operatorname{rank} : K(X) \to \mathbb{Z}$ is surjective homomorphism.

X :: integral scheme，ζ :: generic point of X，$k = \mathcal{O}_{X,\zeta}$ :: function field of X とする．$x = \sum_i n_i(\gamma\mathcal{F}_i) \in K(X)$ に対して，$\operatorname{rank} x = \sum_i n_i \dim_k(\mathcal{F}_i)_\zeta$ と定める．この rank を考える．

■rank :: well-defined homomorphism. $\gamma\mathcal{F} = \gamma\mathcal{F}'$ の時，$\mathcal{F} \cong \mathcal{F}'$．なので $\operatorname{rank}\gamma\mathcal{F} = \operatorname{rank}\gamma\mathcal{F}'$．また，$x$ の表現はいろいろあるので，これについて整合的であることを確かめなくてはならない．$\gamma\mathcal{F}, \gamma\mathcal{G}, \gamma\mathcal{H} \in K(X)$ をとり，$\gamma\mathcal{F} + \gamma\mathcal{G} = \gamma\mathcal{H}$ だとする．この時，次の完全列が存在する．

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0.$$

stalk を取る操作は exact functor (Ex1.2) だから，次が得られる．

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_\zeta \longrightarrow \mathcal{H}_\zeta \longrightarrow \mathcal{G}_\zeta \longrightarrow 0.$$

これは $\mathcal{O}_{X,\zeta} = k$-module の exact sequence．$\dim_k$ は additive だから $\operatorname{rank}\gamma\mathcal{H} = \operatorname{rank}\gamma\mathcal{F} + \operatorname{rank}\gamma\mathcal{G}$ となる．$x, y \in K(X)$ について $\operatorname{rank}(x+y) = \operatorname{rank} x + \operatorname{rank} y$ となることは定義と以上のことから分かる．

■rank :: surjective.　$\operatorname{rank} n(\gamma\mathcal{O}_X) = n \operatorname{rank}(\gamma\mathcal{O}_X) = n \dim_k k = n$ より，全射．

(c)　For Y :: closed subsecheme of X, $K(Y) \to K(X) \to K(X-Y) \to 0$ :: exact.

X :: noetherian scheme, Y :: closed subsecheme of X とする．$i : Y \to X$ を closed immersion, $j : X - Y \to X$ を open immersion とする．次の写像の列を考える．

$$K(Y) \xrightarrow{\epsilon} K(X) \xrightarrow{\rho} K(X-Y) \longrightarrow 0.$$

ここで ϵ は extension of coherent sheaf on Y, $\gamma\mathcal{F} \mapsto \gamma(i_*\mathcal{F})$ (Ex1.19)，ρ は restriction, $\gamma\mathcal{G} \mapsto \gamma(j^{-1}\mathcal{G})$ である．

■Easy Parts.　Ex5.15 から ρ は全射．また $\operatorname{im} \rho \circ \epsilon$ (Y 上の sheaf を X 上に 0 で拡張して $X-Y$ に制限したもの) が 0 であること，すなわち $\operatorname{im}\epsilon \subseteq \ker\rho$ は明らか．したがって，ここで示すべきは $\operatorname{im}\epsilon \supseteq \ker\rho$ である．

■Map a Course.　$\mathcal{F} \in \ker\rho$ をとる．言い換えれば，$\mathcal{F}$ を X 上の coherent sheaf であって $\operatorname{Supp}\mathcal{F} \subseteq Y$ であるものとする．Ex5.6c より，$\operatorname{Supp}\mathcal{F}$ :: closed in X．この $\mathcal{F}$ から，次のような finite filtration の存在を示す:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F}_n = 0$$

ここで $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1}$ は $\operatorname{im}\epsilon$ の元．すると次の完全列が存在する．

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{k+1} \hookrightarrow \mathcal{F}_k \longrightarrow \mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1} \longrightarrow 0.$$

したがって $\gamma\mathcal{F}_k = \gamma\mathcal{F}_{k+1} + \gamma(\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1})$．帰納的に $\gamma\mathcal{F} = \gamma\mathcal{F}_0 = \sum_{k=1}^n \gamma(\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1})$ が得られる．$\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1}$ は $\operatorname{im}\epsilon$ の元としていたから，$\gamma\mathcal{F} \in \operatorname{im}\epsilon$．

主張 Ex6.10.1
次の finite filtration が存在する．

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F}_n = 0$$

ここで $\mathcal{F}_k/\mathcal{F}_{k+1}$ は $\operatorname{im}\epsilon$ の元．

(証明)．
■surjective map $\phi_k : \mathcal{F}_k \to i_*i^*\mathcal{F}_k$.　surjective map $\phi_0 : \mathcal{F} \to i_*i^*\mathcal{F}$ が存在することを示す．$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ をとる．$Y \cap U$ は U の closed subsecheme なので，Cor5.10 より $\mathfrak{a} \subseteq A$ :: ideal によって $V := V \cong \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a}$ となる．したがって $i|_V : \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$．$\mathcal{F}|_V = \tilde{M}$ :: finitely generated $A/\mathfrak{a}$-module とする．Prop5.2 より，次のように計算できる．

$$(i_*i^*\mathcal{F})|_V \cong ({}_A(M \otimes_A A/\mathfrak{a}))\tilde{} \cong (M/\mathfrak{a}M)\tilde{}.$$

よって $M \to M/\mathfrak{a}M$ から誘導される surjective map $\mathcal{F}|_V \to (i_*i^*\mathcal{F})|_V$ が存在する．これが gluing できることは明らか．こうして所望の ϕ_0 が得られる．(adjoint の counit から作りたかったが，これは素性がよくわからない．)

■$\mathcal{F}_{k+1} := \ker\phi_k$.　Ex1.7 より $\epsilon(\gamma(i^*\mathcal{F})) = \gamma(i_*i^*\mathcal{F}) \cong \gamma(\mathcal{F}/\ker\phi_0)$ となり，$\mathcal{F}_1 = \ker\phi_0$ とすれば良いことが分かる．以下，帰納的に $\phi_k : \mathcal{F}_k \to i_*i^*\mathcal{F}_k, \mathcal{F}_{k+1} = \ker\phi_k$ とすれば良い．上での構成法から，$(\mathcal{F}_k)|_V \cong (\mathfrak{a}^k M)\tilde{}$ がわかる．

■This filtration is finite.　最後に，この列が有限であることを見る．$(\mathcal{F}_k)|_V \cong (\mathfrak{a}^k M)\tilde{}$ なので，十分大きい $k > 0$ について $\mathfrak{a}^k M = 0$ であること，すなわち $\mathfrak{a}^k \subseteq \mathrm{Ann}(M)$ となることを示せば良い．$V(\mathrm{Ann}(M)) = \mathrm{Supp}\,\mathcal{F}|_V \subseteq V \cong V(\mathfrak{a})$ (Ex5.6b) より，$\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \subseteq \sqrt{\mathrm{Ann}(M)}$．$A$ :: noetherian ring より，$\mathfrak{a}$ の生成元は有限個である．したがって十分大きな $k > 0$ をとると，$\mathfrak{a}$ の任意の生成元（集合の一元）g に対して $g^k \in \mathrm{Ann}(M)$ であるように出来る．この k について $\mathfrak{a}^k \subseteq \mathrm{Ann}(M)$．$Y$ は $\mathfrak{V}$ :: finite affine open cover を持つから，$n = \max_{V\in\mathfrak{V}} \min_{(\mathcal{F}_k)|_V=0} k$ とすれば，任意の $V \in \mathfrak{V}$ について $(\mathcal{F}_n)|_V = 0$，つまり（Identity Axiom から）$\mathcal{F}_n = 0$ となる． ■

Ex6.11　The Grothendieck Group of a Nonsingular Curve.

k :: algebraically closed field, X :: nonsingular curve / k とする．$K(X) \cong \mathrm{Pic}\,X \oplus \mathbb{Z}$ を示そう．

Ex6.12　The Degree of Coherent Sheaf.

Ex6.11 の続きと言える．X :: complete nonsingular curve とする．Ex6.11 より $K(X) \cong \mathrm{Pic}\,X \oplus \mathbb{Z}$．また nonsingular $\Longrightarrow$ regular $\Longrightarrow$ locally factorial なので Cor6.16 より $\mathrm{Pic}\,X \cong \mathrm{Cl}\,X$．そこで，$\mathcal{F}$ :: coherent sheaf on X に対する $\deg\mathcal{F}$ を，

$$\gamma(\mathcal{F}) \in K(X) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Pic}\,X \oplus \mathbb{Z} \to \mathrm{Pic}\,X \xrightarrow{\cong} \mathrm{Cl}\,X \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

で定める．右端の deg は degree of Weil divisor である．D :: Weil divisor に対し，$\gamma(\mathcal{L}(D))$ は上の写像で D へ写る．なので，The Grothendieck Group の定義と合わせて，以下が成立する．

(1) If D :: divisor, $\deg\mathcal{L}(D) = \deg D$.
(2) If $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ :: exact sequence, then $\deg\mathcal{F} = \deg\mathcal{F}' + \deg\mathcal{F}''$.

次を示す: If $\mathcal{T}$ is a torsion sheaf, then $\deg\mathcal{T} = \sum_{P\in X} \mathrm{length}\,\mathcal{T}_P$.

$U = \mathrm{Spec}\,A \subseteq X$ を任意にとり，T :: torsion A-module について $\mathcal{T}|_U \cong \tilde{T}$ であるとする．$\mathfrak{p} \in U$ に対し，$T_\mathfrak{p}$ は $A - \mathfrak{p}$ が $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(T)$ の元を含む時 0 になる．したがって $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ の時のみ $T_\mathfrak{p} \neq 0$．そこで $V = V(\mathfrak{a})$ とする．$\mathfrak{a} \neq (0)$ かつ X は 1 次元だから，V は有限個の点のみからなる．

$\tilde{T} \in K(U)$ に対応する $D_T \in \mathrm{Cl}\,U$ を考える．Ex6.11a の構成によると，D_T の the structure sheaf of the associated subscheme が $\tilde{T}$ である．したがって D_T は以下のようになる．

$$D_T = \sum_{P\in V} v_P(f_P)\{P\}.$$

ただし $f_P \in A$ は $V(f_P) = \{P\} \subseteq U$ を満たす．したがって $v_P(f_P) = \mathrm{length}\,T_P$ を示せば十分．