ゼミノート #10
Topology and Shaves on Algebraic Stacks

七条彰紀

2019 年 7 月 5 日

目次

ここまでで artin stack が定義できたが，これは scheme で言えば structure sheaf だけ定義したような状態である．artin stack の Zariski 位相空間と，（Grothendieck topology 上の）sheaf を導入する．

1 Points of Artin Stack

いずれも [3] Tag 04XE, [2] section 5. を参照せよ．

定義 1.1 ([2] section 5)
体の Spec からの射 $x_1\colon \operatorname{Spec} k_1 \to \mathfrak{X}, x_2\colon \operatorname{Spec} k_2 \to \mathfrak{X}$ について $x_1 \sim x_2$ であるとは，ある k_{12} :: field と以下の 2-可換図式が存在すること．

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} k_{12} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k_1 \arrow[d, "x_1"] \\ \operatorname{Spec} k_2 \arrow[r, "x_2"'] & \mathfrak{X} \end{tikzcd}$$

命題 1.2 ([3] 04XF)
ここで定義した $\sim$ は同値関係である．

(証明). $\sim$ は反射律，対称律を満たすことは自明なので，推移律の成立を示す．
体から $\mathfrak{X}$ への 3 つの射 :: x_1, x_2, x_3 を考える．これらが $x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3$ を同時に満たすとは，体 k_{12}, k_{23}

と次の 2-可換図式が存在するということである．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k_{12} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k_2 \arrow[d, "x_2"] & \operatorname{Spec} k_{23} \arrow[l] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k_1 \arrow[r, "x_1"'] & \mathfrak{X} & \operatorname{Spec} k_3 \arrow[l, "x_3"]
\end{tikzcd}$$

この時，k_{12}, k_{23} の合成体（すなわち最小の共通の拡大体）を k_{123} とする．$k_{12} \cap k_{23}$ は k_{123} の部分体として k_2 に一致する（あるいは，一致するように 2 つの準同型 $k_{12}, k_{23} \to k_{123}$ を選ぶ）．すると可換図式は次のように拡張される．

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec} k_{123} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\operatorname{Spec} k_{12} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k_2 \arrow[d, "x_2"] & \operatorname{Spec} k_{23} \arrow[l] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k_1 \arrow[r, "x_1"'] & \mathfrak{X} & \operatorname{Spec} k_3 \arrow[l, "x_3"]
\end{tikzcd}$$

上の新たな四辺形は scheme の図式として可換なので，この artin stack の拡張後の図式も可換．■

注意 1.3

以上の定義は scheme の点に対応している．scheme :: X について，体の $Spec$ :: $\operatorname{Spec} k$ から X への射は点 $x \in X$ と体の準同型 :: $\phi\colon \kappa(x) \to k$ に対応する ([1] ch II, Ex2.7, [3] 01J5)．ここで $\kappa(x)$ は residue field である．したがって一点 x に対応する射は $\kappa(x)$ から体への準同型の数だけ有る．これらを全て同値なものとする同値関係を定めたい．

体から X への二つの射

$$x_1\colon \operatorname{Spec} k_1 \to \mathfrak{X}, \quad x_2\colon \operatorname{Spec} k_2 \to \mathfrak{X}$$

について，以下は同値．

(a) 位相空間の 2 つの写像 $|x_1|, |x_2|$ の像が x である．

(b) すなわち，体 k_{12} と次の可換図式が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k_{12} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k_1 \arrow[d, "x_1"] \\
\operatorname{Spec} k_2 \arrow[r, "x_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

(a) $\Longrightarrow$ (b) は明らか．(a) $\Longleftarrow$ (b) は次のように示す．まず k_{12} は合成体 k_1k_2 と置けば良い．すると包含射 $k_1 \hookrightarrow k_{12}, k_2 \hookrightarrow k_{12}$ が存在する．体の準同型は単射しか無いから，x_1, x_2 からそれぞれ得られる $\kappa(x) \to k_1, \kappa(x) \to k_2$ は包含射に取り替えられる．包含関係は推移律を満たすから，以下が可換ということに成る．

$$\begin{tikzcd}
k_{12} & k_1 \arrow[l, hook'] \\
k_2 \arrow[u, hook] & \kappa(x) \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

上で述べた，体から X への射と $\kappa(x)$ から体への射の対応より，これは (b) の可換図式が存在することを意味する．

定義 1.4 ($|\mathfrak{X}|, |f|$, [3] 04XG and the below paragraph)
points of $\mathfrak{X}$ とは，field の Spec から $\mathfrak{X}$ の射の，$\sim$ による同値類のことである．set of points of $\mathfrak{X}$ を $|\mathfrak{X}|$ と表す．すなわち，

$$|\mathfrak{X}| = \{\operatorname{Spec} k \to \mathfrak{X} \mid k :: \text{algebraically closed field }\}/\sim .$$

射 $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ について，$|f|$ を次で定義する．

$$\begin{array}{cccc} |f|\colon & |\mathfrak{X}| & \to & |\mathfrak{Y}| \\ & x & \mapsto & f \circ x \end{array}$$

2 Zariski Topology of Artin Stack

2.1 Atlases of Artin Stacks

下準備として artin stack の atlas について幾つか命題を述べる．最初は読み飛ばして構わない．

補題 2.1
任意の artin stack は atlas by a scheme，すなわち scheme からの smooth surjective 射を持つ．

(証明). この証明では **“smooth surjective”を “sm.surj.”，“etale surjective”を “et.surj.”と略す．**
artin stack と algebraic space の定義より，

- algebraic space から artin stack への sm.surj. 射 :: $\alpha\colon X \to \mathfrak{X}$，
- scheme から algebraic space への et.surj. 射 :: $a\colon U \to X$

が存在する．合成すれば scheme から artin stack への sm.surj. 射 :: $\alpha \circ a\colon U \to \mathfrak{X}$ が得られる．

α と a ではそれぞれ “smooth surjective”，“etale surjective”の定義の方法が異なるので，射 $\alpha \circ a$ が sm.surj. であることは調べる必要が有る．scheme からの sm.surj. 射 :: $V \to \mathfrak{X}$ をとり，以下の pullback 図式を考える．

$$\begin{array}{ccc} U \times_{\mathfrak{X}} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow a \\ X \times_{\mathfrak{X}} V & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ V & \longrightarrow & \mathfrak{X} \end{array}$$

この図式から次の 3 つが分かる．

- $V \to \mathfrak{X}$ は scheme からの sm. surj. 射，
- $a\colon U \to X$ が sm. surj. なので $U \times V \to X \times V$ も sm. surj.，
- $\alpha\colon X \to \mathfrak{X}$ も sm. surj. 射.

artin stack の射の性質の定義（α が sm. surj. であることの定義）から，$U \times V \to X \times V \to V$ は sm. surj.．two pullback lemma も合わせて考えれば，これは $\alpha \circ a$ :: sm. surj. を意味する． ∎

補題 2.2 ([3] tag 04T1)
artin stack :: $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ と $\mathfrak{Y}$ の atlas :: $V \to \mathfrak{Y}$ をとる．morphism of artin stacks :: $f\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ に対して，$\mathfrak{X}$

の atlas :: $U \to \mathfrak{X}$ と atlas の間の射 :: $\bar{f}\colon U \to V$ が存在し，以下が可換図式となる．

$$\begin{tikzcd} {}^{\exists}U \arrow[r, "{}^{\exists}\bar{f}"] \arrow[d] & {}^{\forall}V \arrow[d] \\ \mathfrak{X} \arrow[r, "{}^{\forall}f"'] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

scheme の射の性質 P を，smooth surjective morphism による composition と base change で保たれるものとする．[†1] f が性質 P を持つならば $\bar{f}$ も性質 P を持つ．

(証明)．atlas of $\mathfrak{X}$ :: $U \to \mathfrak{X}$ を適当にとり，次の fiber product をとる．

$$\begin{tikzcd} U \times_{\mathcal{Y}} V \arrow[rr] \arrow[d] & & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & \mathfrak{X} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

artin stack の定義から $U \times_{\mathcal{Y}} V$ :: alg. sp. である．また smooth, surjective は stable under base change/composition なので $U \times_{\mathcal{Y}} V \to U \to \mathfrak{X}$ は smooth surjective. よって $\bar{V} = U \times_{\mathcal{Y}} V, \bar{f} = \mathrm{pr}\colon U \times_{\mathcal{Y}} V \to V$ と置けばこれらが主張の条件を満たす．また，この証明から最後の段落の主張は明らかである． ∎

2.2 Definitions.

定義 2.3 (Zariski Topology on Points of Scheme/Algebraic Space/Artin Stack)

(i) scheme :: X とする．$U \subseteq |X|$ が (Zariski) open であるとは，ある open subscheme of X :: $\bar{U}$ が存在して $U = |\bar{U}|$ であること．

(ii) algebraic spspace :: X とし，A が scheme である atlas :: $a\colon A \to X$ をとる．$U \subseteq |X|$ が (Zariski) open subset であるとは，$a^{-1}(U)$ が $|A|$ の open subset であること．

(iii) artin stactk :: $\mathfrak{X}$ とし，A が scheme である atlas :: $a\colon A \to \mathfrak{X}$ をとる．$U \subseteq |\mathfrak{X}|$ が (Zariski) open subset であるとは，$a^{-1}(U)$ が $|A|$ の open subset であること．

2.3 Propositions

命題 2.4 ([3] 04XL)

(i) artin stack 間の任意の射 $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ について，$|f|\colon |\mathfrak{X}| \to |\mathcal{Y}|$ は continuous.

(ii) algebraic space からの flat and locally of finite presentation 射 :: $f\colon U \to \mathfrak{X}$ に対して，$|f|$ は continuous かつ open.

(i) の証明は簡単．(ii) は Tag 042S を用いる．

[†1] 例えば $P =$ smooth, surjective, flat, locally finite presentation, universally open. [3] tag 01V4.

2.3.1 Open sub-stack maps to open subset bijectively.

注意 2.5

artin stack の射にも "open immersion" であるものは存在するのだから，これを用いても open morphism などの概念が定義できる．この流儀での open morphism 等の概念と，我々の points of artin stack :: $|\mathfrak{X}|$ を使う流儀での open morphism 等の概念は同値なものである，ということを次の命題 (2.8) で示す．

points of artin stack を使うと，台集合を $|\mathfrak{X}|$ とする，通常の意味での位相空間が定義できる．その為，位相空間に関する概念を全て取り扱うことが出来る，というのが我々の流儀のアドバンテージである．

定義 2.6

artin stack :: $\mathfrak{X}$ の open sub-stack とは，$\mathfrak{X}$ の **strictly full** sub-category :: $\mathcal{U}$ [†2] で artin stack であるものであってかつ $\mathfrak{X}$ への inclusion :: $\mathcal{U} \to \mathfrak{X}$ が open immersion であるもの．

注意 2.7

equivalence of artin stacks :: $f\colon \mathfrak{X} \to fibY$ があっても，open sub-stack of $\mathfrak{X}$ の f による像が strictly full sub-category であるとは限らないことに注意．

命題 2.8 ([3] 06FJ, [2] Cor5.6.1)

(i) $\mathcal{U}$ が open sub-stack of $\mathfrak{X}$ ならば $|\mathcal{U}|$ は $|\mathfrak{X}|$ の open sub-set.

(ii) open sub-stack of $\mathfrak{X}$ の集まりからの対応 $\mathcal{U} \mapsto |\mathcal{U}|$ は一対一.

2.3.2 Surjectivity.

補題 2.9

任意の artin stack :: $\mathfrak{X}, \mathcal{Y}, \mathfrak{Z}$ について，

$$|\mathfrak{Z} \times_{\mathcal{Y}} \mathfrak{X}| \to |\mathfrak{Z}| \times_{|\mathcal{Y}|} |\mathfrak{X}|$$

は全射である．

補題 2.10

$f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ が全射であることと，$|f|\colon |\mathfrak{X}| \to |\mathcal{Y}|$ が全射であることは同値である．

2.3.3 Topological Property of $|\mathfrak{X}|$.

命題 2.11 ([2] 5.6.1(iii), 5.7.2)

atrin stack :: $\mathfrak{X}$ を考える．位相空間 $|\mathfrak{X}|$ について次が成り立つ．

(i) $|\mathfrak{X}|$ :: quasi-compact.

(ii) $|\mathfrak{X}|$ :: sober （すなわち，任意の irreducible component はただ一つの generic point を持つ．）

命題 2.12 ([2] 5.7)

artin stack の quasi-compact 射 :: $f\colon \mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ について，$|f|(\mathfrak{X})$ :: stable under specialization.

[†2] すなわち $\mathcal{U}$ は $\mathfrak{X}$ の全ての対象と同型射を含んでいる．

3 Sheaves on Algebraic Stacks

参考文献

[1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[2] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[3] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2019.