ゼミノート #5
Categorical Part of Descent Theory, and Stacks

七条彰紀

2018 年 11 月 28 日

今回のノートで一貫して用いる記号と記法を定める．

$\mathbf{C}$ :: site, $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ :: fibered category を考える[†1]．

記法を定める．$U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i\colon U_i \to U\}_{i\in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ について，

$$U_{ij} := U_i \times_U U_j, \quad U_{ijk} := U_i \times_U U_j \times_U U_k \quad (i,j,k \in I)$$

と書くことにする．また，添字 $a, b = i$ or j or k について，fiber product からの射影を

$$\mathrm{pr}_a\colon U_{ij}(\text{ or } U_{ijk}) \to U_a, \qquad \mathrm{pr}_{a,b}\colon U_{ijk} \to U_{ab}$$

とする．さらに $\mathrm{pr}_i\colon U_{ij} \to U_i$ による pullback を $(-)|_{U_{ij}}$ などと書く．

1 The Category of Descent Data

1.1 Definition

定義 1.1 ($\mathcal{F}(\mathcal{U})$, [2] 4.2.4, [1] Def4.2)
圏 $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を次のように定める．

Object.

- $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ なる対象の class $\{\xi_i\}_{i\in I}$ と，
- $\mathcal{F}(U_{ij})$ 中の同型 $\sigma_{ij}\colon \xi_j|_{U_{ij}} \to \xi_i|_{U_{ij}}$ の class $\{\sigma_{ij}\}_{i,j\in I}$

の組 $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ であって，以下で述べる cocycle condition を満たすもの．このような組を object with descent data と呼ぶ[†2]．

Arrow.

射 $\{\alpha_i\}\colon (\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}) \to (\{\eta_i\}, \{\tau_{ij}\})$ とは，$\mathcal{F}(U_i)$ の射 $\alpha_i\colon \xi_i \to \eta_i$ の class であって，σ_{ij}, τ_{ij} と整合的であるもの．すなわち，任意の $i, j \in I$ について以下の図式が可換であるもの．

$$\begin{tikzcd}
\xi_j|_{U_{ij}} \arrow[r, "\alpha_j|_{U_{ij}}"] \arrow[d, "\sigma_{ij}"'] & \eta_j|_{U_{ij}} \arrow[d, "\tau_{ij}"] \\
\xi_i|_{U_{ij}} \arrow[r, "\alpha_i|_{U_{ij}}"'] & \eta_i|_{U_{ij}}
\end{tikzcd}$$

[†1] ほとんど fiber of π しか扱わないので，psuedo-functor $\mathbf{C} \to \mathbf{Cat}$ をとっても構わない．

[†2] 同型の class $\{\sigma_{ij}\}$ が descent data と呼ばれる．

■**cocycle condition**　組 $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ が cocycle condition を満たすとは，任意の $i, j, k \in I$ について以下が成り立つということ．

$$\sigma_{ik}|_{U_{ijk}} = (\sigma_{ij}|_{U_{ijk}}) \circ (\sigma_{jk}|_{U_{ijk}}).$$

図式でかけば，圏 $\mathcal{F}(U_{ijk})$ における以下の図式が可換であることと同値．

$$\begin{tikzcd}
\xi_k|_{U_{ijk}} \arrow[rr, "\sigma_{jk}|_{U_{ijk}}"] \arrow[dr, "\sigma_{ik}|_{U_{ijk}}"'] & & \xi_j|_{U_{ijk}} \arrow[dl, "\sigma_{ij}|_{U_{ijk}}"] \\
& \xi_i|_{U_{ijk}} &
\end{tikzcd}$$

注意 1.2
この定義に於いて fiber products :: U_{ij}, U_{ijk} を暗黙のうちに選択している．たが，どのように選択しても得られる圏は同型に成る．U_{ij}, U_{ijk} の選択も込めて $(\{\xi_i\}, \{\xi_{ij}\}, \{\xi_{ijk}\})$ を $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象とする定義の仕方も有るが，ここでは述べない．詳細は [1] Remark 4.3 にある．

定義 1.3 ([1] p.72)
$\xi \in \mathcal{F}(U)$,$\mathcal{U} = \{\phi_i \colon U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ について，$\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の元を以下のデータに対応させる:

- $\xi_i := \phi_i^* \xi$ の class $\{\xi_i\}_{i \in I}$.
- $\xi_i|_{U_{ij}}$ と $\xi_j|_{U_{ij}}$ が，いずれも
$$\phi_i \circ \mathrm{pr}_i = \phi_j \circ \mathrm{pr}_j \colon U_{ij} \to U$$
による ξ の pullback であることから得られる標準的同型の class $\{\sigma_{ji} \colon \xi_j|_{U_{ij}} \to \xi_i|_{U_{ij}}\}_{i,j}$.

このデータをまとめて $(\{\phi_i^* \xi\}, \mathrm{cano})$ などと書く．この対応を $\epsilon_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ と書く．$\mathcal{F}(U)$ の射 $\xi \to \eta$ から，ϕ_i に沿った pullback によって $(\{\phi_i^* \xi\}, \mathrm{cano}) \to (\{\phi_i^* \eta\}, \mathrm{cano})$ が得られるので，対応 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ は関手である．

1.2 Example

例 1.4 ([2], 4.2.1)
一つの射から成る cover :: $\mathcal{U} = \{f \colon V \to U\}$ について $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を考えてみる．この圏の対象は，

- 対象 $E \in \mathcal{F}(V)$
- $\mathcal{F}(V \times_U V)$ の中の同型射 $\sigma \colon \mathrm{pr}_1^* E \to \mathrm{pr}_2^* E$

の組である．

例 1.5

2 Stack / Prestack

2.1 Definition

定義 2.1 (Prestack, Stack)
関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ を用いて以下のように定義する．

(i) 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ について $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: fully faithfull である時，$\mathcal{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Cat}$ は prestack である，という．

(ii) 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ について $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: equivalence である時，$\mathcal{F}\colon \mathbf{C} \to \mathbf{Cat}$ は stack である，という．

定義 2.2
関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ を用いて以下のように定義する．

(i) $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: equivalence となる $\mathcal{U}$ を of effective descent for $\mathcal{F}$ と呼ぶ.

(ii) $\epsilon_{\mathcal{U}}$ の像と同型である $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象を，effective という．

注意 2.3
prestack の定義は以下のように言い換えられる: 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i\colon U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ をとる．descent data $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}), (\{\eta_i\}, \{\tau_{ij}\}) \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ について，$\xi_i \cong \phi_i^*\xi, \eta_i \cong \phi_i^*\eta$ となる $\xi, \eta \in \mathcal{F}(U)$ が存在すると仮定する．$\{\alpha_i\}\colon (\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}) \to (\{\eta_i\}, \{\tau_{ij}\})$（すなわち条件を満たす射の class $\{\alpha_i\colon \xi_i \to \eta_i\}$）について，$\mathcal{F}(U)$ の射 $\alpha\colon \xi \to \eta$ が一意に存在し，$\alpha_i = \phi^*\alpha$ となる．
標語的に言えば「射の貼り合わせが一意に存在する psuedo-functor」となる．

2.2 Example

2.3 Proposition

命題 2.4 ([1] Prop4.9)

(i) separated sheaf of sets is a prestack.

(ii) sheaf of sets is a stack.

(証明). $\mathbf{C}$ :: site, $\mathcal{F}\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$ :: presheaf とする．$U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ を任意に取る．
今，圏 $\mathcal{F}(U), \mathcal{F}(\mathcal{U})$ は集合（離散圏）である．なので関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ は写像である．さらに射 σ_{ij} も恒等射しかないから，$\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象は，任意の i, j について $\xi_i|_{U_{ij}} = \xi_j|_{U_{ij}}$ を満たす $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ の族 $\{\xi_i\}_i$ であると考えて良い．このセミナーノートの session3 の記号を用いれば，$\mathcal{F}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ということに成る．
二つのデータ $\{\xi_i\}, \{\eta_i\}$ の間の射もやはり恒等射しかないから，「関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が fully faithful である」という仮定は「写像 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が単射である」と言い換えられる．これはすなわち，$\mathcal{F}$ が separated presheaf であるということである．
「関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が essentially surjective である」という仮定は「写像 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が全射である」と言い換えられるから．

$\epsilon_{\mathcal{U}}$ が equivalence であることは $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と $\mathcal{F}(U)$ の間に全単射が存在するということである．これはすなわち，$\mathcal{F}(U)$ が sheaf であるということである． ∎

参考文献

[1] Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008).

[2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.