

ゼミノート #10

Topology and Shaves on Algebraic Stacks

七条彰紀

2019 年 9 月 13 日

目次

1	Points of Artin Stack	1
2	Topology on $ \mathcal{X} $	4
2.1	Atlases of Artin Stacks	4
2.2	Definitions.	5
2.3	Propositions	6
3	Sheaves on Algebraic Stacks	7
3.1	Definitions	7
3.2	Propositions	9

ここまでで artin stack が定義できたが、これは scheme で言えば structure sheaf だけ定義したような状態である。artin stack の Zariski 位相空間と、(Grothendieck topology 上の) sheaf を導入する。

1 Points of Artin Stack

いずれも [3] Tag 04XE, [2] section 5. を参照せよ。

定義 1.1 ([2] section 5)

体の Spec からの射 $x_1: \text{Spec } k_1 \rightarrow \mathcal{X}, x_2: \text{Spec } k_2 \rightarrow \mathcal{X}$ について $x_1 \sim x_2$ であるとは、ある $k_{12} :: \text{field}$ と以下の 2-可換図式が存在すること。

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } k_{12} & \longrightarrow & \text{Spec } k_1 \\ \downarrow & & \downarrow x_1 \\ \text{Spec } k_2 & \xrightarrow{x_2} & \mathcal{X} \end{array}$$

命題 1.2 ([3] 04XF)

ここで定義した \sim は同値関係である。

(証明). \sim は反射律, 対称律を満たすことは自明なので, 推移律の成立を示す.

体から \mathcal{X} への 3 つの射 $:: x_1, x_2, x_3$ を考える. これらが $x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3$ を同時に満たすとは, 体 k_{12}, k_{23} と次の 2-可換図式が存在するということである.

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Spec} k_{12} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} k_2 & \longleftarrow & \mathrm{Spec} k_{23} \\ \downarrow & & \downarrow x_2 & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k_1 & \xrightarrow{x_1} & \mathcal{X} & \xleftarrow{x_3} & \mathrm{Spec} k_3 \end{array}$$

この時, k_{12}, k_{23} の合成体 (すなわち最小の共通の拡大体) を k_{123} とする. $k_{12} \cap k_{23}$ は k_{123} の部分体として k_2 に一致する (あるいは, 一致するように 2 つの準同型 $k_{12}, k_{23} \rightarrow k_{123}$ を選ぶ). すると可換図式は次のように拡張される.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathrm{Spec} k_{123} & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ \mathrm{Spec} k_{12} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} k_2 & \longleftarrow & \mathrm{Spec} k_{23} \\ \downarrow & & \downarrow x_2 & & \downarrow \\ \mathrm{Spec} k_1 & \xrightarrow{x_1} & \mathcal{X} & \xleftarrow{x_3} & \mathrm{Spec} k_3 \end{array}$$

上の新たな四辺形は scheme の図式として可換なので, この artin stack の拡張後の図式も可換. ■

注意 1.3

以上の定義は scheme の点に対応している. scheme $:: X$ について, 体の Spec $:: \mathrm{Spec} k$ から X への射は点 $x \in X$ と体の準同型 $:: \phi: \kappa(x) \rightarrow k$ に対応する ([1] ch II, Ex2.7, [3] 01J5). ここで $\kappa(x)$ は residue field である. したがって一点 x に対応する射は $\kappa(x)$ から体への準同型の数だけ有る. これらを全て同値なものとする同値関係を定めたい.

体から X への二つの射

$$x_1: \mathrm{Spec} k_1 \rightarrow \mathcal{X}, \quad x_2: \mathrm{Spec} k_2 \rightarrow \mathcal{X}$$

について, 以下は同値.

- (a) 位相空間の 2 つの写像 $|x_1|, |x_2|$ の像が x である.
- (b) すなわち, 体 k_{12} と次の可換図式が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec} k_{12} & \longrightarrow & \mathrm{Spec} k_1 \\ \downarrow & & \downarrow x_1 \\ \mathrm{Spec} k_2 & \xrightarrow{x_2} & X \end{array}$$

(a) \implies (b) は明らか. (a) \Longleftarrow (b) は次のように示す. まず k_{12} は合成体 $k_1 k_2$ と置けば良い. すると包含射 $k_1 \hookrightarrow k_{12}, k_2 \hookrightarrow k_{12}$ が存在する. 体の準同型は単射しか無いから, x_1, x_2 からそれぞれ得られる $\kappa(x) \rightarrow k_1, \kappa(x) \rightarrow k_2$ は包含射に取り替えられる. 包含関係は推移律を満たすから, 以下が可換ということになる.

$$\begin{array}{ccc} k_{12} & \longleftarrow & k_1 \\ \uparrow & & \uparrow \\ k_2 & \longleftarrow & \kappa(x) \end{array}$$

上で述べた, 体から X への射と $\kappa(x)$ から体への射の対応より, これは (b) の可換図式が存在することを意味する.

定義 1.4 ($|\mathcal{X}|, |f|$, [3] 04XG and the below paragraph)

points of \mathcal{X} とは, field の Spec から \mathcal{X} の射の, \sim による同値類のことである. set of points of \mathcal{X} を $|\mathcal{X}|$ と表す. すなわち,

$$|\mathcal{X}| = \{\text{Spec } k \rightarrow \mathcal{X} \mid k :: \text{ algebraically closed field} \} / \sim.$$

射 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ について, $|f|$ を次で定義する.

$$\begin{array}{ccc} |f|: & |\mathcal{X}| & \rightarrow & |\mathcal{Y}| \\ & x & \mapsto & f \circ x \end{array}$$

定義 1.5 ([3] 0EMW)

$X ::$ algebraic space over a scheme S とする. 点 $x \in |X|$ の residue field とは, x を代表する monomorphism $:: \text{Spec } k \rightarrow X$ が存在するような体 k のことである.

注意 1.6

residue field は常に存在するとは限らない. “descent algebraic space” と呼ばれる重要な種類の algebraic space では, 任意の点 x が residue field をもつ.

補題 1.7

$X ::$ algebraic space over a scheme S とする. 点 $x \in |X|$ をとり,

- x を代表する monomorphism $:: \phi: \text{Spec } k \rightarrow X$ と
- x を代表する任意の射 $:: \psi: \text{Spec } l \rightarrow X$

をとる. この時 ψ は ϕ を通じて一意に分解する.

(証明). fiber product $:: Y = (\text{Spec } k) \times_{\phi, X, \psi} (\text{Spec } l)$ をとる. ϕ, ψ が同値であるから, Y は空でない. mono は pullback で保たれるから $Y \rightarrow \text{Spec } l$ も mono. よって [3] 03DP ^{†1} から $Y \cong \text{Spec } l$.

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \text{Spec } k \\ \downarrow \cong & & \downarrow \phi \\ \text{Spec } l & \xrightarrow{\psi} & X \end{array}$$

こうして ψ の ϕ を通じた分解が存在する. ϕ が mono なのでこの分解は一意. ■

系 1.8

$X ::$ algebraic space over a scheme S とする. 点 $x \in |X|$ を代表する monomorphism は高々一つ.

^{†1} 証明を簡単にまとめると次のように成る. (1) 可換代数の命題「体から代数への全射準同型 $\phi: k \rightarrow R$ は同型 (特に単射)」に帰着させる. (2) $R \rightarrow R \otimes_k R; r \mapsto r \otimes 1$ は, $\tilde{r} \in \phi^{-1}(r)$ について $r \otimes 1 = \tilde{r}(1 \otimes 1)$ なので単射. (3) R は体上の代数なので free, 特に faithfully flat k -module.

2 Topology on $|\mathcal{X}|$

2.1 Atlases of Artin Stacks

下準備として artin stack の atlas について幾つか命題を述べる．最初は読み飛ばして構わない．

補題 2.1

任意の artin stack は atlas by a scheme, すなわち scheme からの smooth surjective 射を持つ．

(証明)．この証明では “smooth surjective” を “sm.surj.”, “etale surjective” を “et.surj.” と略す．

artin stack と algebraic space の定義より,

- algebraic space から artin stack への sm.surj. 射 $:: \alpha: X \rightarrow \mathcal{X}$,
- scheme から algebraic space への et.surj. 射 $:: a: U \rightarrow X$

が存在する．合成すれば scheme から artin stack への sm.surj. 射 $:: \alpha \circ a: U \rightarrow \mathcal{X}$ が得られる．

α と a ではそれぞれ “smooth surjective”, “etale surjective” の定義の方法が異なるので, 射 $\alpha \circ a$ が sm.surj. であることは調べる必要が有る．scheme からの sm.surj. 射 $:: V \rightarrow \mathcal{X}$ をとり, 以下の pullback 図式を考える．

$$\begin{array}{ccc} U \times_{\mathcal{X}} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow a \\ X \times_{\mathcal{X}} V & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \alpha \\ V & \longrightarrow & \mathcal{X} \end{array}$$

この図式から次の 3 つが分かる．

- $V \rightarrow \mathcal{X}$ は scheme からの sm. surj. 射,
- $a: U \rightarrow X$ が sm. surj. なので $U \times V \rightarrow X \times V$ も sm. surj.,
- $\alpha: X \rightarrow \mathcal{X}$ も sm. surj. 射.

artin stack の射の性質の定義 (α が sm. surj. であることの定義) から, $U \times V \rightarrow X \times V \rightarrow V$ は sm. surj.. two pullback lemma も合わせて考えれば, これは $\alpha \circ a :: \text{sm. surj.}$ を意味する. ■

補題 2.2 ([3] tag 04T1)

artin stack $:: \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ と \mathcal{Y} の atlas $:: V \rightarrow \mathcal{Y}$ をとる．morphism of artin stacks $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ に対して, \mathcal{X} の atlas $:: U \rightarrow \mathcal{X}$ と atlas の間の射 $:: \bar{f}: U \rightarrow V$ が存在し, 以下が可換図式となる．

$$\begin{array}{ccc} \exists U & \xrightarrow{\exists \bar{f}} & \forall V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\forall f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

scheme の射の性質 P を, smooth surjective morphism による composition と base change で保たれるも

のとする。^{†2} f が性質 P を持つならば \bar{f} も性質 P を持つ。

(証明). atlas of $\mathcal{X} :: U \rightarrow \mathcal{X}$ を適当にとり, 次の fiber product をとる。

$$\begin{array}{ccc} U \times_{\mathcal{Y}} V & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y} \end{array}$$

artin stack の定義から $U \times_{\mathcal{Y}} V :: \text{alg. sp.}$ である。また smooth, surjective は stable under base change/composition なので $U \times_{\mathcal{Y}} V \rightarrow U \rightarrow \mathcal{X}$ は smooth surjective. よって $\bar{V} = U \times_{\mathcal{Y}} V, \bar{f} = \text{pr}: U \times_{\mathcal{Y}} V \rightarrow V$ と置けばこれらが主張の条件を満たす。また, この証明から最後の段落の主張は明らかである。 ■

2.2 Definitions.

定義 2.3 (Zariski Topology on Points of Scheme/Algebraic Space/Artin Stack)

- (i) scheme $:: X$ とする。 $|X|$ の (Zariski) open subset とは, ある open subscheme of $X :: i: U \rightarrow X$ によって $|i|(|U|)$ とかける集合のこと。
- (ii) algebraic space $:: X$ とし, A が scheme である atlas $:: a: A \rightarrow X$ をとる。 $U \subseteq |X|$ が (Zariski) open subset であるとは, $|a|^{-1}(U)$ が $|A|$ の open subset であること。
- (iii) artin stack $:: \mathcal{X}$ とし, A が scheme である atlas $:: a: A \rightarrow \mathcal{X}$ をとる。 $U \subseteq |\mathcal{X}|$ が (Zariski) open subset であるとは, $|a|^{-1}(U)$ が $|A|$ の open subset であること。

定義 2.4

P を位相空間の性質 (e.g. irreducible, connected, quasi-compact, ...) とする。 artin stack $:: |\mathcal{X}|$ が P であるとは, $|\mathcal{X}|$ が P であるということ。

Q を位相空間の射の性質 (e.g. open, closed, dense, ...) とする。 artin stack の射 $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が Q であるとは, $|f|$ が Q であるということ。

補題 2.5

$X :: \text{scheme}$ について, $|X|$ は X の台位相空間と一致する。 さらに scheme の射 $:: f: X \rightarrow Y$ について, $|f|$ は X と Y の間の台位相空間の射と一致する。

(証明). 注意 (1.3) より明らか。 ■

補題 2.6

artin stack $:: \mathcal{X}$ について, $|\mathcal{X}|$ の Zariski topology は atlas に関わらず一意である。

(証明). scheme から \mathcal{X} への smooth surjective morphism を二つとり, それらの fiber product を作る。

$$\begin{array}{ccc} W & \longrightarrow & U \\ \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow u \\ V & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ & & \downarrow v \end{array}$$

^{†2} 例えば $P = \text{smooth, surjective, flat, locally finite presentation, universally open.}$ [3] tag 01V4.

artin stack の定義から, $W :: \text{scheme}$. また smooth ならば universally open である ([3] 04XL) から, $W \rightarrow U, W \rightarrow V$ は continuous, surjective, open. よって集合の間の射 $|W| \rightarrow |U|, |W| \rightarrow |V|$ も continuous, surjective, open.

なので以上の可換図式をたどれば, 任意の $O \subseteq |\mathcal{X}|$ について, $|u|^{-1}(O) \subseteq |U|$ が open であることと $|v|^{-1}(O) \subseteq |V|$ が open であることが同値であると分かる. これは $|\mathcal{X}|$ の Zariski topology は atlas に関わらず一意であることを意味する. ■

2.3 Propositions

命題 2.7 ([3] 04XL)

- (i) artin stack 間の任意の射 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ について, $|f|: |\mathcal{X}| \rightarrow |\mathcal{Y}|$ は continuous.
- (ii) algebraic space からの universally open 射 $f: U \rightarrow \mathcal{X}$ に対して, $|f|$ は continuous かつ open.

なお, smooth 射は flat and locally of finite presentation 射であり, したがって universally open である ([3] tag 01VE, 01VF, 01UA).

(証明). (i) は補題 (2.2) を用いれば容易に分かる. ■

2.3.1 Surjectivity.

補題 2.8

任意の artin stack $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ について,

$$|\mathcal{Z} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}| \rightarrow |\mathcal{Z}| \times_{|\mathcal{Y}|} |\mathcal{X}|$$

は全射である.

補題 2.9

$f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が全射であることと, $|f|: |\mathcal{X}| \rightarrow |\mathcal{Y}|$ が全射であることは同値である.

2.3.2 Open sub-stack maps to open subset bijectively.

注意 2.10

artin stack の射にも “open immersion” であるものは存在するのだから, これを用いても open morphism などの概念が定義できる. この流儀での open morphism 等の概念と, 我々の points of artin stack $|\mathcal{X}|$ を使う流儀での open morphism 等の概念は同値なものである, ということを次の命題 (2.13) で示す.

points of artin stack を使うと, 台集合を $|\mathcal{X}|$ とする, 通常の意味での位相空間が定義できる. その為, 位相空間に関する概念を全て取り扱うことが出来る, というのが我々の流儀のアドバンテージである.

定義 2.11 ([3] 04YM)

artin stack \mathcal{X} の open sub-stack とは, \mathcal{X} の **strictly full** sub-category $\mathcal{U}^{\dagger 3}$ で artin stack であるものであってかつ \mathcal{X} への inclusion $\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ が open immersion であるもの. closed sub-stack も同様である.

^{†3} すなわち \mathcal{U} は \mathcal{X} の全ての対象と同型射を含んでいる.

注意 2.12

equivalence of artin stacks $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ があっても, open sub-stack of \mathcal{X} の f による像が strictly full sub-category であるとは限らないことに注意.

命題 2.13 ([3] 06FJ, [2] Cor5.6.1)

- (i) \mathcal{U} が open sub-stack of \mathcal{X} ならば $|\mathcal{U}|$ は $|\mathcal{X}|$ の open sub-set.
- (ii) open sub-stack of \mathcal{X} の集まりからの対応 $\mathcal{U} \mapsto |\mathcal{U}|$ は一対一.

これらは closed についても同様である.

(証明). (TODO)

2.3.3 Topological Property of $|\mathcal{X}|$.

命題 2.14 ([2] 5.6.1(iii), 5.7.2)

artin stack $:: \mathcal{X}$ を考える. 位相空間 $|\mathcal{X}|$ について次が成り立つ.

- (i) $|\mathcal{X}| :: \text{quasi-compact}.$
- (ii) $|\mathcal{X}| :: \text{sober}$ (すなわち, 任意の irreducible component はただ一つの generic point を持つ.)

命題 2.15 ([2] 5.7)

artin stack の quasi-compact 射 $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ について, $|f|(|\mathcal{X}|) :: \text{stable under specialization}.$

3 Sheaves on Algebraic Stacks

3.1 Definitions

定義 3.1

artin stack over $S :: \mathcal{X}$ について, \mathcal{X} 上の big etale site $:: \text{ET}(\mathcal{X}) = (\mathbf{Sch}/\mathcal{X})_{\text{ET}}$ を次のように定める.

Objects scheme から \mathcal{X} への (任意の) 射.

Arrow 射 $[f: U \rightarrow \mathcal{X}] \rightarrow [g: V \rightarrow \mathcal{X}]$ は $f = g \circ \phi$ を満たす scheme の射 $\phi: U \rightarrow V$.

Covering scheme $:: U$ からの射 $U \rightarrow \mathcal{X}$ の cover は, U への etale 射が成す jointly surjective な族.

$\text{ET}(\mathcal{X})$ の sheaf と associated topos は通常と同様に定義する.

注意 3.2

ここで定義した $\text{ET}(\mathcal{X})$ は [3] 06TN で定義されている $\mathcal{X}_{\text{étale}}$ と同じものである. この Grothendieck topology が [3] で言う inherited topology([3] 06NV) であることは, \mathcal{X} が category fibered in groupoids であり, したがって全ての射が cartesian arrow ([3] 02XJ で言う strongly cartesian morphism) であることから従う.

[3] 06TN では他に big Zariski site on \mathcal{X} , big smooth site on \mathcal{X} なども定義されているが, 我々は etale site のみ考える.

注意 3.3

歴史的には smooth morphism を underlying category にとり etale topology を備え付ける site, lisse-etale

site が使われている。これは etale cohomology の点で有利だが, artin stack の射から誘導される functor $:: f^*, f^{-1}, f_*$ などが exact で無いといった不満点がある。このせいで sheaves on scheme の時のアナロジーも働かなくなる。定義も少々面倒なので、我々は big etale site を使う。

定義 3.4

site $:: \mathcal{S}$ 上の sheaf $:: \mathcal{F}$ について, set of global sections を以下で定める。

$$\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{F}) = \text{Hom}_{\mathbf{Sh}(\mathcal{S})}(*, \mathcal{F}).$$

ただし $*$ は category of sheaves of sets $:: \mathbf{Sh}(\mathcal{S})$ の terminal object である。

scheme $:: U$ について, $\Gamma(U, \mathcal{F})$ と $\mathcal{F}(U)$ は異なるものであることに注意せよ。

注意 3.5

category of sheaves of sets の terminal object は, 単元集合の constant sheaf である。したがって terminal object として特に単元集合 $\{*\}$ の constant sheaf をとると, $s \in \Gamma(\mathcal{F})$ は

$$\mathcal{S} \ni U \mapsto s_U(*) \in \mathcal{F}(U)$$

という対応を成す。 \mathcal{S} は scheme 上の site であれば, $\Gamma(\mathcal{F})$ の元が自然な方法で global section に一対一対応する。

定義 3.6 ([3] 06TU)

\mathcal{X} の structure sheaf $:: \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ を次で定める。

$$\text{ET}(\mathcal{X}) \ni U \mapsto \mathcal{O}_U(U).$$

\mathcal{O}_U は scheme $:: U$ の structure sheaf である。

$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ が確かに sheaf であることは [3] 03DT で証明されている。

定義 3.7 ($u^p, {}_p u$ in [3] 00VC, 00XF)

artin stack over a scheme $S :: \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ の間の射 $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ を考える。この f から topos の間の射 $:: \mathcal{X}_{\text{ET}} \rightarrow \mathcal{Y}_{\text{ET}}$ が誘導される。

まず sheaf $:: \mathcal{G} \in \mathcal{Y}_{\text{ET}}$ について,

$$(f^{-1}\mathcal{G})((U, u)) = \mathcal{G}((U, f \circ u)) \text{ where } (U, u) \in \text{ET}(\mathcal{X})$$

で $f^{-1}\mathcal{G} \in \mathcal{X}_{\text{ET}}$ を定める。同じく, sheaf $:: \mathcal{F} \in \mathcal{X}_{\text{ET}}$ について,

$$(f_*\mathcal{F})((V, v)) = \lim \left(I_{(V, v)}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{pr}_2} \text{ET}(\mathcal{X}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Sets} \right) \text{ where } (V, v) \in \text{ET}(\mathcal{Y})$$

で $f_*\mathcal{F} \in \mathcal{Y}_{\text{ET}}$ を定める。

ここで $I_{(V, v)}$ は次の圏である。

Objects: 以下の可換図式を満たす射の組 $(U \rightarrow V, U \rightarrow \mathcal{X})$:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow v \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Arrows: 射 $(U \rightarrow V, U \rightarrow \mathcal{X}) \rightarrow (U' \rightarrow V, U' \rightarrow \mathcal{X})$ は、以下を可換にする射 $U \rightarrow U'$ である。

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \downarrow & \searrow & \\ U' & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow v \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

$(f_*\mathcal{G})(V, v)$ の定義に有る $I_{(V,v)}^{\text{op}} \xrightarrow{\text{pr}_2} \text{ET}(\mathcal{X})$ は

$$(U \rightarrow V, U \rightarrow \mathcal{X}) \mapsto [U \rightarrow \mathcal{X}] \in \mathbf{Sch}/\mathcal{X}$$

で与えられる。

3.2 Propositions

補題 3.8 ([3] 06NW)

artin stack $:: \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ と $\mathcal{F} \in \text{ET}(\mathcal{X}), \mathcal{G} \in \text{ET}(\mathcal{Y})$ をとる。任意の射 $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ について $f^{-1}\mathcal{F}, f_*\mathcal{G}$ は確かに sheaf である。

命題 3.9 ([3] 00XF)

f^{-1} は f_* の left adjoint functor である。

(証明). $(f \circ): (\mathbf{Sch}/\mathcal{X}) \rightarrow (\mathbf{Sch}/\mathcal{Y})$ を $f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ の合成で得られる関手とする。すると関手 f^{-1} は関手 (sheaf) $(\mathbf{Sch}/\mathcal{Y}) \rightarrow \mathbf{Sets}$ と $(f \circ)$ の合成としてかける。

これを用いると上の定義は次のように変形できる。

$$(f_*\mathcal{F})(V, v) = \lim \left(((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}^{\text{op}} \xrightarrow{\pi_1} (\mathbf{Sch}/\mathcal{Y}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Sets} \right)$$

$((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}^{\text{op}}$ は圏 $(f \circ) \downarrow (V, v)$ の双対圏に etale Grothendieck topology を与えてできる site である。また $\pi_1: [(f \circ) \downarrow (U, u)] \rightarrow (V, v) \mapsto (U, u)$ 。

右辺は各点右 Kan 拡張 $(\text{Ran}_{(f \circ)} \mathcal{F})(V, v)$ なので、Kan 拡張の一般論により随伴性が分かる。 ■

命題 3.10 ([3] 06WS)

artin stack over a scheme $S :: \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ を考える。射 $:: f: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ と sheaf $:: \mathcal{F} \in \mathcal{X}_{\text{ET}}$ について、

$$(f_*\mathcal{F})(V, v) = \Gamma(\text{ET}(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X}), \text{pr}_2^{-1} \mathcal{F}).$$

ただし $\text{pr}_2: V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ は射影である。

(証明). 一般的な次の命題を用いる。証明は省略する。

補題 3.11 (https://ncatlab.org/nlab/show/limit#limit_of_a_setvalued_functor)

site $:: \mathcal{S}$ 上の set-value sheaf $:: \mathcal{F}$ を考える。この時、

$$\lim (\mathcal{S}^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Sets}) = \Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{F}).$$

今、一つ前の命題と合わせて

$$(f_*\mathcal{F})(V, v) = \lim \left(((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}^{\text{op}} \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \pi_1} \mathbf{Sets} \right) = \Gamma(((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}, \mathcal{F} \circ \pi_1).$$

なので $((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}^{\text{op}} = \text{ET}(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X})$ と $\mathcal{F} \circ \pi_1 = \text{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$ を確かめれば良い.

■ $((f \circ) \downarrow (V, v))_{\text{et}}^{\text{op}} = \text{ET}(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X})$. ET や $^{\text{op}}$ の部分は単に site として必要な部分なので,

$$(f \circ) \downarrow (V, v) = \mathbf{Sch}/(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X})$$

を示せば十分. 2-Yoneda embedding を用いて証明する.

対象から見ていく. 図式

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow v \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

を図式 $(*)$ と呼ぶことにする. 圏 $(f \circ) \downarrow (V, v)$ の対象は

- 射 $U \rightarrow \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ と,
- 図式 $(*)$ を 2-可換にする射 $U \rightarrow V$

の組である. 一方, $V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ の対象 (U, x, y, α) の対象は 2-Yoneda embedding によって次のように対応する:

- $U \in \mathbf{Sch}/S$ がそのまま scheme $:: U$ に,
- $x \in (\mathbf{Sch}/V)(U)$ が射 $U \rightarrow V$ に,
- $y \in \mathcal{X}(U)$ が射 $U \rightarrow \mathcal{X}$ に,
- $\alpha: v(x) \xrightarrow{\cong} f(y)$ の存在が図式 $(*)$ の 2-可換性に対応する.

射についても見ていく. 圏 $(f \circ) \downarrow (V, v)$ の射 $(U \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, U \rightarrow V) \rightarrow (U' \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, U' \rightarrow V)$ は, 以下 (の特に U を頂点とする二つの三角形) を 1-可換にする射 $U \rightarrow U'$ である.

$$\begin{array}{ccccc} U & & & & \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & U' & \longrightarrow & V \\ & & \downarrow & & \downarrow v \\ & & \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

$V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ の対象の射

$$(U \rightarrow U', \phi_V: x \rightarrow x', \phi_{\mathcal{X}}: y \rightarrow y')$$

は, それぞれ

- $U \rightarrow U'$ はそのまま $U \rightarrow U'$ に,
- $\phi_V: x \rightarrow x'$ は U, U', V の可換な三角形に,
- $\phi_{\mathcal{X}}: y \rightarrow y'$ は U, U', V の可換な三角形に

対応する. これらの射が満たす条件は, 二つの三角形の可換性と右下の四角形の 2-可換性とが整合的であることを意味している.

以上より, 所望の圏同値が得られた.

■ $\mathcal{F} \circ \pi_1 = \mathrm{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$. $\pi_1: (f \circ) \downarrow (V, v) \rightarrow (\mathbf{Sch}/\mathcal{X})$, $\mathrm{pr}_2: V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ はそれぞれ次のように定義されている.

$$\pi_1: [(f \circ)(U, u)] \mapsto (U, u: U \rightarrow \mathcal{X}), \quad \mathrm{pr}_2: (U, x, y, \alpha) \mapsto y: U \rightarrow \mathcal{X}$$

よって $\mathcal{F} \circ \pi_1 = \mathcal{F} \circ \mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$. な, $\mathcal{F} \circ \pi_1$ は関手の合成, $\mathrm{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$ は関手 pr_2^{-1} による像であるが, 結局同じものである. ■

注意 3.12

lisse-etale site を採用する場合は, f^{-1} は colimit として定義される ([2] section 12.5). これは [3] 00XF における u_p であるが, f_* と adjoint ではない ($f^{-1} \dashv f_*$ は上で述べた).

参考文献

- [1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.
- [2] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [3] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2019.