ゼミノート #11
Overview of
“Existence and properties of geometric quotients”(D.Rydh, 2013)

七条彰紀

2019 年 7 月 22 日

目次

このノートは，[7] を理解することを目的とするゼミのためのノートである．Algebraic stack については既に私のノート [9] の内容程度のことを分かっているものとする．

注意 0.1
著者 “Rydh”はスウェーデン語で，大体「リード」と発音する．参考: https://forvo.com/word/annika_rydh/

Conventions and Nootations

- 定義は私のノート [9] ch.5 “Algebraic Stacks and Spaces”にあるものとする．特に，diagonal map が quasi-compact，quasi-separated であることを仮定しない．これは [7] と同じである．algebraic stack という語は基本的に使わず，artin stack を中心的に扱う．
- artin stack の moduli space というとき，特別な algebraic space のことを意味することも有るし，artin stack から algebraic space への特別な射のことを意味することもある．（このノートでは後者の意味であることが多い．）
- unramified という語は locally of finite type かつ formally unramified を意味する．私のノートでは locally

of finite presentation まで要求するので注意せよ．

- presentation of an artin stack とは，surjective, flat [†1], locally of finite presentation であるような algebraic space から artin stack への射を言う．
- geometric point とは $\mathrm{Spec}\, k$ (k :: algebraically closed field) からの射のことである．

1 事実のまとめ

1.1 stack から scheme まで

moduli 問題を含む多くの問題では，まず stack(in groupoids) が得られる．得られた stack が scheme であればとても取り扱いやすいが，そうなることはめったに無い．

一方で stack と scheme の間には，artin stack, Deligne-Mumford(DM) stack, algebraic space といった中間的概念がある．いつどれになるのか，という条件は既によく研究されていて，同値条件も得られている．以下でそれらを列挙する．

まず，得られた moduli stack が artin stack であるか否かは，“Criteria for Representability”として [8] ch.91 にまとめられている．また，artin stack over a scheme :: $\mathcal{X}$ が Deligne-Mumford stack であるかどうかは，例えば任意の geometric point の自己同型群が reduced finite group scheme であることと同値である ([6] Thm8.3.3)．さらに，$\mathcal{X}$ が algebraic space であることは，例えば任意の geometric point の自己同型群が自明であることと同値である ([4] Thm2.2.5, [8] tag 04SZ)．

1.2 coarse moduli space が存在するための十分条件

しかし，得られた artin stack が algebraic space であることもまためったに無い．筆者の感覚では，DM stack で既に綺麗すぎる (too neat) 対象である．そこで，artin stack を algebraic space や scheme で近似出来ないか，という問題が生まれる．この近似を coarse moduli space と呼ぶ．なお，これは歴史的な経緯から来た命名であり，一般には必ずしも moduli 問題と関係が有るわけではない．

artin stack が coarse moduli space をもつための条件も 90 年代から考えられているが，必要十分条件を得るには程遠い．十分条件として有名なのは Keel-Mori の定理 ([5]) が提示した「inertia stack が $\mathcal{X}$-finite」である．当初は多くの追加条件付きで証明されたが，[3] で base scheme に関する条件が取り外され，最終的に [7] で artin stack に関する条件が全て取り外された．

他に，gerbe は必ず coarse moduli space を持つ．artin stack が berbe であることは，inertia stack :: $\mathcal{I}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{X}$ が flat and locally of finite presentation であることと同値である．

1.3 coarse moduli space が存在するための必要条件

一方で，coarse moduli space が存在するための必要条件についてはほとんど知られていない．([3] Cor5.2) では様々な前提条件付きで「separated coarse moduli space が存在する」と「inertia stack が $\mathcal{X}$-finite」が同値であることを示している．一方で [7] では反例を構成し，「inertia stack が $\mathcal{X}$-proper」さえ必要条件ではないことを示している．

[†1] surjective+flat=falthfully flat に注意．

1.4　その他の moduli space

また，「inertia stack が $\mathcal{X}$-finite」より強い条件を課したものとして，「quasi-coherent sheaf の pushforward が exact」を追加した tame Artin stack がある．これは coarse moduli space が etale local に綺麗なものとなっている．

違う方向性では，J.Alper が提案した adiquate moduli space と good moduli space がある．good moduli space は quotient map にはなっていないが，GIT quotient に似た優れた性質を持つ ([1])．さらに，artin stack が good moduli space を持つための必要十分条件が分かっている ([2])．

2　論文 “Existence and properties of geometric quotients” [7] の構成

今回取り扱う [7] で述べられている命題のうち，次のものを特に研究する．

定理 2.1
$\mathcal{X}$ を artin stack とする．$\mathcal{X}$ が $\mathcal{X}$-finite inertia stack を持つならば，$\mathcal{X}$ が coarse moduli space を持つ．

論文は基本的に algebraic space の groupoid による商を扱っており，最後の §6 でそれらが stack の言葉に翻訳される．

2.1　証明の構成

証明は以下のような手順を踏んでいる．

$\mathcal{X}$ は $\mathcal{X}$-finite inertia stack を持つ．

$\Big\Downarrow$ Thm6.11

$\mathcal{X}$ は fpr etale cover with finite locally free presentation :: $\mathcal{W}$ を持つ．

$\Big\Downarrow$ Thm5.3

$\mathcal{W}$ は strongly geometric quotient を持つ．

$\Big\Downarrow$ Thm3.19

$\mathcal{X}$ は strongly geometric quotient を持つ．

$\Big\Downarrow$ Thm3.8

$\mathcal{X}$ は coarse moduli space を持つ．

参考文献

[1] Jarod Alper. Good moduli spaces for artin stacks. *Annales de l'Institut Fourier*, Vol. 63, No. 6, pp. 2349–2402, 2013.

[2] Jarod Alper, Daniel Halpern-Leistner, and Jochen Heinloth. Existence of moduli spaces for algebraic stacks. https://arxiv.org/abs/1812.01128, 12 2018.

[3] Brian Conrad. The keel-mori theorem via stacks. https://math.stanford.edu/conrad/papers/coarsespace.pdf, 2005.

[4] Brian Conrad. Arithmetic moduli of generalized elliptic curves. *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu*, Vol. 6, pp. 209–278, 04 2007.

[5] Sean Keel and Shigefumi Mori. Quotients by groupoids. *Annals of Mathematics*, Vol. 145, No. 1, pp. 193–213, 1997.

[6] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[7] David Rydh. Existence and properties of geometric quotients. *Journal of Algebraic Geometry*, Vol. 22, pp. 629–669, 08 2013.

[8] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2019.

[9] 七条彰紀. Algebraic stacks, Sep 2018. https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/tree/master/AlgebraicStacks.