

以下での $(*)$ とは、次のもの:

- integral,
- separated,
- noetherian, and
- regular in codimension one.

また, (\dagger) は次のもの: $X ::$ noetherian scheme, $\mathcal{S} ::$ graded \mathcal{O}_X -algebra となっている. また, $d \in \mathbb{Z}, d \geq 0$ について, $\mathcal{S}_d ::$ homogeneous part of \mathcal{S} を $U \mapsto \mathcal{S}(U)_d$. X, \mathcal{S} は次をすべて満たす.

- $\mathcal{S} ::$ quasi-coherent.
- $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_d$.
- $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$.
- $\mathcal{S}_1 ::$ coherent \mathcal{O}_X -module.
- $\mathcal{S} ::$ locally generated by \mathcal{S}_1 as \mathcal{O}_X -algebra.

Ex7.1 Surjective Morphism between Invertible Sheaves is Isomorphic.

$X ::$ locally ringed space, $\mathcal{L}, \mathcal{M} ::$ invertible sheaves on X , $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M} ::$ surjective morphism, とする.

■Proof 1. 任意の点 $x \in X$ をとり, $A = \mathcal{O}_{X,x}$ とおく. $f_x : \mathcal{L}_x \rightarrow \mathcal{M}_x$ は同型写像を合成することで $\phi : A \rightarrow A ::$ surjective A -morphism と同一視出来る. $\phi ::$ surjective より, $\phi(\alpha) = 1 \in A$ となる $\alpha \in A$ がとれる. また ϕ は A -module morphism だから, $\alpha\phi(1) = 1$. そこで $\psi : A \rightarrow A$ を $a \mapsto \alpha a$ と定義すれば, これが ϕ の逆写像になる. よって ϕ, f_x は同型. Prop1.1 から, $f ::$ iso.

■Proof 2. Matsumura, Thm2.4 から分かる. これは NAK (or Nakayama's Lemma) からの帰結である.

注意 Ex7.1.1

$k(x) ::$ residue field と $f_x : \mathcal{L}_x \rightarrow \mathcal{M}_x$ をテンソルすると, $f_x \otimes \text{id}_{k(x)} ::$ surjective $k(x)$ -module morphism が得られる. よって $\ker(f_x \otimes \text{id}_{k(x)}) = 0$. しかし, ここから NAK をつかって $\ker f_x = 0$ を導くことは出来ない. $k(x)$ が flat $\mathcal{O}_{X,x}$ -module でなく, したがって $\ker(f_x \otimes \text{id}_{k(x)})$ と $(\ker f_x) \otimes k(x)$ の間に同型があることが言えないからである. このことは flat \implies torsion-free に気をつければすぐに分かる. 同様の議論が $f_x ::$ injective (と $\text{coker } f_x$) の場合に出来ることにも気づくが, このときは $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2; 1 \mapsto 3$ という反例がある.

Ex7.2 Two Sets of Global Generators and Corresponding Morphisms.

$k ::$ field, $X ::$ scheme $/k$, $\mathcal{L} ::$ invertible sheaf on X , $S = \{s_0, \dots, s_m\}, T = \{t_0, \dots, t_n\} ::$ global generators of \mathcal{L} . とする. ここで S, T は同じ線形 (部分) 空間 $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ を張るとする. また $n \leq m, d = \dim_k V$ とする.

S, T からそれぞれ Thm7.1 のように定まる morphism を ϕ_S, ϕ_T とする. ϕ_S が次のように分解できる

ことを示す.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\phi_T} & \text{im } \phi_T & \hookrightarrow & \mathbb{P}^m - L & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n \\ & & & & & & \uparrow \phi_S \\ & & & & & & \end{array}$$

ここで π, α はそれぞれ linear projection と automorphism である.

$X \rightarrow \mathbb{P}^n$ の morphism を考えることは, $k[y_0, \dots, y_n]$ の元 y_0, \dots, y_n の変換を考えることと同じである. これは Thm7.1 の証明を観察すれば分かる. 二つの k -linear map は ϕ_S^*, ϕ_T^* はそれぞれ, $y_i \mapsto s_i (i = 0, \dots, n), y_i \mapsto t_i (i = 0, \dots, m)$ で定まっている. したがって問題は, t_0, \dots, t_m を s_0, \dots, s_n へ変換する projection と automorphism をつくる問題, と言い換えられる.

今, 次のような $(m+1) \times (n+1)$ 行列 Q が存在する.

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}.$$

S, T が V の生成系であることから $\text{rank } Q = \dim V =: d$. Q は基本行列をいくつもかける (あるいは基本変形を繰り返す) ことにより, 次の形に分解できる.

$$Q = LP_dR \quad \text{where } L \in PGL(m, k), R \in PGL(n, k)$$

ただし行列 P_r ($r = 1, \dots, n+1$) は $r \times r$ -identity matrix I_r をもちいて $P_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と定義される行列である. (TODO: P_d を P_{n+1} に交換しても問題ない?) L, P_{n+1}, R が誘導する morphism をそれぞれ $\beta, \tilde{\pi}, \alpha$ とすれば, α, β は automorphism であり, $\tilde{\pi}$ は projection である.

$$\mathbb{P}^m \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^m \xrightarrow{i} \mathbb{P}^m - L \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{P}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n$$

求める写像はこの α と, $\pi = \beta \circ i \circ \tilde{\pi}$ である. また, $L = Z_p(y_0, \dots, y_n) \subseteq \mathbb{P}^m$ の次元は $m - (n+1)$ である.

Ex7.3 Morphism of $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ can be Decomposed into Common Ones.

$\phi : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^m$ を考える. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) ::$ invertible sheaves の global generator をそれぞれ $\{x_0, \dots, x_m\}, \{y_0, \dots, y_n\}$ とする.

(a) $\text{im } \phi = pt$ or $m \geq n$ and $\dim \text{im } \phi = n$.

$s_i = \phi^*(x_i)$ ($i = 0, \dots, m$) とおくと, s_0, \dots, s_m は $\mathcal{L} := \phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$ の global generator である. \mathcal{L} は \mathbb{P}^n 上の invertible sheaf だから, Cor6.17 より, $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ となる $d \in \mathbb{Z}$ が存在する. Example7.8.3 同様, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ は $|d|$ 次斉次単項式で生成される.

■ $m < n \implies \dim \text{im } \phi = 0$.

■ $m \geq n \implies \dim \text{im } \phi = n$.

Ex7.4 If X Admits an Ample Invertible Sheaf, then X is Separated.

(a) Assumption of Thm7.6 $\implies X :: \text{separated}$.

$A :: \text{noetherian ring}$, $X :: \text{scheme of finite type } /A$ とする. $\mathcal{L} :: \text{ample invertible sheaf on } X$ が存在したとする. Thm7.6 から, immersion $i: X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ ($n > 0$) が存在する. これは X から \mathbb{P}_A^n の locally closed subscheme への isomorphism である. これに projection $\text{pr}: \mathbb{P}_A^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A$ を合成したものは, quasi-projective.

$$X \xrightarrow{\sim} U \cap Z \hookrightarrow \mathbb{P}_A^n \xrightarrow{\text{pr}} \text{Spec } A$$

U, Z はそれぞれ \mathbb{P}_A^n の open, closed subscheme である. A, X についての仮定から $\text{Spec } A, X :: \text{noetherian scheme}$ がわかる^{†1} から, Thm4.9 より, この写像 $X \rightarrow \text{Spec } A$ は separated.

(b) There is No Ample Invertible Sheaf on $\text{Spec } k[x, x^{-1}] / \text{a field } k$.

$k :: \text{field}$, $X :: \text{affine with doubled origin } /k$ とする. より詳細に, X は $X_1 = \text{Spec } k[x], X_2 = \text{Spec } k[y]$ を $U_1 = X_1 - \{O_1\}, U_2 = X_2 - \{O_2\}$ で貼りあわせたものとする. ただし $O_1 \in X_1, O_2 \in X_2$ は原点である. X_i, U_i, O_i ($i = 1, 2$) はすべて X の部分集合とみなす. $X :: \text{noetherian integral scheme}$ は明らか. Example 6.3.1, Cor 6.16 より, $\text{Pic } X_1, \text{Pic } X_2 = 0$.

まず $\text{Pic } X$ を計算する. $\mathcal{L} \in \text{Pic } X$ をとる. $X_{12} := X_1 \cap X_2 (\cong \mathbb{A}^1 - \{0\})$ としておく. $\text{Pic } X_{12} = 0$ (Prop6.2, Cor6.16) より, $\mathcal{O}_{X_{12}} \cong \mathcal{L}|_{X_{12}}$. さらに X_{12} は $D(x) \subseteq \text{Spec } k[x]$ と同型であるから,

$$\mathcal{O}_{X_{12}} = \mathcal{O}_{X_1}|_{X_{12}} = (k[x]_x)^{\sim} = (k[x, x^{-1}])^{\sim}.$$

すなわち $\Gamma(X_{12}, \mathcal{O}_{X_{12}}) = k[x, x^{-1}]$. X_{12} は affine だから, Ex5.3 より, $\mathcal{O}_{X_{12}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}|_{X_{12}}$ は $k[x, x^{-1}] \xrightarrow{\cong} \Gamma(X_{12}, \mathcal{L}|_{X_{12}})$ の $k[x, x^{-1}]$ -isomorphism によって決定される. この同型射は $k[x, x^{-1}]$ の単元をかける写像によって定まる. そして単元は ax^n ($a \in k^*, n \in \mathbb{Z}$) と書ける. また, $k^* = \Gamma(X_{12}, \mathcal{O}_{X_{12}}^*)$ の分の違いは無視されるから, 結局同型射は x^n ($n \in \mathbb{Z}$) で定まる. こうして, $\mathcal{O}_{X_{12}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}|_{X_{12}}$ が \mathbb{Z} に対応することが分かった. この同型射で \mathcal{L} 全体も定まる (??). 以上から $\text{Pic } X \cong \mathbb{Z}$.

$n \in \mathbb{Z}$ に対応する $\text{Pic } X$ の元を \mathcal{L}_n と書く. $\text{Pic } X \cong \text{CaCl } X$ に注意して, \mathcal{L}_n に対応する Carrier Divisor を考えると, これは $\{\langle U_1, x^{-n} \rangle, \langle U_2, 1 \rangle\}$ である.

\mathcal{L}_n が global generator を持つのは $n = 0$ すなわち $\mathcal{L}_n = \mathcal{O}_X$ であるときのみ. $\mathcal{L}_0 \otimes \mathcal{L}_n \cong \mathcal{L}_n$ なので, ample sheaf は存在しない. <https://math.stackexchange.com/questions/70042>.

^{†1} $f: X \rightarrow \text{Spec } A$ が finite type ならば $f^{-1} \text{Spec } A = X$ は finite affine open cover をもち, 各 affine open cover は finitely generated A -algebra の Spec である. finitely generated A -algebra は A から noetherian を受け継ぐから, $X :: \text{noetherian}$.

Ex7.5 Ample and Very Ample are Inherited by Tensor Products.

Ex7.6 The Riemann-Roch Problem.

Ex7.7 Some Rational Surfaces.

Ex7.8 Sections of $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow X \leftrightarrow$ Quotient Invertible Sheaves of \mathcal{E} .

Ex7.9

Ex7.10 P^n -Bundles Over a Scheme.

Ex7.11 Different Sheaves of Ideals can Give Rise to Isomorphic Blow Up Schemes.

Ex7.12

Ex7.13 * A Complete Nonprojective Variety.

Ex7.14