ゼミノート #3
Stable Curves

七条彰紀

2018 年 5 月 29 日

[1] 2.C,D を中心に stable curve について記述する．以下で曲線は全て **arithmetic genus** が 2 以上であるものとする．これは特異曲線を扱うために arithmetic genus を用い，自己同型群が有限であるために ≥ 2 とする．

1 Motivation: To Get Modular Compactification of $\mathcal{M}_g$.

G.I.T. によって $\mathcal{M}_g$ を得る方法では，Hilbert scheme $\mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}$[†1] の開集合 K を用いて $\mathcal{M}_g = K/PGL(N+1,\mathbb{C})$ として $\mathcal{M}_g$ を得た．

そこで compactification of $\mathcal{M}_g$（ここでは $\mathcal{M}_g$ を開集合として含む projetive scheme over $\mathbb{Z}$）を得る方法として，K の $\mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}$ での閉包を取って $PGL_{N+1}(\mathbb{C})$ で割る，ということが思いつく．しかしこれでは moduli space が得られない．moduli space を得るためには，K を含む集合 $\tilde{K}$ の商 $\tilde{K}/PGL_{N+1}(\mathbb{C})$ をとらなくてはならない．これらの包含関係は $K \subset \tilde{K} \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{H}}(K)$ となる．

$\bar{K}$ でなく $\tilde{K}$，という制限が必要な理由は次のように説明される: 次のような $(s:t) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{(0:1),(1:0)\} =: B$ でパラメトライズされる family of smooth curves を考える．

$$C_{(a,b)} : s^3y^2z = s^3x^3 - st^2axz - t^3bz^3 \quad \text{where} \quad a,b \in \mathbb{C}, (s:t) \neq (0:1),(1:0)$$

j-invariant を計算すると，これは fiberwise trivial family（session1A2A 参照）になっている．また，この曲線族 $C_{(a,b)}$ は a,b の値を変えることで任意の楕円曲線を含むものに成る．今 family :: $C_{(a,b)} \to B$ があるから，coarse moduli space の定義より，morphism :: ϕ: $B \to \overline{\mathcal{M}}_g$ が存在する．今，$\overline{\mathcal{M}}_g$ は projective (over $\mathbb{Z}$) であるから，proper ([2] Thm II.4.9)．なので $B = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{(0:1),(1:0)\} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ は $\bar{\phi}: \mathbb{P}^1 \to \overline{\mathcal{M}}_g$ へ拡張される[†2]．そこで $\bar{\phi}$ の $t=0$ における fiber を考えると，明らかにこれは cuspidal curve :: $y^2z = x^3$ である．これは rational curve であり，他の fiber と同型でない．他の fiber は全て同型であったから，この family では jamp phenomenon が発生している．したがって moduli space を得るためには，cuspidal curve に対応する点を K に（そして $\mathcal{M}_g$ に）付け加えてはならない．この意味で cuspidal curve は楕円曲線の “bad degeneration”と呼べる．

[†1] $N = (2n-1)(g-1)-1$.

[†2] 証明の概略: criterion of properness を用いて $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,\zeta} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ を $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,t} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ に拡張し，これらが ϕ と貼り合わせられることを射の一意性から述べる．`https://math.stackexchange.com/questions/1540201`，`http://lovelylittlelemmas.rjprojects.net/properness-and-completeness-of-curves/` を参照のこと．

ではjump phenomenonが発生しないような “good degeneration”は何か，というと，これがstable curveである．DeligneとMumfordがstable curveを定義し，研究した．

3A, 4A

2 Definition.

定義 2.1 (Stable Curve)
stable curveとは，以下を満たす曲線（scheme of dimension 1 over $\mathbb{C}$）である．

1. 完備 (=proper),
2. 連結,
3. （存在すれば）特異点は2重点 (node) のみ,
4. 自己同型群が有限位数．

注意 2.2
Hurwitz's automorphisms theoremから，connected proper smooth curve of genus $g \geq 2$ は全てstable curveである．

まったく同様にstable n-pointed curveも定義できる．

定義 2.3
stable n-pointed curveとは，以下を満たす曲線 C（scheme of dimension 1 over $\mathbb{C}$）

1. 完備 (=proper),
2. 連結,
3. （存在すれば）特異点は2重点 (node) のみ,

と，n 個の互いに異なる C の点 $p_1, \ldots, p_n$ の組 $(C, p_1, \ldots, p_n)$ であって，$\sigma(p_i) = p_i$ を満たすような自己同型 $\sigma : C \to C$ が成す群が有限群であるものである．

関連してsemi-stable (pointed) curveとunstable (pointed) curveの概念がある．これは「自己同型群が有限群」であるという条件をゆるめたもので,「自己同型群が簡約群 (reductive group)」とする．reductive groupはG.I.T.の文脈で現れる概念である．

3 Example

例 3.1
次の $\mathbb{A}^1$ 上のfamilyを考える．

$$C_t : y^2 z = x(x-1)(x-t) \quad \text{where} \quad t \in \mathbb{A}^1.$$

$t \neq 0, 1$ の時，C_t は楕円曲線である．また，任意の $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線はこのfamilyのいずれかのfiberと同型である．すなわち，fiberwise trivial familyではない．そして $t = 0, 1$ の時 C_t はstable curveとなっている．

実際，(TODO: 証明)

4　$\Delta = \overline{\mathcal{M}}_g - \mathcal{M}_g$

定理 4.1

coarse moduli space of stable curves (resp. stable n-pointed curves) :: $\overline{\mathcal{M}}_g$ (resp. $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$) が存在し，これは projective variety である．

さらに，Node を δ 個以上もつ stable curve に対応する点の集合は，pure codimention δ であることが知られている．特にこのことから，stable curve は多くとも $3g-3$ 個の node しか持てないことが分かる．

5　(Semi-)Stable Reduction.

参考文献

[1] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.