層 (sheaf) の概観

代数幾何学に於いて

七条彰紀

2019 年 6 月 23 日

代数幾何学を始める人のために，またこれから学ぶ人のために書きます．ノートです．当然ですが.

1　代数幾何学に於ける sheaf という概念

まず代数幾何学での sheaf の立ち位置について書いておきます．sheaf，より一般に stack は代数幾何学の中心的概念です.

■scheme theory に於いて　scheme theory では可換環から scheme という幾何学的な対象を構築します．この構築の際に，可換環論という代数学を記憶しているのが sheaf です．可換環が「切り刻まれ貼り合わされて」structure sheaf となっているのです．他に scheme theory で現れる sheaf としては，scheme 上の (quasi-)coherent sheaf が重要です．(quasi-)coherent sheaf を調べることは，scheme についての情報を得るための基本的な手段です．また scheme 上の sheaf cohomology は，scheme に「変な感じの部分」がどれだけあるかを調べるための重要な道具となっています．（特に etale cohomology は数論においても重要な位置を占めています.）

■scheme theory をはみ出す　一方で，scheme だけでは用に足りないことがあります．例えば scheme の群による商を考えることがあります（これは普通の位相空間の群作用による商のようなものです)．定義は圏論的に，普遍性を用いて定義されるのですが，条件を満たす scheme が無い，ということはしょっちゅうです．これに対する一つの解決方法として，scheme の概念を拡張するということが考えられます．圏論的に性質の良い，都合の良い対象まで研究対象に収めようというわけです.

■圏論ちょっとわかる，という人向け　scheme の概念を拡張するには，どのような方策を取るべきでしょうか．当座の目標は「scheme の圏を包含する圏を探す」ということです．全ての極限を scheme の圏に付け加える (pro-scheme)，基礎を担う可換環論を非可換環論やモノイド論まで拡大する，などの手段があります．ですがまた別に，米田の補題を手がかりにする事が出来ます．米田の補題は，米田関手が scheme の圏から scheme 上の presheaf の圏への忠実充満関手となることをいっています．scheme の圏を包含する圏として「scheme の圏から scheme 上の presheaf の圏」が使える，ということです.

■scheme の一般化に於ける sheaf　この，scheme の一般化 (generalized scheme) を考える方向では，sheaf が中心概念です．実際に generalized scheme の代表である algebraic space は sheaf です．そして algebraic space の定義に algebraic space の位相空間の定義は含まれていません.

ちなみに極端なことを言うと，scheme でさえ最初から位相空間無しに定義することが可能です．これは"functorial scheme"などと呼ばれます．もちろんこれは普通の意味の scheme ではありませんが，"functorial scheme"から普通の scheme の体裁を整えることも，この逆も可能です．

■さらなる一般化　そしてさらに sheaf は stack へ，algebraic space は algebraic stack (Artin/DM stack) へと一般化されます．恐ろしいことに algebraic space にも algebraic stack に関しても (quasi-)coherent sheaf や sheaf cohomology といった理論が構築されています．

2　sheaf の思想

■「局所的に調べ，大域的に知る」　位相空間上の sheaf の定義の仕方はいくつか存在しますが，意味が分かりやすいのは “identity axiom” と “gluability axiom” を満たす preaheaf として定義することだと思います．