$(f^{-1}\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_{f(x)}$ の証明

七条 彰紀

2017 年 10 月 13 日

定義 0.1
連続写像 $f : X \to Y$ と Y 上の sheaf $\mathcal{F}$ に対して，$f^{-1}\mathcal{F}$ を $U \mapsto \varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathcal{F}(V)$ で定まる presheaf の associated sheaf とする．

X 上の sheaf $\mathcal{G}$ に対して $U \mapsto \mathcal{G}(f^{-1}(U))$ は sheaf $f_*\mathcal{G}$ を定める．これに対応して $U \mapsto \mathcal{F}(f(U))$ で presheaf を定めることは，一般には出来ない．そこで代わりに $f(U)$ を含む開集合達で $f(U)$ を近似しよう，というのが f^{-1} である．(「それに近いもの全体」で「それ」を表現しよう，という思考は数学の他の場所にも現れる．)

このノートの目的は次の主張に 2 つの証明を与えることである．

命題 0.2 $(*)$
$f : X \to Y$ を連続写像とし，$\mathcal{F}$ を Y 上の sheaf とする．この時，$x \in X$ について $(f^{-1}\mathcal{F})_x = \mathcal{F}_{f(x)}$.

直接の証明は次の通り．

(証明). sheafification と taking stalk at x が可換であることは既知とする[†1] したがって我々は次を示せば良い．

$$\varinjlim_{V\in\mathcal{D}} \mathcal{F}(V) = \varinjlim_{V\in\mathcal{S}} \mathcal{F}(V)$$

ただし $\mathcal{D}, \mathcal{S}$ は以下のような direct system である．(TODO: $(f^{-1}\mathcal{F})_x$ は厳密には direct limit $(f^{-1}\mathcal{F})(U)$ が成す direct system の direct limit なので，ここの翻訳は証明が必要．)

$$\mathcal{D} = \{V \supseteq V' \mid {}^{\exists}U \subseteq X,\ \ x \in U, f(U) \subseteq V' \subseteq V\},\ \ \mathcal{S} = \{V \supseteq V' \mid f(x) \in V' \subseteq V\}.$$

ここに現れる X, Y の部分集合はすべて開集合である．$\mathcal{D} \subseteq \mathcal{S}$ は明らか．一方，$f(x) \in V$ ならば $x \in f^{-1}(V)$ である．f は連続だから $f^{-1}(V)$ は開集合であり，$x \in U \subseteq f^{-1}(V)$ すなわち $f(x) \in f(U) \subseteq V$ なる開集合 $U \subseteq X$ が存在する．よって $\mathcal{D} \supseteq \mathcal{S}$ も得られる．direct system が同じものであるから，2 つの direct limit も同じである． ∎

上記の主張 $(*)$ は次の主張の系としても得られる．

主張 0.3
2 つの写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を連続写像とし，$\mathcal{F}$ を Z 上の sheaf とする．この時，$f^{-1}g^{-1}\mathcal{F} = (g \circ f)^{-1}\mathcal{F}$

[†1] これは sheafification Sh が left adjoint functor であり，taking stalk at x $\varinjlim_{x\in U}$ が colimit であることによる．Sh が left adjoint functor であることは，次の pdf ファイルに証明を書いた: `https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section1_ex.pdf`

(証明). functor f^{-1}, g^{-1} はそれぞれ f_*, g_* の left adjoint functor である．[†2]．一方，g_*f_* は定義から明らかに $(g\circ f)_*$ に等しい．なので次が成り立つ．

$$\mathrm{Hom}(f^{-1}g^{-1}\mathcal{F}, -) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, g_*f_*-) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, (g\circ f)_*-) \cong \mathrm{Hom}((g\circ f)^{-1}\mathcal{F}, -).$$

すなわち，$f^{-1}g^{-1}, (g\circ f)^{-1}$ はどちらも $g_*f_*(=(g\circ f)_*)$ の left adjoint functor である．adjoint functor の一意性から，$f^{-1}g^{-1}\mathcal{F} = (g\circ f)^{-1}\mathcal{F}$. ∎

この主張の系として $(*)$ の証明を与える．

(証明). $i : \{x\} \hookrightarrow X$ を包含写像とする．証明は $(i^{-1}f^{-1}\mathcal{F})(\{x\})$ を二通りの方法で計算することによる．

最初に，$i^{-1}f^{-1} \cong (f\circ i)^{-1}$ を用いる．$f\circ i$ は $\{x\} \to \{f(x)\} \subseteq Y$ なる写像であるから，これは presheaf $\{x\} \supseteq U \mapsto \varinjlim_{f\circ i(U)\subseteq V} \mathcal{F}(V)$，すなわち次の presheaf の associated sheaf である．1 点空間上の presheaf は sheaf だから，実際には sheafification は不要である．

$$((f\circ i)^{-1}\mathcal{F})(U) = \begin{cases} 0 & (U=\emptyset) \\ \mathcal{F}_{f(x)} & (U=\{x\}). \end{cases}$$

よって，この方針では $(i^{-1}f^{-1}\mathcal{F})(\{x\}) = \mathcal{F}_{f(x)}$.

一方，$(i^{-1}f^{-1}\mathcal{F}) = (i^{-1}(f^{-1}\mathcal{F}))$ と考えて計算すると，次のように成る．

$$(i^{-1}f^{-1}\mathcal{F})(\{x\}) = (i^{-1}(f^{-1}\mathcal{F}))(\{x\}) = \varinjlim_{\{x\}\subseteq V\subseteq X} (f^{-1}\mathcal{F})(V) = (f^{-1}\mathcal{F})_x.$$

ここでも sheafification が不要であることを用いている[†3]. ∎

[†2] 次の pdf ファイルの "Ex1.18 Adjoint Property of f^{-1}." に証明を書いた: `https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section1_ex.pdf`

[†3] $(i^{-1}(f^{-1}\mathcal{F}))(\{x\})$ は，$V \mapsto \varinjlim_{i(U)\subseteq V\subseteq X}(f^{-1}\mathcal{F})$ の **sheafification** の $U=\{x\}$ における section，である．