

ゼミノート #9

Quotient Stacks

七条彰紀

2019 年 1 月 16 日

目次

1	Definitions	1
1.1	\mathcal{G} -torsor	1
1.2	Quotient Stack	2
2	Aim of This Session	3
3	準備	3
3.1	Definition of $\mathbf{Isom}(X, Y)$	3
3.2	Representability of Diagonal Morphism.	4
4	証明	5

Algebraic stack の具体例として Quotient stack を扱う．この例を通じて特に、「diagonal morphism $\Delta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が表現可能とはどういうことか」ということを考えたい．参考文献として [2] 1.3.2, [1] Example 4.8, [3]

1 Definitions

1.1 \mathcal{G} -torsor

定義 1.1 (\mathcal{G} -Torsor, [3] 4.5.1, [4] Tag 04UJ)

一般の site \mathcal{C} をとり, \mathcal{G} を \mathcal{C} 上の sheaf of groups とする． \mathcal{C} 上の \mathcal{G} -torsor とは, \mathcal{C} 上の sheaf \mathcal{P} と左作用 $\alpha: \mathcal{G} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ の組であって, 次を満たすもの．

T1 任意の $X \in \mathcal{C}$ について cover of $X :: \{X_i \rightarrow X\}$ が存在し, $\mathcal{P}(X_i) \neq \emptyset$.

T2 写像

$$\langle \mathrm{pr}_2, \alpha \rangle: \mathcal{G} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \times \mathcal{P}; \quad (p, g) \mapsto (p, \alpha(g, p))$$

は同型．ただし, $\langle \mathrm{pr}_1, \alpha \rangle$ は $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ の普遍性と $\mathrm{pr}_1, \alpha: \mathcal{P} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}$ から得られる射である．

$\mathcal{G} \cong \mathcal{P}$ かつ α が \mathcal{G} の積写像であるとき, $\mathcal{G}\text{-torsor} :: (\mathcal{P}, \alpha)$ は自明 (trivial) であると言う.
射 $(\mathcal{P}, \alpha) \rightarrow (\mathcal{P}', \alpha')$ は sheaf の射 $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ であって以下が可換図式であるもの.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathcal{P} & \xrightarrow{\text{id} \times f} & \mathcal{G} \times \mathcal{P}' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ \mathcal{P} & \xrightarrow{f} & \mathcal{P}' \end{array}$$

この射は \mathcal{G} -equivariant morphism (\mathcal{G} 同変写像) と呼ばれる.

注意 1.2

\mathcal{G}, \mathcal{P} の両方が scheme で表現できる場合には, $\mathcal{G}\text{-torsor}$ は principal bundle と呼ばれる. group scheme に対応する representable sheaf が

注意 1.3

任意の $X \in \mathbf{C}$ について $\mathcal{P}(X) \neq \emptyset$ である場合には, 条件 T2 は作用 α が単純推移的であることを意味する.
すなわち, 任意の $p, q \in \mathcal{P}(X)$ についてただ一つの $g \in \mathcal{G}(X)$ が存在し, $q = g * p = \alpha(g, p)$ となる.

補題 1.4 ([4] Tag 03AI, [3] 4.5.1)

$\mathcal{G}\text{-torsor} :: (\mathcal{P}, \alpha)$ が自明であることと, \mathcal{P} が global section^{†1} を持つことと同値.

(証明). (\mathcal{P}, α) が自明であると仮定すると, 次のように global section が得られる.

$$* \rightarrow \mathcal{G} \cong \mathcal{P}; \quad * \mapsto e$$

ただし e は \mathcal{G} の単位元である.

p を \mathcal{P} の global section とすると,

$$\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{P}; \quad g \mapsto \alpha(g, p)$$

という射が定義できる. これは定義にある条件 T2 から同型である. ■

1.2 Quotient Stack

定義 1.5 (Quotient Stack, [3] Example 8.1.12)

$X ::$ algebraic space, $G ::$ smooth group scheme over S , acting on X とする. すなわち左作用 $\alpha: \underline{G} \times X \rightarrow X$ が存在するものとする. この時, fibered category $:: [X/G](\rightarrow \text{ET}(S))$ を以下で定める.

Object 以下の 3 つ組.

- $S\text{-scheme} :: U,$
- $G_U := G \times_S U\text{-torsor on } \text{ET}(U) :: \mathcal{P},$
- $\underline{G}\text{-torsor の射 } \pi: \mathcal{P} \rightarrow X_U := X \times_S U.$

^{†1} 前層の圏 $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ の terminal object から \mathcal{P} への射のこと ([4] Tag 06UN). なお, \mathbf{C} の underlying category が \mathbf{Sch}/S ならば, $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ の terminal object は恒等射 $\text{id}_S: S \rightarrow S$ を値に取る constant presheaf である (TODO: check).

Arrow 射 $(U, \mathcal{P}, \pi) \rightarrow (U', \mathcal{P}', \pi')$ は二つの射の組 $(f: U \rightarrow U', f^b: \mathcal{P} \rightarrow f^*\mathcal{P}')$ であって、以下が可換となるもの。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{f^b} & f^*\mathcal{P}' \\ \pi \searrow & & \swarrow f^*\pi' \\ & X_U & \end{array}$$

fibration は $(U, \mathcal{P}, \pi) \mapsto U, (f, f^b) \mapsto f$ で与えられる。

補題 1.6

$S :: \text{scheme}, X :: \text{algebraic space}, G :: \text{smooth group scheme over } S, \text{ acting on } X$ とする。Quotient stack $:: [X/G]$ は stack in groupoids である。

(証明). stack であることは sheaf の貼り合わせが可能であることに拠る。詳しくは [3] 4.2.12, [4] Tag 04UK を参照せよ。 $[X/G]$ が category fibered in groupoids(CFG) であることを確かめる。これは恒等射上の $[X/G]$ の射が同型射であることを確かめれば良い。

$U \in \text{ET}(S)$ を固定し、射 $(\text{id}_U, f^b): (U, \mathcal{P}, \pi) \rightarrow (U, \mathcal{P}', \pi')$ を考える。定義から、次が可換である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \xrightarrow{f^b} & \mathcal{P}' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & X_U & \end{array}$$

■

2 Aim of This Session

定理 2.1

Quotient Stack は algebraic stack である。

3 準備

3.1 Definition of $\mathbf{Isom}(X, Y)$

定義 3.1 ($\mathbf{Isom}(X, Y)$)

stack とは限らない fibration $:: \mathfrak{X} \rightarrow \mathbf{B}$ と、 $U \in \mathbf{B}$ 及び U 上の対象 $X, Y \in \mathfrak{X}$ をとる。この時、CFG over $\mathbf{B}/U :: \mathbf{Isom}(X, Y)$ を以下のように定める。(\mathfrak{X} の cleavage は選択しない構成を取った。)

Object. 以下の 4 つ組。

- \mathbf{B}/U の対象 $f: V \rightarrow U$.
- f の cartesian lifting $:: f^*X \rightarrow X, f^*Y \rightarrow Y$.
- 同型 $\phi: f^*X \rightarrow f^*Y$.

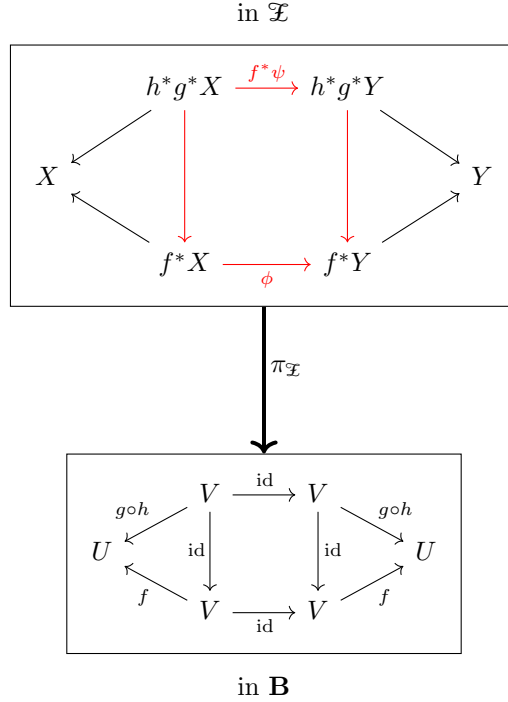
Arrow. 射

$$(V \xrightarrow{f} U, f^*X \rightarrow X, f^*Y \rightarrow Y, f^*X \xrightarrow{\phi} f^*Y) \rightarrow (W \xrightarrow{g} U, g^*X \rightarrow X, g^*Y \rightarrow Y, g^*X \xrightarrow{\psi} g^*Y)$$

は、以下の 3 つからなる.

- \mathbf{B}/U の射 $h: V \rightarrow W$ (したがって $g \circ h = f$ が成立),
- h の cartesian lifting $:: h^*g^*X \rightarrow g^*X, h^*g^*Y \rightarrow g^*Y$.

$h^*g^*X \rightarrow g^*X, h^*g^*Y \rightarrow g^*Y$ を選択することにより, 以下の図式にある赤線で示した射が Triangle Lifting により一意に定まる. これらの射はすべて同型であることに注意せよ.



$\mathcal{X} :: \text{stack}$ の場合は $\mathbf{Isom}(X, Y)$ は sheaf になる.

補題 3.2

一般の site $:: \mathbf{C}$ と CFG $:: \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{C}$ をとる. さらに \mathcal{X} は split fibered category であるとする. 以下の二つは互いに同値.

- \mathcal{X} は prestack である.
- 任意の $X, Y \in \mathcal{X}$ について $\mathbf{Isom}(X, Y)$ の fiber は sheaf である.

(証明). (TODO: 出典)

■

3.2 Representability of Diagonal Morphism.

注意 3.3

以下, scheme S を固定し, 特に断らない限り big etale site $:: \text{ET}(S)$ 上の stack in groupoids のみ考える.

補題 3.4

$\mathcal{X} :: \text{stack in groupoids on } \mathbf{C}(= \text{ET}(S))$ とする. この時, $\Delta: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が表現可能であることと, 任意

の $U \in \mathbf{C}$ と任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ について $\mathbf{Isom}(X, Y)$ が algebraic space であることは同値.

(証明). $x, y: \mathbf{Sch}/U (= U) \rightarrow \mathfrak{X}$ を, 2-Yoneda Lemma により得られる $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ に対応する射とする^{†2}.

以下の図式が pullback diagram であることから分かる.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Isom}(X, Y) & \xrightarrow{\text{pr}_U} & \mathbf{Sch}/U \\ \text{pr}_{\mathfrak{X}} \downarrow & \nearrow a & \downarrow x \times y \\ \mathfrak{X} & \xrightarrow{\Delta} & \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X} \end{array}$$

任意の射 $\mathbf{Sch}/U \rightarrow \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ が $x \times y$ の形で表されることは, $\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ の普遍性から得られる.

まず, 射と自然同型を定義する. $\mathbf{Isom}(X, Y)$ から伸びる射は次の関手である. ただし $\xi = (f: V \rightarrow U, f^*X, f^*Y, \phi: f^*X \rightarrow f^*Y), \eta = (g: W \rightarrow U, g^*X, g^*Y, \psi: g^*X \rightarrow f^*Y)$ とした.

pr_U	$\mathbf{Isom}(X, Y)$	\rightarrow	\mathbf{Sch}/U
Objects:	ξ	\mapsto	f
Arrows:	$[\xi \rightarrow \eta]$	\mapsto	h

$\text{pr}_{\mathfrak{X}}$	$\mathbf{Isom}(X, Y)$	\rightarrow	\mathfrak{X}
Objects:	ξ	\mapsto	f^*X
Arrows:	$[\xi \rightarrow \eta]$	\mapsto	$f^*X \rightarrow h^*g^*X$

自然同型 a は次で定める.

$$\begin{aligned} a_{\xi}: \quad (x \times y) \text{pr}_U(\xi) &\rightarrow \Delta \text{pr}_{\mathfrak{X}}(\xi) \\ (f: V \rightarrow U, f^*X, f^*Y, \alpha) &\mapsto (\text{id}_{f^*X}, \phi^{\dagger 3}) \end{aligned}$$

$\mathbf{Isom}(X, Y)$ が pullback であることは, $\mathbf{Isom}(X, Y)$ が普遍性を持つことを通して確かめる. (TODO) ■

補題 3.5 ([3] Exercise 5.G)

4 証明

参考文献

- [1] Pierre Deligne and David Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.
- [2] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.

^{†2} 例えば x は $f \in \mathbf{Sch}/U$ を cartesian lifting f^*X へ写す.

- [3] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [4] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.