ゼミノート #11
Quotients of Algebraic Spaces

七条彰紀

2020 年 3 月 17 日

目次

1 Notes on Topology 1

1.1 Constructible Topology 1

1.2 Equivalence Relation on Topological Space Induced by Groupoid 3

2 Quotients 4

2.1 Definitions 4

2.2 Propositions : Paraphase 6

1 Notes on Topology

1.1 Constructible Topology

以下を参考にした.

- [Ryd10] §1
- `http://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/Perfseminar/Notes/L3.pdf` by B.Conrad
- [Sta19] 08YF `https://stacks.math.columbia.edu/tag/08YF`

定義 1.1

X :: topological space とする.

(i) X の locally closed subset とは，closed subset と open subset の共通部分で表せる subset である.

(ii) X の constructible set とは，X の有限個の locally closed subset の和集合で表せる subset のことである.

(iii) $U \subseteq X$ が X の locally constructible set であるとは，U のある開被覆 $\{U_i\}$ について，各 $U \cap U_i$

が constructible set である，ということ．

(iv) X の constructible topology とは，X の constructible set を開基とする位相のことである．X の underlying set に X の constructible topology を与えた位相空間を X_{cons} と書く．

(v) 有限個とは限らない X の constructible set の，和集合を ind-constructible subset と呼び，共通部分を pro-constructible subset と呼ぶ[a]．

(vi) map of topological spaces :: $f\colon X \to Y$ について，f^{cons} を constructible topology での map とする．（map of sets としては $f = f^{\text{cons}}$ である．）

[a] "ind-" は inductive limit を意味し，"pro-" は projective limit を意味する．

命題 1.2
X :: topological space とする．

(i) X の open subset と closed subset は constructible set である．

(ii) 有限個の constructible set の和，共通部分は constructible set である．constructible set の補集合も constructible set である．

(iii) X の constructible topology に於ける open subset は ind-constructible subset に限る．同様に，closed subset は pro-constructible subset に限る．

(iv) map of topological spaces :: $f\colon X \to Y$ について，f^{cons} :: continuous.

(証明)．自明． ∎

命題 1.3 (i) qcqs(=quasi-compact and quasi-separated) scheme の pro-constructible subset は，affine scheme からの射の像に限る．

(ii) locally of finite presentation morphism は constructible topology において open.

(iii) quasi-compact morphism は constructible topology において closed.

(iv) f :: surjective morphism で f :: locally of finite presentation or quasi-compact ならば f^{cons} :: submersive.

(証明)．(i) は Rydh10 の Prop1.1 である．(ii) は Chevalley's theorem からの帰結．(iii) は locally に調べれば容易に分かる．(iv) は (ii), (iii) からの帰結である． ∎

注意 1.4
constructible topology は spectral space [†1] と共に扱われることが多い．例えば qcqs scheme の underlying space は spectral である．

[†1] spectral space とは，以下の性質をもつ位相空間: sober, quasi-compact, the intersection of two quasi-compact opens is quasi-compact, and the collection of quasi-compact opens forms a basis for the topology ([Sta19] 08FG).

命題 1.5
[Ryd10] Prop1.7 morphism of schemes :: $f\colon X \to Y, g\colon Y' \to Y$ を考え，f の g による pullback を f' と書く．

P を open, closed, submersive のいずれかとする．g が submersive ならば，f' :: P と f :: P は同値．

(ii) P を universally open, universally closed, universally submersive, separated のいずれかとする．g が universally submersive ならば，f' :: P と f :: P は同値．

(iii) g^{cons} が universally submersive ならば，f' :: quasi-compact と f :: quasi-compact は同値．

(証明). (TODO) (iii) だけ証明を与える． ∎

注意 1.6
おそらく，[Ryd13] はこの命題を利用するために，topological quotient に「q^{cons} :: universal submersive」を要求している．より詳しく言うと以下の命題で使われている．

命題 1.7 ([Ryd13] Prop2.12 (ii))
$R \rightrightarrows^s_t X$ :: groupoid とし，$q\colon X \to Y$ を topological quotient とする．j :: quasi-compact と，Y :: quasi-separated かつ $j_{/Y}$ :: quasi-compact は同値．

これを経由して，$X \to S$ :: quasi-separated ならば GC quotient :: $Y \to S$ が quasi-separated であることなどを示している (Prop4.7).

1.2 Equivalence Relation on Topological Space Induced by Groupoid

S :: algebraic space とし，groupoid in algebraic S-space :: $R \rightrightarrows^s_t X$ を考える．
topological space :: $|U|$ に，次のようにして同値関係 $\sim_R$ を定義する．

定義 1.8
点 $x_1, x_2 \in |X|$ について，

$$x_1 \sim_R x_2 \iff {}^{\exists}r \in |R|, \quad |s|(r) = x_1, |t|(r) = x_2$$

と定義する．

$|R \times_x R| \to |R| \times_{|X|} |R|$ が全射であることを用いると，groupoid の定義から，$\sim_R$ が同値関係であることが分かる．

定義 1.9
点 $x \in |X|$ の同値類を orbit と呼び，$R(x)$ と書く．$R(x)$ は $|t|(|s|^{-1}(x))$ と等しい．

また，$W \subseteq |X|$ が R-stable であるとは，W が $\sim_R$ について stable であること．すなわち，

$$\{x \in |X| \mid {}^{\exists} w \in W, \ \ w \sim_R x\} = R$$

となること．これは $|s|^{-1}(W) = |t|^{-1}(W)$ in $|R|$ とも同値.

注意 1.10
[Sta19] 04XJ には，$S = |X| \times_{|[X/R]|} |X|$ とすると位相空間として $|[X/R]| = |X|/S$，という命題が有る.

2 Quotients

以降は引き続き S :: algebraic space とし，groupoid in algebraic S-space :: $R \rightrightarrows^s_t X$ を考える.

2.1 Definitions

定義 2.1 (equivariant morphism)
morphism :: $q\colon X \to Y$ について，$q \circ s = q \circ t$ であるとき，q を equivariant morphism という.

定義 2.2 (j, j_Y)
$s, t\colon R \to X$ から $X \times_S X$ の普遍性により得られる射 :: $R \to X \times_S X$ を j と書く.
また，equivariant morphism :: $q\colon X \to Y$ について，s, t から $X \times_Y X$ の普遍性により得られる射 :: $R \to X \times_Y X$ を $j_{/Y}$ と書く.

stabilizer はまたの機会に定義する.

注意 2.3
fiber product の普遍性から，$j_{/Y}$ に $X \times_Y X \to X \times_S X$ を合成すると j に一致する.

注意 2.4
equivariant morphism :: $R \rightrightarrows^s_t X \to Y$ は，quotient stack からの射 $[X/R] \to Y$ に一対一に対応する. (TODO: proof)

定義 2.5 (universal, uniform quotient)
$q\colon X \to Y$ が性質 P をもつとする.

- 任意の射 $Y' \to Y$ による pullback :: $q'\colon X \times_Y Y' \to Y'$ も性質 P をもつ時，P は universal であると言う.
- 任意の flat 射 $Y' \to Y$ による pullback :: $q'\colon X \times_Y Y' \to Y'$ も性質 P をもつ時，P は uniform であると言う.

定義 2.6
equivariant morphism :: $q\colon X \to Y$ を考える．

Categorical quotient
任意の equivariant morphism :: $r\colon X \to Z$ が q を介して一意に分解する時，すなわち $\bar{r}\circ q = r$ を満たす射 :: $\bar{r}\colon Y \to Z$ が一意に存在するとき，q を categorical quotient と呼ぶ．

Zariski quotient
$|q|\colon |X| \to |Y|$ が topological space の圏における $|R| \rightrightarrows^{|s|}_{|t|} |X|$ の coequalizer である時，q を Zariski quotient と呼ぶ．同値な言い換えとして，任意の点の $|q|$ による逆像が丁度一つの orbit から成り，かつ $|q|$ :: submersive である，というものが有る．

Constructible quotient
$|q|^{\mathrm{cons}}\colon |X|^{\mathrm{cons}} \to |Y|^{\mathrm{cons}}$ が topological space の圏における $|R|^{\mathrm{cons}} \rightrightarrows^{|s|^{\mathrm{cons}}}_{|t|^{\mathrm{cons}}} |X|^{\mathrm{cons}}$ の coequalizer である時，q を constructible quotient と呼ぶ．言い換えについては Zariski quotient と同様である．

Topological quotient
q :: universal Zariski & universal constructible quotient である時，q を topological quotient と呼ぶ．

Strongly topological quotient
q :: topological quotient かつ $j_{/Y}$ :: universally submersive である時，q を strongly topological quotient と呼ぶ．

Geometric quotient
q が topological quotient であり，かつ $\mathcal{O}_Y$ が Y_{ET} (category of etale sheaves on Y) における s^*, t^* の equalizer である時，q を geometric quotient と呼ぶ．

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow q_*\mathcal{O}_X \underset{t^*}{\overset{s^*}{\rightrightarrows}} (q\circ s)_*\mathcal{O}_R$$

Strongly geometric quotient
q :: geometric quotient & strongly topological quotient であるとき，すなわち q :: geometric quotient かつ $j_{/Y}$ :: universally submersive であるとき，q を strongly geometric quotient と呼ぶ．

注意 2.7
strongly topological quotient では $j_{/Y}\colon R \to X \times_Y X$ が univ. submersive であるから，$X \times_Y X \to X \times_S X$ も univ. submersive．このことは $X \times_Y X$ に「適切な」位相が入っていることを意味する．

注意 2.8
geometric quotient in [MFK92]

- q :: surjective and equivariant.
- $\mathcal{O}_Y = (q_*\mathcal{O}_X)^R$.
- 任意の点 $y \in Y$ について，$q^{-1}(y)$ はただ一つの orbit からなる．

- $W_1, W_2 \subseteq X$ :: disjoint closed subset について $\mathrm{cl}_Y(q(W_1)), \mathrm{cl}_Y(q(W_2))$ :: disjoint.

以下のように言い換えても良い．

- q :: Zariski quotient.
- $\mathcal{O}_Y = (q_* \mathcal{O}_X)^R$.
- q の open immersion による pullback も上記を満たす．

ref. E.Viehweg "D. Mumford's Geometric Invariant Theory". なお，[MFK92] の初版では q :: universally submersive を仮定している．

2.2 Propositions : Paraphase

定義 2.9
X :: algebraic space over a scheme S とする．点 $x \in |X|$ の residue field とは，x を代表する monomorphism :: $\operatorname{Spec} k \to X$ が存在するような体 k のことである．

注意 2.10
residue field は常に存在するとは限らない．"descent algebraic space" と呼ばれる重要な種類の algebraic space では，任意の点が residue field をもつ．

補題 2.11
X :: algebraic space over a scheme S とする．点 $x \in |X|$ をとり，

- x を代表する monomorphism :: $\phi\colon \operatorname{Spec} k \to X$ と
- x を代表する任意の射 :: $\psi\colon \operatorname{Spec} l \to X$

をとる．この時 ψ は ϕ を通じて一意に分解する．

(証明). fiber product :: $Y = (\operatorname{Spec} k) \times_{\phi, X, \psi} (\operatorname{Spec} l)$ をとる．ϕ, ψ が同値であるから，Y は空でない．mono は pullback で保たれるから $Y \to \operatorname{Spec} l$ も mono. よって [Sta19] 03DP [†2] から $Y \cong \operatorname{Spec} l$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, tail, "\wr"'] & \operatorname{Spec} k \arrow[d, tail, "\phi"] \\ \operatorname{Spec} l \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$

こうして ψ の ϕ を通じた分解が存在する．ϕ が mono なのでこの分解は一意． ∎

[†2] 証明を簡単にまとめると次のように成る．(1) 可換代数の命題「体から代数への全射準同型 $\phi\colon k \to R$ は同型（特に単射）」に帰着させる．(2) $R \to R \otimes_k R; r \mapsto r \otimes 1$ は，$\tilde{r} \in \phi^{-1}(r)$ について $r \otimes 1 = \tilde{r}(1 \otimes 1)$ なので単射．(3) R は体上の代数なので free，特に faithfully flat k-module.

系 2.12
X :: algebraic space over a scheme S とする．点 $x \in |X|$ を代表する monomorphism は高々一つ．

命題 2.13 ([Ryd13], Prop2.3)
R-equivariant morphism :: $q\colon X \to Y$ を考える．以下の $3 \times 3 = 9$ 個の命題を考える．

(i) 任意の体 k と射 $y\colon k \to Y$ [a]について $|X \times_Y k|$ は，
少なくとも 1 つの / 多くとも一つの / 丁度一つの，$(R \times_Y k)$-orbit を含む．

(ii) q :: surjective / $j_{/Y}$ :: surjective / $q, j_{/Y}$:: surjective.

(iii) 任意の代数閉体 K について，$\bar{q}_K\colon X(K)/R(K) \to Y(K)$ [b]は
surjective / injective / bijective.

この時，(i) $\Longleftrightarrow$ (ii) $\Longleftarrow$ (iii) がそれぞれ成り立つ．さらに $q, j_{/Y}$ :: locally of finite type or integral ならば，(ii) $\Longrightarrow$ (iii) も成り立つ．

[a] Spec k を k と略した．
[b] $X(K)/R(K)$ は $R(K) \rightrightarrows^{s_K}_{t_K} X(K)$ の coequalizer で，$\bar{q}_K$ は coequalizer による $q_K\colon X(K) \to Y(K)$ の一意な分解である．

(証明)．以下で計 6 つの命題の証明を行う．そのために，取り扱う 6 つの命題を以下のようにまとめる．

	a	b
1	(i) 少なくとも 1 つの	(i) 多くとも一つの
2	(ii) q :: surjective	(ii) $j_{/Y}$ :: surjective
3	(iii) surjective	(iii) injective

例えば "(1a)" という記号は，(i) に含まれる「任意の体 k と射 $y\colon k \to Y$ について $|X \times_Y k|$ は少なくとも 1 つの $(R \times_Y k)$-orbit を含む．」という命題を意味する．

体 :: k, morphism :: $y\colon \operatorname{Spec} k \to Y$ をとる．Spec k を k と略し，$X \times_Y \operatorname{Spec} k$ や $R \times_Y k$ をそれぞれ X_y, R_y と略す．

■(1a) $\Longrightarrow$ (2a)　仮定より $|X_y| \neq \emptyset$ である．この集合から $|q|^{-1}(y)$ への写像が存在するので $|q|^{-1}(y) \neq \emptyset$. よって q は全射．

$$|X_y| \longrightarrow |X| \times_{|Y|} |k| \xrightarrow{\mathrm{pr}_{|X|}} |q|^{-1}(y)$$

■(2a) $\Longrightarrow$ (1a)　仮定から直ちに次がわかる．

$$q\colon X \to Y :: \text{surj} \Longrightarrow y^*q\colon X_y \to k :: \text{surj} \Longleftrightarrow |y^*q| :: \text{surj} \Longleftrightarrow {}^{\forall} t \in |\operatorname{Spec} k|,\quad |y^*q|^{-1}(t) \neq \emptyset$$

R_y-equiv. morphism による一点の逆像は R_y-orbit を含む[†3]から，$|X_y|$ は R_y-orbit :: $|y^*q|^{-1}(t) \subseteq |X_y|$ を含む．

[†3] 点 $t \in |\operatorname{Spec} k|$ について $q_y(t) = q_y(R_y(t))$ だから．

■(3a) $\Longrightarrow$ (2a)　k の代数閉包を K と書く．この時，y と $k \hookrightarrow K$ から誘導される射を合成すると，y と同値な点 $\operatorname{Spec} K \to \operatorname{Spec} k \to X$ が得られる．これを改めて $y\colon \operatorname{Spec} K \to X$ と命名する．以下，$\operatorname{Spec} K$ を K と略す．すると仮定 $(X(K)/R(K) \to Y(K) :: \mathrm{surj})$ と米田の補題により，$q \circ z = y$ を満たす $z\colon K \to X$ が存在する．よって $|q| :: \mathrm{surj}$.

■(2b) $\Longrightarrow$ (1b)　まず，$(X \times_Y X) \times_Y k \cong X_y \times_k X_y$ に注意する．以下の pullback 図式の $(j_{/Y})_y$ を考える．仮定からこれは全射．

$$\begin{tikzcd}
R_y \arrow[r, "(j_{/Y})_y"] \arrow[d] & X_y \times_k X_y \arrow[r] \arrow[d] & k \arrow[d, "y"] \\
R \arrow[r, "j_{/Y}"'] & X \times_Y X \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

こうして全射 $|R_y| \to |X_y \times_k X_y| \to |X_y| \times_{|k|} |X_y|$ が得られる．$j_{/Y}$ の定義から，これらと $\mathrm{pr}_i\colon |X_y| \times_{|k|} |X_y| \to |X_y|$ $(i = 1, 2)$ を合成すればそれぞれ $|s|, |t|$ となる．よって任意の $u, v \in |X_y|$ について $|s|(r) = u, |t|(r) = v$ となる $r \in |R_y|$ が存在する．すなわち，任意の $u, v \in |X_y|$ について $u \sim_{R_y} v$.

■(3b) $\Longrightarrow$ (2b)　点 $z\colon \operatorname{Spec} k \to X \times_Y X$ を任意に取ると，上述のとおり，k をその代数閉包 K に取り替えることが出来る．したがってここでは $z\colon \operatorname{Spec} K \to X \times_Y X$ を扱う．$z_i := \mathrm{pr}_i \circ z, y := q \circ \mathrm{pr}_i \circ z$ とする．$q \circ \mathrm{pr}_1 = q \circ \mathrm{pr}_2$ に注意．以下，$\operatorname{Spec} K$ を K と略し，米田の補題によって対応するもの（例えば射 $z\colon K \to X$ と $X(K)$ の元）を同じ記号で書く．

$q_K(z_1) = q_K(z_2) = y$ なので，仮定から $s_K(r) = z_1, t_K(r) = z_2$ を満たす元 $r \in R(K)$ が存在する．$s = \mathrm{pr}_1 \circ j_{/Y}, t = \mathrm{pr}_2 \circ j_{/Y}$ なので，さらに以下の図式が可換に成る．

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "r"] \arrow[rrrr, bend left, "z_1"] \arrow[drrr, "z_2"'] & R \arrow[r, "j_{/Y}"] & X \times_Y X \arrow[rr, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] \arrow[drr, phantom, "p.b."] & & X \arrow[d, "q"] \\
 & & X \arrow[rr, "q"'] & & Y
\end{tikzcd}$$

$X \times_Y X$ の普遍性から $r \circ j_{/Y} = z$ が分かる．すなわち，$|j_{/Y}|$ は，したがって $j_{/Y}$ は全射である．

■(1b) $\Longrightarrow$ (2b)　一つ前の段落と同じく z, z_i $(i = 1, 2), y$ をとる．この y で $X \times_Y X \to X \to Y$ を pullback する．そこで $z_{i,y}\colon K \to X_y$ を z_i と id_K から誘導される射とする．さらに点 $z_y\colon K \to X_y \times_K X_y$ を $z_{1,y}, z_{2,y}$

から誘導される射とする[†4]．明らかに $z_{i,y} = \mathrm{pr}_{i,y} \circ z_y$ が成立する．

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[rr, bend left, "z_y"] \arrow[rrrr, bend left=40, "\mathrm{id}"] & R_y \arrow[r, "(j_{/Y})_y"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & X_y \times_K X_y \arrow[r, "\mathrm{pr}_{i,y}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & X_y \arrow[r, "q_y"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & K \arrow[d, "y"] \\
K \arrow[rr, bend right, "z"'] \arrow[rrrr, bend right=40, "y"'] & R \arrow[r, "j_{/Y}"'] & X \times_Y X \arrow[r, "\mathrm{pr}_i"'] & X \arrow[r, "q"'] & Y
\end{tikzcd}
$$

今，仮定 (1b) から，$r \in |R_y|$ が存在し，$|s_y|(r) = [z_{1,y}], |t_y|(r) = [z_{2,y}]$ を満たす．この r の代表元として $\tilde{r}\colon \operatorname{Spec} L \to R_y$ をとる．

> **主張 2.14**
> $z_y \circ \phi = (j_{/Y})_y \circ \tilde{r}$ を満たす射 $\phi\colon L \to K$ が存在する．

この主張から，任意の点 z について $|j_{/Y}|$ による像が z である点 $L \to R_y \to R$ の存在が言える．

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{r}"'] & K \arrow[d, "z_y"] \arrow[dd, bend left=60, "z"] \\
R_y \arrow[r, "(j_{/Y})_y"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "p.b."] & X_y \times_K X_y \arrow[d] \\
R \arrow[r, "j_{/Y}"'] & X \times_Y X
\end{tikzcd}
$$

よって $j_{/Y}$ は全射．

(主張 2.14 の証明)． $\tilde{r}' := (j_{/Y})_y \circ \tilde{r}$ とおく．

$$
\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d, "z_y"] \arrow[dr, "z_{1,y}"] \arrow[dd, bend right, "z_{2,y}"'] & \\
L \arrow[ur, dashed, bend left=40, "\phi_1"] \arrow[ur, dashed, bend left=20, "\phi_2"] \arrow[r, "\tilde{r}'"'] \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & X_y \times_K X_y \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & X_y \arrow[d, "q_y"] \\
 & X_y \arrow[r, "q_y"'] & K
\end{tikzcd}
$$

[†4] 定義の仕方から $q_y \circ \mathrm{pr}_{i,y} \circ z_y = \mathrm{id}_K$ が成立する．これは重要な等式で，$z_{i,y}$ の後に z_y を定義したのもこのためである．ここで z_y から先に定義すると，$i = 1, 2$ の両方でこの等式が成立することを明言できない．

仮定 $|s_y|(r) = [z_{1,y}]$ から赤実線で示した 2 つの射は同値である．$q_y \circ z_{1,y} = q_y \circ \mathrm{pr}_1 \circ z_y = \mathrm{id}_K$，とくにこれが mono だから $z_{1,y}$ :: mono. したがって補題より $\phi_1 \colon L \to K$ が存在し，$\mathrm{pr}_1 \circ z_y \circ \phi_1 = \mathrm{pr}_1 \circ \tilde{r}'$ となっている．青実線で示した 2 つの射についても，同じく $\phi_2 \colon L \to K$ が存在し，$\mathrm{pr}_2 \circ z_y \circ \phi_2 = \mathrm{pr}_2 \circ \tilde{r}'$.

それぞれ q_y を合成して，

$$q_y \circ \mathrm{pr}_1 \circ z_y \circ \phi_1 = q_y \circ \mathrm{pr}_1 \circ \tilde{r}', \quad q_y \circ \mathrm{pr}_2 \circ \tilde{r}' = q_y \circ \mathrm{pr}_2 \circ z_y \circ \phi_2.$$

$q_y \circ \mathrm{pr}_1 = q_y \circ \mathrm{pr}_2$ と $q_y \circ \mathrm{pr}_1 \circ z_y = q_y \circ \mathrm{pr}_2 \circ z_y = \mathrm{id}_K$ から，

$$\phi_1 = q_y \circ \mathrm{pr}_1 \circ \tilde{r}' = q_y \circ \mathrm{pr}_2 \circ \tilde{r}' = \phi_2.$$

したがって元の等式は次のように成る．

$$\mathrm{pr}_1 \circ (z_y \circ \phi_1) = \mathrm{pr}_1 \circ \tilde{r}', \qquad \mathrm{pr}_2 \circ (z_y \circ \phi_1) = \mathrm{pr}_2 \circ \tilde{r}'.$$

なので $X_y \times X_y$ の普遍性から $z_y \circ \phi_1 = \tilde{r}' = (j_{/Y})_y \circ \tilde{r}$. ∎

∎

注意 2.15

したがって quotient の定義の幾つかは次のように書き換えられる．

$$\begin{aligned} q :: \text{univ. Zariski} &\iff q :: \text{univ. submersive and } j_{/Y} :: \text{surjective.} \\ q :: \text{topological} &\iff q, q^{\mathrm{cons}} :: \text{univ. submersive and } j_{/Y} :: \text{surjective.} \\ q :: \text{strongly topological} &\iff q, q^{\mathrm{cons}}, j_{/Y} :: \text{univ. submersive} \end{aligned}$$

補題 2.16 ([Ryd13] Prop2.4, Remark2.5)

$q \colon X \to Y$ :: universal Zariski quotient とする．以下の時，q :: topological quotient.

(i) q :: quasi-compact,

(ii) q :: locally of finite presentation,

(iii) q :: universally open/closed,

(iv) s :: universally open/closed.

(証明). q^{cons} :: univ. submersive を示す．これには q^{cons} :: univ. open or univ. closed を示せば十分である．なので (i),(ii) については命題 (1.3) から分かる．(iii) について q^{cons} :: univ. open は自明．(iv) を証明する．

s :: univ. open/closed と仮定する．$j_{/Y}$ の定義から，s は以下のように分解できる．

$$R \xrightarrow{j_{/Y}} X \times_Y X \xrightarrow{\mathrm{pr}} X$$

一つ前の命題から，今 $j_{/Y}$ :: surjective となっている．$U \subseteq X \times_Y X$ を open/closed とすると，$\mathrm{pr}(U) = s(j_{/Y}^{-1}(U))$ も open/closed. よって pr :: open/closed map. univ. open/closed や surj. は pullback で保たれるので，特に pr :: univ. open/closed. q :: univ. submersive なので，命題 (1.5) と合わせて q :: univ. open/closed を得る． ∎

命題 2.17 ([Ryd13] Prop2.10)
$q\colon X \to Y$ :: equivariant とし，$f\colon Y' \to Y$ による q の pullback を $q'\colon X \times_Y Y' \to Y'$ とする．

(i) q :: topological quotient，ならば q' :: topological quotient.

(ii) f :: flat かつ q :: geometric quotient，ならば q' :: geometric quotient.

(iii) f :: fpqc or fppf [a] かつ q' :: topological / geometric / universal geometric quotient ならば，q もそうである．

いずれも “topological” を “strongly topological” に，“geometric” を “strongly geometric” に置き換えても成立する．

[a] faithfully flat and quasi-compact または faithfully flat and locally of finite presentation

参考文献

[MFK92] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric Invariant Theory*. 3rd ed. Ergebnisse Der Mathematik Und Ihrer Grenzgebiete 34. Springer-Verlag, 1992.

[Ryd10] David Rydh. “Submersions and Effective Descent of Étale Morphisms”. In: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 138.2 (2010), pp. 181–230. DOI: 10.24033/bsmf.2588. URL: http://www.numdam.org/item/BSMF_2010__138_2_181_0.

[Ryd13] David Rydh. “Existence and Properties of Geometric Quotients”. In: *Journal of Algebraic Geometry* 22 (Aug. 2013), pp. 629–669. DOI: 10.1090/S1056-3911-2013-00615-3.

[Sta19] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. 2019. URL: https://stacks.math.columbia.edu.