ゼミノート #3

Sheaves on Sites, continued.

七条彰紀

2018年10月18日

1 Propositions : Sheaves.

定理 1.1

C:: site とする. 忘却関手

 $Fgt: (Category of Sheaves on \mathbb{C}) \to (Category of Presheaves on \mathbb{C}).$

は left adjoint functor :: Sh を持つ.

(証明).

命題 1.2

X:: scheme とする. representable sheaf:: \underline{X} は fppf topology を備える site 上で sheaf である.

(証明).

定理 1.3

命題 1.4

任意の presheaf は colimit of representable sheaves として表現できる (Kan 拡張に関連して得られる.).

(証明).

2 Definitions: Points and Stalks.

以下は small/big etale site のみで使われるものである.

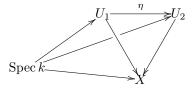
定義 2.1 (Geometric Point, Etale Neighborhood, [1] 1.3.15.)

- (i) X :: scheme に対し、k :: separabely closed field を用いて \bar{x} : Spec $k \to X$ と表される射を geometric point と呼ぶ.
- (ii) geometric point :: \bar{x} : Spec $k \to X$ について、 \bar{x} の etale neighborhood とは $U \to X$ が etale である

ような以下の可換図式のことである.



(iii) geometric point :: \bar{x} : Spec $k \to X$ について, \bar{x} の 2 つの etale neighborhood :: U_1, U_2 を考える. この時, U_1 と U_2 の間の射とは, 以下の図式を可換にする morphism of schemes :: η : $U_1 \to U_2$ のことである.



注意 2.2

geometric point の定義に separabely closed field でなく algebraically closed field を用いることもある.

注意 2.3

より一般的な point of site の定義が存在する([2] Tag 04JU). これは etale か否かに依らず採用できる.しかしこの一般的な定義は複雑であるし,我々は small/big etale site しか扱わないので,我々は以上の定義のみ用いる.

定義 **2.4** (Stalk, [1] 1.3.15.)

X :: scheme, $\mathcal{F} \in \mathrm{Et}(X)$ あるいは $\mathcal{F} \in \mathrm{ET}(X)$ とする. さらに \bar{x} : Spec $k \to X$:: geometric point とする. \bar{x} に対して \bar{x} の etale neighborhood が成す圏を $I_{\bar{x}}$ とする,

(i) $I_{\bar{x}}$ を用いて stalk of \mathcal{F} at \bar{x} を

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} := \lim_{U \in I_{\bar{x}}} \mathcal{F}(U)$$

と定義する.

- (ii) $U \in I_{\bar{x}}$ について, $\mathcal{F}(U)$ から $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ への標準的射がある.この射による $s \in \mathcal{F}(U)$ の像を $s_{\bar{x}}$ と表し,germ of s at \bar{x} と呼ぶ.
- 3 Definitions: Morphism of Shaves.

定義 3.1 (Injective, Surjective)

定義 3.2 (Representable Morphism.)

- 4 Examples: Morphism of Shaves.
- 5 Propositions: Morphism of Shaves.

命題 5.1

inj/surj/iso at stalk.

参考文献

- [1] Martin Olsson. Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications). Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [2] The Stacks Project Authors. Stacks Project. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.