

ゼミノート #7

Descent Theory

七条彰紀

2018 年 12 月 30 日

1 Motivation

(TODO)

2 Definition

定義 2.1

関手 $\epsilon_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$ を用いて以下のように定義する.

- (i) ϵ_U :: equivalence となる U を of effective descent for \mathcal{F} と呼ぶ.
- (ii) ϵ_U の像と同型である $\mathcal{F}(U)$ の対象を, effective data という.

3 Criterion for fpqc Stacks

定理 3.1 ([2] Lemma 4.25)

S :: scheme, $\mathcal{F} \rightarrow (\mathbf{Sch}/S)$:: fibration とする. 以下が成り立つとする.

- (a) \mathcal{F} は Zariski topology での stack である.
- (b) 任意の flat surjective morphism of affine S -scheme :: $V \rightarrow U$ について,
 $\epsilon_{\{V \rightarrow U\}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\{V \rightarrow U\})$ は圏同値.

この時, \mathcal{F} は fpqc topology での stack である.

注意 3.2

“flat” という条件は以下の証明では利用されない.

3.1 Step 1 / 準備

以前示した命題から, \mathcal{F} :: split fibered category と仮定しても一般性を失わないので, 以下そのように仮定する.

補題 3.3

\mathbf{C} を site とし, $\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{C}$ を split fibration とする. さらに $U \in \mathbf{C}$, $\mathcal{U} = \{\phi_i: U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ と \mathcal{U} の細分^{†1} $\mathcal{V} = \{\psi_{ij}: V_{ij} \rightarrow U\}$ をとる.

この時, 関手 $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}: \mathcal{F}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{V})$ が存在し, 以下は厳密な可換図式である.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\epsilon_{\mathcal{U}}} & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \\ \epsilon_{\mathcal{V}} \downarrow & \swarrow R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}} & \\ \mathcal{F}(\mathcal{V}) & & \end{array}$$

(証明).

■関手 $\mathcal{F}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{V})$ の構成. 細分の定義から, 各 i, k について以下が可換に成る射 $\iota_{ik}: V_{ik} \rightarrow U_i$ が存在する.

$$\begin{array}{ccccc} & & \psi_{ik} & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ V_{ik} & \xrightarrow{\iota_{ik}} & U_i & \xrightarrow{\phi_i} & U \end{array}$$

この射 ι_{ik} を用いて, 関手 $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}$ を次のように定義する.

$$\begin{array}{llll} R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}: & \mathcal{F}(\mathcal{U}) & \rightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{V}) \\ \text{Objects} & (\{\eta_i\}, \{\sigma_{ij}\}) & \mapsto & \left(\{(\iota_{ik})^* \eta_i\}, \left\{ \left(\iota_{ik}^{jl} \right)^* \sigma_{ij} \right\} \right) \\ \text{Arrows} & \{\alpha_i\} & \mapsto & \{(\iota_{ik})^* \alpha_i\} \end{array}$$

ここで ι_{ik}^{jl} は, 以下の可換図式のように fiber product の一意性から得られる射である.

$$\begin{array}{ccccc} V_{ik} \times_U V_{jl} & \xrightarrow{\text{pr}_1} & V_{ik} & & \\ \downarrow \text{pr}_2 & \searrow \iota_{ik}^{jl} & \downarrow \iota_{ik} & & \downarrow \psi_{ik} \\ & U_i \times_U U_j & \xrightarrow{\text{pr}_1} & U_i & \\ & \downarrow \text{pr}_2 & & \downarrow \phi_i & \\ V_{jl} & \xrightarrow{\iota_{jl}} & U_j & \xrightarrow{\phi_j} & U \end{array}$$

ψ_{jl}

$\{\sigma_{ij}\}$ が cocycle condition を満たすので, $\left\{ \left(\iota_{ik}^{jl} \right)^* \sigma_{ij} \right\}$ も cocycle condition を満たす^{†2}. 同様に $\{(\iota_{ik})^* \alpha_i\}$ が $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ の射であることも確認できる.

^{†1} 細分の定義を確認しておく: 任意の \mathcal{V} の元 $V_{ij} \rightarrow U$ に対して \mathcal{U} の元 $U_i \rightarrow U$ が存在し, $V_{ij} \rightarrow U$ が $U_i \rightarrow U$ を通して $V_{ij} \rightarrow U_i \rightarrow U$ と分解する. 特に射 $V_{ij} \rightarrow U_i$ が存在する.

^{†2} 証明は fiber product の普遍性から得られる射 $V_{il} \times V_{jm} \times V_{kn} \rightarrow U_i \times U_j \times U_k$ を用いれば良い.

■対象について $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\epsilon_{\mathcal{U}} = \epsilon_{\mathcal{V}}$. $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\epsilon_{\mathcal{U}}$ を計算する. まず $\xi \in \mathcal{F}(U)$ をとり, $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$ を計算しよう.

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) &= R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\left(\{\phi_i^*\xi\}, \{\sigma_{ij}\}\right) \\ &= \left(\{(\iota_{ik})^*\phi_i^*\xi\}, \left\{\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^*\sigma_{ij}\right\}\right) \\ &= \left(\{(\psi_{ik})^*\xi\}, \left\{\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^*\sigma_{ij}\right\}\right) \end{aligned}$$

今, $\mathcal{F} :: \text{split fibered category}$ としているので,

$$\text{pr}_2^*\phi_j^*\xi = (\phi_j \circ \text{pr}_2)^*\xi = (\phi_i \circ \text{pr}_1)^*\xi = \text{pr}_1^*\phi_i^*\xi.$$

σ_{ij} は fiber product の普遍性から得られる $\text{pr}_2^*\phi_j^*\xi$ から $\text{pr}_1^*\phi_i^*\xi$ への同型であるから, $\sigma_{ij} = \text{id}$. このことと $\mathcal{F} :: \text{split}$ から $\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^*\sigma_{ij} = \text{id}$ も分かる. まとめて, $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) = (\{(\psi_{ik})^*\xi\}, \{\text{id}_{(\psi_{ik})^*\xi}\})$.

一方,

$$\left(\iota_{ik}^{jl}\right)^*\text{pr}_2^*\phi_j^*\xi = (\psi_{jl} \circ \text{pr}_2)^*\xi = \text{pr}_2^*(\psi_{jl})^*\xi = \text{pr}_1^*(\psi_{ik})^*\xi = (\psi_{ik} \circ \text{pr}_1)^*\xi = \left(\iota_{ik}^{jl}\right)^*\text{pr}_1^*\phi_i^*\xi.$$

なので, fiber product の普遍性から得られる $\text{pr}_2^*(\psi_{jl})^*\xi$ から $\text{pr}_1^*(\psi_{ik})^*\xi$ への同型は id である. したがって $\epsilon_{\mathcal{V}}(\xi) = (\{(\psi_{ik})^*\xi\}, \{\text{id}_{(\psi_{ik})^*\xi}\})$ となり, $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) = \epsilon_{\mathcal{V}}(\xi)$.

■射について $R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\epsilon_{\mathcal{U}} = \epsilon_{\mathcal{V}}$. $\mathcal{F}(U)$ の射 $\alpha: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ をとる. すると $\mathcal{F} :: \text{split}$ なので

$$R_{\mathcal{U}}^{\mathcal{V}}\epsilon_{\mathcal{U}}(\alpha) = \{(\iota_{ik})^*\phi_i^*\alpha\} = \{(\phi_i \circ \iota_{ik})^*\alpha\} = \{\psi_{ik}^*\alpha\} = \epsilon_{\mathcal{V}}(\alpha).$$

■

注意 3.4

$\mathcal{F} :: \text{split}$ を仮定しない場合, 可換図式が厳密であることを主張できないのは明白であろう. 実はさらに, 2 圏の意味でも図式が可換にならない. なぜなら自然変換 $\text{pr}_1^*\phi_i^* \rightarrow (\phi_i \circ \text{pr}_1)^*$ などが存在する保証がないからである. 同型 $\text{pr}_1^*\phi_i^*\xi \rightarrow (\phi_i \circ \text{pr}_1)^*\xi$ は ξ 毎に存在が保証されているのみで, それらが自然であることは保証されない.

3.2 Step 2 / single morphism cover の場合に帰着させる.

系 3.5 ([3] p.87)

\mathbf{C}, \mathcal{F} 等を補題 (3.3) の様にとる. $\mathcal{U} = \{\phi_i: V_i \rightarrow U\}, V' = \bigsqcup V_i$ とする. さらに, $f: V' \rightarrow U$ を \mathcal{U} から誘導される射とする.

このとき, 圏同値 $R_{V' \rightarrow U}^{\mathcal{U}}: \mathcal{F}(V' \rightarrow U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ が存在し, 合成

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\epsilon_{\{f\}}} \mathcal{F}(V' \rightarrow U) \xrightarrow{E} \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

が関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U})$ と厳密に一致する.

(証明). \mathcal{U} は $\{U' \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U)$ の細分であるから, 補題 (3.3) から明らか.

■

注意 3.6

ここで、各 ϕ_i が quasi-compact (特に fpqc) であったとしても、誘導される射 $f: V' \rightarrow U$ が必ずしも quasi-compact でないことに注意する。例えば $\{\text{Spec } k[x_i] \rightarrow \bigsqcup_i \text{Spec } k[x_i]\}_{i \in \mathbb{N}}$ を考えれば分かる。

以上のことに注意すると、我々は次のことを証明することに成る:

主張 3.7

条件 (a), (b) が成り立つならば、以下の条件 (*) を満たす任意の flat surjective morphism $:: f: V \rightarrow U$ について、 $\epsilon_{\{f\}}: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) ::$ equivalence.

(*) affine Zariski cover $:: U = \bigcup_i U_i$ と、各 i について $f^{-1}(U_i)$ の affine Zariski cover $:: f^{-1}(U_i) = \bigcup_j V_{ij}$ が存在し、 $V_{ij} ::$ quasi-compact かつ $f(V_{ij}) = U_i$ となる。

条件 (*) は $U, V ::$ locally noetherian であるような任意の fppf morphism について成立する ([2] Cor1.1.6).

注意 3.8

以下、 $\mathcal{F} ::$ split fibered category とする。session 4.5 定理 1.2 より、このように仮定しても一般性を失わない。

3.3 Step 3 / affine scheme への quasi-compact morphism の場合.

$f: V \rightarrow U$ を $U ::$ affine である quasi-compact morphism とする。 $\{V_i\}_i$ を V の open affine cover とし、 $V' = \bigsqcup_i V_i$ とおく。 $V' ::$ affine なので、仮定 (b) から圏同値 $\mathcal{F}(U) \simeq \mathcal{F}(V' \rightarrow U)$ が存在する。

以下の図式 (1) を考える。 \leftrightarrow は圏同値を意味する。

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\epsilon_f} \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) \\
 \epsilon_{V' \rightarrow U} \nearrow & \updownarrow \epsilon_{\{V_i \rightarrow U\}} & \nwarrow R_f^{V_i \rightarrow U} \\
 & \mathcal{F}(\{V_i \rightarrow U\}) & \\
 & \updownarrow R_{V' \rightarrow U}^{\{V_i \rightarrow U\}} & \\
 & \mathcal{F}(V' \rightarrow U) &
 \end{array} \tag{1}$$

ここで関手 ϵ_f は次で与えられる。ただし $\text{pr}_k: V \times_U V \rightarrow V$ は第 k 成分への射影である。

$$\begin{array}{lll}
 \epsilon_f: & \mathcal{F}(U) & \rightarrow \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) \\
 \text{Objects:} & \xi & \mapsto (f^* \xi, \sigma) \\
 \text{Arrows:} & \alpha & \mapsto f^* \alpha
 \end{array}$$

ここで $\sigma: \text{pr}_2^* f^* \xi \rightarrow \text{pr}_1^* f^* \xi \in \text{Arr}(\mathcal{F}(V \times_U V))$ は、恒等射 $\text{id}_{\text{pr}_2^* f^* \xi}$ である。これは $\text{pr}_2^* f^* \xi, \text{pr}_1^* f^* \xi$ がい

ずれも $f \circ \text{pr}_2 = f \circ \text{pr}_1$ による ξ の pullback であることと、 $\mathcal{F} ::$ split から得られる。この図式の可換性から、関手の同型 $(R_f^{V_i \rightarrow U}) \circ \epsilon_f = \epsilon_{\{V_i \rightarrow U\}}$ が得られる ($\mathcal{F} ::$ split fibered category を利用する)。(よって上の図式 (1) は可換である。) したがって ϵ_f の psuedo-inverse functor $:: (\epsilon_{\{V_i \rightarrow U\}})^{-1} \circ (R_f^{V_i \rightarrow U})$ が得られた。

3.4 Step 4 / 条件 (*) を満たす affine scheme への射の場合.

([3] p.88) 仮定 (*) より, Zariski cover $:: \{ \iota_i: V_i \rightarrow V \}$ が存在し, $V_i ::$ quasi-compact.

注意 3.9

前段の議論のうち, 図式 (1) の $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V' \rightarrow U)$ が圏同値でない. なので新しい議論が必要である.

補題 (3.3) から得られる以下の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\epsilon_f} & \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) \\
 \downarrow \epsilon_{V_i \rightarrow U} & \nearrow R_f^{V_i \rightarrow U} & \\
 \mathcal{F}(V_i \rightarrow U) & &
 \end{array}$$

equivalence essentially surjective & full

左にある縦の射は Step 3 から圏同値である. したがって $\mathcal{F}(V \rightarrow U) \rightarrow \mathcal{F}(V_i \rightarrow U)$ (定義はおおよそ関手 E と同様に与えられる) は essentially surjective かつ full である. なのでこの関手が更に faithful であることが証明できれば, 図式の可換性から ϵ_f が圏同値であることが証明できる.

$\mathcal{F}(V \rightarrow U)$ の射 β, β' が, $\beta|_{V_i} = \beta'|_{V_i}$ を満たすとする. この時, $\beta = \beta'$ を証明すれば良い. まず, 以下の厳密な可換図式から, 任意の添字 j について $R_{V_i \cup V_j \rightarrow U}^{V_i \rightarrow U}: \mathcal{F}(V_i \rightarrow U) \rightarrow \mathcal{F}(V_i \cup V_j \rightarrow U)$ が圏同値だと分かる. この関手を略して R を書くことにする.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F}(U) & \xleftarrow{\epsilon_{V_i \cup V_j \rightarrow U}} & \mathcal{F}(V_i \cup V_j \rightarrow U) \\
 \uparrow \epsilon_{V_i \rightarrow U} & \nwarrow R := R_{V_i \cup V_j \rightarrow U}^{V_i \rightarrow U} & \\
 \mathcal{F}(V_i \rightarrow U) & &
 \end{array}$$

したがって R^{-1} が存在する. 関手 R は $\mathcal{F}(V_i \cup V_j \rightarrow U)$ の射 $\beta|_{V_i \cup V_j}$ を $\beta|_{V_i}$ に一対一に写すのだから, R^{-1} は $\beta|_{V_i}$ を $\beta|_{V_i \cup V_j}$ に一対一に写す.

さて, 以下の関手の合成で β, β' を写す.

$$\mathcal{F}(V \rightarrow U) \xrightarrow{R_{V \rightarrow U}^{V_i \rightarrow U}} \mathcal{F}(V_i \rightarrow U) \xrightarrow{R^{-1}} \mathcal{F}(V_i \cup V_j \rightarrow U) \xrightarrow{R_{V_i \cup V_j \rightarrow U}^{V_j \rightarrow U}} \mathcal{F}(V_j \rightarrow U)$$

$\beta|_{V_i} = \beta'|_{V_i}$ を R^{-1} で写して $\beta|_{V_i \cup V_j} = \beta'|_{V_i \cup V_j}$ が得られる. よって, 任意の j について

$$\beta|_{V_j} = (\beta|_{V_i \cup V_j})|_{V_j} = (\beta'|_{V_i \cup V_j})|_{V_j} = \beta'|_{V_j}$$

が成立する. $\mathcal{F} ::$ Zariski stack なので, $\beta = \beta'$.

3.5 Step 5 / 一般の場合.

条件 (*) を満たす任意の射 $f: V \rightarrow U$ をとり, affine Zariski cover $:: \{U_i \rightarrow U\}$ をとる. さらに $V_i := f^{-1}(U_i)$ とおき, $\phi_i = f|_{V_i}$ とおく.

今,

$$\Phi_i = \epsilon_{V_i \rightarrow U_i}: \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(V_i \rightarrow U_i)$$

と置く．同様に $\Phi_{ij} = \epsilon_{V_{ij} \rightarrow U_{ij}}, \Phi_{ijk} = \epsilon_{V_{ijk} \rightarrow U_{ijk}}$ と置く．この時，以下は厳密な可換図式である．

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{F}(U_i) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{F}(U_{ij}) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{F}(U_{ijk}) \\
\Phi_i \downarrow & & \downarrow \Phi_{ij} & & \downarrow \Phi_{ijk} \\
\mathcal{F}(V_i \rightarrow U_i) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{F}(V_{ij} \rightarrow U_{ij}) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{F}(V_{ijk} \rightarrow U_{ijk})
\end{array} \tag{4}$$

ここで，各 Φ_* はいずれも Step 4 から圏同値である．

次の関手を考える．

$$\begin{array}{llll}
P_i: & \mathcal{F}(f: V \rightarrow U) & \rightarrow & \mathcal{F}(V_i \rightarrow U_i) \\
\text{Objects} & (\eta, \sigma) & \mapsto & (\eta|_{V_i}, (\gamma_{ii})^* \sigma) \\
\text{Arrows} & \alpha & \mapsto & \alpha|_{V_i}
\end{array}$$

同様に $P_{ij}: \mathcal{F}(f) \rightarrow \mathcal{F}(V_{ij} \rightarrow U_{ij})$ を定義する．すると step 4 の結果から $\mathcal{F}(U_i) \simeq \mathcal{F}(V_i \rightarrow U_i)$ なので， $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ と同型

$$\alpha_i: \Phi_i(\xi_i) \xrightarrow{\cong} P_i((\eta, \sigma))$$

が得られる．上の図式 (4) が可換であることから，

$$\alpha_i|_{V_{ij}}: \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}}) = (\Phi_i(\xi_i))|_{V_{ij}} \xrightarrow{\cong} P_{ij}((\eta, \sigma))$$

すると，

$$\alpha_i^{-1} \alpha_j: \Phi_{ij}(\xi_j|_{V_{ij}}) \rightarrow \Phi_{ij}(\xi_i|_{V_{ij}})$$

$\Phi_{ij} :: \text{equivalence}$ なので，この同型射の逆像として $\sigma_{ij}: \xi_j|_{V_{ij}} \rightarrow \xi_i|_{V_{ij}}$ が得られる．

以上で得られる $(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})$ は cocycle condition を満たすため (TODO)， $\mathcal{F}(\{U_i \rightarrow U\})$ の object である． $\mathcal{F} :: \text{Zariski stack}$ なので，これは $\mathcal{F}(U)$ と圏同値．よって ξ が得られる．(TODO: 射についても)

4 Application : $\mathbf{QCoh}/S \rightarrow \mathbf{Sch}/S$ is a fpqc stack.

定義 4.1

$S \in \mathbf{Sch}$ に対し，圏 \mathbf{QCoh}/S を以下のように定める．

Objects.

$\text{Fpqc}(S)^{\dagger 3}$ の対象 $:: U$ と， U 上の quasi-coherent sheaf (on fpqc topology) $:: \mathcal{U}$ の組．

Arrows.

射 $(U, \mathcal{U}) \rightarrow (V, \mathcal{V})$ は， \mathbf{Sch}/S の射 $f: U \rightarrow V$ と，morphism of sheaves on $V :: f^\# : \mathcal{V} \rightarrow f_* \mathcal{U}$ の組．

この時， $\mathbf{QCoh}/S \rightarrow \mathbf{Sch}/S; (U, \mathcal{U}) \mapsto U$ は fibration である．

$\mathbf{Mod}_A, \mathbf{Mod}_\phi, \mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_\phi$ の定義は [3] §4.2.1 を参照せよ．

$f: V \rightarrow U$ を flat surjective morphism of S -schemes とし， $\phi: A \rightarrow B$ を f に対応する faithfully flat な環準同型とする．この時， $\mathbf{QCoh}(U) \simeq \mathbf{Mod}_A$ はよく知られている^{†4}．

^{†3} 圏 \mathbf{Sch}/S に fpqc topology を備えたもの．

^{†4} この命題は [1] Cor5.5 で詳しく述べられている

主張 4.2

$\mathbf{QCoh}(f: V \rightarrow U) \simeq \mathbf{Mod}_\phi$.

したがって $\epsilon_f: \mathbf{QCoh}(U) \rightarrow \mathbf{QCoh}(f: V \rightarrow U)$ は関手 $\mathbf{Mod}_A \rightarrow \mathbf{Mod}_\phi$ に対応する. この関手は, 可換環論によって圏同値であることが証明される.

参考文献

- [1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.
- [2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [3] Angelo Vistoli. Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008). <http://homepage.sns.it/vistoli/descent.pdf>.