

命題 0.1. 位相空間 X とその部分集合 Y を考える。ある X の被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ であって、任意の λ で $Y \cap U_\lambda$ が U_λ において閉であるようなものが有るとき、 Y が閉であることを示せ。

一言で言えば、この命題は「閉集合である、ということは局所的な性質である」ということである。

(証明). 対偶を示す。 Y が閉でなければ、 $x \notin Y$ かつ $x \in \text{cl}_X(Y)$ なる点 x が存在する。すると $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は X の被覆だから、この中に x の開近傍が少なくともひとつ存在する。それを U としよう。 $U \cap Y$ が U において閉集合でないことを示す。 $x \notin Y$ から、 $x \notin U \cap Y$ が得られる。あとは $x \in \text{cl}_U(U \cap Y)$ が得られれば証明は終わる。

まず、 X での閉集合 Z を用いて $\text{cl}_U(U \cap Y) = U \cap Z$ と書く。 $x \notin \text{cl}_U(U \cap Y) = U \cap Z$ と仮定すると、 $x \in U$ なので $x \notin Z$ が得られる。すると $U \cap (X \setminus Z)$ は x の開近傍となる。 $x \notin Y$ かつ $x \in \text{cl}_X(Y)$ から x は Y の集積点だから $U \cap (X \setminus Z)$ は $(x$ と異なる) Y の点 y も含む。 $y \in Y$ かつ $y \in U \cap (X \setminus Z)$ なので $y \in U \cap Y$ かつ $y \notin Z$ 。しかし $y \in U \cap Y \subseteq U \cap Z$ なので $y \in U \cap Z$ 。したがって $x \notin \text{cl}_U(U \cap Y)$ とすると $y \notin Z$ と $y \in Z$ が同時に得られ、矛盾。よって $x \in \text{cl}_U(U \cap Y)$ かつ $x \notin U \cap Y$ が示され、 $U \cap Y$ が U における閉集合では無いことが示される。 ■

(証明).

$$\begin{aligned}
 & Y \cap U_\lambda :: \text{closed in } U_\lambda \\
 \iff & Y^c \cap U_\lambda :: \text{open in } U_\lambda \\
 \iff & Y^c \cap U_\lambda :: \text{open in } X \\
 \implies & \bigcup_\lambda (Y^c \cap U_\lambda) :: \text{open in } X \\
 \iff & Y^c :: \text{open in } X \\
 \iff & Y :: \text{closed in } X
 \end{aligned}$$

ただし 2 つめの \iff は $U_\lambda :: \text{open in } X$ から。 ■