

層 (sheaf) の概観

代数幾何学に於いて

七条彰紀

2019 年 7 月 6 日

代数幾何学を始める人のために、またこれから学ぶ人のために書きます。ノートです。当然ですが、

1 代数幾何学に於ける sheaf という概念

まず代数幾何学での sheaf の立ち位置について書いておきます。sheaf, より一般に stack は代数幾何学の中心的概念です。

■scheme theory に於いて scheme theory (スキーム論) では可換環から scheme という幾何学的な対象を構築します。この構築の際に、元と成っていた可換環を記憶しているのが sheaf です。可換環が「切り刻まれ貼り合わされて」structure sheaf (構造層) となっているのです。他に scheme theory で現れる sheaf としては、scheme 上の (quasi-)coherent sheaf ((準) 接続層) が重要です。(quasi-)coherent sheaf を調べることは、scheme についての情報を得るための基本的な手段です。また scheme 上の sheaf cohomology (層係数コホモロジー) は、scheme に「変な感じの部分」がどれだけあるかを調べるための重要な道具となっています。(特に etale cohomology は数論においても重要な位置を占めています。)

■scheme theory をはみ出す 一方で、scheme だけでは用に足りないことがあります。例えば scheme の群による商を考えることがあります (これは普通の位相空間の群作用による商のようなものです)。定義は圏論的に、普遍性を用いて定義されるのですが、条件を満たす scheme が無い、ということはしょっちゅうです。これに対する一つの解決方法として、scheme の概念を拡張するということが考えられます。圏論的に性質の良い、都合の良い対象まで研究対象に収めようというわけです。

■圏論ちょっとわかる、という人向け scheme の概念を拡張するには、どのような方策を取るべきでしょうか。当座の目標は「scheme の圏を包含する圏を探す」ということです。全ての極限を scheme の圏に付け加える (pro-scheme)、基礎を担う可換環論を非可換環論やモノイド論まで拡大する、などの手段があります。ですがまた別に、米田の補題を手がかりにする事が出来ます。米田の補題は、米田関手が scheme の圏から scheme 上の presheaf (前層) の圏への忠実充満関手となることをいっています。scheme の圏を包含する圏として「scheme の圏から scheme 上の presheaf の圏」が使える、ということです。

■scheme の一般化に於ける sheaf この、scheme の一般化 (generalized scheme; 一般化スキーム) を考える方向では、sheaf が中心概念です。実際に generalized scheme の代表である algebraic space (代数的空間) は sheaf です。そして algebraic space の定義に algebraic space の位相空間の定義は含まれていません。

ちなみに極端なことを言うと、scheme でさえ最初から位相空間無しに定義することが可能です。これは”functorial scheme”（関手的スキーム？）などと呼ばれます。もちろんこれは普通の意味の scheme ではありませんが、”functorial scheme”から普通の scheme の体裁を整えることも、この逆も可能です。

■さらなる一般化 そして sheaf は stack（いわば、圏を値に取る sheaf. スタック）へ、algebraic space は algebraic stack (Artin/DM stack) へと一般化されます。恐ろしいことに algebraic space にも algebraic stack に関しても (quasi-)coherent sheaf や sheaf cohomology といった理論が構築されています。

2 sheaf の思想

■sheaf の定義 位相空間上の sheaf の定義の仕方は少なくとも 4 つ存在しますが、意味が分かりやすいのは “identity axiom”（一致公理？）と “gluability axiom”（接着性公理 or 貼り合わせ可能性公理？）を満たす preasheaf（前層）として定義することだと思います。この定義を以下に述べます。

定義 2.1

- (i) 位相空間 X に対し、 X の開集合と包含写像が成す圏を $\mathbf{Open}(X)$ とする。
- (ii) $\mathbf{Open}(X)$ から集合の圏 \mathbf{Sets} への反変関手 $\mathcal{F}: \mathbf{Open}(X) \rightarrow \mathbf{Sets}$ を X 上の presheaf と呼ぶ。
- (iii) X 上の presheaf \mathcal{F} と $U \in \mathbf{Open}(X)$ について、 $s \in \mathcal{F}(U)$ を \mathcal{F} の U 上の section と呼ぶ。
- (iv) X の開集合の間に有る包含射 $\iota_V^U: U \hookrightarrow V \in \mathbf{Arr} \mathbf{Open}(X)$ を考える。 X 上の presheaf \mathcal{F} による ι_V^U の像を $\text{res}_V^U := \mathcal{F}(\iota_V^U)$ と表し、restriction map（制限射）と呼ぶ。 $s \in \mathcal{F}(U)$ の res_V^U の像はしばしば $s|_V (= \text{res}_V^U(s))$ と表記される。
- (v) さらに presheaf \mathcal{F} が以下の 2 条件を満たす時、 \mathcal{F} は（集合の）sheaf と呼ばれる。ただし $U \in \mathbf{Open}(X)$ を X の開集合とし、 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を U の X の開集合による被覆^{†1}とする。

Identity Axiom

任意の 2 元 $s, t \in \mathcal{F}(U)$ が、任意の i について $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ であるならば、 $s = t$ 。

Gluability Axiom

U の開部分集合上の sections の組 $(s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$ が次を満たすとする。

$$\forall i, j \in I, \quad s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}.$$

この時、全ての $i \in I$ について $s|_{U_i} = s_i$ である section $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する。（identity axiom より、これは一意に存在する。）

■「局所的に調べ、大域的に知る」 identity axiom と gluability axiom はそれぞれ「2 つの section は、断片（すなわち $s|_{U_i}, t|_{U_i}$ ）が等しければ、等しい」「section の断片（すなわち s_i ）は貼り合わせられる」と読めます。そのため、この二つの条件は「局所的な情報から大域的な情報が決定される」という気持ちを表現したものだ、と筆者は感じています。

■もう一つの定義 上記定義の (v)、すなわち identity axiom と gluability axiom を次のように述べることも出来ます。

^{†1} すなわち、任意の点 $x \in U$ に対して、 $x \in U_i$ を満たす $U_i \in \mathcal{U}$ が存在する。

定義 2.2

位相空間 X 上の presheaf \mathcal{F} を考える. $U \in \mathbf{Open}(X)$ を X の開集合とし, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を U の X の開集合による被覆とする. この U, \mathcal{U} に対し, 集合 $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を以下通り定義する.

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \{(s_i)_{i \in I} \mid \forall i, j \in I, s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}\}$$

$(s_i)_{i \in I}$ に課された条件は Glueability Axiom で述べられているものと全く同じである. この集合の元を descent datum (降下データム?) と呼ぶ.

さて, 次のように写像を定める.

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mathcal{U}}: \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{U}) \\ s &\mapsto (s|_{U_i})_{i \in I} \end{aligned}$$

\mathcal{F} が sheaf であるとは, 任意の U, \mathcal{U} について $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が全単射であるということ.

任意の U, \mathcal{U} について, $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が単射であることは \mathcal{F} について identity axiom を満たすことと同値です. 同じく, 全射であることは glueability axiom を満たすことと同値です.

3 Sheafification (層化)

任意の presheaf \mathcal{F} について, 対応する sheaf \mathcal{F}^+ ^{†2} が一意に存在します. この対応 $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^+$ は sheafification (層化) と呼ばれています. sheafification も少なくとも 3 つの方法があり, いずれも sheafification への異なる直観を与えてくれます.

3.1 equalizer を用いた sheafification

参考: https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/AlgebraicStacks/ch2_SitesAndTopoi.pdf

equalizer を用いた sheafification は二つの段階を踏みます. identity axiom を満たす presheaf (separated presheaf と呼ばれます) を作る段階と, glueability axiom も同時に満たす presheaf (すなわち sheaf) を作る段階です. どちらの段階も同じ操作で行われるのはなかなか面白いです.

3.2 étale space を用いた sheafification

参考: https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section1_ex.pdf Ex1.13 Espace étalé of a Presheaf.

3.3 直接的な sheafification

参考: Robin Hartshorne (1977) “Algebraic Geometry”, GTM52 の chapter II Proposition-Definition 1.2 の証明.

^{†2} associated sheaf という意味で \mathcal{F}^a と書く人も居ます.