scheme や scheme morphism の性質の定義は `section3_text.pdf` にまとめたので参照すること．同じ PDF で B-fin.gen. scheme などの独自の用語を定義している．`http://stacks.math.columbia.edu/tag/01T0` も参照すると良い．

記法について．$\operatorname{Spec} A_f = D_A(f)$ と書く．

Ex3.1 Definition(s) of Locally of Finite Type Morphism.

補題 Ex3.1.1 (Nike's Lemma)
X :: scheme, $U, V \subseteq X, U = \operatorname{Spec} A, V = \operatorname{Spec} B$ かつ $U \cap V \neq \emptyset$ とする．この時，任意の点 $P \in U \cap V$ に対し，$a \in A, b \in B$ であって

$$P \in D_A(a) = D_B(b) \subset U \cap V$$

となるものがある．系として Prop2.2 より $A_a \cong B_b$ が得られる．

(証明). 適当に $a \in A, b \in B$ をとり，

$$P \in D_B(b) \subseteq D_A(a) \subseteq U \cap V$$

としよう．$X = \operatorname{Spec} B, X_f = D_B(b), \bar{b} = b|_{D_A(a)} \in A_a$ として Ex2.16a を用いると，

$$D_B(b) = D_A(a) \cap D_B(b) = \operatorname{Spec}(A_a)_{\bar{b}}.$$

なので，あとは $(A_a)_{\bar{b}}$ を調べれば良い．

$(A_a)_{\bar{b}}$ の元は以下のように書ける．

$$\frac{u/a^m}{\bar{b}^n} = \frac{u}{a^m \bar{b}^n} \quad (m, n \in \mathbb{N}; u \in A).$$

$\bar{b} \in A_a$ なので $a^N \bar{b} = a' \in A$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在する．

$$\frac{ua^{nN}}{a^m a^{nN} \bar{b}^n} = \frac{ua^{nN}}{a^m a'^n}.$$

仮に $m \geq n$ とすると

$$\frac{ua^{nN}}{a^m a'^n} = \frac{ua^{m-n+nN}}{(aa')^m}$$

$m \leq n$ でも同様に分子分母に a'^{n-m} をかければ，$(A_a)_{\bar{b}}$ の元は $A_{aa'}$ の元として書ける．逆に $A_{aa'}$ の元を $(A_a)_{\bar{b}}$ の元として書くことは直ちに出来る．よって $(A_a)_{\bar{b}} = A_{aa'}$.

以上より，$\alpha = aa' \in A, b \in B$ について $D_B(b) = D_A(\alpha)$. ∎

補題 Ex3.1.2 (Preimage of POS[†1] is POS.)
$f : X \to Y$ :: scheme morphism. $\operatorname{Spec} B \subseteq Y, f^{-1} \operatorname{Spec} B = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec} C_i$ とする．この時，以下が成立する．

$$^\forall b \in B, \quad ^\exists\{c_i (\in C_i)\}, \quad f^{-1} D_B(b) = \bigcup_{i \in I} D_{C_i}(c_i).$$

(証明). $U = \operatorname{Spec} B, V_i = \operatorname{Spec} C_i$ とする．すると f の制限により scheme morphism $f|_{V_i} : V_i \to U$ が得られる．これは $V_i \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$ という写像で，したがって逆写像は $(f|_{V_i})(S) = f^{-1}(S) \cap V_i$ であることに注意．structure sheaf の間の射を考えると，以下が得られる．

$$\phi_i = \left((f|_{V_i})^{\#}\right)_U : B = \mathcal{O}_U(U) \to (f|_{V_i})_* \mathcal{O}_{V_i}(U) = C_i.$$

[†1] Principle Open Set

ここで Prop2.2 を用いた．Prop2.3 から，ϕ_i は $f|_{V_i} : V_i \to U$ に 1-1 対応し，特に topological space として

$$f|_{V_i}(\mathfrak{p}) = \phi_i^{-1}(\mathfrak{p}) \quad (\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} C_i)$$

が成り立つ．このことから以下が得られる．

$$f^{-1}(D_B(b)) \cap V_i = (f|_{V_i})^{-1} D_B(b) = D_{C_i}(\phi_i(b)).$$

最左辺と最右辺を $\bigcup_{i\in I}$ すれば主張が示せる． ∎

補題 Ex3.1.3

$f \in A$ とする．有限生成 A_f 代数は有限生成 A 代数でもある．

(証明). 変数の数は問題にならないので 1 変数で証明する．（つまり以下で $A_f[x]$ を多変数にしても構わない．）有限生成 A_f 代数 B には $A_f[x]$ からの全射が存在する．$A_f[x]$ には $A[x,y]$ から次のような全射が存在する．

$$y \mapsto 1/f$$

これが全射であることは，

$$ay^n x^m \mapsto (a/f^n)x^m \in A_f[x]$$

のように分かる．あとはこの写像が A 準同型（代入写像）であることに注意すれば良い．よって $A[x,y] \to A_f[x] \to B$ という全射が存在する． ∎

以下の命題を示す．

$$\begin{aligned} &{}^{\exists}\{B_i\}_{i\in I}, \quad \left[Y = \bigcup_{i\in I} \operatorname{Spec} B_i\right] \wedge \left[{}^{\forall} i \in I, \quad f^{-1}(\operatorname{Spec} B_i) :: \text{locally } B_i\text{-fin.gen. scheme}\right] \\ \iff &{}^{\forall} \operatorname{Spec} A \subseteq X, \quad f^{-1}(\operatorname{Spec} A) :: \text{locally } A\text{-fin.gen. scheme} \end{aligned}$$

下から上は自明である．上から下を示そう．

$U = \operatorname{Spec} A \subset X, V_i = \operatorname{Spec} B_i$ とする．$U \cap V_i$ の各点 P に対し，

$$P \in D_{B_i}(b_{ij}) = D_A(a_{ij}) \subseteq U \cap V_i$$

であるような $b_{ij} \in B_i, a_{ij} \in A$ が取れる．P を動かせば，このようにして U が被覆できる．

$$U = \bigcup_{i,j} D_{B_i}(b_{ij}) = \bigcup_{i,j} D_A(a_{ij}).$$

仮定より，各 V_i は $\{\operatorname{Spec} C_{ik}\}_{i,k}$ で被覆され，これらの C_{ik} は有限生成 B_i 代数[†2]であるようにとれる．

Lemma (Preimage of POS is POS) より，$c_{ijk} \in C_{ik}$ が存在し，以下のようになる．

$$f^{-1}U = \bigcup_{i,j} f^{-1} D_{B_i}(b_{ij}) = \bigcup_{i,j}\bigcup_{k} D_{C_{ik}}(c_{ijk}).$$

$D_{C_{ik}}(c_{ijk}) = \operatorname{Spec}(C_{ik})_{c_{ijk}}$ であり，$(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 $(B_i)_{b_{ij}}$ 代数．これは有限生成代数の定義から存在する全射 $B[x_1, \ldots, x_n] \to C_{ik}$ の両辺を局所化[†3]すれば分かる．$(B_i)_{b_{ij}} \cong A_{a_{ij}}$（Nike's Lemma の最後の文）と最後の Lemma より，$(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 A 代数．

以上より，$f^{-1} \operatorname{Spec} A$ は $\operatorname{Spec}(C_{ik})_{c_{ijk}}$ で被覆され，各 $(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 A 代数である．

[†2] $\phi_{ik} = \left((f|_{\operatorname{Spec} C_{ik}})^{\#}\right)_{\operatorname{Spec} B_i}$ で代数とみなす．

[†3] C_{ik} が ϕ_{ik} による B_i 代数であることと $c_{ijk} = \phi_{ik}(b_{ij})$ を用いて計算する．

Ex3.2 Definition(s) of Quasi-Compact Morphism.

以下を示す．

$$\begin{aligned}&{}^{\exists}\{B_i\}_{i\in I},\quad \left[Y=\bigcup_{i\in I}\operatorname{Spec}B_i\right]\wedge\left[{}^{\forall}i\in I,\quad f^{-1}(\operatorname{Spec}B_i)::\text{ quasi-compact.}\right]\\ \iff &{}^{\forall}\operatorname{Spec}A\subseteq Y,\quad f^{-1}(\operatorname{Spec}A)::\text{ quasi-compact.}\end{aligned}$$

まず $\operatorname{Spec}A=\bigcup_{i,j}D_{B_i}(b_{ij})$ となるように b_{ij} をとる．Ex2.13b より $\operatorname{Spec}A$ は quasi-compact だから b_{ij} は有限個でよい．$f^{-1}\operatorname{Spec}B_i$ は open subscheme だから，$f^{-1}\operatorname{Spec}B_i=\bigcup_{i,k}\operatorname{Spec}C_{ik}$ なる C_{ik} がある．仮定より $f^{-1}\operatorname{Spec}B_i$ は quasi-compact であるから C_{ik} は有限個．これに Ex3.1 の中で示した Lemma (Preimage of POS is POS) を用いると以下のようになる．

$$f^{-1}\operatorname{Spec}A=\bigcup_{i,j}f^{-1}D_{B_i}(b_{ij})=\bigcup_{i,j}\bigcup_{k}D_{C_{ik}}(c_{ijk}).$$

確認したとおり組 (i,j,k) は高々有限の組み合わせしか無い．Ex2.13 の証明にあるとおり，$D_{C_{ik}}(c_{ijk})$ は quasi-compact だから，$f^{-1}\operatorname{Spec}A$ は quasi-compact な開集合の有限和．よって $f^{-1}\operatorname{Spec}A$ も quasi-compact.

Ex3.3 Definition(s) of Finite Type Morphism.

(a) Finite Type = Locally Finite Type+Quasi-Compact.

定義より明らか.

(b) Another Definition of Finite Type Morphism.

Ex3.1 の弱い形である．

(c) If f :: Finite Type and Any $\operatorname{Spec}A\subseteq f^{-1}(\operatorname{Spec}B)$, A :: Fin.Gen B-Alg.

Ex3.4 Definition(s) of Finite Morphism.

Ex3.1 と同様に証明できる．

Ex3.5 Finite/Quasi-Finite Morphism.

$f:X\to Y$ が quasi-finite morphism であるとは，任意の点 $y\in Y$ について $f^{-1}(y)$ が有限集合であるという事である．

(a) Finite $\implies$ Quasi-Finite.

Artin ring をつかう．Ati-Mac Prop8.3, Exc.8.3 を参照せよ．
$f:X\to Y$ を finite morphism だとする．この時，任意の点 $y\in Y$ に対し，

$$y\in\operatorname{Spec}B\subseteq Y,f^{-1}\operatorname{Spec}B=\operatorname{Spec}A$$

となる環 A, B が存在する．f を $\operatorname{Spec} A$ に制限すれば $X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B$ と仮定できる．また f から induce される ring homomorphism を $\phi : B \to A$ とする．

Ex3.10a より，$f^{-1}(y) \approx \operatorname{sp} X_y = \operatorname{sp} \operatorname{Spec} A \otimes_B k(y)$．Ati-Mac Ex8.4 より，この最右辺は有限空間である．よって f :: quasi-finite.

(b) Finite $\Longrightarrow$ Closed.

Z :: closed in X をとり，$f(Z)$ :: closed in Y を示す．Ch I, Lemma 3.1 の直後にあるとおり，以下の条件が満たされた時，$f(Z)$ :: closed in Y となる．

$$^{\exists}\{U_i\}_{i \in I}, \quad ^{\forall} i \in I, \quad f(Z) \cap U_i :: \text{closed in } U_i.$$

そこで $\operatorname{Spec} B \subseteq Y, f^{-1} \operatorname{Spec} B = \operatorname{Spec} A$ を任意にとって $f(Z \cap \operatorname{Spec} A)$ :: closed in $\operatorname{Spec} B$ を示す．

$Z \cap \operatorname{Spec} A$ :: closed in $\operatorname{Spec} A$ なので $Z \cap \operatorname{Spec} A = V(\mathfrak{a})$ とする．$f_| = f|_{\operatorname{Spec} A}$ から誘導される ring homomorphism を $\phi : B \to A$ とすると，

$$\operatorname{cl}_{\operatorname{Spec} B} f_|(V(\mathfrak{a})) = V(\phi^{-1}\mathfrak{a})$$

だから[†4]，$f_|(V(\mathfrak{a})) \supseteq V(\phi^{-1}\mathfrak{a})$ を示そう．

$\mathfrak{p} \in V(\phi^{-1}\mathfrak{a})$ を任意にとる．$\ker \phi \subseteq \phi^{-1}\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ だから，$\mathfrak{a} \subseteq \phi(\mathfrak{p})$ かつ（準同型定理より）$\phi(\mathfrak{p})$ は素イデアル．今，$\phi(B) \subseteq A$ で A :: finitely generated $\phi(B)$-algebra だから，Ati-Mac Thm5.10 から次が成り立つ．

$$^{\exists}\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A, \quad \mathfrak{q} \cap \phi(B) = \phi(\mathfrak{p}).$$

$\ker \phi \subseteq \mathfrak{p}$ と準同型定理から，$f(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$．よって $\mathfrak{p} \in fV(\mathfrak{a})$ が得られた．

(c) Give an Example of morphism that is Surjective, Finite-Type, Quasi-Finite BUT NOT Finite.

Ex3.6 Function Field.

X :: integral scheme とし，$\mathcal{O}_{X,\zeta}$ が体であることと，任意の affine open subset $\operatorname{Spec} A$ について $\mathcal{O}_{X,\zeta} \cong \operatorname{Quot}(A)$ であることを示す．

$\zeta \in X$ を generic point としよう．$\{\zeta\}$ は X で dense な 1 点集合だから，任意の開集合に含まれる．だから $\operatorname{Spec} A$ :: affine open subset をどのように取ってもよい．$\mathcal{O}_{X,\zeta} = (\mathcal{O}_X|_{\operatorname{Spec} A})_\zeta = A_\zeta$ であり，$A = \mathcal{O}_X|_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Spec} A)$ が integral であることから，$\zeta = (0) \in \operatorname{Spec} A$．以上から

$$\mathcal{O}_{X,\zeta} = (\mathcal{O}_X|_{\operatorname{Spec} A})_\zeta = A_\zeta = A_{(0)} = \operatorname{Quot}(A)$$

が得られる．

Ex3.7 Dominant, Generically Finite Morphism of Finite Type of Integral Schemes.

Ex3.8 Normalization.

scheme が normal であるとは，その任意の局所環が integrally closed domain である，という意味である．X :: integral scheme とする．$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ に対し，$\tilde{A}$ を A の integral closure, $\tilde{U} = \operatorname{Spec} \tilde{A}$

[†4] Ati-Mac Ex1.21 iii).

とする．

(a) $\{\tilde{U}\}$ can be glued.

Ati-Mac Prop5.1 をつかう．

(b) $\tilde{X}$ has a UMP.

(c) X :: finite type $\implies$ $\tilde{X} \to X$ :: finite.

Ex3.9 The Topological Space of a Product.

(a) $\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \cong \mathbb{A}^2_k$ but $\mathbb{A}^2_k \neq \mathbb{A}^1_k \times \mathbb{A}^1_k$ as sets.

$\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[x]$ として $\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k$ を考える．

■$\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \cong \mathbb{A}^2_k$． $\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \cong \operatorname{Spec} k[x] \otimes_k k[y]$ かつ，$k[x] \otimes_k k[y] \cong k[x, y]$(Ch I, Ex3.18 の解答を参照．) なので明らか．

■$\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k \neq \mathbb{A}^2_k$ as sets. $\operatorname{Spec} k[x, y]$ は $(y - x^2)$ のような点 (generic point of a variety) を含むが，$\mathbb{A}^1_k \times_{\operatorname{Spec} k} \mathbb{A}^1_k$ にこれに対応する点はない．

(b) Describe $\operatorname{Spec} k(s) \otimes_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k(t)$.

$\operatorname{Spec} k(s) \otimes_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k(t) \cong \operatorname{Spec} k(s) \otimes_k k(t)$ である．$k(s) \otimes_k k(t)$ の元は 0 でなければ単元である．実際，$f, g, f', g' \neq 0$ であるとき，

$$\frac{f(s)}{g(s)} \otimes \frac{f'(t)}{g'(t)} \cdot \frac{g(s)}{f(s)} \otimes \frac{g'(t)}{f'(t)} = 1 \otimes 1 = 1.$$

よって $k(s) \otimes_k k(t)$ は体で，$\operatorname{Spec} k(s) \otimes_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} k(t)$ は 1 点 scheme.

Ex3.10 Fibres of a Morphism.

(a) $\operatorname{sp}(X_y) \approx f^{-1}(y)$.

(i) Affine Case

$\phi : B \to A, f : X = \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} B = Y$ とし，A を ϕ で B 代数とみなす．$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B, S = B - \mathfrak{p}$ とすると，$A \otimes_B k(\mathfrak{p})$ は以下のようになる．なお，以下で $\phi(\mathfrak{p})$ から生成されるイデアルを $I_\mathfrak{p} = \phi(\mathfrak{p})A = \langle \phi(\mathfrak{p}) \rangle, T = \overline{\phi(S)}$ と置く．

$$\begin{aligned}
&A \otimes_B \frac{S^{-1}B}{S^{-1}\mathfrak{p}} \\
=&A \otimes \bar{S}^{-1}\left(\frac{B}{\mathfrak{p}}\right) \\
\cong&A \otimes \frac{B}{\mathfrak{p}} \otimes S^{-1}B \\
\cong&\frac{A}{\phi(\mathfrak{p})A} \otimes S^{-1}B \\
\cong&T^{-1}\left(\frac{A}{I_\mathfrak{p}}\right)
\end{aligned}$$

途中で Ati-Mac Cor3.4, Prop3.5, Ex2.2 を使った．

Ati-Mac Prop1.1, 3.11 より，$T^{-1}\left(\frac{A}{I_{\mathfrak{p}}}\right)$ の素イデアルは，A の素イデアルであって，$I_{\mathfrak{p}}$ を含み，T と共通部分を持たないものに対応する．

$$\operatorname{Spec} T^{-1}\left(\frac{A}{I_{\mathfrak{p}}}\right) \approx \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid I_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{q} \wedge \phi(S) \cap \mathfrak{q} = \emptyset.\}$$

同相であることは以下のように一般論から分かる．まず，任意のイデアル $\mathfrak{a} \subseteq A$ について $\operatorname{Spec} \frac{A}{\mathfrak{a}}$ は $\operatorname{Spec} A$ の閉集合 $V(\mathfrak{a})$ と同相である[†5]．また任意の積閉集合 $S \subseteq A$ について $\operatorname{Spec} S^{-1}A$ は $\operatorname{Spec} A$ の部分集合と同相[†6]．よって $\operatorname{Spec} T^{-1}\left(\frac{A}{I_{\mathfrak{p}}}\right)$ は $V(I_{\mathfrak{p}})$ の部分集合と同相である．

一方，$f^{-1}(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \mid \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\}$．なので $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A$ についての命題

$$I_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{q} \wedge T \cap \bar{\mathfrak{q}} = \emptyset \iff f(\mathfrak{q}) = \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} \quad (*)$$

が示されれば証明が完了する．ただし $\bar{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{q}}{I_{\mathfrak{p}}}$．

まず $\mathfrak{p} \not\supseteq \ker\phi$ だとしよう．すると $S \cap \ker\phi \neq \emptyset$ なので，$\phi(S) \ni 0$．任意の $\mathfrak{q}$ について $\mathfrak{q} \ni 0$ なので，

$$T \cap \bar{\mathfrak{q}} \supseteq \overline{\phi(S) \cap \mathfrak{q}} \supseteq \overline{\{0\}}.$$

よって $(*)$ の左辺は常に偽．同じ条件の下で (*) の右辺が偽になることは明らかなので，$\mathfrak{p} \not\supseteq \ker\phi \implies (*)$ が言えた．

続いて $\mathfrak{p} \supseteq \ker\phi$ だとしよう．この時 $I_{\mathfrak{p}} = \phi(\mathfrak{p})$ となる[†7]．$\phi(S) = \phi(B - \mathfrak{p})$ だから，

$$\begin{aligned}
&\phi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q} \wedge T \cap \bar{\mathfrak{q}} = \emptyset \\
\implies &\phi(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q} = \phi(\mathfrak{p}) \wedge \overline{\phi(B - \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q}} = \emptyset \\
\implies &\phi(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q} = \phi(\mathfrak{p}) \wedge \phi(B - \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q}) = \emptyset \\
\implies &\phi(B) \cap \mathfrak{q} = (\phi(\mathfrak{p}) \cup \phi(B - \mathfrak{p})) \cap \mathfrak{q} = (\phi(\mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q}) \cup (\phi(B - \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q}) = \phi(\mathfrak{p}) \\
\iff &\phi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}.
\end{aligned}$$

最後の行で準同型定理を用いた．逆に $\mathfrak{p} = \phi^{-1}(\mathfrak{q})$ ならば $\phi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q}$ は明らか．同様に $\phi^{-1}(A - \mathfrak{q}) = B - \phi^{-1}(\mathfrak{q}) = B - \mathfrak{p}$ より $\phi(B - \mathfrak{p}) \subseteq A - \mathfrak{q}$ も得られる．最後に $T \cap \bar{\mathfrak{q}} = \emptyset$ を示す．これは以下と同値である．

$$\nexists x \in \mathfrak{q}, y \in \phi(B - \mathfrak{p}), \quad x - y \in \mathfrak{p}.$$

このような x, y が存在すると仮定する．$x - y \in \mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \phi(B)$ なので $x - (x - y) = y \in \mathfrak{q}$．仮定と合わせて $y \in \mathfrak{q} \cap \phi(B - \mathfrak{p})$ を得るが，$\mathfrak{q} \cap \phi(B - \mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q} \cap (A - \mathfrak{q}) = \emptyset$ なので，矛盾が生じた．以上より $\mathfrak{p} \supseteq \ker\phi \implies (*)$ が言えた．

(ii) General Case.

Y の y を含む affine open subset $\tilde{Y}$ をとる．すると $f^{-1}\tilde{Y}$ も open afine covering をもつので，それを $f^{-1}\tilde{Y} = \bigcup X_i$ とする．$f : X \to Y$ を制限して $f|_{X_i} : X_i \to Y_i$ とする．すると Thm3.3 の証明の Step6,7 より，X_y は

$$(X_y)_i := X_i \times_{\tilde{Y}} \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{\tilde{Y},y}/\mathfrak{m}_{\tilde{Y},y})$$

[†5] $V(\mathfrak{a}) \cap V(I) \leftrightarrow V\left(\frac{\mathfrak{a}+I}{\mathfrak{a}}\right)$ なので同相．

[†6] みなす時の対応は $\mathfrak{p}S^{-1}A \leftrightarrow P \cap A$ である．

[†7] $\phi : B \to A$ について $\ker\phi \subseteq \mathfrak{b} \subseteq B$ としよう．$B/\ker\phi \cong \operatorname{im}\phi$ の同型射は $b \bmod \ker\phi \mapsto \phi(b)$ なので，これに $\mathfrak{b}$ を入れれば $\mathfrak{b}/\ker \cong \phi(\mathfrak{b})$ となる．$\ker\phi \subseteq \mathfrak{b}$ より左辺はイデアルだから右辺もイデアル．

の貼り合わせ[†8]．$\operatorname{sp} X_y$ は $\operatorname{sp}(X_y)_i$ の張り合わせで，Affine Case での議論により $\operatorname{sp}(X_y)_i \approx (f|_{X_i})^{-1}(y) = f^{-1}(y) \cap X_i$．よって $\operatorname{sp} X_y = \bigcup_i (f^{-1}(y) \cap X_i) = f^{-1}(y)$．位相空間としては $(f|_{X_i})^{-1}(y) \xrightarrow{\approx} \operatorname{sp}(X_y)_i \to \operatorname{sp} X_y$ を使って貼り合わせる．

(b) Another Solution of (b).

Ch.I Ex3.18(Product of Affine Varieties) で使った補題を少し変形したものと，中国剰余定理を用いる．

補題 Ex3.10.1
I, J をそれぞれ $k[s][t](= k[s,t]), k[s]$ のイデアルとする．この時，以下が成り立つ．

$$\frac{k[s][t]}{I} \otimes_{k[s]} \frac{k[s]}{J} \cong \frac{k[s][t]}{I + J^e}$$

ただし，$\frac{k[s][t]}{I}, \frac{k[s]}{J}$ はそれぞれ $f \mapsto f \bmod I, f \mapsto f \bmod J$ で $k[s]$ 代数とみなす．

(証明)．$\pi_1 : k[s][t] \to \frac{k[s][t]}{I}, \pi_2 : k[s] \to \frac{k[s]}{I}$ を標準的全射とする．すると $\pi_1 \otimes_{k[s]} \pi_2$ も全射である．$\kappa : k[s][t] \to k[s][t] \otimes_{k[s]} k[s]$ を標準的同型だとすると，以下は全射である．

$$\kappa \circ \pi_1 \otimes_{k[s]} \pi_2 : k[s][t] \to k[s][t] \otimes_{k[s]} k[s] \to k[s][t] \otimes k[s] \to \frac{k[s][t]}{I} \otimes_{k[s]} \frac{k[s]}{J}$$

これの ker を計算すると $I + J^e$ となり，準同型定理により主張が得られる． ∎

これをつかって (b) を計算していく．

■At $y = (s - a) \in Y \quad (a \neq 0)$．$\phi(y) = (\bar{t}^2 - a) = (\bar{t} - \sqrt{a}) \cap (\bar{t} + \sqrt{a})$ だから，(a) から以下が成り立つ．

$$\operatorname{sp}(X_y) \approx f^{-1}(y) = f^{-1}V(y) = V(\phi(\mathfrak{a})) = \{(\bar{t} - \sqrt{a}), (\bar{t} + \sqrt{a})\}.$$

$k(y) = B_y/yB_y \cong (B/y)_{\bar{y}}$ だが，$B/y \cong k$ は体だから $k(y) = k$．$X_y = \operatorname{Spec} A \otimes_B B/y$ なので補題が使える．

$$\begin{aligned}
\frac{k[s,t]}{(s-t^2)} \otimes_{k[s]} \frac{k[s,u]}{(s-a,u)} &\cong \frac{k[s,t,u]}{(s-t^2, s-a, u)} \\
&\cong \frac{k[t]}{(t^2-a)} \\
&= \frac{k[t]}{(t-\sqrt{a}) \cap (t+\sqrt{a})} \\
&\cong \frac{k[t]}{(t-\sqrt{a})} \oplus \frac{k[t]}{(t+\sqrt{a})} \\
&\cong k \times k
\end{aligned}$$

途中で中国剰余定理を使った．このことから $X_y = \operatorname{Spec}(k \times k)$ で，各点での剰余体は k．

[†8] ここで，$y \notin Y_i$ である場合は $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y_i,y}/\mathfrak{m}_{Y_i,y}) \to Y_i$ が無い．これで大丈夫なのか気になる．$\mathcal{O}_{Y_i,y} = \varinjlim_{y \in V \subseteq Y_i} \mathcal{O}_Y(V)$ は $y \notin Y_i$ の時 $\{0\}$ の direct limit なので 0（零環）となる．したがって $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Y_i,y}/\mathfrak{m}_{Y_i,y}) \to Y_i$ は零写像から誘導される物になり，$(X_y)_{ij} = X_{ij} \times_{Y_i} \emptyset = 0$ となる．以上から，$y \in Y_i$ かどうか気にせず上のように述べて問題ない．

■At $y = (s) \in Y$.

$$\frac{k[s,t]}{(s-t^2)} \otimes_{k[s]} \frac{k[s,u]}{(s,u)} \cong \frac{k[s,t,u]}{(s-t^2,s,u)} \\ \cong \frac{k[t]}{(t^2)}$$

$\frac{k[t]}{(t^2)}$ は $(t) \bmod (t^2)$ を唯一の極大イデアルとする局所環なので，Ex2.3b より $\operatorname{Spec}\frac{k[t]}{(t^2)}$ は 1 点空間．また，non-reduced scheme である．

■At $y = (0) = \eta \in Y$．$(B/\eta)_\eta = B_{(0)} = k(s)$ なので $k(\eta) = k(s)$．$S = k[s] - \{0\}$ とすると以下のように計算できる．

$$\frac{k[s,t]}{(s-t^2)} \otimes_{k[s]} S^{-1}k[s] \cong \bar{S}^{-1}\frac{k[s,t]}{(s-t^2)} \\ \cong \frac{S^{-1}k[s,t]}{S^{-1}(s-t^2)} \\ \cong \frac{k(s)[t]}{(t^2-s)}$$

$t^2 - s$ は $k(s)$ 係数既約多項式だから，この環は体．なので $X_y = \operatorname{Spec}\frac{k(s)[t]}{(t^2-s)}$ は 1 点空間である．しかも剰余体は $k(s) = k(y)$ の 2 次拡大体．

Ex3.11　Closed Subschemes.

(a)　Closed Immersions are Stable under Base Extension.

（affine case で証明する際に，surj $\iff$ epic を使って証明する．）

(b)　* Closed Subscheme of Affine Scheme is Determined by a Suitable Ideal.

$X = \operatorname{Spec} A$ とその closed subscheme Y を考える．$Y = X$ ならば主張は自明なので $Y \subsetneq X$ とする．

$\{f_i\}_{i\in I_1} \subseteq A$ を適切に取ると $Y \subseteq \bigcup_{i\in I_1} D(f_i)$ とできる．ただし $D(f_i) \cap Y \neq \emptyset$ とする．また Y^c :: open subscheme of X かつ X :: affine scheme なので，同様に Y^c の開被覆 $Y^c = \bigcup_{i\in I_2} D(f_i)$ を取ることができる．まとめると X の開被覆が取れる．

$$X = \bigcup_{i\in I_1\cup I_2} D(f_i).$$

Ex2.10 より X :: quasi-compact だから，ここから finite open subcover$X = \bigcup_{j\in J} D(f_j)$ がとれる．このとき

$$Y \subsetneq X = \left[\bigcup_{i\in J\cap I_1} D(f_i)\right] \cup \underbrace{\left[\bigcup_{i\in J\cap I_2} D(f_i)\right]}_{\subseteq Y^c}$$

だから $J \cap I_1, J \cap I_2 \neq \emptyset$ となる．新しく $I = J \cap I_1$ とおけば Y の finite open cover $Y \subseteq \bigcup_{i\in I} D(f_i)$ と X の finite open cover $X = \bigcup_{j\in J} D(f_j)$ が得られたことになる．

さて，$B = \mathcal{O}_X|_Y(Y)$ とおくと（ここで A の元を B へ写す手段がないことに気がついた．）

(c) The Smallest Subscheme Structure on a Closed Subset.

(d) The Scheme-Theoretic Image of f.

Ex3.12 Closed Subschemes of $\operatorname{Proj} S$.

Ex3.13 Properties of Morphisms of Finite Type.

Ex3.14 The Closed Points of Scheme of Finite Type over a Field.

(a) (First Part).

k :: field, X :: finite type over k，X_0=closed points of X とする．X_0 が X 内で dense であることを示す．ここで finite type over k とは，$X \to \operatorname{Spec} k$ が finite type であること．すなわち，finitely generated k-algebra であるような環による affine open covering を X が持つということ．

(i) Affine Case.

$X = \operatorname{Spec} A$，$A$ :: finitely generated k-algebra と仮定して $\mathrm{cl}_X(X_0) = X$ を示す．このとき $X_0 = \operatorname{Max} A$ であり，$\mathrm{cl}_X(X_0) = X$ は X_0^c が空でない X の開集合を含まないことと同値である．finitely generated k-algebra は Jacobson ring である，という fact [†9]を使ってこれを証明する．

主張 Ex3.14.1
$\mathfrak{a}$ :: ideal of A とする．$V^c(\mathfrak{a}) \subseteq X_0^c \implies V^c(\mathfrak{a}) = \emptyset$.

(証明).

$$
\begin{aligned}
& V^c(\mathfrak{a}) \subseteq X_0^c \\
\iff & V(\mathfrak{a}) \supseteq X_0 = \operatorname{Max} A \\
\iff & {}^{\forall}\mathfrak{m} \in \operatorname{Max} A, \quad \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \\
\iff & \mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Jac}(A) = \operatorname{Nil}(A) \quad \text{(by the fact)} \\
\iff & V(\mathfrak{a}) = X \\
\iff & V^c(\mathfrak{a}) = \emptyset.
\end{aligned}
$$

∎

(ii) General Case.

主張 Ex3.14.2
U :: open in X とする．$U \subseteq X_0^c \implies U = \emptyset$.

(証明). 背理法で示す．$U \neq \emptyset$ ならば $U \cap \operatorname{Spec} A \neq \emptyset$ となる $\operatorname{Spec} A \subseteq X$ がある．仮定より，

$$\emptyset \neq U \cap \operatorname{Spec} A \subseteq X_0^c \cap \operatorname{Spec} A = (\operatorname{Max} A)^c.$$

これは Affine Case の結果に反する．よって $U = \emptyset$. ∎

[†9] Eisenbud, Thm4.19

(b)　(Second Part).

X :: finite type over k と限らなければ，反例が存在する．実際，A を局所環 $k[x,y]_{(x,y)}$ だとすると，$\operatorname{Max} A = \{(x,y)_{(x,y)}\}$ であり，これは閉点のみの 1 点集合だから閉集合．つまり $\mathrm{cl}_{\operatorname{Spec} A}(\operatorname{Max} A) = \operatorname{Max} A \subsetneq \operatorname{Spec} A$ となり，これ $\operatorname{Max} A$ は dense でない．

Ex3.15　Geometrically Irreducible/Reduced/Integral Schemes.

k :: field, X :: scheme of finite type over k. この時 X は $\operatorname{Spec} \frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{I}$ という形の open affine subscheme で被覆できる．以下ではこの被覆のうちの一つの open affine subscheme を取って考察をする．$R = \frac{k[x_1,\ldots,x_n]}{I}$ としておく．また，$X \times_{\operatorname{Spec} k} \operatorname{Spec} \bar{k}$ を $X \times_k \bar{k}$ と略す．

(a)　Geometrically Irreducible.

以下の条件の同値性を示す．

(i) $X \times_k \bar{k}$ is irreducible.
(ii) $X \times_k k_s$ is.
(iii) $X \times_k K$ is, for every extension field K of k.

ただし k_s は k の分離閉包で，$\bar{k}$ の部分体である．これらのいずれか（したがって全部）が成り立つ X は geometrically irreducible である，という．

(iii) $\Longrightarrow$ (i),(ii) は明らか．また，一般の位相空間 T について以下が成り立つ．（TODO:check）

$$T :: \text{irreducible} \iff {}^{\exists}\{U_i\} :: \text{open cover of } T,\ \ {}^{\forall}i,j,\ \ U_i \cap U_j \neq \emptyset \wedge U_i :: \text{irreducible}.$$

よって，(i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) を affine case で確かめれば十分である．Ati-Mac Ex1.19 より，これは更に，次の 3 つの条件が同値であることだと言い換えられる．

(i) $\mathrm{Nil}(R \otimes_k \bar{k})$ is a prime ideal.
(ii) $\mathrm{Nil}(R \otimes_k k_s)$ is.
(iii) $\mathrm{Nil}(R \otimes_k K)$ is, for every extension field K of k.

(b)　Geometrically Reduced.

以下の条件の同値性を示す．

(i) $X \times_k \bar{k}$ is reduced.
(ii) $X \times_k k_p$ is.
(iii) $X \times_k K$ is, for every extension field K of k.

ただし k_p は k の完全閉包で，$\bar{k}$ の部分体である．これらのいずれか（したがって全部）が成り立つ X は geometrically reduced である，という．

(iii) $\Longrightarrow$ (i),(ii) は明らか．また，Ex2.3a より，reduced という性質は local な性質であるから，一般の scheme S について以下が成り立つ．

$$S :: \text{reduced} \iff {}^{\exists}\{U_i\} :: \text{open cover of } S,\ \ {}^{\forall}i,\ \ \mathcal{O}_S(U_i) :: \text{reduced}.$$

よって，(i) $\Longrightarrow$ (iii) を affine case で確かめれば十分である．これは affine case では更に言い換えられる．

(i) $\mathrm{Nil}(R \otimes_k \bar{k}) = 0$
(ii) $\mathrm{Nil}(R \otimes_k k_s) = 0$.
(iii) $\mathrm{Nil}(R \otimes_k K) = 0$, for every extension field K of k.

(c) Geometrically Integral.

$X \times_k \bar{k}$ が integral であるとき X は geometrically integral であるという．**integral** scheme だが geometrically irreducible でない，または geometrically reduced でない例を作る．

Ex3.16 Noetherian Induction.

Ex3.17 Zariski Spaces.

X :: topological space について，X が noetherian かつ X の任意の irreducible closed subset がただひとつの generic point を持つとき，X は Zariski space であるという．

(a) X :: Noetherian Scheme $\Longrightarrow$ $\mathrm{sp}(X)$ :: Zariski Space.

Ex2.9 より明らか．

(b) Minimal Nonempty Closed Subset of a Zariski Space = One Point Set.

X :: Zariski Space,M :: minimal nonempty closed subset of X とする．この時，M :: irreducible である．実際，$M = Z_0 \cup Z_1$ と空でない閉集合の和へ分解できるならば $Z_0, Z_1 \subsetneq M$ となり，minimality に反するからである．また，Ch I, Ex1.7 より M は Noetherian．なので $g \in M$ :: generic point が存在する．$M - \{g\}$ が空でないと仮定し，$\not{g} \in M - \{g\}$ をとる．$\mathrm{cl}_X(\{\not{g}\}) \subseteq M$ であるが，M は極小な閉集合だから $\mathrm{cl}_X(\{\not{g}\}) = M$．これは M の generic point として $g, \not{g}$ の二つが取れることを意味し，generic point の唯一性に矛盾する．

(c) Zariski Space is a T_0-Space.

互いに異なる 2 点 $x, y \in X$ をとる．これらのうち一方を含み，もう一方を含まない閉集合が存在することを示す．まず，一般の空間における閉包作用素の性質より，以下が成り立つ．

$$\mathrm{cl}_X(\{x, y\}) = \mathrm{cl}_X(\{x\}) \cup \mathrm{cl}_X(\{y\}).$$

左から順に C_{xy}, C_x, C_y とする．

■C_{xy} :: not irreducible. $\{x\} \subseteq C_y$ ならば $C_x \subseteq \mathrm{cl}_X(C_y) = C_y$ となる．よって $C_{xy} = C_y$ が導かれる．しかし C_y :: irreducible [†10] だから，これは矛盾．したがって $x \notin C_y$．逆に $y \notin C_x$ も得られる．

[†10] $\mathrm{cl}_X(\{x\})$ が x を含む最小の閉集合であることから，$\mathrm{cl}_X(\{x\})$ は x を含む真の部分閉集合を持たない．よって $\mathrm{cl}_X(\{x\}) = Z_0 \cup Z_1$ ならば，Z_0, Z_1 のどちらか一方は真の部分閉集合になり得ない．

■C_{xy} :: irreducible.　C_x, C_y は空でない閉集合だから，C_{xy} が irreducible であったとすると，C_x, C_y のいずれかは C_{xy} と一致している．なので x, y のどちらか一方は C_{xy} の generic point である．x がその generic point だと仮定しよう．$\{x\} \subseteq C_y$ であれば $C_{xy} = \mathrm{cl}_X(C_y) = C_y$ となるから，$\{x\} \subseteq C_y$ から y が C_{xy} の generic point であることが導かれる．これは generic point の唯一性に反するから，$x \notin C_y$.

(d)　The Generic Point of Irreducible Zariski Space is in Any Open Subset of That.

X :: irreducible Zariski space, g :: generic point of X とおく．g を含まない空でない開集合 U が存在したと仮定する．すると $g \in U^c$ であり，U^c は真の閉部分集合である．これは $\mathrm{cl}_X(\{g\}) \subseteq \mathrm{cl}_X(U^c) \subsetneq X$ を意味するので，矛盾．

(e)　Specialization.

X :: Zariski space とし，X の点に以下のように順序を入れたものを Σ とする．

$$x_1 \geq x_0 \iff x_1 \rightsquigarrow x_0 \iff \mathrm{cl}_X(\{x_1\}) \ni x_0.$$

これは半順序集合をなす (CHECK)．$x_1 \rightsquigarrow x_0$ であるとき x_0 は x_1 の specialization という．逆に x_1 は x_0 の generization だという．

(i)　The Minimal/Maximal Elements of Σ.

Σ の極小元 x は以下を満たす点である．

$$\nexists y \in \Sigma,\quad x \neq y \wedge \mathrm{cl}_X(\{x\}) \ni y.$$

つまり x は $\{x\}$ が閉集合であるような点である．よって x は closed point.

次に x を Σ の極大元だとする．これは以下を満たす．

$$\nexists y \in \Sigma,\quad x \neq y \wedge \mathrm{cl}_X(\{y\}) \ni x.$$

x を含む irreducible component の generic point を g とする．$y \neq g$ であるとき $\mathrm{cl}_X(\{y\}) \ni g$ は generic point の唯一性に反するから，g は Σ の極大元である．逆に，任意の元 $x \neq g$ に対し，$\mathrm{cl}_X(\{g\}) \ni x$ が成立する．結局，x がその generic point（すなわち $x = g$）であるときかつその時に限り，x は Σ の極大元となる．

(ii)　Closed/Open Subset is Stable under Specialization/Generization.

$S \subseteq X$ に対し，

$$S_S = \{y \in X \mid {}^{\exists}x \in S,\quad x \rightsquigarrow y.\},\quad S_G = \{x \in X \mid {}^{\exists}y \in S,\quad x \rightsquigarrow y.\}$$

とおく．$x \rightsquigarrow x$ なので $S \subseteq S_S, S_G$ となる．

■S :: closed $\implies$ $S_S = S$.　$S \supseteq S_S$ を示せば良い．これは以下と同値．

$${}^{\forall}x \in S,\quad {}^{\forall}y \in X,\quad \mathrm{cl}_X(\{x\}) \ni y \implies y \in S$$

これは以下から示せる．

$$\{x\} \subseteq S \implies \mathrm{cl}_X(\{x\}) \subseteq \mathrm{cl}_X(S) = S$$

■S :: open $\implies S_G = S$. $S \supseteq S_G$ を示せば良い．これは以下と同値．

$$^{\forall}y \in S,\quad ^{\forall}x \in X,\quad \mathrm{cl}_X(\{x\}) \ni y \implies x \in S$$

これの対偶は以下のようになる．

$$^{\forall}y \in S,\quad ^{\forall}x \in X,\quad x \in S^c \implies y \notin \mathrm{cl}_X(\{x\}) \subseteq \mathrm{cl}_X(S^c) = S^c$$

これは明らかに成立する ($y \in S$ に注意).

(f) X :: Noetherian Topological Space $\implies t(X)$ :: Zariski Space.

$t(X)$ は X の irreducible closed subsets であり，$t(X)$ の閉集合は X の閉集合 Y を用いて $t(Y)$ と表せる集合である．

主張 Ex3.17.1
Y, Z :: closed in X について以下が成り立つ．

$$Y \subsetneq Z \iff t(Y) \subsetneq t(Z).$$

(証明)．包含関係は明らかなので $\neq$ の部分を示す．

まず ($\implies$) は，$z \in Z - Y$ とすると，$\mathrm{cl}_X(z) \in t(Z) - t(Y)$ となることから得られる．$\mathrm{cl}_X(z) \in t(Y)$ ならば $z \in \mathrm{cl}_X(z) \subseteq Y$ だが，$z \notin Y$ なのでこれはありえない．また ($\impliedby$) は，$A \in t(Z) - t(Y)$ が存在することから得られる．A は irreducible かつ $A \subseteq Z$ かつ $A \not\subseteq Y$ となるから，$A - Y \neq \emptyset$. これは $Z - Y$ が空でないことを意味する． ∎

■X :: Noetherian $\implies t(X)$ :: Noetherian. claim から，以下の同値が得られ，$t(X)$ :: Noetherian が示せる．

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots \iff t(X_0) \supsetneq t(X_1) \supsetneq \ldots$$

ただし $X_0, X_1, \ldots$ は X の閉集合である．

■X :: Noetherian $\implies$ Irreducible Subset in $t(X)$ has Unique Generic Point. $Y \subseteq X$ が closed だとし，さらに $t(Y) \subseteq t(X)$ が irreducible closed subset だとする．このとき，Y :: irreducible が示せる．実際，$Y = C \cup D$ かつ $\emptyset \subsetneq C, D \subsetneq Y$ となる C, D :: closed が存在すれば，claim より $t(Y) = t(C) \cup t(D)$ かつ $\emptyset \subsetneq t(C), t(D) \subsetneq t(Y)$ となり，これは $t(Y)$ :: irreducible に反する．したがって $Y \in t(Y)$ であり，これは $t(Y)$ の最大元となる．ここで generic point の定義を書き下す．

定義 Ex3.17.2
$\zeta \in t(Y)$ が $t(Y)$ の generic point であるとは，任意の閉集合 $t(Z) \subseteq t(X)$ について，以下が成り立つこと．

$$\zeta \in t(Z) \iff (Y \in) t(Y) \subseteq t(Z).$$

明らかに $\zeta = Y$ のとき「任意の閉集合 $t(Z) \subseteq t(X)$ について，……」が成り立つ．よって定義の最後の論理式は

$$\zeta \in t(Z) \iff Y \in t(Z)$$

と書き換えられる．$\zeta \subsetneq Y$ のとき $Z = \zeta$ がこの右辺を成立させない．よって $\zeta = Y$ のみが $t(Y)$ の generic point である．

Ex3.18 Constructible Sets.

X :: Zariski topological space の部分集合族 $\mathfrak{F}_X$ を，以下のように定める．

(1) 任意の開集合は $\mathfrak{F}_X$ に属す．

(2) $A, B \in \mathfrak{F}_X$ ならば $A \cap B, A^c \in \mathfrak{F}_X$．

(3) 以上を有限回使って得られる部分集合のみが $\mathfrak{F}_X$ の元．

$\mathfrak{F}_X$ の元を X の constructible subset と呼ぶ．ひとつの Zariski space しか扱わない時は $\mathfrak{F}_X$ を $\mathfrak{F}$ と略す．

(a) $\mathfrak{F}$=$\{$ Finite Disjoint Union of Locally Closed Subsets.$\}$

補題 Ex3.18.1

$Z \subseteq X$ :: finite union of locally closed then Z :: finite **disjoint** union of locally closed.

(証明)．$Z = \bigcup_{i=1}^r C_i \cap O_i$ が disjoint union であるためには，$\bigcup_{i=1} C_i$ が locally closed subset の disjoint union で書ければ十分であることに注意する[†11]．実際，$\bigcup_{i=1} C_i = \bigcup_{j=1}^s D_j \cap V_j$ となったとする．

$$W_j = \bigcup_{i;\ C_i \cap D_j \cap V_j = D_j \cap V_j} O_i$$

とおくと，$C_i \cap D_j \cap V_j = D_j \cap V_j$ or $\emptyset$（以下の構成から分かる）から $\bigcup_i C_i \cap D_j \cap V_j \cap O_i = D_j \cap V_j \cap W_j$．これより以下が得られる．

$$\begin{aligned} Z &= \bigcup_{i=1}^r \left(\bigsqcup_{j=1}^s D_j \cap V_j \cap C_i \right) \cap O_i \\ &= \bigcup_{i=1}^r \bigcup_{j=1}^s D_j \cap V_j \cap C_i \cap O_i \\ &= \bigcup_{j=1}^s \bigcup_{i=1}^r D_j \cap V_j \cap C_i \cap O_i \\ &= \bigsqcup_{j=1}^s D_j \cap (V_j \cap W_j). \end{aligned}$$

$\bigcup_{i=1} C_i$ を locally closed subset の disjoint union で書く．$n = 1, \dots, r$ に対し，

$$\Sigma_n = \{(i_1, \dots, i_n) \mid i_1 < \dots < i_n \wedge i_1, \dots i_n \in \{1, \dots, r\}\}$$

とおく．これは要素数 $\binom{r}{n-r}$ の有限集合である．さらに $\sigma = (i_1, \dots, i_n) \in \Sigma_n$ に対して $C_\sigma = C_{i_1} \cap C_{i_n}$ とする．以下は明らかに locally closed.

$$K_\sigma = C_\sigma \cap \left(\bigcup_{m=n+1}^r \bigcup_{\tau \in \Sigma_m} C_\tau \right)^c$$

これらは disjoint である．実際に $\sigma \in \Sigma_n, \sigma' \in \Sigma_{n'}$ を考えてみる．$n < n'$ ならば明らかに disjoint. $n = n'$ のとき，例えば $\sigma = (i_1, \dots, i_n), \sigma' = (i'_1, \dots, i_n), i'_1 < i_1$ に対して $\sigma \cap \sigma' = (i'_1, i_1, \dots, i_n)$ とすると，$C_\sigma \cap C_{\sigma'} = C_{\sigma \cap \sigma'}$ となる．$\sigma \cap \sigma' \in \Sigma_{n+1}$ なのでやはり disjoint. ∎

[†11] $[D_j \cap (V_j \cap W_j)] \cap [D_k \cap (V_k \cap W_k)] = ([D_j \cap V_j] \cap [D_k \cap V_k]) \cap (W_j \cap W_k) = \emptyset$

この補題は `kanii.sambou.blog41.emark.com/blog-entry-92.html` に別証明がある．

$\mathfrak{L}$ の元は，以下のように書ける．

$$\bigsqcup_{i=1}^{r}(C_i \cap O_i) \quad \text{where} \quad \{C_i\}_{i=1}^{r}, \{O_i\}_{i=0}^{r} :: \text{closed,open subsets of } X.$$

$\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{L}$ は any closed subset $\in \mathfrak{F}$ と

$$\bigsqcup_{i=1}^{r} C_i \cap O_i = \left(\bigcap_{i=1}^{r} C_i^c \cap O_i^c\right)^c$$

から明らか．

$\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{L}$ を示すために，induction by construct of constructible subset を行う．開集合全体を $\mathfrak{F}_0$ とし，$n = 0, 1, \ldots$ について

$$\mathfrak{F}_{n+1} = \mathfrak{F}_n \cup \{A \cap B, A^c \mid A, B \in \mathfrak{F}_n.\}$$

とおく．任意の n について $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{L}$ であることを示す．(1) $\mathfrak{F}_0$ の元，すなわち開集合は明らかに $\mathfrak{L}$ に属す．以下，$\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{L}$ と仮定して，$\mathfrak{F}_{n+1} \subseteq \mathfrak{L}$ を示す．(2) $\mathfrak{F}_n$ の 2 個の元は $\mathfrak{L}$ に属す．それらの共通部分は $\mathfrak{F}_{n+1}$ に属すが，これは以下のように書ける．

$$\left(\bigsqcup_{i=1}^{r}(C_i \cap O_i)\right) \cap \left(\bigsqcup_{j=1}^{s}(D_i \cap P_i)\right) = \bigsqcup_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq s}} (C_i \cap D_j) \cap (O_i \cap P_j).$$

よって $\mathfrak{F}_n$ の有限個の元の共通部分は $\mathfrak{L}$ に属す．(3) $\mathfrak{F}_n$ の元は $\mathfrak{L}$ に属す．その補集合は

$$\bigcap_{i=1}^{r}(C_i^c \cup O_i^c) = \bigcup_{(\pm_1, \ldots, \pm_r) \in \{C, D\}^r} (\pm_1^c \cap \cdots \cap \pm_r^c)$$

これは locally closed subset の union だから，Lemma より，$\mathfrak{L}$ に属す．以上より，任意の n について $\mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{L}$ である．まとめて，$\mathfrak{F} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathfrak{F}_n \subseteq \mathfrak{L}$

(b) Dense Constructible Subset In Irreducible Zariski Space.

constructible subset が dense なのはそれが generic point ζ を含むときに限る．これを示そう．(a) から constructible subset Z は以下のように書ける．

$$Z = \bigsqcup_{i=1}^{r}(C_i \cap O_i) \quad \text{where} \quad \{C_i\}_{i=1}^{r}, \{O_i\}_{i=0}^{r} :: \text{closed,open subsets of } X.$$

Ex3.17d より，各 O_i は ζ を含む．なのですべての C_i が ζ を含まない時に限り Z は ζ を含まない．この時，$\zeta \notin \bigcup_{i=1}^{r} C_i$ なので $\bigcup_{i=1}^{r} C_i$ は真の閉部分集合である．$C_i \cap O_i \subseteq C_i$ より

$$\mathrm{cl}_X(Z) \subseteq \bigcup_{i=1}^{r} C_i \subsetneq X$$

よって $\zeta \notin Z$ ならば Z は dense でない．

また，constructible subset Z が dense ならば，ある i について $\zeta \in C_i \cap O_i$ となる．しかも $\zeta \in C_i$ より $C_i = X$．よって $C_i \cap O_i = O_i \subseteq Z$ となり，Z は X の開集合を含む．

(c) $S \subseteq X$ :: Closed $\iff$ S :: Constructible And Stable Under Specialization.

($\Longrightarrow$) は constructible subset の定義と Ex3.17e から得られる．($\Longleftarrow$) を示す．

$Z = \bigsqcup_{i\in I_0} C_i \cap O_i$ をとり，$\bigcup_{i\in I_0} C_i$ を (X の)irreducible components に分解して $\bigcup_{i\in I_0} C_i = \bigcup_{(i,j)\in I_1} K_{ij}$ とする（X :: noetherian と Ch.I Prop1.5 を用いた）．更に，$K_{ij} \cap O_i \neq \emptyset$ となる $(i,j) \in I_1$ を選び出して I_2 とする．この時 $Z = \bigcup_{(i,j)\in I_2} K_{ij} \cap O_i$ となる．さて，K_{ij} は irreducible なので $K_{ij} \cap O_i$ は K_{ij} の generic point ζ_{ij} を含む．Z が stable under specialization ならば以下が成り立つ．

$$\bigcup_{(i,j)\in I_2} K_{ij} = \bigcup_{(i,j)\in I_2} \mathrm{cl}_X(\{\zeta_{ij}\}) \subseteq Z \subseteq \bigcup_{(i,j)\in I_2} K_{ij}$$

よって $Z = \bigcup_{(i,j)\in I_2} K_{ij}$ となり，これは閉集合．

(d) If $f : X \to Y$ :: Continuous Map then $f^{-1}(\mathfrak{F}_Y) = \mathfrak{F}_X$.

すべて基本的な位相空間の結果である．(1) U :: open in Y について $f^{-1}(U)$ :: open in X．(2) $Z, W \in \mathfrak{F}_Y$ について $f^{-1}(Z \cap W) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(W)$. (3) $Z \in \mathfrak{F}_Y$ について $f^{-1}(Z^c) = (f^{-1}(Z))^c$.

Ex3.19 Chevalley's Theorem on Constructible Set.

X, Y :: Noetherian scheme，$f : X \to Y$ :: finite type morphism とする．この時，U :: constructible subset in X について $f(U)$ :: constructible subset in X となること (Chevalley's Theorem) を示す．

(a) Case Reduction.

X, Y, f が次を満たす場合を考える．

(1) X, Y :: affine scheme.
(2) X, Y :: integral Noetherian scheme.
(3) $f(X)$ :: dense in Y ($\iff$ f :: dominant).

この時に $f(X)$ :: constructible in Y ならば一般の設定での Chevalley's Theorem が成り立つことを示す．

■方針: 有限細分． $U = \bigsqcup i = 1^r C_i \cap O_i$ :: constructible subset in X を考えよう．明らかに各 $f(C_i \cap O_i)$ が constructible subset in Y ならば $f(U) = \bigcup_{(i,j)\in I} f(C_i \cap O_i)$ も constructible である．この U を十分に細分すれば，各 $C_i \cap O_i$ は，上の (1) から (3) で $X = C_i \cap O_i, f = f|_{C_i \cap O_i}$ かつ Y :: affine と置き換えたものを満たすように出来る（これを以下で示す）．なので，$f(X) = f(C_i \cap O_i)$ :: constructible in Y から一般の設定での Chevalley's Theorem が成り立つ．

■(i) X, Y :: noetherian scheme, f :: finite type. これが最初の仮定．

■(ii) X, Y :: affine noetherian scheme, f :: finite type. Y :: Noetherian から Y :: quasi-compact．なので $f(C \cap O) \subseteq \bigcup_{j=1}^s Y_j$ と affine finite open cover がとれる．これと f :: finite type morphism から，$f^{-1}(Y_j)$ についても $f^{-1}(Y_j) = \bigcup_{k=1}^t X_{jk}$ と affine finite open cover がとれる．この時 $C \cap O \cap X_{jk} \subset X_{jk}$ は Ex3.11b より affine であり，$f(C \cap O \cap X_{jk})$ も Y_j :: affine の部分集合である．よって，$X' = C \cap O \cap X_{jk}, Y' = Y_j, f' = f|_{C\cap O \cap X_{jk}}$ とすれば X', Y' :: affine noetherian scheme とできる．

■(iii) X, Y :: integral affine affine noetherian scheme, f :: finite type. $\mathrm{cl}_{Y'} f(X')$ を irreducible component に分解し $\bigcup_{i=1}^{l} K_i$ とする．さらに $f^{-1}(K_i)$ は閉集合だから，これも有限個の irreducible component に分解し $\bigcup_{j=1}^{m} K_{ij}$ とする．この時 $f|_{K_{ij}} : K_{ij} \to K_i$ で，K_{ij}, K_i ともに irreducible である．したがって X' は irreducible だと仮定できる．今，X', Y' は affine, Noetherian, irreducible である．irreducible なので，reduced scheme にすれば Prop2.1 より integral になる．Noetherian は topological な性質だから Ex2.3b より reduced scheme にしてもこれは保たれる．$X'' = X'_{red}, Y'' = Y'_{red}$ としよう．

■(iii) $f(X)$ :: dense. $f'' : X'' \to Y''$ を考える．これに対応する ring homomorphism を $\phi : B'' \to A''$ とすると，準同型定理から，ϕ は $\phi' : B''/\ker\phi \to A$ と一対一に対応する．この時 $f((0)) = {\phi'}^{-1}((0)) = (0)$ だから，（記号が良くない．）

(b) $f(X)$ Contains A Nonempty Open Subset Of Y.

Ati-Mac Prop5.23 において $b = 1$ とすると

(c) Complete The Proof

(d) Give Some Examples Of Morphisms...

Ex3.20 Dimension.

X :: integral scheme of finite type over a field k とする．X :: irreducible and reduced に注意．ζ を X の generic point とする．また，環の族 $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ を，$X = \bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Spec} A_i$ かつ A_i :: integral & finitely generated k-algebra なるものとする．このような $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ は X についての仮定から存在が保証される．

主張 Ex3.20.1
$\dim R = \dim \operatorname{Spec} R.$

(証明). $\operatorname{Spec} R$ の irreducible closed subset は R の素イデアルに 1:1 対応する．また，$\mathfrak{p}_0, \mathfrak{p}_1 \subseteq R$ :: 素イデアルについて，以下が成り立つ．

$$\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \implies V(\mathfrak{p}_0) \supseteq V(\mathfrak{p}_1) \implies \sqrt{\mathfrak{p}_0} = \mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 = \sqrt{\mathfrak{p}_1}.$$

よって Ch I, Prop1.7 と同様に $\dim R = \dim \operatorname{Spec} R$ が言える． ∎

(a) ${}^{\forall} P \in X$ :: closed point, $\dim X = \dim \mathcal{O}_{X,P}$.

$P \in \operatorname{Spec} A_i$ となる A_i を選んで $A := A_i$ とおく．(b) にある claim から $\dim X = \dim A$．そして P :: closed point は A の極大イデアル $\mathfrak{m}_P$ に対応する．Ch I, Thm1.8b と $A/\mathfrak{m}_P$ :: field より，

$$\dim X = \dim A = \operatorname{height} \mathfrak{m}_P = \dim \mathcal{O}_{X,P}.$$

(b) $\dim X = \text{tr.deg.}\, K(X)/k$.

Ch I, Ex1.10b より，ある i について $\dim X = \dim \operatorname{Spec} A_i$ となる．$A := A_i$ としておこう．この $\operatorname{Spec} A$ について，Ex3.6 から $K(X) \cong \operatorname{Quot} A$．そして Ch I, Thm1.8a と $\operatorname{Spec} A = \dim A$ から以下が得られる．

$$\dim X = \dim \operatorname{Spec} A = \dim A = \text{tr.deg.}\, K(X)/k.$$

補題 Ex3.20.2

$$^\forall i,\ \ ^\forall f \in A_i, \quad \dim X = \dim (A_i)_f = \dim \operatorname{Spec} (A_i)_f$$

(証明). A_i が integral かつ finitely generated k-algebra ならば $(A_i)_f$ もそうである，ということを用いる．Ex3.6 から任意の i について $K(X) = \operatorname{Quot}(A_i)_f = \operatorname{Quot} A_i$．したがって (b) と Ch I, Thm1.8a より

$$\dim X = \text{tr.deg.}\, K(X) = \text{tr.deg.}\, \operatorname{Quot}(A_i)_f = \dim (A_i)_f$$

となる． ∎

(c) If Y :: closed in X, $\operatorname{codim}(Y, X) = \inf\{\dim \mathcal{O}_{P,X} \mid P \in Y\}$.

Y :: irreducible closed subset と仮定し，$\operatorname{Spec} A_i \cap Y \neq \emptyset$ となる i を選んで $A := A_i$ とする．Lemma から $\dim X = \dim A = \dim \operatorname{Spec} A$ なので，$\operatorname{Spec} A$ 内の irreducible closed subsets だけ考えれば十分である．$\operatorname{Spec} A$ を X，$Y \cap \operatorname{Spec} A$ を Y と書く．

Y :: irreducible closed subset なので $Y = V(\mathfrak{p}_Y) \subseteq \operatorname{Spec} A$ となる素イデアル $\mathfrak{p}_Y \subset A$ が存在する．

$$\operatorname{codim}(Y, X) = \dim \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}_Y,} = \inf_{P \in Y} \dim \mathcal{O}_{Y,P}$$

を示そう．A の極大な素イデアル列を考える．irreducible closed subset と prime ideal では包含関係が反転することに注意.

$$(0) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_Y (\subsetneq A).$$

これの長さが $\operatorname{codim}(Y, X)$ である．すべて $A_{\mathfrak{p}_Y}$ に写すと，長さが同じ真の上昇素イデアル列が得られる．

$$(0)_{\mathfrak{p}_Y} \subsetneq \cdots \subsetneq (\mathfrak{p}_Y)_{\mathfrak{p}_Y} \left(\subsetneq A_{\mathfrak{p}_Y}\right).$$

明らかにこの列の長さは $\dim \mathcal{O}_{\mathfrak{p}_Y, X}$．

Z :: irreducible closed subset の generic point を ζ_Z と書くことにする．以上から次の等式がわかった．

$$\dim Z = \dim \mathcal{O}_{X, \zeta_Z}.$$

Z と ζ_Z は一対一に対応しているから一般の場合での等式が得られる．

$$\operatorname{codim}(Y, X) = \inf\{\dim Z \mid Z \subseteq Y\} = \inf\{\dim \mathcal{O}_{X, \zeta_Z} \mid Z \subseteq Y\}.$$

(d) If Y :: closed in X, $\dim Y + \operatorname{codim}(Y, X) = \dim X$.

(c) と同様に，X を affine open subscheme と考えてよい．

A の素イデアルを Y からとり $\mathfrak{p}$ とする．Ch I, Thm1.8b より以下が得られる．

$$\dim \frac{A}{\mathfrak{p}} + \operatorname{height} \mathfrak{p} = \dim A.$$

ここから，$\operatorname{height} \mathfrak{p}$ が極小ならば $\dim \frac{A}{\mathfrak{p}}$ が極大になることは明らか．そのような $\mathfrak{p}$ が定める閉集合 $C = V(\mathfrak{p})$ が

$$\dim Y = \dim C \left(= \dim \frac{A}{\mathfrak{p}}\right), \operatorname{codim}(Y, X) = \operatorname{codim}(C, X) (= \operatorname{height} \mathfrak{p})$$

となる irreducible closed subset である．ここから $\dim Y + \operatorname{codim}(Y, X) = \dim X$ は明らか.

(e)　If U :: nonempty open subset of X, then $\dim U = \dim X$.

$i, f \in A_i$ を適当に取れば $\mathrm{Spec}(A_i)_f \subseteq U$ とできる．したがって Lemma I より，

(f)　If k'/k :: field extension, then every irreducible component of $X' := X \times_k k'$ has dim$= \dim X$.

X' は一般には irreducible であることを指摘しておく．例えば以下の計算が出来る．

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \left(\frac{\mathbb{R}[x]}{(x^2+1)} \right) = \frac{\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}[x]}{(x^2+1)} = \frac{\mathbb{C}[x]}{(x+i) \cap (x-i)} = \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

この事実は「$\mathbb{C}/\mathbb{R}$ は 2 次 Galois 拡大である」と表現できる．すなわち，「$\mathbb{C}$ は分解 $\mathbb{R}$ 代数である」ということ．

Z :: irreducible component in X' を任意に取る．$A_i' = A_i \otimes_k k'$ とおく．$Z = \bigcup_{i=1}^r Z \cap \mathrm{Spec}\, A_i'$ なので，ch I, Ex1.10b より，ある i について $\dim Z = \dim Z \cap \mathrm{Spec}\, A_i'$ となる．この i だけを考えることにし，以下では添字の i を省略する．

k'/k の超越基底を T とし, $k_T = k(T)$ とする．（claim 1,2 の証明で T の元を使う．）この時 $k \subseteq k_T \subseteq k'$ はそれぞれ純超越拡大，代数的拡大．さらに A_T, A' を以下で定める．

$$A \otimes_k k (= A) \subseteq A \otimes_k k_T (=: A_T) \subseteq A \otimes_k k' (=: A')$$

$Z \cap \mathrm{Spec}\, A' (\neq \emptyset)$ は $\mathrm{Spec}\, A'$ の極大な irreducible closed subset [†12] だから，A' の極小な素イデアル $\mathfrak{p}$ を用いて

$$\mathrm{Spec}\, A'/\mathfrak{p} \approx Z \cap \mathrm{Spec}\, A'$$

と出来る．以上に加え，以下で示す claim 1,2 をまとめれば，主張が得られる．

$$\dim Z = \dim A'/\mathfrak{p} = \dim A_T = \dim A = \dim X.$$

主張 **Ex3.20.3** (1)
$\dim A'/\mathfrak{p} = \dim A_T$.

(証明).
■(i) $A_T \subseteq A'$ :: flat extension.

$$\begin{aligned} & k' :: \text{free } k_T\text{-mod.} \\ \Longrightarrow\ & k' :: \text{flat } k_T\text{-mod.} \\ \Longrightarrow\ & (A \otimes_k k_T) \otimes_{k_T} k' :: \text{flat } A \otimes_k k_T\text{-mod } ^{\dagger 13}. \\ \Longrightarrow\ & A \otimes_k k' :: \text{flat } A \otimes_k k_T\text{-mod } ^{\dagger 14}. \end{aligned}$$

■(ii) A_T :: integral finitely generated k_T-algebra.　finitely generated k_T-algebra であることは直ちに分かる．$A \otimes_k k_T$ の元は $\sum a_i \otimes \frac{f_i}{g_i} (a_i \in A, f_i, g_i \in k[T])$ という形の有限和なので，分母 g_i を払えば $A \otimes_k k[T]$ が integral であることへ持ち込める．これは $A[X]$ が integral であることの証明をそのままなぞれば良い．

[†12] $Z \cap \mathrm{Spec}\, A'$ は Z の generic point を含むから，$Z \cap \mathrm{Spec}\, A' \subsetneq W \cap \mathrm{Spec}\, A'$ ならば cl_X を取ることで $Z \subsetneq W$ となる．irreduciblity は cl_X をとっても保たれるから，$W \cap \mathrm{Spec}\, A'$ :: irreducible component in $\mathrm{Spec}\, A'$ は Z の極大性に反する．

■Summarize. $A_T \subseteq A'$ が flat(i) integral[†15] ring extension であることから going up/down thm が成り立つ[†16]ので次元に加えて各素イデアルの height, depth まで一致[†17]．Ch I,Thm1.8b が A_T に対して成り立つ (ii) ので A' に対しても成り立つ．したがって特に以下が成り立つ．ただし $\mathfrak{p}$ は A' の極小素イデアルで，$\mathfrak{q} = A_T \cap \mathfrak{p}$.

$$\begin{array}{ccccc} \dim A_T & = & \mathrm{height}\,\mathfrak{q} & + & \dim \frac{A_T}{\mathfrak{q}} \\ \| & & \| & & \| \\ \dim A' & & \mathrm{height}\,\mathfrak{p} & & \dim \frac{A'}{\mathfrak{p}} \\ & & \| & & \\ & & 0 & & \end{array}$$

すなわち $\dim A_T = \dim \frac{A'}{\mathfrak{p}}$.

∎

注意 Ex3.20.4
Matsumura の用語では, 以上は A' が Equidimensional ring であることを示したことになる．（Eisenbud ではさらに任意の極大イデアルでの局所化が次元を変えないことも要求する．）Eisenbud, Cor18.10 から，A' が Cohen-Macaulay ring であることを示しても以上の命題が得られる．これはちょっと難しい．次の文献が良い資料になる．S. Bouchiba, S. Kabbaj(2002) "Tensor Products of Cohen-Macaulay Rings." `https://arxiv.org/abs/math/0606692`

主張 Ex3.20.5 (2)
$\dim A_T = \dim A$.

(証明)．S の存在は Noether Normalization Theorem から, $k[S] \subseteq A$ が integral ring extension であるような k 上代数的独立な元の集合 $S(\subset A)$ が存在する．Ati-Mac Ex5.3 より，以下は integral ring extension.

$$k[S] \otimes k(T) \subseteq A \otimes k(T)(= A_T \subseteq A \otimes k' = A').$$

よって $\dim k[S] \otimes k(T) = \dim A_T (= \dim A')$.

$Q := \mathrm{Quot}(k[S] \otimes k(T))$ の超越基底は，書いてみれば

$$\{s \otimes 1, 1 \otimes t \mid s \in S, t \in T\}$$

のようなもので，濃度は $\#S + \#T$．この内 $k(T)(\cong k \otimes k(T))$ 上代数的独立な元は $\#S$ 個（有限個）．すなわち $\mathrm{tr.deg.}\, Q/k(T) = \#S$．Ch I, Th1.8a より，

$$\dim A = \#S = \mathrm{tr.deg.}\, Q/k(T) = \dim k[S] \otimes k(T) = \dim A_T.$$

∎

Ex3.21 Spec of D.V. Ring Gives Counterexample for Ex3.20a,d,e.

Ex3.22 Dimension of the Fibres of a Morphism.

Ex3.23 $t(V \times W) = t(V) \times_{\mathrm{Spec}\, k} t(W)$.

[†15] Ati-Mac Ex5.3
[†16] Matsumura Thm9.5
[†17] 次元は going up (Matsumura Ex9.2), height は going down (Matsumura Ex9.8, 9.9), depth は Ati-Mac Prop5.6