Ex8.1 Strengthen Some Results in the Text.

Ex8.2 $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 0$.

X :: variety of dimension n over k, $\mathcal{E}$ :: locally free sheaf of rank $> n$, $V^\# \subset \Gamma(X, \mathcal{E})$ :: k-vector space of global sections which generate $\mathcal{E}$ とする．X :: variety より X :: connected なので $\mathcal{E}$ の rank は X 全体で一定である．$\operatorname{rank} \mathcal{E} = r(> n)$ としておこう．

主張 Ex8.2.1
ある $s \in V$ について次が成立する．

$$^\forall x \in X, \quad s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x.$$

■Convensions and Notations. X の closed point 全体を X^+ と書く．Ex3.14 より，これは dense in X．また，$d = \dim_k V^\#, V = \mathbb{P}_k^{d-1}$ とし，$V^+ = (V^\# - \{0\})/k^*$ を V の closed points と同一視する．この同一視の仕方は Prop7.7 や dual projective space と同じである．$\dim_k V^\# - 1 = \dim V$ に注意．$V^\#$ の subspace も同様に V の subspace とみなす．

■Definition of B, B^+. $B \subseteq X \times_k V$ を次のように置く．

$$B = \bigcap_{s \in V^\#} \operatorname{pr}_1^{-1}(\{x \in X \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}).$$

B は $X \times V$ の closed subscheme である．($\{\}$ 部分が closed であることは Ex2.16 を参照．) B には reduced structure を与えておく．$\operatorname{pr}_1|_B : B \to X$ を p_1 と略す．B の closed points :: B^+ は次のような集合である．

$$B^+ = \{(x, s) \in X^+ \oplus V^+ \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}.$$

■Plot. 主張は，$\operatorname{pr}_2(B) \not\supseteq V^+$ と言い換えられる．(詳細は後ほど．) これには B の次元が V の次元より小さいことを言えば良い．B の次元は Ex3.22 の結果を用いればその fiber :: B_x から計算できる．全ての $x \in X$ について $\dim B_x$ を計算することは難しい．しかし少し妥協して，$x \in X^+$ についての $\dim B_x$ を計算することは出来る．この場合でも Ex3.22c の結果を用いて $\dim B_x$ が計算できる．

■Definition of ϕ_x. $x \in X$ について次の写像を考える．

$$\begin{array}{cccc} \phi_x : & V^\# & \to & \mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \\ & s & \mapsto & s_x \otimes 1 \end{array}$$

これが k-linear map であることは明らか．$k(x) := \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ より $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$．このことと ϕ_x の定義の仕方から，$\ker \phi_x = \{s \in V^\# \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}$．

■ϕ_x for $x \in X^+$. この段落では $x \in X^+$ とする．すると $k(x) = k$ [†1] なので $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x$．また $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$．さらに $V^\#$ :: global generators of $\mathcal{E}$ であるから，ϕ_x は surjective．なので

[†1] X :: variety より，k :: algebraically closed field かつ X :: finite type / k．$A = k[x_1, \ldots, x_n], \mathfrak{a} \subseteq A$ とし，$\mathfrak{m}/\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \subseteq X$ が x に対応する極大イデアルだとする．ここで $\mathfrak{m}$ は A の極大イデアル．$S = A - \mathfrak{m}$ とすると

$$k(x) = \frac{S^{-1}(A/\mathfrak{a})}{S^{-1}(\mathfrak{m}/\mathfrak{a})} \cong S^{-1}\left(\frac{A/\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}\right) \cong S^{-1}(A/\mathfrak{m}).$$

$A/\mathfrak{m} \cong k$ は体だから，これは $k(x) \cong k$．

$x \in X^+$ について $\dim \ker \phi_x$ が分かる．

$$\dim_k \ker \phi_x = \dim_k V^{\#} \otimes_k k(x) - \dim_k \mathcal{E}_x = \dim_k V^{\#} - r.$$

■Dimension of fiber :: $\dim B_x$.　p_1 についての $x \in X^+$ の fiber :: B_x の base space は，Ex3.10 より，$\operatorname{sp} B_x \approx p_1^{-1}(x)$．したがって次が分かる．

$$\operatorname{sp} B_x \cap \operatorname{sp} B^+ \approx p_1^{-1}(x) \cap \operatorname{sp} B^+ = \{x\} \times \ker \phi_x.$$

ここで $\times$ は集合としての直積を表す．よって B_x の次元が分かる[†2]．

$$\dim B_x = \dim_k \ker \phi_x - 1 = \dim_k V^{\#} - r - 1 = \dim V - r.$$

■p_1 :: closed map.　$V \to \operatorname{Spec} k$ は projective であり，$V, \operatorname{Spec} k$ 共に noetherian であるからこの射は proper．よって universally closed である．

$$\begin{tikzcd} X \times_k V \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & V \arrow[d, "\substack{\text{universally}\\ \text{closed}}"] \\ X \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

B :: closed なので B の closed subset は X でも closed．したがって $p_1 = \mathrm{pr}_1|_B$ :: closed map.

■$p_1(B) = X$ or $B = \emptyset$.　$p_1(B) \supseteq X^+$ とする．すると $p_1(B)$ :: closed より $p_1(B) \supseteq \mathrm{cl}_X(X^+) = X$．次に $p_1(B) \not\supseteq X^+$ とする．すると上で述べたこと（全ての $x \in X^+$ について $\dim p_1^{-1}(x)$ が等しいこと）から，結局 $p_1(B) \cap X^+ = \emptyset$ が分かる．$p_1(B)$ が空でないと仮定しよう．すると p_1 :: closed map より，$x \in p_1(B)$ なら $\mathrm{cl}_X(\{x\}) \subseteq p_1(B)$．$\mathrm{cl}_X(\{x\})$ は closed point を含むので矛盾が生じる．よって $p_1(B) \not\supseteq X^+$ ならば $p_1(B) = \emptyset$．これは $B = \emptyset$ を意味し，さらにこれは 0 を除く全ての $V^{\#}$ の元が claim の条件を満たすことを意味する．以下，$B \neq \emptyset$ と仮定する．

■$p_1^{-1}(x)$ :: irreducible.　任意の closed point :: $x \in X^+$ について $p_1^{-1} = (\ker \phi_x - \{0\})/k^*$．これは projective linear space だから irreducible.

■B :: irreducible.　以上から B :: irreducible が分かる．B が二つの閉集合 C_1, C_2 の和であったとすると，$x \in X^+$ について $p_1^{-1}(x)$ は次のように書ける．

$$p_1^{-1}(x) = (C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)) \cup (C_2 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)).$$

これは irreducible だから，$C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ か $C_2 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ に一致する．$x_1, x_2 \in X^+$ について次のようになっていたと仮定しよう．

$$p_1^{-1}(x_1) = C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x), \quad p_1^{-1}(x_2) = C_2 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x).$$

すると，$x_1 \in, x_2 \notin p_1(C_1)$ となる．$p_1(C_2)$ も同様．すなわち $p_1(C_1), p_1(C_2)$ は $p_1(B)(= X)$ 空でないの真の閉集合である．しかし $X = p_1(B) = p_1(C_1) \cup p_1(C_2)$ であり X :: irreducible であるから，これ

[†2] closed subscheme of B :: C について $\dim C = \dim C \cap B^+$ を示す．$C \cap B^+ \subset C$ より $\dim C \geq \dim C \cap B^+$ は明らか．$d = \dim C$ とし，C の irreducible closed subset が成す真の極大上昇鎖をとる: $Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_d$. closed immersion $\Longrightarrow$ finite type に注意すると，Z_i :: finite type/k．なので Ex3.14 より $Z_i \cap B^+$ :: dense in Z_i．したがって $Z_i \cap B^+ = Z_j \cap B^+ \Longrightarrow Z_i = Z_j$ となり，$Z_0 \cap B^+ \subsetneq \cdots \subsetneq Z_d \cap B^+$ は B^+ の irreducible closed subset が成す真の上昇鎖．以上から $\dim C \leq \dim C \cap B^+$ も成り立つ．

はありえない．よって任意の $x \in X^+$ について $p_1^{-1}(x) = C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)$（あるいは $= C_2 \cap ...$）となる．両辺で $\bigcup_{x \in X^+}$ として

$$p_1^{-1}(X^+) = C_1 \cap p_1^{-1}(X^+).$$

$p_1^{-1}(X^+) = (X^+ \times V) \cap B \supset B^+$ であり，B^+ :: dense in B．$B^+ \cap C_1$ :: dense in C_1 も Ex3.14 から得られるので，両辺の B での閉包を取って $B = C_1$．したがって B :: irreducible.

■Dimension of B. B :: integral & finite type/k ($\implies$ variety/k) なので，Ex3.22c から次が成り立つ: $x \in U$ ならば $\dim B_x = \dim B - \dim X$，となる U :: open dense subset in X が存在する．U :: non-empty open subset と X^+ :: dense から，$U \cap X^+ \neq \emptyset$．$x \in X^+$ であるときの及び開集合 $\dim B_x$ が既に分かっているから，$\dim B$ も分かる．

$$\dim B = \dim B_x + \dim X = \dim V - r + n.$$

$r > n$ なので，$\dim B < \dim V$.

■$\mathrm{pr}_2(B) \supseteq V^+ \implies \dim B \geq \dim V$. $\mathrm{pr}_2(B) \supseteq V^+$ としよう．B^+ の場合と同様に $\dim V^+ = \dim V$．ch I, Ex1.10 より，$\dim U = \dim V$ を満たす affine open subset of V :: U がとれる．適当に $\mathrm{pr}_1(B)$ からも affine open subset :: U' をとると，X, V 共に finite type $/k$ だから，ch I, Ex3.15 (Products of Affine Varieties) が使える．よって $\dim U \times U' = \dim U + \dim U' \geq \dim U = \dim V$．$U \times_k U' \subset B$ だから $\dim B \geq \dim V$

■Complete proof of the claim. 今はこれの対偶が成立する．すなわち，$s \in V^+ - \mathrm{pr}_2(B)$ が存在する．この s と任意の $x \in X$ について $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ が成り立つ．

■An exact sequence. Φ を以下で定める．

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{E} \\ & \langle U, \sigma \rangle & \mapsto & \langle U, (s|_U) \cdot \sigma \rangle \end{array}$$

これの $x \in X$ における stalk を見ると，$\Phi_x : \sigma_x \mapsto s_x \cdot \sigma_x$ と成っている．$\mathcal{E}_x \cong \mathcal{O}_x^{\oplus r}$ かつ $\mathcal{O}_x$ :: domain より，$\mathrm{Ann}(\mathcal{E}_x) = 0$．そして $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ から，$s_x \neq 0$．なので Φ_x は，したがって Φ は injective．よって $\mathcal{E}' = \operatorname{coker} \Phi$ とおくと以下は exact sequence.

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 0.$$

■$\mathcal{E}'$ :: locally free. $\mathcal{E}'$ が locally free であることを示そう．Ex5.7b から，任意の点における stalk が free であることを示せば十分．以下，$\mathcal{E}_x = \mathcal{O}_x^{\oplus r}$（$\cong$ でなく $=$）とする．点 $x \in X$ について

$$s_x = (s_x^{(i)})_i \in \mathcal{O}_x^{\oplus r} = \mathcal{E}_x$$

とする．$s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x = \mathfrak{m}_x^{\oplus r}$ から，ある i について $s_x^{(i)} \notin \mathfrak{m}_x$．すなわち $s_x^{(i)}$ :: unit．ここでは $i = 0$ とし，

$$u = (s_x^{(0)})^{-1} s_x = \left(1, s_x^{(2)}(s_x^{(0)})^{-1}, \ldots, s_x^{(r)}(s_x^{(0)})^{-1}\right) \in s_x \mathcal{O}_x$$

と置く．すると $\mathcal{E}'_x \cong \mathcal{E}_x / \operatorname{im} \Phi_x = \mathcal{O}_x^{\oplus r} / s_x \mathcal{O}_x$ は次の写像で $\mathcal{O}_x^{\oplus r-1}$ と同型.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_x^{\oplus r} / s_x \mathcal{O}_x & \to & 0 \oplus \mathcal{O}_x^{\oplus r-1} \\ (t^{(j)})_j \bmod s_x \mathcal{O}_x & \mapsto & (t^{(j)})_j - t^{(0)} u \end{array}$$

well-defined であることは明らか．逆写像は次のもの．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_x^{\oplus r-1} & \to & \mathcal{O}_x^{\oplus r}/s_x\mathcal{O}_x \\ t & \mapsto & (0\oplus t) \bmod s_x\mathcal{O}_x \end{array}$$

(i)　B の別構成.

$d+1=\dim_k V^{\#}$ とし，$\mathcal{V}=(V^{\#})^{\sim}$ とする．$V^{\#}\cong k^{\oplus d+1}$ から $\mathcal{V}$ は $\operatorname{rank}\mathcal{V}=d+1$ の locally free sheaf となる．そして全射 $\mathcal{V}\otimes_k\mathcal{O}_X\to\mathcal{E}$ が $\langle U,s\rangle\otimes\langle U,a\rangle\mapsto\langle U,sa\rangle$ の様に構成できる[†3]．これの ker を $\mathcal{B}$ とおく．

$$0\longrightarrow\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{V}\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow\mathcal{E}\longrightarrow 0$$

構成から $\mathcal{B}$ :: locally free と $\operatorname{rank}\mathcal{B}=d+1-r$ が分かる（？）．双対をとる．（すなわち $\mathscr{H}om(-,\mathcal{O}_X)$ で写す．）

$$0\longrightarrow\check{\mathcal{E}}\longrightarrow\check{\mathcal{V}}\otimes\mathcal{O}_X\longrightarrow\check{\mathcal{B}}\longrightarrow 0$$

全射 $\check{\mathcal{V}}\otimes\mathcal{O}_X\to\check{\mathcal{B}}$ から，injective X-morphism :: $\mathbb{P}(\check{\mathcal{B}})\to\mathbb{P}_k^d\times X$ が誘導される（？）．ここでの $\mathbb{P}(\check{\mathcal{B}})$ が B である（？）．構成の仕方から，$\dim B=\operatorname{rank}\check{\mathcal{B}}-1$.

(ii)　$\mathcal{E}'$ :: locally free の別証明.

任意の点 $x\in X$ における stalk を考える．

$$0\longrightarrow\mathcal{O}_x\xrightarrow{\times s_x}\mathcal{E}_x\longrightarrow\mathcal{E}'_x\longrightarrow 0$$

これを $\otimes_{\mathcal{O}_x}k(x)$ で写し，$k(x)$-module の exact sequence にする．

$$\mathcal{O}_x\otimes k(x)\xrightarrow{\times(s_x\otimes 1)}\mathcal{E}_x\otimes k(x)\longrightarrow\mathcal{E}'_x\otimes k(x)\longrightarrow 0$$

同型で書き換える．

$$k(x)\xrightarrow{\times(s_x)^{-}}\mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x\longrightarrow\mathcal{E}'_x\otimes k(x)\longrightarrow 0$$

ただし $(s_x)^{-}=s_x \bmod \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$．これは $s_x\notin\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ から，0 でない．したがって左の写像は $1\in k(x)$ を非ゼロ元に写す．この exact sequence は $k(x)$-module のものだったから，左の写像は injective．よって次が分かる．

$$\dim_{k(x)}\mathcal{E}'_x\otimes k(x)=\dim_{k(x)}\mathcal{E}_x\otimes k(x)-\dim_{k(x)}k(x)=r-1.$$

すなわち $\dim_{k(x)}\mathcal{E}'_x\otimes k(x)$ は $x\in X$ について定数関数．Ex5.8 より，$\mathcal{E}'$ :: locally free と分かる．

[†3] $\mathcal{O}_X$ が k-module であることは次のように分かる．今，$f:X\to\operatorname{Spec}k$ が存在するので $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}k}\to f^*\mathcal{O}_X$ が存在する．これの adjoint :: $f^{-1}\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}k}\to\mathcal{O}_X$ を考えれば，開集合 $U\subseteq X$ について $\mathcal{O}_X(U)$ が k-module であることが分かる．また，ここで書いた $\mathcal{V}\otimes_k\mathcal{O}_X\to\mathcal{E}$ の定義は presheaf :: $U\mapsto\mathcal{V}(U)\otimes_k\mathcal{O}_X(U)$ からの morphism なので sheafification が必要である．