

Group Schemes

七条 彰紀

2019 年 1 月 12 日

目次

1	Preface	2
2	T -valued Points	2
3	Moduli Functor and Fine/Coarse Moduli Space	4
3.1	Families	4
3.2	Moduli Functor	5
3.3	Fine Moduli Space	6
3.4	Coarse Moduli Space	6
3.5	Properties of Fine / Coarse Moduli Spaces	7
3.6	Pathological behaviour.	7
4	Definition of Group Schemes	8
4.1	Definition	8
4.2	Examples	10
4.3	Action on Scheme	12
5	Categorical/Good/Geometric/Affine GIT Quotients	12
5.1	Categorical Quotient	12
5.2	G -invariant Function	13
5.3	Good and Geometric Quotient.	14
5.4	Affine GIT Quotient	14
5.5	Relations of Quotients.	15
6	Linear Representation of Group Scheme.	15
6.1	Representation	15
6.2	Linear Reductivity	17
6.3	Locally Finite Dimensional / Rational Action.	18
7	Affine GIT Quotient of Variety is Variety Again	18

1 Preface

このノートの想定読者は, [4] の II, §3 までを読んだ, Geometric Invariant Theory と Moduli Problem に興味がある者である. 主な参考文献は [11],[3],[6] である. 大まかな議論の流れは [11] の流れを採用し, 用語などの定義は [11] で述べられているものより一般的なものを [3] と [6] から採る. [11] で使われる定義は素朴すぎるからである. 一般的な定義で概念を導入した後, 特別な場合では [11] での定義と同値になることを確かめる, という方針を採る.

このノートでは, 次の順に定義していく.

1. T -valued point (where $T :: \text{scheme}$),
2. group scheme,
3. fine/corse moduli space,
4. categorical/good/geometric/affine GIT quotient,
5. representation of group (scheme),
6. linearly reductive group,
7. closure equivalence,
8. unstable/semi-stable/stable.

目標とする命題は次のものである.

定理 1.1

$X :: \text{affine scheme}$, $G :: \text{linearly reductive affine group scheme acting on } X$ とする.

- (i) affine GIT quotient of X by $G :: X // G$ は good quotient である.
- (ii) X の stable points を X^s とすると, $X // G$ の制限 $:: X^s / G$ は geometric quotient of X^s by G である.
- (iii) $X // G$ は quotient functor $:: \underline{X}/G$ の最良近似である.
- (iv) k を体とする. X が affine variety ならば $X // G$ もそうである.

Notation

$S :: \text{scheme}$ 上の scheme と S -morphism が成す圏を \mathbf{Sch}/S で表す. これは slice category の一般的な notation から来ている.

affine scheme $:: \text{Spec } R$ は, 時々 R と略す.

affine scheme over a ring $R :: X$ の affine coordinate ring を $R[X]$ と書く. 特に $k[G]$ は群環ではないことに注意. 群環は kG と書く.

2 T -valued Points

圏論で言う “generalized point” の概念を, 名前を変えて用いる.

定義 2.1

- (i) $X, T \in \mathbf{Sch}/S$ に対し, $\underline{X}(T) = \text{Hom}_{\mathbf{Sch}/S}(T, X)$ を X の T -valued points と呼ぶ. $T = \text{Spec } R$ と書けるときは $\underline{X}(T)$ を $\underline{X}(R)$ と書く. したがって \underline{X} は \mathbf{Sch}/S からの covariant functor と見ることも, k -algebra の圏からの contravariant functor と見ることも出来る. この関手 \underline{X} は functor of points と呼ばれる.
- (ii) 体 k 上の scheme $:: X$ ($S = \text{Spec } k, X \in \mathbf{Sch}/S$) と field extension $:: k \subseteq K$ について, $\underline{X}(K)$ を X の K -rational points と呼ぶ.
- (iii) morphism $:: h : X \rightarrow Y$ について自然変換 $\underline{h} : \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ は $\phi \mapsto h \circ \phi$ のように射を写す.

注意 2.2

\mathbf{Sch} は locally small category である. すなわち, 任意の $X, T \in \mathbf{Sch}$ について $\underline{X}(T)$ は集合である. これを確認するために, $X, Y \in \mathbf{Sch}$ を任意にとり, $\text{Hom}(X, Y)$ の濃度がある濃度で抑えられることを見よう. 射 $X \rightarrow Y$ の作られ方に沿って考える.

- (1) base space の間の写像 $f : \text{sp } X \rightarrow \text{sp } Y$ をとる. このような写像全体の濃度は高々 $|\text{sp } Y|^{|\text{sp } X|}$.
- (2) $|Y|$ の開集合 U をとる. 開集合全体の濃度は高々 $2^{|\text{sp } Y|}$.
- (3) 写像 $f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow (f_* \mathcal{O}_X)(U)$ を定める. このような写像全体の濃度は高々 $|(f_* \mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$.

したがって $\text{Hom}(X, Y)$ の濃度は高々

$$|\text{sp } Y|^{|\text{sp } X|} \times \prod_{U \in 2^{\text{sp } Y}} |(f_* \mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$$

となる. 濃度の上限が存在する (すなわち, ある集合への単射を持つ) から, $\text{Hom}(X, Y)$ は集合である.

注意 2.3

上の注意から, Yoneda Lemma が成立する. したがって自然変換 $\underline{G} \rightarrow \underline{H}$ と射 $G \rightarrow H$ が一対一対応する. このため, scheme の間の射についての議論と functor of points の間の射の議論は (ある程度) 互いに翻訳することが出来る.

注意 2.4

K -rational point については, $\underline{X}(K) = \{x \in X \mid k(x) \subseteq K\}$ とおく定義もある. ここで $k(x)$ は x での residue field である. しかし [4] Chapter.2 Ex2.7 から分かる通り, この二つの定義は翻訳が出来る. すなわち, $k(x) \subseteq K$ を満たす $x \in X$ と, $\text{Spec } k\text{-morphisms} :: \text{Spec } K \rightarrow X$ は一対一に対応する.

また $X :: \text{finite type } /k$ であるとき, closed point $:: x \in X$ について, $k(x)$ は k の有限次代数拡大体である. これは Zariski's Lemma の帰結である. したがって $\underline{X}(\bar{k})$ は X の closed point 全体に対応する. ただし \bar{k} は k の代数閉包である.

例 2.5

\mathbb{R} 上の affine scheme $X = \text{Spec } \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$ の \mathbb{R} -rational point と \mathbb{C} -rational point を考えよう.

$\text{Spec } \mathbb{R} \rightarrow X$ の射は環準同型 $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2) \rightarrow \mathbb{R}$ と一対一に対応する. しかし直ちに分かる通り, このような環準同型は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (0, 0)$$

で定まるものしか存在し得ない. ここで $\bar{x} = x \bmod (x^2 + y^2), \bar{y} = y \bmod (x^2 + y^2)$ と置いた. よって $\underline{X}(\mathbb{R})$

は 1 元集合. また, この環準同型が誘導する $\mathrm{Spec} R \rightarrow X$ の射は 1 点空間 $\mathrm{Spec} \mathbb{R}$ を原点へ写す.

一方, 環準同型 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \rightarrow \mathbb{C}$ は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (a, \pm ia)$$

(ここで $i = \sqrt{-1}, a \in \mathbb{R}$) で定まることが分かる. すなわち, $\mathcal{Z}_a(x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ の点に対応して, $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \rightarrow \mathbb{C}$ の環準同型が定まる. 逆の対応も明らか. よって $\underline{X}(\mathbb{C})$ の元は $\mathcal{Z}_a(x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ の点に対応している.

例 2.6

体 k 上の affine variety $X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ を多項式系 $F_1, \dots, F_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ で定まるものとする. すると k 上の環 R に対して, 次の集合が考えられる.

$$V_R = \{p = (r_1, \dots, r_n) \in R^{\oplus n} \mid F_1(p) = \dots = F_n(p) = 0\}.$$

この集合の元も R -value point と呼ばれる. ([11] ではこちらのみを R -value point と呼んでいる. 実際, こちらのほうが字句 “value point” の意味が分かりやすいだろう.) V_R の点が $\underline{X}(R)$ の元と一対一に対応することを見よう.

X の affine coordinate ring を $A = k[x_1, \dots, x_n]/(F_1, \dots, F_n)$ とし, $\bar{x}_i = x_i \bmod (F_1, \dots, F_n)$ ($i = 1, \dots, n$) とおく. $\phi: A \rightarrow R$ を考えてみると, これは次のようにして定まる.

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \mapsto (r_1, \dots, r_n) \in V_R.$$

すなわち, V_R の点に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ の元が定まる. 逆の対応は明らか. そして, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ が $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/\mathrm{Spec} k}(\mathrm{Spec} R, X) = \underline{X}(R)$ と一対一対応することはよく知られている.

3 Moduli Functor and Fine/Corse Moduli Space

A を代数幾何学的対象の集合とし, \sim を A 中の同値関係とする. “naive moduli problem” は, M の点と A/\sim の元 (同値類) が一対一対応するような scheme M を見つけよ, という問題である. 更に A/\sim の元が「連続的に変化」する様子も「エンコード」しているような M を見つけよ, という問題を “extended moduli problem” と呼ぶ (正確な定義は [6] §2.2). “extended moduli problem” を定式化するには, 「連続的に変化」と「エンコード」を定式化しなくてはならない. 前者の為に “family” が定義され, 後者の為に “moduli functor” が定義される. すると「エンコード」は関手の表現であると理解できる.

3.1 Families

定義 3.1

\mathcal{P} を集合のクラス^{†1} とする. 集合 B について, B の構造と整合的な構造を持った集合 \mathcal{F} と全射写像 $\pi: \mathcal{F} \rightarrow B$ の組が \mathcal{P} の B 上の **family** であるとは, 各 $b \in B$ について集合 $\pi^{-1}(b) \subseteq \mathcal{F}$ が \mathcal{P} に属するという事.

^{†1} 集合 X を変数とする述語 $X \in \mathcal{C}$ の意味を「 X はある条件を満たす対象である」と定義した, と考えて良い. 「属す」の意味は集合と同様に定める.

「 B の構造と整合的な構造」というのは、例えば、 S が位相空間であって写像 $\mathcal{F} \rightarrow S$ を連続にするような位相が \mathcal{F} に入っている、ということである。family の構造は場合毎に明示されなくてはならない。

用語 “family” を厳密に定義しているものは全くと言っていいほど無いが、ここでは Renzo のノート^{†2} の定義を参考にした。“family” を上のように解釈して不整合が生じたことは、私の経験の中ではない。

注意 3.2

moduli theory 以外で “family of \mathcal{C} ” と言えば、単に \mathcal{C} の部分集合であろう。“family parametrized by S ” の様に言えば、 S -indexed family (or set) のことを想像するであろう。しかし S -indexed family $:: \mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ は $S \rightarrow \mathcal{F}$ という写像で定まるから、ここでの “family” とは写像の向きが逆である。

上の定義を無心に読めば分かる通り、「 \mathcal{C} の family $:: \mathcal{F}$ 」と言った時には、 \mathcal{C} に属するのは \mathcal{F} の部分集合である。属するのは（一般に） \mathcal{F} の元ではない。また \mathcal{F} は \mathcal{C} の元の和集合とみなせる。（正確には \mathcal{C} の元を S に沿って並べたものである。）

例 3.3

$X, B :: \text{scheme}$, $f: X \rightarrow B :: \text{morphism of schemes}$ をとる。 X は f によって B 上の family となる。射の fibre として実現される、scheme（例えば smooth curve）の family は deformation theory の対象である。

例 3.4

k を体、 S を適当な scheme とする。 \mathbb{A}_k^2 の原点を通る直線の S 上の family として、line bundle $:: \mathcal{L} \subset \mathbb{A}^2 \times_k S$ を考えることが出来る。 $\mathcal{L} \rightarrow S$ は射影写像で与えられる。同様に \mathbb{A}^n の r 次元線形空間の S 上の family は r 次元 vector bundle $:: \mathcal{E} \subset \mathbb{A}^n \times S$ である。

例 3.5

k を適当な体とし、 \mathbb{P}_k^1 の点 O_i ($i = 1, 2, 3$) を順に $(0:1), (1:0), (1:1)$ とする。この時、 $PGL_2(k)$ は次の全単射で \mathbb{P}_k^1 の自己同型写像の $(\mathbb{P}_k^1)^{\oplus 3}$ 上の family になる。

$$\begin{aligned} \pi: PGL_2(k) &\rightarrow (\mathbb{P}_k^1)^{\oplus 3} \\ \phi &\mapsto (\phi^{-1}(O_i))_{i=1}^3. \end{aligned}$$

3.2 Moduli Functor

以下の定義は [7] など、Moduli 問題に関する殆どの入門書で述べられている。

定義 3.6

contravariant functor $:: \mathcal{M}: \mathbf{Sch} \rightarrow \mathbf{Set}$ が **moduli functor**（または functor of families）であるとは、各 scheme $:: S$ に対して、 $\mathcal{M}(S)$ が代数幾何学的対象の S 上の family 達を family の間の同値関係で割ったもの（“{families over S } / \sim_S ” in [6]）である、ということ。

moduli functor の定義はあえて曖昧に述べられている。これは「出来る限り多くのものを moduli theory の範疇に取り込みたい」という思いがあるからである ([7])。

^{†2} <http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topics10/Notes.pdf>

3.3 Fine Moduli Space

定義 3.7

scheme $:: M$ が \mathcal{M} の moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるとは, M が \mathcal{M} を表現する (represent) ということである. 言い換えれば, 関手 $\underline{M} = \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, M)$ が \mathcal{M} と自然同型, ということである.

注意 3.8

moduli functor $:: \mathcal{M}$ の fine moduli space $:: M$ が存在したとしよう. この時, 任意の $X \in \mathbf{Sch}$ について $\mathcal{M}(X) \cong \underline{M}(X)$. これは X 上の代数幾何学的対象が成す同値類が M の X -value point と一対一に対応していることを意味する. したがって, \mathcal{M} が指定する代数幾何学的対象の集合の同値類を M が「パラメトライズ」していると考えられる.

例 3.9 ([6], Exercise 2.20)

例 3.4 で述べた \mathbb{A}^n の r 次元線形空間の S 上の family (vector bundle over S) の集合を, vector bundle の同型で割った集合を $\mathcal{M}(S)$ とする. $f : T \rightarrow S$ に対する $\mathcal{M}(f)$ は, vector bundle への post-composition で自然に定まる.

この moduli functor は fine moduli space を持つことが知られている. これが Grassmannian variety である.

残念ながら, 多くの moduli functor に対して fine moduli space が存在し得ない. (このあたりの議論は [7] p.3 や [5] p.150 にある. この節の終わりでも理由と例を示す.) そのため Mumford は (おそらく GIT 本で) fine moduli space の代わりとして coarse moduli space を提唱した.

3.4 Coarse Moduli Space

定義 3.10

moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対して, 以下を満たす scheme $:: M$ を \mathcal{M} の coarse moduli space と呼ぶ.

- (i) 自然変換 $\eta : \mathcal{M} \rightarrow \underline{M}$ が存在する.
- (ii) η は自然変換 $\mathcal{M} \rightarrow \underline{\tilde{M}}$ の中で最も普遍的である:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M} & \\ \forall \tau \swarrow & & \searrow \eta \\ \underline{\tilde{M}} & \xrightarrow[\exists! f]{} & \underline{M} \end{array}$$

この図式で $\tilde{M} :: \text{scheme}$, $f : \tilde{M} \rightarrow M$.

- (iii) 任意の代数閉体 $:: k$ について $\eta_{\text{Spec } k} : \mathcal{M}(\text{Spec } k) \rightarrow \underline{M}(\text{Spec } k)$ は全単射である.

例 3.11

楕円曲線の j -不変量. 後に示すとおり, これは fine でない.

3.5 Properties of Fine / Coarse Moduli Spaces

命題 3.12

moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対して coarse moduli space は同型を除いて一意である.

命題 3.13 ([5], Prop23.6)

scheme $:: M$ が moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるならば, M は \mathcal{M} の coarse moduli space でもある.

命題 3.14 ([5], Prop23.5)

$S ::$ scheme の open subscheme と包含写像が成す圏を **OpenSubSch**(S) と書くことにする. これは **Sch**/ S の full subcategory である.

moduli functor $:: \mathcal{M}$ が fine moduli space をもつならば, 任意の $S ::$ scheme について $\mathcal{M}|_{\text{OpenSubSch}(S)}$ は S 上の sheaf である.

(証明). $M ::$ fine moduli scheme for \mathcal{M} とし, $S ::$ scheme を固定する. $\mathcal{F} := \underline{M}|_{\text{OpenSubSch}(S)}$ は開集合系からの contravariant functor だから presheaf であることは定義から従う. また \mathcal{F} の元は scheme の morphism である. このことから sheaf の公理 Identity Axiom と Glueability Axiom を満たすことも簡単に分かる. (一応, [4] II, Thm3.3 Step3 を参考に挙げる.) ■

3.6 Pathological behaviour.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} \rightarrow S$ を fiber of morphism で実現される family だとする. (したがって \mathcal{F}, \mathcal{G} は scheme である.) \mathcal{F}, \mathcal{G} の同値関係を, scheme としての同型で定めよう. M を coarse moduli space, η を moduli functor から \underline{M} への自然変換だとする.

$\eta_S(\mathcal{F}) : S \rightarrow M$ は \mathcal{F} の fiber を M の点に対応させる. (添字の S は以降略す.)

$$\mathcal{F} \longrightarrow S \xrightarrow{\eta(\mathcal{F})} M$$

$$\mathcal{F}_s \longmapsto s \longmapsto m$$

$\eta(\mathcal{G}) : S \rightarrow M$ についても同様である. したがって \mathcal{F}, \mathcal{G} が fiber 毎に同型であれば, $\eta(\mathcal{F}) = \eta(\mathcal{G})$ となる.

η は全単射であるから, これは $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ を意味する. しかし, 対象が非自明な自己同型写像をもつときにはこのようにならない family が構成できてしまう.

例 3.15 ([5] §26)

$S = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$ とする. S 上の楕円曲線の family $:: \mathcal{F}$ を次で定める.

$$\mathcal{F} = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - s) \subseteq \mathbb{A}_k^2 \times_k S \xrightarrow{\text{pr}} S.$$

$\eta(\mathcal{F})$ を j 不変量を用いて $s \mapsto j(\mathcal{F}_s)$ で定める. j 不変量が coarse moduli であることは既に見た. 計算すると分かる通り, $\eta(\mathcal{F})$ は定値写像である. したがって \mathcal{F} のそれぞれの fiber は互いに同型である. 一方, $\mathcal{F}' = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - 1) \times S$ について同様に $\eta(\mathcal{F}')$ を定めると, これも自明に定値写像である. しかし, $\mathcal{F} \not\cong \mathcal{F}'$

であることが示せる (TODO). よって j 不変量は fine moduli にならない. fine/coarse moduli の一意性から, 楕円曲線は fine moduli を持たない.

それぞれの fiber が互いに同型である (i.e. $\forall t, s \in S, \mathcal{F}_t \cong \mathcal{F}_s$) ような family を fiberwise trivial family, $X \times S$ の形に書ける family を trivial family と呼ぶ. 一般に, fine moduli space が存在するならば, fiberwise trivial family は trivial family である ([5] Remark23.1.1).

また, coarse moduli space さえ持ち得ない moduli functor もある. これは jump phenomenon と呼ばれる性質を持つ family が存在する場合や, あるいは moduli functor が “unbounded” であるときに起きる. このノートでは深追いしない. 詳しくは [6] §2.4 を参照せよ.

4 Definition of Group Schemes

family の同値関係は, しばしば群作用の軌道分解で与えられる. 例えば \mathbb{P}_k^n の自己同型は $PGL_n(k)$ という群である. そのため moduli 問題の理解のために, group scheme を知ることは不可欠である.

4.1 Definition

group scheme は圏論的に定義される. まずは圏論の言葉で述べよう.

定義 4.1

$S ::$ scheme とする. $G ::$ scheme over S が group scheme (over S) であるとは, G が \mathbf{Sch}/S における group object であるということである. group scheme over S と homomorphisms が成す圏を $\mathbf{GrpSch}(S)$ と書く.

group object と homomorphisms の定義を展開すれば次のよう.

定義 4.2

- (i) $S ::$ scheme とする. $G ::$ scheme over S と次の 3 つの射から成る 4 つ組が **group scheme (over S)** であるとは, 任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について $\underline{G}(T)$ の群構造が誘導されるということである.

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\rightarrow G && \text{multiplication} \\ \epsilon : S &\rightarrow G && \text{identity section} \\ \iota : G &\rightarrow G && \text{inverse} \end{aligned}$$

μ は group law とも呼ばれる. なお, $x, y \in \underline{G}(T)$ の積 $x * y \in \underline{G}(T)$ は $\underline{\mu}(\langle x, y \rangle)$, すなわち次の射である.

$$x * y : T \xrightarrow{\langle x, y \rangle} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

ここで $\langle x, y \rangle$ は $G \xleftarrow{x} T \xrightarrow{y} G$ から product の普遍性により誘導される射である. 単位元は $\epsilon! : T \rightarrow S \xrightarrow{\epsilon} G$ ^{†3}, $x \in \underline{G}(T)$ の逆元は $\underline{\iota}(x) = \iota \circ x$ である.

- (ii) group scheme over $S :: G, H$ の間の射 $h : G \rightarrow H$ が **homomorphism** であるとは, 任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について $\underline{h}(T) : \underline{G}(T) \rightarrow \underline{H}(T)$ が群準同型であることである.

^{†3} この射は $T \rightarrow G \rightarrow S \rightarrow G$ と書いても同じである.

(iii) group schemes over S とその間の homomorphisms が成す圏を $\mathbf{GrpSch}(S)$ とする.

しかしながら, ここで述べた group scheme の定義は実用に向かない. 定義にどこの馬の骨とも知れない scheme $:: T$ が現れるからである. 以上の定義は以下と同値であることを言うておこう.

命題 4.3 ([1], p.76) (i) $S :: \text{scheme}$, $G :: \text{scheme over } S$ とし, 更に 3 つの射 μ, ϵ, ι が与えられているとする.

$$\begin{aligned}\mu &: G \times G \rightarrow G \\ \epsilon &: S \rightarrow G \\ \iota &: G \rightarrow G\end{aligned}$$

この時, $(G, \mu, \epsilon, \iota)$ が group scheme であることと, 以下の 3 つの可換図式が成立することは同値である.

$$\begin{array}{ccc} (G \times G) \times G & \xrightarrow{\cong} & G \times (G \times G) \\ \mu \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \times \mu \\ G \times G & & G \times G \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & G & \end{array} \quad (1)$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\langle \epsilon!, \text{id} \rangle} & G \times G \\ \langle \text{id}, \epsilon! \rangle \downarrow & \searrow \text{id} & \downarrow \mu \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G \end{array} \quad (2)$$

$$\begin{array}{ccccc} G \times G & \xleftarrow{\langle \text{id}, \text{id} \rangle} & G & \xrightarrow{\langle \text{id}, \text{id} \rangle} & G \times G \\ \text{id} \times \iota \downarrow & & \epsilon! \downarrow & & \downarrow \iota \times \text{id} \\ G \times G & \xrightarrow{\mu} & G & \xleftarrow{\mu} & G \times G \end{array} \quad (3)$$

上から順に, 結合律, 単位元の存在, 逆元の存在に対応する.

(ii) group scheme over $S :: G, H$ と, 射 $h : G \rightarrow H$ が与えられているとする. h が homomorphism であ

ることは、以下の3つの可換図式が成立することは同値である。

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{h \times h} & H \times H \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ G & \xrightarrow{h} & H \end{array} \quad (4)$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{h} & H \\ \epsilon \uparrow & \nearrow \epsilon & \\ S & & \end{array} \quad (5)$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{h} & H \\ \iota \downarrow & & \downarrow \iota \\ G & \xrightarrow{h} & H \end{array} \quad (6)$$

上から順に、積の保存、単位元の保存、逆元の保存に対応する。

(証明). 結合律のみについて証明する. 他は同様の手順で証明できる. まず以下が可換であることを仮定する.

$$\begin{array}{ccc} (G \times G) \times G & \xrightarrow{\cong} & G \times (G \times G) \\ \mu \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \times \mu \\ G \times G & & G \times G \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & G & \end{array} \quad (\#)$$

Yoneda embedding で写して次の可換図式を得る. $\underline{G}(T) \times \underline{G}(T) \cong \underline{G} \times_S \underline{G}(T)$ に注意せよ.

$$\begin{array}{ccc} (G \times G) \times G & \xrightarrow{\cong} & G \times (G \times G) \\ \mu \times \text{id} \downarrow & & \downarrow \text{id} \times \mu \\ G \times G & & G \times G \\ & \searrow \mu & \swarrow \mu \\ & G & \end{array} \quad (\#)$$

これは任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について, $\underline{G}(T)$ 上に誘導される二項演算 $\underline{\mu}(\langle -, - \rangle)$ が結合律を満たすことを意味する.

逆に, この二項演算が結合律を満たすことを仮定すると $(\#)$ が可換である. $(\#)$ は $(\#)$ の Yoneda embedding なので $(\#)$ は可換. ■

4.2 Examples

以下の例では k を適当な体とし, k 上の affine group scheme を定義する.

例 4.4 (\mathbb{G}_a)

finitely generated k -algebra $:: A = k[t]$ と次の3つの k -linear map から, k 上の group scheme $:: \mathbb{G}_a$ &

μ, ϵ, ι が誘導される.

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} : A &\rightarrow A \otimes_k A; & t &\mapsto (t \otimes 1) + (1 \otimes t) \\ \tilde{\epsilon} : A &\rightarrow k; & t &\mapsto 0 \\ \tilde{\iota} : A &\rightarrow A; & t &\mapsto -t\end{aligned}$$

群構造を無視すれば $\mathbb{G}_a = \mathbb{A}_k^1$. この \mathbb{G}_a は additive group と呼ばれる.

$t_1 = t \otimes 1, t_2 = 1 \otimes t$ とすると, $A \otimes A \cong k[t_1, t_2]$ となる. したがって $f \in A$ について $\tilde{\mu}(f)(t_1, t_2) \in k[t_1, t_2]$ とみなせる. そして $k[t]$ の algebra としての和は $\tilde{\mu}(f)(t_1, t_2) = f(t_1 + t_2)$ のように co-algebra に反映されている. 単位元と逆元は $\tilde{\epsilon}(f)(t) = f(1), \tilde{\iota}(f)(t) = f(-t)$ のように反映されている.

\mathbb{G}_a に備わった群構造は closed point $:: (a, b) \in \mathbb{A}^2$ を $a + b \in \mathbb{A}^1$ に写す. これを確かめておこう. $\mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^1 \cong \mathbb{A}_k^2$ の \bar{k} -rational point $:: (a, b)$ ^{†4} は極大イデアル

$$\mathfrak{p} = (t_1 - a, t_2 - b) = \{f \in k[t_1, t_2] \mid f(a, b) = 0\}$$

に対応する. したがって $\mu(\mathfrak{p}) = \tilde{\mu}^{-1}(\mathfrak{p})$ は次のよう.

$$\tilde{\mu}^{-1}(\mathfrak{p}) = \{g \in A = k[t] \mid \tilde{\mu}(g)(a, b) = g(a + b) = 0\}.$$

これは $a + b$ に対応する極大イデアル $(t - (a + b))$ に他ならない.

例 4.5

finitely generated k -algebra $:: A = k[t, t^{-1}]$ と次の 3 つの k -linear map から, k 上の group scheme $:: \mathbb{G}_m$ & μ, ϵ, ι が誘導される.

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} : A &\rightarrow A \otimes_k A; & t &\mapsto (t \otimes 1) \cdot (1 \otimes t) \\ \tilde{\epsilon} : A &\rightarrow k; & t &\mapsto 1 \\ \tilde{\iota} : A &\rightarrow A; & t &\mapsto -t\end{aligned}$$

群構造を無視すれば $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$.

こちらも $\tilde{\mu}(f)(t_1, t_2) = f(t_1 t_2)$ の様に積が入っている. $\mu : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ が \bar{k} -rational point $:: (a, b) \in \mathbb{A}^2 - \{(a, b) \mid ab = 0\}$ を $ab \in \mathbb{A}^1$ に写すことは \mathbb{G}_a の場合と同様である.

例 4.6

正整数 n に対し finitely generated k -algebra $:: A = k[t_{ij}]_{i,j=1}^n [\det^{-1}]$ とおく. ここで \det は不定元が成す n 次正方行列 $T = [t_{ij}]_{i,j=1}^n$ の determinant である. A と次の 3 つの k -linear map から, k 上の group scheme $:: GL_n$ & μ, ϵ, ι が誘導される.

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} : A &\rightarrow A \otimes_k A; & T &\mapsto (T \otimes 1) \cdot (1 \otimes T) \\ \tilde{\epsilon} : A &\rightarrow k; & T &\mapsto I \\ \tilde{\iota} : A &\rightarrow A; & T &\mapsto T^{-1}\end{aligned}$$

I は n 次単位行列. ここで $\tilde{\iota} : T \mapsto I$ は $(T$ の (i, j) 成分) \mapsto $(I$ の (i, j) 成分) という意味である. $\tilde{\mu}, \tilde{\iota}$ の定義も同様である.

^{†4} \bar{k} は k の代数閉体. rational point についての注意で触れたとおり, variety の \bar{k} -rational point 全体は closed point 全体と一致するのであった.

$T_1 = T \otimes 1 = \left[t_{ij} \otimes 1 \right]_{i,j=1}^n$, $T_2 = 1 \otimes T = \left[1 \otimes t_{ij} \right]_{i,j=1}^n$ とおけば, $f \in k[t_{ij}]$ について $\tilde{\mu}(f)(T_1, T_2) = f(T_1 T_2)$ となっている. $\mu : GL_n \times GL_n \rightarrow GL_n$ が \bar{k} -rational point $:: (M, N) \in GL_n \times GL_n$ を $MN \in GL_n$ へ写すことは \mathbb{G}_a での議論と同様である. $n = 1$ の時 $GL_n = \mathbb{G}_m$ であることに留意せよ.

3つの例に現れた準同型 $\tilde{\mu}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\iota}$ はそれぞれ co-multiplication, co-unit, co-inversion と呼ばれる. この3つの準同型によってそれぞれの k -finitely generated に Hopf algebra ^{†5} の構造が入る. 一般に affine group scheme と Hopf algebra が一対一に対応する ([8] II, Thm5.1).

定理 4.7 ([6] Thm3.9)

Any affine group scheme over a field is a linear algebraic group (i.e. subgroup of GL_n for some n).

4.3 Action on Scheme

最後に作用の定義を述べる.

定義 4.8

scheme/ S $:: X$ と group scheme/ S $:: G$ が与えられたとする. G の X への **(left) action** とは, 次を満たす射 $\alpha : G \times_S X \rightarrow X$ である. すなわち, 任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について, α は群 $\underline{G}(T)$ から集合 $\underline{X}(T)$ への作用を誘導する.

なお, $g \in \underline{G}(T)$ を $x \in \underline{X}(T)$ に作用させた $g \cdot x \in \underline{X}(T)$ は $\alpha(\langle g, x \rangle)$, すなわち

$$T \xrightarrow{\langle g, x \rangle} G \times_S X \xrightarrow{\alpha} X$$

である. ここで $\langle g, x \rangle$ は $G \xleftarrow{g} T \xrightarrow{x} X$ から product の普遍性により誘導される射である.

action $:: G \times X \rightarrow X$ のことを $G \curvearrowright X$ と表す. $g \in G$ を $x \in X$ に作用させたものをしばしば $g \cdot x$ と書く. $Gx := \alpha(G \times \{x\})$ と置き, これを点 x の **orbit** と呼ぶ.

5 Categorical/Good/Geometric/Affine GIT Quotients

以下, **scheme** $:: S$, **scheme**/ S $:: X$, **group scheme**/ S $:: G$, **action** $:: \alpha : G \curvearrowright X$ が与えられているとする.

5.1 Categorical Quotient

圏論的立場から「scheme の group scheme による quotient」と呼べる scheme は, categorical quotient であろう.

定義 5.1 (i) scheme の射 $:: q : X \rightarrow Y$ は, $q \circ \alpha = q \circ \text{pr}_X : G \times X \rightarrow Y$ であるとき, **G -invariant morphism** と呼ばれる. この条件は次のように翻訳できる: 任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ と任意の $g \in \underline{G}(T), x \in \underline{X}(T)$ について,

$$q(\alpha \circ \langle g, x \rangle) = q(g \cdot x) = q(x) = q(\text{pr}_X \circ \langle g, x \rangle).$$

^{†5} algebra, co-algebra の構造をもつ finitely generated k -module であって antipode と呼ばれる自己準同型射を備えるもの.

(ii) scheme の射 $q : X \rightarrow Y$ は, q が $\alpha, \text{pr}_X : G \times X \rightrightarrows X$ の coequalizer であるとき, X の G による **categorical quotient** と呼ばれる. 言い換えれば, X からの G -invariant morphism として普遍的なものが q である.

すぐに分かる通り, この定義は **Sch** を「finite product を持つ category」に書き換えても良い. この意味で, categorical quotient は最も普遍的な「群作用での商」を定義していると言える.

注意 5.2

categorical quotient は普遍性を持つものと定義されていることから分かる通り, 同型を除いて高々一つしか無い. 存在するかどうかは分からない.

さて, categorical quotient は確かに「商らしい」が, 幾何学的にも「商らしい」と言えるとは限らない.

例 5.3

$\mathbb{P}_k^1, \mathbb{A}_k^1$ の \mathbb{G}_m による群作用の商.

そのために, 他の意味で「商らしい商」もいくつか定義する. どういった意味で「商らしい」かによって定義は異なり, 以後は「商らしい商」が存在するかどうか・構成できるかどうか問題に成る. 後に示すが, 以下の「商らしい商」はいずれも categorical quotient である. なので一つ「商らしい商」が存在すれば, その商はより弱い意味でも「商らしい」ことに注意せよ.

5.2 G -invariant Function

定義 5.4 ([3])

$U :: \text{open in } X$ について, $f \in \mathcal{O}_X(U)$ は

$$\alpha^\#(f)|_{G \times_S U} = \text{pr}_X^\#(f) \in \mathcal{O}_{G \times_S X}(G \times_S U)$$

が成り立つとき **G -invariant function** と呼ばれる. ここで, $\alpha^{-1}(U) \supseteq G \times_S U = \text{pr}_X^{-1}(U)$ であるために左辺に restriction が必要であることに注意.

$q : X \rightarrow Y$ に対して presheaf $:: (q_* \mathcal{O}_X)^G$ を次で定める. $V :: \text{open in } Y$ について

$$(q_* \mathcal{O}_X)^G(V) = \{f \in \mathcal{O}_X(q^{-1}(V)) \mid f :: G\text{-invariant function}\} \subseteq q_* \mathcal{O}_X.$$

人によっては $q_*(\mathcal{O}_X^G)$ という記号のほうが自然だと感じるかも知れない. 記号は恣意的なものだから, 私としてはあなたがどちらの記号を使おうが構わないが, $(q_* \mathcal{O}_X)^G$ の方が昔からある記号である.

主張 5.5

$(q_* \mathcal{O}_X)^G$ は sheaf である.

(証明). sub-presheaf であることは明らか. また $(q_* \mathcal{O}_X)^G$ が identity axiom を満たすことは sub-presheaf であることから従う. なので gluability axiom を満たすことを示そう.

$U :: \text{open in } X$ をとり, $U = \bigcup_i U_i$ をその open cover とする. section 達 $t_i \in (\mathcal{O}_X^G)(U_i)$ が次を満たすようにしよう.

$$\forall_{i,j}, \quad t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j). \quad (@)$$

この時, $t|_{U_i} = t_i$ を満たす $t \in \mathcal{O}_X(U)$ が存在する. $t \in \mathcal{O}_X^G(U)$ を示したい. ここで現れる記号 $(q_*\mathcal{O}_X)^G$ は, 人によっては $q_*(\mathcal{O}_X^G)$ の方が受け入れやすいかも知れない. というのも, $(q_*\mathcal{O}_X)^G$ が表すものは「 Y 上の function であって G -invariant であるもの」であるように読めるからである. 実際には $V_i = \text{pr}_X^{-1}(U_i) = G \times U_i$ とおく. 上の条件 (④) で $t|_{U_i} = t_i$ と, sheaf morphism が restriction map と可換であることを用いる.

$$\forall i, j, \quad \alpha^\#(t)|_{V_i \cap V_j} = \alpha^\#(t|_{U_i \cap U_j})|_{V_i \cap V_j} = \text{pr}_X^\#(t|_{U_i \cap U_j}) = \text{pr}_X^\#(t)|_{V_i \cap V_j} \in \mathcal{O}_{G \times X}(V_i \cap V_j).$$

$\mathcal{O}_{G \times X}$ は sheaf だから, identity axiom を満たす. よって $\alpha^\#(t) = \text{pr}_X^\#(t)$, すなわち $t \in \mathcal{O}_X^G(U)$. ■

注意 5.6

affine scheme :: $X := \text{Spec } A$ の structure sheaf の元は, morphism :: $U \rightarrow \mathbb{A}_{\text{Quot}(A)}^1 \in \mathcal{O}_X(U)$ とみなすことが出来る. そこで G -invariant functions :: $(\mathcal{O}_X(U))^G$ を $\mathcal{O}_X(U)$ に属す G -invariant morphism の全体と定めることも出来る.

5.3 Good and Geometric Quotient.

定義 5.7 ([6])

scheme morphism :: $q : X \rightarrow Y$ が X の G による **good quotient** であるとは, 以下の条件が満たされるということ.

- (i) q :: G -invariant.
- (ii) q :: surjective.
- (iii) q :: affine morphism ^{†6}.
- (iv) $(q_*\mathcal{O}_X)^G \cong \mathcal{O}_Y$.
- (v) W_1, W_2 :: disjoint G -invariant closed subsets of X について, $\text{cl}_Y(q(W_1)), \text{cl}_Y(q(W_2))$:: disjoint.

q :: surjective と q :: affine の 2 条件は, GIT [2] でなく [10] で導入された. 実際, 次の命題はこの 2 条件がなくとも成立する. しかし surjectivity は quotient を family として利用するために望ましい性質である. (affineness についてはよくわからない. しかし我々が扱う範囲で成立する.)

命題 5.8

good quotient is categorical quotient also.

定義 5.9 ([6])

good quotient :: $q : X \rightarrow Y$ が各点 $y \in Y$ について $q^{-1}(y)$ がただひとつの orbit からなる時, q は X の G による **geometrical quotient** と呼ばれる.

5.4 Affine GIT Quotient

field :: k affine scheme/ k :: X , affine group scheme/ k :: G , action :: $\alpha : G \curvearrowright X$ が与えられているとする. この場合には, 直接構成できる quotient scheme がある. それが GIT(Geometric Invariant Theory)

^{†6} すなわち, Y の任意の affine open subscheme の q による逆像が affine.

最初に, $\text{affine} \curvearrowright \text{affine}$ の場合の作用について述べておこう. $\alpha: G \curvearrowright X$ に対応する環準同型を $\tilde{\alpha}: k[X] \rightarrow k[X] \otimes_k k[G]$ とする. 一方, $\text{pr}_X: G \times X \rightarrow X$ に対応する環準同型は

である. したがって $\mathcal{O}_Y^G (\subseteq \mathcal{O}_X)$ の global section は次のように成る.

定義 5.10

$X \parallel G$ という記号は, affine GIT quotient は必ずしも (affine) geometric quotient でない, ということを意味している (例 5.3). しかしどちらも categorical quotient であるから, 両方共存するならばそれらは同型を除いて一致する.

5.5 Relations of Quotients.



我々は group scheme G が “linearly reductive” という性質を備えている場合に G による affine scheme の affine GIT quotient が categorical/good/geometric quotient であることを示す。（実はより弱い “reductive” で十分なのだが、これを定義するだけでも骨が折れるので、このノートでは扱わない。）このセクションでは “linearly reductive” を定義し、調べていく。

group scheme の representation として最も一般的なものは次のものである.

定義 6.1 ([9] 4,a)

$V ::$ vector space over k に対し, k 代数の圏から群の圏への関手 \mathcal{GL}_V を

$$R \mapsto \text{Aut}_R(V \otimes_k R)$$

で定める. G の **representation** とは, V と (群の圏への関手の) 準同型 $\rho: \underline{G} \rightarrow \mathcal{GL}_V$ の組のことである.

注意 6.2

V が有限次元である場合には \mathcal{GL}_V は affine group scheme $:: GL_{\dim V}$ で表現できる. $n = \dim V$ としてみると, $V \cong k^{\oplus n}$ なので $V \otimes R \cong R^{\oplus n}$. また,

$$\underline{GL}_n(R) = \text{Hom}_{\mathbf{Sch}/k}(\text{Spec } R, GL_n) \cong \text{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[T, 1/(\det T)], R).$$

$\phi \in \text{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[T, 1/(\det T)], R)$, $\bar{T} = \phi(T)$ とすると, $T \in \text{Aut}(k^{\oplus n})$ より $\bar{T} \in \text{Aut}(R^{\oplus n})$. \bar{X} と ϕ の間にあるこの対応が一一であることは明らか.

また, この時 ρ は homomorphism of group scheme である.

定義 6.3 ([9] 4,a にある別の定義)

$V ::$ vector space over k に対し, k -algebra の圏から module の圏への関手 \underline{V} を

$$R \mapsto V \otimes_k R$$

で定める. G の V への representation とは, 次の条件を満たす自然変換 $\rho: \underline{G} \times \underline{V} \rightarrow \underline{V}$ のことである. その条件とはすなわち, 任意の k -algebra $:: R$ について $\rho(R)$ は作用 $\underline{G}(R) \curvearrowright \underline{V}(R) = V \otimes_k R$ である. さらに, この写像は第一引数を固定した時, R -module の準同型である^{†7}.

命題 6.4

二つの定義は同値である.

(証明). $V ::$ vector space over k を固定する.

まずは $\rho: \underline{G} \rightarrow \mathcal{GL}_V$ から $\sigma: \underline{G} \times \underline{V} \rightarrow \underline{V}$ を構成しよう. これは任意の k -algebra $:: R$ について $\sigma_R(g, v) = \rho_R(g)(v)$ とおけば良い. 逆は $\rho_R(g) = \sigma_R(g, -)$. ■

基本的に後者を定義として用いる. こちらのほうが action と定義が似ているということや, 後に示す定義が書きやすい, というのが理由である. action と似ている, というのは次を見よ.

定義 6.5

$S :: k$ -algebra に対し, k -algebra の圏から module の圏への関手 \underline{S} を

$$R \mapsto S \otimes_k R$$

で定める. G の S への representation とは, 次の条件を満たす自然変換 $\rho: \underline{G} \times \underline{S} \rightarrow \underline{S}$ のことである. その条件とはすなわち, 任意の k -algebra $:: R$ について $\rho(R)$ は作用 $\underline{G}(R) \curvearrowright \underline{S}(R) = S \otimes_k R$ である. さらに, この写像は第一引数を固定した時, R 代数の準同型である.

^{†7} $\underline{G}(R) = \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\text{Spec } R, G)$ は, $G ::$ affine scheme より環準同型 $:: k[G] \rightarrow R$ に対応する. これは $(r \cdot \phi)(*) = r\phi(*)$ のようにして自然に R -module の構造を持つ.

したがって affine scheme over k $:: X = \text{Spec } S$ への G の action は, G の S への representation と見ることが出来る.

注意 6.6

[11] における representation は $k[G]$ -comodule structure on V で与えられている. G が affine group scheme over k ならば, $k[G]$ -comodule structure on V と linear representation of G on V (ここでの定義) が一対一に対応する. このことは [8] Prop6.1 にある.

Milne によるこの命題の証明によると, $\rho : \underline{G} \times \underline{V} \rightarrow \underline{V}$ から次のように comodule structure on V が定義される. $G = \text{Spec } A$ とする.

$$S = \text{id}_A \times (V \otimes_k 1_A), \quad \rho(A)|_S : S \cong V \rightarrow V \otimes_k A = \underline{V}(A).$$

逆に $\sigma : V \rightarrow V \otimes A$ が与えられている時, $g \in \underline{G}(R)$ について

$$V \xrightarrow{\sigma} V \otimes A \xrightarrow{\text{id}_V \otimes g} V \otimes R$$

の両辺に $\otimes R$ をつければ $\rho(R)(g) \in \mathcal{GL}_V(R)$ が得られる. 以上の操作が互いに逆であることの証明は長いので [8] を見て欲しい.

例 6.7

trivial representation とは, 射影 $\text{pr}_2 : \underline{G} \times \underline{V} \rightarrow \underline{V}$ で定義される作用である.

- 定義 6.8** (i) G の V 上の representation $:: (V, \rho)$ について $v \in V$ が **G -invariant vector** であるとは, 任意の k -algebra $:: R$ に対して $\rho(\underline{G}(R), v \otimes_k 1_R) = v \otimes_k 1_R$ となること.
- (ii) G の V 上の representation $:: (V, \rho)$ について, linear subspace of $V :: U$ が **subrepresentation** of V であるとは, $\rho(\underline{G} \times \underline{U}) \subseteq \underline{U}$ が成立しているということ.
- (iii) $V, W ::$ vector space over k への G の representation を考える.

$$\rho^V : \underline{G} \times \underline{V} \rightarrow \underline{V}, \quad \rho^W : \underline{G} \times \underline{W} \rightarrow \underline{W}.$$

この時, **G -equivariant map** $\phi : V \rightarrow W$ とは, 以下の可換図式を成立させる射 ϕ のことである.

$$\begin{array}{ccc} \underline{V} & \xrightarrow{\phi} & \underline{W} \\ \rho^V \uparrow & & \uparrow \rho^W \\ \underline{G} \times \underline{V} & \xrightarrow{\text{id} \times \phi} & \underline{G} \times \underline{W} \end{array}$$

k -algebra への representation についても同様に G -invariant vector, subrepresentation, G -equivariant map を定義する. ただし, k -algebra の subrepresentation は k -subalgebra ではなく linear subspace であることに注意する.

6.2 Linear Reductivity

定義 6.9

G の linear representation の間にある任意の surjective G -equivariant map $\phi : W \rightarrow V$ に対し, ϕ から誘導される写像 $\phi^G = \phi|_{W^G} : W^G \rightarrow V^G$ も全射である時, G は **linearly reductive** であると呼ばれる.

例 6.10

任意の finite group は linearly reductive である。また, SL_n, GL_n もそうである。affine group scheme of finite type $/k$ もそう。

命題 6.11 ([11] p.131)

G とその normal subgroup H を考える。

- (i) H, G が linearly reductive ならば G/H もそうである。
- (ii) $H, G/H$ が linearly reductive ならば G もそうである。

特に G の単位元 $e = \text{im } \epsilon$ を含む G の connected component $:: G^0$ が linearly reductive ならば G もそう。

6.3 Locally Finite Dimensional / Rational Action.

定義 6.12

representation of $G :: (V, \rho)$ が **locally finite dimensional** であるとは, 任意の $v \in V$ について, v を含む finite dimensional subrepresentation of V が存在するという事。

注意 6.13

k -algebra $:: A$ への action がこれが locally finite dimensional である時, この action を rational action と呼ぶことがある。

命題 6.14 ([11] Prop4.6)

任意の affine group scheme $/k$ の任意の representation は locally finite dimensional.

補題 6.15

G が linearly reductive であることは次と同値: G の *finite dimensional* linear representation の間にある任意の surjective G -equivariant map $\phi : W \rightarrow V$ に対し, ϕ から誘導される写像 $\phi^G = \phi|_{W^G} : W^G \rightarrow V^G$ も全射である。

7 Affine GIT Quotient of Variety is Variety Again

k を algebraically closed field, $X = \text{Spec } A$ を affine variety とし, affine group scheme $:: G$ も finite type $/k$ であるとする。

$X // G$ とは $\text{Spec } A^G$ のことであつた。 A^G は A の部分環であり, $X :: \text{variety}$ より $A :: \text{integral domain}$.
 なので $A^G :: \text{integral domain}$ が得られる。 $X // G$ が k 上の scheme であることは明らか。このことと [4] II, Prop4.1 から separated $/k$ であることも得られる。以上から, $X // G$ が variety であるためには finite type $/k$ だけが足りない。

注意 7.1 ([6] Ex3.25)

$q : X \rightarrow Y$ が categorical quotient であり, かつ X が connected (resp. irreducible, reduced) であるとする。この時, Y も connected (resp. irreducible, reduced) である。

定理 7.2

$X = \text{Spec } A$:: affine variety, G :: linearly reductive affine group scheme acting on X rationally とする.
この時, A^G は有限生成. したがって $X // G = \text{Spec } A^G$:: affine variety.

まずは $X = \mathbb{A}_k^n$ の場合に証明する.

命題 7.3 ([11] Thm4.51, [6] Thm4.25 (second part))

G :: linearly reductive affine group scheme, $S = k[x_1, \dots, x_n]$ とする. この時 S^G は有限生成.

(証明). S の部分環 S^G は次のように次数付けられる^{†8}.

$$S^G = \bigoplus_{d \geq 0} (S^G \cap S_d).$$

イデアル $J \subset S$ を $S_+^G = \bigoplus_{d > 0} (S^G \cap S_d)$ で生成されるものとする. すると S は noetherian ring であるから, J の生成元として有限個の斉次多項式 $f_1, \dots, f_N \in S$ がとれる. $J \neq (1) = S$ なので特にこれらの多項式は正次数だと仮定できる.

次の S -module homomorphism は全射である.

$$\begin{aligned} \phi: S^{\oplus N} &\rightarrow J \\ (h_i)_i &\mapsto \sum_i h_i f_i \end{aligned}$$

$\text{Spec } S$ への G の作用を, S 上の G の表現と考える. これを $(g, (s_i)_{i=1}^N) \mapsto (\rho(g, s_i))_i$ の様に $\text{Spec } S^{\oplus N}$ 上の表現に拡張すると, $(S^{\oplus N})^G$ を考えることが出来る. これが $(S^G)^{\oplus N}$ と同型であることは直ちに分かる. G は linearly reductive であることから, $\phi^G: (S^G)^{\oplus N} \rightarrow J^G$ は全射である.

主張 7.4

S^G は k -algebra として $\{f_i\}_{i=1}^N$ で生成される.

f_i 達は S^G の元であるから, $S^G \supseteq k[\{f_i\}_i]$ は明らか. 逆の包含関係を示すために, $h \in S^G \subseteq S$ を任意にとって, $\deg h$ についての帰納法で $h \in k[\{f_i\}_i]$ を示す.

$\deg h = 0$ の時 $h \in k \subset k[\{f_i\}_i]$ なので主張は成立する. $\deg h > 0$ の時, $h \in S_+^G \subseteq J$. 特に $(J \subset S$ を G の sub-representation とみなすと) J^G に属している. 上で述べた通り, $\phi^G: (S^G)^{\oplus N} \rightarrow J^G$ は全射である. また ϕ^G は ϕ の制限であるから, 次を満たす $\{h'_i\}_i \subseteq S^G$ が存在することが分かる.

$$h = \sum_i h'_i f_i.$$

今 $\deg f_i > 0$ だから, $\deg h'_i < \deg h$. 帰納法の仮定から $h'_i \in k[\{f_i\}_i]$ なので, h も $k[\{f_i\}_i]$ に属す. ■

定理 (7.2) の証明. A :: finitely generated k -algebra かつ $G \curvearrowright X$:: rational action なので, A の生成元 r_1, \dots, r_N であって, finite dimensional sub-representation of A :: V を張るようなものが存在する.

^{†8} k -algebra :: $R, g \in \underline{G}(R)$ を任意に取る. 任意の $f \in S^G$ について, f の全ての斉次成分が S^G に属することを示せば良い. 帰納法で示す. $f = f_0 \in S^G$ ($f_0 \in S_0$) であるときには自明. $f = f_0 + f_1$ であるとき,

$$\alpha(g, f_1 \otimes 1_R) = \alpha(g, (f - f_0) \otimes 1_R) = (f - f_0) \otimes 1_R = f_1 \otimes 1_R.$$

なので $f_1 \in S^G$. 2 つめの等号は $f, f_0 \in S^G$ と $\alpha(g, -)$:: R -algebra homomorphism を用いた. 以下, 同様にして任意の $\deg f \geq 0$ について主張が示せる.

$S := \text{Sym}(V)$ は $S_d = \text{Sym}^d(V)$ のように次数づけでき、次数付き環として $S \cong k[x_1, \dots, x_N]$ (finitely generated k -algebra). $G \curvearrowright X = \text{Spec } A$ から作用 $G \curvearrowright S$ が誘導される. 今, 明らかに次の surjective k -algebra homomorphism が存在する.

$$S \rightarrow A; \quad \bigotimes_i r_i^{e_i} \mapsto \prod_i r_i^{e_i}.$$

これは作り方から G -equivariant map になる. G :: linearly reductive より, $S^G \rightarrow A^G$ は全射. S^G は finitely generated だから, 結局 A^G は finitely generated. ■

定理 7.5 ([6] Thm 4.26)

An affine algebraic group G over k is reductive if and only if for every rational G -action on a finitely generated k -algebra A , the subalgebra A^G of G -invariants is finitely generated.

8 Affine GIT Quotient is a Good Quotient

この節では, k :: algebraically closed field, $X = \text{Spec } A$:: affine scheme of finite type over a field k , G :: linearly reductive affine group scheme acting on X とする. 前の節と比べて X, G の条件が緩いことに注意.

補題 8.1

$W_1, W_2 \subset X$ が disjoint closed subset であり, かつ orbit の和集合であるとする. すると, $f(W_1) = 1, f(W_2) = 0$ となるような G -invariant function :: $f \in A^G = \Gamma(\mathcal{O}_X, X)^G$ が存在する.

(証明). 証明は [11] から引用する. W_1, W_2 は closed subset in $X = \text{Spec } A$ なので, $W_1 = V(\mathfrak{a}_1), W_2 = V(\mathfrak{a}_2)$ なる radical ideal :: $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \subseteq A$ が存在する. $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ なので $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = (1)$ (TODO: X :: affine variety が必要?).

W_1, W_2 は G の作用で保たれるから $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$:: sub-representation of A (TODO). そこで k -module homomorphism を考える.

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 &\rightarrow A \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_1 + a_2 \end{aligned}$$

これは G -equivariant となっている. そして $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = (1)$ よりこれは全射. G :: linearly reductive より,

$$\begin{aligned} (\mathfrak{a}_1 \cap A^G) \oplus (\mathfrak{a}_2 \cap A^G) &\rightarrow A^G \\ (a_1, a_2) &\mapsto a_1 + a_2 \end{aligned}$$

も全射. よって $f_1 + f_2 = 1$ であるような $f_j \in \mathfrak{a}_j \cap A^G$ ($j = 1, 2$) が存在する. $W_1 \subseteq V(f_1)$ なので $f_1(W_1) = 0$, そして $f_1 + f_2 = 1$ から $f_1(W_2) = 0$. ■

主張を述べる前に, good quotient の定義を再掲する.

定義 8.2 ([6], 定義 5.7 の再掲)

scheme morphism :: $q: X \rightarrow Y$ が X の G による good quotient であるとは, 以下の条件が満たされるということ.

- (i) $q :: G$ -invariant.
- (ii) $q ::$ surjective.
- (iii) $q ::$ affine morphism ^{†9}.
- (iv) $(q_* \mathcal{O}_X)^G \cong \mathcal{O}_Y$.
- (v) $W_1, W_2 ::$ disjoint G -invariant closed subsets of X について, $\text{cl}_Y(q(W_1)), \text{cl}_Y(q(W_2)) ::$ disjoint.

定理 8.3 ([6] Thm4.30)

$X // G = \text{Spec } A^G$ と置く. 包含写像 $i : A^G \hookrightarrow A$ から誘導される射を $q : X \rightarrow X // G$ とおくと, $q ::$ good quotient.

(証明). 構成の仕方から, (i),(iii),(iv) は明らか. (ii) は任意の極大イデアル $\mathfrak{m}_y \subseteq X // G$ について拡大イデアル $\mathfrak{m}_y^e = i(\mathfrak{m}_y)A$ が A に等しくないことを示せば十分. (v) は補題 8.1 から得られる. 詳細は [6] Thm4.30 を参照せよ. ■

なお, $X ::$ normal scheme であるとき q は closed map となる. これは $A ::$ integrally closed domain ならば A^G も integrally closed domain となること^{†10}と, Ati-Mac, Ex5.1 から得られる.

参考文献

- [1] Steve Awodey. *Category Theory (Oxford Logic Guides)*. Oxford University Press, U.S.A., 2 edition, 8 2010.
- [2] Frances Kirwan David Mumford, John Fogarty. *Geometric Invariant Theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34)*. Springer-Verlag, 3rd ed. edition, 1992.
- [3] Ben Moonen Gerard van der Geer. Abelian varieties. <https://www.math.ru.nl/~bmoonen/research.html>.
- [4] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.
- [5] Robin Hartshorne. *Deformation Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2010 edition, 12 2009.
- [6] Victoria Hoskins. Moduli problems and geometric invariant theory, 2016. https://userpage.fu-berlin.de/hoskins/M15_Lecture_notes.pdf.
- [7] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.
- [8] J. Milne. The basic theory of affine group schemes. <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AGS.pdf>.
- [9] James Milne. Algebraic groups. <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/iAG200.pdf>.
- [10] C. S. Seshadri. Quotient spaces modulo reductive algebraic groups. *Annals of Mathematics*, Vol. 95, No. 3, pp. 511–556, 1972.

^{†9} すなわち, Y の任意の affine open subscheme の q による逆像が affine.

^{†10} 私のノートに証明がある. https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/JustOne/fixed_subring_in_int_closed_domain.pdf.

[11] 向井茂. モジュライ理論 〈1〉 . 岩波書店, 12 2008.