

Ex2.1

\mathfrak{a} :homogenous ideal をとる. $\mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) \cap S^h \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ を示す. 今, $\mathfrak{a} \subset S = k[x_0, \dots, x_n]$ である. したがって $\mathcal{I}_a \mathcal{Z}_a(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ が成立している. あとは $\mathcal{I}_a \mathcal{Z}_a(\mathfrak{a}) \supseteq \mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) \cap S^h$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}
 & f \in \mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) \cap S^h \\
 \iff & (f \in S^h) \wedge (f \in \mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a})) \\
 \iff & (f \in S^h) \wedge (\forall P \in \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}), f(P) = 0) \\
 \iff & (f \in S^h) \wedge (\forall P \in \tilde{P} \in \mathbb{P}^n, \forall a \in \mathfrak{a}, (a(P) \implies f(P) = 0)) \\
 \implies & (f \in S^h) \wedge (\forall P \in \mathbb{A}^{n+1}, \forall a \in \mathfrak{a}, (a(P) \implies f(P) = 0)) \\
 \iff & (f \in S^h) \wedge (\forall P \in \mathcal{Z}_a(\mathfrak{a}), f(P) = 0) \\
 \iff & (f \in S^h) \wedge (f \in \mathcal{I}_a \mathcal{Z}_a(\mathfrak{a})) \\
 \implies & f \in \mathcal{I}_a \mathcal{Z}_a(\mathfrak{a})
 \end{aligned}$$

2 つめの \iff は下から上に戻るために $f \in S^h$ が必要. 途中の $P \in \tilde{P} \in \mathbb{P}^n$ は P が有る同値類 \tilde{P} に属すということ. 1 つめの \implies は $(0, \dots, 0)$ が \mathbb{P}^n に無いため. 2 つめの \implies は $f \in S^h$ を除いたため. なので証明から, 実は $\mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) \cap S^h \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}} \cap S^h$ が示せている.

Ex2.2

\mathfrak{a} :homogenous ideal をとる. i) $\mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$ ii) $\sqrt{\mathfrak{a}} = S \vee \sqrt{\mathfrak{a}} = S_+$ iii) $\exists d > 0, \mathfrak{a} \supseteq S_d$

■i) \implies ii) $\mathcal{Z}_a(\mathfrak{a})$ には, $\mathfrak{a} \neq S$ であれば, 少なくとも 1 点が含まれる. これは \mathfrak{a} を含む極大イデアルが存在し, それが 1 点に対応するから. 式で書くと $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m} \implies \mathcal{Z}_a(\mathfrak{a}) \supseteq \mathcal{Z}_a(\mathfrak{m}) = \{*\}$ さらに, そのような点 P として原点と異なるものが有る, すなわち $\mathcal{Z}_a(\mathfrak{a}) \neq \{(0, \dots, 0)\}$ ならば同値類 $\{\lambda P \mid \lambda \in k^\times\}$ は $\mathcal{Z}_p(\mathfrak{a})$ に属す. 実際, 任意の $f \in \mathfrak{a}$ について $f(P) = 0$ であり, しかも \mathfrak{a} は homogenous ideal であるからこれは成り立つ (これは Ex2.10 を先取りした議論).

まとめると $\mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$ が成り立つための十分条件は

$$\mathfrak{a} = S \vee \mathcal{Z}_a(\mathfrak{a}) = \{(0, \dots, 0)\}$$

前者は明らかに $\sqrt{\mathfrak{a}} = S$. 後者も $\mathcal{I}_a \mathcal{Z}_a(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle = S_+$.

■ii) \implies iii) 最大値は平均値以上であることに注意する¹⁾. 条件を満たす d を構成する. まず仮定 $\sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq S_+$ から, 各不定元 x_i に対して $x_i^{e_i} \in \mathfrak{a}$ となるような e_i が存在する. その最大値を $E = \max\{e_i\}$ とすれば, $d := (n+1)E$ が求めるものである. 実際そうなることを示そう. d 次斉次単項式 $cx_0^{e_0} \cdots x_n^{e_n}$ ($c \in k$) を適当にとり, 指数 e_i の最大値が仮に e_n だとすると, これは平均値 $E = d/(n+1)$ 以上. したがってこの単項式は $x_n^E \in \mathfrak{a}$ を因子に持つので \mathfrak{a} の元. S_d の元は d 次斉次単項式の和で表されるから, 結局 S_d の元は全て \mathfrak{a} に属す.

■iii) \implies i) 任意の点 $(a_0 : \dots : a_n) \in \mathbb{P}^n$ をとる. すると, $f(a_0, \dots, a_n) \neq 0$ であるような $f \in S_d$ を実際に構成できる.

$(a_0 : \dots : a_n) \neq (0 : \dots : 0)$ から $a_k \neq 0$ なる k の存在が言えるので, そのような k を一つ取って固定し, 添字多重集合 I を $k \notin I$ かつ $|I| = d$ であるように作る. $n < d$ の時には I が多重でなくてはならな

¹⁾ a, b, c の内 a が最大値であれば, $\frac{a+b+c}{3} \leq \frac{a+a+a}{3} = a$. 一般の場合も同様.

い. すると,

$$f = \prod_{i \in I} (a_k x_i - a_i x_k) + x_k^d$$

は \prod の部分が代入で 0 になり, $x_k^d \neq 0$ から $f(a_0, \dots, a_n) \neq 0$. しかもこれは S_d の元である.

■ Another Proof for iii) \implies i) $S_d \subset \mathfrak{a}$ より, $\{x_0^d, \dots, x_n^d\} \subset \mathfrak{a}$. したがって Ex2.3a の結果を用いると $\mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) \subset \emptyset$ が得られる. よって $\mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) = \emptyset$

以上より主張が示された.

Ex2.3

$$(a) \quad T_1 \subseteq T_2 \subseteq S^h \implies \mathcal{Z}_p(T_1) \supseteq \mathcal{Z}_p(T_2)$$

$T_1 = T_2$ の時に成立することは自明. $f \in T_2 \setminus T_1$ をとる.

$$\begin{aligned} P &\in \mathcal{Z}_p(f) \cap \mathcal{Z}_p(T_1) \\ \iff (f(P) = 0) \wedge (\forall g \in T_1, g(P) = 0) \\ \iff \forall g \in T_1 \cup \{f\}, g(P) = 0 \\ \iff P \in \mathcal{Z}_p(T_1 \cup \{f\}) \end{aligned}$$

よって $\mathcal{Z}_p(f) \cap \mathcal{Z}_p(T_1) = \mathcal{Z}_p(T_1 \cup \{f\}) \subseteq \mathcal{Z}_p(T_1)$ が成り立つ. T_2 の他の元も同様に T_1 に加えていき, 主張を得る.

$$(b) \quad Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \mathbb{P}^n \implies \mathcal{I}_p(Y_1) \supseteq \mathcal{I}_p(Y_2)$$

この場合も $=$ での成立は自明. $P \in Y_2 \setminus Y_1$ をとる. すると, $\mathcal{I}_p(Y_1)$ には P で 0 にならない多項式が属すから, $\mathcal{I}_p(Y_1) \not\subseteq \mathcal{I}_p(P)$ が成り立つ.

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{I}_p(Y_1) \cap \mathcal{I}_p(P) \\ \iff (f(P) = 0) \wedge (\forall Q \in Y_1, f(Q) = 0) \\ \iff \forall Q \in Y_1 \cup \{P\}, f(Q) = 0 \\ \iff f \in \mathcal{I}_p(Y_1 \cup \{P\}) \end{aligned}$$

したがって $\mathcal{I}_p(Y_1) \cap \mathcal{I}_p(P) = \mathcal{I}_p(Y_1 \cup \{P\}) \subseteq \mathcal{I}_p(Y_1)$ が成り立つ. これを繰り返して, 主張を得る.

$$(c) \quad \forall Y_1, Y_2 \subset \mathbb{P}^n, \quad \mathcal{I}_p(Y_1 \cup Y_2) = \mathcal{I}_p(Y_1) \cap \mathcal{I}_p(Y_2)$$

by the definition.

$$\begin{aligned} f &\in \mathcal{I}_p(Y_1 \cup Y_2) \cap S^h \\ \iff (f \in S^h) \wedge (\forall P \in Y_1 \cup Y_2, f(P) = 0) \\ \iff (f \in S^h) \wedge (\forall P \in \mathbb{P}^n, P \in Y_1 \cup Y_2 \implies f(P) = 0) \\ \iff (f \in S^h) \wedge (\forall P \in \mathbb{P}^n, (P \in Y_1) \vee (P \in Y_2) \implies f(P) = 0) \\ \iff (f \in S^h) \wedge (\forall P \in \mathbb{P}^n, ((P \in Y_1) \implies (f(P) = 0)) \wedge ((P \in Y_2) \implies (f(P) = 0))) \\ \iff (f \in S^h) \wedge ((\forall P \in \mathbb{P}^n, (P \in Y_1) \implies (f(P) = 0)) \wedge (\forall P \in \mathbb{P}^n, (P \in Y_2) \implies (f(P) = 0))) \\ \iff f \in \mathcal{I}_p(Y_1) \cap \mathcal{I}_p(Y_2) \cap S^h \end{aligned}$$

よって $\mathcal{I}_p(Y_1 \cup Y_2)$ の生成元は $\mathcal{I}_p(Y_1) \cap \mathcal{I}_p(Y_2)$ の生成元.

4 つめの \iff は次のように証明できる.

$$\begin{array}{c}
(P \vee Q) \rightarrow R \\
\hline
\neg(P \vee Q) \vee R \\
\hline
\neg((P \vee Q) \wedge \neg R) \\
\hline
\neg((P \wedge \neg R) \vee (Q \wedge \neg R)) \\
\hline
\neg(P \wedge \neg R) \wedge \neg(Q \wedge \neg R) \\
\hline
(\neg P \wedge R) \wedge (\neg Q \wedge R) \\
\hline
(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)
\end{array}$$

(d) $\mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$

すでに $\mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) \cap S^h \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ は Ex2.1 で示した. $\mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) \cap S^h$ は $\mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a})$ の生成元を全て含むから, 結局 $\mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$ が示している. 逆の包含関係を示す.

$\sqrt{\mathfrak{a}}$ の任意の元 f をとる. このとき, f に対してある $m \in \mathbb{N}$ が存在して $f^m \in \mathfrak{a}$ となっている. f を斉次分解した時の最高次成分を f_D ($D := \deg f$) とおくと, f^m の最高次成分は f_D^m であり, \mathfrak{a} は homogenous なので $f_D^m \in \mathfrak{a}$ ²⁾. 今, 点 $P \in \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a})$ を任意にとる. すると $f_D^m \in \mathfrak{a}$ より $f_D^m(P) = 0$. ところが $f_D(P) \in k$ は零因子でないから $f_D(P) = 0$. 結局 $f_D \in \mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a})$ が分かる. $f - f_D \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ も同様に考えていけば, 結局 f の全ての斉次成分が $\mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a})$ に属することが示される. よって $f \in \mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a})$.

(e) $\forall Y \subseteq \mathbb{P}^n, \mathcal{Z}_p(\mathcal{I}_p(Y)) = \text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y)$

まず, $\mathcal{Z}_p(\mathcal{I}_p(Y))$ は Y を含む ³⁾ \mathbb{P}^n の閉集合 ⁴⁾ であるから $\text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y) \subseteq \mathcal{Z}_p(\mathcal{I}_p(Y))$. $Y \subseteq \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a})$ である閉集合 $W := \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a})$ をとる.

$$\begin{aligned}
Y &\subseteq \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) = W \\
&\iff \mathcal{I}_p(Y) \supseteq \mathcal{I}_p(\mathcal{Z}_p(\mathfrak{a})) \\
&\iff \mathcal{I}_p(Y) \supseteq \mathcal{I}_p(\mathcal{Z}_p(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}} \supseteq \mathfrak{a} \\
&\iff \mathcal{Z}_p(\mathcal{I}_p(Y)) \subseteq \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) = W
\end{aligned}$$

以上より, $Y \subseteq \mathcal{Z}_p(\mathcal{I}_p(Y)) \subseteq W$ が得られる. 最後に $W = \text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y)$ として主張を得る.

Ex2.4

(a) 1-1 correspondance between algebraic set and homogenous radical ideal.

すでに述べた.

(b) $Y \subset \mathbb{P}^n :: \text{irreducible} \iff \mathcal{I}_p(Y) :: \text{prime}$

■ \implies $fg \in \mathcal{I}_p(Y)$ であったとする. すると

$$Y \subseteq \mathcal{Z}_p(fg) = \mathcal{Z}_p(f) \cup \mathcal{Z}_p(g) \implies Y = (Y \cap \mathcal{Z}_p(f)) \cup (Y \cap \mathcal{Z}_p(g))$$

$Y :: \text{irreducible}$ より, $Y = Y \cap \mathcal{Z}_p(f)$ または $Y = Y \cap \mathcal{Z}_p(g)$ が成り立つ. よって $Y \subseteq \mathcal{Z}_p(f)$ または $Y \subseteq \mathcal{Z}_p(g)$, すなわち $f \in \mathcal{I}_p(Y)$ または $g \in \mathcal{I}_p(Y)$ が得られる.

²⁾ homogenous ideal の定義を斉次多項式で生成されるイデアルと考える場合には, 生成元 g と任意の多項式の斉次分解 $f_1 + \dots + f_d$ の積を考えることで, homogenous ideal の元の各斉次成分が homogenous ideal に属することが分かる.

³⁾ 自明

⁴⁾ 定義

■ \Leftarrow Y が 2 つの閉部分集合 Y_1, Y_2 に分解されたとする. 3 つ以上に分解された場合も同様である.
 $\mathfrak{p} = \mathcal{I}_p(Y)$ としよう. $\mathcal{Z}_p(\mathfrak{p}) = Y_1 \cup Y_2$ から

$$\mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\mathfrak{p}) = \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} = \mathcal{I}_p(Y_1) \cap \mathcal{I}_p(Y_2) = \mathcal{I}_p(Y_1 \cup Y_2)$$

となる. Ati-Mac の Prop1.11 より, $\mathfrak{p} = \mathcal{I}_p(Y_1)$ または $\mathfrak{p} = \mathcal{I}_p(Y_2)$. よって $\mathcal{Z}_p(\mathfrak{p}) = Y_1$ または $\mathcal{Z}_p(\mathfrak{p}) = Y_2$, すなわち $\mathcal{Z}_p(\mathfrak{p})$:irreducible algebraic set が得られる.

(c) \mathbb{P}^n :irreducible

$\mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) = \mathbb{P}^n$ となるイデアル \mathfrak{a} は $\text{Nil}(k[x_0, \dots, x_n]) = 0$. 両辺の \mathcal{I}_p をとって $\mathcal{I}_p(\mathbb{P}^n) = 0 = \mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(0)$.
 0 は $k[x_0, \dots, x_n]$ で素イデアルなので, (b) より主張を得る.

Ex2.5

Ex2.6

$A := k[y_1, \dots, y_n], S := k[x_0, \dots, x_n]$ とする. Y :projective variety について $\dim S(Y) = \dim Y + 1$ を示そう. $\phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{A}^n$:homeomorphism を用いて $Y_i := \phi_i(Y \cap U_i)$ とし, $A(Y_i)$ を考える.

■Step I. $A(Y_i) \cong S(Y)_{(x_i)}$. まず次を確認しておく.

$$A(Y_i) = \{f + \mathcal{I}_a(Y_i) \mid f \in A\}; \quad S(Y)_{(x_i)} = \left\{ \frac{f + \mathcal{I}_p(Y)}{x_i^{\deg f} + \mathcal{I}_p(Y)} \mid f \in S \right\}$$

以下, i は固定する. まず次の同型写像を定義する.

$$\begin{aligned} \mu: \quad A &\rightarrow S_{(x_i)} \\ f(y_1, \dots, y_n) &\mapsto f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right) \\ g(y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n) &\leftarrow g(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \end{aligned}$$

$\mathfrak{b} := \mu(\mathcal{I}_a(Y_i)) = \langle \{f/x_i^{\deg f} \mid f \in \mathcal{I}_a(Y_i)\} \rangle$ とおく. すると μ から同型写像 $\mu^*: A(Y_i) \xrightarrow{\cong} S_{(x_i)}/\mathfrak{b}$ が誘導される. つづいて次の準同型を定める.

$$\begin{aligned} \nu: \quad S_{(x_i)}/\mathfrak{b} &\rightarrow S(Y)_{(x_i)} \\ \frac{\bar{f}}{\bar{x}_i^{\deg f}} &\mapsto \frac{\bar{f}}{\bar{x}_i^{\deg f}} \end{aligned}$$

これが全射であることは明らか. $\ker \nu = 0$ も以下のように示される.

$$\begin{aligned} \nu\left(\frac{\bar{f}}{\bar{x}_i^{\deg f}}\right) &= 0 \\ \implies f &\in \mathcal{I}_p(Y) \\ \iff \mu^{-1}(f) &\in \mu^{-1}(\mathcal{I}_a(Y)) = \mathcal{I}_a(Y_i) \\ \iff f &\in \mathfrak{b} \\ \iff \frac{\bar{f}}{\bar{x}_i^{\deg f}} &= 0 \end{aligned}$$

以上で示された同型写像を $\xi(= \nu \circ \mu^*)$ としておく.

■Step II. $S(Y)_{x_i} \cong A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}]$. 以下が同型写像である.

$$\begin{aligned} \rho : \quad S(Y)_{x_i} &\rightarrow A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}] \\ \sum_{j=-d}^d a_j \bar{x}_i^j &\mapsto \sum_{j=-d}^d \xi(a_j) \bar{x}_i^j \\ \sum_{j=-d}^d \xi^{-1}(b_j) \bar{x}_i^j &\leftarrow \sum_{j=-d}^d b_j \bar{x}_i^j \end{aligned}$$

ただし f_j は f の j 次斉次成分である.

■Step III. Use (1.7), (1.8A). Then look at trans.deg. Ati-Mac Ex3.3 と Them1.8Aa より以下が成り立つ,

$$\dim A(Y_i)[x_i, x_i^{-1}] = \text{trans.deg. Quot}((A(Y_i)[x_i])_{x_i}) = \text{trans.deg. Quot}(A(Y_i)[x_i]) = \dim A(Y_i) + 1.$$

また, 以下も成り立つ.

$$\dim S(Y) = \text{trans.deg. Quot}(S(Y)) = \text{trans.deg. Quot}(S(Y)_{x_i}) = \dim S(Y)_{x_i}.$$

■Conclusion. i を fix せず再び index とする. 開被覆 $\{Y \cap U_i\}_{i=0}^n$ の中で包含関係について極大なものを $Y \cap U_j$ とする. すると Ex1.10b より $\dim Y = \dim \sup_i (Y \cap U_i) = \dim(Y \cap U_j)$. $U_i \cong \mathbb{A}^n$ なので, $\dim Y = \dim \phi_j(Y \cap U_j)$ が成り立つ. $Y_j = \phi_j(Y \cap U_j)$ とすると, Step II と Step III の結果から以下のように結論が得られる.

$$\dim Y = \dim Y_j = \dim A(Y_j) = \dim A(Y_j)[x_j, x_j^{-1}] - 1 = \dim S(Y)_{x_j} - 1 = \dim S(Y) - 1.$$

Ex2.7

(a) $\dim \mathbb{P}^n = n$

Ex2.6 を用いると, $\dim \mathbb{P}^n = \dim S(\mathbb{P}^n) - 1 = \dim S/\mathcal{I}_p(\mathbb{P}^n) - 1$ が得られる. $\mathcal{Z}_p(0) = \mathbb{P}^n$ であるから, 零点定理より $\mathcal{I}_p(\mathbb{P}^n) = 0$. したがって $\dim \mathbb{P}^n = \dim S - 1 = (n+1) - 1 = n$ となる.

(b) $\mathbb{P}^n \supseteq Y :: \text{quasi-affine variety}, \dim Y = \dim \text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y)$

$\dim Y = d$ としよう. すると irreducible, distinct, closed in Y であるような集合が成す次のような鎖がある.

$$Y_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Y_{d-1} \subsetneq Y_d = Y$$

この Y_i それぞれに $\text{cl}_{\mathbb{P}^n}$ を作用させると, irreducible, distinct, closed in \mathbb{P}^n な鎖が出来る.

$$\text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y_0) \subsetneq \cdots \subsetneq \text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y_{d-1}) \subsetneq \text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y)$$

irreducible は Ex1.6 から. closed in \mathbb{P}^n は $\text{cl}_{\mathbb{P}^n}$ の定義. 残るは distinct (つまり各集合が一致しないこと) である.

簡単のために添字を変えて, $\text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y_1) = \text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y_2)$ と仮定する. $Y_1 = X_1 \cap Y, Y_2 = X_2 \cap Y$ となる $X_1, X_2 :: \text{closed in } \mathbb{P}^n \text{ and irreducible}$ が存在する⁵⁾. $Y_1 = X_1 \cap Y (\subseteq X_1)$ は Y が \mathbb{P}^n の開集合なので, X_1

⁵⁾ $X_1 = Z_1 \sqcup Z_2$ と分解されるなら $Y_1 = X_1 \cap Y = (Z_1 \cap Y) \sqcup (Z_2 \cap Y)$. $Y_1 :: \text{irreducible}$ より $Z_1 \cap Y = Y_1$ or $Z_2 \cap Y = Y_1$ なので, そのようになるものを X_1 にとる.

で稠密. したがって $\text{cl}_{X_1}(Y_1) = X_1$ となる. さらに後で示すように, このとき $\text{cl}_{X_1}(Y_1) = \text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y_1) = X_1$ となる. 仮定 $\text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y_1) = \text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y_2)$ から $X_1 = X_2$ すなわち $Y_1 = Y_2$ が得られ, 大前提に矛盾.

さて, $(W \subset Z \subset X) \wedge (Z::\text{closed in } X) \implies \text{cl}_X(W) = \text{cl}_Z(W)$ を示す. $\text{cl}_Z(W)$ の定義から, 以下が成り立つ.

$$\forall C::\text{closed in } X, W \subseteq (C \cap Z) \implies \text{cl}_Z(W) \subseteq (C \cap Z)$$

$C \cap Z$ は Z の任意の閉集合を表す. ところが, $Z::\text{closed in } X$ より $C \cap Z::\text{closed in } X$. $W \not\subseteq (C \cap Z) \subset C$ である C については無条件で論理式が true になるので, 結局次のように書き換えられる.

$$\forall C::\text{closed in } X, W \subseteq C \implies \text{cl}_Z(W) \subseteq C$$

これは $\text{cl}_X(W)$ の定義に等しい. これで主張が示された.

Ex2.8

$\mathbb{P}^n \supset Y::\text{affine variety}$ について $\dim Y = n - 1 \iff \exists f \in S, f::\text{irreducible } Y = \mathcal{Z}_p(f)$ を示す. $\mathfrak{a} = \mathcal{I}_p Y$ としよう. $Y::\text{affine variety}$ から, \mathfrak{a} は素イデアル.

■ \implies Ex2.6 から $\dim Y = \dim S/\mathfrak{a} - 1$ である. 定理 (1.8A) から, $\dim S/\mathfrak{a} + \text{height } \mathfrak{a} = \dim S = n + 1$ が分かる. したがって $\text{height } \mathfrak{a} = 1$ のとき \mathfrak{a} が単項イデアルであることが示せばよい.

そこで \mathfrak{a} の生成元全体から 2 元 f, g がとれたとする. \mathfrak{a} は素イデアルだから, その生成元は全て既約である. したがって $0 \subsetneq (f), (g) \subseteq \mathfrak{a}$ なる素イデアルの列が構成できる. もし \mathfrak{a} が単項イデアルでなければ $0 \subsetneq (f), (g) \subsetneq \mathfrak{a}$ となり, これは $\text{height } \mathfrak{a} = 1$ に矛盾する. よって \mathfrak{a} は単項イデアル.

■ \longleftarrow 単項素イデアル (f) の高さが 1 で有ることを言えば良い. Krull の単項イデアル定理より, これは明らか.

Ex2.9

$Y \subseteq \mathbb{A}^n::\text{affine variety}$ をとり, $\bar{Y} = \text{cl}_{\mathbb{P}^n}(\phi_0^{-1}(Y))$ を考える.

(a) Show that $\mathcal{I}_p(\bar{Y}) = \langle \beta(\mathcal{I}_a(Y)) \rangle$

$\bar{Y} = \mathcal{Z}_p \mathcal{I}_p(\phi_0^{-1}(Y))$ である. 両辺 \mathcal{I}_p をとって $\mathcal{I}_p(\bar{Y}) = \mathcal{I}_p(\phi_0^{-1}(Y))$ となる. これは homogenous ideal だから,

$$\mathcal{I}_p(\phi_0^{-1}(Y)) \cap S^h \subset \langle \beta(\mathcal{I}_a(Y)) \rangle$$

を示せば証明が終わる. 簡単のため, ϕ_0 を ϕ と略す. β, α も同様である.

$$\begin{aligned} & f \in \mathcal{I}_p(\phi_0^{-1}(Y)) \cap S^h \\ \iff & (f \in S^h) \wedge (\forall P \in \mathbb{P}^n, P \in \phi^{-1}(Y) \implies f(P) = 0) \\ \iff & (f \in S^h) \wedge (\forall P \in \mathbb{P}^n, \phi(P) \in Y \implies f(P) = 0) \\ \iff & (f \in S^h) \wedge (\forall P' \in \mathbb{A}^n, P' \in Y \implies f(\phi^{-1}(P')) = 0) \\ \iff & (f \in S^h) \wedge (\forall P' \in \mathbb{A}^n, P' \in Y \implies (\beta\alpha f)(\phi^{-1}(P')) = 0) \\ \iff & (f' \in A) \wedge (\forall P' \in \mathbb{A}^n, P' \in Y \implies (\beta f')(\phi^{-1}(P')) = 0) \end{aligned}$$

ϕ が全単射であること, $\beta\alpha = \text{id}_{S^h}$ であることをもちいている. 3 つめの \iff は ϕ が全射であることから. また, $P' = \phi(P)$ としている. 5 つめの \iff は α が全射であることから. また, $f' = \alpha(f)$ としている.

(b) Consider twisted cubic curve in \mathbb{P}^3

T : twisted cubic curve とする. $\mathcal{I}_a(T) = \langle y - x^2, z - x^3 \rangle$ である. 一方, $\beta(y - x^2) = yw - x^2, \beta(z - x^3) = zw^2 - x^3$ で生成されるイデアルは $\mathcal{I}_p(\bar{T})$ と一致しない. 実際,

$$xy - z \in \mathcal{I}_a(T) \implies xy - zw \in \mathcal{I}_p(\bar{T})$$

⁶⁾ がわかるが, $a(yw - x^2) + b(zw^2 - x^3) = w(ya + b zw) - x^2(a + bx)$ の x に関する次数を 1 以下にするには, $a + bx = 0$ となるようにするより無いが, そうすると $w(ya + b zw) - x^2(a + bx) = -bw(xy - zw)$ となり, 結局 $xy - zw \notin \langle yw - x^2, zw^2 - x^3 \rangle$ が示される.

Ex2.10

(a) $C(Y)$ is algebraic set, and $\mathcal{I}_a(C(Y)) = \mathcal{I}_p(Y)$

$\mathcal{I}_p(Y)$ が根基イデアルであるから, $C(Y) = \mathcal{Z}_a \mathcal{I}_p(Y)$ を以下で示し, そのうえで $\mathcal{I}_a(C(Y)) = \sqrt{\mathcal{I}_p(Y)} = \mathcal{I}_p(Y)$ を得る.

■ $C(Y) \supseteq \mathcal{Z}_a \mathcal{I}_p(Y)$ $P \in \mathcal{Z}_a \mathcal{I}_p(Y)$ を取る. $\mathcal{I}_p(Y)$ は Y の点で 0 になる多項式であり, $\mathcal{Z}_a \mathcal{I}_p(Y)$ は Y の点で 0 になる多項式の零点である. よって $\mathcal{Z}_a \mathcal{I}_p(Y) \subseteq Y \subseteq C(Y)$.

■ $C(Y) \subseteq \mathcal{Z}_a \mathcal{I}_p(Y)$ $\mathcal{I}_p(Y)$ は homogenous であり, したがって $P \in Y$ を取れば $f(\lambda P)$ ($\lambda \in k^\times$) も 0 になる. すなわち $\theta^{-1}(P) \subset \mathcal{Z}_a \mathcal{I}_p(Y)$. また, $Y \neq \emptyset$ と Ex2.2, それと $\mathcal{I}_p(Y)$ は単元 1 を含まないことから, $\mathcal{I}_p(Y) \subset S_+$ (定数項がない元) である. よって $(0, \dots, 0) \in \mathcal{Z}_a \mathcal{I}_p(Y)$ が成り立つ. 以上より $C(Y) \subseteq \mathcal{Z}_a \mathcal{I}_p(Y)$ が得られる.

(b) $C(Y)$ is irreducible if and only if Y is

(a) から, $\mathcal{I}_a(C(Y)) = \mathcal{I}_p(Y)$ が分かる. $C(Y)$: irreducible と $\mathcal{I}_a(C(Y))$: prime ideal は同値. Y と $\mathcal{I}_p(Y)$ についても同様であるから, 主張が得られる.

(c) $\dim C(Y) = \dim Y + 1$

Ex2.6 から, 右辺は $\dim S(Y)$ に一致する. なので $\dim S/\mathcal{I}_p(Y) = \dim S(Y) = \dim C(Y) = \dim S/\mathcal{I}_a(C(Y))$ を示せばよいが, (a) からこれは明らか.

Ex2.11

(a) For variety $Y \in \mathbb{P}^n$

以下の同値性を示す.

(i) $\exists p_i \in S_1, \mathcal{I}_p(Y) = \langle p_1, \dots, p_l \rangle$

(ii) $\exists q_i \in S_1, Y = \mathcal{Z}_p(q_1) \cap \dots \mathcal{Z}_p(q_m)$

⁶⁾ $f \in \mathcal{I}_a(Y) \implies \beta f \in \beta \mathcal{I}_a(Y) \implies \beta f \in \mathcal{I}_p(\bar{Y})$

■(i) \implies (ii)

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_p(Y) &= \langle p_1, \dots, p_l \rangle \\ \iff \mathcal{Z}_p \mathcal{I}_p(Y) &= \text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y) = \mathcal{Z}_p(\{p_1, \dots, p_l\}) \\ \iff \text{cl}_{\mathbb{P}^n}(Y) &= \mathcal{Z}_p(p_1) \cap \dots \cap \mathcal{Z}_p(p_l) \\ \iff Y &= \mathcal{Z}_p(p_1) \cap \dots \cap \mathcal{Z}_p(p_l)\end{aligned}$$

最後の \iff は $Y::\text{variety}(\implies Y::\text{closed in } \mathbb{P}^n)$ から.

■(ii) \implies (i)

$$\begin{aligned}Y &= \mathcal{Z}_p(q_1) \cap \dots \mathcal{Z}_p(q_m) \\ \iff Y &= \mathcal{Z}_p(\{q_1, \dots, q_m\}) \\ \iff Y &= \mathcal{Z}_p(\langle q_1, \dots, q_m \rangle) \\ \iff \mathcal{I}_p(Y) &= \mathcal{I}_p \mathcal{Z}_p(\langle q_1, \dots, q_m \rangle) \\ \iff \mathcal{I}_p(Y) &= \sqrt{\langle q_1, \dots, q_m \rangle}\end{aligned}$$

最後に $\langle q_1, \dots, q_m \rangle$ が素イデアルとなることを示す.

生成元の集合を, 個数が最小になるようにとる. すると各 q_i ($i = 1, \dots, m$) について

$$q_i \notin \langle \{q_1, \dots, q_m\} \setminus \{q_i\} \rangle$$

が成り立つ. よって q_1, \dots, q_m は k 上のベクトルとして一次独立である. そこで

$$q_1 = 0; q_2 = 0; \dots; q_m = 0$$

という連立多項式を考えると, これは不定元の個数が連立されている式よりも少ないので, 解を持つ. なぜなら q_1, \dots, q_m は k 上のベクトル空間 S_1 の元として一次独立であり, 一方で S_1 のその基底の濃度は丁度不定元の個数に等しいから. したがっていくつかの不定元が別の不定元の線形和として表すことが出来, そのような不定元は Ex1.1 の様に消すことが出来る. よって $S/\langle q_1, \dots, q_m \rangle \cong k[y_1, \dots, y_k]$ なる $k \in \mathbb{N}$ が存在し, 主張が示される.

(b) If $Y(\subset \mathbb{P}^n)::\text{linear variety}$ and $\dim Y = r$, then $\mathcal{I}_p(Y)$ can be generated by $n - r$ linear polynomials.

Ex2.6 より, $\dim Y + 1 = \dim S(Y) = \dim S/\mathcal{I}_p(Y) = r + 1$ が成立. よって定理 (1.8A) を用いて $\text{height } \mathcal{I}_p(Y) = (n + 1) - (r + 1) = n - r$. Krull の高度定理から, $\mathcal{I}_p(Y)$ の生成元は $n - r$ 個以上である.

今, k 上線形独立な l 個の S_1 の元 (ベクトル) で生成されるイデアル $\langle g_1, \dots, g_l \rangle$ を考える. するとこれは (a) で見たとおり素イデアル. また, $\mathcal{I}_p(Y)$ の生成元から 1 つを取り除いた $l - 1$ 個の元 g_2, \dots, g_l も線形独立であるから, $\langle g_2, \dots, g_l \rangle$ も素イデアル. これを繰り返すことによって $\langle g_1, \dots, g_l \rangle$ の高さは l 以上あることが分かる. この議論を高さ $n - r$ のイデアル $\mathcal{I}_p(Y)$ に用いれば, これが $n - r$ 個以下の線形独立な元で生成されることが示される.

前半の議論と合わせて, $\mathcal{I}_p(Y)$ は $n - r$ 個以下の線形独立な元で生成されることが示された.

(c) $Y, Z::\text{linear variety in } \mathbb{P}^n$. Think about $\dim Y + \dim Z \geq n$ and $Y \cap Z \neq \emptyset$.

本文通り $\dim Y = r, \dim Z = s$ とおく. (b) から, $\mathcal{I}_p(Y), \mathcal{I}_p(Z)$ はそれぞれ $n - r$ 個, $n - s$ 個の元で生成される. それぞれ生成元の集合であって最小なものを G_Y, G_Z としよう. $\mathcal{I}_p(Y) = \langle G_Y \rangle, \mathcal{I}_p(Z) = \langle G_Z \rangle$

が成り立つ. $\mathcal{I}_p(Y \cap Z)$ は $\mathcal{I}_p(Y) \cup \mathcal{I}_p(Z)$, すなわち $G_Y \cup G_Z$ で生成される homogenous ideal である. さらに $\mathcal{I}_p(Y \cap Z)$ の生成元の集合であって最小なものを $G_{Y \cap Z}$ としよう. 明らかに $|G_{Y \cap Z}| \leq |G_Y \cup G_Z|$ である.

■ $\dim Y + \dim Z \geq n \implies Y \cap Z \neq \emptyset$ 仮定から $r + s \geq n$. これの両辺に n を加えて整理すれば $(n - r) + (n - s) = |G_Y \cup G_Z| \leq n < n + 1$. よって $\langle G_{Y \cap Z} \rangle = \langle G_Y \cup G_Z \rangle = \mathcal{I}_p(Y \cap Z) \subsetneq S_1$ となる. Ex2.2 から, $Y \cap Z \neq \emptyset$ が成立する.

■ $Y \cap Z \neq \emptyset \implies \dim(Y \cap Z) \geq \dim Y + \dim Z - n$ $\dim(Y \cap Z) = t$ と置くと $|G_{Y \cap Z}| = n - t$. また, $|G_{Y \cap Z}| \leq |G_Y \cup G_Z|$ より $n - t \leq (n - r) + (n - s)$ であるから, 変形して $t \geq (r + s) - n$ すなわち $\dim(Y \cap Z) \geq \dim Y + \dim Z - n$ を得る. $Y \cap Z \neq \emptyset$ は $Y \cap Z$ が variety であることと, $\dim(Y \cap Z)$ が意味を持つために必要.

Ex2.12

以下のような元を並べて M_0, \dots, M_N とする. ただし α は要素数 n の多重指数で, $N = \binom{n+d}{n} - 1$.

$$\prod_{|\alpha|=d} x_0^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

写像 θ を以下で定める.

$$\begin{aligned} \theta: k[y_0, \dots, y_N] &\rightarrow k[x_0, \dots, x_n] \\ f(y_0, \dots, y_N) &\mapsto f(M_0, \dots, M_N) \end{aligned}$$

さらに写像 ρ_d を以下で定める.

$$\begin{aligned} \rho_d: \mathbb{P}^n &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ P &\mapsto (M_0(P) : \cdots : M_N(P)) \end{aligned}$$

これら二つの写像は $\theta \circ f = f \circ \rho_d$ という形で結びつく. $U_i = (\mathcal{Z}_p(x_i))^c \subset \mathbb{P}^n$ とする.

(a) $\ker \theta$: homogenous prime ideal

まず $\text{im } \theta$ を考える. これは θ が準同型だから整域 $k[x_0, \dots, x_n]$ の部分環. 整域の部分環はまた整域だから $\text{im } \theta$ は整域.⁷⁾

$\ker \theta$ が斉次イデアルであることを見よう. $f \in \ker \theta$ を 1 つとると $\theta(f) = 0$. f の斉次分解を $f = \sum_{d \geq 0} f_i$ とする. このとき

$$0 = \theta(f) = \theta \left(\sum_{d \geq 0} f_i \right) = \sum_{d \geq 0} \theta(f_i) = 0$$

θ は i 次斉次式を $d \cdot i$ 次斉次式に写すから, これは $\theta(f) = 0$ の斉次分解である. 0 の斉次分解は $0 = 0 + 0 + \dots$ しかないのだから, $\theta(f_i) = 0$. よって f の各斉次成分 f_i も $\ker \theta$ に属す.

⁷⁾ 部分環の 2 元は整域の元と考えることも出来るから.

$$(b) \quad \rho_d(\mathbb{P}^n) = \mathcal{Z}_p(\ker \theta)$$

■ $\text{im } \rho_d \subset \mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ 一方の包含関係は直ちに示すことが出来る． $P \in \mathbb{P}^n$ を任意に取り， 固定する．

$$\begin{aligned} & \forall f \in \mathcal{Z}_p(\ker \theta), \quad \theta(f) = 0 \\ \iff & \forall f \in \mathcal{Z}_p(\ker \theta), \quad \theta(f)(P) = 0 \\ \iff & \forall f \in \mathcal{Z}_p(\ker \theta), \quad f(\rho_d(P)) = 0 \\ \iff & \rho_d(P) \in \mathcal{Z}_p(\ker \theta). \end{aligned}$$

よって示された．

■ ρ_d は単射である． 次に ρ_d の単射性を示す． $N_{ij} = x_i^{d-1}x_j$ とすると， これは d 次式なので N_{ij} は M_i 達の一部である． 便利のため， $s(i, j) : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を $M_{s(i, j)} = N_{ij}$ なる写像として定義する．

$\rho_d(P) = \rho_d(Q)$ なる 2 点 P, Q をとる． $M_{s(i, i)}(P) = N_{ii}(P) = p_i^d \neq 0$ なる i が存在するので， それを 1 つ選び固定する． この時 $p_i \neq 0$ ． また， $N_{ii}(Q) = q_i^d \neq 0$ から $p_i \neq 0$ が得られる．

$$\begin{aligned} & \rho_d(P) = \rho_d(Q) \\ \iff & \exists \lambda \in k^\times, \quad \forall j, \quad M_j(P) = \lambda M_j(Q) \\ \iff & \exists \lambda \in k^\times, \quad \forall j, \quad M_{s(i, j)}(P) = \lambda M_{s(i, j)}(Q) \\ \iff & \exists \lambda \in k^\times, \quad \forall j, \quad p_i^{d-1}p_j = \lambda q_i^{d-1}q_j \\ \iff & \exists \lambda \in k^\times, \quad \forall j, \quad p_j = \lambda \left(\frac{q_i}{p_i} \right)^{d-1} q_j \\ \implies & \exists \lambda' \in k^\times, \quad \forall j, \quad p_j = \lambda' q_j \\ \iff & P = Q \end{aligned}$$

4 行目の \implies は $\frac{q_i}{p_i} \neq 0$ と， $\lambda \left(\frac{q_i}{p_i} \right)^{d-1}$ は j に依らないことから．

■ 道具の準備． 単射性の証明を参考に， 以下のような写像を作る．

$$\begin{aligned} \sigma_i : \quad V_i & \rightarrow \mathbb{P}^n \\ (p_0 : \cdots : p_N) & \mapsto (p_{s(i, 0)} : p_{s(i, 1)} : \cdots : p_{s(i, n)}) \end{aligned}$$

ただし $V_i = (\mathcal{Z}_p(y_{s(i, i)}))^c$ である． これに対応して， 多項式の写像も作る．

$$\begin{aligned} \psi_i : \quad k[x_0, \dots, x_n] & \rightarrow k[y_0, \dots, y_N] \\ f(x_0, \dots, x_n) & \mapsto f(y_{s(i, 0)}, \dots, y_{s(i, n)}) \end{aligned}$$

これら二つも $\psi \circ f = f \circ \sigma_i$ の様に関係している． 実は V_i は $\mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ を被覆しており， σ_i は各 V_i で $\mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ 上で ρ_d の逆写像となっている．

■ $\{V_i\}_{i=0}^n$ は $\mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ を被覆する． まず M_i を考える． $M_i = \prod_{j=0}^n x_j^{e_j}$ とすると，

$$(M_i)^d = \left(\prod_{j=0}^n x_j^{e_j} \right)^d = \prod_{j=0}^n (x_j^d)^{e_j} = \prod_{j=0}^n (M_{s(j, j)})^{e_j}$$

したがって $(y_i)^d - \prod_{j=0}^n (y_{s(j, j)})^{e_j} \in \ker \theta$ ． 以上の計算から主張が示せる． $P = (p_0 : \cdots : p_N) \in \mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ を任意にとろう． $p_i \neq 0$ だとすると， $P \in \mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ から

$$(p_i)^d = \prod_{j=0}^n (p_{s(j, j)})^{e_j} \neq 0.$$

よってある j について $p_{s(j,j)} \neq 0$ すなわち $P \in V_j$.

■ $\rho_d \circ (\sigma_i|_{\mathcal{Z}_p(\ker \theta) \cap V_i}) = \text{id}_{\mathcal{Z}_p(\ker \theta) \cap V_i}$ $M_0 = \prod_{j=0}^n x_i^{e_j}, \sum e_j = d$ とする. すると以下の計算から $M_0(y_{s(i,0)}, \dots, y_{s(i,n)}) - (y_{s(i,i)})^{d-1} y_{s(i,0)} \in \ker \theta$ が分かる.

$$M_0(M_{s(i,0)}, \dots, M_{s(i,n)}) = \prod_{j=0}^n (M_{s(i,j)})^{e_j} = \prod_{j=0}^n (x_i^{d-1} x_j)^{e_j} = (x_i^{\sum e_j})^{d-1} \prod_{j=0}^n x_j^{e_j} = M_{s(i,i)}^{d-1} M_{s(i,0)}$$

同様に $M_j(y_{s(i,0)}, \dots, y_{s(i,n)}) - (y_{s(i,i)})^{d-1} y_{s(i,j)} \in \ker \theta$ が成り立つ. したがって,

$$\begin{aligned} & \rho_d \circ (\sigma_i|_{\mathcal{Z}_p(\ker \theta) \cap V_i}) (y_{s(i,0)} : \dots : y_{s(i,n)}) \\ &= (M_0(M_{s(i,0)}, \dots, M_{s(i,n)}) : \dots : M_n(M_{s(i,0)}, \dots, M_{s(i,n)})) \\ &= ((y_{s(i,i)})^{d-1} y_{s(i,0)} : \dots : (y_{s(i,i)})^{d-1} y_{s(i,n)}) \\ &= (y_{s(i,0)} : \dots : y_{s(i,n)}). \end{aligned}$$

最後の変形は $V_i = \{(p_0 : \dots : p_N) \mid p_{s(i,i)} \neq 0\}$ から.

■ $\text{im } \rho_d \supset \mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ $P = (p_0 : \dots : p_N) \in \mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ を任意に取る. 前段落でしめたことから, ある i について $P \in V_i$ となっている. $Q = \sigma_i(P)$ とすると, 前段落で示したことから $\rho_d(Q) = \rho_d(\sigma(P)) = P$. よって $\text{im } \rho_d \supset \mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ が示された.

■ 結論. 以上を合わせて ρ_d は \mathbb{P}^n から $\mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ への全単射であること, さらに $\text{im } \rho_d = \mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ であることが示された. また, 単射性の証明を σ_i を用いて書き換えることで $\sigma_i \circ (\rho_d|_{U_i}) = \text{id}_{U_i}$ がわかる. なので ρ_d, σ_i は互いに $U_i \leftrightarrow V_i$ の逆写像となっている.

(c) $\rho_d :: \text{homeomorphism}$.

ρ_d, ρ_d^{-1} の両方が closed map であることを示せば良い.

■ $\rho_d^{-1} :: \text{closed map}$. $\mathfrak{J}(\subset k[y_0, \dots, y_N]) :: \text{homogenous radical ideal}$ をとる. まず $\theta(\mathfrak{J})$ は homogenous である. 先にこれを示そう. \mathfrak{J} の元 f をとり, $f = f_0 + \dots + f_D$ と斉次分解すると, $f_i \in \mathfrak{J}$. なので $\theta(f), \theta(f_i) \in \theta(\mathfrak{J})$. $\theta(f) = \theta(f_0) + \dots + \theta(f_D)$ は $\theta(f)$ の斉次分解なので示せた. 残りは機械的に示される. ただし \mathfrak{J}^h は \mathfrak{J} の斉次な元全体である.

$$\begin{aligned} & P \in \rho_d^{-1}(\mathcal{Z}_p(\mathfrak{J}^h)) \\ & \iff \rho_d(P) \in \mathcal{Z}_p(\mathfrak{J}^h) \\ & \iff \forall f \in \mathfrak{J}^h, \theta(f)(P) = 0 \\ & \iff \forall f \in \mathfrak{J}^h, f(\rho_d(P)) = 0 \\ & \iff P \in \mathcal{Z}_p(\theta(\mathfrak{J})) \end{aligned}$$

$\rho_d^{-1}(\mathcal{Z}_p(\mathfrak{J}^h)) = \mathcal{Z}_p(\theta(\mathfrak{J})^h)$ であるから主張が示された.

■ $\rho_d(\mathcal{Z}_p(\mathfrak{J})) \cap V_i :: \text{closed in } V_i$. $\mathfrak{J}(\subset k[x_0, \dots, x_n]) :: \text{homogenous radical ideal}$ をとる. $\rho_d(\mathcal{Z}_p(\mathfrak{J}))$ の全体が閉集合であることを示すのではなく, その V_i との共通部分が閉集合であることを示そう. 明らかに $\rho_d(U_i) = \text{im } \rho_d \cap V_i$. また, ψ_i は変数を変数に書き換えるだけなので斉次式を斉次式へ写す. なので,

以下が分かる．

$$\begin{aligned}
& Q \in \rho_d(\mathcal{Z}_p(\mathcal{I})) \cap V_i \\
& \iff [Q \in V_i] \wedge [\forall f \in \mathcal{I}^h, f(\rho_d^{-1}(Q))] \\
& \iff [Q \in V_i] \wedge [\forall f \in \mathcal{I}^h, f(\sigma_i(Q))] \\
& \iff [Q \in V_i] \wedge [\forall f \in \mathcal{I}^h, \psi_i(f)(Q)] \\
& \iff [Q \in V_i] \wedge [Q \in \mathcal{Z}_p(\psi_i(\mathcal{I})^h)] \\
& \iff Q \in \mathcal{Z}_p(\psi_i(\mathcal{I})^h) \cap V_i.
\end{aligned}$$

よって $\rho_d(\mathcal{Z}_p(\mathcal{I})) \cap V_i :: \text{closed in } V_i$.

■ $\rho_d :: \text{closed map}$. Ch.I, §3 の Lemma 3.1 にある次の主張を用いる．すなわち，集合 X の部分集合 Y が閉集合であることの必要十分条件は， X がある開集合族 $\{C_i\}_i$ で被覆され，かつ全ての $Y \cap C_i$ が C_i で閉であることである．そこで \mathbb{P}^N の開被覆として $\{V_i\}_{i=0}^n \cup \{(\mathcal{Z}_p(\ker \theta))^c\}$ をとる．すでに $\{V_i\}_{i=0}^n$ が $\mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ を被覆することは示したから，これは確かに開被覆であることが分かる． $\rho_d(\mathcal{Z}_p(\mathcal{I})) \subset \text{im } \rho_d = \mathcal{Z}_p(\ker \theta)$ から $\rho_d(\mathcal{Z}_p(\mathcal{I})) \cap (\mathcal{Z}_p(\ker \theta))^c = \emptyset$ であるが， \emptyset は明らかに閉集合．このことと上の段落で示したことを合わせると， $\rho_d(\mathcal{Z}_p(\mathcal{I}))$ が閉集合であることが分かる．

(d) Twisted cubic curve is a 3-uple emdebeding.

$n = 1, d = 3$ の場合， M_i は例えば以下の様．

$$M_0 = u^3, M_1 = u^2v, M_2 = uv^2, M_3 = v^3$$

そこで ρ_3 の像を見る．

$$\rho_3(\mathbb{P}^1) = \{(u^3 : u^2v : uv^2 : v^3) \mid u, v \in k\} = \{(1, t, t^2, t^3) \mid t \in k\} \cup \{(0 : 0 : 0 : 1)\}$$

これは明らかに $\phi_0^{-1}(T)$ ，すなわち Twisted cubic curve である． $(0 : 0 : 0 : 1)$ は無限遠点であることに注意．

Ex2.13

\mathbb{P}^2 の \mathbb{P}^5 への 2-uple emdebeding を考える．

$$M_0 = x^2, M_1 = y^2, M_2 = z^2, M_3 = xy, M_4 = yz, M_5 = zx$$

とすれば，この emdebeding (Veronese surface) は

$$Y = \rho_d(\mathbb{P}^2) = \{(1 : u^2 : v^2 : u : uv : v), (0 : u^2 : v^2 : 0 : uv : 0) \mid u, v \in k\}$$

となる． $Y \cong \mathbb{P}^2$ から， $\dim Y = 2$ が分かる．

$Z \subseteq Y, \dim Z = 1$ なる closed variety をとる．この時， $V \subset \mathbb{P}^5, \dim V = 5 - 1 = 4$ なる projective variety が存在して $Y \cap V = Z$ となることを示す．それぞれの定義イデアルで考えると， $\mathcal{I}_p(Y), \mathcal{I}_p(Z), \mathcal{I}_p(V)$ はどちらも素イデアルで， $Z \subseteq Y$ より $\mathcal{I}_p(Y) \subseteq \mathcal{I}_p(Z)$ ．高さは $\text{height } \mathcal{I}_p(Y) = 5 - 2 = 3, \text{height } \mathcal{I}_p(Z) = 5 - 1 = 4, \text{height } \mathcal{I}_p(V) = 5 - 4 = 1$ である．したがって critical な問題は $\mathcal{I}_p(Z)$ から $\mathcal{I}_p(Y)$ を「引く」ことで出来るイデアルが高さ 1 の素イデアルになるかどうかである．

S は Noether ring であるから $\mathcal{I}_p(Y), \mathcal{I}_p(Z)$ は有限個の生成元を持つ． $\mathcal{I}_p(Y) \subseteq \mathcal{I}_p(Z)$ から，それら生成元は

$$\mathcal{I}_p(Y) = \langle g_1, \dots, g_r \rangle, \mathcal{I}_p(Z) = \langle g_1, \dots, g_r, h_1, \dots, h_s \rangle$$

の様を選ぶ。この時 $V = \mathcal{Z}_p(\langle h_1, \dots, h_s \rangle)$ とすれば、あきらかに $\mathcal{I}_p(V) \cup \mathcal{I}_p(Y)$ は $\mathcal{I}_p(Z)$ を生成する。すなわち $V \cap Y = Z$ 。また、 $\mathcal{I}_p(Y)$ による剰余をとる写像は全射であるから、 $\mathcal{I}_p(Z)/\mathcal{I}_p(Y) = \mathcal{I}_p(V)$ より、 $\mathcal{I}_p(V)$ は素イデアル。さらにこの写像で $0 = \mathcal{I}_p(Y)/\mathcal{I}_p(Y) \subseteq \mathcal{I}_p(Z)/\mathcal{I}_p(Y) \cong \mathcal{I}_p(V)$ が得られ、height $\mathcal{I}_p(V) = 1$ も示される。

Ex2.14

写像 ψ を次で定める。

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s &\rightarrow \mathbb{P}^N \\ (a_0 : \dots : a_r) \times (b_0 : \dots : b_s) &\mapsto (a_0 b_0 : a_0 b_1 : \dots : a_i b_j : \dots : a_r b_s) \end{aligned}$$

ただし $N := rs + r + s$ とした。このとき、 $\text{im } \psi$ が variety であることを示す。証明のため、以下のような写像 ϕ を考える。

$$\begin{aligned} \phi : k[z_{(0,0)}, \dots, z_{(i,j)}, \dots, z_{(r,s)}] &\rightarrow k[x_0, \dots, x_r, y_0, \dots, y_s] \\ z_{(i,j)} &\mapsto x_i y_j \end{aligned}$$

$\text{im } \phi$ は整域 (cf. Ex2.12a) だから、⁸⁾ $\ker \phi$ は素イデアル。 $\ker \phi$ が斉次であることもわかるから、 $\mathcal{Z}_p(\ker \phi)$ は projective variety ⁹⁾。そこで $\text{im } \psi = \mathcal{Z}_p(\ker \phi)$ を示す。Ex2.3 を用いれば、これは $\mathcal{I}_p(\text{im } \psi) = \ker \phi$ と同値である。

■ $\mathcal{I}_p(\text{im } \psi) \subseteq \ker \phi$ $f \in \mathcal{I}_p(\text{im } \psi)$ を取る。これは $\text{im } \psi$ に属す任意の点 $P = (a_0 b_0 : a_0 b_1 : \dots : a_i b_j : \dots : a_r b_s)$ を 0 にする。したがって、 $a_i b_j$ は $z_{(i,j)}$ に代入されと考えれば、

$$f(P) = \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha} \prod_{(i,j) \in I} z_{(i,j)}^{\alpha_{(i,j)}} \right) (P) = \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha} \prod_{(i,j) \in I} (a_i b_j)^{\alpha_{(i,j)}} \right) = 0$$

ただし $c_{\alpha} \in k, I = \{(i,j) \mid 0 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq s\}$ とした。これは直ちに ϕ で写すことが出来て、

$$\phi(f)(\psi^{-1}(P)) = \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha} \prod_{(i,j) \in I} (x_i y_j)^{\alpha_{(i,j)}} \right) (\psi^{-1}(P)) = \left(\sum_{\alpha} c_{\alpha} \prod_{(i,j) \in I} (a_i b_j)^{\alpha_{(i,j)}} \right) = 0$$

点 P は $\text{im } \psi$ 全体を動くから、 $\phi(f)$ は $\mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s$ 全体で 0 になる。すなわち $\mathcal{Z}_p(\phi(f)) = \mathbb{P}^r \times \mathbb{P}^s = \mathcal{Z}_p(0)$ Ex2.3b を $Y_1 \subseteq Y_2$ かつ $Y_1 \supseteq Y_2$ の場合に用いることで、このような多項式は 0 しかないことが分かる。よって $\phi(f) = 0$ 。

■ $\mathcal{I}_p(\text{im } \psi) \supseteq \ker \phi$ $f \in \ker \phi$ をとる。このとき $\phi(f) = 0$ である。すると

$$\forall P \in \text{im } \psi, \quad \phi(f)(\psi^{-1}(P)) = 0$$

が得られ、前段同様に単項式を見ることで $f(P) = 0$ が得られる。

Ex2.15

The Segre Embedding $\psi : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ を考える。

⁸⁾ 整域 R に対して $R[x_1, \dots, x_n]$ の部分環は整域。零因子の最高次係数が 0 になることを見よ。

⁹⁾ 例えば $z_{(1,1)} z_{(2,2)} - z_{(1,2)} z_{(2,1)}$ は $x_1 y_1 x_2 y_2 - x_1 y_2 x_2 y_1 = 0$ となる。同様の元が $\ker \phi$ を生成する。

(a) The Quadric Surface in \mathbb{P}^3 is the Segre embedding of $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ in \mathbb{P}^3 .

この時, Ex2.14 で定めた ϕ の核は,

$$\ker \phi = \langle z_{(1,1)}z_{(2,2)} - z_{(1,2)}z_{(2,1)} \rangle = \langle xy - zw \rangle$$

Ex2.14 より,

$$\operatorname{im} \psi = \mathcal{Z}_p(\ker \phi) = \mathcal{Z}_p(xy - zw)$$

である. これは the quadric surface Q の定義である.

(b) Q contains two families of lines $\{L_t\}, \{M_t\}$.

$t = (a : b) \in \mathbb{P}^1$ を任意にとる. この時, 次のように定めた $\{L_t\}, \{M_t\}$ は本文中の条件を満たす.

$$L_t = \mathcal{Z}_p(\{bx - az, by - aw\}), M_t = \mathcal{Z}_p(\{bx - ay, bz - aw\})$$

それぞれ, $\psi((a : b) \times (u : t)), \psi((u : t) \times (a : b))$ の結果をもとに作った. これらが Q に含まれる直線であることは作り方から自明. 実際に $\{L_t\}, \{M_t\}$ が条件を満たすことを示そう.

■ $t \neq u \implies L_t \cap L_u = \emptyset, M_t \cap M_u = \emptyset$ $t = (a : b), u = (c : d)$ とする. このとき, $L_t \cap L_u = \mathcal{Z}_p(\{bx - az, by - aw, dx - cz, dy - cw\})$ となる. $bx - az = 0 \wedge dx - cz = 0$ かつ $t \neq u$ (すなわち $ad - bc \neq 0$) から $x = z = 0$.¹⁰⁾ さらに $by - aw = 0 \wedge dy - cw = 0$ も同様に考えて, $y = w = 0$. 合わせて $L_t \cap L_u = \{(0 : 0 : 0 : 0)\} = \emptyset$ が示される. M_t でも同様.

■ $\forall t, u \in \mathbb{P}^1, L_t \cap M_u = \{\text{one point}\}$ $t = (a : b), u = (c : d)$ とする. $L_t \cap M_u = \mathcal{Z}_p(\{bx - az, by - aw, dx - cy, dz - cw\})$ である. この解としては $P = \psi((a : b) \times (c : d)) = (ac : ad : bc : bd)$ がある. $t, u \neq (0 : 0)$ だから $P \in \mathbb{P}^3$. $L_t \cap M_u = \{\text{one point}\}$ は, 以下の方程式の解空間が 1 次元であることと同値である.

$$\begin{bmatrix} b & 0 & -a & 0 \\ 0 & b & 0 & -a \\ d & -c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = 0$$

この係数行列を A とする. A を基本変形すると, 次のよう.

$$\begin{bmatrix} b & 0 & -a & 0 \\ 0 & b & 0 & -a \\ 0 & 0 & d & -c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\alpha := ad - bc)$$

よって $\operatorname{rank} A = 3$. 次元定理より, 解空間の次元は $\dim \ker A = 4 - 3 = 1$.

(c) ψ is not a homeomorphism between Q and $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

\mathbb{P}^1 の開基 U, V について, $U \times V$ は $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の開基である. これは fact として利用する. すると \mathbb{P}^1 の開集合は \mathbb{P}^1 全体から有限個の点を除いたものだから, それを ψ で写したものは Q 全体から有限個の $\{L_t\}, \{M_t\}$ を除いたもの, あるいはそれらの和集合である, Q 全体から有限個の点を除いたものとなる.

¹⁰⁾ 行列で考えると良い.

今, $\psi((u, v) \times (u, v)) = (u^2 : uv : uv : v^2)$ を考えると, これは曲線であり, $\mathcal{Z}_p(\{z^2 - xw, y^2 - xw\})$ と一致する. この曲線を C としよう. $C \cap L_t, C \cap M_t$ はそれぞれ, $t = (a : b)$ とした時,

$$C \cap L_t = \{(a^2 : ab : ab : b^2)\} = C \cap M_t$$

となる. すなわち $C \cap L_t, C \cap M_t$ は 1 点であり, C は L_t, M_t と一致しない. よって $\mathbb{P}^1 \setminus C$ は Q 全体から有限個の $\{L_t\}, \{M_t\}$ を除いたものではない曲線である. なので $\mathbb{P}^1 \setminus C$ は開集合の ψ による像ではない. ψ が開写像でないから, ψ は homeomorphism ではない.

Ex2.16

(a) $\mathcal{Z}_p(x^2 - yw) \cap \mathcal{Z}_p(xy - zw)$

$(x^2 - yw = 0) \wedge (xy - zw = 0)$ を考えると, これは以下と同値.

$$((w \neq 0) \wedge (y - (\frac{x}{w})^2 = 0) \wedge (z - (\frac{x}{w})^3 = 0) \vee ((w = 0) \wedge (x = 0)))$$

よって

$$\mathcal{Z}_p(x^2 - yw) \cap \mathcal{Z}_p(xy - zw) = \{(t : t^2 : t^3 : 1) \mid t \in k\} \cup \{(0 : u : v : 0) \mid u, v \in k\}$$

これは twisted cubic curve と直線の和である.

(b) $\mathcal{Z}_p(x^2 - yz) \cap \mathcal{Z}_p(y)$

$(x^2 - yz = 0) \wedge (y = 0)$ を解くと, $(x = 0) \wedge (y = 0)$. \mathbb{P}^3 における交点を考えているので, 結局

$$\mathcal{Z}_p(x^2 - yz) \cap \mathcal{Z}_p(y) = \{(0 : 0 : 1)\}$$

となる. これに対応するイデアルは $\mathfrak{m} = (x, y)$ である.

一方,

$$(x^2 - yz) + (y) = (x^2, y) \neq \mathfrak{m}$$

となる. ただし, $\sqrt{(x^2, y)} = \mathfrak{m}$ である.

Ex2.17

次元 r の variety $Y (\subset \mathbb{P}^n)$ が (strict) complete intersection であるとは, $\mathcal{I}_p(I)$ が丁度 $n - r$ 個の元で生成されるということである. 同じく, Y が set-theoretic complete intersection であるとは, Y が丁度 $n - r$ 個の hypersurface¹¹⁾ で表されるということである.

(a) If ideal \mathfrak{a} can be generated by q elements, $\dim \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) \geq n - q$

Ex2.6 より, $\dim \mathcal{Z}_p(\mathfrak{a}) = \dim S/\mathfrak{a} - 1$. 定理 (1.8A) から, 証明は $\text{height } \mathfrak{a} \leq q$ に絞られるが, これは Krull の高度定理¹²⁾ から明らか. (生成元が homogenous であることは定義?)

¹¹⁾ 1 つの既約多項式で定義される variety. Ex2.8.

¹²⁾ If R is a Noetherian ring and I is a proper ideal generated by n elements of R , then $\text{height } I \leq n$.

(b) strict complete intersection is a set-theoretic complete intersection.

Y は空でなく, $\mathcal{I}_p(Y)$ は素イデアルだから, 既約多項式で生成される.¹³⁾ strict complete intersection Y の生成集合として最小のもの G_Y を取ると, G_Y の各元は既約であり, かつ $|G_Y| = n - \dim Y$ となる. すると $f \in G_Y$ にたいして $Z_p(f)$ は hypersurface である. 異なる $f, g \in G_Y$ が定義する $Z_p(f), Z_p(g)$ が一致することはないから, こうして作られる hypersurface は丁度 $|G_Y|$ 個.

¹³⁾ 定数でない多項式 f, g をとると多項式 fg (積) は既約でない. また, $\deg f, \deg g < \deg(fg)$.