

## Ex4.1 Finite Morphism is Proper.

$f: X \rightarrow Y$  を finite だとする. Cor4.8f と Ex3.4 より,  $X, Y$  が affine scheme である場合について調べれば十分である.

$X = \text{Spec } A, Y = \text{Spec } B$  とすると,  $A ::$  finitely generated  $B$ -module. なので特に  $X ::$  Noetherian scheme. 任意の  $R ::$  valuation ring をとり,  $K = \text{Quot } R$  とする. 今, 以下の可換図式が成り立っているとすると,

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K & \longrightarrow & \text{Spec } A \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec } R & \longrightarrow & \text{Spec } B \end{array}$$

これに対応して, 以下の環の可換図式が成り立つ. Prop2.3 より, 二つの可換図式は一対一に対応している.

$$\begin{array}{ccc} K & \xleftarrow{u} & A \\ \uparrow & & \uparrow \phi \\ R & \xleftarrow{v} & B \end{array}$$

$A ::$  integral /  $B$  から  $v(B) \subseteq u(A) ::$  integral ring extension が得られる<sup>†1</sup>.  $v(B) \subseteq R$  と合わせて,  $u(A) (\subseteq K) ::$  initegral /  $R$ .  $R$  が付値環であることから,  $R$  は  $K$  上整閉. よって  $u(A) \subseteq R$ . このことから  $u: A \rightarrow R$  の存在が得られる. さらに,  $R \rightarrow K$  が単射であることからこのような射はただひとつ. 図式の一対一対応から,  $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } A$  の射がただひとつ存在することがわかった.

## Ex4.2

$U ::$  dense in  $X$  とし, 以下の可換図式で  $f, g :: S$ -morphism は  $f|_U = g|_U$  を満たすとする.

$$\begin{array}{ccccc} & U & & & \\ & \downarrow & & & \\ X & \xrightarrow{h} & Y \times_S Y & \xleftarrow{\Delta} & Y \\ & \searrow g & & \nearrow & \\ & Y & \xrightarrow{\quad} & S & \xleftarrow{\quad} & Y \end{array}$$

$U \rightarrow X \rightarrow Y = Y \rightarrow Y \times_S Y$  とたどると,  $\Delta(f(U)) = h(U)$  が得られる.  $f(U) \subseteq Y$  から  $h(U) \subseteq \Delta(Y)$ . さらに次の計算から  $h(X) \subseteq \Delta(Y)$  が得られる.

$$h(X) = h(\text{cl}_X(U)) \subseteq \text{cl}_Y(h(U)) \subseteq \text{cl}_Y(\Delta(Y)) = \Delta(Y).$$

最後の等号で  $Y ::$  separated /  $S$  を用いた. 可換図式にある  $Y \times_S Y \rightarrow Y$  の射を  $\text{pr}_1, \text{pr}_2$  とする.  $h(X) \subseteq \Delta(Y)$  から以下が得られる.

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, f(x) = \text{pr}_1 \circ h(x) = \text{pr}_1 \circ \Delta(y) = y = \text{pr}_2 \circ \Delta(y) = \text{pr}_2 \circ h(x) = g(x).$$

よって topological space の射として  $f = g$ .

さらに scheme の射として  $f = g$  であることを示す.

<sup>†1</sup>  $a \in A$  をとると,  $a^n + \phi(b_{n-1})a^{n-1} + \cdots + \phi(b_0) = 0$  となる  $n > 0$  と  $b_i \in B$  が存在する. 両辺を  $u$  で写すと,  $u \circ \phi = v$  より  $u(a)^n + v(b_{n-1})u(a)^{n-1} + \cdots + v(b_0) = 0$ .

**主張 Ex4.2.1**

$V :: \text{open in } Y$  を任意に取る.  $\bar{V} = f^{-1}V \cap U = g^{-1}V \cap U (\neq \emptyset)$  とする. 任意の  $s \in \mathcal{O}_Y(V)$  に対し  $s|_{\bar{V}} = 0$  ならば  $s = 0$ .

$f|_U = g|_U$  から  $(f^\#(s) - g^\#(s))|_{\bar{V}} = 0$  が直ちに得られる. なので, この主張が示されれば  $f^\#(s) - g^\#(s) = 0$  すなわち  $f^\# = g^\#$  が得られる.

(証明).  $V :: \text{affine}$  の場合に調べれば十分なので  $V = \text{Spec } A$  とする.  $\mathfrak{p} \in \bar{V}$  を任意に取ると,  $s|_{\bar{V}} = 0$  より  $s_{\mathfrak{p}} = 0$ . これは  $s = 0$  in  $A_{\mathfrak{p}}$  を意味する. したがって次が成り立つ.

$$\exists t \notin \mathfrak{p}, \quad st = 0 \in \mathfrak{p}.$$

よって  $s \in \mathfrak{p}$ ,  $\mathfrak{p} \in V(s)$  となる.  $\mathfrak{p} \in \bar{V}$  は任意にとっていたので  $\bar{V} \subseteq V(s)$ .  $\bar{V}$  は  $V = \text{Spec } A$  で dense だから, 両辺の閉包をとって  $V = V(s)$ . すなわち  $s = 0$ . ■

**Ex4.3  $X :: \text{Separated over an Affine Scheme } S$ .**

$S :: \text{affine scheme}$ ,  $X :: \text{separated scheme}/S$ ,  $U, V :: \text{affine open subscheme of } X$  とする. 以下が fiber product であれば, 主張が示せる.

$$\begin{array}{ccc} U \cap V & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \Delta \\ U \times_S V & \longrightarrow & X \times_S X \end{array}$$

実際,  $\Delta :: \text{closed immersion}$  と Ex3.11a より  $U \cap V \rightarrow U \times_S V$  は closed immersion.  $U \times_S V :: \text{affine}$  と Ex3.11b より  $U \cap V :: \text{affine}$ .

**Ex4.4 "The Image of a Proper Scheme is Proper."**

**Ex4.5 Center of Valuation Ring of  $K/k$ .**

$X :: \text{integral scheme of finite type over a field } k$ ,  $K :: \text{function field of } K$  とする. 特に,  $f: X \rightarrow \text{Spec } k$  が finite type であるとしておく. また,  $X$  は finitely generated  $k$ -algebra の Spec で被覆されるから Noetherian である.

$K/k$  の valuation ring  $R$  が  $x \in X$  を center に持つとは,  $R$  が  $\mathcal{O}_{X,x}$  を dominate するということである. 言い換えれば, injection  $\mathcal{O}_{X,x} \hookrightarrow R$  が存在し, これが local ring homomorphism であるということである.

(a) If  $X :: \text{separated}/k$  then any valuation of  $K/k$  has at most one center.

$R$  を  $K/k$  の任意の valuation ring とする. 以下の可換図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } K & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \text{Spec } R & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

まず,  $f$  は与えられたものである.  $\text{Spec } K \rightarrow \text{Spec } R$  は包含写像  $R \subseteq K$  (特に単射) から得られるから,

$$\text{Spec } K \ni (0) \mapsto (0) \in R.$$

$\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } k$  も同様.  $\text{Spec } K \rightarrow X$  は  $(0) \in \text{Spec } K$  を  $X$  の generic point  $\zeta$  に写すものとする. 実際このような射が存在することは Lemma4.4 による.

$X :: \text{Noetherian scheme}$  だから, この時, 図式を可換にする  $\text{Spec } R \rightarrow X$  の射  $i$  が高々一つある (Thm4.3).

$$\begin{array}{ccccc} \text{Spec } K & \longrightarrow & \text{Spec } R & \xrightarrow{i} & X \\ (0) & \longmapsto & (0) & \longmapsto & \zeta \\ \parallel & & & & \parallel \\ (0) & \longmapsto & & & \zeta \end{array}$$

可換性から,  $i$  は  $(0) \subseteq R$  を  $\zeta$  へ写す. Lemma4.4 より,  $R$  のもうひとつの点 (極大イデアル)  $x$  について,  $R$  は  $\text{cl}_X(\{\zeta\}) = X$  上の点  $i(x)$  における local ring  $\mathcal{O}_{X,i(x)}$  を dominate する. 再び Lemma4.4 から, 逆に  $R$  が  $\mathcal{O}_{X,x'}$  を dominate するならば,  $x$  を  $x'$  に写すことで  $i$  が得られる. よって  $R$  の center と  $i$  は一対一に対応し, たかだか一つしか無い.

(b) If  $X :: \text{proper}/k$  then any valuation of  $K/k$  has just one center.

この場合,  $f :: \text{finite type}$  かつ  $X :: \text{Noetherian}$  なので, Thm4.7 が成立する. そして Thm4.7 から  $i$  は丁度一つある. ほかは (a) と全く同じ.

(c) The Converses of (a) and (b).

Ex2.7 と Lemma4.4 を使うのだと思う.

(d) Generalization of ch I, 3.4a.

$X :: \text{proper}/k$  かつ  $k :: \text{algebraically closed}$  とする. この時  $G := \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$  であることを示す.  $a \in k \implies a \in G$  ( $k \subseteq G$ ) は明らかなので,  $a \notin k \implies a \notin G$  を示せば十分である. そのために,  $a \notin k$  かつ  $a \in G$  となる元が存在すると仮定しよう.

$k[a^{-1}] \subseteq R \subsetneq K$  なる valuation ring  $R$  すべての共通部分は, Thm4.11 より  $K$  における整閉包  $\overline{k[a^{-1}]}$  である. 下で示すように, これは  $a$  を含まない. したがって  $a^{-1} \in R, a \notin R$  であるような valuation ring  $R$  が存在する.  $a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \subseteq K$  だと仮定すると, 任意の  $x \in X$  について  $a \in \mathcal{O}_{X,x}$ . よって  $\mathcal{O}_{X,x} \subseteq R$  ならば  $a, a^{-1} \in R$  となり, これは今示したことに反する. したがって  $R$  はいかなる点も center に持たない. これは (b) に反する.

**主張 Ex4.5.1**

$$\forall a \in K^\times, \quad a \in \overline{k[a^{-1}]} \implies a, a^{-1} \in \bar{k}.$$

(証明).  $a \in K^\times = K - \{0\}$  が  $k[a^{-1}]$  上整ならば, 以下のような零でない多項式  $f \in k[X, X^{-1}]$  が存在する.

$$f(X) = X^d + c_{d-1}(X^{-1})X^{d-1} + \cdots + c_0(X^{-1}) \neq 0, \quad f(a) = 0.$$

ここで  $c_i(X^{-1}) \in k[X^{-1}]$ .  $f$  に  $X^{-d} \in k[X, X^{-1}]$  をかける.

$$X^{-d}f(X) = 1 + c_{d-1}(X^{-1})X^{-1} + \cdots + c_0(X^{-1})(X^{-1})^d \neq 0, \quad (X^{-d}f)(a) = a^{-d}f(a) = 0.$$

したがって,  $f'(X) = 1 + c_{d-1}(X)X + \cdots + c_0(X)X^d$  とおくと,  $f' \neq 0, f'(a^{-1}) = 0$  が成立する. すなわち  $a^{-1}$  は  $k$  上代数的である. よって  $a^{-1} \in \bar{k}$ .  $a \neq 0$  から  $a, a^{-1} \in \bar{k}$ . ■

### Another Proof of (d).

$G := \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$  が  $k$  の代数的拡大体であることを示す.  $a \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = G$  を任意に取る. すると任意の点  $x$  について  $a \in \mathcal{O}_{X,x}$ . また,  $K/k$  の任意の valuation ring  $R$  は Ex4.5b より少なくとも 1 点  $x$  について  $a \in \mathcal{O}_{X,x} \subseteq R$  となる. よって Thm4.11 より以下が得られる.

$$k \subseteq G \subseteq \bar{k}.$$

すなわち  $G$  は  $k$  上整である. このことと Ati-Mac Prop5.7 より  $G$  は体. 以上より,  $G$  は  $k$  の代数拡大体.

### Ex4.6 $f ::$ proper morphism of affine varieties/ $k$ . Then $f ::$ finite.

$f : X \rightarrow Y$  を考える.  $X, Y ::$  affine variety /  $k$  より,  $X, Y$  は  $A, B ::$  affine domain /  $k$  を用いて  $X = \text{Spec } A, Y = \text{Spec } B$  と書ける.  $f$  から誘導される環準同型を  $\phi : B \rightarrow A$  とする.  $A, B ::$  affine domain /  $k$  から特に  $X, Y$  は Noetherian である. また,  $f ::$  finite type より  $A ::$  finitely generated  $B$ -algebra. よって,  $f ::$  finite であるためには  $\phi ::$  integral すなわち  $A ::$  integral /  $\phi(B)$  を示せば十分である.

$K = \text{Quot}(\phi(B))$  とし,  $R$  を  $\phi(B) \subseteq R \subset K$  であるような任意の valuation ring とする. Thm4.7 から以下の可換図式が得られる.

$$\begin{array}{ccc} K & \xleftarrow{\quad} & A \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow \phi \\ R & \xleftarrow{\quad} & B \end{array}$$

$A \rightarrow R \rightarrow K = A \rightarrow K$  かつ右辺が埋め込みであることから  $A \rightarrow R$  は埋め込みである. すなわち  $(\phi(B) \subseteq) A \subseteq R$ .  $R$  のとり方と Thm4.11 より,  $A \subseteq \overline{\phi(B)}$ . よって  $A ::$  integral /  $\phi(B)$ .

### Ex4.7 Schemes Over $\mathbb{R}$

### Ex4.8 Let $\wp ::$ Property of Morphisms of Schemes

### Ex4.9 Composition of Projective Morphisms is Projective

### Ex4.10 Chow's Lemma.

### Ex4.11 Describe Valutive Criteria of Separatedness and Properness.

### Ex4.12 Examples of Valuation Rings.

(a) If  $K/k ::$  function field of  $\dim = 1$ , then every valuation ring of  $K/k$  is discrete.

$K$  に対応する nonsingular projective curve を  $\tilde{C}$  (cf. ch I, Cor6.12) とし,  $C = t(\tilde{C})$  を  $C$  に対応する scheme とする (Prop 2.6). これは projective integral scheme/ $k$ , 特に proper & integral scheme of finite type /  $k$  (Prop4.10).  $C$  上の irreducible closed subset は  $C$  と closed point しか無いから,  $C$  の点 は  $\zeta ::$  generic point と closed point しかない.

主張 **Ex4.12.1** (claim 1)

$$K = \mathcal{O}_{C,\zeta} = K(\tilde{C}).$$

(証明). Prop2.6 の証明を見ると,  $\mathcal{O}_C$  は sheaf of regular functions on  $\tilde{C}$  である. なので  $K(\tilde{C}), \mathcal{O}_{C,\zeta}$  の定義から両者は一致する. ■

主張 **Ex4.12.2** (claim 2)

$x \in C ::$  closed point について  $\mathcal{O}_{C,x} ::$  DVR.

(証明).  $\mathcal{O}_C ::$  sheaf of regular functions on  $\tilde{C}$  から,  $\mathcal{O}_{C,x} = \mathcal{O}_{\tilde{C},x}$ . これが DVR であることは ch I, Prop6.7 の証明中程にもあるし, ch I, Thm6.2 と Dedekind domain の定義の下の方からも分かる. ■

$K/k$  の ( $K$  ではない) 任意の valuation ring  $R$  を考える.  $C ::$  proper & integral scheme of finite type /  $k$ , Ex4.5b と claim 1 より,  $R$  が  $\mathcal{O}_{C,x}$  を dominate するような点  $x \in C$  が一つあることが言える.  $\mathcal{O}_{C,x} \subseteq R \neq K$  から,  $x ::$  closed point. さらに claim 2 から,  $R$  は少なくとも一つの DVR を dominate すると言える. valuation ring の極大性から  $\mathcal{O}_{C,x} = R ::$  DVR.

Another Proof of (a).

$R$  を  $K/k$  の valuation ring とする.  $R$  の任意の元が  $k$  上代数的ならば  $R$  は ( $k$  の代数的拡大) 体となるから,  $R$  は  $k$  上超越的な元  $t$  を持つ.

$A := k[t]$  は integral domain で, なおかつ  $\text{Quot}(A) \subseteq K$ . なので  $A$  の  $K$  での整閉包  $A'$  をとると, ch I, Thm3.9 より,  $A'$  は finitely generated  $k$ -algebra.  $A \subseteq A'$  が integral ring extension で  $\dim A = 1$  だから  $\dim A' = 1$ . したがって  $A'$  は Dedekind domain である.

今,  $A' \subseteq R$  となっている. これは integral ring extension (示す必要がある).  $R$  の極大イデアル  $\mathfrak{m}_R$  の contraction  $\mathfrak{m}_{A'} = \mathfrak{m}_R \cap A'$  をとると, Ati-Mac Cor5.8 より,  $\mathfrak{m}_{A'}$  は  $A'$  の極大イデアル. したがって  $A'$  を  $\mathfrak{m}_{A'}$  で局所化すると, ch I, §6 の Dedekind domain の定義 (p.40) の下にある注意から, DVR が得られる. しかも  $A'_{\mathfrak{m}_{A'}} \subseteq R$  かつ  $\mathfrak{m}_{A'} = \mathfrak{m}_R \cap A'$  から,  $R$  は  $A'_{\mathfrak{m}_{A'}}$  を dominant する. valuation ring は dominating に関しての極大元だから,  $R = A'_{\mathfrak{m}_{A'}} ::$  DVR.