第 1 章
Etale Morphisms

七条彰紀

2019 年 6 月 19 日

目次

この章では etale morphism の定義，例，命題を取り上げる．

1 Definitions.

定義 1.1 (Infinitesimal Thickening, Formally Smooth/Unramified/Etale) (i) $i\colon Y_0' \hookrightarrow Y'$ :: closed embedding について，defining ideal :: $\ker i^{\#}$ が nilpotent [†1]であるとき，Y_0' を Y' の infinitesimal thickening（無限小肥大？）と呼ぶ．あるいは i を infinitesimal thickening と呼ぶ．

(ii) Y' :: affine Y-scheme, $Y_0'(\hookrightarrow Y')$ :: infinitesimal thickening of Y' とする．$f\colon X \to Y$ について，以下の図式を見よ．

$$\begin{tikzcd} Y_0' \arrow[r, red] \arrow[d, hook, "\text{inf. thi.}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] \arrow[ur, blue] & Y \end{tikzcd}$$

この時，次の写像が定まる．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_Y(Y', X) & \to & \mathrm{Hom}_Y(Y_0', X) \\ {\color{blue}\to} & \mapsto & {\color{red}\to} \end{array}$$

この写像が surjective injective, bijective であるとき，それぞれ formally smooth, formally unramified, formally etale という．

[†1] i.e. $^\exists n > 0,\ \ (\ker i^{\#})^n = 0$

定義 1.2 ((Locally) Of Finite Presented Module/Algebra/Sheaf/Morphism)

(i) R-module :: M が finitely presented module であるとは，次の完全列が存在すること．

$$A^{\oplus r} \longrightarrow A^{\oplus s} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(ii) surjective ring homomorphism :: $\phi\colon R[x_1, \ldots, x_s] \to A$ が存在し，$\ker\phi$ が finitely generated ideal であるとき，A :: finitely presented R-algebra (of finite presentation over R) という．

(iii) $\mathcal{F}$ :: quasi-coherent sheaf on a scheme X とする．$\mathcal{F}$ :: locally finitely presented とは，任意の affine open subscheme of X :: $\operatorname{Spec} A \subseteq X$ について，$\Gamma(\operatorname{Spec} B, \mathcal{F})$ が finitely presented B-moduleであること．

(iv) $f\colon X \to Y$ :: locally of finite presentation であるとは，任意の $\operatorname{Spec} B \subseteq Y$ と $\operatorname{Spec} A \subseteq f^{-1}(\operatorname{Spec} B)$ について，A :: finitely presented B-algebra であるということ．あるいは（同値な条件として），affine open cover of Y :: $Y = \bigcup_i \operatorname{Spec} B_i$ が存在して，任意の $\operatorname{Spec} A_{ij} \subseteq f^{-1}(\operatorname{Spec} B_i)$ について，A_{ij} :: finitely presented B_i-algebra であるということ．

(v) $f\colon X \to Y$ が quasi-compact であるとは，任意の affine open subset of X :: $\operatorname{Spec} A$ について $f^{-1}(\operatorname{Spec} A)$ :: quasi-compact であること．あるいは（同値な条件として），affine open cover of Y :: $Y = \bigcup_i \operatorname{Spec} B_i$ が存在して，$f^{-1}(\operatorname{Spec} B_i)$ :: quasi-compact であること．

(vi) $f\colon X \to Y$ が quasi-separated であるとは．また diagonal morphism :: $\Delta\colon X \to X \times_Y X$ [†2] が quasi-compact であること．

(vii) $f\colon X \to Y$ が locally of finite presentation かつ quasi-compact かつ quasi-separated である時，f :: finitely presented という．

環 R や scheme :: Y を noetherian とすれば，(locally) of finite presentation と (locally) of finite type は同値に成る．一般に (locally) of finite presentation の方が強い条件である（例を参照せよ）．

定義 1.3 (Smooth/Unramified/Etale)
morphism :: $f\colon X \to Y$ は，formally smooth / unramified / etale かつ finitely presented ならば smooth / unramified / etale という．

unramified については，finite type のみ要求する定義もある．finitely presented を要求するのは EGA からのもので，我々が主に参照している [4] もこの定義を取っている．

---

†2 Δ は以下のように pullback の普遍性から得られる射である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\Delta"] \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & X \times X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

2 Examples.

例 2.1

locally of finite presentation かつ quasi-compact だが NOT quasi-separated である例を挙げる．

以下のように設定する．

- k :: field,
- $Y = \operatorname{Spec} k[x_1, x_2, \dots]$,
- $z = (x_1, x_2, \dots) \in Y$,
- $U = Y - \{z\}$.

この時，U は quasi-compact でない．これは U :: quasi-compact $\iff$ z :: finitely generated からわかる[†3]．

X を，二つの Y のコピーを U で貼り合わせたものとし，$X_1, X_2 \subseteq X$ をその Y のコピーとする．すなわち $X_1, X_2 \cong Y$．この同型を $\phi_i \colon X_i \to Y$ と名付ける．このとき，$f \colon X \to Y$ を ϕ_1, ϕ_2 の U に沿った貼り合わせとする．こうすると $f|_{X_i} = \phi_i$ となる．

■f :: locally of finite presentation.　Y :: affine scheme で，$f^{-1}(Y) = X_1 \cup X_2$ であり，$X_1, X_2 \cong Y$ であった．なので f :: locally of finite presentation.

■f :: quasi-compact.　同じく，X_1, X_2 :: quasi-compact なので $f^{-1}(Y) = X_1 \cup X_2$ が quasi-compact.

■f :: NOT quasi-separated.　$\operatorname{sp}(X \times_Y X)$ と $\Delta \colon X \to X \times_Y X$ を考えると次のように成る．

$$\Delta \colon x \mapsto (\phi_1^{-1}(x), \phi_2^{-1}(x)).$$

一方，$X_1 \times_Y X_2 (\subset X \times X)$ は，$X_1, X_2 (\cong Y)$ が affine なので affine. そこで逆像 $\Delta^{-1}(X_1 \times_Y X_2)$ を取ると，これは U である．既に述べたとおり，これは NOT quasi-compact.

例 2.2 (Smooth (BUT NOT Etale) Morphism.)

次のように定める．

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \operatorname{Spec} k[x,y] & \to & \operatorname{Spec} k[t] \\ & (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

これは affine scheme の間の射なので quasi-separated. $f^{-1}(\operatorname{Spec} k[t]) = \operatorname{Spec} k[x,y]$ が noetherian scheme なので finitely presented. あとは formally smooth であることを示せば良い．（TODO）

例 2.3 (Unramified (BUT NOT Etale) Morphism.)

次のように定める:

$$\begin{array}{rccc} h\colon & \operatorname{Spec} \dfrac{\mathbb{C}[x,y]}{(x^2 - y^3)} & \to & \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x] \\ & (x,y) & \mapsto & x \end{array}$$

[†3] 私のノート: https://github.com/ShitijjyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section2_ex.pdf 補題 Ex2.13.2 (II) に証明がある．

f の場合と同様に，formally unramified だけ示せば良い．（TODO）

例 2.4 (Etale Morphism.)
次のように定める:

$$\begin{array}{rccc} h\colon & \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[u,u^{-1},y]/(y^d-u) & \to & \operatorname{Spec}\mathbb{Q}[t,t^{-1}] \\ & (u,y) & \mapsto & u \end{array}$$

$A=\mathbb{Q}[t,t^{-1}], B=\mathbb{Q}[u,u^{-1},y]/(y^d-u)$ とおくと．h に対応する環準同型は $h^{\#}\colon A\to B; t\mapsto ua \bmod (y^d-u)$．$f$ の場合と同様に，formally etale だけ示せば良い．

以下の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & R/I \\ A \arrow[u, "h^{\#}"] \arrow[r, "\phi"'] & R \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

ここで $I\subseteq R$ はイデアルで，$I^N=0$ となる整数 $N>0$ が存在する．与えられた α から図式を可換にする β を構成し，このような β が α に対し唯一つであることを示す．まず β は $t\in B$ の像のみで定まることに注意する．図式が可換であることと，次が成立することは同値．

$$\beta h^{\#}(t)=\beta(u)=\phi(t), \qquad \pi\beta(u)=\alpha(u)$$

よって $\beta(u)=\phi(t)$ で β を定めれば良い．このように定めれば後者も成立する．また，この構成から明らかに β はただ一つ．

例 2.5 (Formally Etale BUT NOT Etale Morphism.)
例 (2.1) の morphism :: $f\colon X\to Y$ がそうである．このことを示すには，Formally etale であることだけ確かめれば十分．

3 Propositions.

命題 3.1
以下に列挙する性質は，stable under base exchange かつ stable under composition.

(1) locally of finite presentation,

(2) quasi-compact,

(3) quasi-separated,

(4) of finite presenration,

(5) formally smooth,

(6) formally unramified,

(7) formally etale,

(8) smooth,

(9) unramified,

(10) etale.

(証明). 証明が必要なのは (1), (2), (3) と (5), (6), (7) である．いずれも簡単なのでここでは証明しない． ■

定義 3.2 (smooth of relative dimension 0)
morphism :: $f\colon X \to Y$ について以下が成立する時，f :: smooth of relative dimension 0 と呼ぶ.

(i) f :: finite type over k,

(ii) f :: flat,

(iii) $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ を $f(X') \subseteq Y'$ を満たす irreducible component とする．
この時 $\dim X' = \dim Y' + n$,

(iv) 任意の $x \in X$ について $\dim_{k(x)}(\Omega_{X/Y} \otimes k(x)) = n$.

定理 3.3 ([1] Ex.III.10.3)
morphism :: $f\colon X \to Y$ について以下は同値.

(i) f :: etale,

(ii) f :: flat and unramified,

(iii) f :: smooth of relative dimension 0.

(証明). (TODO) ■

命題 3.4
formally smooth/unramified/etale は locally on codomain な性質である.

(証明). (TODO) ■

命題 3.5 ([4] Prop1.3.6 (i))
$f\colon X \to Y$ を finite presentation, quasi-separated morphism とする．この時 $\Omega_{X/Y}$ は次のように成る.

(i) f :: smooth $\Longrightarrow$ $\Omega_{X/Y}$ :: locally free sheaf of finite rank.

(ii) f :: unramified $\Longleftrightarrow$ $\Omega_{X/Y} = 0$.

(iii) f :: etale $\Longrightarrow$ $\Omega_{X/Y} = 0$.

(証明). 証明は [2] §25 の内容を一部使う．特に §25 始めから Thm25.1 の直前までがわかっていれば良い.

主張は local なものだから，$X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A$ と仮定して良い．f :: smooth より B :: finitely presented A-algebra. f に対応する準同型を $\phi\colon A \to B$ とする.

(i) を示すために，$\Omega_{B/A}$ :: projective B-module を示す（projective ならば locally free であることは [5] section 10.84 に証明がある）．これはすなわち，B-module の以下の図式に対し，図式を可換にする $\tilde{D}\colon \Omega_{B/A} \to M$ が存在するということである.

$$\begin{tikzcd} & \Omega_{B/A} \arrow[d, "D"] \\ M \arrow[r, two heads, "t"] & N \end{tikzcd}$$

ここで t :: surj.

次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_D"] & B[N] \\ A \arrow[u, "\phi"] \arrow[r] & B[M] \arrow[u, two heads] \end{tikzcd}$$

ここで $B[M]$ は [2] §25 でいう $B * M$ である[†4]．$B[N]$ も同様．f_D は A-derivation :: D に対応する射 $b \mapsto (b, D(b))$ である．$B[M] \to B[N]$ は $(b, m) \mapsto (b, t(m))$ で与えられる射で，したがって全射であり核は $0 \oplus (\ker t)$．これは square-zero ideal である．そして ϕ :: formally smooth であるから，図式を可換にする $B \to B[M]$ が存在する．これに対応する A-derivation が所望の $\tilde{D}$ である．

(ii) を示す．R :: ring, $I \subseteq R$ :: ideal を $I^2 = 0$ を満たすものとする．以下が可換図式だったとしよう．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\lambda"] & R/I \\ A \arrow[u, "\phi"] \arrow[r] & R \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

この時，λ を lifting of θ と呼ぶ．[2] §25 より[†5]，

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A}, I) = \mathrm{Der}_A(B, I) = \{\lambda - \lambda' \quad | \lambda, \lambda' :: \text{lifting of } \theta\}$$

となっている．ϕ :: formally unramified なので，lifting of θ は一つしか無い．よって $\mathrm{Hom}_A(\Omega_{B/A}, I) = 0$. 任意の R, I についてこれが成立するので，これは $\Omega_{B/A} = 0$ と同値．

formally etale $\Longrightarrow$ formally unramified なので (ii) $\Longrightarrow$ (iii) は明らか． ∎

命題 3.6 ([4] Prop1.3.6 (iii))

- $g \colon X \to Y$ を smooth morphism,
- $i \colon Z \to X$ を locally of finite presented closed embedding

とする．この時，$f = i \circ g \colon Z \to Y$ が smooth であることと，以下の列が完全かつ locally split であることは同値である．

$$0 \longrightarrow i^*\mathcal{I}_Z \longrightarrow i^*\Omega_{X/Y} \longrightarrow \Omega_{Z/Y} \longrightarrow 0$$

ただし $\mathcal{I}_Z = \ker i^\#$.

(証明)．問題は local なものであるから，$X = \mathrm{Spec}\, B, Y = \mathrm{Spec}\, A, Z = \mathrm{Spec}\, R = \mathrm{Spec}\, B/I$ とする．この時，主張にある完全列は次のように成る．

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\ \delta\ } \Omega_{B/A} \otimes_A R \longrightarrow \Omega_{R/A} \longrightarrow 0.$$

ただし $\delta \colon i \bmod I^2 \mapsto d_{B/A}(i) \otimes 1_R$．$d_{B/A}$ は derivation である．

[†4] これらは B-algebra で，加群としては $B \oplus M$ で，乗法は $(b, m) \cdot (b', m') = (bb', bm' + b'm)$ で定まる．重要な特性として，$\pi_M : B[M] \to B; (b, m) \mapsto b$ の kernel は square-zero で，π_M の A-algebra section (section which is A-albgebra morphism) と A-derivation $B \to M$ が一対一に対応する．

[†5] あるいは私のノート https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section8_ex.pdf の Ex8.6(a) の解答より．

■方針． 左端の 0 を除いたものは Second Fundamental Exact Sequence として知られ，[2] Thm25.2 などで証明されているとおり，常に成立する．また，明らかに f :: locally finitely presented．したがって我々は，

(a) $Z = \operatorname{Spec} B/I \to \operatorname{Spec} A = Y$ :: formally smooth と，

(b) δ :: split が

同値であることを示せば良い．

■(b) の言い換え：δ^* :: surj． 最初に (a) $\implies$ (b) を示す．これは任意の R-module :: N について以下が成立することを示せば良い．

$$\delta^* = (- \circ \delta)\colon \operatorname{Hom}_R(\Omega_{B/A} \otimes_A R, N) \cong \operatorname{Hom}_R(\Omega_{B/A}, N) \to \operatorname{Hom}_R(I/I^2, N) :: \text{surj.}$$

($\cong$ はテンソル積の随伴性から得られる．）実際，$N = I/I^2$ とすると，δ^* :: surj から δ の retraction の存在が言える．したがって δ :: split．split は inj を意味することに注意．

■問題のさらなる言い換え． δ^* を具体的に計算すると，示すべきは次のことであることが分かる．

主張 3.7
任意の $\phi \in \operatorname{Hom}_R(I/I^2, N)$ に対し，以下を満たす射 $\psi\colon B \to R[N]$ が存在する．

$$B \xrightarrow{\psi} R[N] \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} R \qquad = \qquad B \xrightarrow{\bmod I} R$$

$$I \hookrightarrow B \xrightarrow{\psi} R[N] \qquad = \qquad I \xrightarrow{\bmod I^2} I/I^2 \xrightarrow{\phi} N \rightarrowtail R[N]$$

一行目の等号は ψ が π_N の section であることを意味し，二行目の等号は $\mathrm{pr}_2 \circ \psi\colon B \to N$ が $\delta^*(\phi)$ に等しいことを意味する．

■δ^* :: surj． ψ は次のように構成する．まず次の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, equal] & R \\ A \arrow[u] \arrow[r] & B/I^2 \arrow[u, two heads, "\pi"'] \end{tikzcd}$$

π は I/I^2 による剰余をとる写像である．$A \to R$ :: formally smooth から，図式を可換にする射 $\sigma\colon R \to B/I^2$ が存在する．この射から次のように同型 $R[I/I^2] \cong B/I^2$ が作れる．

$$\begin{array}{cccc} q\colon & B/I^2 & \to & R[I/I^2] \\ & \tilde{b} & \mapsto & (\pi(\tilde{b}), (\mathrm{id} - \sigma\pi)(\tilde{b})) \\ & \pi(r) + \tilde{i} & \leftarrow\!\shortmid & (r, \tilde{i}) \end{array}$$

これを元に ψ を構成する．

$$B \longrightarrow B/I^2 \xrightarrow{q} R[I/I^2] \xrightarrow{\mathrm{id} \oplus \phi} R[N]$$

これが主張の条件を満たすことは自明．

■(b) $\Longrightarrow$ (a) の言い換え：$I \subseteq \ker \tilde{h}$ にする． 話を切り替えて (b) $\Longrightarrow$ (a) を証明しよう（これは [2] で言及されていない）．C :: A-algebra, $J \subset C$ :: ideal with $J^2 = 0$ とし，$D = C/J$ とおく．以下の図式 (1) を考える．

$$
(1)\quad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "h"] & D \\
B \arrow[u] & \\
A \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[uu]
\end{tikzcd}
\qquad
(2)\quad
\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "h"] & D \\
B \arrow[u] \arrow[dr, dashed, "\tilde{h}"] & \\
A \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[uu]
\end{tikzcd}
$$

$A \to B$ :: formally smooth なので，図式 (2) の破線の射 $\tilde{h}$ を得る．我々の目的は図式を可換にする $R \to C$ を見つけることである．これには，$I \subseteq \ker \tilde{h}$ であれば準同型定理から $\tilde{h} = B \to R = B/I \to C$ が得られる．

■問題の言い換え：$\operatorname{im} \kappa_h = 0$ にする． $\ker(B \to R = B/I) = I$ なので $\tilde{h}(I) \subseteq J$．また $J^2 = 0$ なので，$\tilde{h}$ から $\kappa_{\tilde{h}} \colon I/I^2 \to J$ が誘導される．構成から分かるとおり，示したい $\tilde{h}(I) = 0$ と $\operatorname{im} \kappa_{\tilde{h}} = 0$ は同値である．そして我々は，以下の通り，$\operatorname{im} \kappa_j = 0$ となる h を選ぶことが出来る．

■h の構成． 仮定より $\tilde{\alpha} \circ \delta = \kappa_{\tilde{h}}$ を満たす $\tilde{\alpha} \colon \Omega_{B/A} \otimes_A R \to J$ が存在する．この $\tilde{\alpha}$ を以下のように拡張し，$\alpha \colon B \to J$ とする:

$$
\begin{array}{cccc}
\alpha\colon & B & \to & J \\
 & b & \mapsto & \tilde{\alpha}(d_{B/A}(b) \otimes 1_R)
\end{array}
$$

$h = \tilde{h} - \alpha$ と置いて，$\kappa_h(I/I^2)$ を計算する．$i \in I$ をとる．

$$
\begin{aligned}
\kappa_h(i \bmod I^2) =& \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) - \alpha(d(i) \otimes 1_R) \\
=& \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) - (\alpha \circ \delta)(i \bmod I^2) \\
=& \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) - \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) \\
=& 0.
\end{aligned}
$$

以上より，$h(I) = 0$ が得られる． ■

命題 3.8 ([5], Tag 02G7)
$f \colon X \to Y$ :: finitely presentation and quasi-separated が unramified morphism であることと，以下の条件 (*) は同値: (*) 任意の $y \in Y$ について，fiber of f at y :: X_y は disjoint union of spectra of finite separable field extensions of $k(y)$.

(証明).
■(*) $\Longrightarrow$ f :: unramified. 最初は f :: unramified であることを仮定する．unramified は stable under base excange（命題 3.1）なので，$Y = \operatorname{Spec} k$ の場合を示せば良い．

定理 (3.3) と [1] Cor III.9.6 より，$\dim X = \dim \operatorname{Spec} k = 0$．また X は finite type over k なので noetherian．したがって X :: artinian [†6]．artinian ring の構造定理 ([3] Thm8.7) と X :: quasi-compact よ

[†6] noetherian scheme の定義にある語 “noetherian” を “artinian” に書き換えたのが artinian scheme の定義である．

り，X は
$$X = \bigsqcup \operatorname{Spec} A_i$$
と disjoint に分解でき，各 A_i は local artinian ring である．

$\operatorname{Spec} A_i \to \operatorname{Spec} k$ :: unramified ゆえに $\Omega_{A_i/k} = 0$ なので，A_i :: reduced [†7]．A_i の素イデアルは唯一つであるから，A_i :: field．unramified は stable under base extension なので，同様にして A_i :: separable over k.

A_i :: finiely generated k-algebra かつ体なので，Zariski's Lemma により，A_i/k :: finite algebraic extension．A_i :: separable field over k なので，定義より A_i :: finite separable extension.

■f :: unramified $\implies$ (*)． 次に命題の条件を仮定する．

まず K/k が finite separable field extension であるとする．すると primitive element theorem より，$\alpha \in K$ を用いて $K = k(\alpha)$ と書ける．$f \in k[x]$ を α の最小多項式とすると，以下が成り立つ．
$$0 = d(f(\alpha)) = f'(\alpha) \cdot d(\alpha) \in \Omega_{K/k}.$$
K/k :: separable より，$f(\alpha) = 0$ かつ $f'(\alpha) \neq 0$ となる．したがって $f'(\alpha)$ :: unit in $\Omega_{K/k}$ なので $d(\alpha) = 0$. よって $\Omega_{K/k} = K \cdot d(\alpha) = 0$.

k-algebra :: $A = \bigoplus_i K_i$ を K_i :: finite separable field extension of k の直和とする．$\mathfrak{p}_i$ を第 i 成分以外は 0 である元からなる素イデアルとすると，
$$(\Omega_{A/k})_{\mathfrak{p}_i} = \Omega_{A_{\mathfrak{p}_i}/k} = \Omega_{K_i/k} = 0.$$
$\operatorname{sp} \operatorname{Spec} A = \{\mathfrak{p}_i\}_i$ なので，これで $\Omega_{A/k} = 0$ が示せた．

最後に，一般の scheme で考える．証明は命題 (3.5) を利用する．$\operatorname{Spec} A \subseteq Y$ と $\operatorname{Spec} B \subseteq f^{-1}(\operatorname{Spec} A)$ をとり，$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ における f の fiber を考える．仮定 (*) より $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$ :: direct sum of finite separable field extensions of k. ここで，上述のことから
$$\Omega_{B \otimes_A k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{p})} = \Omega_{B/A} \otimes_B k(\mathfrak{p}) = 0.$$
$\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p})) \approx f^{-1}(\mathfrak{p})$ を任意に取ると，
$$(\Omega_{B/A} \otimes_B k(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{q}} = (\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} \otimes_B k(\mathfrak{p}) = (\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} / \mathfrak{q}(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} = 0.$$
これは局所環 $B_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(\mathfrak{p})$ 上の加群であるから，Nakayama's Lemma より，$(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} = 0$．$\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p}))$ は任意に取っていたから，これは $\Omega_{B/A} = 0$ を意味する．命題 (3.5) より，これは f :: unramified と同値． ■

定理 3.9 ([5], Tag 04HM)
$f\colon X \to Y$ を separated etale morphism とする．$y \in Y$ に対し $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とする（点が有限個であることは命題 (3.8) による）．etale neighbourhood :: $\nu : (U, u) \to (Y, y)$ が存在し，$X_U = X \times_{\nu, Y, f} U$ の disjoint union decomposition :
$$X_U = \bigsqcup_{i,j} V_{i,j}$$
について $V_{i,j} \cong U$.

[†7] $x \in A_i$ が $x^N = 0$ を満たすとする．$I = \ker(A_i \otimes_k A_i \to A_i)$ とすると，$x \otimes x^{N-1} \in I$ かつ $\notin I^2$．ゆえに $\Omega_{A_i/k} = I/I^2 \neq 0$.

注意 3.10
この定理は代数幾何学版の陰関数定理とも呼べる定理である．この現象を根拠にしたスローガン「etale morphism は代数幾何学版 locally homeomorphism」がある．証明は，この定理だけのために必要な命題が幾つかあるため，後の節に行う．

命題 3.11
(Jacobian criterian) $f\colon X \to Y$ を，locally of finite presentation とする．f :: smooth と次の条件 (+) は同値である:

任意の点 $x \in X$ について，x と $y = f(x) \in Y$ の間に affine neighborhood

$$x \in \operatorname{Spec} B \subset X, \qquad y = f(x) \in \operatorname{Spec} A \subseteq Y \qquad (\text{with } f(\operatorname{Spec} B) \subseteq \operatorname{Spec} A)$$

が存在し，ある n, s $(s \leq n)$ と $f_1, \ldots, f_s \in A[x_1, \ldots, x_n]$ について

$$B \cong \frac{A[x_1, \ldots, x_n]}{(f_1, \ldots, f_s)}.$$

さらに，Jacobian matrix ($n \times s$-matrix)

$$J = \left[\tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j}$$

は，右逆行列をもつ (i.e. ${}^{\exists}J',\ \ JJ' = I$)．同値な条件として，regular(i.e. 行列式が unit element of B) な部分 s 正方行列を J は持つ．

さらに，f :: etale と，この条件で $n = s$ であることは同値である．

(証明)．まずは $(f(x) \in) \operatorname{Spec} A$ なる $\operatorname{Spec} A$ と $f(\operatorname{Spec} B) \subseteq \operatorname{Spec} A$ かつ $x \in \operatorname{Spec} B$ なる $\operatorname{Spec} B$ を適当に取る．f :: locally of finite presentation から，surjective homomorphism

$$A[x_1, \ldots, x_n] \to B$$

であって kernel :: I が有限生成であると仮定できる．

命題 (3.6) を $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{A}^n_A \to \operatorname{Spec} A$ に適用すれば，f :: smooth と以下が split exact sequence であることが同値だと分かる．

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\ \delta\ } \Omega_{A[x_1,\ldots,x_n]/A} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0.$$

特に δ :: split injective が同値である．

■f :: smooth $\implies$ (+)． $\{f_i\}_{i=1}^s$ を I の生成元とする．この時，δ は次のように作用する．

$$\begin{bmatrix} \delta(\bar{f}_1) \\ \vdots \\ \delta(f_s) \end{bmatrix} = \left[\tfrac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]_{i,j} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

ここで現れた行列は主張にある Jacobian matrix である．今，命題 (3.5) (i) と，この exact sequence の存在から I/I^2 :: free module である．そしてこのとき $\{\bar{f}_i\}_i$ $(\bar{f}_i = f_i \bmod I^2)$ は I/I^2 の基底と成る．したがって $\{\bar{f}_i\}_i$ と $\{dx_j\}_j$ はそれぞれの自由加群の基底であるから，δ が split injective であることは，主張にある Jacobian matrix の条件と同値である．

■f :: smooth $\Longleftarrow$ (+). J が right inverse を持つならば，明らかに δ が section を持つ．よって δ :: split injective.

■f :: etale $\Longleftrightarrow$ (+) and $n = s$. 最初に述べた exact sequence から，$\Omega_{B/A}$ の階数は以下のように成る．

$$\operatorname{rank}\Omega_{B/A} = \operatorname{rank}(\Omega_{A[x_1,\dots,x_n]/A} \otimes_A B) - \operatorname{rank}(I/I^2) = n - s.$$

したがって $n = s \Longleftrightarrow \Omega_{B/A} = 0 \Longleftrightarrow f$ :: formally unramified. etale=smooth and formally etale なので，証明できた． ∎

定理 3.12
scheme :: S について，category :: $\mathrm{Et}(S)$ を以下のように出さめる．

Objects etale morphism :: $Z \to S$,
Arrows S-morphism :: $Z \to Z'$.

$i\colon S_0 \to S$ :: infinitesimal thickening について，関手 F を以下で定める．

$$\begin{array}{cccc} F\colon & \mathrm{Et}(S) & \to & \mathrm{Et}(S_0) \\ & [Z \to S] & \mapsto & [Z \times_S S_0 \to S_0] \end{array}$$

このとき，F は圏同値である．

4 Proof of The Theorem (3.9).

補題 4.1
R :: ring, $f \in R[x]$ とする．以下の ring homomorphism から誘導される Spec 間の射は etale である．

$$\begin{array}{cccc} \phi\colon & R & \to & R[x, 1/f']/(f) \\ & r & \mapsto & r \cdot f' \end{array}$$

(証明). 命題 (3.11) (Jacobian criterion) を利用する．この場合，Jacobian :: $\det\left[f'\right] = f'$ が unit in $R[x, 1/f'](f)$ であるから，この補題が成り立つ． ∎

参考文献

[1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[2] Hideyuki Matsumura. *Commutative Ring Theory (Cambridge Studies in Advanced Mathematics)*. Cambridge University Press, revised edition, 5 1989.

[3] I.G. MacDonald M.F. Atiyah. Atiyah - MacDonald 可換代数入門. 共立出版, 2 2006.

[4] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[5] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.