以下での $(*)$ とは，次のもの:

- integral,
- separated,
- noetherian, and
- regular in codimention one.

また，$(\dagger)$ は次のもの: X :: noetherian scheme, $\mathcal{S}$ :: graded $\mathcal{O}_X$-algebra となっている．また，$d \in \mathbb{Z}, d \geq 0$ について，$\mathcal{S}_d$ :: homogeneous part of $\mathcal{S}$ を $U \mapsto \mathcal{S}(U)_d$．$X, \mathcal{S}$ は次をすべて満たす．

- $\mathcal{S}$ :: quasi-coherent.
- $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_d$.
- $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$.
- $\mathcal{S}_1$ :: coherent $\mathcal{O}_X$-module.
- $\mathcal{S}$ :: locally generated by $\mathcal{S}_1$ as $\mathcal{O}_X$-algebra.

Ex7.1　Surjective Mophism between Invertible Sheaves is Isomorphic.

X :: locally ringed space, $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ :: invertible sheaves on X, $f : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ :: surjective mophism，とする．

■Proof 1.　任意の点 $x \in X$ をとり，$A = \mathcal{O}_{X,x}$ とおく．$f_x : \mathcal{L}_x \to \mathcal{M}_x$ は同型写像を合成することで $\phi : A \to A$ :: surjective A-morphism と同一視出来る．ϕ :: surjective より，$\phi(\alpha) = 1 \in A$ となる $\alpha \in A$ がとれる．また ϕ は A-module morphism だから，$\alpha\phi(1) = 1$．そこで $\psi : A \to A$ を $a \mapsto \alpha a$ と定義すれば，これが ϕ の逆写像になる．よって ϕ, f_x は同型．Prop1.1 から，f :: iso.

■Proof 2.　Matsumura, Thm2.4 から分かる．これは NAK (or Nakayama's Lemma) からの帰結である．

注意 Ex7.1.1
$k(x)$ :: residue field と $f_x : \mathcal{L}_x \to \mathcal{M}_x$ をテンソルすると，$f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)}$ :: surjective $k(x)$-module morphism が得られる．よって $\ker(f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)}) = 0$．しかし，ここから NAK をつかって $\ker f_x = 0$ を導くことは出来ない．$k(x)$ が flat $\mathcal{O}_{X,x}$-module でなく，したがって $\ker(f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)})$ と $(\ker f_x) \otimes k(x)$ の間に同型があることが言えないからである．このことは flat $\implies$ torsion-free に気をつければすぐに分かる．同様の議論が f_x :: injective（と $\operatorname{coker} f_x$）の場合に出来ることにも気づくが，このときは $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2; 1 \mapsto 3$ という反例がある．

Ex7.2　Two Sets of Global Generators and Corresponding Morphisms.

k :: field, X :: scheme $/k$, $\mathcal{L}$ :: invertible sheaf on X, $S = \{s_0, \ldots, s_m\}, T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ :: global generators of $\mathcal{L}$. とする．ここで S, T は同じ線形（部分）空間 $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ を張るとする．また $n \leq m, d = \dim_k V$ とする．

S, T からそれぞれ Thm7.1 のように定まる morphism を ϕ_S, ϕ_T とする．ϕ_S が次のように分解できる

ことを示す．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi_T"] \arrow[rrrr, bend right, "\phi_S"'] & \operatorname{im}\phi_T \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^m - L \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}^n \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{P}^n
\end{tikzcd}
$$

ここで π, α はそれぞれ linear projection と automorphism である．

$X \to \mathbb{P}^n$ の morphism を考えることは，$k[y_0, \dots, y_n]$ の元 $y_{0,\dots,n}$ の変換を考えることと同じである．これは Thm7.1 の証明を観察すれば分かる．二つの k-linear map は ϕ_S^*, ϕ_T^* はそれぞれ，$y_i \mapsto s_i (i = 0, \dots, n)$，$y_i \mapsto t_i (i = 0, \dots, m)$ で定まっている．したがって問題は，$t_0, \dots, t_m$ を $s_0, \dots, s_n$ へ変換する projection と automorphism をつくる問題，と言い換えられる．

今，次のような $(m+1) \times (n+1)$ 行列 Q が存在する．

$$
\begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}.
$$

S, T が V の生成系であることから $\operatorname{rank} Q = \dim V =: d$．$Q$ は基本行列をいくつもかける（あるいは基本変形を繰り返し行う）ことにより，次の形に分解できる．

$$
Q = L P_d R \quad \text{where} \quad L \in PGL(m,k), R \in PGL(n,k)
$$

ただし行列 P_r $(r = 1, \dots, n+1)$ は $r \times r$-identity matrix I_r をもちいて $P_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と定義される行列である．（TODO: P_d を P_{n+1} に交換しても問題ない？）L, P_{n+1}, R が誘導する morphism をそれぞれ $\beta, \tilde{\pi}, \alpha$ とすれば，α, β は automorphism であり，$\tilde{\pi}$ は projection である．

$$
\mathbb{P}^m \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^m \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^m - L \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{P}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n
$$

求める写像はこの α と，$\pi = \beta \circ i \circ \tilde{\pi}$ である．また，$L = \mathcal{Z}_p(y_0, \dots, y_n) \subseteq \mathbb{P}^m$ の次元は $m - (n+1)$ である．

Ex7.3 Morphism of $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ can be Decomposed into Common Ones.

$\phi : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^m$ を考える．$\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} k[x_0, \dots, x_n], \mathbb{P}^m = \operatorname{Proj} k[y_0, \dots, y_m]$ とおく．したがって $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ の global generator はそれぞれ $x_0, \dots, x_n$ と $y_0, \dots, y_m$ である．

(a) $\operatorname{im}\phi = pt$ or $m \geq n$ and $\dim \operatorname{im}\phi = n$.

まず，$m < n$ と仮定して $\operatorname{im}\phi = pt$ を示す．ϕ^* は $y_0, \dots, y_m$ を $x_0, \dots, x_n$ へ写す k-linear map を定める．

Ex7.4 If X Admits an Ample Invertible Sheaf, then X is Separated.

Ex7.5 Ample and Very Ample are Inherted by Tensor Products.

Ex7.6 The Riemann-Roch Problem.

Ex7.7 Some Rational Surfaces.

Ex7.8 Sections of $\pi : \P(\mathcal{E}) \to X \leftrightarrow$ Quotient Invertible Sheaves of $\mathcal{E}$.

Ex7.9

Ex7.10 P^n-Bundles Over a Scheme.

Ex7.11 Different Sheaves of Ideals can Give Rise to Isomorphic Blown Up Schemes.

Ex7.12

Ex7.13 * A Complete Nonprojective Variety.

Ex7.14