scheme や scheme morphism の性質の定義は `section3_text.pdf` にまとめたので参照すること．同じ PDF で B-fin.gen. scheme などの独自の用語を定義している．`http://stacks.math.columbia.edu/tag/01T0` も参照すると良い．

記法について．$\mathrm{Spec}\, A_f = D_A(f)$ と書く．

1 Definition(s) of Locally of Finite Type Morphism.

補題 1.1 (Nike's Lemma)**.** X :: scheme, $U, V \subseteq X, U = \mathrm{Spec}\, A, V = \mathrm{Spec}\, B$ かつ $U \cap V \neq \emptyset$ とする．この時，任意の点 $P \in U \cap V$ に対し，$a \in A, b \in B$ であって

$$P \in D_A(a) = D_B(b) \subset U \cap V$$

となるものがある．系として Prop2.2 より $A_a \cong B_b$ が得られる．

(証明)．適当に $a \in A, b \in B$ をとり，

$$P \in D_B(b) \subseteq D_A(a) \subseteq U \cap V$$

としよう．$X = \mathrm{Spec}\, B, X_f = D_B(b), \bar{b} = b|_{D_A(a)} \in A_a$ として Ex2.16a を用いると，

$$D_B(b) = D_A(a) \cap D_B(b) = \mathrm{Spec}(A_a)_{\bar{b}}.$$

なので，あとは $(A_a)_{\bar{b}}$ を調べれば良い．

$(A_a)_{\bar{b}}$ の元は以下のように書ける．

$$\frac{u/a^m}{\bar{b}^n} = \frac{u}{a^m \bar{b}^n} \quad (m, n \in \mathbb{N}; u \in A).$$

$\bar{b} \in A_a$ なので $a^N \bar{b} = a' \in A$ となる $N \in \mathbb{N}$ が存在する．

$$\frac{ua^{nN}}{a^m a^{nN} \bar{b}^n} = \frac{ua^{nN}}{a^m a'^n}.$$

仮に $m \geq n$ とすると

$$\frac{ua^{nN}}{a^m a'^n} = \frac{ua^{m-n+nN}}{(aa')^m}$$

$m \leq n$ でも同様に分子分母に a'^{n-m} をかければ，$(A_a)_{\bar{b}}$ の元は $A_{aa'}$ の元として書ける．逆に $A_{aa'}$ の元を $(A_a)_{\bar{b}}$ の元として書くことは直ちに出来る．よって $(A_a)_{\bar{b}} = A_{aa'}$．

以上より，$\alpha = aa' \in A, b \in B$ について $D_B(b) = D_A(\alpha)$． ∎

補題 1.2 (Preimage of POS[†1] is POS.)**.** $f : X \to Y$ :: scheme morphism. $\mathrm{Spec}\, B \subseteq Y, f^{-1}\, \mathrm{Spec}\, B = \bigcup_{i \in I} \mathrm{Spec}\, C_i$ とする．この時，以下が成立する．

$${}^{\forall} b \in B, \quad {}^{\exists}\{c_i (\in C_i)\}, \quad f^{-1} D_B(b) = \bigcup_{i \in I} D_{C_i}(c_i).$$

[†1] Principle Open Set

(証明). $U=\operatorname{Spec}B, V_i=\operatorname{Spec}C_i$ とする．すると f の制限により scheme morphism $f|_{V_i}:V_i\to U$ が得られる．これは $V_i\hookrightarrow X\xrightarrow{f}Y$ という写像で，したがって逆写像は $(f|_{V_i})(S)=f^{-1}(S)\cap V_i$ であることに注意．structure sheaf の間の射を考えると，以下が得られる．

$$\phi_i=\left((f|_{V_i})^{\#}\right)_U : B=\mathcal{O}_U(U)\to (f|_{V_i})_*\mathcal{O}_{V_i}(U)=C_i.$$

ここで Prop2.2 を用いた．Prop2.3 から，ϕ_i は $f|_{V_i}:V_i\to U$ に 1-1 対応し，特に topological space として

$$f|_{V_i}(\mathfrak{p})=\phi_i^{-1}(\mathfrak{p})\quad(\mathfrak{p}\in\operatorname{Spec}C_i)$$

が成り立つ．このことから以下が得られる．

$$f^{-1}(D_B(b))\cap V_i=(f|_{V_i})^{-1}D_B(b)=D_{C_i}(\phi_i(b)).$$

最左辺と最右辺を $\bigcup_{i\in I}$ すれば主張が示せる． ∎

補題 1.3. $f\in A$ とする．有限生成 A_f 代数は有限生成 A 代数でもある．

(証明). 変数の数は問題にならないので 1 変数で証明する．（つまり以下で $A_f[x]$ を多変数にしても構わない．）有限生成 A_f 代数 B には $A_f[x]$ からの全射が存在する．$A_f[x]$ には $A[x,y]$ から次のような全射が存在する．

$$y\mapsto 1/f$$

これが全射であることは，

$$ay^nx^m\mapsto (a/f^n)x^m\in A_f[x]$$

のように分かる．あとはこの写像が A 準同型（代入写像）であることに注意すれば良い．よって $A[x,y]\to A_f[x]\to B$ という全射が存在する． ∎

以下の命題を示す．

$$\begin{aligned}&{}^{\exists}\{B_i\}_{i\in I},\quad \left[Y=\bigcup_{i\in I}\operatorname{Spec}B_i\right]\wedge\left[{}^{\forall}i\in I,\quad f^{-1}(\operatorname{Spec}B_i)::\text{ locally }B_i\text{-fin.gen. scheme}\right]\\ \iff & {}^{\forall}\operatorname{Spec}A\subseteq X,\quad f^{-1}(\operatorname{Spec}A)::\text{ locally }A\text{-fin.gen. scheme}\end{aligned}$$

下から上は自明である．上から下を示そう．

$U=\operatorname{Spec}A\subset X, V_i=\operatorname{Spec}B_i$ とする．$U\cap V_i$ の各点 P に対し，

$$P\in D_{B_i}(b_{ij})=D_A(a_{ij})\subseteq U\cap V_i$$

であるような $b_{ij}\in B_i, a_{ij}\in A$ が取れる．P を動かせば，このようにして U が被覆できる．

$$U=\bigcup_{i,j}D_{B_i}(b_{ij})=\bigcup_{i,j}D_A(a_{ij}).$$

仮定より，各 V_i は $\{\operatorname{Spec}C_{ik}\}_{i,k}$ で被覆され，これらの C_{ik} は有限生成 B_i 代数[†2]であるようにとれる．

[†2] $\phi_{ik}=\left((f|_{\operatorname{Spec}C_{ik}})^{\#}\right)_{\operatorname{Spec}B_i}$ で代数とみなす．

Lemma (Preimage of POS is POS) より，$c_{ijk} \in C_{ik}$ が存在し，以下のようになる．

$$f^{-1}U = \bigcup_{i,j} f^{-1} D_{B_i}(b_{ij}) = \bigcup_{i,j} \bigcup_{k} D_{C_{ik}}(c_{ijk}).$$

$D_{C_{ik}}(c_{ijk}) = \operatorname{Spec}(C_{ik})_{c_{ijk}}$ であり，$(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 $(B_i)_{b_{ij}}$ 代数．これは有限生成代数の定義から存在する全射 $B[x_1, \ldots, x_n] \to C_{ik}$ の両辺を局所化[†3]すれば分かる．$(B_i)_{b_{ij}} \cong A_{a_{ij}}$（Nike's Lemma の最後の文）と最後の Lemma より，$(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 A 代数．

以上より，$f^{-1} \operatorname{Spec} A$ は $\operatorname{Spec}(C_{ik})_{c_{ijk}}$ で被覆され，各 $(C_{ik})_{c_{ijk}}$ は有限生成 A 代数である．

2 Definition(s) of Quasi-Compact Morphism.

以下を示す．

$$\begin{aligned} &{}^{\exists}\{B_i\}_{i \in I}, \quad \left[Y = \bigcup_{i \in I} \operatorname{Spec} B_i \right] \wedge \left[{}^{\forall} i \in I, \quad f^{-1}(\operatorname{Spec} B_i) :: \text{quasi-compact.} \right] \\ \iff &{}^{\forall} \operatorname{Spec} A \subseteq Y, \quad f^{-1}(\operatorname{Spec} A) :: \text{quasi-compact.} \end{aligned}$$

まず $\operatorname{Spec} A = \bigcup_{i,j} D_{B_i}(b_{ij})$ となるように b_{ij} をとる．Ex2.13b より $\operatorname{Spec} A$ は quasi-compact だから b_{ij} は有限個でよい．$f^{-1} \operatorname{Spec} B_i$ は open subscheme だから，$f^{-1} \operatorname{Spec} B_i = \bigcup_{i,k} \operatorname{Spec} C_{ik}$ なる C_{ik} がある．仮定より $f^{-1} \operatorname{Spec} B_i$ は quasi-compact であるから C_{ik} は有限個．これに Ex3.1 の中で示した Lemma (Preimage of POS is POS) を用いると以下のようになる．

$$f^{-1} \operatorname{Spec} A = \bigcup_{i,j} f^{-1} D_{B_i}(b_{ij}) = \bigcup_{i,j} \bigcup_{k} D_{C_{ik}}(c_{ijk}).$$

確認したとおり組 (i, j, k) は高々有限の組み合わせしか無い．Ex2.13 の証明にあるとおり，$D_{C_{ik}}(c_{ijk})$ は quasi-compact だから，$f^{-1} \operatorname{Spec} A$ は quasi-compact な開集合の有限和．よって $f^{-1} \operatorname{Spec} A$ も quasi-compact.

[†3] C_{ik} が ϕ_{ik} による B_i 代数であることと $c_{ijk} = \phi_{ik}(b_{ij})$ を用いて計算する．