ゼミノート #4
Deformation Theory

七条彰紀

2018 年 6 月 19 日

1 Automorphism Group of Stable Curve

[2] 3.A, [3] §1 を参照する．

C, D :: stable curves of genus g over a scheme S の間の isomorphism group の scheme としての構造を与える．この scheme を $\mathrm{Isom}(C, D)$ と書く．そして $\mathrm{Aut}(C) = \mathrm{Isom}(C, C)$ と定義し，これの scheme としての特徴を調べる．

$\mathrm{Isom}(C, D)$ の特徴付けをするため，次の関手を考える．

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{I}som_S(C, D): & (\text{Scheme over } \mathbb{C}) & \to & (\text{Set}) \\ & S' & \mapsto & \{\ C \times_{\mathbb{C}} S' \to D \times_{\mathbb{C}} S' :: S'\text{-isomorphism}\} \end{array}$$

$\iota \in \mathcal{I}som(C, D)(S')$ から得られる ι^* は $\omega^\circ_{C\times S'/S'} = \iota^*(\omega^\circ_{D\times S'/S'})$ を満たす．また $\otimes$ と交換する（すなわち Picard 群の間の準同型である．[1] Ex II.6.8）．このことから $\mathrm{Isom}(C, D)$ が適当な r をとると $PGL(r + 1)$ の部分群として書けることが分かる．

もう少し詳しく $\mathrm{Isom}(C, D)$ を書く．$n \geq 3$ を整数とする．次のように r, d をとる．

$$r + 1 = h^0((\omega^\circ_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n}) = (2n - 1)(g - 1), \qquad d = \deg(\omega^\circ_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n} = 2n(g - 1).$$

すると [1] II.7 より，C, D は $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ の次数 d, arithmetic genus g の closed curve とみなせる（$\mathbb{P}^r$ に埋め込める）．なので Hildert scheme :: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{d,g,r}$ の点として扱うことが出来る．ここで次のように射を定める．

$$\begin{array}{cccc} \mu: & PGL(r + 1) & \to & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ & \alpha & \mapsto & (\alpha \cdot [C], [D]) \end{array}$$

すると，$\mathcal{I}som(C, D)$ は $\mu^{-1}(\Delta)$ によって表現される[†1]．これを group scheme over $\mathbb{C}$ :: $\mathrm{Isom}(C, D)$ とする．

scheme over $\mathbb{C}$ :: X について少々一般の理論を述べる．$\mathbb{I} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ とおく (ref. [2] 1)．[1] Ex II.2.8 より，$t \in \underline{X}(\mathbb{I})$ は X の $\mathbb{C}$-rational point :: x と $T_x(X) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathcal{T}_x$ の元に対応する．ここで $\mathcal{T}$ は tangent sheaf :: $\mathcal{T} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ のことである．[2] でいう regular vector field とは $\mathcal{T}$ の section のこと（と思われる）．

[†1] Δ は $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ の diagonal set. $\mu^{-1}(\Delta)$ は

$$\Delta \cap \mathrm{im}\,\mu = \{(\alpha \cdot [C], [D]) \mid \alpha \cdot [C] = [D]\}$$

の $PGL(r + 1)$ への逆像なので，この点と C, D の間の同型と対応することが分かるだろう．

定理 1.1
C :: stable curve of genus $g \geq 2$ について，

$$\mathrm{Ext}^0(\Omega_C, \mathcal{O}_C) = \mathcal{T}(C) = 0.$$

(証明). [3] §1.

$\pi : \tilde{C} \to C$ を normalization of C とする．$D \in \mathcal{T}_C(C)$ は π^* によって $\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ に対応する．D は C の double point :: P で 0 になるから，$\tilde{D}$ は $\pi^{-1}(P)$ で 0 になる．

そして smooth curve 上の tangent sheaf :: $\mathcal{T}_{\tilde{C}} = \mathscr{H}om(\Omega_{\tilde{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$ の support を考える．$\mathcal{T}_{\tilde{C}}$ は coherent sheaf だから，$\mathrm{Supp}\,\mathcal{T}_{\tilde{C}}$ は closed in $\tilde{C}$([1] ExII.5.6)．したがって $(\mathcal{T}_{\tilde{C}})_Q \neq 0$ となる点は有限個しか無い．（TODO: $(\mathcal{T}_{\tilde{C}})_Q = 0$ なる点が存在するなら $\mathcal{T}_{\tilde{C}}(U) = 0$ を示したいのだが.） ∎

命題 1.2
$\mathrm{Aut}(C)$ :: reduced scheme.

(証明). $X = \mathrm{Aut}(C)$ は group scheme であるから，X のある点での local な性質は transition を用いて単位元 I での性質と言い換えられる．reduced は local な性質であるから，X が reduced であることを示すには $\mathcal{O}_{X,I}$ :: reduced ring を示せば良い．

$\mathcal{O}_{X,I}$ が non-reduced であると仮定すると，non-zero section :: $t \in \mathcal{T}_C(C)$ がとれ，これは C の regular vector field :: $v \in \mathcal{T}(C)$ に対応する (TODO). したがって定理から X :: reduced. ∎

2

[1] Example III.9.13.1

参考文献

[1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[2] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[3] David Mumford Pierre Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.