以下での (*) とは，次のもの: X :: integral noetherian separated (over $\mathbb{Z}$) scheme which is regular in codimension one.

Ex6.1 If X Satisfies (*), $\mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$.

$X' = X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \mathbb{P}^n_X$ とおく．また，$S = \mathbb{Z}[t_0, \ldots, t_n]$ とし，$\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$ とみなす．

■X' :: integral noetherian separated.　X の affine open cover を $\{\operatorname{Spec} A_i\}_{i=0}^r$ とすると，A_i :: integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. $\mathbb{P}^n$ の affine open cover は $\{\operatorname{Spec} S_{(t_j)}\}_{j=0}^n$ で与えられる．$S_{(x_j)}$ も integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. したがって $R_{ij} = A_i \otimes_{\mathbb{Z}} S_{(t_j)}$ とおくと，X' は $\operatorname{Spec} R_{ij}$ の張り合わせであり（Thm3.3），R_{ij} :: integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. 任意の $(i,j),(i',j')$ について $R_{ij}, R_{i'j'}$ が交わることから，X' 全体でも irreducible. よって X' :: integral noetherian scheme. being separated :: stable under base extension より，X' :: separated.

■X' :: regular in codimension one.　$x = \tilde{\mathfrak{p}} \in \operatorname{Spec} R_{ij}$ とする．$A_i \otimes \mathbb{Z}[t_0, \ldots, t_n]_{(t_j)} \cong A_i[t_0, \ldots, t_n]_{(t_j)}$ を，簡単のため $j = 0$ とし，$R_0 := A[\{t_j\}_{j=0}^n]$ とおく．Ati-Mac Prop3.1 より，$\tilde{\mathfrak{p}} \subset (R_0)_{(t_0)}$ に対応する height $= 1$ の素イデアル $\mathfrak{p} \subset R_0$ がただひとつ存在し，$\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{(t_0)}$ となる．これを使って計算すると，以下のようになる．

$$\mathcal{O}_{X',x} = ((R_0)_{(t_0)})_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{a/t_0^d}{b/t_0^e} \;\middle|\; d, e \geq 0, a \in (R_0)_d, b \in (R_0 - \mathfrak{p})_e \right\} \cong A[\{t_j\}_{j=1}^n]_{\mathfrak{p}'} =: R_1.$$

最後の同型は次のように与えられる．

$$\begin{array}{ccc} (R_0)_{(t_0)} = A[\{t_j\}_{j=0}^n]_{(t_0)} & \to & R_1 = A[\{t_j\}_{j=1}^n] \\ f(t_0, t_1, \ldots, t_n) & \mapsto & f(1, t_1, \ldots, t_n) \\ g(t_1/t_0, \ldots, t_n/t_0) & \leftarrow\!\shortmid & g(t_1, \ldots, t_n) \end{array}$$

$\mathfrak{p}'$ はこの写像による $\mathfrak{p}$ の像である．R_1 は A と同様に integral noetherian ring. $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}' \cap A$ とおく．$A \subset R_1$ は flat extension だから，going-down theorem が成立し，height $\mathfrak{q} \leq$ height $\mathfrak{p}' = 1$．また，計算すると

$$(R_1)_{\mathfrak{p}'} \cong (A_{\mathfrak{q}}[\{t_j\}_{j=1}^n])_{\mathfrak{p}''}.$$

ただし $\mathfrak{p}'' = \mathfrak{p}' A_{\mathfrak{q}}$．height $\mathfrak{q} = 1$ の時，仮定から $A_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{X,\mathfrak{q}}$ :: regular local ring. よって $(R_1)_{\mathfrak{p}'}$ は D.V.R. height $\mathfrak{q} = 0$ すなわち $\mathfrak{q} = 0$ の時，同様に $(R_1)_{\mathfrak{p}'}$ は体 $A_{(0)}$ 上の多項式環の $\mathfrak{p}$ における局所化だから D.V.R.

■Another Proof: X' :: regular in codimension one.　$\mathbb{P}^n$ は $n+1$ 個の $\mathbb{A}^n$ で被覆出来るから，$X \times \mathbb{P}^n$ は $n+1$ 個の $X \times \mathbb{A}^n$ で被覆できる．$X \times \mathbb{A}^n$ は Prop6.6 のとおり (*) を満たすから，$X \times \mathbb{P}^n$ も (*) を満たす．

■Define $\mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$.　$\mathfrak{p} = (t_0) \in \mathbb{Z}[t_0, \ldots, t_n] = S$ とする．$Z = \mathrm{pr}_2^{-1}(V(\mathfrak{p}))$ とおくと，Z :: irreducible closed subset of codim $= 1$ in $X \times \mathbb{P}^n$ †1．$U = Z^c = \mathrm{pr}_2^{-1}(V(\mathfrak{p})^c) \cong X \times \mathbb{A}^n$ だから，

†1 $\operatorname{Spec} A_i \subseteq X, U_{ij} = \operatorname{Spec} A_i \otimes S_{(t_j)}, j \neq 0$ とする．$\mathrm{pr}_2|_{U_{ij}}$ は $s \mapsto 1 \otimes s$ から誘導されるから，

$$Z \cap U_{ij} = (\mathrm{pr}_2|_{U_{ij}})^{-1}(V(\mathfrak{p})) = V(1 \otimes \mathfrak{p}) = V((1 \otimes t_0)) \subset \operatorname{Spec} A_i \otimes S_{(t_j)}$$

$1 \otimes t_0$ は非単元かつ不定元だから，Krulls Hauptidealsatz より，$(1 \otimes t_0) \subset A_i \otimes S_{(t_j)}$ が高さ 1 の素イデアルであることは明らか．よって $\operatorname{codim}(Z \cap U_{ij}, U_{ij}) = 1, \operatorname{codim}(Z, X') = 1$.

Ex3.9a と Prop6.6 より，$\mathrm{Cl}(U) \cong \mathrm{Cl}(X)$．したがって Prop6.5 の完全列は以下のようになる．

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \xrightarrow{j} \mathrm{Cl}(X) \longrightarrow 0$$

$\mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$ を示すには，$i : 1 \mapsto 1 \cdot Z$ が単射であること，および $j : Y \mapsto (\mathrm{pr}_1^*)^{-1}(Y \cap U)$ が split することを示せば十分である．後者はすぐに分かる．実際，$Y \subseteq X \times \mathbb{P}^n, U = X \times \mathbb{A}^n$ なので $\mathrm{pr}_1^* \circ j = \mathrm{id}_{\mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n)}$．

■i :: injective.　$X' = X \times \mathbb{P}^n, K$ :: function field of X' とし，$d \in \mathbb{Z} - \{0\}$ をとる．示すべきことは，$dZ = (f)$ を満たす $f \in K^\times$ が存在しないこと．正次数の斉次元 $u \in A[t_0, \ldots, t_n]$ をとり，$V = \operatorname{Spec} A[t_0, \ldots, t_n]_{(u)} = D_+(u) \subset X'$ において f が regular（pole を持たない）だとしよう．$D_+(u)$ は基本開集合を成すから，このようにすることは可能である．また，$V \cap Z \neq \emptyset$，したがって $u \notin (t_0)$ とする．この時，$f \in A[t_0, \ldots, t_n]_{(u)}, V \cap Z = V((t_0))$．$V \cap Z$ の generic point を $\eta = t_0 \cdot A[t_0, \ldots, t_n]_{(u)}$ [†2] とおくと，η に対応する valuation は $v_{V \cap Z}(f) = \sup\{d \mid f \in \eta^d - \eta^{d+1}\}$ で定まる．なので $v(f) = d$ ならば，f は次のようになる．

$$f = \left(\frac{t_0^m}{u}\right)^d \frac{g}{u^e} \quad \text{where} \quad m := \deg u, \quad e \geq 0, \quad g \in A[t_0, \ldots, t_n]_{em}, \quad u, t_0^m \not| g$$

$d \neq 0$ と仮定する．$e = \deg g = 0$ の時，u の既約因数によって定まる prime divisor U 上で $v_U(f) < 0$ となる．$e > 0$ の時，g の既約因数によって定まる prime divisor G 上で $v_G(f) > 0$ となる．以上から，$dZ = (f)$ となるならば $d = 0$．よって i :: injective.

Ex6.2　Varieties in Projective Space.

Ex6.3　Cones.

Ex6.4　$A = k[x_1, \ldots, x_n, z]/(z^2 - f)$ :: integrally closed.

$\mathrm{char}\, k \neq 2$ とする．$x_1, \ldots, x_n$ を $\vec{x}$ と略す．$f \in k[\vec{x}]$ :: square-free とし，$A = k[\vec{x}, z]/(z^2 - f)$ とおく．また，$\bar{z} = z + (z^2 - f)$ とする．（$\bar{z} = \sqrt{f}, A = k[\vec{x}, \sqrt{f}]$ と考えて良い．）f :: square-free より $z^2 - f$ :: irreducible, A :: integral domain.

■K の同定.　　この時，$K = \mathrm{Quot}(A)$ は $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f)$ である．実際，K の元は $g, h \in A$ の元によって g/h と表されるが，$z^2 = f$ なので，g/h は分母の「有理化」によって $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f)$ に属すことが分かる．したがって $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f) \subseteq K$ であり，逆の包含関係は明らか.

■$K/k(\vec{x})$.　K は $k(\vec{x})$ 上の 2 次式 $\bar{z}^2 - f$ の最小分解体だから，$K/k(\vec{x})$ は 2 次のガロア拡大である．$\mathrm{Gal}(K/k(\vec{x}))$ は，$\sigma : \bar{z} \mapsto -\bar{z}$ で生成される位数 2 の群.

■A :: integral closure of $k[\vec{x}]$ in K.　$\alpha \in K$ をとると，これは $g, h \in k(\vec{x})$ を用いて $g + h\bar{z}$ と書ける．α の最小多項式は，

$$(X - \alpha)(X - \sigma(\alpha)) = X^2 - 2gX + (g^2 - h^2 f).$$

この多項式の各係数が $k[\vec{x}]$ に属しているとしよう．すると，まず明らかに $g \in k[\vec{x}]$ である．また f :: square-free より，$h \notin k[\vec{x}]$ ならば h^2 の分母は f の因子で打ち消されず，$h^2 f, g^2 - h^2 f \notin k[\vec{x}]$ となる．

[†2] pr_1 は埋め込み写像 $A \to A \otimes \mathbb{Z}[t_0, \ldots, t_n]_{(u)}$ で誘導されるから，$Z = \mathrm{pr}_1^{-1} V((t_0)) = V((t_0 \otimes 1))$．$t_0 \otimes 1$ は $A \otimes \mathbb{Z}[t_0, \ldots, t_n]_{(u)} \cong A[t_0, \ldots, t_n]_{(u)}$ の同型写像で t_0 へ写る．

よって α :: integral / $k[\vec{x}]$ ならば $\alpha \in k[\vec{x}]$．逆に $\alpha \in k[\vec{x}]$ ならば $g, h \in k[\vec{x}]$ だから α の最小多項式は $k[\vec{x}]$ 係数多項式になる．以上をまとめて A :: integrally closed が分かる．

■系． 以上から，$z^2 - f = 0$ で定まる hypersurface は affine variety として normal である．特に，$f(x) \in k[x]$ が重根を持たない 3 次多項式であるとき，楕円曲線 $y^2 = f(x)$ は normal curve である．

Ex6.5 Quadric Hypersurfaces.

k :: field, $\mathrm{char}\, k \neq 2$ とし，

$$f = x_0^2 + \cdots + x_r^2 \in k[x_0, \dots, x_n], \quad A(X) = k[x_0, \dots, x_n]/(f), \quad X = \mathrm{Spec}\, A(X)$$

とおく．ch I, Ex3.12 より，$\mathbb{A}^{n+1}$ の任意の r 変数 quadric hypersurfaces は X と同型である．

(a) X :: normal if $r \geq 2$.

$f = x_0^2 - (-x_1^2 - \cdots - x_n^2)$ なので，Ex6.4 より $A(X)$ :: integrally closed．よって任意の点における $A(X)$ の局所化も integrally closed である．すなわち X :: nornal

Ex6.6 Consider $X = \mathcal{Z}_p(y^2 z - x^3 + xz^2)$.

Ex6.7 For $X = \mathcal{Z}_p(y^2 z - x^3 - x^2 z)$, $\mathrm{CaCl}^0(X) \cong \mathbf{G}_m$.

k :: algebraically closed field, $\mathrm{char}\, k \neq 2$ とし，$\mathbb{P}_k^2$ 内の曲線を考えていく．$f = y^2 z - x^3 - x^2 z, X = \mathrm{Proj}\, k[x, y, z]/(f) \subset \mathbb{P}_k^2$ とする．$S(X) = k[x, y, z]/(f)$ と書く．X の codimension 1 の点は, $\dim X = 1$ より，closed point に他ならない．X は $Z = (0:0:1)$ に node をもつ．

■$\mathrm{CaCl}^0(X) \cong \mathrm{Cl}(X - Z)$． X の singular point は Z しかない．これは ch I, Ex5.8 をつかって確認できる．$X = \mathrm{Proj}\, S(X)$ が noetherian scheme であることから，Thm4.9 より $X - Z$ :: nonsingular & separated & finite type．明らかに integral であることと合わせれば，$X - Z$ が (*) を満たすことが分かる．X 全体でも integral だから，$\mathcal{K}_X$ :: sheaf of total quotient rings of $\mathcal{O}_X$ は function field K である．$P \in X - Z$ に対する Cartier Divisor D_P の定め方，$\mathrm{CaCl}^0(X)$ の任意の元に対して，それが D_P と線形同値になる closed point $X - Z$ が存在することの議論は Example6.11.4 と全く同様である．

■$X - Z \cong \mathbb{A}^1 - \{0\}$． $(s:t:0) \in V(z) \cong \mathbb{P}^1$ をとり，$(s:t:0)$ と $Z = (0:0:1)$ を結ぶ直線 $sy - tx = 0$ と X の交点を計算する．すると $\mathbb{P}^1 \to X$ の写像が得られる．

$$(s:t) \mapsto (x:y:z) = (s(t^2 - s^2) : t(t^2 - s^2) : s^3)$$

$(1:1), (1:-1)$ はこの写像で Z へうつる．そこで以下のように置くと，isomorphism になる．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 - \{(1:1), (1:-1)\} & \to & X - Z \\ (s:t) & \mapsto & (s(t^2 - s^2) : t(t^2 - s^2) : s^3) \\ (x:y) & \leftarrow\!\shortmid & (x:y:z) \end{array}$$

$\mathbb{P}^1 - \{(1:1), (1:-1)\}$ は $(s:t) \mapsto \frac{-s+t}{s+t} = u \mapsto (1-u : 1+u)$ によって $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ と同型である．したがって，結局次の同型が出来る．

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{A}^1 - \{0\} & \to & X - Z \\ & t & \mapsto & (4(1-t)t : 4(1+t)t : (1-t)^3) \\ & \dfrac{-x+y}{x+y} & \leftarrow\!\shortmid & (x:y:z) \end{array}$$

■$\mathrm{Cl}(X)$ の特徴．　$\phi(1) = P_1 = (0:1:0)$ とおく．計算すると $(x:y:z) \in X$ について $P_1, (x:y:z), (x:-y:z)$ が一直線上にある．つまり，$P_1, (x:y:z), (x:-y:z)$ を零点に持つ一次式 l が存在する．よって $P_1 + (x:y:z) + (x:-y:z) \sim 0$ が得られる．（TODO: Example6.10.2 の $P+Q+R \sim 3P_1$ は更に $3P_1 = (z) \sim 0$ ということで良いのか？）

■$\mathrm{CaCl}^0(X) \cong \mathrm{Cl}(X-Z) \cong \mathbf{G}_m$．　$\phi(1) = P_1$ に注意する．計算すると，$\phi(t), \phi(u)$ と $\phi(tu)$ の y 成分の符号を反転させたものが一直線上にある．

$$\phi(t) + \phi(u) - (\phi(tu) + P_1) \sim 0.$$

変形して，

$$\begin{aligned} \phi(t) + \phi(u) - (\phi(tu) + P_1) &\sim 0 \\ \phi(t) + \phi(u) - P_1 &\sim \phi(tu) \\ (\phi(s) - P_1) + (\phi(t) - P_1) &\sim \phi(st) - P_1. \end{aligned}$$

よって，P_1 を単位元とすれば，$\mathrm{CaCl}^0(X) \cong \mathrm{Cl}(X-Z) \cong \mathbf{G}_m$．

Ex6.8　Morphism of Schemes Induces Homomorphism of Pic / Cl.

Ex6.9　(Culating the Picard Groups of) Singular Curves.

X :: projective curve $/k$，$\tilde{X}$ :: normalization of X (Ex3.8), $\pi : \tilde{X} \to X$ :: projection, $\widetilde{\mathcal{O}}_P$ :: integral closure of $\mathcal{O}_P$ ($P \in X$) とする．p.136 にある curve $/k$ の定義から，X :: integral, separated, finite type$/k$．このことと Ex3.8 より，π :: finite mmorphism.

(a)　Show there is an exact sequence.

次の完全列を示す．

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{P \in X} \tilde{\mathcal{O}}_P^* / \mathcal{O}_P^* \longrightarrow \mathrm{Pic}\, X \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Pic}\, \tilde{X} \longrightarrow 0.$$

Prop6.15 から，$\mathrm{Pic}\, X, \mathrm{Pic}\, \tilde{X}$ はそれぞれ $\mathrm{CaCl}\, X, \mathrm{CaCl}\, \tilde{X}$ と同型である．次の写像を考える．

$$\begin{array}{cccc} \phi: & (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^* & \to & \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^* \\ \phi_U & s + \mathcal{O}_X(U)^* & \mapsto & s/1 + \mathcal{O}_X(U)^* \end{array}$$

単元を単元に写す写像だから，これは単射．したがって次の完全列が得られる．

$$0 \longrightarrow (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* / \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}^* / \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \mathcal{K}^* / (\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}})^* \longrightarrow 0$$

（これは $0 \to \ker \to M \to N \to \mathrm{coker} \to 0$ という形の完全列である．）（TODO: global section をとる？　$\mathcal{K}^*$ :: quasi-coherent かどうか怪しい．）

Ex6.10　The Grothendieck Group $K(X)$.

TODO

Ex6.11　The Grothendieck Group of a Nonsingular Curve.

k :: algebraically closed field, X :: nonsingular curve / k とする．$K(X) \cong \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}$ を示そう．

Ex6.12　The Degree of Coherent Sheaf.

Ex6.11 の続きと言える．X :: complete nonsingular curve とする．Ex6.11 より $K(X) \cong \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}$. また nonsingular $\implies$ regular $\implies$ locally factorial なので Cor6.16 より $\operatorname{Pic} X \cong \operatorname{Cl} X$．そこで，$\mathcal{F}$ :: coherent sheaf on X に対する $\deg \mathcal{F}$ を，

$$\gamma(\mathcal{F}) \in K(X) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z} \to \operatorname{Pic} X \xrightarrow{\cong} \operatorname{Cl} X \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

で定める．右端の deg は degree of Weil divisor である．D :: Weil divisor に対し，$\gamma(\mathcal{L}(D))$ は上の写像で D へ写る．なので，The Grothendieck Group の定義と合わせて，以下が成立する．

(1) If D :: divisor, $\deg \mathcal{L}(D) = \deg D$.
(2) If $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ :: exact sequence, then $\deg \mathcal{F} = \deg \mathcal{F}' + \deg \mathcal{F}''$.

次を示す: If $\mathcal{T}$ is a torsion sheaf, then $\deg \mathcal{T} = \sum_{P \in X} \operatorname{length} \mathcal{T}_P$.

$U = \operatorname{Spec} A \subseteq X$ を任意にとり，T :: torsion A-module について $\mathcal{T}|_U \cong \tilde{T}$ であるとする．$\mathfrak{p} \in U$ に対し，$T_{\mathfrak{p}}$ は $A - \mathfrak{p}$ が $\mathfrak{a} = \operatorname{Ann}(T)$ の元を含む時 0 になる．したがって $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ の時のみ $T_{\mathfrak{p}} \neq 0$．そこで $V = V(\mathfrak{a})$ とする．$\mathfrak{a} \neq (0)$ かつ X は 1 次元だから，V は有限個の点のみからなる．

$\tilde{T} \in K(U)$ に対応する $D_T \in \operatorname{Cl} U$ を考える．Ex6.11a の構成によると，D_T の the structure sheaf of the associated subscheme が $\tilde{T}$ である．したがって D_T は以下のようになる．

$$D_T = \sum_{P \in V} v_P(f_P)\{P\}.$$

ただし $f_P \in A$ は $V(f_P) = \{P\} \subseteq U$ を満たす．したがって $v_P(f_P) = \operatorname{length} T_P$ を示せば十分．