ゼミノート #4
Fibered Categories

七条彰紀

2018 年 11 月 27 日

1　Motivation : Fibered Categories

“family” あるいは “object on/over a base space”（例えば schemes over a scheme や sheaves on a scheme など）の抽象的な枠組が fibered category である．今後は fibered category が提供する枠組を sheaves on a site の貼り合わせや stack の定義の為に活用する．

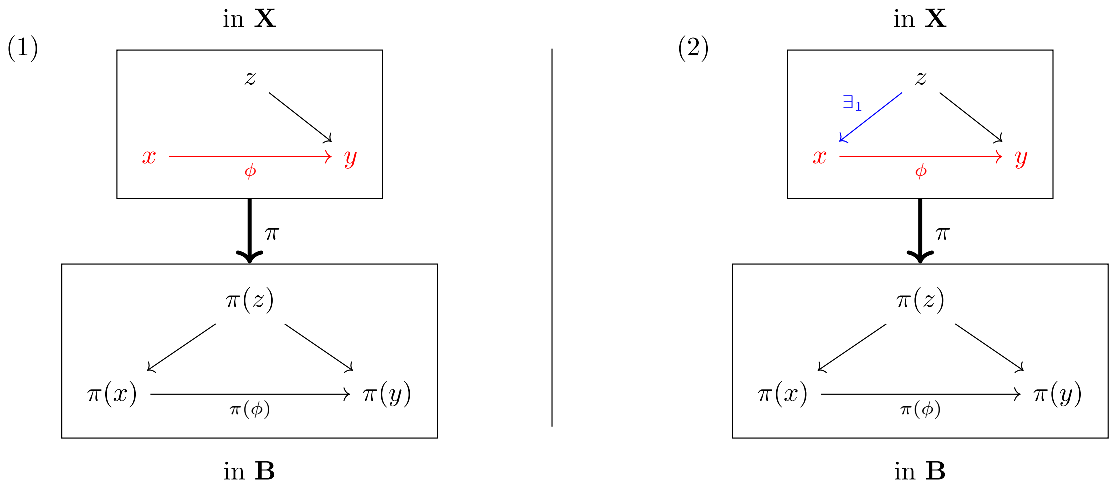
2　Definition : Fibered Categories

$\mathbf{X}, \mathbf{B}$ :: category と関手 $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ を考える．

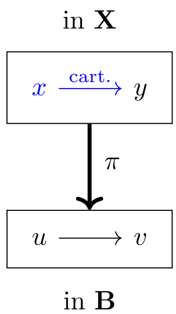
- π を projection あるいは fibration と呼ぶ.
- $\mathbf{X}$ を fibered category と呼ぶ.
- $\pi(O) = P$ であるとき O は P の上にある (O is over P) という．

定義 2.1 (Cartesian Arrow, Cartesian Lifting, Cartesian Functor, Base Preserving Natural Transformation, [3] and [2])

(i) 以下の性質（Triangle Lifting という）を満たす $\mathbf{X}$ の射 $\phi\colon x \to y$ を cartesian arrow という: (1) にあるような対象と射があるとき，(2) の様に射 $z \to y$ がただ一つ存在し，可換と成る．



(ii) $y \in \mathbf{X}, u \to \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対し，以下の図式を満たす[†1]$x \in \mathbf{X}$ と cartesian arrow :: $x \to y \in \mathbf{X}$を，cartesian lifting(or cleavage) of $u \to \pi(y)$ と呼ぶ．



(iii) 任意の $y \in \mathbf{X}$ と $u \to \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対して cartesian lifting が存在する $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category という．fibered category over $\mathbf{B}$ が成す圏を $\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ とする．

(iv) 二つの fibered category :: $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}, \pi'\colon \mathbf{X}' \to \mathbf{B}$ について，$\mathbf{X}$ と $\mathbf{X}'$ の間の射 (morphism of fibered categories, cartesian functor) とは，functor :: $g\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ であって，π, π' と整合的[†2]であり，cartesian arrow を cartesian arrow に写すもの．

(v)

注意 2.2

少し圏論の言葉を整理しておく．

対象を 0-morphism（あるいは 0-cell）と呼ぶ時，非負整数 $k \geq 0$ について，k-morphism (cell) は $(k-1)$-

[†1] すなわち，$\pi(x) = u, \pi(x \to y) = u \to \pi(y)$ を満たす．

[†2] すなわち $\pi' \circ g = \pi$ を満たす．

morphism (cell) の間の射と定義できる．こうして k-morphism (cell) は階層を成す．そこで，ここで定義した性質を階層別にまとめると次のように成る．

arrow	arrow in a fibered category	(i) Cartesian Arrow, (ii) Cartesian Lifting
0-cell	fibered category	(iii) Existence of Cartesian Lifting
1-cell	functor between fibered categories	(iii) Morphism of Fibered Category
2-cell	nat. trans. between functors	(iv) Base-Preserving Natural Transformation

通常の圏同型を 1-iso と呼び $\overset{1}{\cong}$ と書く．この時，階層ごとの iso/equiv は以下のようなものである．

iso.	$x \cong y$	$\Longleftrightarrow$	2 つの arrow $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$.
1-iso.	$x \overset{1}{\cong} y$	$\Longleftrightarrow$	2 つの 1-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$.
1-equiv.	$x \overset{1}{\simeq} y$	$\Longleftrightarrow$	2 つの 1-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi \cong \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi \cong \mathrm{id}_y$.
2-iso.	$x \overset{2}{\cong} y$	$\Longleftrightarrow$	2 つの 2-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$.
2-equiv.	$x \overset{2}{\simeq} y$	$\Longleftrightarrow$	2 つの 2-cell $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi \circ \phi \overset{1}{\cong} \mathrm{id}_x, \phi \circ \psi \overset{1}{\cong} \mathrm{id}_y$.

注意 2.3

$\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ は 2-category である．2-category は 2-morphism ($\mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ では natural transformation) に “vertical composition”と “horizontal composition”の二種類の合成が定まる圏である．詳しくはこのノートでは触れない．

定義 2.4 (Base-Preserving Natural Transformation, HOM, Equivalence)

(i) 二つの fibered category :: $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}, \pi'\colon \mathbf{X}' \to \mathbf{B}$ の間の 2 つの射 $g, g'\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ と natural transformation :: $\alpha\colon g \to g'$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X} \arrow[dd, shift right=3, "g"'] \arrow[dd, shift left=3, "g'"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\alpha}{\Longrightarrow}"] \arrow[dr, "\pi"] & \\
& \mathbf{B} \\
\mathbf{X}' \arrow[ur, "\pi'"'] &
\end{tikzcd}$$

任意の $x \in \mathbf{X}$ について，$\pi'(\alpha_x)\colon \pi'(g(x)) \to \pi'(g'(x))$ が恒等射になるとき，α を base-preserving natural transformation という．

(ii) $\mathbf{X}, \mathbf{X}' \in \mathbf{Fib}(\mathbf{B})$ について，$\mathrm{HOM}_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}, \mathbf{X}')$ を次の圏とする．

Object. morphism of fibered category $\mathbf{X} \to \mathbf{X}'$.

Arrows. base-preserving natural transformation.

(iii) morphism of fibered category :: $g\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ が equivalence of fibered category であるとは，別の morphism $h\colon \mathbf{X}' \to \mathbf{X}$ が存在し，$h \circ g$ と $\mathrm{id}_{\mathbf{X}}$，$g \circ h$ と $\mathrm{id}_{\mathbf{X}'}$ の間に base-preserving isomorphism が存在すること[†3].

$$h \circ g \overset{2}{\cong} \mathrm{id}_{\mathbf{X}}, g \circ h \overset{2}{\cong} \mathrm{id}_{\mathbf{X}'}.$$

二つの fibrered category が equivalent であるとは，二つの間に equivalence of fibered category が存

[†3] 基本的には category of equivalence の定義と同じである．

在するということである．

注意 2.5
2-morphism (2-cell) を base-preserving natural transformation に制限した fibered category の圏を $\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ とすると，HOM は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})}$ であるし，equivalence of fibered category は $\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ での 2-iso である．

3 Examples : Fibered Categories

例 3.1
morphism of schemes :: $f\colon X \to Y$ を取る．この f に対し，f の pullback が成す圏 $\Pi(f)$ を考えることが出来る．以下のように定義する．

Object. pullback diagram :: $\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$.

Arrow. pullback diagram と整合的な射の組 $(Z \to Z', P \to P')$.

$\Pi(f)$ から次のように projection が定まる．

$$\begin{array}{cccc} \pi\colon & \Pi(f) & \to & \mathbf{Sch}/Y \\ & \begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r] & Y \end{tikzcd} & \mapsto & [Z \to Y] \end{array}$$

ここで注意したいのは，$\Pi(f)$ は pullback of f の同型類や代表ではなく，pullback of f 全てであることである．したがって $\pi\colon \Pi(f) \to \mathbf{Sch}/Y$ は pullback of f を選択公理無しに扱う枠組を与えている．

例 3.2
category :: $\mathbf{C}$ について，arrow category :: $\mathbf{C}^{\to}$ を以下で定める．

Object. $\mathbf{C}$ の射（$[x \to u]$ の様に表記する）．

Arrow. 射 $[x \to u] \to [y \to v]$ は次の図式を可換にする $x \to y, u \to v$ の組: $\begin{tikzcd} x \arrow[r, dashed] \arrow[d] & y \arrow[d] \\ u \arrow[r, dashed] & v \end{tikzcd}$

すると Cartesian Lifting は $\mathbf{C}$ が pullback を持つことを意味し，Triangle Lifting は pullback の普遍性を意味する．

例 3.3
以下の関手は fibration である．

$$\begin{array}{cccc} \pi\colon & \mathbf{Sch}/X & \to & \mathbf{Sch} \\ & [Y \to X] & \mapsto & Y \end{array}$$

4 Propositions : Fibered Categories

命題 4.1 ([1] Prop3.4)

(i) cartesian arrow の合成は cartesian arrow である．

(ii) $\phi\colon x \to y, \psi\colon y \to z$ について，$\psi \circ \phi, \psi$ :: cartesian arrow ならば ψ :: cartesian arrow.

(証明)．Triangle Lifting のみを用いて証明できる．簡単なので証明は省略する． ∎

次の命題の証明は Cartesian Lifting と Triangle Lifting の使い方をよく示している．

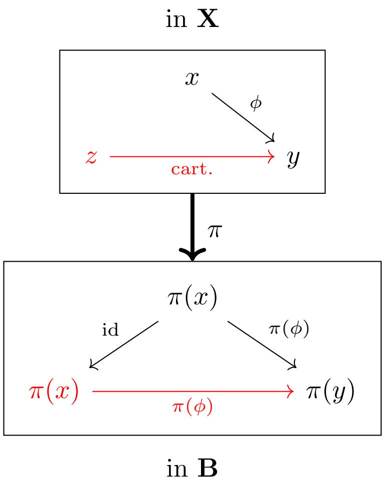
命題 4.2

$\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category over $\mathbf{B}$ とする．$\mathbf{X}$ の射 $x \to y$ は以下のような二つの射の合成 $x \to z \to y$ に分解できる．

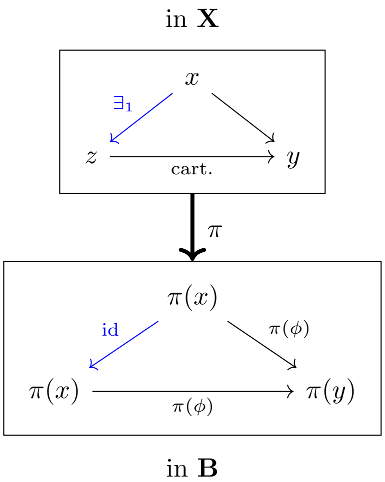
- $x \to z$ :: over $\mathrm{id}_{\pi(x)}$.
- $z \to y$ :: cartesian, over $\pi(x \to y)$.

(証明)．$\pi(\phi)$ の cartesian lifting として以下の図式 (1) の z と $z \to y$ を得る．さらに Triangle Lifting により図式 (2) の通り $\mathrm{id}_{\pi(x)}$ 上の射 $x \to z$ を得る．

(1)



(2)



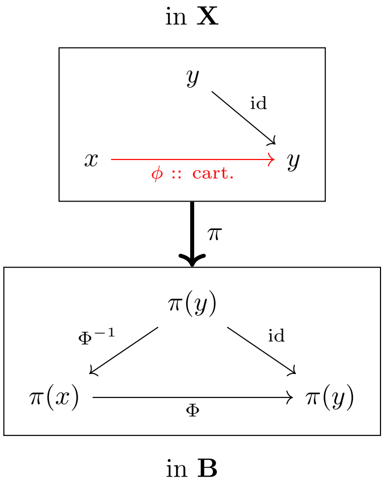
∎

命題 4.3

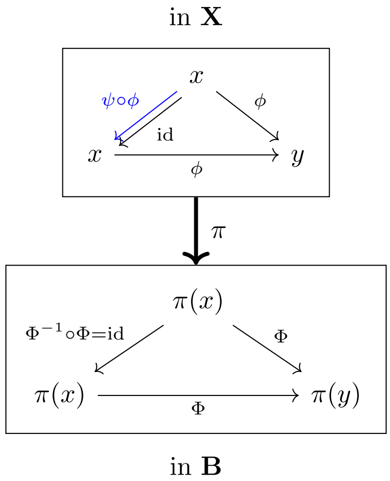
$\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．$\mathbf{X}$ の任意の cartesian morphism :: $\phi\colon x \to y$ について，ϕ :: iso と $\Phi := \pi(\phi)$ :: iso は同値．

(証明)．以下の図式 (1) に Triangle Lifting を用いれば，$\phi \circ \psi = \mathrm{id}_y$ なる射 $\psi\colon y \to x$ を得る．さらに図式 (2) に於いて，$\phi \circ \mathrm{id}_x = \phi = \phi \circ \psi \circ \phi$ と Triangle Lifting の一意性から $\psi \circ \phi = \mathrm{id}_x$ を得る．

(1)



(2)



∎

5 Fiber of Fibered Categories

5.1 Motivation

5.2 Definition

定義 5.1 (Fiber)
$\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．任意の $b \in \mathbf{B}$ について，以下で定める圏を $\mathbf{X}_b$ あるいは $\mathbf{X}(b)$ と書き，fiber of π at (over) b と呼ぶ:

Object. $\pi(x) = b$ となる object :: $x \in \mathbf{X}$.
Arrow. $\pi(\phi) = \mathrm{id}_b$ となる arrow :: $\phi \in \mathbf{X}$.

morphism of fibered category :: $g\colon \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ から fiber の間に誘導される射を $g_B\colon \mathbf{X}_B \to \mathbf{Y}_B$ と書く．

注意 5.2
標語的には次のように定義されている．

$$\mathbf{X}_b = \mathbf{X}(b) := “\pi^{-1}\left(b \circlearrowleft \mathrm{id} \right)”$$

$\mathbf{X}$ は上で定義した fiber と cartesian lifting によって contravariant functor に成ることが予想される．しかしこれは一般には正しくない．正確には，fibered category の fiber は一般に psuedo-functor となる．このことは後に証明する．

定義 5.3 (Psuedo-functor (weak 2-functor))
（以下の URL を参照せよ: https://stacks.math.columbia.edu/tag/003G.）2-圏 $\mathbf{C}$ から 2-圏 $\mathbf{D}$ への psuedo-functor :: $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ とは，$\mathbf{C}$ の object を $\mathbf{D}$ の object へ，$\mathbf{C}$ の arrow を $\mathbf{D}$ の arrow へ対応させるものであり，以下を満たす．

(a) 任意の $c \in \mathbf{C}$ について 2-isomorphism $\alpha_c\colon F(\mathrm{id}_c) \to \mathrm{id}_{F(c)}$ が存在する．

(b) 任意の $f\colon c \to d, g\colon d \to e \in \mathbf{C}$ について 2-isomorphism $\alpha_{g,f}\colon F(g \circ f) \to F(g) \circ F(f)$ が存在する．
(c) $f\colon x \to y, g\colon y \to z, h\colon z \to w$ について以下の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "F(f)"] \arrow[r, bend right, "F(f)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_{F(f)}"] & F(y) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "F(\mathrm{id})"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha_y"] & F(y) \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "F(f)"] \arrow[r, bend right, "F(f)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \alpha_{\mathrm{id}_y, f}"] & F(y) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r] \arrow[r, bend left] \arrow[rrr, bend left] & F(y) \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & F(z) \arrow[r] & F(w) \end{tikzcd}$$

5.3 Propositions

補題 5.4
$\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．任意の $\mathbf{B}$ の射 $f\colon b \to b'$ と $x \in \mathbf{X}(b')$ について，f と x に対する cartesian lifting は，同型を除いて一意に存在する．

(証明). 存在は fibered category の定義から明らか．一意性は cartesian lifting が普遍性を持つことを Triangle Lifting を用いて示せば良い． ∎

補題 5.5
$\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category とする．このとき，fiber of π は psuedo-functor である．

(証明). $b \in \mathbf{B}$ について，$\mathbf{X}(b)$ は既に既に定義した．$\mathbf{B}$ の射 $\phi\colon b' \to b$ について，関手 $\mathbf{X}(\phi)\colon \mathbf{X}(b) \to \mathbf{X}(b')$ は次のように定められる．まず $u \in \mathbf{X}(b)$ について，$\mathbf{X}(\phi)(u)$ は ϕ による u の pullback :: ϕ^*u (cartesian lifting of ϕ) である．次に $\mathbf{X}(b)$ の射 $\lambda\colon u \to v$ （$\mathbf{X}(b)$ の定義から $\pi(\lambda) = \mathrm{id}$ を満たす）について，下の図式に triangle lifting を用いて $\phi^*u \to \phi^*v$ を得る．

in $\mathbf{X}$

$$\begin{tikzcd} \phi^*u \arrow[r] \arrow[dr, bend left, blue] & u \arrow[d, "\lambda"] \\ \phi^*v \arrow[r] & v \end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi$$

$$\begin{tikzcd} b' \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, bend left, blue] & b \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ b' \arrow[r, "\phi"'] & b \end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

定義 (5.3) にある条件 (a) については，各 $b \in \mathbf{B}$ について，命題 (4.3) を用いれば同型の存在が分かる．条件 (b) については，各 $f\colon c \to d, g\colon d \to e \in \mathbf{C}$ と各 $b \in \mathbf{B}$ について補題 (5.4) を用いれば

$\mathbf{X}(g \circ f)(b) \cong \mathbf{X}(f) \circ \mathbf{B}(g)(b)$ が得られる．あとはこの同型が自然である（すなわち自然変換を定める）ことを確かめれば良い． ∎

この事実は次のセミナーで用いる．

定理 5.6 (2-Yoneda Lemma)
$\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ :: fibered category とする．以下のように関手を定める．

$$\begin{array}{rccc} Y\colon & \mathbf{B} & \to & \mathbf{Fib}(\mathbf{B}) \\ & U & \mapsto & \mathbf{B}/U \end{array}$$

ここで $\mathbf{B}/U$ は例 (3.3) にあるとおり fibered category over $\mathbf{B}$ である．

この時，圏同値 $\mathrm{HOM}_{\mathbf{U}}(Y(U), \mathbf{X}) \to \mathbf{X}(U)$ が成り立つ．

(証明)．(TODO) ∎

注意 5.7
この定理から，$\mathbf{X}(U)$ を「空間」$\mathbf{X}$ の U-rational points と考えることが出来る．また，この定理から関手 Y が $U \in \mathbf{B}$ の fibered category over $\mathbf{B}$ への「昇格」を与えていることが分かる．

系 5.8
圏同値 $U, V \in \mathbf{B}$ について $Y(U) \simeq Y(V)$ と $U \cong V$ は同値．

参考文献

[1] Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008).

[2] Behrang Noohi. A quick introduction to fibered categories and topological stacks. `http://www.maths.qmul.ac.uk/~noohi/papers/quick.pdf`.

[3] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.