命題 0.1. 位相空間 X とその部分集合 Y を考える。ある X の被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ であって、任意の λ で $Y\cap U_\lambda$ が U_λ において閉であるようなものが有るとき、Y が閉であることを示せ。

(証明). 対偶を示す。Y が閉でなければ、$x\notin Y$ かつ $x\in \mathrm{cl}_X(Y)$ なる点 x が存在する。すると $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の被覆だから、この中に x の開近傍が少なくともひとつ存在する。それを U としよう。$U\cap Y$ が U において閉集合でないことを示す。$x\notin Y$ から、$x\notin U\cap Y$ が得られる。あとは $x\in \mathrm{cl}_U(U\cap Y)$ が得られれば証明は終わる。

まず、X での閉集合 Z を用いて $\mathrm{cl}_U(U\cap Y)=U\cap Z$ と書く。$x\notin \mathrm{cl}_U(U\cap Y)=U\cap Z$ と仮定すると、$x\in U$ なので $x\notin Z$ が得られる。すると $U\cap(X\setminus Z)$ は x の開近傍となる。$x\notin Y$ かつ $x\in \mathrm{cl}_X(Y)$ から x は Y の集積点だから $U\cap(X\setminus Z)$ は (x と異なる)Y の点 y も含む。$y\in Y$ かつ $y\in U\cap(X\setminus Z)$ なので $y\in U\cap Y$ かつ $y\notin Z$。しかし $y\in U\cap Y\subseteq U\cap Z$ なので $y\in U\cap Z$。したがって $x\notin \mathrm{cl}_U(U\cap Y)$ とすると $y\notin Z$ と $y\in Z$ が同時に得られ、矛盾。よって $x\in \mathrm{cl}_U(U\cap Y)$ かつ $x\notin U\cap Y$ が示され、$U\cap Y$ が U における閉集合では無いことが示される。 ∎

(証明).

$$
\begin{aligned}
& Y\cap U_\lambda :: \text{ closed in } U_\lambda \\
\iff & Y^c\cap U_\lambda :: \text{ open in } U_\lambda \\
\iff & Y^c\cap U_\lambda :: \text{ open in } X \\
\implies & \textstyle\bigcup_\lambda (Y^c\cap U_\lambda) :: \text{ open in } X \\
\iff & Y^c :: \text{ open in } X \\
\iff & Y :: \text{ closed in } X
\end{aligned}
$$

ただし 2 つめの $\iff$ は U_λ::open in X から. ∎