以下での (*) とは，次のもの: X :: integral noetherian separated (over $\mathbb{Z}$) scheme which is regular in codimension one.

Ex6.1　If X Satisfies (*), $\mathrm{Cl}(X \times \mathbb{P}^n) \cong \mathrm{Cl}(X) \times \mathbb{Z}$.

$X' = X \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} = \mathbb{P}^n_X$ とおく．また，$S = \mathbb{Z}[t_0, \ldots, t_n]$ とし，$\mathbb{P}^n = \operatorname{Proj} S$ とみなす．

■X' :: integral noetherian separated.　X の affine open cover を $\{\operatorname{Spec} A_i\}_{i=0}^r$ とすると，A_i :: integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. $\mathbb{P}^n$ の affine open cover は $\{\operatorname{Spec} S_{(x_j)}\}_{j=0}^n$ で与えられる．$S_{(x_j)}$ も integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. したがって $R_{ij} = A_i \otimes_{\mathbb{Z}} S_{(x_j)}$ とおくと，X' は $\operatorname{Spec} R_{ij}$ の張り合わせであり（Thm3.3），R_{ij} :: integral noetherian $\mathbb{Z}$-algebra. 任意の $(i, j), (i', j')$ について $R_{ij}, R_{i'j'}$ が交わることから，X' 全体でも irreducible. よって X' :: integral noetherian scheme. being separated :: stable under base extension より，X' :: separated.

■X' :: regular in codimension one.　$x = \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R_{ij}$ とする．$A_i \otimes \mathbb{Z}[t_0, \ldots, t_n]_{(t_j)} \cong A_i[t_0, \ldots, t_n]_{(t_j)}$ を，簡単のため $A[T]_{(t)}$ を書くことにする．Ati-Mac Prop3.1 より，$\mathfrak{p} \subset A[T]_{(t)}$ に対応する height $= 1$ の素イデアル $\tilde{\mathfrak{p}} \subset A[T]$ がただひとつ存在し，$\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}}_{(t)}$ となる．これを使って計算すると，以下のようになる．

$$\mathcal{O}_{X',x} = (A[T]_{(t)})_{\mathfrak{p}} \cong A[T]_{(\tilde{\mathfrak{p}})}.$$

さて，A の素イデアル $\mathfrak{q}$ であって $\operatorname{height} \mathfrak{q} = 1$ を満たすものについて，局所化 $A_{\mathfrak{q}}$ は $\dim A_{\mathfrak{q}} = 1$ を満たす regular local ring である．したがって ch I, Thm6.3 より $A_{\mathfrak{q}}$ は integrally closed であり，Thm6.

Ex6.2　Varieties in Projective Space.

Ex6.3　Cones.

Ex6.4　$A = k[x_1, \ldots, x_n, z]/(z^2 - f)$ :: integrally closed.

$\operatorname{char} k \neq 2$ とする．$x_1, \ldots, x_n$ を $\vec{x}$ と略す．$f \in k[\vec{x}]$ :: square-free とし，$A = k[\vec{x}, z]/(z^2 - f)$ とおく．また，$\bar{z} = z + (z^2 - f)$ とする．（$\bar{z} = \sqrt{f}, A = k[\vec{x}, \sqrt{f}]$ と考えて良い．）f :: square-free より $z^2 - f$ :: irreducible, A :: integral domain.

■K の同定.　この時，$K = \operatorname{Quot}(A)$ は $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f)$ である．実際，K の元は $g, h \in A$ の元によって g/h と表されるが，$z^2 = f$ なので，g/h は分母の「有理化」によって $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f)$ に属すことが分かる．したがって $k(\vec{x})[z]/(z^2 - f) \subseteq K$ であり，逆の包含関係は明らか．

■$K/k(\vec{x})$.　K は $k(\vec{x})$ 上の 2 次式 $\bar{z}^2 - f$ の最小分解体だから，$K/k(\vec{x})$ は 2 次のガロア拡大である．$\operatorname{Gal}(K/k(\vec{x}))$ は，$\sigma : \bar{z} \mapsto -\bar{z}$ で生成される位数 2 の群.

■A :: integral closure of $k[\vec{x}]$ in K.　$\alpha \in K$ をとると，これは $g, h \in k(\vec{x})$ を用いて $g + h\bar{z}$ と書ける．α の最小多項式は，

$$(X - \alpha)(X - \sigma(\alpha)) = X^2 - 2gX + (g^2 - h^2 f).$$

この多項式の各係数が $k[\vec{x}]$ に属しているとしよう．すると，まず明らかに $g \in k[\vec{x}]$ である．また f :: square-free より，$h \notin k[\vec{x}]$ ならば h^2 の分母は f の因子で打ち消されず，$h^2 f, g^2 - h^2 f \notin k[\vec{x}]$ となる．よって α :: integral / $k[\vec{x}]$ ならば $\alpha \in k[\vec{x}]$．逆に $\alpha \in k[\vec{x}]$ ならば $g, h \in k[\vec{x}]$ だから α の最小多項式は $k[\vec{x}]$ 係数多項式になる．以上をまとめて A :: integrally closed が分かる．

■系．以上から，$z^2 - f = 0$ で定まる hypersurface は affine variety として normal である．特に，$f(x) \in k[x]$ が重根を持たない 3 次多項式であるとき，楕円曲線 $y^2 = f(x)$ は normal curve である．

Ex6.5 Quadric Hypersurfaces.

Ex6.6 Consider $X = \mathscr{Z}_p(y^2z - x^3 + xz^2)$.

TODO

Ex6.7 For $X = \mathscr{Z}_p(y^2z - x^3 - x^2z)$, $\mathrm{CaCl}^\circ(X) \cong \mathbf{G}_m$.

Ex6.8 Morphism of Schemes Induces Homomorphism of Pic / Cl.

TODO

Ex6.9 (Culating the Picard Groups of) Singular Curves.

TODO

Ex6.10 The Grothendieck Group $K(X)$.

TODO

Ex6.11 The Grothendieck Group of a Nonsingular Curve.

Ex6.12 The Degree of Coherent Sheaf.

TODO