

# ゼミノート #12

## Quotients of Algebraic Spaces

七条彰紀

2019 年 8 月 6 日

### 目次

1	Notes on Topology	1
1.1	Constructible Topology . . . . .	1
1.2	Equivalence Relation on Topological Space Induced by Groupoid . . . . .	3
2	Quotients	3
2.1	Definitions . . . . .	3
2.2	Propositions : Paraphrase . . . . .	5

## 1 Notes on Topology

### 1.1 Constructible Topology

以下を参考にした.

- [2] §1
- <http://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/Perfseminar/Notes/L3.pdf> by B.Conrad
- [4] 08YF <https://stacks.math.columbia.edu/tag/08YF>

#### 定義 1.1

$X$  :: topological space とする.

- $X$  の locally closed subset とは, closed subset と open subset の共通部分で表せる subset である.
- $X$  の constructible set とは,  $X$  の有限個の locally closed subset の和集合で表せる subset のことである.
- $U \subseteq X$  が  $X$  の locally constructible set であるとは,  $U$  のある開被覆  $\{U_i\}$  について, 各  $U \cap U_i$  が constructible set である, ということ.
- $X$  の constructible topology とは,  $X$  の constructible set を開基とする位相のことである.  $X$  の underlying set に  $X$  の constructible topology を与えた位相空間を  $X_{\text{cons}}$  と書く.

- (v) 有限個とは限らない  $X$  の constructible set の, 和集合を ind-constructible subset と呼び, 共通部分を pro-constructible subset と呼ぶ<sup>†1</sup>.
- (vi) map of topological spaces  $:: f: X \rightarrow Y$  について,  $f^{\text{cons}}$  を constructible topology での map とする. (map of sets としては  $f = f^{\text{cons}}$  である.)

**命題 1.2**

$X ::$  topological space とする.

- (i)  $X$  の open subset と closed subset は constructible set である.
- (ii) 有限個の constructible set の和, 共通部分は constructible set である. constructible set の補集合も constructible set である.
- (iii)  $X$  の constructible topology に於ける open subset は ind-constructible subset に限る. 同様に, closed subset は pro-constructible subset に限る.
- (iv) map of topological spaces  $:: f: X \rightarrow Y$  について,  $f^{\text{cons}} ::$  continuous.

(証明). 自明. ■

**命題 1.3** (i) qcqs(=quasi-compact and quasi-separated) scheme の pro-constructible subset は, affine scheme からの射の像に限る.

- (ii) locally of finite presentation morphism は constructible topology において open.
- (iii) quasi-compact morphism は constructible topology において closed.
- (iv)  $f ::$  surjective morphism で  $f ::$  locally of finite presentation or quasi-compact ならば  $f^{\text{cons}} ::$  submersive.

(証明). (i) は Rydh10 の Prop1.1 である. (ii) は Chevalley's theorem からの帰結. (iii) は locally に調べれば容易に分かる. (iv) は (ii), (iii) からの帰結である. ■

**注意 1.4**

constructible topology は spectral space<sup>†2</sup> と共に扱われることが多い. 例えば qcqs scheme の underlying space は spectral である.

**命題 1.5**

[2] Prop1.7 morphism of schemes  $:: f: X \rightarrow Y, g: Y' \rightarrow Y$  を考え,  $f$  の  $g$  による pullback を  $f'$  と書く.

- (i)  $P$  を open, closed, submersive のいずれかとする.  $g$  が submersive ならば,  $f' :: P$  と  $f :: P$  は同値.
- (ii)  $P$  を universally open, universally closed, universally submersive, separated のいずれかとする.  $g$  が universally submersive ならば,  $f' :: P$  と  $f :: P$  は同値.
- (iii)  $g^{\text{cons}}$  が universally submersive ならば,  $f' ::$  quasi-compact と  $f ::$  quasi-compact は同値.

(証明). (TODO) (iii) だけ証明を与える. ■

<sup>†1</sup> “ind-”は inductive limit を意味し, “pro-”は projective limit を意味する.

<sup>†2</sup> spectral space とは, 以下の性質をもつ位相空間: sober, quasi-compact, the intersection of two quasi-compact opens is quasi-compact, and the collection of quasi-compact opens forms a basis for the topology ([4] 08FG).

### 注意 1.6

おそらく, [3] はこの命題を利用するために, topological quotient に「 $q^{\text{cons}} :: \text{universal submersive}$ 」を要求している. より詳しく言うと以下の命題で使われている.

命題 1.7 ([3] Prop2.12 (ii))

$R \rightrightarrows_t^s X :: \text{groupoid}$  とし,  $q: X \rightarrow Y$  を topological quotient とする.  $j :: \text{quasi-compact}$  と,  $Y :: \text{quasi-separated}$  かつ  $j/Y :: \text{quasi-compact}$  は同値.

これを経由して,  $X \rightarrow S :: \text{quasi-separated}$  ならば GC quotient  $:: Y \rightarrow S$  が  $\text{quasi-separated}$  であることなどを示している (Prop4.7).

## 1.2 Equivalence Relation on Topological Space Induced by Groupoid

$S :: \text{algebraic space}$  とし, groupoid in algebraic  $S$ -space  $:: R \rightrightarrows_t^s X$  を考える.

topological space  $:: |U|$  に, 次のようにして同値関係  $\sim_R$  を定義する.

### 定義 1.8

点  $x_1, x_2 \in |X|$  について,

$$x_1 \sim_R x_2 \iff \exists r \in |R|, \quad |s|(r) = x_1, |t|(r) = x_2$$

と定義する.

$|R \times_x R| \rightarrow |R| \times_{|X|} |R|$  が全射であることを用いると, groupoid の定義から,  $\sim_R$  が同値関係であることが分かる.

### 定義 1.9

点  $x \in |X|$  の同値類を orbit と呼び,  $R(x)$  と書く.  $R(x)$  は  $|t|(|s|^{-1}(x))$  と等しい.

また,  $W \subseteq |X|$  が  $R$ -stable であるとは,  $W$  が  $\sim_R$  について stable であること. すなわち,

$$\{x \in |X| \mid \exists w \in W, \quad w \sim_R x\} = R$$

となること. これは  $|s|^{-1}(W) = |t|^{-1}(W)$  in  $|R|$  と同値.

### 注意 1.10

[4] 04XJ には,  $S = |X| \times_{|[X/R]|} |X|$  とすると位相空間として  $|[X/R]| = |X|/S$ , という命題が有る.

## 2 Quotients

以降は引き続き  $S :: \text{algebraic space}$  とし, groupoid in algebraic  $S$ -space  $:: R \rightrightarrows_t^s X$  を考える.

### 2.1 Definitions

定義 2.1 (equivariant morphism)

morphism  $:: q: X \rightarrow Y$  について,  $q \circ s = q \circ t$  であるとき,  $q$  を equivariant morphism という.

**定義 2.2** ( $j, j_Y$ )

$s, t: R \rightarrow X$  から  $X \times_S X$  の普遍性により得られる射  $:: R \rightarrow X \times_S X$  を  $j$  と書く.

また, equivariant morphism  $:: q: X \rightarrow Y$  について,  $s, t$  から  $X \times_Y X$  の普遍性により得られる射  $:: R \rightarrow X \times_Y X$  を  $j_Y$  と書く.

stabilizer はまたの機会に定義する.

**注意 2.3**

fiber product の普遍性から,  $j_Y$  に  $X \times_Y X \rightarrow X \times_S X$  を合成すると  $j$  に一致する.

**注意 2.4**

equivariant morphism  $:: R \rightrightarrows_t^s X \rightarrow Y$  は, quotient stack からの射  $[X/R] \rightarrow Y$  に一対一に対応する.  
(TODO: proof)

**定義 2.5** (universal, uniform quotient)

$q: X \rightarrow Y$  が性質  $P$  をもつとする.

- 任意の射  $Y' \rightarrow Y$  による pullback  $:: q': X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  も性質  $P$  をもつ時,  $P$  は universal であると言う.
- 任意の flat 射  $Y' \rightarrow Y$  による pullback  $:: q': X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  も性質  $P$  をもつ時,  $P$  は uniform であると言う.

**定義 2.6**

equivariant morphism  $:: q: X \rightarrow Y$  を考える.

### Categorical quotient

任意の equivariant morphism  $:: r: X \rightarrow Z$  が  $q$  を介して一意に分解する時, すなわち  $\bar{r} \circ q = r$  を満たす射  $:: \bar{r}: Y \rightarrow Z$  が一意に存在するとき,  $q$  を categorical quotient と呼ぶ.

### Zariski quotient

$|q|: |X| \rightarrow |Y|$  が topological space の圏における  $|R| \rightrightarrows_{|t|}^{|s|} |X|$  の coequalizer である時,  $q$  を Zariski quotient と呼ぶ. 同値な言い換えとして, 任意の点の  $|q|$  による逆像が丁度一つの orbit から成り, かつ  $|q| :: \text{submersive}$  である, というものが有る.

### Constructible quotient

$|q|^{\text{cons}}: |X|^{\text{cons}} \rightarrow |Y|^{\text{cons}}$  が topological space の圏における  $|R|^{\text{cons}} \rightrightarrows_{|t|^{\text{cons}}}^{|s|^{\text{cons}}} |X|^{\text{cons}}$  の coequalizer である時,  $q$  を constructible quotient と呼ぶ. 言い換えについては Zariski quotient と同様である.

### Topological quotient

$q :: \text{universal Zariski \& universal constructible quotient}$  である時,  $q$  を topological quotient と呼ぶ.

### Strongly topological quotient

$q :: \text{topological quotient}$  かつ  $j_Y :: \text{universally submersive}$  である時,  $q$  を strongly topological quotient と呼ぶ.

### Geometric quotient

$q$  が topological quotient であり, かつ  $\mathcal{O}_Y$  が  $Y_{\text{ET}}$  (category of etale sheaves on  $Y$ ) における  $s^*, t^*$

の equalizer である時,  $q$  を geometric quotient と呼ぶ.

$$\mathcal{O}_Y \longrightarrow q_* \mathcal{O}_X \xrightarrow[t^*]{s^*} (q \circ s)_* \mathcal{O}_R$$

### Strongly geometric quotient

$q ::$  geometric quotient & strongly topological quotient であるとき, すなわち  $q ::$  geometric quotient  
かつ  $j_Y ::$  universally submersive であるとき,  $q$  を strongly geometric quotient と呼ぶ.

#### 注意 2.7

$j_Y: X \times_Y X \rightarrow X \times_S X$  が universally submersive であることは,  $X \times_Y X$  に適切な位相が入っていることを意味する.

#### 注意 2.8

geometric quotient in [1]

- $q ::$  surjective and equivariant.
- $\mathcal{O}_Y = (q_* \mathcal{O}_X)^R$ .
- 任意の点  $y \in Y$  について,  $q^{-1}(y)$  はただ一つの orbit からなる.
- $W_1, W_2 \subseteq X ::$  disjoint closed subset について  $\text{cl}_Y(q(W_1)), \text{cl}_Y(q(W_2)) ::$  disjoint.

以下のように言い換えても良い.

- $q ::$  Zariski quotient.
- $\mathcal{O}_Y = (q_* \mathcal{O}_X)^R$ .
- $q$  の open immersion による pullback も上記を満たす.

ref. E.Viehweg “D. Mumford’s Geometric Invariant Theory”. なお, [1] の初版では  $q ::$  universally submersive を仮定している.

## 2.2 Propositions : Paraphase

### 命題 2.9 ([3], Prop2.3)

$R$ -equivariant morphism  $q: X \rightarrow Y$  を考える. 以下の  $3 \times 3 = 9$  個の命題を考える.

- (i) 任意の体  $k$  と射  $y: k \rightarrow Y$  <sup>†3</sup> について  $|X \times_Y k|$  は,  
少なくとも 1 つの / 多くとも一つの / 丁度一つの,  $(R \times_Y k)$ -orbit を含む.
- (ii)  $q ::$  surjective /  $j_Y ::$  surjective /  $q, j_Y ::$  surjective.
- (iii) 任意の代数閉体  $K$  について,  $\bar{q}_K: X(K)/R(K) \rightarrow Y(K)$  <sup>†4</sup> は  
surjective / injective / bijective.

この時, (i)  $\iff$  (ii)  $\iff$  (iii) がそれぞれ成り立つ. さらに  $q, j_Y ::$  locally of finite type or integral ならば, (ii)  $\implies$  (iii) も成り立つ.

<sup>†3</sup> Spec  $k$  を  $k$  と略した.

<sup>†4</sup>  $X(K)/R(K)$  は  $R(K) \rightrightarrows_{t_K}^{s_K} X(K)$  の coequalizer で,  $\bar{q}_K$  は coequalizer による  $q_K: X(K) \rightarrow Y(K)$  の一意な分解である.

(証明).

### 注意 2.10

したがって quotient の定義の幾つかは次のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} q :: \text{univ. Zariski} &\iff q :: \text{univ. submersive and } j_Y :: \text{surjective.} \\ q :: \text{topological} &\iff q, q^{\text{cons}} :: \text{univ. submersive and } j_Y :: \text{surjective.} \\ q :: \text{strongly topological} &\iff q, q^{\text{cons}}, j_Y :: \text{univ. submersive} \end{aligned}$$

### 補題 2.11

Remark 2.5 when univ. Zariski quot. is top. quot.?

### 命題 2.12

Prop2.10

## 参考文献

- [1] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric Invariant Theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34)*. Springer-Verlag, 3rd ed. edition, 1992.
- [2] David Rydh. Submersions and effective descent of étale morphisms. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, Vol. 138, No. 2, pp. 181–230, 2010.
- [3] David Rydh. Existence and properties of geometric quotients. *Journal of Algebraic Geometry*, Vol. 22, pp. 629–669, 08 2013.
- [4] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2019.