ゼミノート #3

七条彰紀

2018 年 5 月 23 日

以下では主に $g \geq 1$ の場合を考える．また，考えるのは $\mathbb{C}$ 上の scheme のみである．

問題 0.1

What properties $\mathcal{M}_g$ and $\bar{\mathcal{M}}_g$ does have?

1 Basic Properties

■$\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3$. $\mathcal{M}_g$ は Hilbert scheme の開集合の $PGL(N+1, \mathbb{C})$ による作用での商であった．そこで，$\dim \mathcal{M}_g$ を用いて Hilbert scheme の次元を記述し，

■$\mathcal{M}_g$ :: Irreducible.

2 Local Properties.

2.1 Singular Locus.

singular locus of $\overline{\mathcal{M}}_g$ を $\mathrm{Sing}\,\mathcal{M}_g$ と書く．smooth locus of $\mathcal{M}_g$ を $\mathrm{Sm}\,\mathcal{M}_g$ $(= \mathcal{M}_g - \mathrm{Sing}\,\mathcal{M}_g)$ と書く．

■$g \geq 4$. $\mathrm{Sm}\,\mathcal{M}_g$ は non-trivial automorphism を持たない curve の locus に一致する．

■$g = 2$.

■$g = 3$.

2.2 Local Looks.

$[C] \in \mathrm{Sing}\,\mathcal{M}_g$ の解析的近傍は，$\mathbb{C}^{3g-3}$ の開集合を有限群の線形作用で割ったようなものに成る．

2.3 $\Delta = \overline{\mathcal{M}}_g - \mathcal{M}_g$.

node を δ 個持つ stable curve が成す locus を考える．

主張 2.1
node を δ 個持つ stable curve が成す locus を $N_\delta \subset \bar{\mathcal{M}}_g$ とする．この時，

$$\dim N_\delta = 3g - 3 - \delta \quad (\implies \mathrm{codim}\, N_\delta = \delta).$$

また，$\mathrm{cl}_{\bar{\mathcal{M}}_g}(N_\delta)$ は node を δ 個以上持つ stable curve が成す locus に一致する．

このことは [1] Thm3.150 直後の段落でも触れられている．

node を 1 個以上持つ curve の locus :: $\Delta = \overline{\mathcal{M}}_g - \mathcal{M}_g$ は，$\mathcal{M}_g$ が $\overline{\mathcal{M}}_g$ の開集合であるから，これは closed in $\overline{\mathcal{M}}_g$．上の主張から，Δ は node を丁度 1 つ持つ curve の locus の closure である．そこで Δ_0 と Δ_i $(i = 1, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor)$ を次のように定める．

- $\Delta_0 = \mathrm{cl}_{\overline{\mathcal{M}}_g}(\{[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g \mid C ::$ irreducible curve with 1 node $\})$.
- $\Delta_0 = \mathrm{cl}_{\overline{\mathcal{M}}_g}(\{[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g \mid C ::$ union of two smooth curves of genus i and $g - i$, meeting at 1 pt $\})$ for $i = 1, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor$.

（TODO: なぜ Δ_0 は smooth curves の和でないのか？）

$\Delta_0, \ldots, \Delta_{\lfloor g/2 \rfloor}$ は irreducible である．これは以下のように証明する．まず Δ_0 を考える．C :: irreducible curve with 1 node とする．これの normalization を $\tilde{C}$ とすると，C の node は $\tilde{C}$ の 2 点に対応する．そこで $\tilde{C}$ とこの 2 点を組にして $\mathcal{M}_{g-1,2}$ の点とする．こうして $\phi_0 : \mathcal{M}_{g-1,2} \to \Delta_0$ が得られる．$\Delta_i (i > 0)$ の場合，C の normalization は genus i, genus $g - i$ の component からなる．交点に対応する点をそれぞれ一つずつ持つから，これを distinguished point として $\phi_i : \mathcal{M}_{i,1} \times_k \mathcal{M}_{g-i,1} \to \Delta_i$ が得られる．こうして得られる $\Delta_0, \ldots, \Delta_{\lfloor g/2 \rfloor}$ は連続である (FACT).

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ は irreducible である (Thm2.15)．したがってその開集合 $\mathcal{M}_{g,n}$ も irreducible である（Δ :: closed より）．$\mathcal{M}_{g,n}$ は代数閉体上の scheme（実際には variety, Thm2.15）なので，これらの fiber product も irreducible．連続写像で写す操作と閉包をとる操作で irreducibility が保たれるので，$\Delta_i = \mathrm{cl}(\mathrm{im}\,\phi_i)$ $(i = 0, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor)$ は irreducible である．

3 How Close is $\mathcal{M}_g$ to Projective ?

4 Cohomology of $\mathcal{M}_g$.

5 Cohomology of $\mathcal{C}_g := \mathcal{M}_{g,1}$.

参考文献

[1] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.