

Ex7.1 Surjective Morphism between Invertible Sheaves is Isomorphic.

$X ::$ locally ringed space, $\mathcal{L}, \mathcal{M} ::$ invertible sheaves on X , $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M} ::$ surjective morphism, とする.

■Proof 1. 任意の点 $x \in X$ をとり, $A = \mathcal{O}_{X,x}$ とおく. $f_x : \mathcal{L}_x \rightarrow \mathcal{M}_x$ は同型写像を合成することで $\phi : A \rightarrow A ::$ surjective A -morphism と同一視出来る. $\phi ::$ surjective より, $\phi(\alpha) = 1 \in A$ となる $\alpha \in A$ がとれる. また ϕ は A -module morphism だから, $\alpha\phi(1) = 1$. そこで $\psi : A \rightarrow A$ を $a \mapsto \alpha a$ と定義すれば, これが ϕ の逆写像になる. よって ϕ, f_x は同型. Prop1.1 から, $f ::$ iso.

■Proof 2. Matsumura, Thm2.4 から分かる. これは NAK (or Nakayama's Lemma) からの帰結である.

注意 Ex7.1.1

$k(x) ::$ residue field と $f_x : \mathcal{L}_x \rightarrow \mathcal{M}_x$ をテンソルすると, $f_x \otimes \text{id}_{k(x)} ::$ surjective $k(x)$ -module morphism が得られる. よって $\ker(f_x \otimes \text{id}_{k(x)}) = 0$. しかし, ここから NAK をつかって $\ker f_x = 0$ を導くことは出来ない. $k(x)$ が flat $\mathcal{O}_{X,x}$ -module でなく, したがって $\ker(f_x \otimes \text{id}_{k(x)})$ と $(\ker f_x) \otimes k(x)$ の間に同型があることが言えないからである. このことは flat \implies torsion-free に気をつければすぐに分かる. 同様の議論が $f_x ::$ injective (と $\text{coker } f_x$) の場合に出来ることにも気づくが, このときは $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2; 1 \mapsto 3$ という反例がある.

Ex7.2 Two Sets of Global Generators and Corresponding Morphisms.

$k ::$ field, $X ::$ scheme $/k$, $\mathcal{L} ::$ invertible sheaf on X , $S = \{s_0, \dots, s_m\}, T = \{t_0, \dots, t_n\} ::$ global generators of \mathcal{L} . とする. ここで S, T は同じ線形 (部分) 空間 $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ を張るとする. また $n \leq m, d = \dim_k V$ とする.

S, T からそれぞれ Thm7.1 のように定まる morphism を ϕ_S, ϕ_T とする. ϕ_S が次のように分解できることを示す.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\phi_T} & \text{im } \phi_T \hookrightarrow & \mathbb{P}^m - L & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n \\ & & & & & \searrow & \\ & & & & & \phi_S & \end{array}$$

ここで π, α はそれぞれ linear projection と automorphism である.

$X \rightarrow \mathbb{P}^n$ の morphism を考えることは, $k[y_0, \dots, y_n]$ の元 y_0, \dots, y_n の変換を考えることと同じである. これは Thm7.1 の証明を観察すれば分かる. 二つの k -linear map は ϕ_S^*, ϕ_T^* はそれぞれ, $y_i \mapsto s_i (i = 0, \dots, n), y_i \mapsto t_i (i = 0, \dots, m)$ で定まっている. したがって問題は, t_0, \dots, t_m を s_0, \dots, s_n へ変換する projection と automorphism をつくる問題, と言い換えられる.

今, 次のような $(m+1) \times (n+1)$ 行列 Q が存在する.

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}.$$

S, T が V の生成系であることから $\text{rank } Q = \dim V =: d$. Q は基本行列をいくつもかける (あるいは基本変形を繰り返す) ことにより, 次の形に分解できる.

$$Q = LP_dR \quad \text{where } L \in PGL(m, k), R \in PGL(n, k)$$

ただし行列 P_r ($r = 1, \dots, n+1$) は $r \times r$ -identity matrix I_r をもちいて $P_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と定義される行列である。(TODO: P_d を P_{n+1} に交換しても問題ない?) L, P_{n+1}, R が誘導する morphism をそれぞれ $\beta, \tilde{\pi}, \alpha$ とすれば, α, β は automorphism であり, $\tilde{\pi}$ は projection である.

$$\mathbb{P}^m \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^m \xrightarrow{i} \mathbb{P}^m - L \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{P}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n$$

求める射はこの α と, $\pi = \beta \circ i \circ \tilde{\pi}$ である. また, $L = Z_p(y_0, \dots, y_n) \subseteq \mathbb{P}^m$ の次元は $m - (n+1)$ である.

Ex7.3 Morphism of $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^m$ can be Decomposed into Common Ones.

$\phi : \mathbb{P}_k^n \rightarrow \mathbb{P}_k^m$ を考える. $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) ::$ invertible sheaves の global generator をそれぞれ $\{x_0, \dots, x_m\}, \{y_0, \dots, y_n\}$ とする.

(a) $\text{im } \phi = pt$ or $m \geq n$ and $\dim \text{im } \phi = n$.

$s_i = \phi^*(x_i)$ ($i = 0, \dots, m$) とおくと, s_0, \dots, s_m は $\mathcal{L} := \phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$ の global generator である. \mathcal{L} は \mathbb{P}^n 上の invertible sheaf だから, Cor6.17 より, $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ となる $d \in \mathbb{Z}$ が存在する. Example7.8.3 同様, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ は $|d|$ 次斉次単項式で生成される.

■ $m < n \implies \dim \text{im } \phi = 0$.

■ $m \geq n \implies \dim \text{im } \phi = n$.

Ex7.4 If X Admits an Ample Invertible Sheaf, then X is Separated.

(a) Assumption of Thm7.6 $\implies X ::$ separated.

$A ::$ noetherian ring, $X ::$ scheme of finite type $/A$ とする. $\mathcal{L} ::$ ample invertible sheaf on X が存在したとする. Thm7.6 から, immersion $i : X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ ($n > 0$) が存在する. これは X から \mathbb{P}_A^n の locally closed subscheme への isomorphism である. これに projection $\text{pr} : \mathbb{P}_A^n = \mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } A$ を合成したものは, quasi-projective.

$$X \xrightarrow{\sim} U \hookrightarrow Z \hookrightarrow \mathbb{P}_A^n \xrightarrow{\text{pr}} \text{Spec } A$$

Z は \mathbb{P}_A^n の closed subscheme, U は Z の open subscheme である. A, X についての仮定から $\text{Spec } A, X ::$ noetherian scheme がわかる^{†1} から, Thm4.9 より, この射 $X \rightarrow \text{Spec } A$ は separated.

(b) There is No Ample Invertible Sheaf on  $/$ a field k .

$k ::$ field, $X ::$ affine with doubled origin $/k$ とする. より詳細に, X は $X_1 = \text{Spec } k[x_1], X_2 = \text{Spec } k[x_2]$ を $U_1 = X_1 - \{O_1\}, U_2 = X_2 - \{O_2\}$ で貼りあわせたものとする. ただし $O_1 \in X_1, O_2 \in X_2$ は原点である. X_i, U_i, O_i ($i = 1, 2$) はすべて X の部分集合とみなす. また $U = X_1 \cap X_2 = X - \{O_1, O_2\}$ とする. 明らかに $U = U_1 = U_2 \cong \mathbb{A}^1 - \{0\} = \text{Spec } k[x_1, x_1^{-1}]$. また $x_1|_U = x_2|_U$.

^{†1} $f : X \rightarrow \text{Spec } A$ が finite type ならば $f^{-1} \text{Spec } A = X$ は finite affine open cover をもち, 各 affine open cover は finitely generated A -algebra の Spec である. finitely generated A -algebra は A から noetherian を受け継ぐから, $X ::$ noetherian.

■Plot. まず, X 上の invertible sheaf 全体 $\text{Pic } X$ がどのようなものか調べる. これは $\text{Pic } X \cong \mathbb{Z}$ となる. $n \in \mathbb{Z}$ に対応する $\text{Pic } X$ の元を \mathcal{L}_n とする. 次に, generated by global section であるような invertible sheaf を考える. これは $\mathcal{L}_0 (= \mathcal{O}_X)$ しかない. すると任意の $m > 0, n \neq 0$ について

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 \otimes (\mathcal{L}_n)^{\otimes m} &= \mathcal{L}_{mn} \neq \mathcal{L}_0. \\ \mathcal{L}_n \otimes (\mathcal{L}_0)^{\otimes m} &= \mathcal{L}_n \neq \mathcal{L}_0.\end{aligned}$$

なので, どの invertible sheaf も ample でない.

■ $X :: \text{noetherian integral scheme}$. $X_1, X_2 \cong \mathbb{A}^1 = \text{Spec } k[x_1]$ と reduced が local な性質であることから $X :: \text{noetherian reduced scheme}$. $X :: \text{irreducible}$ も明らかだから, $X :: \text{noetherian integral scheme}$.

■ $\text{Pic } X \ni \mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$. $\mathcal{L} \in \text{Pic } X$ を任意にとる. $X :: \text{integral}$ と Prop6.15 より, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$ となる $D \in \text{CaCl } X$ が存在する. Prop6.13 の証明から D がどのような形のものか考えよう. Example 6.3.1, Cor 6.16 より, $\text{Pic } X_1, \text{Pic } X_2$. なので $\mathcal{L}|_{X_1} \cong \mathcal{O}_{X_1}, \mathcal{L}|_{X_2} \cong \mathcal{O}_{X_1}$ となる. Prop6.13 の証明から, D は次のような形をしている.

$$D = \{\langle X_1, f_1 \rangle, \langle X_2, f_2 \rangle\} \text{ where } f_1 \in \Gamma(X_1, \mathcal{K}_{X_1}^*) = (k(x_1))^*, f_2 \in \Gamma(X_2, \mathcal{K}_{X_2}^*) = (k(x_2))^*.$$

■ $D \sim \{\langle X_1, x_1^n \rangle, \langle X_2, 1 \rangle\}$. Cartier divisor の定義から, $U = X_1 \cap X_2$ において $f_1/f_2 \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U^*)$ となっている. $U \subseteq X_1 = \text{Spec } k[x_1]$ と考えると, $U = \text{Spec } k[x_1]_{x_1} = \text{Spec } k[x_1, x_1^{-1}]$. ($U \subseteq X_1$ と見れば $U = \text{Spec } k[x_2, x_2^{-1}]$ であるが, どちらでも同じである.) そして

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*) = (k[x_1, x_1^{-1}])^* = \{\alpha x_1^n \mid \alpha \in k^*, n \in \mathbb{Z}\}.$$

であるから, $f_1/f_2 = \alpha x_1^n (\iff f_2/f_1 = (\alpha x_1^n)^{-1})$ と書ける. よって

$$D = \{\langle X_1, \alpha x_1^n f_2 \rangle, \langle X_2, f_2 \rangle\} \text{ where } f_2 \in \Gamma(X_2, \mathcal{K}_{X_2}^*) = (k(x_2))^*.$$

再び $X :: \text{integral}$ から, \mathcal{K}_X は constant sheaf であり, したがって $f_2 \in K = \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ となる. なので $\{\langle X_1, f_2 \rangle, \langle X_2, f_2 \rangle\}$ は principal. 加えて $\{\langle X_1, \alpha \rangle, \langle X_2, 1 \rangle\} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ なので^{†2}, 結局 $D \sim \{\langle X_1, x_1^n \rangle, \langle X_2, 1 \rangle\}$.

■ $\text{Pic } X \cong \mathbb{Z}$. $n \in \mathbb{Z}$ に対し, 次のように定める.

$$D_n = \{\langle X_1, x_1^n \rangle, \langle X_2, 1 \rangle\}, \quad \mathcal{L}_n = \mathcal{L}(D_n).$$

これは次の写像を定める.

$$\begin{aligned}\mathbb{Z} &\rightarrow \text{CaCl } X \\ n &\mapsto D_n\end{aligned}$$

明らかに $D_m + D_n = D_{m+n}, \mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{m+n}$ だから, これは加法群としての全射準同型. 最後に, 単射であることを見よう. $D_n = D_0$ ならば, D_0 同様 D_n も principal である. したがって次を満たす $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ が存在する.

$$f|_{X_1}/x_1^n \in \Gamma(X_1, \mathcal{O}_{X_1}^*) = k^*, \quad f|_{X_2}/1 \in \Gamma(X_2, \mathcal{O}_{X_2}^*) = k^*$$

^{†2} この部分は Prop6.13c を用いて

$$\mathcal{L}(\{\langle X_1, \alpha \rangle, \langle X_2, 1 \rangle\}) = \mathcal{O}_X = \mathcal{L}(\{\langle X_1, 1 \rangle, \langle X_2, 1 \rangle\})$$

故に $\{\langle X_1, \alpha \rangle, \langle X_2, 1 \rangle\} = \{\langle X_1, 1 \rangle, \langle X_2, 1 \rangle\}$, と理解しても良い.

ここから $f|_{X_1} \in k^*$ が得られる. よって $(f|_{X_1})/x_1^n \in k^*$ と合わせて $n = 0$ を得る. このことは次の段落でも使うので, 別に主張として述べておく.

主張 Ex7.4.1

$f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ とする. $f|_{X_2} \in k^*$ ならば, $f|_{X_1} \in k^*$.

(証明). $f|_{X_2} \in k^*$ から $f|_U \in k^*$ が得られる. $f|_U = \alpha$ としよう. $U = \text{Spec } k[x_1]_{x_1} \subset X_1$ をみなして考えると, $k[x_1]_{x_1}$ の元として $(f|_{X_1})|_U = \alpha$ となっている. なので整数 $r \geq 0$ が存在し, $k[x_1]$ の元として $x_1^r(f|_{X_1} - \alpha) = 0$. しかし $k[x_1]$ は整域なので, 結局 $f|_{X_1} = \alpha \in k^*$. ■

(証明). $k^* \subseteq \mathcal{O}_{X,O_1}^* \cap \mathcal{O}_{X,O_2}^*$ だから, $f_{O_2} \in k^*$ より $f_{O_1} \in k^*$. 他の点における f の germ が k^* に含まれることは $f|_{X_2} \in k^*$ より明らか. よって $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = k^*$. ■

この主張は X が non-separated であることを暗示している.

■ Globally Generated Invertible Sheaf on X . $n \in \mathbb{Z}$ を任意にとり, $\{g_i\}_i \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L}_n)$ が \mathcal{L}_n の global generators であるとしよう. $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}(D_n)$ だから, $\mathcal{L}_n|_{X_1}$ は x_1^n で generate され, $\mathcal{L}_n|_{X_2}$ は 1 で generate されている. 特に後者から, $\mathcal{L}_n|_U$ は 1 で generate されている. したがって stalk で見れば, 次のようになっている.

$$\begin{aligned} \forall P \in X_2, \langle \{g_i\}_P \rangle_i &= (\mathcal{L}_n)_P = \mathcal{O}_{X,P} && \text{as } \mathcal{O}_{X,P}\text{-module.} \\ \langle \{g_i\}_{O_1} \rangle_i &= (\mathcal{L}_n)_{O_1} = (x_1^n)_{O_1} \mathcal{O}_{X,O_1} && \text{as } \mathcal{O}_{X,O_1}\text{-module.} \end{aligned}$$

これらを可換環に翻訳し, g_i を $g_i|_{X_2}, g_i|_U, g_i|_{X_1}$ の順に求めていく. $X_2 = \text{Spec } k[x_2]$ だから, P に対応する素イデアル $\mathfrak{p} \subset k[x_2]$ がとれる. また, $g_i|_{X_2} \in \Gamma(X_2, \mathcal{O}_X) = k[x_2]$. $\mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}_{X_2,P} = k[x_2]_{\mathfrak{p}}$ であり, したがって $k[x_2]_{\mathfrak{p}}$ -module として $\langle \{g_i|_{X_1}\}_{\mathfrak{p}} \rangle = k[x_2]_{\mathfrak{p}}$. なので, 次が成り立つ.

$$\forall \mathfrak{p} \in \text{Spec } k[x_2], \forall i, (g_i|_{X_2})_{\mathfrak{p}} \in (k[x_2]_{\mathfrak{p}})^* = k[x_2] \setminus \mathfrak{p}.$$

よって $g_i|_{X_2} \in (k[x_2])^* = k^*$ がわかる. 前段落に書いた主張から $g_i|_{X_1} \in k^*$. $\langle \{g_i\}_{O_1} \rangle_i = (x_1^n)_{O_1} \mathcal{O}_{X,O_1}$ と合わせて $(g_i|_{X_1})/x_1^n \in k^*$ が得られ, $n = 0$ となる. 以上より, \mathcal{L}_0 のみが generated by global sections である.

■ Another Proof: Globally Generated Invertible Sheaf on X . $n \in \mathbb{Z}$ をとり, $\{g_i\}_i \in \Gamma(X, \mathcal{L}_n)$ を \mathcal{L}_n の global generator とする. $\mathcal{L}_n|_{X_1}$ は x_1^n で, $\mathcal{L}_n|_{X_2}$ は 1 で生成されており, X_1, X_2 共に affine scheme である. そのため, 次のようになる.

$$\begin{aligned} \langle \{g_i|_{X_2}\}_i \rangle &= \Gamma(X_2, \mathcal{L}_n|_{X_2}) = k[x_2] && \text{as } k[x_2]\text{-module.} \\ \langle \{g_i|_{X_1}\}_i \rangle &= \Gamma(X_1, \mathcal{L}_n|_{X_1}) = x_1^n k[x_1] && \text{as } k[x_1]\text{-module.} \end{aligned}$$

一行目から, $\{g_i|_{X_2}\} \subseteq (k[x_2])^* = k^*$. なので前々段落の主張から, $\{g_i|_{X_1}\} \subseteq k^*$. よって $x_1^n \in (k[x_1])^* = k^*$ が得られる.

■ 資料. 詰まったところでは次のページを参考にした: <https://math.stackexchange.com/questions/70042>.

Ex7.5 Ample and Very Ample are Inherited by Tensor Products.

X :: noetherian scheme, \mathcal{L}, \mathcal{M} :: invertible sheaves on X とする. “generated by global sections” は gbgs と略す. (d), (e) では更に X :: finite type over a noetherian ring A , と仮定する. (これは Thm7.6 の仮定である.)

補題 Ex7.5.1

If $\mathcal{M}, \mathcal{M}' :: \text{gbgs invertible sheaves on } X$, then $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}' :: \text{gbgs}$.

(証明). $\{m_i\} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{M}), \{m'_j\} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{M}')$ をそれぞれ $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ の global generator とする. 定義より, このことは次と同値である: 任意の点 $x \in X$ について $\mathcal{M}_x, \mathcal{M}'_x$ はそれぞれ $\{(m_i)_x\}_i, \{(m'_i)_x\}_j$ で $\mathcal{O}_{X,x}$ -module として生成される. さて, tensor product は left adjoint であることから colimit と交換する. なので $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}')_x$ は $\mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}'_x$ と同型である. 明らかにこれは $\{(m_i)_x \otimes (m'_i)_x\}_{i,j}$ で生成される (Ati-Mac §2.7) から, $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}' :: \text{gbgs}$. global generator は $\{m_i \otimes m'_i\}_{i,j}$ である. ■

(a) If $\mathcal{L} :: \text{ample}$ and $\mathcal{M} :: \text{gbgs}$ then $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} :: \text{ample}$.

$\mathcal{F} :: \text{coherent sheaf on } X$ とする. $\mathcal{L} :: \text{ample}$ なので, 十分大きな $n > 0$ について $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} :: \text{gbgs}$. これに $\otimes \mathcal{M}^{\otimes n}$ を合わせて整理すると, 補題から $\mathcal{F} \otimes (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})^{\otimes n} :: \text{gbgs}$. よって $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} :: \text{ample}$.

(b) If $\mathcal{L} :: \text{ample}$ and $\mathcal{M} :: \text{arbitrary}$ then $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} :: \text{ample for some } n > 0$.

$\mathcal{M} :: \text{coherent}$ なので, 十分大きな $n > 0$ について $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} :: \text{gbgs}$. 任意の $\mathcal{F} :: \text{coherent sheaf}$ に対して十分大きい $r > 0$ をとると, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes rn} :: \text{gbgs}$. 補題より次も gbgs:

$$(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes rn}) \otimes (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})^{\otimes r}.$$

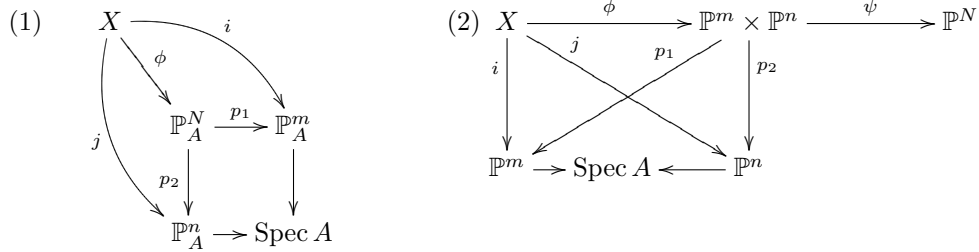
整理して $\mathcal{F} \otimes (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2n})^{\otimes r} :: \text{gbgs}$. よって $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2n} :: \text{ample}$.

(c) If $\mathcal{L}, \mathcal{M} :: \text{ample}$ then $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} :: \text{ample}$.

$\mathcal{F} :: \text{coherent sheaf on } X$ とする. 十分大きな $l > 0$ について, $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l} :: \text{gbgs}$. この sheaf も coherent なので, 十分大きな $m > 0$ について $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l} \otimes \mathcal{M}^{\otimes m} :: \text{gbgs}$. $n = \max(l, m)$ とすれば $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n} :: \text{gbgs}$. 整理すれば $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} :: \text{ample}$ が得られる.

(d) If $\mathcal{L} :: \text{very ample}$ and $\mathcal{M} :: \text{gbgs}$ then $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} :: \text{very ample}$.

\mathcal{L}, \mathcal{M} に対応する morphism を, それぞれ $i : X \rightarrow \mathbb{P}_A^m, j : X \rightarrow \mathbb{P}_A^n$ とする. Thm7.1b より, $\mathcal{L} \cong i^* \mathcal{O}(1), \mathcal{M} \cong j^* \mathcal{O}(1)$. この時, 次の (1) のような 2 重の fiber product を考える. ここでの \mathbb{P}^N は $\mathbb{P}^m, \mathbb{P}^n$ の Cartesian product (Ex5.11) であり, $N = mn + m + n$ である.



(1) の図式に closed immersion $:: \psi$ を加えたのが (2) である. (2) の図式で $\omega = \psi \circ \phi$ とする. $\omega^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ を計算すると, 次のようになる. $\omega^* = \phi^* \psi^*$ に注意せよ^{†3}.

$$\begin{aligned}
& \omega^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \\
& \cong \phi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n}(1) \\
& \cong \phi^* (p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)) \\
& \cong \phi^* p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A \phi^* p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \\
& \cong (p_1 \circ \phi)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A (p_2 \circ \phi)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \\
& \cong i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \\
& \cong \mathcal{L} \otimes_A \mathcal{M}
\end{aligned}$$

上から順に, Ex5.11, Ex5.1 の解答にある補題, 図式の可換性を用いている. 最後に ω が immersion であることを示そう.

主張 Ex7.5.2

$i: X \rightarrow \mathbb{P}_A^m$ を immersion とする. 次の可換図式において, $\psi \circ \phi: X \rightarrow \mathbb{P}_A^N$ は immersion である.

$$\begin{array}{ccccc}
X & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^N \\
i \downarrow & \searrow j & \swarrow p_1 & \downarrow p_2 & \\
\mathbb{P}^m & \xrightarrow{\quad} & \text{Spec } A & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{P}^n
\end{array}$$

(証明). 次の 3 つが示せる.

- (i) closed immersion $::$ immersion.
- (ii) composition of two immersion $::$ immersion.
- (iii) immersion $::$ stable under base change.

すると Ex4.8 の結果が immersion について使える. まず, 図式において, p_1 は projective over A かつ $A ::$ noetherian ring. したがって Ex4.9 から separated である. なので Ex4.8e より $\phi ::$ immersion. $\psi ::$ immersion とあわせて $\psi \circ \phi ::$ immersion.

上の項目において, (ii) は一般には成立しない. しかし $X ::$ noetherian scheme なので, immersion は closed \circ open にも open \circ closed にも分解でき, このことを用いて (ii) が示せる. <https://stacks.math.columbia.edu/tag/01QV> を参照するとよい. ■

(e) If $\mathcal{L} ::$ ample then $\mathcal{L}^{\otimes n} ::$ very ample for sufficiently large all $n > 0$.

Thm7.6 より, ある正整数 $l > 0$ について $\mathcal{L}^{\otimes l} ::$ very ample. また, $\mathcal{L} ::$ ample より, 正整数 $m_0 > 0$ が存在し, 任意の整数 $m \geq m_0$ について $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes m} ::$ gbgs. したがって, $N = n + m_0$ とおけば, (d) より

$$(\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes l} = \mathcal{L}^{\otimes n} \quad (m \geq m_0, n \geq N)$$

は very ample である.

^{†3} もう少し詳しく述べておこう. $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を考える. $f^* g^*$ は $g_* f_* = (g \circ f)_*$ と adjoint. そして $(g \circ f)_*$ は $(g \circ f)^*$ と adjoint. これと adjoint の一意性から $f^* g^* \cong (g \circ f)^*$ が得られる.

Ex7.6 The Riemann-Roch Problem.

k :: algebraically closed field, X :: nonsingular projective variety over k , D :: divisor on X とする. (したがって $|D|$:: linear system が考えられる.) この時, n の関数 $\dim_k |nD|$ を考える. \mathcal{L} を D に対応する invertible sheaf とすると, Prop7.7 より, これは $\dim_k \Gamma(X, \mathcal{L}^n) - 1$ と書ける.

Ex2.14 と Cor5.16 を合わせると, $X = \text{Proj } k[x_0, \dots, x_d]/I$ なる I :: homogeneous ideal が存在することが分かる. そこで $S = k[x_0, \dots, x_d]$, $T = S/I$ としておく. また $\phi: S \rightarrow T = S/I$ を標準的全射としておく.

(a) D :: very ample $\implies \forall n \gg 0, \dim_k |nD| = P_X(n) - 1$.

今, \mathcal{L} :: very ample だから, $i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1) \cong \mathcal{L}$ となる closed immersion $i: X \rightarrow \mathbb{P}_k^d$ が存在する. (closed であることは Remark5.16.1 と同様.) Ex6.8a (i^* と \otimes が分配的であること) と Prop5.12 (の証明) から次が分かる.

$$\mathcal{L}^{\otimes n} = (i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1))^{\otimes n} \cong i^*((\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1))^{\otimes n}) \cong i^*(S(n)^{\sim}) \cong (S(n) \otimes T)^{\sim}.$$

ϕ が次数を保つこと (したがって $\phi(S(n)) = T(n)$) から, $S(n) \otimes T \cong T(n)$. Ex5.9b より, 十分大きい全ての n について $T_n \cong \Gamma(X, (T(n))^{\sim})$ となる. よって, P_X を X の Hilbert polynomial とすると, 十分大きい全ての n について $P_X(n) = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$.

(b) If D is torsion element of order r , then $\dim_k |nD| = 0$ if $r \nmid n$ & -1 otherwise

order の定義から, $nD = 0 \iff n \bmod r = 0$ であることに注意する. 次を示す.

$$\dim_k |nD| = \begin{cases} 0 & n \bmod r = 0 \\ -1 & n \bmod r \neq 0 \end{cases}$$

■ $n \bmod r = 0 \implies \dim_k |nD| = 0$. $n \bmod r = 0$ の時, $nD = 0$, $\mathcal{L}^{\otimes n} = \mathcal{O}_X$. 今, X :: integral & proper & finite type scheme over algebraically closed subset. なので Ex4.5d より, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$. よって $\dim_k |nD| = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X) - 1 = 0$.

■ $n \bmod r \neq 0 \implies |nD| = \emptyset \implies \dim_k |nD| = -1$. $n \bmod r \neq 0$ の時, $|nD| = \emptyset$ を示す. $E = \{\langle U_i, f_i \rangle\}_i \in |nD|$ がとれるとして矛盾を導くことにする. E :: effective かつ $E \sim nD \not\sim 0$ なので, $f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ は単元でない. したがって f_i^r も単元でない^{†4}. いずれの i についても同様なので, rE は principal でない ($rE \not\sim 0$). 一方, $E \sim nD, rD = 0$ だから $rE \sim rnD \sim 0$.

Ex7.7 Some Rational Surfaces.

Ex7.8 Sections of $\pi: X \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E}) \leftrightarrow$ Quotient Invertible Sheaves of \mathcal{E} .

X :: noetherian scheme, \mathcal{E} :: coherent locally free sheaf on X とする. Prop7.12 において $Y = X, g = \text{id}_X$ とすると, 以下の図式を成立させる $\sigma: X \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ と quotient invertible sheaf of \mathcal{E} :

^{†4} f_i は単元でないから, $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ の真のイデアルに属す. そして f_i^r もこのイデアルに属し, したがって f_i^r は単元でない.

$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$ が^{†5} 対応することがわかる.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \\ \text{id}_X \downarrow & \swarrow \pi & \\ X & & \end{array}$$

明らかに σ は π の section である.

注意 Ex7.8.1

$\mathcal{L} ::$ invertible sheaf on X とする. 一般に次が成り立つ.

$$\text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)) = \Gamma(X, \mathcal{L}^{-1}).$$

$X = \text{Proj } A[x_0, \dots, x_n], \mathcal{L} = \mathcal{O}(n)$ ($n > 0$) の時は, Prop5.13 と合わせて $\text{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X) = 0$ が得られる. X が Ex5.14 の条件を満たすときについても同じことが言える.

Ex7.9 $\text{Pic } \mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z}$.

$X ::$ regular noetherian scheme, $\mathcal{E} ::$ locally free coherent sheaf of rank ≥ 2 on X とする.
 $r = \text{rank } \mathcal{E} (\geq 2)$ とおく. また $P = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ としておく.

(a) $\text{Pic } \mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z}$.

これは Ex6.1 ($\text{Pic } \mathbb{P}_X^n \cong \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z}$) の relatively version である.

(i) 方針.

次の写像が同型写像であることを示す.

$$\begin{aligned} \phi: \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z} &\rightarrow \text{Pic } \mathbb{P}(\mathcal{E}) \\ \mathcal{L} \oplus n &\mapsto \pi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_P(n) \end{aligned}$$

π^* が準同型である (Ex6.8a) から, ϕ が準同型であることは明らか. $\phi :: \text{surj}$ が難しい部分である. これは 3 つの部分に分けられる. $U ::$ irreducible affine open subset in $X, V = \pi^{-1}(U) (\cong \mathbb{P}_A^{r-1})$ とする.

(a) Ex6.1 の結果を $\text{Pic } V$ の場合に翻訳する.

(b) $\mathcal{L}|_V$ が $\mathcal{O}_V(n_U)$ と書けるととき n_U は U に依存しないことを示す.

(c) $\mathcal{L}|_V$ が $\pi^* \mathcal{M}_U$ ($\mathcal{M}_U \in \text{Pic } U$) と書けるととき \mathcal{L} は $\pi^* \mathcal{M}$ と書けることを示す.

(ii) $\phi :: \text{inj}$.

$\phi(\mathcal{L} \oplus n) = \pi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_P(n) \cong \mathcal{O}_P$ となる $\mathcal{L} \oplus n \in \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z}$ が存在したとする. 両辺に π_* を作用させて Ex5.1d (Projective formula), Prop7.11a を用いると次のよう.

$$\mathcal{L} \otimes \text{Sym}^n(\mathcal{E}) \cong \mathcal{O}_X.$$

両辺の rank を計算すると $\binom{r+n-1}{r-1} = 1$ (Ex5.18a). よって $r-1 = 0$ or $r+n-1$ となり, $r \geq 2$ より $n = 0$ が得られる. さらに $n = 0$ から $\mathcal{L} \otimes \text{Sym}^n(\mathcal{E}) \cong \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$. まとめて, $\phi :: \text{inj}$.

^{†5} $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$ だけで \mathcal{L} と全射 $:: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{L}$ の組を意味する. $g^* \mathcal{E} = \mathcal{E}$ に注意.

(iii) $\phi :: \text{surj.}$

$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上の任意の invertible sheaf が $\pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_P(n)$ の様に書けることを示さなくてはならない。まず, local にはそれが出来ることを示す。

$U :: \text{irreducible affine open subset in } X, V = \pi^{-1}(U)(\cong \mathbb{P}_A^{r-1})$ とする。 $X :: \text{regular noetherian scheme}$ だから, Prop4.1 と合わせて $U :: (*)$ (p.130)。 また Cor6.16 が成り立つ。

主張 Ex7.9.1

X を $(*)$ を満たすものとする。 $Y = \mathbb{P}_X^n (= \mathbb{P}_Z^n \times X)$ とし, また $\pi : Y \rightarrow X$ を projection of fiber product とする。 $P :: \text{prime divisor in } X$ をとり, $\mathcal{L} \in \text{Pic } X$ が P に対応する invertible sheaf だとする。 $\pi^*P = \pi^{-1}(P)$ (cf. Prop6.6) に対応する invertible sheaf は $\pi^*\mathcal{L} \in \text{Pic } Y$ である。

(証明). P の generic point を η とし, P に対応する Cartier divisor を $D = \{\langle X_i, s_i \rangle\}_i \in \text{CaCl } X$ とする。 Prop6.11 の証明にある D の構成方法から, D は各 prime divisor での valuation を介して P と対応している。

$\pi^*\mathcal{L}$ の $y \in Y$ での stalk を見る。 $\pi(y) \in X_i \subseteq X$ なる i をとって固定すると, 次の成り立つ。

$$(\pi^*\mathcal{L})_y \cong \mathcal{L}_{\pi(y)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\pi(y)}} \mathcal{O}_{Y,y} \cong [(s_i^{-1})_{\pi(y)} \otimes 1_{\mathcal{O}_{X,\pi(y)}}] \mathcal{O}_{X,\pi(y)}.$$

最左の \cong は left adjoint preserves colimits (LAPC) を用いて示すことが出来る。

この計算から, $\pi^*\mathcal{L}$ は Cartier divisor $:: \{\langle \pi^{-1}(U_i), \pi^*(s_i) \rangle\}_i$ に対応することが分かる。ただし, この π^* は Thm7.1 で使われている $\Gamma(-, \mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*) \rightarrow \Gamma(-, \pi_*\pi^*(\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*))$ である。

$y \in Y^{(1)}$ について $\mathcal{O}_{Y,y} :: \text{DVR}, \pi_y :: \text{local ring homo}$ が重要。 $v_{\pi(y)} \circ \pi_y = v_y$ を示す。 ■

系 Ex7.9.2

$D :: \text{Weil divisor } U$ をとり, $\mathcal{L} \in \text{Pic } U$ が D に対応する invertible sheaf だとする。 π^*D (Prop6.6) に対応する invertible sheaf は $\pi^*\mathcal{L}$ である。

irreducible & affine open subset of $X :: U$ であって, かつ $\mathcal{E}|_U \cong \mathcal{O}_U^{\oplus r}$ となるようなものからなる open cover を \mathfrak{U} とする。 $X :: \text{noetherian scheme}$ から $\mathfrak{U} :: \text{finite cover}$ 。

$U \in \mathfrak{U}$ をとり, $V = \pi^{-1}(U)(\cong \mathbb{P}_Z^{r-1} \times U)$ とする。 Cor6.16 から $\text{Cl } U \cong \text{Pic } U$ 。 Ex6.1 と上の主張を合わせて, $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上の任意の invertible sheaf は, local には (すなわち, V に制限すれば) $(\pi|_V)^*\mathcal{L}_U \otimes \mathcal{O}_V(n_U)$ と書ける。 Cor6.16 の証明にあるとおり, hyperplane (prime divisor) は twisted sheaf に対応することに注意。

$\mathcal{M} \in \text{Pic } P$ をとる。 上での議論から, 上のような各 U, V について $\mathcal{M}|_V \cong (\pi|_V)^*\mathcal{L}_U \otimes \mathcal{O}_V(n_U)$ 。 任意の $U \in \mathfrak{U}$ で n_U が等しいことを示そう。 適当な $U \in \mathfrak{U}$ について, $n_U < 0$ ならば \mathcal{M} の代わりに \mathcal{M}^{-1} を考える。 こうすれば, 少なくともひとつの U について $n_U \geq 0$ となる。 $U \in \mathfrak{U}$ を $n_U \geq 0$ であるものとし, U' を $U \cap U' \neq \emptyset$ であるものとする。 $U, U' \subset X, V = \pi^{-1}(U), V' = \pi^{-1}(U') \subset P$ に対して次の同型がある。

$$(\pi|_{V \cap V'})^*(\mathcal{L}_U|_{U \cap U'}) \otimes (\mathcal{O}_V(n_U))|_{V \cap V'} \cong \mathcal{M}|_{V \cap V'} \cong (\pi|_{V \cap V'})^*(\mathcal{L}_{U'}|_{U \cap U'}) \otimes (\mathcal{O}_{V'}(n_{U'}))|_{V \cap V'}$$

各辺に $(\pi|_{V \cap V'})_*$ を作用させ, Projective formula を使って整理し, Prop7.11a を用いる^{†6}。

invertible sheaf の support は定義域 (?) 全体だから, $U \cap U' \neq \emptyset$ より $\mathcal{L}_{U'}|_{U \cap U'}, \mathcal{L}_{U'}|_{U \cap U'} \neq 0$ 。 なので最左辺と最右辺の rank を比較して次式が得られる。 最初に $n_U \geq 0$ としていたから, 恒真式 $0 = 0$

^{†6} $(\pi|_{V \cap V'})_*(\mathcal{O}_V(n_U))|_{V \cap V'} = (\pi|_{V \cap V'})_*(\mathcal{O}_P(n_U))|_{V \cap V'} = (\pi_*\mathcal{O}_P(n_U))|_{V \cap V'} \cong (\text{Sym}^{n_U}(\mathcal{E}))|_{V \cap V'}$ 。

が現れることはない.

$$\binom{n_U + r - 1}{r - 1} = \binom{n_{U'} + r - 1}{r - 1}$$

よって $n_U = n_{U'}$ ^{†7}.

$X :: \text{connected}$ から, n_U が全ての $U \in \mathfrak{U}$ で等しいことが分かる. この値を n として $\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_P(-n)$ を考えると, $(\mathcal{L}_U)|_{U \cap U'} \cong (\mathcal{L}_{U'})|_{U \cap U'}$ が得られる. したがって \mathcal{L}_U 達は貼り合わせる事が出来て, \mathcal{L} が得られる.

こうして各 $U \in \mathfrak{U}, V = \pi^{-1}(U)$ について $\mathcal{M}|_V \cong (\pi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_P(n))|_V$ となる. この同型写像も貼り合わせられる上, 同型写像であることは local に決まる (Prop1.1) から, $\mathcal{M} \cong \pi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_P(n)$.

$$(b) \quad \mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}') \iff \exists \mathcal{L} \in \text{Pic } X, \mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}.$$

$\mathcal{E}' :: \text{locally free coherent sheaf on } X$ とする. 名前を次のように付ける: $P = \mathbb{P}(\mathcal{E}), \pi : P \rightarrow X, P' = \mathbb{P}(\mathcal{E}'), \pi' : P' \rightarrow X$.

■ \implies . $\phi : P' \xrightarrow{\cong} P$ をとる.

$$\begin{array}{ccc} P' & \xrightleftharpoons[\phi^{-1}]{\phi} & P \\ & \searrow \pi' \quad \swarrow \pi & \\ & X & \end{array}$$

$\mathcal{O}_{P'}(1) \in \text{Pic } P \cong \text{Pic } X \oplus \mathbb{Z}$ なので,

$$\phi^* \mathcal{O}_{P'}(1) \cong \mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^* \mathcal{L} \quad (\mathcal{L} \in \text{Pic } X).$$

左辺は $\text{Pic } P'$ の, 右辺は $\text{Pic } P$ の生成元である. (なので $\mathcal{O}_P(1)$ が右辺に現れる.) 両辺に π_* を作用させて Ex5.1d (Projective formula), Prop7.11a を用いると次のよう.

$$\pi_* \phi^* \mathcal{O}_{P'}(1) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}.$$

あとは $\pi_* \phi^* \cong \pi'_*$ を示せば, Prop7.11a から主張が得られる. ϕ が同型写像であることに注意して計算する.

$$\begin{aligned} & \text{Hom}(-, \pi_* \phi^* -) \\ & \cong \text{Hom}(\pi^* -, \phi^* -) \\ & \cong \text{Hom}((\phi^{-1})^* \pi^* -, (\phi^{-1})^* \phi^* -) \\ & \cong \text{Hom}(\pi'^* -, -) \\ & \cong \text{Hom}(-, \pi'_* -) \end{aligned}$$

よって Yoneda principal から $\pi_* \phi^* \cong \pi'_*$.

■ \longleftarrow . 次を示すと, Lemma7.9 から $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ が得られる.

$$\text{Sym}^d(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) \cong \text{Sym}^d(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes d}.$$

^{†7} $m \geq n$ と仮定して右辺を左辺で割って整理すると次のように成る.

$$\frac{n_U + r - 1}{n_{U'} + r - 1} \cdots \frac{n_U - 1}{n_{U'} - 1} = 1.$$

かけているものは全て 1 以上だから, これは $n_U = n_{U'}$ が得られる.

両辺が presheaf として同型であること, すなわち次が成り立つことを示す. U を X の任意の開集合とし, $A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$, $E = \Gamma(U, \mathcal{E}) \cong A^{\oplus r}$, $L = \Gamma(U, \mathcal{L})$ とする.

$$\mathrm{Sym}^d(E \otimes L) \cong \mathrm{Sym}^d(E) \otimes L^{\otimes d}.$$

$\mathrm{Sym}^d(E \otimes L)$ の元をとる. これは E の元 e_1, \dots, e_d と L の元 l_1, \dots, l_d を用いて次のように表せる.

$$(e_1 \otimes l_1) \otimes \cdots \otimes (e_d \otimes l_d).$$

また $\mathrm{Sym}^d(E) \otimes L^{\otimes d}$ の元は次のよう.

$$(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d) \otimes (l_1 \otimes \cdots \otimes l_d).$$

これらが互いに書き換えられることは明らか. よって所望の同型が得られる.

Ex7.10 \mathbb{P}^n -Bundles Over a Scheme.

Ex7.11 Different Sheaves of Ideals can Give Rise to Isomorphic Blow Up Schemes.

Ex7.12

Ex7.13 * A Complete Nonprojective Variety.

Ex7.14