Group Schemes

七条 彰紀

2018 年 1 月 27 日

目次

1 Preface

このノートの想定読者は，[4] の II, §3 までを読んだ，Geometric Invariant Theory と Moduli Problem に興味がある者である．主な参考文献は [1],[3],[2] である．大まかな議論の流れは前者の流れを採用し，用語などの定義は [1] で述べられているものより一般的なものを [3] と [2] から採る．[1] で使われる定義は素朴すぎるからである．一般的な定義で概念を導入した後，特別な場合では [1] での定義と同値に成ることを確かめる，という方針を採る．

このノートでは，次の順に定義していく．

1. T-valued point (where T :: scheme),
2. group scheme,
3. fine/corse moduli,
4. categorical/good/geometric/affine GIT quotient,
5. representation of group (scheme),
6. linearly reductive group,
7. closure equivalence,
8. unstable/semi-stable/stable.

目標とする命題は次のものである．

定理 1.1

X :: affine scheme, G :: linearly reductive affine group scheme acting on X とする．

(i) affine GIT quotient of X by G :: $X /\!\!/ G$ は good quotient である．

(ii) X の stable points を X^s とすると，$X /\!\!/ G$ の制限 :: X^s/G は geometric quotient of X^s by G である．

(iii) $X /\!\!/ G$ は quotient functor :: $\underline{X}/\underline{G}$ の最良近似である．

(iv) k を体とする．X が affine variety ならば $X /\!\!/ G$ もそうである．

Notation

S :: scheme 上の scheme と S-morphism が成す圏を $\mathbf{Sch}/S$ で表す．これは slice category の一般的な notation から来ている．

affine scheme :: $\operatorname{Spec} R$ は，時々 R と略す．

affine scheme over a ring R :: X の affine coordinate ring を $R[X]$ と書く．特に $k[G]$ は群環ではないことに注意．群環は kG と書く．

2 T-valued Points

圏論で言う “generalized point” の概念を，名前を変えて用いる．

定義 2.1

(i) $X, T \in \mathbf{Sch}/S$ に対し，$\underline{X}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/S}(T, X)$ を X の **T-valued points** と呼ぶ．$T = \operatorname{Spec} R$ と書けるときは $\underline{X}(T)$ を $\underline{X}(R)$ と書く．したがって $\underline{X}$ は $\mathbf{Sch}/S$ からの covariant functor と見ることも，k-algebra の圏からの contravariant functor と見ることも出来る．この関手 $\underline{X}$ は functor of points と呼ばれる．

(ii) 体 k 上の scheme :: X $(S = \operatorname{Spec} k, X \in \mathbf{Sch}/S)$ と field extension :: $k \subseteq K$ について，$\underline{X}(K)$ を X の **K-rational points** と呼ぶ．

(iii) morphism :: $h : X \to Y$ について自然変換 $\underline{h} : \underline{X} \to \underline{Y}$ は $\phi \mapsto h \circ \phi$ のように射を写す．

注意 2.2

$\mathbf{Sch}$ は locally small category である．すなわち，任意の $X, T \in \mathbf{Sch}$ について $\underline{X}(T)$ は集合である．これを確かめるために，$X, Y \in \mathbf{Sch}$ を任意にとり，$\mathrm{Hom}(X, Y)$ の濃度がある濃度で抑えられることを見よう．射 $X \to Y$ の作られ方に沿って考える．

(1) base space の間の写像 $f : \operatorname{sp} X \to \operatorname{sp} Y$ をとる．このような写像全体の濃度は高々 $|\operatorname{sp} Y|^{|\operatorname{sp} X|}$.

(2) $|Y|$ の開集合 U をとる．開集合全体の濃度は高々 $2^{|\operatorname{sp} Y|}$.

(3) 写像 $f_U^{\#} : \mathcal{O}_Y(U) \to (f_*\mathcal{O}_X)(U)$ を定める．このような写像全体の濃度は高々 $|(f_*\mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$.

したがって $\mathrm{Hom}(X, Y)$ の濃度は高々

$$|\operatorname{sp} Y|^{|\operatorname{sp} X|} \times \prod_{U \in 2^{\operatorname{sp} Y}} |(f_*\mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$$

となる．濃度の上限が存在する（すなわち，ある集合への単射を持つ）から，$\mathrm{Hom}(X, Y)$ は集合である．

注意 2.3

上の注意から，Yoneda Lemma が成立する．したがって自然変換 $\underline{G} \to \underline{H}$ と射 $G \to H$ が一対一対応する．このため，scheme の間の射についての議論と functor of points の間の射の議論は（ある程度）互いに翻訳することが出来る．

注意 2.4

K-rational point については，$\underline{X}(K) = \{x \in X \mid k(x) \subseteq K\}$ とおく定義もある．ここで $k(x)$ は x での residue field である．しかし [4] Chapter.2 Ex2.7 から分かる通り，この二つの定義は翻訳が出来る．すなわち，$k(x) \subseteq K$ を満たす $x \in X$ と，$\operatorname{Spec} k$-morpsihm :: $\operatorname{Spec} K \to X$ は一対一に対応する．

また X :: finite type $/k$ であるとき，closed point :: $x \in X$ について，$k(x)$ は k の有限次代数拡大体である．これは Zariski's Lemma の帰結である．したがって $\underline{X}(\bar{k})$ は X の closed point 全体に対応する．ただし $\bar{k}$ は k の代数閉包である．

例 2.5

$\mathbb{R}$ 上の affine scheme $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$ の $\mathbb{R}$-rational point と $\mathbb{C}$-rational point を考えよう．

$\operatorname{Spec} \mathbb{R} \to X$ の射は環準同型 $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2) \to \mathbb{R}$ と一対一に対応する．しかし直ちに分かる通り，このような環準同型は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (0, 0)$$

で定まるものしか存在し得ない．ここで $\bar{x} = x \bmod (x^2 + y^2), \bar{y} = y \bmod (x^2 + y^2)$ と置いた．よって $\underline{X}(\mathbb{R})$

は 1 元集合．また，この環準同型が誘導する $\operatorname{Spec} R \to X$ の射は 1 点空間 $\operatorname{Spec} \mathbb{R}$ を原点へ写す．

一方，環準同型 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{C}$ は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (a, \pm ia)$$

（ここで $i = \sqrt{-1}, a \in \mathbb{R}$）で定まることが分かる．すなわち，$\mathcal{Z}_a(x^2+y^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ の点に対応して，$\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{C}$ の環準同型が定まる．逆の対応も明らか．よって $\underline{X}(\mathbb{C})$ の元は $\mathcal{Z}_a(x^2+y^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ の点に対応している．

例 2.6

体 k 上の affine variety :: $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ を多項式系 :: $F_1, \ldots, F_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$ で定まるものとする．すると k 上の環 R に対して，次の集合が考えられる．

$$V_R = \left\{ p = (r_1, \ldots, r_n) \in R^{\oplus n} \;\middle|\; F_1(p) = \cdots = F_n(p) = 0 \right\}.$$

この集合の元も R-value point と呼ばれる．([1] ではこちらのみを R-value point と呼んでいる．実際，こちらのほうが字句 “value point” の意味が分かりやすいだろう．) V_R の点が $\underline{X}(R)$ の元と一対一に対応することを見よう．

X の affine coordinate ring を $A = k[x_1, \ldots, x_n]/(F_1, \ldots, F_n)$ とし，$\bar{x}_i = x_i \bmod (F_1, \ldots, F_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおく．$\phi : A \to R$ を考えてみると，これは次のようにして定まる．

$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n) \mapsto (r_1, \ldots, r_n) \in V_R.$$

すなわち，V_R の点に対して $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ の元が定まる．逆の対応は明らか．そして，$\operatorname{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ が $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Sch}/\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} R, X) = \underline{X}(R)$ と一対一対応することはよく知られている．

3 Moduli Functor and Fine/Corse Moduli Space

A を代数幾何学的対象の集合とし，$\sim$ を Z の中の同値関係とする．“naive moduli problem” は，M の点と $A/\sim$ の元（同値類）が一対一対応するような scheme :: M を見つけよ，という問題である．更に $A/\sim$ の元が「連続的に変化」する様子も「エンコード」しているような M を見つけよ，という問題を “extended moduli problem” と呼ぶ（正確な定義は [2] §2.2）．“extended moduli problem” を定式化するには，「連続的に変化」と「エンコード」を定式化しなくてはならない．前者の為に “family” が定義され，後者の為に “moduli functor” が定義される．すると「エンコード」は関手の表現であると理解できる．

3.1 Families

定義 3.1

$\mathcal{P}$ を集合のクラス[†1] とする．集合 B について，B の構造と整合的な構造を持った集合 $\mathcal{F}$ と全射写像 $\pi : \mathcal{F} \to B$ の組が $\mathcal{P}$ の B 上の **family** であるとは，各 $b \in B$ について集合 $\pi^{-1}(b) \subseteq \mathcal{F}$ が $\mathcal{P}$ に属すということ．

[†1] 集合 X を変数とする述語 $X \in \mathcal{C}$ の意味を「X はある条件を満たす対象である」と定義した，と考えて良い．「属す」の意味は集合と同様に定める．

「B の構造と整合的な構造」というのは，例えば，S が位相空間であって写像 $\mathcal{F} \to S$ を連続にするような位相が $\mathcal{F}$ に入っている，ということである．family の構造は場合毎に明示されなくてはならない．

用語 “family” を厳密に定義しているものは全くと言っていいほど無いが，ここでは Renzo のノート[†2] の定義を参考にした．“family” を上のように解釈して不整合が生じたことは，私の経験の中ではない．

注意 3.2

moduli theory 以外で “family of $\mathcal{C}$” と言えば，単に $\mathcal{C}$ の部分集合であろう．“family parametrized by S” の様に言えば，S-indexed family (or set) のことを想像するであろう．しかし S-indexed family :: $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ は $S \to \mathcal{F}$ という写像で定まるから，ここでの “family” とは写像の向きが逆である．

上の定義を無心に読めば分かる通り，「$\mathcal{C}$ の family :: $\mathcal{F}$」と言った時には，$\mathcal{C}$ に属するのは $\mathcal{F}$ の部分集合である．属するのは（一般に）$\mathcal{F}$ の元ではない．また $\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}$ の元の和集合とみなせる．（正確には $\mathcal{C}$ の元を S に沿って並べたものである．）

例 3.3

X, B :: scheme, $f : X \to B$ :: morphism of schemes をとる．X は f によって B 上の family となる．射の fibre として実現される，scheme（例えば smooth curve）の family は deformation theory の対象である．

例 3.4

k を体, S を適当な scheme とする．$\mathbb{A}^2_k$ の原点を通る直線の S 上の family として, line bundle :: $\mathcal{L} \subset \mathbb{A}^2 \times_k S$ を考えることが出来る．$\mathcal{L} \to S$ は射影写像で与えられる．同様に $\mathbb{A}^n$ の r 次元線形空間の S 上の family は r 次元 vector bundle :: $\mathcal{E} \subset \mathbb{A}^n \times S$ である．

例 3.5

k を適当な体とし，$\mathbb{P}^1_k$ の点 O_i $(i = 1, 2, 3)$ を順に $(0:1), (1:0), (1:1)$ とする．この時，$PGL_2(k)$ は次の全単射で $\mathbb{P}^1_k$ の自己同型写像の $(\mathbb{P}^1_k)^{\oplus 3}$ 上の family になる．

$$\begin{array}{cccc} \pi : & PGL_2(k) & \to & (\mathbb{P}^1_k)^{\oplus 3} \\ & \phi & \mapsto & (\phi^{-1}(O_i))_{i=1}^3 . \end{array}$$

3.2 Moduli Functor

以下の定義は [9] など，Moduli 問題に関する殆どの入門書で述べられている．

定義 3.6

contravariant functor :: $\mathcal{M} : \mathbf{Sch} \to \mathbf{Set}$ が **moduli functor**（または functor of families）であるとは，各 scheme :: S に対して，$\mathcal{M}(S)$ が代数幾何学的対象の S 上の family 達を family の間の同値関係で割ったもの (“$\{$families over $S\}/\sim_S$” in [2]) である，ということ．

moduli functor の定義はあえて曖昧に述べられている．これは「出来る限り多くのものを moduli theory の範疇に取り込みたい」という思いがあるからである ([9]).

[†2] http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topics10/Notes.pdf

3.3 Fine Moduli Space

定義 3.7
scheme :: M が moduli fuctor :: $\mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるとは，M が $\mathcal{M}$ を表現する (represent) ということである．言い換えれば，関手 $\underline{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, M)$ が $\mathcal{M}$ と自然同型，ということである．

注意 3.8
moduli functor :: $\mathcal{M}$ の fine moduli space :: M が存在したとしよう．この時，任意の $X \in \mathbf{Sch}$ について $\mathcal{M}(X) \cong \underline{M}(X)$．これは X 上の代数幾何学的対象が成す同値類が M の X-value point と一対一に対応していることを意味する．したがって，$\mathcal{M}$ が指定する代数幾何学的対象の集合の同値類を M が「パラメトライズ」していると考えられる．

例 3.9 ([2], Exercise 2.20)
例 3.4 で述べた $\mathbb{A}^n$ の r 次元線形空間の S 上の family (vector bundle over S) の集合を，vector bundle の同型で割った集合を $\mathcal{M}(S)$ とする．$f : T \to S$ に対する $\mathcal{M}(f)$ は，vector bundle への post-composition で自然に定まる．

この moduli functor は fine moduli space を持つことが知られている．これが Grassmannian variety である．

残念ながら，多くの moduli functor に対して fine moduli space が存在し得ない．（このあたりの議論は [9] p.3 や [5] p.150 にある．この節の終わりでも理由と例を示す．）そのため Mumford は（おそらく GIT 本で）fine moduli space の代わりとして coarse moduli space を提唱した．

3.4 Coarse Moduli Space

定義 3.10
moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対して，以下を満たす scheme :: M を $\mathcal{M}$ の coarse moduli space と呼ぶ．

(i) 自然変換 $\eta : \mathcal{M} \to \underline{M}$ が存在する．

(ii) η は自然変換 $\mathcal{M} \to \underline{\tilde{M}}$ の中で最も普遍的である:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[dl, "{}^\forall\tau"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\ {}^\forall\underline{\tilde{M}} \arrow[rr, "{}^{\exists!}\underline{f}"'] & & \underline{M} \end{tikzcd}$$

この図式で $\tilde{M}$ :: scheme, $f : M \to \tilde{M}$.

(iii) 任意の代数閉体 :: k について $\eta_{\mathrm{Spec}\, k} : \mathcal{M}(\mathrm{Spec}\, k) \to \underline{M}(\mathrm{Spec}\, k)$ は全単射である．

例 3.11
楕円曲線の j-不変量．後に示すとおり，これは fine でない．

3.5 Properties of Fine / Coarse Moduli Spaces

命題 3.12
moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対して coarse moduli space は同型を除いて一意である．

命題 3.13 ([5], Prop23.6)
scheme :: M が moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるならば，M は $\mathcal{M}$ の coarse moduli space でもある．

命題 3.14 ([5], Prop23.5)
S :: scheme の open subscheme と包含写像が成す圏を $\mathbf{OpenSubSch}(S)$ と書くことにする．これは $\mathbf{Sch}/S$ の full subcategory である．

moduli functor :: $\mathcal{M}$ が fine moduli space をもつならば，任意の S :: scheme について $\mathcal{M}|_{\mathbf{OpenSubSch}(S)}$ は S 上の sheaf である．

(証明). M :: fine moduli scheme for $\mathcal{M}$ とし，S :: scheme を固定する．$\mathcal{F} := \underline{M}|_{\mathbf{OpenSubSch}(S)}$ は開集合系からの contravariant functor だから presheaf であることは定義から従う．また $\mathcal{F}$ の元は scheme の morphism である．このことから sheaf の公理 Identity Axiom と Gluability Axiom を満たすことも簡単に分かる．（一応，[4] II, Thm3.3 Step3 を参考に挙げる．） ∎

3.6 Pathological behaviour.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} \to S$ を fiber of morphism で実現される family だとする．（したがって $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ は scheme である．）$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の同値関係を，scheme としての同型で定めよう．M を coarse moduli space, η を moduli functor から $\underline{M}$ への自然変換だとする．

$\eta_S(\mathcal{F}) : S \to M$ は $\mathcal{F}$ の fiber を M の点に対応させる．（添字の S は以降略す．）

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & S & \xrightarrow{\eta(\mathcal{F})} & M \\ \mathcal{F}_s & \longmapsto & s & \longmapsto & m \end{array}$$

$\eta(\mathcal{G}) : S \to M$ についても同様である．したがって $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ が fiber 毎に同型であれば，$\eta(\mathcal{F}) = \eta(\mathcal{G})$ となる．

η は全単射であるから，これは $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ を意味する．しかし，対象が非自明な自己同型写像をもつときにはこのようにならない family が構成できてしまう．

例 3.15 ([5] §26)
$S = \mathbb{A}^1_k - \{0\}$ とする．S 上の楕円曲線の family :: $\mathcal{F}$ を次で定める．

$$\mathcal{F} = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - s) \subseteq \mathbb{A}^2_k \times_k S \xrightarrow{\mathrm{pr}} S.$$

$\eta(\mathcal{F})$ を j 不変量を用いて $s \mapsto j(\mathcal{F}_s)$ で定める．j 不変量が coarse moduli であることは既に見た．計算すると分かる通り，$\eta(\mathcal{F})$ は定値写像である．したがって $\mathcal{F}$ のそれぞれの fiber は互いに同型である．一方，$\mathcal{F}' = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - 1) \times S$ について同様に $\eta(\mathcal{F}')$ を定めると，これも自明に定値写像である．しかし，$\mathcal{F} \ncong \mathcal{F}'$

であることが示せる（TODO）．よって j 不変量は fine moduli にならない．fine/coarse moduli の一意性から，楕円曲線は fine moduli を持たない．

それぞれの fiber が互いに同型である (i.e. $^\forall t, s \in S,\quad \mathcal{F}_t \cong \mathcal{F}_s$) ような family を fiberwise trivial family, $X \times S$ の形に書ける family を trivial family と呼ぶ．一般に，fine moduli space が存在するならば，fiberwise trivial family は trivial family である ([5] Remark23.1.1).

また，coarse moduli space さえ持ち得ない moduli functor もある．これは jump phenomenon と呼ばれる性質を持つ family が存在する場合や，あるいは moduli fuctor が “unbounded”であるときに起きる．このノートでは深追いしない．詳しくは [2] §2.4 を参照せよ．

4 Definition of Group Schemes

family の同値関係は，しばしば群作用の軌道分解で与えられる．例えば $\mathbb{P}^n_k$ の自己同型は $PGL_n(k)$ という群である．そのため moduli 問題の理解のために，group scheme を知ることは不可欠である．

4.1 Definition

group scheme は圏論的に定義される．まずは圏論の言葉で述べよう．

定義 4.1
S :: scheme とする．G :: scheme over S が group scheme (over S) であるとは，G が $\mathbf{Sch}/S$ における group object であるということである．group scheme over S と homomorphisms が成す圏を $\mathbf{GrpSch}(S)$ と書く．

group object と homomorphisms の定義を展開すれば次のよう．

定義 4.2

(i) S :: scheme とする．G :: scheme over S と次の 3 つの射から成る 4 つ組が **group scheme (over S)** であるとは，任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について $\underline{G}(T)$ の群構造が誘導されるということである．

$$\begin{array}{ll} \mu : G \times G \to G & \text{multiplication} \\ \epsilon : S \to G & \text{identity section} \\ \iota : G \to G & \text{inverse} \end{array}$$

μ は group law とも呼ばれる．なお，$x, y \in \underline{G}(T)$ の積 $x * y \in \underline{G}(T)$ は $\underline{\mu}(\langle x, y \rangle)$，すなわち次の射である．

$$x * y :\ T \xrightarrow{\langle x,y \rangle} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

ここで $\langle x, y \rangle$ は $G \xleftarrow{x} T \xrightarrow{y} G$ から product の普遍性により誘導される射である．単位元は $\epsilon ! : T \to S \xrightarrow{\epsilon} G$ [†3]，$x \in \underline{G}(T)$ の逆元は $\underline{\iota}(x) = \iota \circ x$ である．

(ii) group scheme over S :: G, H の間の射 $h : G \to H$ が **homomorphism** であるとは，任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について $\underline{h}(T) : \underline{G}(T) \to \underline{H}(T)$ が群準同型であることである．

[†3] この射は $T \to G \to S \to G$ と書いても同じである．

(iii) group schemes over S とその間の homomorphisms が成す圏を $\mathbf{GrpSch}(S)$ とする．

しかしながら，ここで述べた group scheme の定義は実用に向かない．定義にどこの馬の骨とも知れない scheme :: T が現れるからである．以上の定義は以下と同値であることを言っておこう．

命題 4.3 ([11], p.76) (i) S :: scheme，G :: scheme over S とし，更に 3 つの射 μ, ϵ, ι が与えられているとする．

$$\begin{aligned} \mu &: G \times G \to G \\ \epsilon &: S \to G \\ \iota &: G \to G \end{aligned}$$

この時，$(G, \mu, \epsilon, \iota)$ が group scheme であることと，以下の 3 つの可換図式が成立することは同値である．

$$\begin{tikzcd} (G \times G) \times G \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}"'] & & G \times (G \times G) \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"] \\ G \times G \arrow[dr, "\mu"'] & & G \times G \arrow[dl, "\mu"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\langle \epsilon!, \mathrm{id} \rangle"] \arrow[d, "\langle \mathrm{id}, \epsilon! \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & G \times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G \end{tikzcd} \tag{2}$$

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[d, "\mathrm{id} \times \iota"'] & G \arrow[l, "\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle"'] \arrow[r, "\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle"] \arrow[d, "\epsilon!"] & G \times G \arrow[d, "\iota \times \mathrm{id}"] \\ G \times G \arrow[r, "\mu"'] & G & G \times G \arrow[l, "\mu"] \end{tikzcd} \tag{3}$$

上から順に，結合律，単位元の存在，逆元の存在に対応する．

(ii) group scheme over S :: G, H と，射 $h : G \to H$ が与えられているとする．h が homomorphism であ

ることは，以下の 3 つの可換図式が成立することは同値である．

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "h \times h"] \arrow[d, "\mu"'] & H \times H \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, "h"'] & H \end{tikzcd} \tag{4}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] & H \\ S \arrow[u, "\epsilon"] \arrow[ur, "\epsilon"'] & \end{tikzcd} \tag{5}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\iota"'] & H \arrow[d, "\iota"] \\ G \arrow[r, "h"'] & H \end{tikzcd} \tag{6}$$

上から順に，積の保存，単位元の保存，逆元の保存に対応する．

(証明)．結合律のみについて証明する．他は同様の手順で証明できる．まず以下が可換であることを仮定する．

$$\begin{tikzcd} (G \times G) \times G \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}"'] & & G \times (G \times G) \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"] \\ G \times G \arrow[dr, "\mu"'] & & G \times G \arrow[dl, "\mu"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{\#}$$

Yoneda embedding で写して次の可換図式を得る．$\underline{G}(T) \times \underline{G}(T) \cong \underline{G \times_S G}(T)$ に注意せよ．

$$\begin{tikzcd} (G \times G) \times G \arrow[rr, "\cong"] \arrow[d, "\mu \times \mathrm{id}"'] & & G \times (G \times G) \arrow[d, "\mathrm{id} \times \mu"] \\ G \times G \arrow[dr, "\mu"'] & & G \times G \arrow[dl, "\mu"] \\ & G & \end{tikzcd} \tag{$\underline{\#}$}$$

これは任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について，$\underline{(}G)(T)$ 上に誘導される二項演算 $\underline{\mu}(\langle -, - \rangle)$ が結合律を満たすことを意味する．

逆に，この二項演算が結合律を満たすことを仮定すると $(\underline{\#})$ が可換である．$(\underline{\#})$ は $(\#)$ の Yoneda embedding なので $(\#)$ は可換．∎

4.2 Examples

以下の例では k を適当な体とし，k 上の affine group scheme を定義する．

例 4.4 ($\mathbb{G}_a$)
finitely generated k-algebra :: $A = k[t]$ と次の 3 つの k-linear map から，k 上の group scheme :: $\mathbb{G}_a$ &

μ, ϵ, ι が誘導される．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} : A \to A \otimes_k A; &\quad t \mapsto (t \otimes 1) + (1 \otimes t) \\
\tilde{\epsilon} : A \to k; &\quad t \mapsto 0 \\
\tilde{\iota} : A \to A; &\quad t \mapsto -t
\end{aligned}$$

群構造を無視すれば $\mathbb{G}_a = \mathbb{A}_k^1$．この $\mathbb{G}_a$ は additive group と呼ばれる．

$t_1 = t \otimes 1, t_2 = 1 \otimes t$ とすると，$A \otimes A \cong k[t_1, t_2]$ となる．したがって $f \in A$ について $\tilde{\mu}(f)(t_1, t_2) \in k[t_1, t_2]$ とみなせる．そして $k[t]$ の algebra としての和は $\tilde{\mu}(f)(t_1, t_2) = f(t_1 + t_2)$ のように co-algebra に反映されている．単位元と逆元は $\tilde{\epsilon}(f)(t) = f(1), \tilde{\iota}(f)(t) = f(-t)$ のように反映されている．

$\mathbb{G}_a$ に備わった群構造は closed point :: $(a, b) \in \mathbb{A}^2$ を $a + b \in \mathbb{A}^1$ に写す．これを確かめておこう．$\mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^1 \cong \mathbb{A}_k^2$ の $\bar{k}$-rational point :: (a, b) [†4] は極大イデアル

$$\mathfrak{p} = (t_1 - a, t_2 - b) = \{f \in k[t_1, t_2] \mid f(a, b) = 0\}$$

に対応する．したがって $\mu(\mathfrak{p}) = \tilde{\mu}^{-1}(\mathfrak{p})$ は次のよう．

$$\tilde{\mu}^{-1}(\mathfrak{p}) = \{g \in A = k[t] \mid \tilde{\mu}(g)(a, b) = g(a + b) = 0\}.$$

これは $a + b$ に対応する極大イデアル $(t - (a + b))$ に他ならない．

例 4.5

finitely generated k-algebra :: $A = k[t, t^{-1}]$ と次の 3 つの k-linear map から，k 上の group scheme :: $\mathbb{G}_m$ & μ, ϵ, ι が誘導される．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} : A \to A \otimes_k A; &\quad t \mapsto (t \otimes 1) \cdot (1 \otimes t) \\
\tilde{\epsilon} : A \to k; &\quad t \mapsto 1 \\
\tilde{\iota} : A \to A; &\quad t \mapsto -t
\end{aligned}$$

群構造を無視すれば $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$．

こちらも $\tilde{\mu}(f)(t_1, t_2) = f(t_1 t_2)$ の様に積が入っている．$\mu : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m$ が $\bar{k}$-rational point :: $(a, b) \in \mathbb{A}^2 - \{(a, b) \mid ab = 0\}$ を $ab \in \mathbb{A}^1$ に写すことは $\mathbb{G}_a$ の場合と同様である．

例 4.6

正整数 n に対し finitely generated k-algebra :: $A = k[t_{ij}]_{i,j=1}^n[\det^{-1}]$ とおく．ここで det は不定元が成す n 次正方行列 $T = \Big[t_{ij}\Big]_{i,j=1}^n$ の determinant である．A と次の 3 つの k-linear map から，k 上の group scheme :: GL_n & μ, ϵ, ι が誘導される．

$$\begin{aligned}
\tilde{\mu} : A \to A \otimes_k A; &\quad T \mapsto (T \otimes 1) \cdot (1 \otimes T) \\
\tilde{\epsilon} : A \to k; &\quad T \mapsto I \\
\tilde{\iota} : A \to A; &\quad T \mapsto T^{-1}
\end{aligned}$$

I は n 次単位行列．ここで $\tilde{\iota} : T \mapsto I$ は (T の (i, j) 成分)$\mapsto$(I の (i, j) 成分) という意味である．$\tilde{\mu}, \tilde{\iota}$ の定義も同様である．

[†4] $\bar{k}$ は k の代数閉体．rational point についての注意で触れたとおり，variety の $\bar{k}$-rational point 全体は closed point 全体と一致するのであった．

$T_1 = T \otimes 1 = \left[t_{ij} \otimes 1\right]_{i,j=1}^{n}, T_2 = 1 \otimes T = \left[1 \otimes t_{ij}\right]_{i,j=1}^{n}$ とおけば，$f \in k[t_{ij}]$ について $\tilde{\mu}(f)(T_1, T_2) = f(T_1 T_2)$ となっている．$\mu : GL_n \times GL_n \to GL_n$ が $\bar{k}$-rational point :: $(M, N) \in GL_n \times GL_n$ を $MN \in GL_n$ へ写すことは $\mathbb{G}_a$ での議論と同様である．$n = 1$ の時 $GL_n = \mathbb{G}_m$ であることに留意せよ．

3 つの例に現れた準同型 $\tilde{\mu}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\iota}$ はそれぞれ co-multiplication，co-unit, co-inversion と呼ばれる．この 3 つの準同型によってそれぞれの k-finitely generated に Hopf algebra [†5] の構造が入る．一般に affine group scheme と Hopf algbra が一対一に対応する ([7] II,Thm5.1).

定理 4.7 ([2] Thm3.9)
Any affine group scheme over a field is a linear algebraic group (i.e. subgroup of GL_n for some n).

4.3 Action on Scheme

最後に作用の定義を述べる．

定義 4.8
scheme/S :: X と group scheme/S :: G が与えられたとする．G の X への **(left) action** とは，次を満たす射 $\alpha : G \times_S X \to X$ である．すなわち，任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について，α は群 $\underline{G}(T)$ から集合 $\underline{X}(T)$ への作用を誘導する．

なお，$g \in \underline{G}(T)$ を $x \in \underline{X}(T)$ に作用させた $g \cdot x \in \underline{X}(T)$ は $\underline{\alpha}(\langle g, x\rangle)$，すなわち

$$T \xrightarrow{\langle g,x\rangle} G \times_S X \xrightarrow{\alpha} X$$

である．ここで $\langle g, x\rangle$ は $G \xleftarrow{g} T \xrightarrow{x} X$ から product の普遍性により誘導される射である．

action :: $G \times X \to X$ のことを $G \curvearrowright X$ と表す．$g \in G$ を $x \in X$ に作用させたものをしばしば $g \cdot x$ と書く．$Gx := \alpha(G \times \{x\})$ と置き，これを点 x の **orbit** と呼ぶ．

5 Categorical/Good/Geometric/Affine GIT Quotients

以下，scheme ::S, scheme/S :: X, group scheme/S :: G, action :: $\alpha : G \curvearrowright X$ が与えられているとする．

5.1 Categorical Quotient

圏論的立場から「scheme の group scheme による quotient」と呼べる scheme は，categorical quotient であろう．

定義 5.1 (i) scheme の射 :: $q : X \to Y$ は，$q \circ \alpha = q \circ \mathrm{pr}_X : G \times X \to Y$ であるとき，**G-invariant morphism** と呼ばれる．この条件は次のように翻訳できる: 任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ と任意の $g \in \underline{G}(T), x \in \underline{X}(T)$ について，

$$\underline{q}(\alpha \circ \langle g, x\rangle) = \underline{q}(g \cdot x) = \underline{q}(x) = \underline{q}(\mathrm{pr}_X \circ \langle g, x\rangle).$$

[†5] algebra, co-algebra の構造をもつ finitely generated k-module であって antipode と呼ばれる自己準同型射を備えるもの．

(ii) scheme の射 $q : X \to Y$ は，q が $\alpha, \mathrm{pr}_X : G \times X \rightrightarrows X$ の coequalizer であるとき，X の G による **categorial quotient** と呼ばれる．言い換えれば，X からの G-invariant morphism として普遍的なものが q である．

すぐに分かる通り，この定義は **Sch** を「finite product を持つ category」に書き換えても良い．この意味で，categorical quotient は最も普遍的な「群作用での商」を定義していると言える．

注意 5.2
categorical quotient は普遍性を持つものと定義されていることから分かる通り，同型を除いて高々一つしか無い．存在するかどうかは分からない．

さて，categorical quotient は確かに「商らしい」が，幾何学的にも「商らしい」と言えるとは限らない．

例 5.3
$\mathbb{P}^1_k, \mathbb{A}^1_k$ の $\mathbb{G}_m$ による群作用の商．

そのために，他の意味で「商らしい商」もいくつか定義する．どういった意味で「商らしい」かによって定義は異なり，以後は「商らしい商」が存在するかどうか・構成できるかどうかが問題に成る．後に示すが，以下の「商らしい商」はいずれも categorical quotient である．なので一つ「商らしい商」が存在すれば，その商はより弱い意味でも「商らしい」ことに注意せよ．

5.2 G-invariant Function

定義 5.4 ([3])
U :: open in X について，$f \in \mathcal{O}_X(U)$ は

$$\alpha^{\#}(f)|_{G\times_S U} = \mathrm{pr}_X^{\#}(f) \in \mathcal{O}_{G\times_S X}(G \times_S U)$$

が成り立つとき **G-invariant function** と呼ばれる．ここで，$\alpha^{-1}(U) \supseteq G \times_S U = \mathrm{pr}_X^{-1}(U)$ であるために左辺に restriction が必要であることに注意．

$q : X \to Y$ に対して presheaf :: $(q_*\mathcal{O}_X)^G$ を次で定める．V :: open in Y について

$$(q_*\mathcal{O}_X)^G(V) = \{f \in \mathcal{O}_X(q^{-1}(V)) \mid f :: G\text{-invariant function }\} \subseteq q_*\mathcal{O}_X.$$

人によっては $q_*(\mathcal{O}_X^G)$ という記号のほうが自然だと感じるかも知れない．記号は恣意的なものだから，私としてはあなたがどちらの記号を使おうが構わないが，$(q_*\mathcal{O}_X)^G$ の方が昔からある記号である．

主張 5.5
$(q_*\mathcal{O}_X)^G$ は sheaf である．

(証明)．sub-presheaf であることは明らか．また $(q_*\mathcal{O}_X)^G$ が identity axiom を満たすことは sub-presheaf であることから従う．なので gluability axiom を満たすことを示そう．

U :: open in X をとり，$U = \bigcup_i U_i$ をその open cover とする．section 達 $t_i \in (\mathcal{O}_X^G)(U_i)$ が次を満たすとしよう．

$$^\forall i, j, \quad t_i|_{U_i\cap U_j} = t_j|_{U_i\cap U_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j). \qquad (@)$$

この時，$t|_{U_i} = t_i$ を満たす $t \in \mathcal{O}_X(U)$ が存在する．$t \in \mathcal{O}_X^G(U)$ を示したい．ここで現れる記号 $(q_*\mathcal{O}_X)^G$ は，人によっては $q_*(\mathcal{O}_X^G)$ の方が受け入れやすいかも知れない．というのも，$(q_*\mathcal{O}_X)^G$ が表すものは「Y 上の function であって G-invariant であるもの」であるように読めるからである．実際には $V_i = \mathrm{pr}_X^{-1}(U_i) = G \times U_i$ とおく．上の条件 (@) で $t|_{U_i} = t_i$ と，sheaf morphism が restriction map と可換であることを用いる．

$$\forall i, j, \quad \alpha^\#(t)|_{V_i \cap V_j} = \alpha^\#(t|_{U_i \cap U_j})|_{V_i \cap V_j} = \mathrm{pr}_X^\#(t|_{U_i \cap U_j}) = \mathrm{pr}_X^\#(t)|_{V_i \cap V_j} \in \mathcal{O}_{G \times X}(V_i \cap V_j).$$

$\mathcal{O}_{G \times X}$ は sheaf だから，identity axiom を満たす．よって $\alpha^\#(t) = \mathrm{pr}_X^\#(t)$，すなわち $t \in \mathcal{O}_X^G(U)$. ∎

注意 5.6

affine scheme :: $X := \mathrm{Spec}\, A$ の structure sheaf の元は，morphism :: $U \to \mathbb{A}^1_{\mathrm{Quot}(A)} \in \mathcal{O}_X(U)$ とみなすことが出来る．そこで G-invariant functions :: $(\mathcal{O}_X(U))^G$ を $\mathcal{O}_X(U)$ に属す G-invariant morphism の全体と定めることも出来る．

5.3 Good and Geometric Quotient.

定義 5.7 ([2])

scheme morphism :: $q : X \to Y$ が X の G による **good quotient** であるとは，以下の条件が満たされるということ．

(i) q :: G-invariant.

(ii) q :: surjective.

(iii) q :: affine morphism [†6].

(iv) $(q_*\mathcal{O}_X)^G \cong \mathcal{O}_Y$.

(v) W :: G-invariant closed subset of X について，$q(W)$ :: closed subset of Y.

(vi) W_1, W_2 :: disjoint G-invariant closed subsets of X について，$q(W_1), q(W_2)$ :: disjoint closed subsets of Y.

q :: surjective と q :: affine の 2 条件は，GIT [10] でなく [12] で導入された．実際，次の命題はこの 2 条件がなくとも成立する．しかし surjectivity は quotient を family として利用するために望ましい性質である．(affineness についてはよくわからない．しかし我々が扱う範囲で成立する．)

命題 5.8

good quotient is categorical quotient also.

定義 5.9 ([2])

good quotient :: $q : X \to Y$ が各点 $y \in Y$ について $q^{-1}(y)$ がただひとつの orbit からなる時，q は X の G による **categorical quotient** と呼ばれる．

[†6] すなわち，Y の任意の affine open subscheme の q による逆像が affine.

5.4 Affine GIT Quotient

field :: k affine scheme$/k$ :: X, affine group scheme$/k$ :: G, action :: $\alpha : G \curvearrowright X$ が与えられているとする．この場合には，直接構成できる quotient scheme がある．それが GIT(Geometric Invariant Theory) quotient である．Mumford が構成した．

最初に，affine $\curvearrowright$ affine の場合の作用について述べておこう．$\alpha : G \curvearrowright X$ に対応する環準同型を $\tilde{\alpha} : k[X] \to k[X] \otimes_k k[G]$ とする．一方，$\mathrm{pr}_X : G \times X \to X$ に対応する環準同型は

$$\begin{array}{ccc} k[X] & \to & k[X] \otimes_k k[G] \\ x & \mapsto & x \otimes_k 1 \end{array}$$

である．したがって $\mathcal{O}_X^G (\subseteq \mathcal{O}_X)$ の global section は次のように成る．

$$k[X]^G := \{ f \in k[X] \mid \tilde{\alpha}(f) = f \otimes 1 \} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

定義 5.10
$X /\!\!/ G := \operatorname{Spec} k[X]^G$ を G による X の affine GIT quotient と呼ぶ．

$X /\!\!/ G$ という記号は，affine GIT quotient は必ずしも (affine) geometric quotient でない，ということを意味している（例 5.3)．しかしどちらも categorical quotient であるから，両方共存在するならばそれらは同型を除いて一致する．

affine GIT quotient を張り合わせていくことで，projective GIT quotient が構成される．[1] chapter 6 を参照せよ．

5.5 Relations of Quotients.

$$\begin{tikzcd}
\text{Geometric} \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{GIT}^* \arrow[dl, Rightarrow, "\text{Thm8.2}"] \\
& \text{Good} \arrow[d, Rightarrow] & \\
& \text{Categorical} &
\end{tikzcd}$$

6 Linear Representation of Group Scheme.

引き続き，field :: k affine scheme$/k$ :: X, affine group scheme$/k$ :: G, action :: $\alpha : G \curvearrowright X$ が与えられているとする． まず現状の確認をしよう．我々は affine GIT quotient を定義した．affine GIT quotient は不変式環で与えられるため，多くの場合で具体的に計算することが出来る．しかしこれが categorical/good/geometric quotient であるかどうかはまだ我々には分からない．

我々は group scheme :: G が “linearly reductive” という性質を備えている場合に G による affine scheme の affine GIT quotient が categorical/good/geometric quotient であることを示す．（実はより弱い “reductive” で十分なのだが，これを定義するだけでも骨が折れるので，このノートでは扱わない，）このセクションでは “linearly reductive” を定義し，調べていく．

6.1 Representation

group scheme の representation として最も一般的なものは次のものである．

定義 6.1 ([8] 4,a)
V :: vector space over k に対し，k 代数の圏から群の圏への関手 $\mathcal{GL}_V$ を

$$R \mapsto \mathrm{Aut}_R(V \otimes_k R)$$

で定める．G の **representation** とは，V と（群の圏への関手の）準同型 $\rho : \underline{G} \to \mathcal{GL}_V$ の組のことである．

注意 6.2
V が有限次元である場合には $\mathcal{GL}_V$ は affine group scheme :: $GL_{\dim V}$ で表現できる．$n = \dim V$ としてみると，$V \cong k^{\oplus n}$ なので $V \otimes R \cong R^{\oplus n}$．また，

$$\underline{GL_n}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/k}(\mathrm{Spec}\, R, GL_n) \cong \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[T, 1/(\det T)], R).$$

$\phi \in \mathrm{Hom}_{k\text{-}\mathbf{Alg}}(k[T, 1/(\det T)], R), \bar{T} = \phi(T)$ とすると，$T \in \mathrm{Aut}(k^{\oplus n})$ より $\bar{T} \in \mathrm{Aut}(R^{\oplus n})$．$\bar{X}$ と ϕ の間にあるこの対応が一対一であることは明らか．

また，この時 ρ は homomorphism of group scheme である．

定義 6.3 ([8] 4,a にある別の定義)
V :: vector space over k に対し，k-algebra の圏から module の圏への関手 $\underline{V}$ を

$$R \mapsto V \otimes_k R$$

で定める．G の V への representation とは，次の条件を満たす自然変換 $\rho : \underline{G} \times \underline{V} \to \underline{V}$ のことである．その条件とはすなわち，任意の k-algebra :: R について $\rho(R)$ は作用 $\underline{G}(R) \curvearrowright \underline{V}(R) = V \otimes_k R$ である．さらに，この写像は第一引数を固定した時，R-module の準同型である[†7]．

命題 6.4
二つの定義は同値である．

(証明)．V :: vector space over k を固定する．

まずは $\rho : \underline{G} \to \mathcal{GL}_V$ から $\sigma : \underline{G} \times \underline{V} \to \underline{V}$ を構成しよう．これは任意の k-algebra :: R について $\sigma_R(g, v) = \rho_R(g)(v)$ とおけば良い．逆は $\rho_R(g) = \sigma_R(g, -)$． ∎

基本的に後者を定義として用いる．こちらのほうが action と定義が似ているということや，後に示す定義が書きやすい，というのが理由である．action と似ている，というのは次を見よ．

定義 6.5
S :: *k-algebra* に対し，k-algebra の圏から module の圏への関手 $\underline{S}$ を

$$R \mapsto S \otimes_k R$$

[†7] $\underline{G}(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}\, R, G)$ は，G :: affine scheme より環準同型 :: $k[G] \to R$ に対応する．これは $(r \cdot \phi)(*) = r\phi(*)$ のようにして自然に R-module の構造を持つ．

で定める．G の S への representation とは，次の条件を満たす自然変換 $\rho : \underline{G} \times \underline{S} \to \underline{S}$ のことである．その条件とはすなわち，任意の k-algebra :: R について $\rho(R)$ は作用 $\underline{G}(R) \curvearrowright \underline{S}(R) = S \otimes_k R$ である．さらに，この写像は第一引数を固定した時，R 代数の準同型である．

したがって affine scheme over k :: $X = \operatorname{Spec} S$ への G の action は，G の S への representation と見ることが出来る．

注意 6.6
[1] における representation は $k[G]$-comodule structure on V で与えられている．G が affine group scheme over k ならば，$k[G]$-comodule structure on V と linear representation of G on V（ここでの定義）が一対一に対応する．このことは [7] Prop6.1 にある．

Milne によるこの命題の証明によると，$\rho : \underline{G} \times \underline{V} \to \underline{V}$ から次のように comodule structure on V が定義される．$G = \operatorname{Spec} A$ とする．

$$S = \mathrm{id}_A \times (V \otimes_k 1_A), \qquad \rho(A)|_S : S \cong V \to V \otimes_k A = \underline{V}(A).$$

逆に $\sigma : V \to V \otimes A$ が与えられている時，$g \in \underline{G}(R)$ について

$$V \xrightarrow{\sigma} V \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}_V \otimes g} V \otimes R$$

の両辺に $\otimes R$ をつければ $\rho(R)(g) \in \mathcal{GL}_V(R)$ が得られる．以上の操作が互いに逆であることの証明は長いので [7] を見て欲しい．

例 6.7
trivial representation とは，射影 $\mathrm{pr}_2 : \underline{G} \times \underline{V} \to \underline{V}$ で定義される作用である．

定義 6.8 (i) G の V 上の representation :: (V, ρ) について $v \in V$ が **G-invariant vector** であるとは，任意の k-algebra :: R に対して $\rho(\underline{G}(R), v \otimes_k 1_R) = v \otimes_k R$ となること．

(ii) G の V 上の representation :: (V, ρ) について，linear subspace of V :: U が **subrepresentation** of V であるとは，$\rho(\underline{G} \times \underline{U}) \subseteq \underline{U}$ が成立しているということ．

(iii) V, W :: vector space over k への G の representation を考える．

$$\rho^V : \underline{G} \times \underline{V} \to \underline{V}, \quad \rho^W : \underline{G} \times \underline{W} \to \underline{W}.$$

この時，**G-equivariant map** $\phi : V \to W$ とは，以下の可換図式を成立させる射 ϕ のことである．

$$\begin{tikzcd}
\underline{V} \arrow[r, "\phi"] & \underline{W} \\
\underline{G} \times \underline{V} \arrow[u, "\rho^V"] \arrow[r, "\mathrm{id} \times \underline{\phi}"'] & \underline{G} \times \underline{W} \arrow[u, "\rho^W"']
\end{tikzcd}$$

k-algebra への represenation についても同様に G-invariant vector, subrepresentation, G-equivariant map を定義する．ただし，k-algebra の subrepresentation は k-subalgebra ではなく linear subspace であることに注意する．

6.2 Linear Reductivity

定義 6.9
G の linear representation の間にある任意の surjective G-equivariant map $\phi : W \to V$ に対し，ϕ から誘導される写像 $\phi^G = \phi|_{W^G} : W^G \to V^G$ も全射である時，G は **linearly reductive** であると呼ばれる．

例 6.10
任意の finite group は linearly reductive である．また，SL_n, GL_n もそうである．affine group scheme of finite type $/k$ もそう．

命題 6.11 ([1] p.131)
G とその normal subgroup H を考える．

(i) H, G が linerly reductive ならば G/H もそうである．
(ii) $H, G/H$ が linerly reductive ならば G もそうである．

特に G の単位元 $e = \operatorname{im} \epsilon$ を含む G の connected component :: G^0 が linerly reductive ならば G もそう．

6.3 Locally Finite Dimensional / Rational Action.

定義 6.12
representation of G :: (V, ρ) が **locally finite dimensional** であるとは，任意の $v \in V$ について，v を含む finite dimensional subrepresentation of V が存在するという事．

注意 6.13
k-algebra :: A への action がこれが locally finite dimentional である時，この action を rational action と呼ぶことがある．

命題 6.14 ([1] Prop4.6)
任意の affine group scheme$/k$ の任意の representation は locally finite dimensional.

補題 6.15
G が linearly reductive であることは次と同値: G の *finite dimensional* linear representation の間にある任意の surjective G-equivariant map $\phi : W \to V$ に対し，ϕ から誘導される写像 $\phi^G = \phi|_{W^G} : W^G \to V^G$ も全射である．

7 Affine GIT Quotient of Variety is Variety Again

k を algebraically closed field，$X = \operatorname{Spec} A$ を affine variety とし，affine group scheme :: G も finite type$/k$ であるとする．

$X /\!\!/ G$ とは $\operatorname{Spec} A^G$ のことであった．A^G は A の部分環であり，X :: variety より A :: integral domain. なので A^G :: integral domain が得られる．$X /\!\!/ G$ が k 上の scheme であることは明らか．このことと [4] II, Prop4.1 から separated/k であることも得られる．以上から，$X /\!/ G$ が variety であるためには finite type/k だけが足りない．

注意 7.1 ([2] Ex3.25)
$q : X \to Y$ が categorical quotient であり，かつ X が connected (resp. irreducible, reduced) であるとする．この時，Y も connected (resp. irreducible, reduced) である．

定理 7.2
$X = \operatorname{Spec} A$ :: affine variety, G :: linearly reductive affine group scheme acting on X rationally とする．この時，A^G は有限生成．したがって $X /\!/ G = \operatorname{Spec} A^G$ :: affine variety.

まずは $X = \mathbb{A}_k^n$ の場合に証明する．

命題 7.3 ([1] Thm4.51, [2] Thm4.25 (second part))
G :: linearly reductive affine group scheme, $S = k[x_1, \ldots, x_n]$ とする．$G \curvearrowright S$ が linear action であるとき，S^G は有限生成．

(証明)．S の部分環 S^G は次のように次数付けられる．

$$S^G = \bigoplus_{d \geq 0} \left(S^G \cap S_d\right).$$

イデアル $J \subset S$ を $S_+^G = \bigoplus_{d>0} \left(S^G \cap S_d\right)$ で生成されるものとする．すると S は noetherian ring であるから，J の生成元として有限個の多項式 $f_1, \ldots, f_N \in S$ がとれる．特にこれらの多項式は正次数だと仮定できる（TODO: linear action だとこのように仮定できる．）．

次の S-module homomorphism は全射である．

$$\begin{array}{cccc} \phi : & S^{\oplus N} & \to & J \\ & (h_i)_i & \mapsto & \displaystyle\sum_i h_i f_i \end{array}$$

$\operatorname{Spec} S$ への G の作用を，S 上の G の表現と考える．これを $(g, (s_i)_{i+1}^N) \mapsto (\rho(g, s_i))_i$ の様に $\operatorname{Spec} S^{\oplus N}$ 上の表現に拡張すると，$(S^{\oplus N})^G$ を考えることが出来る．これが $(S^G)^{\oplus N}$ と同型であることは直ちに分かる．G は linearly reductive であることから，$\phi^G : (S^G)^{\oplus N} \to J^G$ は全射である．

主張 7.4
S^G は k-algebra として $\{f_i\}_{i=1}^N$ で生成される．

f_i 達は S^G の元であるから，$S^G \supseteq k[\{f_i\}_i]$ は明らか．逆の包含関係を示すために，$h \in S^G \subseteq S$ を任意にとって，$\deg h$ についての帰納法で $h \in k[\{f_i\}_i]$ を示す．

$\deg h = 0$ の時 $h \in k \subset k[\{f_i\}_i]$ なので主張は成立する．$\deg h > 0$ の時，$h \in S_+^G \subseteq J$．特に（$J \subset S$ を G の sub-representation とみなすと）J^G に属している．上で述べた通り，$\phi^G : (S^G)^{\oplus N} \to J^G$ は全射である．また ϕ^G は ϕ の制限であるから，次を満たす $\{h'_i\}_i \subseteq S^G$ が存在することが分かる．

$$h = \sum_i h'_i f_i.$$

今 $\deg f_i > 0$ だから，$\deg h'_i < \deg h$．帰納法の仮定から $h'_i \in k[\{f_i\}_i]$ なので，h も $k[\{f_i\}_i]$ に属す． ∎

(証明). (TODO: $A = \mathrm{Sym}(V), A_d = \mathrm{Sym}^d(V)$ とすれば A の次数付が出来，作用も linear.) A :: finitely generated k-algebra かつ $G \curvearrowright X$ :: rational action なので，A の生成元 $r_1, \dots, r_N$ で MilneAGS あって，これらが G-invariant k-vector subspace of A (sub-representation of A) を張るようなものが存在する．明らかに次の全射が存在する．

$$S = k[x_1, \dots, x_N] \to A \qquad x_i \mapsto r_i.$$

これは r_i のとり方から G-equivariant map になる（TODO）．G :: linearly reductive より，$S^G \to A^G$ は全射．S^G は finitely generated だから，結局 A^G は finitely generated. ∎

定理 7.5 ([2] Thm 4.26)
An affine algebraic group G over k is reductive if and only if for every rational G-action on a finitely generated k-algebra A, the subalgebra A^G of G-invariants is finitely generated.

8 Affine GIT Quotient is a Good Quotient

この節では，$X = \mathrm{Spec}\, A$ :: affine scheme of finite type over a field k, G :: linearly reductive affine group scheme acting on X とする．前の節と比べて X, G の条件が緩いことに注意.

補題 8.1
$W_1, W_2 \subset X$ が disjoint closed subset であり，かつ orbit の和集合であるとする．すると，$f(W_1) = 1, f(W_2) = 0$ となるような G-invariant function :: $f \in A^G$ が存在する．

定理 8.2 ([2] Thm4.30)
$X /\!\!/ G = \mathrm{Spec}\, A^G$ :: good quotient.

参考文献

[1] 向井茂 (2008)『モジュライ理論 I』岩波書店

[2] Victoria Hoskins (2016) “Moduli Problems and Geometric Invariant Theory” https://userpage.fu-berlin.de/hoskins/M15_Lecture_notes.pdf

[3] Gerard van der Geer, Ben Moonen “Abelian Varieties” https://www.math.ru.nl/~bmoonen/research.html（Preliminary Version. 2017/12/31 参照）

[4] Robin Hartshorne(1977) “Algebraic Geometry” Springer

[5] Robin Hartshorne “Deformation Theory” Springer

[6] David Eisenbud(1999) “Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry” Springer

[7] J. Milne, “The basic theory of affine group schemes”, http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AGS.pdf

[8] J. Milne, “Algebraic Groups”, http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/iAG200.pdf

[9] J. Harris,I. Morrison “Moduli of Curves”

[10] D.Mumford,J.Forgarty “Geometric Invariant Theory”

[11] S.Awodey “Category Theory” 2nd ed.

[12] C.S. Seshadri (1972) "Quotient spaces modulo reductive algebraic groups"