これは黒田成俊『関数解析』（以下，教科書）の内容を抜き出し，一部補完して流れを明確にしたノート/cheat-sheet である．

1　第 9 章 / レゾルベント・スペクトル

1.1　レゾルベント・スペクトルを考える動機

$\mathscr{X}$ を Banach 空間，I を $\mathscr{X}$ 上の恒等作用素，$T \in B(\mathscr{X})$ とする．次のような u についての方程式を考えよう．

$$\zeta u - Tu = v \quad (u, v \in \mathscr{X}).$$

これは形式的に $v = (\zeta I - T)^{-1} u$ と解くことが出来る．さらに形式的に，$(\zeta I - T)^{-1}$ は $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ と変形出来るだろう．T^k は既知だから，この変形が正当化できさえすれれば上のような形の方程式は解けたことになり，大変嬉しい．そして実際に，$\|T\| < |\zeta|$ ならば上の形式的解法が正当化出来ることが定理 1.3 よりわかる．また，T が有界でない場合でも $(\zeta I - T)^{-1}$ が有界になる場合は多い．なので有界作用素の理論を用いて非有界作用素 T を調べられることが出来る．

1.2　定義

命題 1.1 (p.210)**.** T は Banach 空間 $\mathscr{X}$ の線形作用素とする．$(\zeta I - T)^{-1}$ が $B(\mathscr{X})$ [†1]の元になり，しかも 1 対 1 になるような $\zeta \in \mathbb{C}$ が存在するためには，T が閉作用素であることが必要である．

(証明)． 教科書の定理 7.16 i) より $(\zeta I - T)^{-1}$ は閉で，定理 7.17 より $\zeta I - T$ も閉．よって定理 7.18 より $T = (\zeta I) - (\zeta I - T)$ は閉． ∎

なのでスペクトル理論の興味の対象は閉作用素に限る．

定義 1.2. T は Banach 空間 $\mathscr{X}$ の閉線形作用素とする．

レゾルベント集合 $\rho(T)$

$\rho(T) = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid (\zeta I - T)$ が 1 対 1，かつ $(\zeta I - T)^{-1} \in B(\mathscr{X})$.$\}$ [†2]

レゾルベント $R(\zeta; T)$

$\zeta \in \rho(T)$ について $R(\zeta; T) = (\zeta I - T)^{-1}$.

スペクトル $\sigma(T)$

$\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. [†3]

スペクトル半径 $r(T)$

$T \in B(\mathscr{X})$ に対して，$r(T) = \sup_{\zeta \in \sigma(T)} |\zeta|$. [†4]

固有値

$(\zeta I - T)$ が 1 対 1 でないような $\zeta \in \mathbb{C}$ を T の固有値と呼ぶ．

[†1] $\mathscr{X}$ 上の有界線形作用素．
[†2] ρ は resolvent の r.
[†3] σ は spectrum の s.
[†4] 定理 1.3 から $r(T) \leq \|T\|$ が成り立つ．

点スペクトル $\sigma_p(T)$

T の固有値全体を $\sigma_p(T)$ で表す．

固有値 ζ に属する固有ベクトル・固有空間

$B(\mathscr{X})$ の閉部分空間 $\{u \in \mathscr{X} \mid Tu = \zeta u.\}$ を固有値 ζ に属する固有空間と呼び，その元を固有値 ζ に属する固有ベクトルと呼ぶ．

固有値 ζ の多重度

固有値 ζ に属する固有空間の次元を固有値 ζ の多重度と呼ぶ．

$T \in B(\mathscr{X})$ について，$r(T) = 0$ であるとき T を**準ベキ零作用素**と呼び，ある $n \in \mathbb{N}$ について $T^n = 0$ となるとき T を**ベキ零作用素**と呼ぶ．後に証明することとして，以下の等式がある（1.8）．

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}.$$

この等式から 2 つの概念は一致するように思われる．しかし $r(T)$ は sup を取るという極限操作によって定まっており，実際には $\mathscr{X}$ が無限次元の時一致しない．一方有限次元の時には一致することが確かめられる．

1.3 定理・命題・補題・系

1.3.1 Neumann 級数

教科書の定理 7.16 i) (p.165) より，$B(\mathscr{X})$ の元は閉作用素であることに注意．

定理 1.3 (定理 9.2, p.209)**．** $\mathscr{X}$ は Banach 空間，$T \in B(\mathscr{X}), \zeta \in \mathbb{C}$ とする．$|\zeta| > \|T\|$ ならば $\zeta \in \rho(T)$ であり，以下が成り立つ．

$$R(\zeta;T) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{-(k+1)} T^k \tag{1}$$

$$\|R(\zeta;T)\| \leq |\zeta|^{-1}(1 - |\zeta|^{-1}\|T\|)^{-1} \tag{2}$$

ここで式 (1) の右辺は $B(\mathscr{X})$ で絶対収束する．特に方程式 $\zeta u - Tu = v$ は一意的に解 $u = R(\zeta;T)v$ を持つ．

式 (1) の右辺は Neumann 級数と呼ばれる．例で見るようにこの定理は $(\zeta I - T)^{-1}$ が Neumann 級数で表せることの十分条件を示しているに過ぎない．証明も $\sum_{k=0}^{\infty} \zeta^{-(k+1)} T^k$ が存在するならば両辺が一致する，というものになっている．また，この定理の前半（と T が有界作用素であること）から，$\rho(T)$ は $\{\zeta \mid |\zeta| > \|T\|\}$ を含むことがわかる．

1.3.2 レゾルベント方程式と正則性

この節では T を $\mathscr{X}$ の閉線形作用素とする．まず $\zeta \in \rho(T)$ ならば $\zeta I - T$ は 1 対 1 なので $\mathrm{dom}(T)$ を $\mathscr{X}$ 全体に写す．したがって $R(\zeta;T) : \mathscr{X} \to \mathrm{dom}(T)$ である．

定理 1.4. $\zeta_1, \zeta_2 \in \rho(T)$ について，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned} R(\zeta_2;T) - R(\zeta_1;T) &= (\zeta_1 - \zeta_2) R(\zeta_2;T) R(\zeta_1;T) \\ &= (\zeta_1 - \zeta_2) R(\zeta_1;T) R(\zeta_2;T) \end{aligned}$$

これを（第一）**レゾルベント方程式**と呼ぶ．[†5] この等式から $R(\zeta_1;T), R(\zeta_2;T)$ が可換であること，及び $\zeta_1 \neq \zeta_2$ ならば

$$\frac{R(\zeta_2;T) - R(\zeta_1;T)}{\zeta_2 - \zeta_1} = -R(\zeta_2;T)R(\zeta_1;T) = -R(\zeta_1;T)R(\zeta_2;T).$$

となることが得られる．すぐさま $\zeta_1 \to \zeta_2$ として「微分」したくなるが，その極限が存在することは自明でなく，次の定理で述べられる．

定理 1.5 (定理 9.5, p.211)**.** $\zeta_0 \in \rho(T)$ をとり，$R(\zeta) := R(\zeta;T)$ と略記する．このとき以下が成り立つ．

$$\mathrm{Disc}\left(\zeta_0, \|R(\zeta_0)\|^{-1}\right) = \left\{\zeta \in \mathbb{C} \;\middle|\; |\zeta - \zeta_0| < \|R(\zeta_0)\|^{-1}\right\} \subset \rho(T).$$

この円盤の中では $R(\zeta)$ は次のようにべき級数展開される．

$$R(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k R(\zeta_0)^{k+1} \cdot (\zeta - \zeta_0)^k.$$

また，この等式で両辺のノルムを評価することで，以下が得られる．

$$\|R(\zeta)\| \leq \|R(\zeta_0)\| \sum_{k=0}^{\infty} \left(|\zeta - \zeta_0| \|R(\zeta_0)\|\right)^k = \|R(\zeta_0)\|(1 - |\zeta - \zeta_0| \|R(\zeta_0)\|)^{-1}.$$

定理の最初から一般の閉線形作用素 T について $\rho(T)$ が開集合であることがわかる．そして最後の不等式から $R(\zeta;T)$ の「微分」$\frac{d}{d\zeta}R(\zeta;T) := \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(R(\zeta+h;T) - R(\zeta;T))$ が存在することが示される．

定理 1.6 (定理 9.6, p.212)**.** $R(\zeta;T)$ は $\rho(T)$ で正則，すなわち $\frac{d}{d\zeta}R(\zeta;T)$ が存在し，次の等式が成り立つ．

$$\frac{d}{d\zeta}R(\zeta;T) = -R(\zeta;T)^2.$$

1.3.3 スペクトル半径

この節では T を $\mathscr{X}$ 上の有界線形作用素とする．定理 1.3 によると，$\rho(T)$ は空でない．実は次も成り立つ．

定理 1.7 (定理 9.8, p.213)**.** $T \in B(\mathscr{X})$ ならばスペクトル $\sigma(T)$ は空でない．

したがってスペクトル半径 $r(T) = \sup_{\zeta\in\sigma(T)} |\zeta|$ は存在する．スペクトル半径について，以下の等式が成り立つ．

定理 1.8 (定理 9.12, p.215)**.** $\lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ が存在し，以下が成り立つ．

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}.$$

1.3.4 双対作用素のレゾルベント

T が閉作用素ならば，教科書の定理 8.42 より共役作用素 T^* も閉作用素．なので $\rho(T^*)$ が考えられる．

[†5] 第二レゾルベント方程式は $R(\zeta;S) - R(\zeta;T) = R(\zeta;S)(S-T)R(\zeta;T)$（演習問題 6）．証明は第一レゾルベント方程式を真似れば良い．

定理 1.9 (定理 9.9, p.213). T が $\mathscr{X}$ 上の閉作用素で，$\dim(T)$ が $\mathscr{X}$ で稠密であるとする．この時，まず以下が成り立つ．

$$\rho(T^*) = \rho(T), R(\zeta; T^*) = R(\zeta; T)^*.$$

さらに $\mathscr{X}$ が Hilbert 空間ならば通常 Hilbert space adjoint（p.201 参照）$T^\star$ を共役作用素として扱うが，これについては以下が成り立つ．

$$\rho(T^\star) = \{\zeta \mid \bar{\zeta} \in \rho(T)\}, R(\zeta; T^\star) = R(\bar{\zeta}; T)^\star.$$

1.3.5 擬レゾルベント

1.4 例

1.4.1 （準）ベキ零作用素

例 1.10 (例 9.14, p.216). l^p の元 $u = (u_1, u_2, \dots)$ に対して $Tu = (2^{-1}u_2, 3^{-1}u_3, \dots)$ と定める．直ちに以下が得られる．

$$T^n u = \left(\frac{1}{(n+1)!}u_{n+1}, \frac{2!}{(n+2)!}u_{n+2}, \dots\right).$$

l^p のノルムは sup ノルムなので $\|T^n\| = \frac{1}{(n+1)!}$．定理 1.8 より $r(T) = 0$．しかし明らかに任意の n について $T^n \neq 0$ なので，T は準ベキ零作用素だがベキ零作用素でない．

例 1.11 (問題 9.2, p.223). $k(x, y)$ を正方形 $[a, b]^2(-\infty < a < b < \infty)$ 上定義された連続関数とする．そして作用素 $T \in B(C[a, b])$ を以下で定める．

$$(Tu)(x) := \int_a^x k(x, y)u(y)dy \text{ where } u \in C[a, b],\ x \in [a, b].$$

■(i) $M = \sup_{(x,y)\in[a,b]^2} |k(x, y)|$ とすると，[†6] $|(Tu)(x)| \leq M\|u\| \int_a^x dy = M\|u\|(x - a)$. 帰納的に $|(T^n u)(x)| \leq \frac{M^n}{n!}(x - a)^n\|u\|$ が示されるので，$\|T\| \leq \frac{M^n}{n!}(b - a)^n \to 0 \quad (n \to \infty)$．しかし明らかに $T^n \neq 0$ なので，これも準ベキ零作用素だがベキ零作用素でない．

■(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ は $\leq \sum_{k=0}^{\infty} \|T^k\| = \exp(M(a - b)) < \infty$ より，絶対収束する．なので $(I - T)^{-1}$ は定理 9.1 (p.209) の証明から $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ で表せて，方程式 $(I - T)u = f$ は任意の $f \in C[a, b]$ について一意的な解 $u = (I - T)^{-1}f$ を持つ．

1.4.2 レゾルベント・スペクトル

例 1.12 (例 9.15, p.217). $\dim \mathscr{X} = n < \infty, T \in B(\mathscr{X})$ とする．$\mathscr{X}$ の基底をひとつ取ると，T は $n \times n$ 行列 $\tilde{T}$ で表示できる．この時 $\zeta I - T$ が 1 対 1 であることと $(\zeta I - T)^{-1} \in B(\mathscr{X})$ は同値．$\zeta I - T$ が 1 対 1 でないことは $\zeta I - \tilde{T}$ が可逆でないことと同値であることがわかるので，$\sigma(T) = \{\zeta \mid \det(\zeta I - \tilde{T}) = 0\} =$ 行列 $\tilde{T}$ の固有値全体．

例 1.13 (例 9.17, p.217). $\mathscr{X} = l^p, 1 \leq p \leq \infty$ とする．作用素 $S(u_1, u_2, \dots) = (u_2, u_3, \dots)$ を考えよう．これは明らかに非可逆．$\|S\| = 1$ なので，スペクトルは円盤 $|\zeta| \leq 1$ に含まれる．

[†6] 教科書では $M = \sup_{(x,y)\in[a,1]^2} |k(x, y)|$ となっているが明らかに誤植である．

まず固有値を調べよう．$Su = \zeta u$ の両辺で成分を見ると $u_{n+1} = \zeta u_n$ なので $u_n = \zeta^{n-1} u_1$．したがって $|\zeta| < 1$ の時 ζ は固有値で，付随する固有空間は $\{(t, \zeta t, \dots) \mid t \in \mathbb{C}\}$．一方 $|\zeta| = 1$ の時は $|u_n| = |u_1|$．故に $p < \infty$ の時は同じように固有ベクトルを作っても l^p の元にならず，$p = \infty$ ならば l^p の元になる．よって $\sigma_p(S)$ は $1 \leq p < \infty$ ならば $\{|\zeta| < 1\}$，$p = \infty$ ならば $\{|\zeta| \leq 1\}$ である．

さらに，以上から $\{|\zeta| \leq 1\}$ とレゾルベント集合は交わらない．よって p によらず $\sigma(S) = \{|\zeta| \leq 1\}$．（あるいは，$\sigma(S) = (\rho(S))^c$ は $\sigma_p(S)$ を含む閉集合であることを用いてもわかる．）

$1 \leq p < \infty$ の時は共役作用素も考えられる．p.202 より $S^*(u_1, u_2, \dots) = (0, u_1, u_2, \dots)$．まず定理 1.9 より $\sigma(S^*) = \sigma(S)$．固有値を S と同様にして考えると，$u_{n-1} = \zeta u_n, 0 = \zeta u_1$ となるので，$\zeta = 0$ または $u_1 = u_2 = \cdots = 0$ が必要になる．しかも $\zeta = 0$ なら $\zeta I - S^* = S^*$ で，これは明らかに 1 対 1．よって $\sigma_p(S^*) = \emptyset$.

2 第 11 章 / コンパクト作用素，Fredholm 作用素

2.1 定義

2.1.1 直和分解と補空間

定義 2.1. $\mathscr{X}$ を Banach 空間，$\mathscr{M}, \mathscr{N}$ を $\mathscr{X}$ の閉部分空間とする．$\mathscr{M} \cap \mathscr{N} = \{0\}$ であるとき，

$$\mathscr{M} \oplus \mathscr{N} = \{m + n \mid m \in \mathscr{M}, n \in \mathscr{N}\}.$$

とし，これを $\mathscr{M}$ と $\mathscr{N}$ の**直和**と呼ぶ．Banach 空間 $\mathscr{X}$ が 2 つの閉部分空間 $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ の直和であるとき，$\mathscr{X}$ は $\mathscr{M}$ と $\mathscr{N}$ に**直和分解**されると言い，$\mathscr{M}, \mathscr{N}$ は互いに**補空間**であると言う．

$\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$ の元を一つとって $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ の元の和に分解するとき，その分解の仕方は一意である．$\mathscr{X}$ は Hilbert 空間ならば，任意の閉部分空間 $\mathscr{M}$ は補空間 $\mathscr{M}^\perp$ を持つ．$\mathscr{X}$ が Banach 空間である時の補空間の存在については定理 2.11 で，一意性については定理 2.10 で述べられる．以上の定義は 2 個以上の空間の直和へ一般化される．

定義 2.2. $\mathscr{X}$ を Banach 空間，$\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n$ をその部分空間とする．これらが以下の条件を満たすとする．

$$u_k \in \mathscr{M}_k, \ \ u_1 + \cdots + u_n = 0 \implies u_1 = \cdots = u_n = 0.$$

このとき $\mathscr{M}_1, \dots, \mathscr{M}_n$ の直和を以下で定める．

$$\mathscr{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{M}_n = \left\{ u_1 + \cdots + u_n \;\middle|\; {}^\forall k, \ \ u_k \in \mathscr{M}_k \right\}.$$

前提条件から，$\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$ の元一つとって $\mathscr{M}, \mathscr{N}$ の元の和に分解するとき，その分解の仕方は一意である．

次の集合は教科書 p.197 で一度定義されたもので，Fredholm 作用素の定義にも現れる．

定義 2.3. Banach 空間 $\mathscr{X}$ の部分集合 $\mathscr{M}$ に対して $\mathscr{M}^\perp$ を以下で定める．

$$\mathscr{M}^\perp = \left\{ f \in \mathscr{X}^* \;\middle|\; {}^\forall u \in \mathscr{M}, \ \ f(u) = 0 \right\}.$$

2.1.2 コンパクト作用素

定義 2.4. $\mathscr{X}, \mathscr{Y}$ を Banach 空間，$K \in B(\mathscr{X}, \mathscr{Y}), \mathrm{dom}(K) = \mathscr{X}$ とする．$\mathscr{X}$ の任意の有界点列 $\{u_n\}$ に対して，$\{Ku_n\}$ が $\mathscr{Y}$ で収束する部分列を持つとき，K を**コンパクト作用素**（または完全連続作用素）と呼ぶ．

教科書では最初コンパクト作用素に有界であることを求めないが，教科書の定理 11.10 より，そのように定義したコンパクト作用素も有界である．次の定理はコンパクト作用素の別の定義として使える．

定義 2.5 (定理 11.9, p.257)**.** $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ を Banach 空間，$K \in B(\mathscr{X},\mathscr{Y}), \mathrm{dom}(K) = \mathscr{X}$ とする．$\mathscr{X}$ の任意の有界集合 $\mathscr{M}$ について $\overline{K\mathscr{M}}$ が $\mathscr{Y}$ のコンパクト集合であるとき，K を**コンパクト作用素**と呼ぶ.

$\mathscr{X}$ から $\mathscr{Y}$ へのコンパクト作用素全体を $B_0(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ と書く．

定義 2.6. $F \in B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ について値域 $\mathrm{ran}\, F$ が有限次元であるとき，F を**有限次元作用素**と呼ぶ.

有界な部分空間 $\mathscr{M}$ について $\overline{F\mathscr{M}}$ は $\dim \mathrm{ran}\, F < \infty$ ならば有界閉集合になる．よって有限次元作用素はコンパクト作用素である．

2.1.3 Fredholm 作用素

定義 2.7. $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ を Banach 空間，$T \in B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ とする．T が以下の 3 条件を満たすとき，T を **Fredholm 作用素**と呼ぶ.

1. $\dim \ker T < \infty$.
2. $\dim \ker T^* < \infty$.
3. $\mathrm{ran}\, T \subset \mathscr{Y}$ は閉部分空間.

$\mathscr{X}$ から $\mathscr{Y}$ への Fredholm 作用素全体 [2] を $F(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ で表す．

定義 2.8. $T \in F(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ に対して**指数** $\mathrm{ind}\, T$ を，

$$\mathrm{ind}\, T = \dim \ker T - \dim \ker T^*$$

で定義する．

教科書の定理 8.43 i) (p.197) より，$\dim \ker T^* = \dim(\mathrm{ran}\, T)^\perp := \mathrm{codim}\, \mathrm{ran}\, T$ が成り立つ．

2.1.4 自己共役なコンパクト作用素

2.2 例（前半）

2.2.1 コンパクト作用素

例 2.9 (問, p.258)**.** $\mathscr{X} = l^p, 1 \le p < \infty, a_n \in C, a_n \to 0$ とする．$K \in B(l^p)$ を $K(u_1, u_2, \dots) = (a_1 u_1, a_2 u_2, \dots)$ で定義する．$\|Ku\| \le \sup_i |a_i| \cdot \|u\|$ なので確かにこれは有界作用素．この時，$\{u^{(i)}\}$ を M を上限とする有界点列とすると，$\|Ku^{(i)}\| \le \|K\| M$ なので像も有界点列．よって K はコンパクト作用素である．後にこれがコンパクトであることの別証明を与える．

2.3 定理・命題・補題・系

2.3.1 直和分解と補空間

この節では $\mathscr{X}$ を Banach 空間，$\mathscr{M},\mathscr{N}$ をその閉部分空間とする．

定理 2.10 (定理 11.2, p.252)**.** $\mathscr{M}$ が補空間を持つならば，それらは Banach 空間としての同型を除いて一意．

定理 2.11 (定理 11.3, p.253)**.** $\mathscr{M}$ は有限次元ならば補空間を持つ．

定理 2.12 (定理 11.4, p.253)**.** $\mathscr{M}^{\perp}$ が有限次元であることと，$\mathscr{M}$ は有限次元な補空間 $\mathscr{N}$ を持つことは同値．しかもその時 $\dim \mathscr{M}^{\perp} = \dim \mathscr{N}$．

定理 2.13 (定理 11.7, p.255)**.** $\mathscr{M},\mathscr{N}$ が閉部分空間であり，$\mathscr{N}$ は有限次元であるとする．この時，$\mathscr{M} \cap \mathscr{N} = \{0\}$ ならば[†7] $\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$ も閉部分空間である．

2.3.2 コンパクト作用素

この節では $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ を Banach 空間とする．

命題 2.14 (p.257,p.261)**.** 任意の $K \in B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ は $\operatorname{ran} K$ または $\mathscr{Y}$ が有限次元ならばコンパクトである．一方，$\mathscr{X}$ が無限次元ならば恒等作用素 I はコンパクトでない．

定理 2.15 (定理 11.12, p.257)**.** $B_0(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ は $B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ の閉部分空間である．

定理 2.16 (定理 11.13, p.258)**.** $S \in B(\mathscr{X},\mathscr{Y}), T \in B(\mathscr{Y},\mathscr{Z})$ とする．S,T のどちらか一方でもコンパクトであれば ST もコンパクトである．

定理 2.17 (Schauder の定理, 定理 11.15, p.258)**.** $K \in B(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ について，以下が成り立つ．

$$K \in B_0(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \iff K^* \in B_0(\mathscr{X}^*,\mathscr{Y}^*).$$

2.3.3 コンパクト作用素のスペクトル理論

定理 2.18 (定理 11.29, p.269)**.** $K \in B_0(\mathscr{X})$ のスペクトル $\sigma(K)$ について以下が成り立つ．

i) $\sigma(K) = \sigma_p(K)$ or $\sigma_p(K) \cup \{0\}$.[†8]
ii) $\dim \mathscr{X} = \infty$ ならば $\sigma(K) = \sigma_p(K) \cup \{0\}$.
iii) $\sigma_p(K)$ は高々加算な集合 $\{\zeta_k\}$.
iv) $\sigma_p(K) = \{\zeta_k\}$ が加算集合ならば $\lim_{k\to\infty} \zeta_k = 0$.
v) 各 ζ_k の多重度は有限.
vi) 各 ζ_k は K^* の固有値でもある.
vii) 各 ζ_k の K の固有値としての多重度は K^* の固有値としての多重度に等しい.

[†7] つまり $\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$ が存在すれば.
[†8] $0 \in \sigma_p(K)$ はあり得る.

2.3.4 Fredholm 作用素

定理 2.19 (定理 11.20, p.262)**.** $\mathscr{X}$ を Banach 空間とし，$K \in B_0(\mathscr{X}), T = I - K$ とする．この時 T は Fredholm 作用素である．

定理 2.20 (定理 11.24, p.264)**.** $T \in B(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ が Fredholm 作用素であるための必要十分条件は，以下が成り立つこと．

$$\begin{aligned}&\left[{}^{\exists}A_1 \in B(\mathscr{Y}, \mathscr{X}), K_1 \in B_0(\mathscr{X}), \quad A_1T + K_1 = I\right]\\ &\wedge\\ &\left[{}^{\exists}A_2 \in B(\mathscr{Y}, \mathscr{X}), K_2 \in B_0(\mathscr{Y}), \quad TA_2 + K_2 = I\right].\end{aligned}$$

この定理は大雑把に言えば「Fredholm 作用素とはコンパクト作用素の違いを無視すれば可逆なもの」ということを言っている．

定理 2.21 (定理 11.25, p.265)**.** $S \in F(\mathscr{X}, \mathscr{Y}), T \in F(\mathscr{Y}, \mathscr{Z})$ とする．この時 $ST \in F(\mathscr{X}, \mathscr{Z})$ であり，指数について $\operatorname{ind} ST = \operatorname{ind} S + \operatorname{ind} T$ となる．

2.3.5 自己共役なコンパクト作用素

2.4 例（後半）

2.4.1 コンパクト作用素

例 2.22 (問, p.258)**.**（前半で与えた主張の別証明.）$\mathscr{X} = l^p, 1 \leq p < \infty, a_n \in C, a_n \to 0$ とする．$K \in B(l^p)$ を $K(u_1, u_2, \dots) = (a_1u_1, a_2u_2, \dots)$ で定義する．$K_n(u_1, u_2, \dots) = (a_1u_1, a_2u_2, \dots, a_nu_n, 0, 0, \dots)$ と定めると，明らかに $\dim \operatorname{ran} K_n = n < \infty$ で，しかもノルム収束の意味で $K_n \to K$．したがって命題 2.14 と定理 2.15 より，K はコンパクト作用素である．