# ゼミノート #6
# Stacks & Descent Theory

七条彰紀

2018 年 12 月 12 日

## 目次



以下，特に改めて指定がなければ $\mathbf{C}$ :: site, $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ :: fibered category を考える．

## 1 Definition : Stack / Prestack

**定義 1.1** (Prestack, Stack)
関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ を用いて以下のように定義する．

(i) 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ について $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: fully faithfull である時，fibered category $\mathcal{F} \to \mathbf{C}$ は prestack である，という．
(ii) 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ について $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: equivalence である時，fibered category $\mathcal{F} \to \mathbf{C}$ は stack である，という．

(pre)stacks の間の射は，fibered category としての射である．

**注意 1.2**
prestack の定義は以下のように言い換えられる: 任意の $U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i\colon U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ をとる．さらに $\xi, \eta \in \mathcal{F}(U)$ をとり，$\epsilon_{\mathcal{U}}$ による像

$$(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}), (\{\eta_i\}, \{\tau_{ij}\}) \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

を考える．$\{\alpha_i\}\colon \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) \to \epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$ について，$\mathcal{F}(U)$ の射 $\alpha\colon \xi \to \eta$ が一意に存在し，$\alpha_i = (\phi_i)^*\alpha( \iff \{\alpha_i\} = \epsilon_{\mathcal{U}}(\alpha))$ となる．

標語的に言えば，prestack は「貼り合わせられる射を持つ psuedo-functor」となる．同型射の貼り合わせは同型射であるから，prestack は「貼り合わせが（存在すれば）一意な対象を持つ psuedo-functor」である．

**注意 1.3**
このノートでは，fiber が条件を満たす fibered category として (pre)stack は定義されている（fiber を用いずに (pre)stack を定義することも出来るが，今回は採用しなかった）．なので形式上，(pre)stack は fibered category を経由せず，特別な psuedo-functor として定義できる．しかし実際にそのように定義されることは少ない．

では psuedo-functor として定義しない積極的な理由はと言うと，実用上，元の fibered category にも言及する場合が多いからであると思われる．fiber だけでなく元の fibered category に言及する理由については，このセミナーのノート session 4.5 [†1]，注意 2.8 を参考にして欲しい．

**定義 1.4** (Sub(pre)stack)
stack :: $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ の sub(pre)stack とは，$\mathcal{F}$ の部分圏 $\mathcal{G}$ であって，$\pi$ と包含関手の合成 $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\pi} \mathbf{C}$ が fibration であり，さらにその fiber が (pre)stack であるもの．

## 2 Example : Stack

**命題 2.1** ([1] Prop4.9)

(i) separated presheaf of sets is a prestack.

(ii) sheaf of sets is a stack.

(証明)．$\mathbf{C}$ :: site, $\mathcal{F}\colon \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Sets}$ :: presheaf とする．$U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ を任意に取る．

今，圏 $\mathcal{F}(U), \mathcal{F}(\mathcal{U})$ は集合（離散圏）である．なので関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ は写像である．さらに射 $\sigma_{ij}$ も恒等射しかないから，$\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象は，任意の $i, j$ について $\xi_i|_{U_{ij}} = \xi_j|_{U_{ij}}$ を満たす $\xi_i \in \mathcal{F}(U_i)$ の族 $\{\xi_i\}_i$ であると考えて良い．このセミナーノートの session3 の記号を用いれば，$\mathcal{F}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ということに成る．

二つのデータ $\{\xi_i\}, \{\eta_i\}$ の間の射もやはり恒等射しかないから，「関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が fully faithful である」という仮定は「写像 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が単射である」と言い換えられる．これはすなわち，$\mathcal{F}$ が separated presheaf であるということである．

「関手 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が essentially surjective である」という仮定は「写像 $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が全射である」と言い換えられるから．$\epsilon_{\mathcal{U}}$ が equivalence であることは $\mathcal{F}(\mathcal{U}) = H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ と $\mathcal{F}(U)$ の間に全単射が存在するということである．これはすなわち，$\mathcal{F}(U)$ が sheaf であるということである． ∎

**注意 2.2**
この命題で分かるとおり，prestack は presheaf の抽象化ではなく，separated presheaf の抽象化である．そうすると，我々は psuedo-functor $\mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$ を prestack と呼び，今 prestack と呼んでいるものは separated

[†1] URL : https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/AlgebraicStacks/session4_5_FiberedCategoriesContinued.pdf

prestack と呼ぶべきなのかも知れない．我々がそうしないのは，後に定義される “separated stack” との混乱を避けるためである．

以下の二つの例は後にセミナーでも証明を扱う．

**例 2.3**
$X \in \mathbf{C}$ に対し，圏 $\mathbf{Shv}/X$ を以下のように定める．

Objects.
$X$ への射を持つような $\mathbf{C}$ の対象 :: $U$ と，$U$ 上の sheaf :: $\mathcal{U}$ の組．

Arrows.
射 $(U, \mathcal{U}) \to (V, \mathcal{V})$ は，$\mathbf{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と，morphism of sheaves on $V$ :: $f^{\#}\colon \mathcal{V} \to f_*\mathcal{U}$ の組．

この時，fibered category :: $\mathbf{Shv}/X \to \mathbf{C}/X$; $(U, \mathcal{U}) \mapsto U$ は stack である．この例で考える sheaf を quasi-coherent sheaf に制限してて得られる fibered category :: $\mathbf{QCoh}/X \to \mathbf{C}/X$ も stack である．この二つの例については，このセミナーでも後に証明を扱う．

**例 2.4**
$X \in \mathbf{Sch}$ に対し，圏 $\mathbf{QCoh}/X$ を以下のように定める．

Objects.
$\mathrm{Fpqc}(X)$ [†2]の対象 :: $U$ と，$U$ 上の sheaf (on fpqc topology):: $\mathcal{U}$ の組．

Arrows.
射 $(U, \mathcal{U}) \to (V, \mathcal{V})$ は，$\mathbf{C}$ の射 $f\colon U \to V$ と，morphism of sheaves on $V$ :: $f^{\#}\colon \mathcal{V} \to f_*\mathcal{U}$ の組．

この時，fibered category :: $\mathbf{QCoh}/X \to \mathbf{C}/X$; $(U, \mathcal{U}) \mapsto U$ は stack である．

**例 2.5** ([2] 4.4.1)
以下で定まる fibered category は stack である．

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{matrix} \text{pair of scheme over } S :: Y \\ \text{and closed imm. } W \hookrightarrow Y \end{matrix} \right\} & \to & \mathrm{Fppf}(S) \\ (Y, W \hookrightarrow Y) & \mapsto & Y \end{array}$$

**例 2.6** ([2] 4.4.4)
以下で定まる fibered category は stack である．

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{matrix} \text{pair of scheme over } S :: Y \\ \text{and open imm. } W \hookrightarrow Y \end{matrix} \right\} & \to & \mathrm{Fppf}(S) \\ (Y, W \hookrightarrow Y) & \mapsto & Y \end{array}$$

以下の二つの例は後に一般化される．

**例 2.7** ([1] §4.3.1)

[†2] 圏 $\mathbf{Sch}/X$ に fpqc topology を備えたもの．

arrow category :: $\mathbf{Sch}^{\to}$ の対象を affine morphism に制限したものを圏 **Aff** とする．以下で定まる fibered category は stack である．

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{Aff} & \to & \mathrm{Fppf}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \\
[X \to Y] & \mapsto & Y
\end{array}
$$

**例 2.8** ([2] 4.4.15)
quasi-compact open imbedding の後に affine morphism を合成した射のことを quasi-affine morphism という．arrow category :: $\mathbf{Sch}^{\to}$ の対象を quasi-affine morphism に制限したものを **QAff** とする．以下で定まる fibered category は stack である．

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbf{QAff} & \to & \mathrm{Fppf}(\operatorname{Spec}\mathbb{Z}) \\
[X \to Y] & \mapsto & Y
\end{array}
$$

## 3 Proposition : Stack

**命題 3.1** ([2] Prop4.12)
二つの equivalent な fibered category があり，かつ一方が stack ならば，もう一方も stack である．

(証明)．$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ :: fibered categories over $\mathbf{C}$ とし，$F \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ :: morphism of fibered categories とする．この時 cover of $U \in \mathbf{C}$ :: $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}$ について $F_{\mathcal{U}}$ を定義する．

$$
\begin{array}{lccc}
F_{\mathcal{U}} \colon & \mathcal{F}(\mathcal{U}) & \to & \mathcal{G}(\mathcal{U}) \\
\mathbf{Objects:} & (\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\}) & \mapsto & (\{F\xi_i\}, \{F\sigma_{ij}\}) \\
\mathbf{Arrows:} & \{\alpha_i\} & \mapsto & \{F\alpha_i\}
\end{array}
$$

更に二つの射 $F, G \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とその間の base-preserving natural transformation :: $\rho \colon F \to G$ に対し，$\rho_{\mathcal{U}} \colon F_{\mathcal{U}} \to G_{\mathcal{U}}$ を次のように定義する．

$$
(\rho_{\mathcal{U}})_{(\{\xi_i\}, \{\sigma_{ij}\})} = \{\rho_{\xi_i}\}.
$$

以上から，$F$ が equivalence ならば $F_{\mathcal{U}}$ も quivalence である．したがって以下の commutative diagram of weak 2-category [†3] が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{U}}"] \arrow[d, "F"'] & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \arrow[d, "F_{\mathcal{U}}"] \\
\mathcal{G}(U) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{U}}"'] & \mathcal{F}(\mathcal{U})
\end{tikzcd}
$$

この可換図式から，主張が得られる． ∎

**命題 3.2** ([2] Exc 4.I)
$\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ :: stack on $\mathbf{C}$, $f \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ :: morphism of stacks とする．$f$ :: isomorphism は以下の 2 条件が成立することと同値．

(a) 任意の $X \in \mathbf{C}$ について，fiber の間の射 $f_X \colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}'(X)$ は fully-faithful.

[†3] 射の合成の間に natural isomorphism が存在するという意味で可換．

(b) 任意の $X \in \mathbf{C}$ と $x \in \mathcal{F}'(X)$ について，covering of $X$ :: $\{\phi_i \colon X_i \to X\} \in \mathrm{Cov}(X)$ が存在し，全ての $x$ の pullback :: $\phi_i^* x \in \mathcal{F}'(X_i)$ が $\mathcal{F}(X_i)$ の essential image に属す．

(証明)．(TODO) ∎

**補題 3.3**

site :: $\mathbf{C}$ を，空集合の cover として空集合を持つ ($\emptyset \in \mathrm{Cov}(\emptyset)$) ものとする．$\pi \colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ :: stack について，以下の圏同値が成立する．

$$\mathcal{F}(\emptyset) \simeq \mathbf{1}.$$

特に，$\mathcal{F}(\emptyset)$ の対象は全て同型であり，射は同型射しかない．

(証明)．category of descent data :: $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象を考える．これは $\mathcal{U}$ で添字付けられた対象の族の二つ組である．なので $\mathcal{U} = \emptyset$ について，$\mathcal{F}(\emptyset)$ の対象は $(\emptyset, \emptyset)$ しかない．射も $\mathcal{U}$ で添字付けられた族であるから，非自明な射は存在しない． ∎

この補題の仮定は奇妙に見えるかも知れないが，以下の通り，このように仮定しても問題はないし，我々が扱う殆どの site はこの仮定を満たす．

**主張 3.4**

圏 $\mathbf{C}$ の任意の対象 $U \in \mathbf{C}$ について，命題「$\emptyset \in \mathrm{Cov}(U)$」は Grothendieck topology の公理（定義）と独立である．すなわち，$\emptyset \in \mathrm{Cov}(U)$ としてもしなくても矛盾は生じない．

(証明)．命題「$\emptyset \in \mathrm{Cov}(U)$」を $P$ と書く．Grothendieck topology の定義を見直そう．cover of $\emptyset$ :: $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ が満たすべき条件を記号で書き下す．

(a) $^\forall[V \to U] \in \mathbf{C}/U, \quad \left[^\forall[U' \to U] \in \mathcal{U}, \ ^\exists U' \times_U V\right] \implies \{U' \times_U V \to V \mid [U' \to U] \in \mathcal{U}\} \in \mathrm{Cov}(V).$

(b) $^\forall\mathcal{V} := \{\mathcal{U}'_{U'} \mid \mathcal{U}'_{U'} \in \mathrm{Cov}(U')\}_{U' \in \mathcal{U}}, \quad \{U'' \to U' \to U \mid [U' \to U] \in \mathcal{U}, [U'' \to U'] \in \mathcal{U}'_{U'}\} \in \mathrm{Cov}(U).$

クラス $X$ と述語 $F$ について "$^\forall x \in X, \quad F(x)$" という文は "$^\forall x, \quad [x \in X \implies F(x)]$ の省略形である．したがって，$X = \emptyset$ であるとき，"$^\forall x \in X, \quad F(x)$" という文は任意の $F$ について真．また，$\{f(x) \mid x \in \emptyset\} = \emptyset$.

なので，以上の文を $\mathcal{U} = \emptyset$ の場合に考えると（すなわち $P$ を仮定すると），いずれも $P$ と同値に成る．よって $P \implies P$ ということになる．一方，否定 $\neg P$ を仮定しても矛盾が生じないことは明らか． ∎

**例 3.5**

圏 $\mathbf{C}$ を $\mathbf{Sch}$ の部分圏や $\mathbf{Sch}/S$ ($S$ :: scheme) とする．morphism of schemes のクラス $\mathcal{P} \subset \mathrm{Arr}(\mathbf{C})$ をとり，以下のように $\mathbf{C}$ 上の Cov を定めたとする:

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U) =& \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} :: \text{jointly surjective family and } ^\forall\phi \in \mathcal{U}, \quad \phi \in \mathcal{P}\} \\ =& \left\{\mathcal{U} \;\middle|\; \coprod_{U' \in \mathcal{U}} U' \to U :: \text{surjective and } ^\forall\phi, \quad [\phi \in \mathcal{U} \implies \phi \in \mathcal{P}]\right\}.\end{aligned}$$

この時，$\coprod_{U' \in \emptyset} U' = \emptyset$ なので $\emptyset \in \mathrm{Cov}(\emptyset)$.

このセミナーで定義した Zariski site, etale site, ... などは全てこの主張のように定義されている．

**補題 3.6**

圏 $\mathbf{C}$ を $\mathbf{Sch}$ の部分圏や $\mathbf{Sch}/S$ ($S$ :: scheme) とする．$U \in \mathbf{C}, \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ をとり，$V = \coprod_i U_i$ と

置く．

$\{U_i \to V\} \in \mathrm{Cov}(V)$ と仮定する[†4]と $\pi\colon \mathcal{F} \to \mathbf{C}$ :: stack について，圏同値 (TODO: strict 2-equivalence? ここは $\epsilon$ と圏同型の合成)

$$\mathcal{F}\left(\bigsqcup_i U_i\right) \simeq \prod_i \mathcal{F}(U_i)$$

が成立する．

(証明)．瑣末なことでは有るが: $\{U_i \to V\}$ の添字について，$i \neq j$ ならば $U_i \neq U_j$ である，と仮定して一般性を失わない．

仮定の状況では，injection map (coprojection) :: $U_i \to V$ についての fiber product は次のように成る．

$$U_{ij} = U_i \times_V U_j = \begin{cases} U_{ii}(\cong U_i) & (U_i = U_j) \\ \emptyset & (U_i \neq U_j). \end{cases}$$

そこで $\mathcal{U} = \{\mathrm{inj}_i\colon U_i \to V\}(\in \mathrm{Cov}(V))$ と置くと，$\xi \in \mathcal{F}(V)$ の $\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ による像は

$$\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi) = (\{(\mathrm{inj}_i)^*\xi\}_i, \{\mathrm{id}_{U_{ij}}\}_{i,j})$$

となる．

$i \neq j$ の時，$\sigma_{ij}$ は自己同型であるから $\mathrm{id}_\emptyset$ である．さらに $i = j$ の時は，$(\mathrm{pr}_i)^*(\mathrm{inj}_i)^*\xi$ と $(\mathrm{pr}_j)^*(\mathrm{inj}_j)^*\xi$ が完全に等しいので，$\sigma_{ij} = \mathrm{id}_{(\mathrm{inj}_i)^*\xi}$．また，射 $\{\alpha_i\}$ に課された条件は，各 $\alpha_i$ は $(\mathrm{inj}_i)^*\xi \to (\mathrm{inj}_i)^*\xi$ の形の任意の射の組み合わせについて成立する．

以上より，以下の関手は圏同値である．

$$\begin{array}{rccc} & \prod_i \mathcal{F}(U_i) & \to & \mathrm{im}\,\epsilon_{\mathcal{U}}\ (\subseteq \mathcal{F}(\{U_i \to V\})) \\ \textbf{Objects}\colon & ((\mathrm{inj}_i)^*\xi)_i & \mapsto & (\{(\mathrm{inj}_i)^*\xi\}_i, \{\mathrm{id}_{(\mathrm{inj}_i)^*\xi}\}_{i\neq j} \cup \{\mathrm{id}_{U_{ii}}\}_i) \\ \textbf{Arrows}\colon & (\alpha_i)_i & \mapsto & \{\alpha_i\}_i \end{array}$$

$\mathcal{F}$ :: stack なので主張にある圏同値が示せた． ∎

**定理 3.7** (Stackification of category fibered by groupoids.)
$\mathbf{C}$ :: site, $\mathcal{F}$ :: category fibered by groupoids over $\mathbf{C}$ とする．この時，$\bar{\mathcal{F}}$ :: stack in groupoids over $\mathbf{C}$ と $\theta\colon \mathcal{F} \to \bar{\mathcal{F}}$ :: morphism of fibered category が存在し，

$$(-) \circ \theta\colon \mathrm{HOM}_{\mathbf{C}}(\bar{\mathcal{F}}, -) \to \mathrm{HOM}_{\mathbf{C}}(\mathcal{F}, -)$$

が圏同値となる．

**例 3.8**
presheaf の stackification は sheafification と一致する．

**例 3.9** (arXiv:math/0305243v1, Prop3.6)
$S$ :: scheme, $\mathcal{M}$ :: algebraic stack over $\mathbf{Sch}/S$, $\mathcal{G}$ :: sheaf in groups over $\mathbf{Sch}/S$, acting on $\mathcal{M}$ とする．この時，$\mathcal{M}$ の $\mathcal{G}$ による categorical quotient :: $\mathcal{M}/\mathcal{G}$ は，以下の prestack（2-functor として定義する）:: $\mathcal{P}$ の stackification として定義される．

[†4] 例えば，Zariski topology より細かい位相ならばこの仮定は成立する．

Objects of $\mathcal{P}(U)$. $\mathcal{M}(U)$ の対象と同じ.
Arrows of $\mathcal{P}(U)$. $g \in \mathcal{G}(T)$ と $\mathcal{M}(U)$ の射 $g * x \to y$ の組.

ただし $U \in \mathbf{Sch}/S$ は任意.

# 4 Descent Theory on fpqc Site

## 4.1 Motivation

(TODO)

## 4.2 Definition

**定義 4.1**
関手 $\epsilon_{\mathcal{U}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ を用いて以下のように定義する.

(i) $\epsilon_{\mathcal{U}}$ :: equivalence となる $\mathcal{U}$ を of effective descent for $\mathcal{F}$ と呼ぶ.
(ii) $\epsilon_{\mathcal{U}}$ の像と同型である $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ の対象を, effective data という.

## 4.3 Criterion for fpqc Stacks

**補題 4.2** ([2] Lemma 4.25)
$S$ :: scheme, $\mathcal{F} \to (\mathbf{Sch}/S)$ :: fibration とする. 以下が成り立つとする.

(a) $\mathcal{F}$ は Zariski topology での stack である.
(b) 任意の flat surjective morphism of affine $S$-scheme :: $V \to U$ について,
$\epsilon_{\{V \to U\}} \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\{V \to U\})$ は圏同値.

この時, $\mathcal{F}$ は fpqc topology での stack である.

証明のために段階を踏む.

### 4.3.1 Step 1 / $\mathcal{F}$ :: fpqc prestack.

### 4.3.2 Step 2 / single morphism cover の場合に帰着させる.

### 4.3.3 Step 3 / affine scheme への quasi-compact morphism の場合.

### 4.3.4 Step 4 / affine scheme への flat surjective morphism の場合.

### 4.3.5 Step 5 / 一般の場合.

# 参考文献

[1] Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory (version of october 2, 2008).
[2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.