Ex8.1 Strengthen Some Results in the Text.

Ex8.2 $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 0$.

X :: variety of dimension n over k, $\mathcal{E}$ :: locally free sheaf of rank $> n$, $V \subset \Gamma(X, \mathcal{E})$ :: k-vector space of global sections which generate $\mathcal{E}$ とする．X :: variety より X :: connected なので $\mathcal{E}$ の rank は X 全体で一定である．$\operatorname{rank} \mathcal{E} = r(> n)$ としておこう．

$x \in X$ について次の写像を考える．

$$\begin{array}{rccc} \phi_x : & V \otimes_k k(x) & \to & \mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \\ & s \otimes \alpha & \mapsto & s_x \otimes \alpha \end{array}$$

$k(x)$-linear map であることは明らか．$\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ と V :: global generators of $\mathcal{E}$ から，これは surjective．なので

$$\dim_{k(x)} \ker \phi_x = \dim_{k(x)} V \otimes_k k(x) - \dim_{k(x)} \mathcal{E}_x \otimes_k k(x) = \dim_k V - r.$$

$\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ と ϕ_x の定義の仕方から，$\ker \phi_x = \{s \otimes \alpha \mid s_x\alpha \in \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x\}$.

V を projective linear space とみなして，$B \subseteq X \times V$ を次のように置く．

$$B = \{(x, s) \mid x \in X, s \in V, s_x \in \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x\}.$$

B は $X \times V$ の closed subscheme である．（以下が closed であることは Ex2.16 を参照．）

$$B = \bigcap_{s \in V} \operatorname{pr}_1^{-1}(\{x \in X \mid s_x \in \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x\}).$$

$\operatorname{pr}_1|_B : B \to X$ を p_1 と略す．p_1 についての $x \in X^+$ の fiber は，Ex3.10a より，次のような点から成る．

$$\operatorname{sp} B_x = p_1^{-1}(x) = \{x\} \times \{s \in V \mid s_x \in \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x\}.$$

これは $\ker \phi_x$ と同型である．したがって $\dim B_x = \dim_k V - r$．B :: irreducible だから，

$$\dim B = \dim_k V - r + n.$$

$r > n$ なので，$\dim B < \dim_k V = \dim V - 1$．（$\dim V$ は projective space としての次元．）したがって $\operatorname{pr}_2|_B$ :: not surjective. よって $s \in V - \operatorname{pr}_2(B)$ が存在し，この s と任意の $x \in X$ について $s_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ が成り立つ．

ψ を以下で定める．

$$\begin{array}{rccc} \psi : & \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{E} \\ & \langle U, \sigma \rangle & \mapsto & \langle U, (s|_U) \cdot \sigma \rangle \end{array}$$

$s_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ から，($(s|_U)^{-1}$ が存在し，) これは injective．Prop5.7 から $\operatorname{coker} \psi$ も coherent sheaf. すなわち，以下は coherent sheaf の exact sequence.

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \operatorname{coker} \psi \to 0.$$

Ex5.7b から $\operatorname{coker} \psi$ は locally free.

Ex8.3 Product Schemes.

Ex8.4 Complete Intersections in $\mathbb{P}^n$.

Ex8.5 Blowing Up a Nonsingular Subvariety.

Ex8.6 The Infinitesimal Lifting Property.

Ex8.7 Classifying Infinitesimal Extension: One Case.

Ex8.8 Plurigenera and Hodge Numbers are Birational Invariants.