ゼミノート #4
Deformation Theory

七条彰紀

2018 年 7 月 4 日

1 Automorphism Group of Stable Curve

[5] 3.A, [7] §1 を参照する．

C, D :: stable curves of genus g over a scheme S の間の isomorphism group の scheme としての構造を与える．この scheme を $\mathrm{Isom}(C, D)$ と書く．そして $\mathrm{Aut}(C) = \mathrm{Isom}(C, C)$ と定義し，これの scheme としての特徴を調べる．

$\mathrm{Isom}(C, D)$ の特徴付けをするため，次の関手を考える．

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}som_S(C, D) : & (\text{Scheme over } \mathbb{C}) & \to & (\text{Set}) \\ & S' & \mapsto & \{\ C \times_{\mathbb{C}} S' \to D \times_{\mathbb{C}} S' :: S'\text{-isomorphism}\} \end{array}$$

$\iota \in \mathcal{I}som(C, D)(S')$ から得られる ι^* は $\omega^\circ_{C \times S'/S'} = \iota^*(\omega^\circ_{D \times S'/S'})$ を満たす．また $\otimes$ と交換する（すなわち Picard 群の間の準同型である．[3] Ex II.6.8）．このことから $\mathrm{Isom}(C, D)$ が適当な r をとると $PGL(r + 1)$ の部分群として書けることが分かる．

もう少し詳しく $\mathrm{Isom}(C, D)$ を書く．$n \geq 3$ を整数とする．次のように r, d をとる．

$$r + 1 = h^0((\omega^\circ_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n}) = (2n - 1)(g - 1), \qquad d = \deg(\omega^\circ_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n} = 2n(g - 1).$$

すると [3] II.7 より，C, D は $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ の次数 d, arithmetic genus g の closed curve とみなせる（$\mathbb{P}^r$ に埋め込める）．なので Hildert scheme :: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{d,g,r}$ の点として扱うことが出来る．ここで次のように射を定める．

$$\begin{array}{rccc} \mu : & PGL(r + 1) & \to & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ & \alpha & \mapsto & (\alpha \cdot [C], [D]) \end{array}$$

すると，$\mathcal{I}som(C, D)$ は $\mu^{-1}(\Delta)$ によって表現される[†1]．これを group scheme over $\mathbb{C}$ :: $\mathrm{Isom}(C, D)$ とする．

scheme over $\mathbb{C}$ :: X について少々一般の理論を述べる．$\mathbb{I} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ とおく (ref. [5] 1)．[3] Ex II.2.8 より，$t \in \underline{X}(\mathbb{I})$ は X の $\mathbb{C}$-rational point :: x と $T_x(X) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathcal{T}_x$ の元に対応する．ここで $\mathcal{T}$ は tangent sheaf :: $\mathcal{T} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ のことである．[5] でいう regular vector field とは $\mathcal{T}$ の section のこと（と思われる）．

[†1] Δ は $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ の diagonal set. $\mu^{-1}(\Delta)$ は

$$\Delta \cap \mathrm{im}\,\mu = \{(\alpha \cdot [C], [D]) \mid \alpha \cdot [C] = [D]\}$$

の $PGL(r + 1)$ への逆像なので，この点と C, D の間の同型と対応することが分かるだろう．

定理 1.1
C :: stable curve of genus $g \geq 2$ について，

$$\mathrm{Ext}^0(\Omega_C, \mathcal{O}_C) = \mathcal{T}_C(C) = 0.$$

(証明)．[7] §1.
$\pi : \tilde{C} \to C$ を normalization of C とする．また $\tilde{C}$ の connected component の個数を ν，それぞれの genus を g_i $(i = 1, \ldots, \nu)$ とする．

今，$D \in \mathcal{T}_C(C)$ は pullback :: $\pi^* : \mathcal{T}_{\tilde{C}} \to \mathcal{T}_C$ によって[†2]．$\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ C の double point に π で対応する点 (point laying over double point, plodp) で 0 になるような regular vector field :: $\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ に対応する (TODO)．このような $\tilde{D}$ は 0 しかないことを確かめれば，$\mathcal{T}_C(C) = 0$ がわかる．

主張 1.2
1 点 $P \in \tilde{C}$ で $\tilde{D}_P = 0$ ならば，$\tilde{D} = 0$ である．

(証明)．C :: reduced connected scheme に注意する．$P \in C$ において $\tilde{D} \in \mathcal{T}_C(C)$ が $\tilde{D}_P = 0$ を満たすとしよう．C の irreducible affine open cover :: $\mathfrak{U}$ をとり，$P \in U$ なる $U = \mathrm{Spec}\, A \in \mathfrak{U}$ をとって固定する．すると C :: reduced より A :: integral domain. $\tilde{D}|_U \in \mathcal{T}_C(U)$ が $P \in U$ で 0 になるのだから，次が成立する．

$$^{\exists}u \in A - \mathfrak{p}_P, \quad u \cdot (\tilde{D}|_U) = 0.$$

A :: integral より，これは $\tilde{D}|_U = 0$ を意味する．U と交わる irreducible affine open subset of C :: $V \in \mathfrak{U}$ についても，$\tilde{D}|_{U \cap V} = 0$ なので $\tilde{D}|_V = 0$．C :: connected なので，このように V を取り続けることで，全ての $V \in \mathfrak{U}$ について $\tilde{D}|_V = 0$ であることがわかる．sheaf の Identity Axiom から，C 全体で $t = 0$. ∎

したがって我々は $\tilde{C}$ の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつこと示せば良い．

$\mathcal{T}_{\tilde{C}} = \mathcal{H}om(\Omega_{\tilde{C}/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$ なので，$\mathcal{T}_{\tilde{C}}$ に対応する divisor は $K_{\tilde{C}}$．$\deg K_{\tilde{C}} = 2\tilde{g} - 2$ なので，$\tilde{g} > 1$ ならば $\deg(-K_{\tilde{C}}) < 0$．したがって [3] Lemma IV.1.2 から $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\tilde{C}, \mathcal{T}_{\tilde{C}}) = 0$．すなわち $\mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C}) = 0$．なので以下では $\tilde{g}_i = 0, 1$ とする．

$\tilde{g}_i = 0, 1$ であるとき，$\tilde{C}$ の各 connected component は必ず plodp をもつ．実際，genus formula で $\delta = 0$ とすると

$$g = \sum_i (\tilde{g}_i - 1) + 1 \geq 2$$

したがって $\sum_i (\tilde{g}_i - 1) > 0$ ということになる．しかし仮定から $\tilde{g}_i - 1 \leq 0$ なので，$\delta > 0$．すなわち C は必ず node をもつ．$\tilde{C}$ の各 component は smooth であることと C が connected であることも踏まえて考えると，$\tilde{C}$ の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつことが分かる．（この辺りは [7] Lemma1.4 で詳しく述べられている)． ∎

命題 1.3
$\mathrm{Aut}(C)$ :: reduced scheme.

[†2] R :: ring, A, B :: ring over R とする．一般に，k-homomorphism :: $\phi : A \to B$ があるとき，$D \in \mathrm{Der}_R(B)$ は $\phi^* : D \mapsto D \circ \phi$ によって $\mathrm{Der}_R(A)$ へ写すことが出来る．

(証明). $X = \mathrm{Aut}(C)$ は group scheme であるから，X のある点での local な性質は transition を用いて単位元 I での性質と言い換えられる．reduced は local な性質であるから，X が reduced であることを示すには $\mathcal{O}_{X,I}$ :: reduced ring を示せば良い．

$\mathcal{O}_{X,I}$ が non-reduced であると仮定する．この時，非自明な (nonzero) 射 $\mathrm{Spec}\, D \to X = \mathrm{Aut}(C)$ がとれる (TODO)．$\mathrm{Aut}(C)$ の定義から，この射は $C \times D$ の自己同型に対応する（後述）．これは $\mathcal{T}_C(C)$ の非自明な元 ($\neq 0$) に対応する．よって定理から X :: reduced が分かる． ∎

2 Definitions of Deformations and Versal Deformation.

定義 2.1 (Deformation of Scheme [5] 3.B, [8] 6.1)
X :: scheme over k, (Y, y_0) :: pointed scheme over k とする．deformation of X とは，次の二つから成る組 $(\mathcal{X}, Y)$.

- flat family :: $\phi : \mathcal{X} \to (Y, y_0)$.
- morphism :: $\psi : X \to \mathcal{X}$.

これらは次の条件を満たす: 以下の図式が fiber product であり，ψ から $X \cong \mathcal{X} \times_Y \mathrm{Spec}\, k(y_0)$ が誘導される．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathcal{X} \arrow[d, "\phi"] \\ k(y_0) \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

ここで $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y_0}/\mathfrak{m}_{Y,y_0})$ を $k(y_0)$ と書いている．

deformations of X :: $(\mathcal{X}, Y), (\mathcal{X}', Y')$ が equivalent であるとは，可換図式が成立する同型 $\eta : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ が存在すること．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, equal] & \mathcal{X}' \arrow[d, "\eta"] \\ X \arrow[r, "\psi"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

定義 2.2 (Universal Deformation, [5] 3.B, [4] §15)
universal deformation for X とは，次の性質を満たす deformation of X :: $\phi : \mathcal{X} \to (S, s_0) \& \psi : X \to \mathcal{X}$ のこと: 任意の deformation of X :: $\phi' : \mathcal{X}' \to (S', s'_0) \& \psi' : X \to \mathcal{X}'$ に対して射 $f : S' \to S$ が一意に存在し，f と ϕ, ψ の pullback で生じる deformation が誘導される deformation が $\phi' \& \psi'$ と equivalent.

定義 2.3 (Versal Deformation, [1] §11 p.188, p.192)
$f : X \to Y$ が analitically isomorphism であるとは，任意の $x \in X$ について，f の stalk の完備化により得られる準同型

$$(f_x^{\#})\hat{} : (\mathcal{O}_{Y,f(x)})\hat{} \to (\mathcal{O}_{X,x})\hat{}$$

が同型であるということ ([3] §I.5).

deformation of X :: $\phi : \mathcal{X} \to (S, s_0)$ が versal deformation である（versality property をもつ）とは，次の性質を持つということである: 任意の deformation of X :: $\xi : \mathcal{Y} \to (T, t_0)$ と任意の点 $t \in T$ に対し

て，t の開近傍 $U \subseteq T$ と射 $f : U \to S$ が存在し，射影 $(\mathcal{Y} \times_T U =)\xi^{-1}(U)$ と $\mathcal{X} \times_S U$ の間に analitically isomorphism が存在するということ．

$$\begin{tikzcd}
\xi^{-1}(U) \arrow[r, squiggly] \arrow[d] & \mathcal{X} \times_S U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \mathcal{X} \arrow[d, "\phi"] \\
U \arrow[r, equal] & U \arrow[r, "f"'] & S
\end{tikzcd}$$

注意 2.4
開集合 U を “any sufficiently small connected neighborhood of t_0”に限定することもあるようである ([1] §11, p.188).

定義 2.5 (First Order Deformation)
$D = \mathbb{C}[x]/(x^2), \epsilon = x \bmod (x^2)$ とする．$\mathbb{I} = \operatorname{Spec} D$ の唯一の閉点を 0 で表す．$(\mathbb{I}, 0)$ 上の deformation を，first order deformation (or infinitesimal deformation) と呼ぶ．

これは “formal deformation”の最も簡単な場合である．D :: local atrinian ring であり，したがって complete ring でもある．

定義 2.6 (Homomorphism of Deformations for First Order Deformation, [8] 7.2)
homomorphism of deformations of X :: $(\alpha, f) : (\mathcal{X}, \mathbb{I}) \to (\mathcal{Y}, \mathbb{I})$ とは homomohpsim $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ と，$\alpha : f_*\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$ の組のことである．ここで $f_*\mathcal{X}$ は fiber product で得られる deformation である．

定義 2.7 (Versal Deformation for First Order Deformation, [8] 7.2)
deformation of X :: $\phi : \mathcal{X} \to (S, s_0)$ が versal deformation である（versality property をもつ）とは，次の性質を持つということである:

$$\begin{tikzcd}
 & (X, \mathbb{C}) \arrow[d, "\forall"] \\
(\mathcal{X}, S) \arrow[ur, dashed, "\exists"] \arrow[r, "\forall"] & (\mathcal{Y}, T)
\end{tikzcd}$$

通常の場合，versal deformation はほとんど存在しない．

3 First Order Deformation of Nonsingular Scheme Of Finite Type.

補題 3.1 ([2] Cor6.2)
D-module :: M が flat であることは，$M/\epsilon M \xrightarrow{\times\epsilon} \epsilon M$ が同型であることと同値．

補題 3.2 ([6] Prop5.1)
X :: affine, nonsingular, finite type scheme over a field k とする．この時，X の first order deformation は自明な deformation :: $X \times_k \operatorname{Spec} D$ しか存在しない．

(証明). $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{I}, \psi : X \to \mathcal{X}$ を X の first order deformation とする．ϕ :: flat と上の補題を用いると，$X \xrightarrow{\cong} \mathcal{X} \times_D \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ から $\psi^{\#} : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}/\epsilon\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{O}_X$ が同型であることが得られる．逆にこの同型が存在する時 $\mathcal{X} \to \mathbb{I}$ が flat であることが言える．したがって X の first order deformation は infinitesimal extension of X by $\mathcal{O}_X$ ([3] Ex II.8.7) に対応する．しかし [3] Ex II.8.7 より，これは自明なものしか存在しない． ∎

補題 3.3 ([6] Prop5.2)
X :: nonsingular scheme of finite type over k とする．この時，次の sheaf を考える．

$$X \supseteq U \mapsto \{\mathbb{I}\text{-automorphisms of } D \times_k \mathbb{I}\}.$$

するとこの sheaf は tangent sheaf of X :: $\mathcal{T}_X$ と同型である．

定理 3.4 ([6] p.7)
X :: separated nonsingular scheme of finite type over k とする．特に，X :: nonsingular (abstruct) variety over K であればよい．この時，first oder deformation of X の同値類は $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元と一対一に対応する．

(証明). ∎

4 Several Other Deformation Theory

ここでは first order deformation of a nonsingular variety の変種として，様々な "deformation of something" の問題とその "space of first order deformation" を列挙する．

ここでの "curve" は私のノート "session2_ApproachesToConstructionOfMg" 同様に smooth complete (abstruct) variety of dimention 1 over $\mathbb{C}$ を意味する．

4.1 Deformation of a nonsingular curve

4.2 Deformation of a nonsingular pointed curve

4.3 Deformation of a curve with line bundle.

4.4 Deformation of a map $f : X \to Y$ with X, Y both fixed.

4.5 Deformation of a map $f : X \to Y$ with only Y fixed.

4.6 Deformation of a singular point of plane curve.

4.7 Deformation of a singular variety.

5 Formal Deformation

定義 5.1

参考文献

[1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, and Phillip Griffiths. *Geometry of Algebraic Curves: Volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 2011 edition, 4 2011.

[2] David Eisenbud. *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1st ed. 1995. corr. 3rd printing 1999 edition, 3 1999.

[3] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[4] Robin Hartshorne. *Deformation Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2010 edition, 12 2009.

[5] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[6] Brian Osserman.

[7] David Mumford Pierre Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.

[8] Angelo Vistoli.