この note では Hartshorne "Algebraic Geometry" p.61 にある sheaf property (3) を Identity Axiom と呼び，同じく (4) を Gluability Axiom と呼ぶ．これらの名称は Vakil "Foundations of Algebraic Geometry" にあるものである．

Ex1.1　Constant Sheaf is Associated to Constant Presheaf.

A :: abelian group, X :: topological space とする．任意の空でない開集合 $U \subseteq X$ について $\mathcal{A}(U) = A$ とし, restriction map $\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ は id_A とする．この $\mathcal{A}$ を constant presheaf と呼ぶ．$\mathcal{A}$ に対応する sheaf を $\mathcal{A}^+$ としよう．また, 開集合 $U \subseteq X$ に対し, $\hat{\mathcal{A}} = \{f : U \to A \mid f :: \text{continus.}\}$ とおく．$\mathcal{A}^+ = \hat{\mathcal{A}}$ を示そう．

$\mathcal{A}$ の germ を考える．明らかに $\varinjlim_{P \in U} \mathcal{A}(U) = \varinjlim_{P \in U} A \cong A$．よって $\mathcal{A}$ の germ は A の元と同一視出来る．すると，$\mathcal{A}^+(U)$ の元 s は，以下の条件を満たすものである．

$$^\forall P \in U, \quad P \in {}^\exists V \subseteq U, \quad ^\exists a \in \mathcal{F}(V), \quad ^\forall Q \in V, \quad s(Q) = a_Q = a.$$

これは $\mathcal{A}^+(U)$ の元 s が locally constant な写像であることを言っている．locally constant であれば連続であることは自明 ($\mathcal{A}^+(U) \supseteq \hat{\mathcal{A}}(U)$)．逆に連続な section は $s^{-1}(\{a\})$ が開集合になるので locally constant となる ($\mathcal{A}^+(U) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(U)$)．よって $\mathcal{A}^+ = \hat{\mathcal{A}}$.

Ex1.2　The Image/Kernel in a Sheaf/Stalk.

(a)　ASSERTION.

$\mathcal{F}'$ を $\mathcal{F}$ の subsheaf だとする．この時，以下の写像 $\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P} : \mathcal{F}'_P \to \mathcal{F}_P$ に依って $\mathcal{F}'_P$ は $\mathcal{F}_P$ の subgroup とみなせる．なお，germ は $\sim_P$ についての同値類（点ではなく集合）とみなす．$\sim_P$ は「点 P の開近傍において二つの section が一致する.」という同値関係である．

$$\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P}(s_P) = \left\{ \langle U, \sigma \rangle \;\middle|\; \begin{array}{c} P \in U, \sigma \in \mathcal{F}(U), \\ P \in {}^\exists V \subseteq U, \ \langle V, \sigma \rangle \in s_P. \end{array} \right\} \Big/ \sim_P$$

$\langle U, \sigma \rangle$ は本文 p.62 の記号である．以下，$\iota_{\mathcal{F}'_P}^{\mathcal{F}_P}$ は適宜 ι と略す．$s_P = t_P$ であるとき $\iota(s_P) = \iota(t_P)$ であることは定義の "$\langle V, \sigma \rangle \in s_P$" の部分から明らか．この写像が単射であることは以下のように示される．まず互いに異なる $s_P, t_P \in \mathcal{F}'_P$ をとる．すると $\langle U, \sigma \rangle \in s_P \setminus t_P$ が取れる．明らかに $\langle U, \sigma \rangle \in \iota(s_P)$．この $\langle U, \sigma \rangle$ について，開集合 U をより小さい U' に取り替えても $\langle U, \sigma \rangle \in s_P \setminus t_P$ となる．これは s_P, t_P が $\sim_P$ についての同値類だからである．したがって $\langle *, \sigma \rangle$ は $\iota(t_P)$ に属さない．以上から $\iota(s_P) \neq \iota(t_P)$.

$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を morphisms of sheaves とする．以下の例では subsheaf の stalk $(\ker \phi)_P$ と $\ker \phi_P \subset \mathcal{F}_P$ が一致しない．まず $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ をどちらも実直線 $\mathbb{R}$ 上の連続な関数がなす層（変数は x）とし，$\phi(f) = f - x$ とする．この ϕ で ramp function $\mathit{ramp}(x) = [x \geq 0]x$ を写したものは $\phi(\mathit{ramp})(x) = [x < 0](-x)$ となる．これは明らかに $x = 1$ の近傍 $(0, 2)$ で 0 になるから，$\langle (0, 2), \mathit{ramp} \rangle \in \ker \phi_P$．また，近傍を $(-2, 2)$ としても，$\langle (0, 2), \mathit{ramp} \rangle \sim_P \langle (-2, 2), \mathit{ramp} \rangle \in \ker \phi_P$．しかし，$\mathit{ramp}|_{(-2,2)} \neq 0$ だから $\mathit{ramp} \notin (\ker \phi)((-2, 2))$ となる．なので $(\ker \phi)_P$ に $\langle (-2, 2), \mathit{ramp} \rangle$ は入っていない．よって $(\ker \phi)_P$ と $\ker \phi_P$ は上で定義した ι を介さなければ一致しない．しかし，この二つを $\mathcal{F}_P$ の subgroup とみなせば，一致していると言うことも出来る．Hartshrone はこの意味で $(\ker \phi)_P = \ker \phi_P$ と主張している．

(b) Preparing.

Ati-Mac Ex2.19 から，加群の direct limit は exact functor であるこれの証明は `https://math.stackexchange.com/questions/121122` などにある．このことを sheaf の exact sequence に用いたいが，使えることは自明ではない．実際， $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$ が exact であっても，加群の列 $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_U} \mathcal{H}(U)$ が完全であるとは限らないからである．

点 P を任意の点とし，$\ker \psi_P \subseteq \operatorname{im} \phi_P$ を示す．まず，$\ker \psi_P$ から germ s_P をとる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_P \arrow[r, "\phi_P"] & \mathcal{G}_P \arrow[r, "\psi_P"] & \mathcal{H}_P \\
& s_P \arrow[r, mapsto, "\psi_P"'] & 0_P
\end{tikzcd}$$

すると点 P の開近傍 U と，section $\sigma \in \ker \psi_U = (\ker \psi)(U)$ が取れて，$\sigma_P = s_P$ となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_P \arrow[r, "\phi_P"] & \mathcal{G}_P \arrow[r, "\psi_P"] & \mathcal{H}_P \\
& s_P \arrow[r, mapsto] & 0_P \\
& \sigma \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & 0 \arrow[u, mapsto] \\
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\phi_U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[r, "\psi_U"'] & \mathcal{H}(U)
\end{tikzcd}$$

仮定より，$\sigma \in (\ker \psi)(U) = (\operatorname{im} \psi)(U)$．なので，

$$(\operatorname{im}^{pre} \psi)_P = (\operatorname{im} \phi)_P \ni \sigma_P = s_P \in \ker \phi_P.$$

よって以下が得られる．

$$P \in {}^\exists V \subseteq U, \quad \sigma|_V \in (\operatorname{im}^{pre} \psi)(V) = \operatorname{im} \psi_V.$$

以上より，$\sigma_P = s_P$ かつ $\operatorname{im} \psi_V \ni \sigma|_V \in \ker \psi_V$．あとは $\phi_V(\tau) = \sigma|_V$ となる $\tau \in \mathcal{F}(V)$ をとり，図式の可換性を用いれば良い．

(c) Prooves.

(a) ${}^\forall P \in X, \quad (\ker \phi)_P = \ker \phi_P, (\operatorname{im} \phi)_P = \operatorname{im} \phi_P$.
(b) ϕ :: inj/surj $\iff$ ${}^\forall P \in X, \quad \phi_P$ :: inj/surj.
(c) $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ :: exact $\iff$ ${}^\forall P \in X, \quad \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P \to \mathcal{H}_P$ :: exact

■**Proof of Half of (c).**　以下が成り立つ．

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} :: \text{exact} \implies {}^\forall P \in X, \quad \mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{H}_P :: \text{exact}.$$

ただし $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ は位相空間 X 上の sheaf である．この命題は (c) の半分である．

■**Proof of (a).**　$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ に対し，$0 \to \ker \phi \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$ は exact．このことから $0 \to (\ker \phi)_P \xrightarrow{i_P} \mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P$ は exact．よって $\operatorname{im} i_P = \ker \phi_P$ が得られる．明らかに i_P は injective だから，$(\ker \phi)_P \cong \operatorname{im} i_P = \ker \phi_P$ となる．また，$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \to \operatorname{im} \phi \to 0$ が exact であることから $(\operatorname{im} \phi)_P \cong \operatorname{im} \phi_P$ も得られる．

■Proof of Remained Part of (c). 任意の点 $P \in X$ について，$\mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{H}_P$ が exact であったとする．そこで任意の開集合 $U \subset X$ と，任意の section $s \in \mathcal{F}(U)$ を取る．以下のように $\operatorname{im}\phi \subseteq \ker\phi$ が示される．

$$
\begin{aligned}
& s \in (\operatorname{im}\phi)(U) \\
\Longrightarrow\ & {}^{\forall}P \in U, \quad s_P \in (\operatorname{im}\phi)_P = \operatorname{im}\phi_P \\
\Longleftrightarrow\ & {}^{\forall}P \in U, \quad s_P \in \ker\phi_P \\
\Longleftrightarrow\ & {}^{\forall}P \in U, \quad P \in {}^{\exists}V_P \subseteq U, \quad s|_{V_P} \in (\ker\phi)(V_P) \\
\Longrightarrow\ & s \in (\ker\phi)(U)
\end{aligned}
$$

最後の行で Gluability Axiom を用いた．この証明で ker と im を交換すれば $\operatorname{im}\phi \supseteq \ker\phi$ も示され，よって $\operatorname{im}\phi = \ker\psi$ が得られる．

■Proof of (b). $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ と $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ に (c) を用いれば良い．

Ex1.3 Surjectivity of Morphism is (Not) Local Property.

(a) Paraphrase of Surjectivity.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} : X \to A$, $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ について ϕ :: surj が以下の命題と同値であることを示す．

$$
(*) \quad {}^{\forall}U :: \text{open in } X, \quad {}^{\forall}s \in \mathcal{G}(U), \quad \bigcup {}^{\exists}U_i = U, \quad {}^{\exists}t_i \in \mathcal{F}(U_i), \quad {}^{\forall}i, \quad \phi(t_i) = s|_{U_i}.
$$

ϕ :: surj ならば covering $\{U_i\}$ として U をとり，$\phi(t) = s$ となる t を t_i とすれば良い．

逆を示す．Ex1.2b より，任意の $P \in U$ について ϕ_P :: surj であることを示せば良い．仮定より $P \in V \subseteq U$ となる V（$(*)$ 中の U_i）が存在し，$\phi_P(t_P) = s|_V = s_P$ を満たす $t_P \in \mathcal{F}(V) \subseteq \mathcal{F}_P$ が存在する．よって ϕ_P :: surj.

(b) Give an Counterexample.

Ex1.4 Induced Injective Sheaf Morphism.

(a) Injective Presheaf Morphism Induces Injective Sheaf Morphism.

以下は可換図式である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^+ \arrow[r, dashed, "\phi^+"] & \mathcal{G}^+ \\
\mathcal{F} \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r, "\phi"'] & \mathcal{G} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

これを stalk をとる関手 $\lim_{\to_{P \in U}}$ で写すと，Prop-Def1.2 の直後に言及されている $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_P^+$ から，以下が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_P^+ \arrow[r, "\phi_P^+"] & \mathcal{G}_P^+ \\
\mathcal{F}_P \arrow[u, equal] \arrow[ur] \arrow[r, "\phi_P"'] & \mathcal{G}_P \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}
$$

この可換図式から $\phi_P = \phi_P^+$．よって Ex1.2b から ϕ :: inj $\iff$ ϕ^+ :: inj.

(b) Natural Induced Map $\operatorname{im}\phi \to \mathcal{G}$ is Injective.

埋め込み写像 $\operatorname{im}^{pre}\phi \hookrightarrow \mathcal{G}$ は injective なので，ここから誘導される $\operatorname{im}\phi \to \mathcal{G}$ も injective.

Ex1.5 For Morphism of Shaves, iso=inj+surj.

$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を考える．ϕ が iso であることと，任意の点 P で ϕ_P が iso であることは同値．また，ϕ が inj+surj であることと，任意の点 P で ϕ_P が inj+surj であることは同値である．これらはそれぞれ Prop1.1 と Ex1.2 から理解る．よって ϕ_P について iso=inj+surj を確かめれば必要十分.

■ϕ_P :: iso $\implies$ ϕ_P :: inj+surj. ϕ_P :: iso ならば，

$$^{\forall}x_1, x_2 \in \mathcal{F}_P,\quad \phi_P(x_1) = \phi_P(x_2) \implies \phi_P^{-1} \circ \phi_P(x_1) = x_1 = x_2 = \phi_P^{-1} \circ \phi_P(x_2)$$

すなわち ϕ_P :: inj．同時に

$$^{\forall}y \in \mathcal{G}_P,\quad \phi_P\bigl(\phi_P^{-1}(y)\bigr) = y$$

すなわち ϕ_P :: surj.

■ϕ_P :: iso $\impliedby$ ϕ_P :: inj+surj. まず ϕ_P :: surj から以下が成り立つ.

$$^{\forall}y \in \mathcal{G}_P,\quad ^{\exists}x \in \mathcal{F}_P,\quad \phi_P(x) = y.$$

この命題を満たす $x \in \mathcal{F}_P$ は ϕ_P :: inj からただひとつである.

$$^{\forall}y \in \mathcal{G}_P,\quad ^{\exists_1}x \in \mathcal{F}_P,\quad \phi_P(x) = y.$$

なので $\phi_P^{-1}(y) = x$ と定めればこれは写像になる．なお，ϕ_P でなく ϕ で議論をすると，構成した ϕ の naturality を示す必要がある.

Ex1.6 Short Exact Sequence of Sheaves.

(a) Natural Map $q : \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ Has $\operatorname{im} q = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ and $\ker q = \mathcal{F}'$.

quotient sheaf の定義 (p.65) より，任意の点 P について $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$ [†1]．よって q から誘導される q_P は $\mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$ の自然な写像である．$\operatorname{im} q_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P, \ker q_P = \mathcal{F}'$ となるから，Ex1.2a より主張が得られる.

(b) If $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \to 0$ is Exact, ...

仮定より，$0 = \ker f, \operatorname{im} f = \ker g, \operatorname{im} g = \mathcal{F}''$．よって f は inj で，$f|^{\operatorname{im} f} : \mathcal{F}' \to \operatorname{im} f$ は surj+inj．なので Ex1.5 よりこれは iso であり，$\mathcal{F}'$ は $\operatorname{im} f \subset \mathcal{F}$ と同型である．続けて $g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$ から誘導される $g_P : \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}''_P$ を考える．定義より $\mathcal{F}_P, \mathcal{F}''_P$ は abelian group（abelian group の圏での colimit）で，g_P はその morphism．だから abelian group の準同型定理からの帰結として $\mathcal{F}_P/\ker g_P = (\mathcal{F}/\ker g)_P \cong \mathcal{F}''_P$ が得られる．Prop1.1 より $\mathcal{F}'' \cong \mathcal{F}/\ker g = \mathcal{F}/\operatorname{im} f \cong \mathcal{F}/\mathcal{F}'$.

[†1] これは sheafification functor $sh_X : \mathbf{PSh}(X, \mathfrak{C}) \to \mathbf{Sh}(X, \mathfrak{C})$ が forgetful functor の left adjoint functor であること，及び left adjoint functor は colimit を保つことからも得られる.

Ex1.7 $\operatorname{im}\phi \cong \mathcal{F}/\ker\phi$, and $\operatorname{coker}\phi \cong \mathcal{G}/\operatorname{im}\phi$.

$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ について考える．$\operatorname{im}\phi \cong \mathcal{F}/\ker\phi$ は以下の完全列に Ex1.6b を用いて得られる．

$$0 \to \ker\phi \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \operatorname{im}\phi \to 0.$$

ただし i は埋め込み写像である．$\operatorname{coker}\phi \cong \mathcal{G}/\operatorname{im}\phi$ は同様に以下の完全列から得られる．

$$0 \to \operatorname{im}\phi \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{q} \operatorname{coker}\phi \to 0.$$

ただし q は $q^{pre} : \mathcal{G} \to \operatorname{coker}\phi = \mathcal{G}/\operatorname{im}\phi$ から誘導される写像．これが完全列であることは次のように示される．まず Ex1.6a を用いて stalk の完全列を得る．

$$0 \to \operatorname{im}\phi_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{q_P} \operatorname{coker}\phi_P = \mathcal{G}_P/\operatorname{im}\phi_P \to 0.$$

Ex1.2a,c を用いて元の列が完全であることが示される．

Ex1.8 ${}^{\forall}U \subset X,\ \ \Gamma(U,-)$ :: left exact functor

以下を $X \to A$ の sheaves がなす完全列とする．

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}''.$$

完全列なので $0 = \ker f, \operatorname{im} f = \ker g$．$\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}(U)$ で定義される functor $\Gamma(U,-)$ により，この完全列は以下の列になる．

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{F}''(U).$$

これが完全列であることは $0 = \ker f_U, \operatorname{im} f_U = \ker g_U$ と同値．

まず $\ker f$ を考えると，定義より $0 = (\ker f)(U) = \ker f_U$．よって f_U :: inj．また，$\Gamma(U,-)$ は functor だから

$$0 = \Gamma(U, g\circ f) = \Gamma(U,g)\circ\Gamma(U,f) = 0.$$

すなわち $g_U \circ f_U = 0$，$\operatorname{im} f_U \subseteq \ker g_U$．

残るは逆の包含関係である．まず $s \in \ker g_U \subseteq \mathcal{F}(U)$ を取る．Ex1.2a より，任意の $P \in U$ について $\operatorname{im} f_P = \ker g_P$．なので任意の点 P について $s_P \in \operatorname{im} f_P = \ker g_P$ であり，$f_P(t_P) = s_P$ となる $t_P \in \mathcal{F}'_P$ が存在する．そこで s_P, t_P の代表元 $\langle V_P, s|_{V_P}\rangle, \langle V_P, t^P|_{V_P}\rangle$ をとると $f_{V_P}(t^P|_{V_P}) = s|_{V_P}$ となる．同様に別の点 $Q \in U, t_Q = \langle V_Q, t^Q|_{V_Q}\rangle$ をとると，$W_{PQ} := V_P \cap V_Q$ について

$$f_{W_{PQ}}(t^P|_{W_{PQ}}) = s|_{W_{PQ}} = f_{W_{PQ}}(t^Q|_{W_{PQ}}).$$

$0 = (\ker f)(W_{PQ}) = \ker f_{W_PQ}$ より $f_{W_{PQ}}$ は inj．したがって $t^P|_{W_{PQ}} = t^Q|_{W_{PQ}}$ が得られる．($P \in$) W_{PQ} は U を被覆するから，Gluability Axiom より，$t|_{W_{PQ}} = t^P|_{W_{PQ}} = t^Q|_{W_{PQ}}$ なる $t \in \mathcal{F}'(U)$ が存在する．morphism と restriction の naturality により，

$$f_U(t)|_{W_{PQ}} = f_{W_PQ}(t|_{W_{PQ}}) = f_{W_{PQ}}(t^P|_{W_{PQ}}) = s|_{W_{PQ}}$$

となるから，Identity Axiom より $f_U(t) = s$．以上より $\operatorname{im} f_U \supseteq \ker g_U$．

Ex1.9 Direct Sum.

sheaves $\mathcal{F}, \mathcal{G} : X \to \mathfrak{C}$ について，$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ を以下で定める．

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} : U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U).$$

ただし U :: open in X．これが presheaf であることは自明なので，sheaf であることを示す．以下，U :: open in X とその開被覆 $\{U_i\}$ を固定する．

■$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ Satisfies Identity Axiom.　$s \oplus t \in \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ が $(s \oplus t)|_{U_i} = 0 \oplus 0 = 0$ を満たすとする．この仮定を論理式で書下すと，

$${}^{\forall} P \in U_i, \quad (s \oplus t)(P) = s(P) \oplus t(P) = 0 \oplus 0.$$

abelian group の coproduct は product と同型だから，これは以下のように書き換えられる．

$${}^{\forall} P \in U_i, \quad s(P) = 0 \wedge t(P) = 0.$$

これは $s|_{U_i} = t|_{U_i} = 0$ と同値．なので $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ は sheaf であることから $s = t = 0$．すなわち $s \oplus t = 0$.

■$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ Satisfies Gluability Axiom.　$s_i \oplus t_i \in \mathcal{F}(U_i) \oplus \mathcal{G}(U_i)$ が存在し，以下を満たすとする．

$${}^{\forall} i, j, \quad (s_i \oplus t_i)|_{U_i \cap U_j} = (s_j \oplus t_j)|_{U_i \cap U_j}.$$

前段落と同様に書き換えて，以下が得られる．

$${}^{\forall} i, j, \quad s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \wedge t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j}.$$

$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ は sheaf であることから，以下を満たす $s \in \mathcal{F}(U_i), t \in \mathcal{G}(U_i)$ が存在する．

$${}^{\forall} i, \quad s|_{U_i} = s_i \wedge t|_{U_i} = t_i.$$

この s, t について $(s \oplus t)|_{U_i} = (s|_{U_i}) \oplus (t|_{U_i}) = s_i \oplus t_i$.

■$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ is Coproduct in $\mathbf{Sh}(X)$.　以下の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \arrow[dd, dashed, "{}^{\exists}1\,{[f,g]}"] & \\
\mathcal{F} \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "{}^{\forall} f"'] & & \mathcal{G} \arrow[ul, "j"'] \arrow[dl, "{}^{\forall} g"] \\
 & {}^{\forall}\mathcal{Z} &
\end{tikzcd}$$

ただし Z, f, g は任意で，i, j はそれぞれ $s \mapsto s \oplus 0, t \mapsto 0 \oplus t$ とする．すると $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ から $\mathcal{Z}$ へ至る二つのパスをたどることで，この図式を可換にする $[f, g]$ は以下のものしか無い事が理解る．

$$[f, g] : s \oplus t \mapsto f(s) + g(t).$$

f, g は morphism of abelian group で $f(s), g(t)$ は element of abelian group．だから，例えば $\mathcal{F} \to \mathcal{Z}$ の二つのパスは次の計算の通り可換になる．

$$[f, g] \circ i : s \mapsto s \oplus 0 \mapsto f(s) + g(0) = f(s) \mapsfrom s : f$$

よって $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ は coproduct.

Ex1.10　Direct Limit.

Ex1.8 の functor $\Gamma(-,-)$，sheafification functor sh_X と abelian category の direct limit $\lim_{\to i}$ を用いて，$\lim_{\to i}\mathcal{F}_i$ を以下で定める．

$$\Gamma(-,\lim_{\to i}\mathcal{F}_i) = sh_X \lim_{\to i}\Gamma(-,\mathcal{F}_i).$$

ただし $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ は direct system である．これが $\mathbf{Sh}(X)$ の direct limit であることを示す．

まず，$\mathcal{L} : U \mapsto \lim_{\to i}\mathcal{F}_i(U)$ とおく．これは明らかに $\mathbf{PSh}(X)$ における direct limit で[†2]，$\mathcal{L}^+ = \lim_{\to i}\mathcal{F}_i$ を満たす．よって sheafification functor sh_X が direct limit を保つことを見れば良い．次の可換図式は $\mathcal{L}$ の UMP を表す．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \arrow[drr, dashed, "\bar{f}_i"] & & \\
& \mathcal{F}_i \arrow[ul] \arrow[r, "f_i"'] & \mathcal{G}
\end{tikzcd}$$

ただし $\mathcal{G}, f_i$ は任意．sheafification の UMP を $\bar{f}_i : \mathcal{L} \to \mathcal{G}$ に用いて，次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \arrow[rrr, "\theta"] \arrow[drr, dashed, "\bar{f}_i"] & & & \mathcal{L}^+ \arrow[dll] \arrow[dl, dashed, "\bar{\bar{f}}_i"] \\
& \mathcal{F}_i \arrow[ul] \arrow[r, "f_i"'] & \mathcal{G} &
\end{tikzcd}$$

よって $f_i : \mathcal{F}_i \to \mathcal{G}$ に対して一意に $\bar{\bar{f}}_i : \mathcal{L}^+ \to \mathcal{G}$ が存在する．これで $\mathcal{L}^+ = \lim_{\to i}\mathcal{F}_i$ の UMP が示せた．$\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_j$ との可換性は morphism を結合すれば容易に分かる．

(i)　Another Proof.

sheafification functor $sh_X : \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ が Forgetful Functor $F : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PSh}(X)$ の left adjoint functor であることを用いる．これは R.Vakil "Foundations of Algebraic Geometry" Part I, 2.4.L などにある事実である．direct limit が colimit であることと，"Left Adjoint Preserves Colimits" より，

$$sh_X \lim_{\to i}\mathcal{F}_i \cong \lim_{\to i} sh_X\mathcal{F}_i \cong \lim_{\to i}\mathcal{F}_i.$$

Ex1.11　Pre-Direct Limit on Noetherian Top.Sp. is Already a Sheaf.

sheaves $\{\mathcal{F}^i\}_{i\in I}$ with morphisms $f^{ij} : \mathcal{F}^i \to \mathcal{F}^j$ :: direct system とし，$\mathbf{PSh}(X)$ における direct limit を $\mathcal{L}$ で書く．X :: noetherian topological space であるとき，$\mathcal{L}$ が予め sheaf であることを示す．以下，U :: open in X と開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を任意にとり，固定する．

X :: noetherian より，X :: quasi-compact．なので集合 $\{U_\lambda\}$ から有限被覆 $\{U_j\}_{j\in J}$ が出来る．

Ex1.12　Inverse Limit.

sheaves $\{\mathcal{F}^i\}$ with morphisms $f^{ij} : \mathcal{F}^i \to \mathcal{F}^j$ :: inverse system とし，$\mathbf{PSh}(X)$ における inverse limit $U \mapsto \lim_{i\leftarrow}\mathcal{F}^i(U)$ を $\mathcal{L}$ で書く．このとき $\mathcal{L}$ は $\mathbf{Sh}(X)$ においても inverse limit であることを示す．

[†2] $\mathbf{PSh}(X)$ が direct limit を持つことは abelian category $\mathfrak{C}$ が direct limit を持つことによる．

sheafification functor を $Sh : \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$, forgetful functor を $Fgt : \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PSh}(X)$ で書く．Fgt は Sh の right adjoint functor($Sh \dashv Fgt$.) なので，$\lim_{i\leftarrow}$ と可換[†3]．inverse limit は limit なので以下が得られる．

$$\lim_{i\leftarrow} Fgt\mathcal{F}^i \cong Fgt \lim_{i\leftarrow} \mathcal{F}^i \cong \lim_{i\leftarrow} \mathcal{F}^i.$$

最後の $\cong$ は F が forgetful functor，すなわち object を変化させないことによる．したがって $\mathbf{PSh}(X)$ における inverse limit は $\mathbf{Sh}(X)$ における inverse limit と一致する．まったく同様の議論で $\mathbf{PSh}(X)$ における limit は $\mathbf{Sh}(X)$ における limit に一致する．

(i) Proof of $Sh \dashv Fgt$.

adjoint の定義にはいくつか同値なものがあるが，ここでは Steve Awodey "Category Theory" p.214 にある Cor9.5 を用いる．

F は object を変えない埋め込み写像なので，直ちに全単射 $\tilde{\eta}_{(-)} : (-) \leftrightarrow F(-) : \tilde{\epsilon}_{(-)}$ がとれる．これに sheafification の UMP を用いると以下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} Sh \arrow[r, "\tilde{\eta}"] & FgtSh \\ \mathrm{id}_{\mathbf{PSh}(X)} \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "\eta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} ShFgt \arrow[r, dashed, "\epsilon"] & \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \\ Fgt \arrow[u, "\theta_{Fgt}"] \arrow[ur, "\tilde{\epsilon}"'] & \end{tikzcd}$$

こうして unit $\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{PSh}(X)} \to FgtSh$ と counit $\epsilon : ShFgt \to \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$ が得られる．さらに，この二つの可換図式を組み合わせて，以下の可換図式が作れる．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id}_{\mathbf{PSh}(X)} \arrow[r, "\theta"] & Sh \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Fgt \arrow[rr, leftrightarrow, "\tilde{\epsilon}"] \arrow[dr, "\theta_{Fgt}"'] & & \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \\ & ShFgt \arrow[ur, "\epsilon"'] & \end{tikzcd}$$

さて，$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X), \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X)$ と $g : Sh\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を任意に取る．この時の可換図式は以下の (1) である．

$$(1)\ \begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\theta_{\mathcal{F}}"] & & Sh\mathcal{F} \arrow[d, "g"] \\ Fgt\mathcal{G} \arrow[rr, leftrightarrow, "\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}"] \arrow[dr, "\theta_{Fgt\mathcal{G}}"'] & & \mathcal{G} \\ & ShFgt\mathcal{G} \arrow[ur, "\epsilon_{\mathcal{G}}"'] & \end{tikzcd} \quad (2)\ \begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\theta_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\bar{g}"] \arrow[ddr, squiggly, bend right] & & Sh\mathcal{F} \arrow[d, "g"] \\ Fgt\mathcal{G} \arrow[rr, leftrightarrow, "\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}"] \arrow[dr, "\theta_{Fgt\mathcal{G}}"'] & & \mathcal{G} \\ & ShFgt\mathcal{G} \arrow[ur, "\epsilon_{\mathcal{G}}"'] & \end{tikzcd} \quad (3)\ \begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\theta_{\mathcal{F}}"] \arrow[d, "\bar{g}"] & & Sh\mathcal{F} \arrow[d, "g"] \arrow[ddl, dashed, bend left, "Sh(\bar{g})"] \\ Fgt\mathcal{G} \arrow[rr, leftrightarrow, "\tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}"] \arrow[dr, "\theta_{Fgt\mathcal{G}}"'] & & \mathcal{G} \\ & ShFgt\mathcal{G} \arrow[ur, "\epsilon_{\mathcal{G}}"'] & \end{tikzcd}$$

コの字型の部分をたどることで，(2) の $\bar{g} : \mathcal{F} \to Fgt\mathcal{G}$ が得られる．Ex1.4 における ϕ^+ の作り方をなぞると，$Sh(\bar{g})$ は (2) の波矢印 $\theta_{Fgt\mathcal{G}} \circ \bar{g}$ から sheafification の UMP で得られるものである．sheafification をしたあとの可換図式が (3) である．UMP から，$\theta_{Fgt\mathcal{G}}$ および $\theta_{Fgt\mathcal{G}} \circ \bar{g}$ と共に可換な三角形をなす射は $Sh(\bar{g})$ に等しい．よって $Sh(\bar{g}) = \theta_{Fgt\mathcal{G}} \circ \tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}^{-1} \circ g$．こうして $g = \epsilon_{\mathcal{G}} \circ Sh(\bar{g})$ が得られる．

[†3] "Right Adjoints Preserves Limits."

Ex1.13　Espace Étalé of a Presheaf.

(i)　Definition of Espace Étalé.

$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X)$ に対し，espace étalé of $\mathcal{F}$ Spé($\mathcal{F}$) を以下のように定義する．まず，集合として $\mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) = \bigsqcup_{P \in X} \mathcal{F}_P$ とおく．projection map π とその “section” $\bar{s}$ を以下で定める．まず，π は以下のもの．

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) & \to & X \\ & s \in \mathcal{F}_P & \mapsto & P. \end{array}$$

任意の U :: open in X と $s \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\bar{s} : U \to \mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$ を以下で定める．

$$\begin{array}{rccc} \bar{s} : & U & \to & \mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) \\ & P & \mapsto & s_P. \end{array}$$

この時，$\pi \circ \bar{s} = \mathrm{id}_U$．すなわち，$\bar{s}$ は U 上で π の “section”である．そして Spé($\mathcal{F}$) に以下のような位相を入れる: 任意の U と任意の s について $\bar{s}$ が連続であるような最強の位相．これはつまり $\{\bar{s}\}$ についての終位相である．

(ii)　More References for Espace Étalé.

Wikipedia の Sheaf のページ `https://www.wikiwand.com/en/Sheaf_(mathematics)#/The_.C3.A9tal.C3.A9_space_of_a_sheaf` （2017 年 3 月 30 日参照）に概略が書かれている．詳細についての資料は以下の通り．まず，一般の espace étalé(étalé space) の categorical な定義が `https://ncatlab.org/nlab/show/etale+space` にある．Étalé space の圏と sheaf の圏が圏同値であることの証明は Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk “Sheaves in Geometry and Logic” の §5-6, pp.83-90 にある．（この命題はこの本の p.90 Cor3 である．）同様のことが “Etale cohomology course notes” `http://math.colorado.edu/~jonathan.wise/teaching/math8174-spring-2014/notes.pdf` の 7 Etale spaces and sheaves (p.24) にあるが，この note はミスが多いしわかりにくいのでおすすめしない．

(iii)　Proposition and Proof.

X 上の étalé space をとって，その連続な section 全体をとる関手を $Sec : \mathbf{Et}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ とする．逆に presheaf から étalé space を作る関手を $\acute{E}t : \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Et}(X)$ とする．sheafification functor が $Sh = Sec\acute{E}t$ で定義できることを示す．

■Plan of Proof.　二つの写像を定める．

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)} & \to & Sec\acute{E}t \\ & s \in \mathcal{F}(U) & \mapsto & [\bar{s} : P \mapsto s_P] \\ \\ \beta : & \acute{E}tSec & \to & \mathrm{id}_{\mathbf{Et}(X)} \\ & P \times [\sigma : U \to \mathrm{id}_{\mathbf{Et}(X)}] & \mapsto & \sigma(P) \end{array}$$

ただし U は任意の X の開集合で，P は U の任意の点である．この α, β が natural map かつ isomorphism であることが証明できるので，圏同値 $\mathbf{Et}(X) \simeq \mathbf{Sh}(X)$ が示せる．しかし我々の目的は sheafification の UMP であり，これには α についてさえ示せれば十分である．この証明は Saunders

Mac Lane, Ieke Moerdijk “Sheaves in Geometry and Logic” pp.85-86 にある[†4].

■α :: natural.　$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{PSh}(X)$ とする．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{F}}} & Sec\acute{E}t\mathcal{F} \\ \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \downarrow{\scriptstyle Sec\acute{E}t\phi} \\ \mathcal{G} & \xrightarrow[\alpha_{\mathcal{G}}]{} & Sec\acute{E}t\mathcal{G} \end{array}$$

$Sec\acute{E}t\phi$ は次のような，section を section へ写す写像である．

$$Sec\acute{E}t\phi : [P \mapsto *_P] \mapsto [P \mapsto *_P \mapsto \phi_P(*_P)].$$

したがって $\mathcal{F} \to Sec\acute{E}t\mathcal{G}$ のどちらのパスでも $s \mapsto [P \mapsto \phi_P(s_P) = (\phi(s))_P]$ と section を section へ写す写像になる．ただし P は X の点である．これで α :: natural が示せた．

■α :: iso.　まず α :: inj は Indentity Axiom から容易に示されるので略す．α :: surj の証明は長い．まず U :: open in $X, \sigma \in (Sec\acute{E}t\mathcal{F})(U)$ を任意に取る．すると $Sec\acute{E}t$ の定義から，以下が成り立つ．

$${}^{\forall}P \in U,\quad P \in {}^{\exists}V \subseteq U :: \text{open},\quad {}^{\exists}s \in \mathcal{F}(V),\quad \sigma(P) = s_P.$$

$\acute{E}t\mathcal{F}$ の位相は像位相であり，かつ $\alpha(s) = \bar{s}$ は明らかに単射．なので $\alpha(s)(V) = \bar{s}(V)$ は open である[†5]．しかも σ :: continuous だから，$\sigma(S) \subseteq \alpha(\sigma)(V)$ なる $P \in S \subseteq \sigma^{-1}(\alpha(\sigma)(V))$ :: open が存在する[†6]．直ちに以下が成り立つ．

$${}^{\forall}Q \in S,\quad {}^{\exists}Q' \in V,\quad \mathcal{F}_Q \ni \sigma(Q) = s_{Q'}.$$

明らかに $Q = Q'$，すなわち $\sigma|_S = \alpha(s)|_S$ が成り立つ．点 P を様々に取ることで，S で U を被覆できることがわかる．$s\&S$ と $t\&T$ の二組について

$$\alpha(s)|_{S\cap T} = \sigma|_{S\cap T} = \alpha(t)|_{S\cap T}.$$

したがって α :: inj から $s|_{S\cap T} = t|_{S\cap T}$．こうして Gluability Axiom から，$\alpha(s)|_S = \alpha(\int)|_S = \sigma|_S$ なる $\int \in \mathcal{F}(U)$ の存在が示せる．最後に Identity Axiom を用いて $\alpha(\int) = s$．これで α :: iso が示せた．

■UMP of Sheafification.　$Sh = Sec\acute{E}t$ とすると，これが sheafification functor となる．その UMP を見よう．$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X), \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X)$ とする．$\alpha : \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \to Sh$ の naturality から，次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \longrightarrow & Sh\mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G} & \xrightarrow{\sim} & Sh\mathcal{G} \end{array}$$

$\alpha_{\mathcal{G}} : \mathcal{G} \to Sh\mathcal{G}$ :: iso だから，$\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ から $Sh\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が得られた．次に，以下で示す可換図式 (1) が与えられたとしよう．全体を Sh で写し，$Sh|_{\mathbf{Sh}(X)} \cong \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$ を用いて可換図式 (2) が得られる．

$$(1)\quad \begin{tikzcd} Sh\mathcal{F} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F} \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{F}}"] \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd} \qquad (2)\quad \begin{tikzcd} Sh\mathcal{F} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{G} \\ Sh\mathcal{F} \arrow[u, equal] \arrow[ur, "Sh\phi"'] & \end{tikzcd}$$

[†4] この本では α は η と書かれている．また，この本でいう cross-section は $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$ なる section のこと．$\dot{s}$ は $\bar{s}$ のことである．その他，germ の記法などがだいぶ違うので注意．

[†5] $\bar{s}$ の像位相において，開集合 V の像が開集合であることは $\bar{s}^{-1} \circ \bar{s}(V)$ が開集合であることと同値だが，単射性から，この集合は V に等しい．

[†6] これは ϵ-δ 論法に似ている．$\sigma^{-1}(\alpha(\sigma)(V))$ が開集合であるから，任意の点，特に P はこの集合の内点である．このことから開集合 S が存在することは自明である．

したがって $f = g$．以上で existence & uniqueness が示せた．

Ex1.14 Support.

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X), U$ :: open in $X, s \in \mathcal{F}(U)$ をとる．$\operatorname{Supp} s = \{P \in U \mid s_P \neq 0\}$ としたとき，これが closed in U であることを示そう．そのために $T = (\operatorname{Supp} s)^c = \{P \in U \mid s_P = 0\}$ として，これが open であることを示す．

$P \in T$ を任意に取る．すると s_P の代表元として $\langle V_P, s \rangle$ $(P \in V_P \subset U)$ が取れる．今 $s_P = 0$ なので，$s|_{V_P} = 0$．したがって $V_P \subset T$ となる．任意の $P \in T$ についてこのように V_P が取れるので，T は open covering $\{V_P\}_{P \in T}$ を持つ．よって $T = \bigcup_{P \in T} V_P$ :: open in U.

$\operatorname{Supp} \mathcal{F}$ は $\{P \in X \mid \mathcal{F}_P \neq 0\}$ と定義される．これは closed とは限らない．実際，$\mathcal{F}$ の元を，なめらかな実関数に $bump(x) = [x > 0]e^{-1/x}$ [†7] をかけたものとすると，$\operatorname{Supp} bump(x) = [0, \infty), \operatorname{Supp} \mathcal{F} = (0, \infty)$ となる．後者は明らかに閉集合でない．

Ex1.15 Sheaf $\mathscr{H}\!om$.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X), U$ :: open in X とし，$\mathcal{F}$ の U への restrction(p.65) を $\mathcal{F}|_U$ で書く．$U \mapsto \operatorname{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ で定まる presehaf $\mathscr{H}\!om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ が sheaf であることを示そう．以下では U とその開被覆 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を任意にとって固定する．

■$\mathscr{H}\!om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ :: Abelian Group. $s, t \in \mathscr{H}\!om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ について，$s + t$ を以下で定める．

$$(s + t)(\sigma) = s(\sigma) + t(\sigma) \text{ where } V :: \text{open in } U,\ \sigma \in (\mathcal{F}|_U)(V).$$

単位元は $\operatorname{im} \mathcal{F}|_U$ の単位元を返す定値写像である．単位元を以下では 0 と書く．

■$\mathscr{H}\!om(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ :: Presheaf. U, V :: open かつ $V \subseteq U$ とする．$\overline{\operatorname{res}}_U^V : \mathscr{H}\!om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) \to \mathscr{H}\!om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(V)$ を以下のように定める．

$$\{\mathcal{F}|_U \ni \sigma|_U \mapsto \tau|_U \in \mathcal{G}|_U\} \mapsto \{\mathcal{F}|_V \ni \sigma|_V \mapsto \tau|_V \in \mathcal{G}|_V\}$$

これは $\operatorname{res}(\mathcal{F})_U^V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ と $\operatorname{res}(\mathcal{G})_U^V : \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(V)$ の自然性から誘導される．

■Identity Axiom. $s \in \mathscr{H}\!om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \operatorname{Hom}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ をとる．この s が任意の λ について $s|_{U_\lambda} = 0$ を満たすとする．さて，V :: open in U と $\sigma \in \mathcal{F}(V)$ を任意に取る．$\{V_\lambda\}$ を $V_\lambda = V \cap U_\lambda$ で定めると，これは V の開被覆になる．仮定より，$s|_{V_\lambda}(\sigma) = s(\sigma)|_{V_\lambda} = 0$．よって $s(\sigma) \in \mathcal{G}(V)$ に Indentity Axiom を用いることで $s(\sigma)|_V = 0$ が示される．V, σ は任意なので，結局以下が得られた．

$$^\forall V :: \text{open in } U,\ \ ^\forall \sigma \in \mathcal{F}(V),\ \ s(\sigma) = 0.$$

すなわち，s は定値写像 0 である．以上で Indentity Axiom の成立が示された．

■Gluability Axiom. sections $s_\lambda \in \mathscr{H}\!om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U_\lambda)$ をとる．これが任意の $\lambda, \mu \in \Lambda$ について $s_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = s_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ を満たすとしよう．この仮定は以下のように書ける．

$$^\forall \lambda, \mu \in \Lambda,\ \ ^\forall \sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda \cap U_\mu),\ \ s_\lambda(\sigma) = s_\mu(\sigma).$$

[†7] $[True] = 1, [False] = 0$ とした．Iverson の記法である．$bump(x)$ がなめらかであることは次の PDF を参照せよ: `https://andromeda.rutgers.edu/~loftin/difffal03/bump.pdf`.

そこで λ をひとつ取って固定し，$\sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda)$ とする．さらに $\{V_\mu\}_{\mu\in\Lambda}$ を $V_\mu = U_\lambda \cap U_\mu$ で定める．この $\{V_\mu\}$ は U_λ の開被覆である．すると最初の仮定と $V_\mu \cap V_\nu = U_\lambda \cap (U_\mu \cap U_\nu) \subseteq U_\mu \cap U_\nu$ から以下が成り立つ．

$$^\forall \mu, \nu \in \Lambda, \quad s_\mu(\sigma)|_{V_\mu \cap V_\nu} = s_\nu(\sigma)|_{V_\mu \cap V_\nu}.$$

sections $s_\mu(\sigma) \in \mathcal{G}(U_\lambda)$ に対して Gluability Axiom を用いて，$s(\sigma)|_{V_\mu} = s_\mu(\sigma)|_{V_\mu}$ なる $s(\sigma)$ の存在が言える．Indentity Axiom から $s(\sigma)|_{U_\lambda} = s_\mu(\sigma)|_{U_\lambda}$．こうして，以下を満たす $s \in \mathscr{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U)$ の像が各点 $\sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda)$ ごとに定義できる．

$$^\forall \lambda \in \Lambda, \quad ^\forall \sigma \in \mathcal{F}(U_\lambda), \quad s(\sigma)|_{U_\lambda} = s_\lambda(\sigma)|_{U_\lambda}.$$

簡潔にかけば，$s|_{U_\lambda} = s_\lambda|_{U_\lambda}$．よって Gluability Axiom の成立が示せた．

Ex1.16 Flasque Sheaves.

U, V :: open in X，$V \subseteq U$ とする．restriction map res_U^V が surjective であるような $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$ を flasque[†8] sheaf と呼ぶ．

(a) Constant Sheaf on Irreducible Top.Sp is Flasque.

X :: irreducible，A :: abelian group, U, V :: open in X，$V \subseteq U$ とする．$\mathcal{A}$ を X から A への constant sheaf とすると，定義より $\mathcal{A}(V) = \{s : V \to A \mid s :: \text{continuous.}\ \}$．そこで $s \in \mathcal{A}(V)$ を一つとって固定する．s :: continuous という条件は次と同値

$$^\forall a \subseteq A, \quad s^{-1}(a) :: \text{open in } V.$$

X :: irreducible であるとき，$s \in \mathcal{F}(V)$ がどのようなものか考えよう．

■Case: $\#A = 1$.　まず $\#A = 1$，すなわち A が自明な abelian group $\{e\}$ であったとする．この時，明らかに $\mathcal{F}(V)$ は定値写像 $x \mapsto e$ のみからなる．$\mathcal{F}(U)$ も同じ定値写像からなるので，この時 constant sheaf は flasque.

■Case $\#A > 1$.　$a \neq b$ が成り立つような $a, b \in A$ を任意に取る．すると以下が成り立つ．

$$s^{-1}(\{a\}) \cap s^{-1}(\{b\}) = s^{-1}(\{a\} \cap \{b\}) = s^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

したがって X :: irreducible から $s^{-1}(\{a\})$ or $s^{-1}(\{b\}) = \emptyset$．仮に任意の $a \in A$ について $s^{-1}(\{a\}) = \emptyset$ であったとすると s が写像にならない．したがって $s^{-1}(\{a_s\}) \neq \emptyset$ となる $a_s \in A$ がただひとつ存在する．s は写像なので $s^{-1}(A) = V$ が成り立ち，したがって s はこのような a_s への定値写像である事が分かる．すると容易に s は U へ拡張できるので，この時も constant sheaf は flasque.

(b) If $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ is Exact and $\mathcal{F}'$ is Flasque, then...

$0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ が exact かつ $\mathcal{F}'$ が flasque であったとする．この時，任意の open set U について $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U) \to 0$ は exact であることを示す．

写像に $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \to 0$ と名前をつけ，U :: open in X と $s'' \in \mathcal{F}''(U)$ をとる．Ex1.8 より，$0 \to \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{F}''(U)$ は exact．なのであとは g_U が surjective であることを示せば良い．

[†8] フランス語．フラスコのこと．軟弱という意味．発音は `https://ja.forvo.com/word/flasque/`．

元の exact sequence から g :: surj が言える．Ex1.3 より，以下が成り立つ．

$$(*) \quad \bigcup {}^{\exists}U_i = U, \quad {}^{\exists}t_i \in \mathcal{F}(U_i), \quad {}^{\forall}i, \quad g(t_i) = s''|_{U_i}.$$

任意に i, j をとり，以下の可換図式で diagram chase をする．ただし $U = U_i \cap U_j$ とした．

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[rr] & & \mathcal{F}'(U) \arrow[rr, tail, "f"] \arrow[dr] \arrow[ddl] & & \mathcal{F}(U) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] \arrow[ddl] & & \mathcal{F}''(U) \arrow[dr] \arrow[ddl] & \\
 & & 0 \arrow[rr] & & \mathcal{F}'(U_j) \arrow[rr, tail, "f"] \arrow[ddl] & & \mathcal{F}(U_j) \arrow[rr, "g"] \arrow[ddl] & & \mathcal{F}''(U_j) \arrow[ddl] \\
0 \arrow[rr] & & \mathcal{F}'(U_i) \arrow[rr, tail, "f"] \arrow[dr] & & \mathcal{F}(U_i) \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & \mathcal{F}''(U_i) \arrow[dr] & & \\
 & 0 \arrow[rr] & & \mathcal{F}'(U_{ij}) \arrow[rr, tail, "f"] & & \mathcal{F}(U_{ij}) \arrow[rr, "g"] & & \mathcal{F}''(U_{ij}) &
\end{tikzcd}$$

$s'' \in \mathcal{F}''(U)$ と，$(*)$ から存在が示される $t_i \in \mathcal{F}(U_i), t_j \in \mathcal{F}(U_j)$ から diagram chasing を始める．

(1) naturality から $g_{U_{ij}}(t_i|_{U_{ij}}) = s''|_{U_{ij}} = g(t_j|_{U_{ij}})$．

(2) よって列の完全性から $t_i - t_j \in \ker g_{U_{ij}} = \operatorname{im} f_{U_{ij}}$．

(3) したがって $f_{U_{ij}}(u'_{ij}) = t_i - t_j$ なる $u'_{ij} \in \mathcal{F}'(U_{ij})$ が存在する．

(4) $\mathrm{res}_U^{U_{ij}}$ :: surj から $s'_{ij}|_{U_{ij}} = u'_{ij}$ なる $s'_{ij} \in \mathcal{F}'(U)$ が存在する．

(5) $s_{ij} = f_U(s'_{ij})|_{U_i} + t_j \in \mathcal{F}(U_i)$ とおく．（足すのは t_j であることに注意.）

以上から，$g_U(s) = s''$ なる $s \in \mathcal{F}(U)$ の存在が示せた．

(i) Another Proof

次の PDF の Lemma2.12(p.10) がこの演習問題と同じ命題である: `http://www.math.mcgill.ca/goren/SeminarOnCohomology/Sheaf_Cohomology.pdf`．次の PDF の Lemma0.3(p.12) も同じ: `http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4215/v15/notes1.pdf`．どちらの証明でも Zorn's Lemma が用いられている．

(c) If $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ is Exact and $\mathcal{F}', \mathcal{F}$ is Flasque, then $\mathcal{F}''$ also.

U, V :: open in X, $V \subseteq U$ とする．(b) より，以下の完全列が得られる．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'(U) \arrow[r, tail, "f"] \arrow[d] & \mathcal{F}(U) \arrow[r, two heads, "g"] \arrow[d] & \mathcal{F}''(U) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}'(V) \arrow[r, tail, "f"] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, two heads, "g"] & \mathcal{F}''(V) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

証明は diagram chasing による．

(1) $s'' \in \mathcal{F}''(V)$ を任意に取る．

(2) $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}''(V)$ :: surj から，$g(\tilde{s})|_V = s''$ なる $\tilde{s} \in \mathcal{F}(U)$ が取れる．

(3) naturality から $g(\tilde{s}|_V) = s'' = g(\tilde{s})|_V$．

$s := g(\tilde{s}) \in \mathcal{F}''(U)$ とおけば $s|_V = s''$．

(d) If $f : X \to Y$ is Conti. and $\mathcal{F}$ is Flasque, then $f_*\mathcal{F}$ is Flasque.

U, V :: open in Y，$V \subseteq U$ とする．このとき $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$．なので $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ :: surj より $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(V))$ :: surj．$f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$ だから，$f_*\mathcal{F}$ :: flasque.

(e) Discontinuous Sections.

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$ とする．これに対し，discontinuous sections of $\mathcal{F}$ と呼ばれる sheaf $\mathcal{G}$ が以下のように作れる．π は Ex1.13 の $s_P \mapsto P$ なる写像である．

$$\mathcal{G} : U \mapsto \left\{ s : U \to \coprod_{P \in U} \mathcal{F}_P \;\middle|\; \pi \circ s = \mathrm{id}_U \right\}$$

$\mathcal{G}$ が flasque sheaf であることと，$\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ の自然な単射が存在することを示す．

■$\mathcal{G}$ :: sheaf. $\mathcal{G}$ :: presheaf は明らか．sheaf であることを示すため，U :: open in X とその open cover $\{U_i\}_{i \in I}$ をとり，固定する．任意の $i \in I$ について $s|_{U_i} = 0$ であるような $s \in \mathcal{G}(U)$ が存在したとする．$\bigcup U_i = U$ より，任意の点 $P \in U$ に対して $s(P) = 0$．これは Identity Axiom の成立を意味する．同様に "$^\forall i, j,\ \ ^\forall P \in U_i \cap U_j,$ " を "$^\forall P \in U,$ " に書き換えるだけで，Gluability Axiom の成立が証明できる．

■$\mathcal{G}$ :: flasque. $V \subset U$ とする．$s \in \mathcal{G}(V)$ をとる．これは例えば以下のように拡張できる．

$$\bar{s}(P) = \begin{cases} s(P) & (P \in V) \\ 0 & (P \in U \setminus V) \end{cases}$$

■α in Ex1.13 is injective. Ex1.13 の $\alpha : s \mapsto [P \mapsto s_P]$ が injective であることは以下のように示される．ある $s, t \in \mathcal{F}(U)$ について $\alpha(s) = \alpha(t)$ が成立するとしよう．すると十分小さい open set $(P \in) V_P (\subset U)$ が存在して，$s|_{V_P} = t|_{V_P}$ となる．明らかに $\{V_P\}_{P \in U}$ は U の open cover なので，$s - t \in \mathcal{G}$ に Identity Axiom を用いて $s = t$ が得られる．

Ex1.17 Skyscraper Sheaves.

X :: topological space, $P \in X$, A :: abelian group とする．sheaf $i_P(A)$ を以下で定める．

$$i_P(A)(U) = \begin{cases} A & (P \in U) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

点 P を含む最小の閉集合を $\{P\}^-$ と書く．

(a) $(i_P(A))_Q = A$ is A if $Q \in \{P\}^-$, otherwise 0 .

U を Q を含む極小の開集合とした時，$(i_P(A))_Q$ は集合として $\mathcal{F}(U)$ と一致する．したがって以下が成立する．

$$\begin{aligned} & (i_P(A))_Q = A \\ \iff & {}^\forall U \subset X,\ \ Q \in U \implies P \in U \\ \iff & {}^\forall U \subset X,\ \ P \in U^c \implies Q \in U^c. \end{aligned}$$

最後の行は対偶として得られた．一方，点 P を含む最小の閉集合 $\{P\}^-$ は以下を満たす唯一の集合として特徴づけられる．

$$^\forall U \subset X,\ \ P \in U^c \implies \{P\}^- \subseteq U^c$$

よって $(i_P(A))_Q = A \iff Q \in \{P\}^-$．他の場合は明らかに $(i_P(A))_Q = 0$ となる．また，この特徴付けの対偶から $U \cap \{P\}^- \neq \emptyset$ ならば $P \in U$．$P \in U$ ならば $P \in U \cap \{P\}^-$ なので逆も成立する．

(b) $i_P(A)$ can be described as direct image.

abelian group A に伴う $\{P\}^-$ 上の constant sheaf を $\mathcal{A}$ とする．すると $i_P(\mathcal{A})$ は埋め込み写像 $i : \{P\}^- \hookrightarrow X$ の direct image $i_*(\mathcal{A})$ に等しい．実際，開集合 U について $i_*(\mathcal{A})(U) = \mathcal{A}(i^{-1}(U)) = \mathcal{A}(U \cap \{P\}^-)$ であるから以下のようになる．

$$i_*(\mathcal{A})(U) \cong \begin{cases} A & (U \cap \{P\}^- \neq \emptyset) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

(a) で見たとおり $U \cap \{P\}^- \neq \emptyset$ と $P \in U$ は同値．よって $i_*(\mathcal{A}) = i_P(A)$．特に，$\{P\}^-$ はその最小性から irreducible なので，Ex1.16a,d と合わせれば $i_P(A)$ は flasque であることが分かる．

Ex1.18 Adjoint Property of f^{-1}.

X, Y を位相空間とし，$\mathcal{F}, \mathcal{G}$ をそれぞれ X, Y 上の sheaf とする．$f : X \to Y$ を連続写像に対し，$f^p\mathcal{G}$ を $U \mapsto \varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$ で定まる presheaf，$f^{-1}\mathcal{G}$ を $f^p\mathcal{G}$ の sheafification，$(f_*\mathcal{F})(U') = \mathcal{F}(f^{-1}(U'))$ とおく．つまり，

$$f^p : \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{PSh}(X), f^{-1} : \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Sh}(X), f_* : \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{PSh}(Y)$$

であり，f_* は sheaf を sheaf に写す functor である．natural transformation

$$\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(Y)} \to f_* f^{-1}, \epsilon : f^{-1} f_* \to \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$$

を定義し，sheaf $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ について $\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, f_*\mathcal{F})$ を示す．

■Construction of $\tilde{\eta}, \eta$.

■$\tilde{\eta}, \eta$ is Natural.

■Construction of $\tilde{\epsilon}, \epsilon$.

■$\tilde{\epsilon}, \epsilon$ is Natural.

■Construction of $\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}, \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$.　$\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \leftrightarrow \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) : \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ を構築する．$\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$ から始める．

(1)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "\alpha"] & f_*\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

(2)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} & \\
f^{-1}\mathcal{G} \arrow[ur, squiggly, "\bar{\alpha}"] \arrow[rr, "f^{-1}\alpha"] & & f^{-1}f_*\mathcal{F} \arrow[ul, "\epsilon_{\mathcal{F}}"'] \\
\mathcal{G} \arrow[rr, "\alpha"] & & f_*\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

(3)

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F} & \\
f^{-1}\mathcal{G} \arrow[ur, squiggly, "\bar{\alpha}"] \arrow[rr, "f^{-1}\alpha"] & & f^{-1}f_*\mathcal{F} \arrow[ul, "\epsilon_{\mathcal{F}}"'] \\
\mathcal{G} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{G}}"'] & & f_*\mathcal{F} \arrow[d, "\eta_{f_*\mathcal{F}}"] \\
f_*f^{-1}\mathcal{G} \arrow[rr, "f_*f^{-1}\alpha"] \arrow[dr, "f_*\bar{\alpha}"'] & & f_*f^{-1}f_*\mathcal{F} \arrow[dl, "f_*\epsilon_{\mathcal{F}}"] \\
 & f_*\mathcal{F} &
\end{tikzcd}$$

図式 (1) を f^{-1} で写したものに，$\mathcal{F}$ と $\epsilon_{\mathcal{F}}$ を追加すると，射の結合として $\bar{\alpha}$ が得られる．これが図式 (2) であり，

$$\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\alpha) = \bar{\alpha} = \epsilon_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}\alpha \in \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$$

と定義する．さらに (2) の上の三角形を f_* で写したものが図式 (3) の下の三角形である．η の自然性から，η を追加した図式 (3) も可換である．すると $\bar{\alpha} \in \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ から

$$\Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\bar{\alpha}) = f_*\bar{\alpha} \circ \eta_{\mathcal{G}} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$$

が得られる．

■$\Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \circ \Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})}$.　今，$\alpha$ から $\Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\bar{\alpha}) = \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\alpha))$ が得られた．この二つが等しいことを示そう．これは $\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ が単射であることを意味する．そのためには，直前の図式 (3) における以下の path が $\mathrm{id}_{f_*\mathcal{F}}$ であることを示せば良い．

$$\begin{tikzcd}
 & f_*\mathcal{F} \arrow[d, "\eta_{f_*\mathcal{F}}"] \\
 & f_*f^{-1}f_*\mathcal{F} \arrow[dl, "f_*\epsilon_{\mathcal{F}}"] \\
f_*\mathcal{F} &
\end{tikzcd}$$

$f_*f^{-1}f_*\mathcal{F}$ は $f_*f^p f_*\mathcal{F}$ の sheafification である．任意の U :: open in X について，$(f^p f_*\mathcal{F})(U)$ は

$$\mathscr{D}_0 = \{\mathcal{F}(V) \mid V \supseteq f(f^{-1}(U))\}$$

の direct limit である．写像についての基本的な事実から，$U \supseteq f(f^{-1}(U))$ となる．つまり $\mathcal{F}(U) \in \mathscr{D}_0$. 図式 $\eta_{\mathcal{F}} : \mathscr{D}_0 \to (f^p f_*\mathcal{F})(U)$ を f_* で写せば，$(f_*f^p f_*\mathcal{F})(U)$ が

$$\mathscr{D}_1 = \{\mathcal{F}(f^{-1}(V)) \mid V \supseteq f(f^{-1}(U))\}$$

の direct limit であることがわかる．さらに $V \supseteq f(f^{-1}(U))$ であるとき $f^{-1}(V) \supseteq f^{-1}(f(f^{-1}(U))) = f^{-1}(U)$ だから，$\mathscr{D}_1$ の任意の元から $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{F}(U)$ へ restriction map が伸びる．以上から，以

下の図式が書ける．

$$\begin{tikzcd}
(f_* f^p f_* \mathcal{F})(U) \arrow[rr, "(\tilde{\epsilon}_{f_*\mathcal{F}})_U"] & & \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \arrow[d, equal, "\mathrm{res}^{f^{-1}(U)}_{f^{-1}(U)}=\mathrm{id}"] \\
\mathscr{D}_1 \arrow[u] \arrow[urr, "\mathrm{res}"] & \ni & f_*\mathcal{F}(U) \arrow[ull, "(f_*\tilde{\eta}_{\mathcal{F}})_U"']
\end{tikzcd}$$

$\mathscr{D}_1$ から伸びる 2 本の射と整合的に $(\epsilon_{f_*\mathcal{F}})_U$ が生えている．これはつまり上の図式で $\mathscr{D}_1$ を頂点に持つ三角形が可換である，ということである．$f_*\mathcal{F}(U) \in \mathscr{D}_1$ に注目すれば，これは直ちに $\tilde{\epsilon}_{f_*\mathcal{F}} \circ f_*\tilde{\eta}_{\mathcal{F}} = \mathrm{id}$ を意味する．ここまでは $f_*f^pf_*\mathcal{F}$ についての議論だったが，これを sheafification すれば最初の目的の等式が得られる．

■$\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \circ \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F})}$． 今度は $\beta \in \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F})$ をとる．$\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \circ \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\beta) = \beta$ を示そう．前段落及び前前段落と同様に図式を書く．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{G} \arrow[dl, "\eta_{\mathcal{G}}"'] \arrow[dr, "\bar{\beta}"] & \\
f_*f^{-1}\mathcal{G} \arrow[rr, "f_*\beta"] & & f_*\mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}\mathcal{G} \arrow[rr, "\beta"] & & \mathcal{F} \\
f^{-1}f_*f^{-1}\mathcal{G} \arrow[u, "\epsilon_{f^{-1}\mathcal{G}}"] \arrow[rr, "f^{-1}f_*\beta"] & & f^{-1}f_*\mathcal{F} \arrow[u, "\epsilon_{\mathcal{F}}"'] \\
 & f^{-1}\mathcal{G} \arrow[ul, "f^{-1}\eta_{\mathcal{G}}"] \arrow[ur, "f^{-1}\bar{\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

よって以下が $\mathrm{id}_{f^{-1}\mathcal{G}}$ であることを示せば良いと分かる．

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}\mathcal{G} & \\
f^{-1}f_*f^{-1}\mathcal{G} \arrow[u, "\epsilon_{f^{-1}\mathcal{G}}"'] & \\
 & f^{-1}\mathcal{G} \arrow[ul, "f^{-1}\eta_{\mathcal{G}}"]
\end{tikzcd}$$

そこで最初に次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
(f^p\mathcal{G})(U) \arrow[r, "(f^p\tilde{\eta}_{\mathcal{G}})_U"] & (f^pf_*f^p\mathcal{G})(U) \arrow[r, dashed, "(\tilde{\epsilon}_{f^p\mathcal{G}})_U"] & (f^p\mathcal{G})(U) \\
\mathscr{D} \arrow[u] & \mathscr{D}' \arrow[u] & \mathscr{D} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

ただし $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ は以下の direct system であり，$U \subseteq X$ 及び $V, W \subseteq Y$ はすべて開集合である．

$$\mathscr{D} = \{\mathcal{G}(V) \mid f(U) \subseteq V\}, \mathscr{D}' = \{\mathcal{G}(W) \mid f(U) \subseteq V, f(f^{-1}(V)) \subseteq W\}.$$

V, W は open set である．$\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ は，実は等しい．なぜなら，初歩的な写像についての結果から，

$$[f(U) = f(f^{-1}(f(U))) \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq W] \wedge [f(f^{-1}(V)) \subseteq V]$$

が成り立つからである．前半は $\mathscr{D} \supseteq \mathscr{D}'$ を意味し，後半は $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{D}'$ を意味する．よって $(f^p\mathcal{G})(U)$ が持つ UMP から，左の $(f^p\mathcal{G})(U)$ から右の $(f^p\mathcal{G})(U)$ への射は id である．ここから当初の予定の等式を得るためには，前段落の場合と違って注意が必要である．なぜなら，前段落では $f_*f^{-1}f_*\mathcal{F}$ は $f_*f^pf_*\mathcal{F}$ を一回 sheafification したものだが，$f^{-1}f_*f^{-1}\mathcal{G} = Shf^pf_*Shf^p\mathcal{G}$ は 2 回 sheafification を行っているからである．だから，議論は次のように行う．次の可換図式から始める．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G} \arrow[r, "\eta_{\mathcal{G}}"] \arrow[dr, "\tilde{\eta}_{\mathcal{G}}"'] & f_*f^{-1}\mathcal{G} \\
& f_*f^p\mathcal{G} \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

この可換図式を f^p で写し，$\tilde{\epsilon}_{f^{-1}\mathcal{G}}, \tilde{\epsilon}_{f^p\mathcal{G}}$ を追加して，もう一度 sheafification すると，以下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}\mathcal{G} \arrow[r, "f^{-1}\eta_{\mathcal{G}}"] & f^{-1}f_*f^{-1}\mathcal{G} \arrow[dr, "\epsilon_{f^{-1}\mathcal{G}}"] & \\
f^p\mathcal{G} \arrow[u, "\theta"] \arrow[r, "f^p\eta_{\mathcal{G}}"] \arrow[dr, "f^p\tilde{\eta}_{\mathcal{G}}"'] & f^pf_*f^{-1}\mathcal{G} \arrow[u] \arrow[r, "\tilde{\epsilon}_{f^{-1}\mathcal{G}}"'] & f^{-1}\mathcal{G} \\
& f^pf_*f^p\mathcal{G} \arrow[u] \arrow[r, "\tilde{\epsilon}_{f^p\mathcal{G}}"'] & f^p\mathcal{G} \arrow[u, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

この可換図式の上の辺は，一番下の辺（今 id であることを示した）を元に，$f^p\mathcal{G}$ の sheafification の UMP を使って作り出したものに等しい．id から出来た射なので，一番上の辺は id．（Sh と f_* が交換できることについては書いていない．）

■$\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}, \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ is Natural.

Ex1.19　Extending a Sheaf by Zero.

X :: topological space, Z :: closed subset in X，$U = X \setminus Z$ とする．さらに $i : Z \hookrightarrow X, j : U \hookrightarrow X$ を埋め込み写像とする．

(a)　$i_*\mathcal{F}$: Extending $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(Z)$ by Zero Outside Z.

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(Z)$ とする．i は埋め込み写像なので，開集合 U について $(i_*\mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U \cap Z)$．
点 P の開近傍を考える．

■Case: $P \in Z^c$.　Z^c は開集合だから，$P \in Z^c$ ならば，開近傍 V が存在して $P \in V \subseteq Z^c$ となる．このとき，$\mathcal{F}(Z \cap V) = \mathcal{F}(\emptyset) = 0$ となる．しかも $\mathcal{F}(Z \cap V) = 0$ は十分小さいすべての U について成り立つ．したがって P の任意の開近傍 V について次の図式が可換．

$$\begin{tikzcd}
& (i_*\mathcal{F})_P & \\
\mathcal{F}(Z \cap V) \arrow[ur] \arrow[rr, "i_*\,\mathrm{res}^{\emptyset}_{V}"'] & & 0 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

よって $\mathcal{F}(Z \cap V) \to (i_*\mathcal{F})_P$ はゼロ写像しかなく，$(i_*\mathcal{F})_P$ の UMP から $(i_*\mathcal{F})_P = 0$.

■Case: $P \in Z$.　逆に $P \in Z$ ならば，点 P の X における開近傍 U から作られる $Z \cap U$ は，常に空でない P の開近傍．いつでも埋め込み射 $\mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(Z \cap V)$ が存在するので，結局 $\mathcal{F}(V)$ $(P \in V)$ なる abelian group 全てから $(i_*\mathcal{F})_P$ に射がのびている．よって $(i_*\mathcal{F})_P = \mathcal{F}_P$.

■Conclusion.　まとめると，以下が成り立つ．

$$(i_*\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & (P \in Z) \\ 0 & (P \notin Z) \end{cases}$$

(b)　$j_!\mathcal{F}$: Extending $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(U)$ by Zero Outside U

$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(U)$ とし，$j_!\mathcal{F}$ を以下で定まる presheaf の sheafification とする．

$$(j_!\mathcal{F})^{pre}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & (V \subseteq U) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

sheafification で stalk は変わらないから，$(j_!\mathcal{F})_P = (j_!\mathcal{F})^{pre}_P$.
点 P の開近傍を考えよう．

■Case: $P \in U$.　U :: open なので，ある V :: open が存在して $P \in V \subseteq U$ となる．このような V について $(j_!\mathcal{F})^{pre}(V) = \mathcal{F}(V)$. U より小さい任意の開近傍 V については $(j_!\mathcal{F})^{pre}(V) = \mathcal{F}(V)$ となる上，U より大きい任意の開近傍 V から射 $\mathrm{res}^{U \cap V}_V : \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$ が生えている．よって $(j_!\mathcal{F})^{pre}_P = \mathcal{F}_P$.

■Case: $P \in U^c$.　このとき，どのように P の開近傍 V をとっても，$P \in V$ かつ $P \notin U$ なので $V \not\subseteq U$. したがって $(j_!\mathcal{F})^{pre}_P = 0$ となる．

■Conclusion.　まとめると，以下が成り立つ．

$$(j_!\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & (P \in U) \\ 0 & (P \notin U) \end{cases}$$

(c)　$0 \to j_!(\mathcal{F}|_U) \to \mathcal{F} \to i_*(\mathcal{F}|_Z) \to 0$ is Exact.

Ex1.2c を応用する．$P \in X$ を任意の点とする．$P \in U$ exor Z なので，それぞれの場合について考える．

■Case: $P \in Z$.　この時，$(j_!(\mathcal{F}|_U))_P = \mathcal{F}_P, (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P = 0$ となる．よって $0 \to (j_!(\mathcal{F}|_U))_P \to \mathcal{F}_P \to (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P \to 0$ は $0 \to \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P \to 0 \to 0$ に等しく，これは完全列．

■Case: $P \in U$.　この時，$(j_!(\mathcal{F}|_U))_P = 0, (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P = \mathcal{F}_P$ となる．よって $0 \to (j_!(\mathcal{F}|_U))_P \to \mathcal{F}_P \to (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P \to 0$ は $0 \to 0 \to \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P \to 0$ に等しく，これは完全列．

Ex1.20　Subsheaf with Supports.

Z :: closed in X, $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$ とする．$\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$ を以下で定める．

$$\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \{ s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \mid \mathrm{Supp}(s) \subseteq Z. \}.$$

“$\mathrm{Supp}(s) \subseteq Z$” は “$^\forall P \in Z^c,\ \ s(P) = 0$” と同値である．また，特に $\mathrm{Supp}(0) = \emptyset$ より，$0 \in \Gamma_Z(X, \mathcal{F})$.

(a) Presheaf $V \mapsto \Gamma_{V\cap Z}(V, \mathcal{F}|_V)$ is a Sheaf.

Presheaf $\mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F})$ を
$$\mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F}) : V \mapsto \Gamma_{V\cap Z}(V, \mathcal{F}|_V)$$
で定める．これが sheaf であることを示そう．開集合 V とその開被覆 $\{V_i\}_{i\in I}$ を任意にとる．

■Identity Axiom. $s \in \mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F})(V)$ をとる．任意の $i \in I$ について $s|_{V_i} = 0$ が成り立つとしよう．この時，$\mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F})$ の定義から，$s \in \mathcal{F}(V)$ と $\mathrm{Supp}(s|_V) \subseteq V \cap Z$ が成り立つ．$\mathcal{F}$ の indentity axiom をもちいて，$s|_V = 0$ が得られる．

■Gluability Axiom. $s_i \in \mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F})(V_i)$ をとる．任意の $i, j \in I$ について $s_i|_{V_i\cap V_j} = s_j|_{V_i\cap V_j}$ が成り立つとしよう．するとやはり $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ なので，$\mathcal{F}$ の gluability axiom から，$s|_{V_i} = s_i$ なる $s \in \mathcal{F}(V)$ が存在する．あとは $s \in \mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F})(V)$，すなわち $\mathrm{Supp}(s) \subseteq V \cap Z$ を示せば良い．これは
$$\mathrm{Supp}(s_i) = \mathrm{Supp}(s|_{V_i}) = \mathrm{Supp}(s) \cap V_i \subseteq V_i \cap Z$$
から $\mathrm{Supp}(s) = \bigcup(\mathrm{Supp}(s) \cap V_i) \subseteq \bigcup(V_i \cap Z) = V \cap Z$ と計算できる．

(b) For $U = X \setminus Z$，$0 \to \mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|_U)$ is Exact.

開集合 $U = X \setminus Z$ と $j : U \hookrightarrow X$ について，$0 \to \mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|_U)$ が exact であることを示す．さらに，$\mathcal{F}$ :: flasque ならば $0 \to \mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|_U) \to 0$ も exact であることを示す．

定義より，$\mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F}), j_*(\mathcal{F}|_U)$ は以下のような集合である．
$$\mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F}) = \{s \in \mathcal{F}(V) \mid {}^\forall Q \in U \cap V,\ \ s(Q) = 0.\},\ \ j_*(\mathcal{F}|_U) = \mathcal{F}(U \cap V).$$
そこで写像 $\zeta : \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|_U)$ を以下で定義する．
$$\zeta(s)(Q) = [Q \in U \cap V]s(Q) \text{ where } V :: \text{ open in } X, s \in \mathcal{F}(V), Q \in V.$$
ただし $[Q \in U \cap V]$ は Iverson の記法である．（ここは指示関数を用いて $\chi_{U\cap V}(Q)$ と書いても良い．）すると既に確認した $\mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F})$ の定義から，$\ker\zeta = \mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F})$．よって $0 \to \mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\zeta} j_*(\mathcal{F}|_U)$ は exact．

さらに $\mathcal{F}$ :: flasque だと仮定する．すると，$s \in \mathcal{F}(U\cap V)$ に対して $s'|_{U\cap V} = s$ なる $s' \in \mathcal{F}(V)$ が存在する．明らかに $\zeta(s') = s$ となるから，この時 ζ は全射．したがって $0 \to \mathscr{H}^0_Z(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|_U) \to 0$ も exact になる．

Ex1.21 Some Examples of Sheaves on Varieties.

k :: algebraically closed field, X :: variety over k とする．$\mathcal{O}_X$ を the sheaf of regular functons on X (Example 1.0.1) とする．

(a) The Sheaf of Ideals $\mathcal{I}_Y$.

Y :: closed in X とする．任意の U :: open in X について，$\mathcal{I}_Y(U)$ を以下で定める．
$$\mathcal{I}_Y : U \mapsto \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid {}^\forall P \in Y \cap U,\ \ f(P) = 0.\}.$$
$\mathcal{I}_Y(U)$ は $\mathcal{O}_X(U)$ のイデアルである．この時，$\mathcal{I}_Y(\subseteq \mathcal{O}_X)$ が sheaf であることを示す．

(b) If Y :: subvariety, then $\mathcal{O}_X \cong i_*(\mathcal{O}_Y)$.

(c)

(d)

(e)

Ex1.22 Glueing Sheaves.

X :: topological space, $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ :: open cover of X, $\mathcal{F}_i \in \mathbf{Sh}(U_i)$ とする．この $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ に付随して，同型写像 $\phi_{ij} : \mathcal{F}_i|_{U_i\cap U_j} \xrightarrow{\equiv} \mathcal{F}_j|_{U_i\cap U_j}$ が存在し，$\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ with $\{\phi_{ij}\}_{i,j\in I}$ が inverse system をなすとする．この時，inverse limit $\mathcal{F}$ の存在を示す．さらに，$\mathcal{F}|_{U_i} \equiv \mathcal{F}_i$ となることを示す．この命題は section でなく sheaf の Gluablity Axiom と言える．

Prop1.1 を用いて仮定を書き換える．$\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$ について，以下の同型がある．

$$^{\forall}i, j \in I,\ \ ^{\forall}P \in U_i \cap U_j,\ \ (\mathcal{F}_i)_P \cong (\mathcal{F}_j)_P.$$

この時，sheaf $\mathcal{F}$ が存在して，

$$^{\forall}i \in I,\ \ ^{\forall}P \in U_i,\ \ \mathcal{F}_P = (\mathcal{F}|_{U_i})_P \cong (\mathcal{F}_i)_P$$

となることを示す．Ex1.19b の結果が結論によく似ているので，これを参考にする．

$\mathcal{F}$ を以下の presheaf の sheafification と定義する．

$$\mathcal{F}^{pre}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_i(V) & (^{\exists}i \in I,\ \ V \subseteq U_i) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

もし $V \subseteq U_i$ なる i が複数存在した時には，どれを選んでも構わない．その時 $V \subset U_i \cap U_j$ なる $i, j \in I$ が存在し，i, j どちらを選んでも $\mathcal{F}^{pre}(V)$ が ϕ_{ij} を介して同型になるからである．そして Ex1.19b の証明から分かるように，$(\mathcal{F}|_{U_i})_P = (\mathrm{emb}_!^{U_i}\,\mathcal{F}_i)_P = (\mathcal{F}_i)_P$．ただし $\mathrm{emb}^{U_i} : U_i \hookrightarrow U$ は埋め込み写像である．