この note では Hartshorne "Algebraic Geometry" p.61 にある sheaf property (3) を Identity Axiom と呼び、同じく (4) を Gluability Axiom と呼ぶ. これらの名称は Vakil "Foundations of Algebraic Geometry" にあるものである.

#### Ex1.1 Constant Sheaf is Associated to Constant Presheaf.

A:: abelian group, X:: topological space とする. 任意の空でない開集合  $U\subseteq X$  について  $\mathcal{A}(U)=A$  とし, restriction map  $\rho_{UV}:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(V)$  は  $\mathrm{id}_A$  とする. この A を constant presheaf と呼ぶ.  $\mathcal{A}$  に対応する sheaf を  $\mathcal{A}^+$  としよう. また, 開集合  $U\subseteq X$  に対し,  $\hat{\mathcal{A}}=\{f:U\to A\mid f::$  continus.} とおく.  $\mathcal{A}^+=\hat{\mathcal{A}}$  を示そう.

 $\mathcal{A}$  の germ を考える. 明らかに  $\varinjlim_{P \in U} \mathcal{A}(U) = \varinjlim_{P \in U} A \cong A$ . よって  $\mathcal{A}$  の germ は A の元と同一 視出来る. すると,  $\mathcal{A}^+(U)$  の元 s は, 以下の条件を満たすものである.

$$\forall P \in U, \ P \in \exists V \subseteq U, \ \exists a \in \mathcal{F}(V), \ \forall Q \in V, \ s(Q) = a_Q = a.$$

これは  $\mathcal{A}^+(U)$  の元 s が locally constant な写像であることを言っている. locally constant であれば 連続であることは自明  $(\mathcal{A}^+(U) \supseteq \hat{\mathcal{A}}(U))$ . 逆に連続な section は  $s^{-1}(\{a\})$  が開集合になるので locally constant となる  $(\mathcal{A}^+(U) \subseteq \hat{\mathcal{A}}(U))$ . よって  $\mathcal{A}^+ = \hat{\mathcal{A}}$ .

# Ex1.2 The Image/Kernel in a Sheaf/Stalk.

## (a) ASSERTION.

F' を F の subsheaf だとする. この時、以下の写像  $\iota_{F_P'}^{F_P}: F_P' \to F_P$  に依って  $F_P'$  は  $F_P$  の subgroup とみなせる. なお、germ は  $\sim_P$  についての同値類(点ではなく集合)とみなす.  $\sim_P$  は「点 P の開近傍 において二つの section が一致する.」という同値関係である.

$$\iota_{\mathcal{F}_{P}^{r}}^{\mathcal{F}_{P}}(s_{P}) = \left\{ \langle U, \sigma \rangle \; \middle| \; \begin{array}{c} P \in U, \sigma \in \mathcal{F}(U), \\ P \in {}^{\exists}V \subseteq U, \; \langle V, \sigma \rangle \in s_{P}. \end{array} \right\} \middle/ \sim_{P}$$

 $\langle U,\sigma \rangle$  は本文 p.62 の記号である。以下, $\iota_{\mathcal{F}_P}^{F_P}$  は適宜  $\iota$  と略す。 $s_P=t_P$  であるとき  $\iota(s_P)=\iota(t_P)$  であることは定義の " $\langle V,\sigma \rangle \in s_P$ " の部分から明らか。この写像が単射であることは以下のように示される。まず互いに異なる  $s_P,t_P \in \mathcal{F}_P'$  をとる。すると  $\langle U,\sigma \rangle \in s_P \setminus t_P$  が取れる。明らかに  $\langle U,\sigma \rangle \in \iota(s_P)$ . この  $\langle U,\sigma \rangle$  について,開集合 U をより小さい U' に取り替えても  $\langle U,\sigma \rangle \in s_P \setminus t_P$  となる。これは  $s_P,t_P$  が  $\sim_P$  についての同値類だからである。したがって  $\langle *,\sigma \rangle$  は  $\iota(t_P)$  に属さない。以上から  $\iota(s_P) \neq \iota(t_P)$ .

 $\phi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$  を morphisms of sheaves とする. 以下の例では subsheaf の stalk  $(\ker \phi)_P$  と  $\ker \phi_P \subset \mathcal{F}_P$  が一致しない. まず  $\mathcal{F},\mathcal{G}$  をどちらも実直線  $\mathbb{R}$  上の連続な関数がなす層(変数は x)とし, $\phi(f)=f-x$  とする. この  $\phi$  で ramp function  $ramp(x)=[x\geq 0]x$  を写したものは  $\phi(ramp)(x)=[x< 0](-x)$  となる. これは明らかに x=1 の近傍 (0,2) で 0 になるから, $\langle (0,2), ramp \rangle \in \ker \phi_P$ . また,近傍 を (-2,2) としても, $\langle (0,2), ramp \rangle \sim_P \langle (-2,2), ramp \rangle \in \ker \phi_P$ . しかし, $ramp|_{(-2,2)} \neq 0$  だから  $ramp \notin (\ker \phi)((-2,2))$  となる.なので  $(\ker \phi)_P$  に  $\langle (-2,2), ramp \rangle$  は入っていない.よって  $(\ker \phi)_P$  と  $(\ker \phi)_P$  は上で定義した  $\iota$  を介さなければ一致しない.しかし,この二つを  $\mathcal{F}_P$  の subgroup とみなせば,一致していると言うことも出来る.Hartshrone はこの意味で  $(\ker \phi)_P = \ker \phi_P$  と主張している.

#### (b) Preparing.

Ati-Mac Ex2.19 から、加群の direct limit は exact functor であるこれの証明は https://math. stackexchange.com/questions/121122 などにある. このことを sheaf の exact sequence に用いたいが、使えることは自明ではない. 実際、 $\mathcal{F} \stackrel{\phi}{\longrightarrow} \mathcal{G} \stackrel{\psi}{\longrightarrow} \mathcal{H}$  が exact であっても、加群の列 $\mathcal{F}(U) \stackrel{\phi_U}{\longrightarrow} \mathcal{G}(U) \stackrel{\psi_U}{\longrightarrow} \mathcal{H}(U)$  が完全であるとは限らないからである.

点 P を任意の点とし、 $\ker \psi_P \subseteq \operatorname{im} \phi_P$  を示す。まず、 $\ker \psi_P$  から  $\operatorname{germ} s_P$  をとる.

$$\mathcal{F}_{P} \xrightarrow{\phi_{P}} \mathcal{G}_{P} \xrightarrow{\psi_{P}} \mathcal{H}_{P}$$

$$s_{P} \vdash_{\psi_{P}} b_{P}$$

すると点 P の開近傍 U と、section  $\sigma \in \ker \psi_U = (\ker \psi)(U)$  が取れて、 $\sigma_P = s_P$  となる.

$$\mathcal{F}_{P} \xrightarrow{\phi_{P}} \mathcal{G}_{P} \xrightarrow{\psi_{P}} \mathcal{H}_{P}$$

$$s_{P} \longmapsto 0_{P}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\sigma \longmapsto 0$$

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\phi_{U}} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\psi_{U}} \mathcal{H}(U)$$

仮定より,  $\sigma \in (\ker \psi)(U) = (\operatorname{im} \psi)(U)$ . なので,

$$(\operatorname{im}^{pre} \psi)_P = (\operatorname{im} \phi)_P \ni \sigma_P = s_P \in \ker \phi_P.$$

よって以下が得られる.

$$P \in {}^{\exists}V \subseteq U, \quad \sigma|_{V} \in (\operatorname{im}^{pre}\psi)(V) = \operatorname{im}\psi_{V}.$$

以上より、 $\sigma_P = s_P$  かつ  $\operatorname{im} \psi_V \ni \sigma|_V \in \ker \psi_V$ . あとは  $\phi_V(\tau) = \sigma|_V$  となる  $\tau \in \mathcal{F}(V)$  をとり、図式の可換性を用いれば良い.

#### (c) Prooves.

- (a)  $\forall P \in X$ ,  $(\ker \phi)_P = \ker \phi_P$ ,  $(\operatorname{im} \phi)_P = \operatorname{im} \phi_P$ .
- (b)  $\phi :: inj/surj \iff \forall P \in X, \ \phi_P :: inj/surj.$
- (c)  $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H}$  :: exact  $\iff {}^{\forall}P \in X, \ \mathcal{F}_P \to \mathcal{G}_P \to \mathcal{H}_P$  :: exact
- ■Proof of Half of (c). 以下が成り立つ.

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} :: \text{ exact } \Longrightarrow {}^{\forall} P \in X, \ \mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{H}_P :: \text{ exact.}$$

ただし  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\mathcal{H}$  は位相空間 X 上の sheaf である. この命題は (c) の半分である.

■Proof of (a).  $\phi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$  に対し、 $0 \to \ker \phi \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G}$  は exact. このことから  $0 \to (\ker \phi)_P \xrightarrow{i_P} \mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P$  は exact. よって  $\operatorname{im} i_P = \ker \phi_P$  が得られる.明らかに  $i_P$  は injective だから、 $(\ker \phi)_P \cong \operatorname{im} i_P = \ker \phi_P$  となる.また、 $\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \to \operatorname{im} \phi \to 0$  が exact であることから  $(\operatorname{im} \phi)_P \cong \operatorname{im} \phi_P$  も得られる.

■Proof of Remained Part of (c). 任意の点  $P \in X$  について,  $\mathcal{F}_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{\psi_P} \mathcal{H}_P$  が exact であった とする. そこで任意の開集合  $U \subset X$  と, 任意の section  $s \in \mathcal{F}(U)$  を取る. 以下のように  $\operatorname{im} \phi \subseteq \ker \phi$  が示される.

$$s \in (\operatorname{im} \phi)(U)$$

$$\Longrightarrow^{\forall} P \in U, \quad s_P \in (\operatorname{im} \phi)_P = \operatorname{im} \phi_P$$

$$\Longleftrightarrow^{\forall} P \in U, \quad s_P \in \ker \phi_P$$

$$\Longleftrightarrow^{\forall} P \in U, \quad P \in^{\exists} V_P \subseteq U, \quad s|_{V_P} \in (\ker \phi)(V_P)$$

$$\Longrightarrow s \in (\ker \phi)(U)$$

最後の行で Gluability Axiom を用いた. この証明で ker と im を交換すれば im  $\phi \supseteq \ker \phi$  も示され, よって im  $\phi = \ker \psi$  が得られる.

■Proof of (b).  $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$  と  $\mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$  に (c) を用いれば良い.

# Ex1.3 Surjectivity of Morphism is (Not) Local Property.

(a) Paraphrase of Surjectivity.

 $\mathcal{F}, \mathcal{G}: X \to A, \phi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$  について  $\phi::$  surj が以下の命題と同値であることを示す.

$$(*) \quad ^{\forall} U :: \text{ open in } X, \quad ^{\forall} s \in \mathcal{G}(U), \quad \bigcup ^{\exists} U_i = U, \quad ^{\exists} t_i \in \mathcal{F}(U_i), \quad ^{\forall} i, \quad \phi(t_i) = s|_{U_i}.$$

 $\phi$  :: surj ならば covering  $\{U_i\}$  として U をとり, $\phi(t)=s$  となる t を  $t_i$  とすれば良い.

逆を示す。Ex1.2b より、任意の  $P \in U$  について  $\phi_P$  :: surj であることを示せば良い。仮定より  $P \in V \subseteq U$  となる V ((\*) 中の  $U_i$ ) が存在し、 $\phi_P(t_P) = s|_V = s_P$  を満たす  $t_P \in \mathcal{F}(V) \subseteq \mathcal{F}_P$  が存在 する。よって  $\phi_P$  :: surj.

(b) Give an Counterexample.

# Ex1.4 Induced Injective Sheaf Morphism.

(a) Injective Presheaf Morphism Induces Injective Sheaf Morphism.

以下は可換図式である.

$$\mathcal{F}^{+} \xrightarrow{\phi^{+}} \mathcal{G}^{+}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad$$

これを stalk をとる関手  $\lim_{P \in U}$  で写すと、Prop-Def1.2 の直後に言及されている  $\mathcal{F}_P = \mathcal{F}_P^+$  から、以下が得られる.

この可換図式から  $\phi_P = \phi_P^+$ . よって Ex1.2b から  $\phi$  :: inj  $\iff \phi^+$  :: inj.

(b) Natural Induced Map  $\operatorname{im} \phi \to \mathcal{G}$  is Injective.

埋め込み写像  $\operatorname{im}^{pre} \phi \hookrightarrow \mathcal{G}$  は injective なので、ここから誘導される  $\operatorname{im} \phi \to \mathcal{G}$  も injective.

# Ex1.5 For Morphism of Shaves, iso=inj+surj.

 $\phi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$  を考える.  $\phi$  が iso であることと、任意の点 P で  $\phi_P$  が iso であることは同値.また、 $\phi$  が inj+surj であることと、任意の点 P で  $\phi_P$  が inj+surj であることは同値である.これらはそれぞれ Prop1.1 と Ex1.2 から理解る.よって  $\phi_P$  について iso=inj+surj を確かめれば必要十分.

 $\blacksquare \phi_P :: \mathsf{iso} \implies \phi_P :: \mathsf{inj+surj}. \quad \phi_P :: \mathsf{iso} \ \mathsf{tso} \$ 

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{F}_P, \ \phi_P(x_1) = \phi_P(x_2) \implies \phi_P^{-1} \circ \phi_P(x_1) = x_1 = x_2 = \phi_P^{-1} \circ \phi_P(x_2)$$

すなわち  $\phi_P$  :: inj. 同時に

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \ \phi_P(\phi_P^{-1}(y)) = y$$

すなわち  $φ_P$  :: surj.

 $\blacksquare \phi_P$  :: iso  $\iff \phi_P$  :: inj+surj. まず  $\phi_P$  :: surj から以下が成り立つ.

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \quad \exists x \in \mathcal{F}_P, \quad \phi_P(x) = y.$$

この命題を満たす  $x \in \mathcal{F}_P$  は  $\phi_P$  :: inj からただひとつである.

$$\forall y \in \mathcal{G}_P, \quad \exists_1 x \in \mathcal{F}_P, \quad \phi_P(x) = y.$$

なので  $\phi_P^{-1}(y)=x$  と定めればこれは写像になる. なお,  $\phi_P$  でなく  $\phi$  で議論をすると、構成した  $\phi$  の naturality を示す必要がある.

# Ex1.6 Short Exact Sequence of Sheaves.

(a) Natural Map  $q: \mathcal{F} \to \mathcal{F}/\mathcal{F}'$  Has  $\operatorname{im} q = \mathcal{F}/\mathcal{F}'$  and  $\ker q = \mathcal{F}'$ .

quotient sheaf の定義 (p.65) より,任意の点 P について  $(\mathcal{F}/\mathcal{F}')_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$  <sup>†1</sup>. よって q から誘導される  $q_P$  は  $\mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$  の自然な写像である. $\operatorname{im} q_P = \mathcal{F}_P/\mathcal{F}'_P$ ,  $\operatorname{ker} q_P = \mathcal{F}'$  となるから,Ex1.2a より主張が得られる.

(b) If  $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \to 0$  is Exact, ...

仮定より、 $0 = \ker f$ 、im  $f = \ker g$ , im  $g = \mathcal{F}''$ . よって f は inj で、 $f|^{\operatorname{im} f}: \mathcal{F}' \to \operatorname{im} f$  は surj+inj. なので  $\operatorname{Ex} 1.5$  よりこれは iso であり、 $\mathcal{F}'$  は im  $f \subset \mathcal{F}$  と同型である。続けて  $g: \mathcal{F} \to \mathcal{F}''$  から誘導される  $g_P: \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P''$  を考える。定義より  $\mathcal{F}_P, \mathcal{F}_P''$  は abelian group (abelian group の圏での colimit) で、 $g_P$  は その morphism。 だから abelian group の準同型定理からの帰結として  $\mathcal{F}_P/\ker g_P = (\mathcal{F}/\ker g)_P \cong \mathcal{F}_P''$  が得られる. Prop1.1 より  $\mathcal{F}'' \cong \mathcal{F}/\ker g = \mathcal{F}/\ker f \cong \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ .

<sup>&</sup>lt;sup>†1</sup> これは sheafification functor  $sh_X: \mathbf{PSh}(X,\mathfrak{C}) \to \mathbf{Sh}(X,\mathfrak{C})$  が forgetful functor の left adjoint functor であること,及び left adjoint functor は colimit を保つことからも得られる.

# Ex1.7 $\operatorname{im} \phi \cong \mathcal{F} / \ker \phi$ , and $\operatorname{coker} \phi \cong \mathcal{G} / \operatorname{im} \phi$ .

 $\phi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$  について考える. im  $\phi \cong \mathcal{F}/\ker \phi$  は以下の完全列に Ex1.6b を用いて得られる.

$$0 \to \ker \phi \xrightarrow{i} \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \operatorname{im} \phi \to 0.$$

ただしiは埋め込み写像である.  $\operatorname{coker} \phi \cong \mathcal{G} / \operatorname{im} \phi$ は同様に以下の完全列から得られる.

$$0 \to \operatorname{im} \phi \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{q} \operatorname{coker} \phi \to 0.$$

ただし q は  $q^{pre}: \mathcal{G} \to \operatorname{coker} \phi = \mathcal{G}/\operatorname{im} \phi$  から誘導される写像. これが完全列であることは次のように示される. まず Ex1.6a を用いて stalk の完全列を得る.

$$0 \to \operatorname{im} \phi_P \xrightarrow{\phi_P} \mathcal{G}_P \xrightarrow{q_P} \operatorname{coker} \phi_P = \mathcal{G}_P / \operatorname{im} \phi_P \to 0.$$

Ex1.2a,c を用いて元の列が完全であることが示される.

# Ex1.8 $\forall U \subset X$ , $\Gamma(U, -) ::$ left exact functor

以下を  $X \to A$  の sheaves がなす完全列とする.

$$0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}''$$
.

完全列なので  $0=\ker f, \operatorname{im} f=\ker g.$   $\mathcal{A}\mapsto \mathcal{A}(U)$  で定義される functor  $\Gamma(U,-)$  により、この完全列は以下の列になる。

$$0 \to \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{F}''(U).$$

これが完全列であることは  $0 = \ker f_U, \operatorname{im} f_U = \ker g_U$  と同値.

まず  $\ker f$  を考えると、定義より  $0=(\ker f)(U)=\ker f_U$ . よって  $f_U$  :: inj. また、 $\Gamma(U,-)$  は functor だから

$$0 = \Gamma(U, g \circ f) = \Gamma(U, g) \circ \Gamma(U, f) = 0.$$

すなわち  $g_U \circ f_U = 0$ , im  $f_U \subseteq \ker g_U$ .

残るは逆の包含関係である。まず  $s \in \ker g_U \subseteq \mathcal{F}(U)$  を取る。Ex1.2a より、任意の  $P \in U$  について  $\inf_P = \ker g_P$  なので任意の点 P について  $\sup_P \in \inf_P = \ker g_P$  であり、 $\inf_P \in \mathcal{F}_P$  が存在する。そこで  $\sup_P \in \mathcal{F}_P$  の代表元  $\inf_P \in \mathcal{F}_P$  が存在する。そこで  $\sup_P \in \mathcal{F}_P$  がたるこで  $\sup_P \in \mathcal{F}_P$  が存在する。そこで  $\sup_P \in \mathcal{F}_P$  が存在する。そこで  $\sup_P \in \mathcal{F}_P$  が存在する。そこで  $\sup_P \in \mathcal{F}_P$  がたるこで  $\sup$ 

$$f_{W_{PQ}}(t^P|_{W_{PQ}}) = s|_{W_{PQ}} = f_{W_{PQ}}(t^Q|_{W_{PQ}}).$$

 $0=(\ker f)(W_{PQ})=\ker f_{W_{PQ}}$  より  $f_{W_{PQ}}$  は inj. したがって  $t^P|_{W_{PQ}}=t^Q|_{W_{PQ}}$  が得られる.  $(P\in W_{PQ})$  は U を被覆するから、Gluability Axiom より、 $t|_{W_{PQ}}=t^P|_{W_{PQ}}=t^Q|_{W_{PQ}}$  なる  $t\in \mathcal{F}'(U)$  が存在する.morphism と restriction の naturality により、

$$f_U(t)|_{W_{PQ}} = f_{W_PQ}(t|_{W_{PQ}}) = f_{W_{PQ}}(t^P|_{W_{PQ}}) = s|_{W_{PQ}}$$

となるから、Identity Axiom より  $f_U(t) = s$ . 以上より im  $f_U \supseteq \ker g_U$ .

#### Ex1.9 Direct Sum.

sheaves  $\mathcal{F}, \mathcal{G}: X \to \mathfrak{C}$  について,  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  を以下で定める.

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} : U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U).$$

ただし U :: open in X. これが presheaf であることは自明なので、sheaf であることを示す. 以下、U :: open in X とその開被覆  $\{U_i\}$  を固定する.

**■** $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  Satisfies Identity Axiom.  $s \oplus t \in \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$  が  $(s \oplus t)|_{U_i} = 0 \oplus 0 = 0$  を満たすとする.この仮定を論理式で書下すと,

$$\forall P \in U_i, (s \oplus t)(P) = s(P) \oplus t(P) = 0 \oplus 0.$$

abelian group の coproduct は product と同型だから、これは以下のように書き換えられる.

$$\forall P \in U_i, \quad s(P) = 0 \land t(P) = 0.$$

これは  $s|_{U_i}=t|_{U_i}=0$  と同値. なので  $\mathcal{F},\mathcal{G}$  は sheaf であることから s=t=0. すなわち  $s\oplus t=0$ .

■ $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  Satisfies Gluability Axiom.  $s_i \oplus t_i \in \mathcal{F}(U_i) \oplus \mathcal{G}(U_i)$  が存在し、以下を満たすとする.

$$\forall i, j, (s_i \oplus t_i)|_{U_i \cap U_i} = (s_j \oplus t_j)|_{U_i \cap U_i}.$$

前段落と同様に書き換えて,以下が得られる.

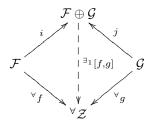
$$\forall i, j, \quad s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \wedge t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j}.$$

 $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  は sheaf であることから、以下を満たす  $s \in \mathcal{F}(U_i), t \in \mathcal{G}(U_i)$  が存在する.

$$\forall i, \ s|_{U_i} = s_i \wedge t|_{U_i} = t_i.$$

この s,t について  $(s \oplus t)|_{U_i} = (s|_{U_i}) \oplus (t|_{U_i}) = s_i \oplus t_i$ .

■ $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  is Coproduct in  $\mathbf{Sh}(X)$ . 以下の図式を考える.



ただし Z, f, g は任意で、i, j はそれぞれ  $s \mapsto s \oplus 0, t \mapsto 0 \oplus t$  とする. すると  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  から  $\mathcal{Z}$  へ至る二つのパスをたどることで、この図式を可換にする [f, g] は以下のものしか無い事が理解る.

$$[f,g]: s \oplus t \mapsto f(s) + g(t).$$

f,g は morphism of abelian group で f(s),g(t) は element of abelian group. だから、例えば  $\mathcal{F}\to\mathcal{Z}$  の二つのパスは次の計算の通り可換になる.

$$[f,g] \circ i : s \mapsto s \oplus 0 \mapsto f(s) + g(0) = f(s) \longleftrightarrow s : f$$

よって  $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$  は coproduct.

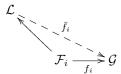
## Ex1.10 Direct Limit.

Ex1.8 の functor  $\Gamma(-,-)$ , sheafification functor  $sh_X$  と abelian category の direct limit  $\lim_{\to i} \mathcal{E}$  用いて、 $\lim_{\to i} \mathcal{F}_i$  を以下で定める.

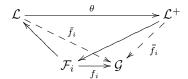
$$\Gamma(-, \lim_{i \to i} \mathcal{F}_i) = sh_X \lim_{i \to i} \Gamma(-, \mathcal{F}_i).$$

ただし  $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$  は direct system である. これが  $\mathbf{Sh}(X)$  の direct limit であることを示す.

まず,  $\mathcal{L}: U \mapsto \lim_{\to i} \mathcal{F}_i(U)$  とおく. これは明らかに  $\mathbf{PSh}(X)$  における direct limit で<sup>†2</sup>,  $\mathcal{L}^+ = \lim_{\to i} \mathcal{F}_i$  を満たす. よって sheafification functor  $sh_X$  が direct limit を保つことを見れば良い. 次の可換図式は  $\mathcal{L}$  の UMP を表す.



ただし  $\mathcal{G}, f_i$  は任意. sheafification の UMP を  $\bar{f}_i : \mathcal{L} \to \mathcal{G}$  に用いて、次の可換図式が得られる.



よって  $f_i: \mathcal{F}_i \to \mathcal{G}$  に対して一意に  $\bar{f}_i: \mathcal{L}^+ \to \mathcal{G}$  が存在する.これで  $\mathcal{L}^+ = \lim_{\to i} \mathcal{F}_i$  の UMP が示せた. $\mathcal{F}_i \to \mathcal{F}_j$  との可換性は morphism を結合すれば容易に分かる.

#### (i) Another Proof.

sheafification functor  $sh_X: \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$  が Forgetful Functor  $F: \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PSh}(X)$  の left adjoint functor であることを用いる。これは R.Vakil "Foundations of Algebraic Geometry" Part I, 2.4.L などにある事実である。 direct limit が colimit であることと,"Left Adjoint Preserves Colimits" より,

$$sh_X \lim_{\to i} \mathcal{F}_i \cong \lim_{\to i} sh_X \mathcal{F}_i \cong \lim_{\to i} \mathcal{F}_i.$$

# Ex1.11 Pre-Direct Limit on Noetherian Top.Sp. is Already a Sheaf.

sheaves  $\{\mathcal{F}^i\}_{i\in I}$  with morphisms  $f^{ij}:\mathcal{F}^i\to\mathcal{F}^j$  :: direct system とし、 $\mathbf{PSh}(X)$  における direct limit を  $\mathcal{L}$  で書く、X :: noetherian topological space であるとき、 $\mathcal{L}$  が予め sheaf であることを示す、以下、U :: open in X と開被覆  $\{U_{\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$  を任意にとり、固定する.

X:: noetherian より、X:: quasi-compact. なので集合  $\{U_{\lambda}\}$  から有限被覆  $\{U_{i}\}_{i\in J}$  が出来る.

## Ex1.12 Inverse Limit.

sheaves  $\{\mathcal{F}^i\}$  with morphisms  $f^{ij}: \mathcal{F}^i \to \mathcal{F}^j$ :: inverse system とし,  $\mathbf{PSh}(X)$  における inverse limit  $U \mapsto \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i(U)$  を  $\mathcal{L}$  で書く、このとき  $\mathcal{L}$  は  $\mathbf{Sh}(X)$  においても inverse limit であることを示す。

 $<sup>^{\</sup>dagger 2}$   $\mathbf{PSh}(X)$  が direct limit を持つことは abelian category  $\mathfrak C$  が direct limit を持つことによる.

sheafification functor を  $Sh: \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$ , forgetful functor を  $Fgt: \mathbf{Sh}(X) \to \mathbf{PSh}(X)$  で書く. Fgt は Sh の right adjoint functor  $(Sh \dashv Fgt.)$  なので,  $\lim_{i \leftarrow}$  と可換<sup>†3</sup>. inverse limit は limit なので以下が得られる.

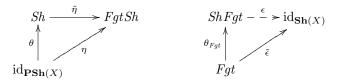
$$\lim_{i \leftarrow} Fgt\mathcal{F}^i \cong Fgt \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i \cong \lim_{i \leftarrow} \mathcal{F}^i.$$

最後の  $\cong$  は F が forgetful functor,すなわち object を変化させないことによる.したがって  $\mathbf{PSh}(X)$  における inverse limit は  $\mathbf{Sh}(X)$  における inverse limit と一致する.まったく同様の議論で  $\mathbf{PSh}(X)$  における limit は  $\mathbf{Sh}(X)$  における limit に一致する.

#### (i) Proof of $Sh \dashv Fgt$ .

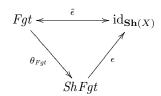
adjoint の定義にはいくつか同値なものがあるが、ここでは Steve Awodey "Category Theory" p.214 にある Cor9.5 を用いる.

F は object を変えない埋め込み写像なので、直ちに全単射  $\tilde{\eta}_{(-)}:(-)\leftrightarrow F(-):\tilde{\epsilon}_{(-)}$  がとれる.これに sheafification の UMP を用いると以下の可換図式が得られる.

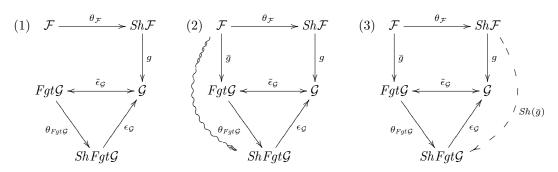


こうして unit  $\eta: \mathrm{id}_{\mathbf{PSh}(X)} \to FgtSh$  と counit  $\epsilon: ShFgt \to \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$  が得られる. さらに、この二つの可換図式を組み合わせて、以下の可換図式が作れる.

$$id_{\mathbf{PSh}(X)} \xrightarrow{\theta} Sh$$



さて、 $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X)$ ,  $\mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X)$  と  $g: Sh\mathcal{F} \to \mathcal{G}$  を任意に取る. この時の可換図式は以下の (1) である.



コの字型の部分をたどることで、(2) の  $\bar{g}: \mathcal{F} \to Fgt\mathcal{G}$  が得られる。 $\operatorname{Ex} 1.4$  における  $\phi^+$  の作り方をなぞると、 $\operatorname{Sh}(\bar{g})$  は (2) の波矢印  $\theta_{Fgt\mathcal{G}} \circ \bar{g}$  から sheafification の UMP で得られるものである。sheafification をしたあとの可換図式が (3) である。UMP から、 $\theta_{Fgt\mathcal{G}}$  および  $\theta_{Fgt\mathcal{G}} \circ \bar{g}$  と共に可換な三角形をなす射は  $\operatorname{Sh}(\bar{g})$  に等しい。よって  $\operatorname{Sh}(\bar{g}) = \theta_{Fgt\mathcal{G}} \circ \tilde{\epsilon}_{\mathcal{G}}^{-1} \circ g$ 。こうして  $g = \epsilon_{\mathcal{G}} \circ \operatorname{Sh}(\bar{g})$  が得られる。

 $<sup>^{\</sup>dagger 3}$  "Right Adjoints Preserves Limits."

# Ex1.13 Espace Étalé of a Presheaf.

#### (i) Definition of Espace Étalé.

 $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X)$  に対し、espace étalé of  $\mathcal{F}$  Spé $(\mathcal{F})$  を以下のように定義する。まず、集合として Spé $(\mathcal{F}) = \bigsqcup_{P \in X} \mathcal{F}_P$  とおく、projection map  $\pi$  とその "section"  $\bar{s}$  を以下で定める。まず、 $\pi$  は以下のもの。

$$\pi: \operatorname{Sp\acute{e}}(\mathcal{F}) \to X$$
  
 $s \in \mathcal{F}_P \mapsto P.$ 

任意の U :: open in X と  $s \in \mathcal{F}(U)$  に対して  $\bar{s}: U \to \operatorname{Sp\'e}(\mathcal{F})$  を以下で定める.

$$\bar{s}: U \rightarrow \operatorname{Sp\acute{e}}(\mathcal{F})$$

$$P \mapsto s_{P}.$$

この時, $\pi\circ \bar s=\mathrm{id}_U$ . すなわち, $\bar s$  は U 上で  $\pi$  の "section"である。そして  $\mathrm{Sp\acute{e}}(\mathcal F)$  に以下のような位相を入れる:任意の U と任意の s について  $\bar s$  が連続であるような最強の位相。これはつまり  $\{\bar s\}$  についての終位相である。

#### (ii) More References for Espace Étalé.

Wikipedia の Sheaf のページ https://www.wikiwand.com/en/Sheaf\_(mathematics)#/The\_.C3. A9tal.C3.A9\_space\_of\_a\_sheaf (2017年3月30日参照) に概略が書かれている。詳細についての資料は以下の通り、まず、一般の espace étalé(étalé space)の categorical な定義が https://ncatlab.org/nlab/show/etale+space にある。Étalé space の圏と sheaf の圏が圏同値であることの証明は Saunders Mac Lane, Ieke Moerdijk "Sheaves in Geometry and Logic"の §5-6, pp.83-90 にある。(この命題はこの本の p.90 Cor3 である。) 同様のことが "Etale cohomology course notes" http://math.colorado.edu/~jonathan.wise/teaching/math8174-spring-2014/notes.pdf の 7 Etale spaces and sheaves (p.24) にあるが、この note はミスが多いしわかりにくいのでおすすめしない。

#### (iii) Proposition and Proof.

X 上の étalé space をとって,その連続な section 全体をとる関手を  $Sec: \mathbf{Et}(X) \to \mathbf{Sh}(X)$  とする. 逆に presheaf から étalé space を作る関手を  $\acute{Et}: \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{Et}(X)$  とする.sheafification functor が  $Sh = Sec\acute{Et}$  で定義できることを示す.

#### ■Plan of Proof. 二つの写像を定める.

ただし U は任意の X の開集合で,P は U の任意の点である.この  $\alpha,\beta$  が natural map かつ isomorphism であることが証明できるので,圏同値  $\mathbf{Et}(X) \simeq \mathbf{Sh}(X)$  が示せる.しかし我々の目的は sheafification の UMP であり,これには  $\alpha$  についてさえ示せれば十分である.この証明は Saunders

Mac Lane, Ieke Moerdijk "Sheaves in Geometry and Logic" pp.85-86 にある<sup>†4</sup>.

 $\blacksquare \alpha$  :: natural.  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbf{PSh}(X)$  とする.

 $Sec \acute{E}t \phi$  は次のような, section を section へ写す写像である.

$$Sec\acute{E}t\phi: [P \mapsto *_P] \mapsto [P \mapsto *_P \mapsto \phi_P(*_P)].$$

したがって  $\mathcal{F} \to Sec\acute{E}t\mathcal{G}$  のどちらのパスでも  $s \mapsto [P \mapsto \phi_P(s_P) = (\phi(s))_P]$  と section を section へ写 す写像になる. ただし P は X の点である. これで  $\alpha$  :: natural が示せた.

 $\blacksquare \alpha$  :: iso. まず  $\alpha$  :: inj は Indentity Axiom から容易に示されるので略す.  $\alpha$  :: surj の証明は長い. まず U :: open in  $X, \sigma \in (Sec \acute{E}t \mathcal{F})(U)$  を任意に取る. すると  $Sec \acute{E}t$  の定義から, 以下が成り立つ.

$$\forall P \in U, P \in \exists V \subseteq U :: \text{ open}, \exists s \in \mathcal{F}(V), \sigma(P) = s_P.$$

ÉtF の位相は像位相であり、かつ  $\alpha(s)=\bar{s}$  は明らかに単射. なので  $\alpha(s)(V)=\bar{s}(V)$  は open である $^{\dagger 5}$ . しかも  $\sigma$  :: continuous だから、 $\sigma(S)\subseteq\alpha(\sigma)(V)$  なる  $P\in S\subseteq\sigma^{-1}(\alpha(\sigma)(V))$  :: open が存在する $^{\dagger 6}$ . 直ちに以下が成り立つ.

$$\forall Q \in S, \exists Q' \in V, \mathcal{F}_Q \ni \sigma(Q) = s_{Q'}.$$

明らかに Q=Q', すなわち  $\sigma|_S=\alpha(s)|_S$  が成り立つ. 点 P を様々に取ることで, S で U を被覆できることがわかる. s&S と t&T の二組について

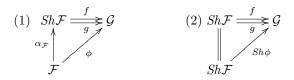
$$\alpha(s)|_{S\cap T} = \sigma|_{S\cap T} = \alpha(t)|_{S\cap T}.$$

したがって  $\alpha$  :: inj から  $s|_{S\cap T}=t|_{S\cap T}$ . こうして Gluability Axiom から, $\alpha(s)|_S=\alpha(\int)|_S=\sigma|_S$  なる  $\int \in \mathcal{F}(U)$  の存在が示せる.最後に Identity Axiom を用いて  $\alpha(\int)=s$ . これで  $\alpha$  :: iso が示せた.

■UMP of Sheafification.  $Sh = Sec\acute{E}t$  とすると、これが sheafification functor となる。その UMP を見よう。 $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(X), \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X)$  とする。 $\alpha : \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \to \mathit{Sh}$  の naturality から、次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} & \longrightarrow Sh\mathcal{F} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{G} & \stackrel{\sim}{\longrightarrow} Sh\mathcal{G}
\end{array}$$

 $\alpha_{\mathcal{G}}:\mathcal{G}\to\mathit{Sh}\mathcal{G}::$  iso だから, $\mathcal{F}\to\mathcal{G}$  から  $\mathit{Sh}\mathcal{F}\to\mathcal{G}$  が得られた.次に,以下で示す可換図式 (1) が与えられたとしよう.全体を  $\mathit{Sh}$  で写し, $\mathit{Sh}|_{\mathbf{Sh}(X)}\cong\mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$  を用いて可換図式 (2) が得られる.



 $<sup>^{\</sup>dagger 4}$  この本では  $\alpha$  は  $\eta$  と書かれている.また,この本でいう cross-section は  $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_U$  なる section のこと. $\dot{s}$  は  $\bar{s}$  のことである.その他,germ の記法などがだいぶ違うので注意.

 $<sup>^{\</sup>dagger 5}$   $\bar{s}$  の像位相において,開集合 V の像が開集合であることは  $\bar{s}^{-1}\circ \bar{s}(V)$  が開集合であることと同値だが,単射性から,この集合は V に等しい.

 $<sup>^{\</sup>dagger 6}$  これは  $\epsilon$ - $\delta$  論法に似ている。 $\sigma^{-1}(\alpha(\sigma)(V))$  が開集合であるから,任意の点,特に P はこの集合の内点である.このことから開集合 S が存在することは自明である.

したがって f = g. 以上で existence & uniqueness が示せた.

## Ex1.14 Support.

 $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X), U$ :: open in  $X, s \in \mathcal{F}(U)$  をとる.  $\mathrm{Supp}\, s = \{P \in U \mid s_P \neq 0\}$  としたとき,これが closed in U であることを示そう.そのために  $T = (\mathrm{Supp}\, s)^c = \{P \in U \mid s_P = 0\}$  として,これが open であることを示す.

 $P \in T$  を任意に取る。すると  $s_P$  の代表元として  $\langle V_P, s \rangle$   $(P \in V_P \subset U)$  が取れる。今  $s_P = 0$  なので, $s|_{V_P} = 0$ . したがって  $V_P \subset T$  となる。任意の  $P \in T$  についてこのように  $V_P$  が取れるので,T は open covering  $\{V_P\}_{P \in T}$  を持つ。よって  $T = \bigcup_{P \in T} V_P$  :: open in U.

Supp  $\mathcal{F}$  は  $\{P \in X \mid \mathcal{F}_P \neq 0\}$  と定義される. これは closed とは限らない. 実際,  $\mathcal{F}$  の元を, なめらかな 実関数に  $bump(x) = [x > 0]e^{-1/x}$  \* をかけたものとすると, Supp  $bump(x) = [0, \infty)$ , Supp  $\mathcal{F} = (0, \infty)$  となる. 後者は明らかに閉集合でない.

#### Ex1.15 Sheaf $\mathcal{H}om$ .

 $\mathcal{F},\mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(X), U$ :: open in X とし, $\mathcal{F}$  の U への restrction(p.65) を  $\mathcal{F}|_U$  で書く. $U \mapsto \mathrm{Hom}(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U)$  で定まる presental  $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$  が sheaf であることを示そう.以下では U とその開被 覆  $\{U_{\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$  を任意にとって固定する.

**■** $\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$  :: Abelian Group.  $s,t\in\mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$  について, s+t を以下で定める.

$$(s+t)(\sigma) = s(\sigma) + t(\sigma)$$
 where  $V$  :: open in  $U, \ \sigma \in (\mathcal{F}|_U)(V)$ .

単位元は  $\operatorname{im} \mathcal{F}|_U$  の単位元を返す定値写像である. 単位元を以下では 0 と書く.

■ $\mathscr{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})$  :: Presheaf. U,V :: open かつ  $V\subseteq U$  とする.  $\overline{\mathrm{res}}_U^V$  :  $\mathscr{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)\to \mathscr{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})(V)$  を以下のように定める.

$$\{\mathcal{F}|_U \ni \sigma|_U \mapsto \tau|_U \in \mathcal{G}|_U\} \mapsto \{\mathcal{F}|_V \ni \sigma|_V \mapsto \tau|_V \in \mathcal{G}|_V\}$$

これは  $\operatorname{res}(\mathcal{F})_U^V:\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(V)$  と  $\operatorname{res}(\mathcal{G})_U^V:\mathcal{G}(U)\to\mathcal{G}(V)$  の自然性から誘導される.

■Identity Axiom.  $s \in \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})(U) = \operatorname{Hom}(\mathcal{F}|_U,\mathcal{G}|_U)$  をとる。この s が任意の  $\lambda$  について  $s|_{U_\lambda} = 0$  を満たすとする。さて,V:: open in U と  $\sigma \in \mathcal{F}(V)$  を任意に取る。 $\{V_\lambda\}$  を  $V_\lambda = V \cap U_\lambda$  で定めると,これは V の開被覆になる。仮定より, $s|_{V_\lambda}(\sigma) = s(\sigma)|_{V_\lambda} = 0$ . よって  $s(\sigma) \in \mathcal{G}(V)$  に Indentity Axiom を用いることで  $s(\sigma)|_V = 0$  が示される。 $V,\sigma$  は任意なので,結局以下が得られた。

$$\forall V :: \text{ open in } U, \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}(V), \quad s(\sigma) = 0.$$

すなわち, s は定値写像 0 である. 以上で Indentity Axiom の成立が示された.

**■**Gluability Axiom. sections  $s_{\lambda} \in \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})(U_{\lambda})$  をとる. これが任意の  $\lambda, \mu \in \Lambda$  について  $s_{\lambda}|_{U_{\lambda}\cap U_{\mu}} = s_{\mu}|_{U_{\lambda}\cap U_{\mu}}$  を満たすとしよう. この仮定は以下のように書ける.

$$\forall \lambda, \mu \in \Lambda, \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}(U_{\lambda} \cap U_{\mu}), \quad s_{\lambda}(\sigma) = s_{\mu}(\sigma).$$

 $<sup>^{\</sup>dagger7}$  [True]=1,[False]=0 とした. Iverson の記法である. bump(x) がなめらかであることは次の PDF を参照せよ: https://andromeda.rutgers.edu/~loftin/difffal03/bump.pdf.

そこで  $\lambda$  をひとつ取って固定し, $\sigma \in \mathcal{F}(U_{\lambda})$  とする.さらに  $\{V_{\mu}\}_{\mu \in \Lambda}$  を  $V_{\mu} = U_{\lambda} \cap U_{\mu}$  で定める.この  $\{V_{\mu}\}$  は  $U_{\lambda}$  の開被覆である.すると最初の仮定と  $V_{\mu} \cap V_{\nu} = U_{\lambda} \cap (U_{\mu} \cap U_{\nu}) \subseteq U_{\mu} \cap U_{\nu}$  から以下が成り立つ.

$$\forall \mu, \nu \in \Lambda, \quad s_{\mu}(\sigma)|_{V_{\mu} \cap V_{\nu}} = s_{\nu}(\sigma)|_{V_{\mu} \cap V_{\nu}}.$$

sections  $s_{\mu}(\sigma) \in \mathcal{G}(U_{\lambda})$  に対して Gluability Axiom を用いて, $s(\sigma)|_{V_{\mu}} = s_{\mu}(\sigma)|_{V_{\mu}}$  なる  $s(\sigma)$  の存在が言える. Indentity Axiom から  $s(\sigma)|_{U_{\lambda}} = s_{\mu}(\sigma)|_{U_{\lambda}}$ . こうして,以下を満たす  $s \in \mathcal{H}om(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$  の像が各点  $\sigma \in \mathcal{F}(U_{\lambda})$  ごとに定義できる.

$$\forall \lambda \in \Lambda, \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}(U_{\lambda}), \quad s(\sigma)|_{U_{\lambda}} = s_{\lambda}(\sigma)|_{U_{\lambda}}.$$

簡潔にかけば、 $s|_{U_{\lambda}}=s_{\lambda}|_{U_{\lambda}}$ . よって Gluability Axiom の成立が示せた.

## Ex1.16 Flasque Sheaves.

U,V: open in  $X,\ V\subseteq U$  とする. restriction map  $\operatorname{res}_U^V$  が surjective であるような  $\mathcal{F}\in\mathbf{Sh}(X)$  を flasque  $^{\dagger 8}$  sheaf と呼ぶ.

#### (a) Constant Sheaf on Irreducible Top.Sp is Flasque.

X:: irreducible, A:: abelian group, U,V:: open in X,  $V\subseteq U$  とする. A を X から A への constant sheaf とすると,定義より  $A(V)=\{s:V\to A\mid s:: \text{continuous.}\}$ . そこで  $s\in A(V)$  を一つ とって固定する。s:: continuous という条件は次と同値

$$\forall a \subseteq A, \ s^{-1}(a) :: \text{ open in } V.$$

X:: irreducible であるとき,  $s \in \mathcal{F}(V)$  がどのようなものか考えよう.

■Case: #A=1. まず #A=1, すなわち A が自明な abelian group  $\{e\}$  であったとする. この時, 明らかに  $\mathcal{F}(V)$  は定値写像  $x\mapsto e$  のみからなる.  $\mathcal{F}(U)$  も同じ定値写像からなるので, この時 constant sheaf は flasque.

■Case #A > 1.  $a \neq b$  が成り立つような  $a,b \in A$  を任意に取る. すると以下が成り立つ.

$$s^{-1}(\{a\}) \cap s^{-1}(\{b\}) = s^{-1}(\{a\} \cap \{b\}) = s^{-1}(\emptyset) = \emptyset.$$

したがって X :: irreducible から  $s^{-1}(\{a\})$  or  $s^{-1}(\{b\}) = \emptyset$ . 仮に任意の  $a \in A$  について  $s^{-1}(\{a\}) = \emptyset$  であったとすると s が写像にならない. したがって  $s^{-1}(\{a_s\}) \neq \emptyset$  となる  $a_s \in A$  がただひとつ存在する. s は写像なので  $s^{-1}(A) = V$  が成り立ち,したがって s はこのような  $a_s$  への定値写像である事が分かる. すると容易に s は U へ拡張できるので,この時も constant sheaf は flasque.

## (b) If $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$ is Exact and $\mathcal{F}'$ is Flasque, then...

 $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$  が exact かつ  $\mathcal{F}'$  が flasque であったとする.この時,任意の open set U について  $0 \to \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U) \to 0$  は exact であることを示す.

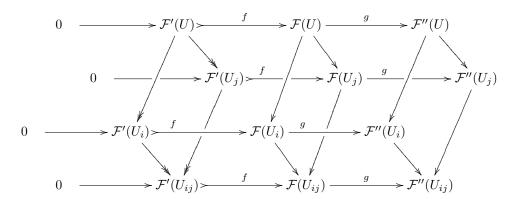
写像に  $0 \to \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \to 0$  と名前をつけ、U:: open in X と  $s'' \in \mathcal{F}''(U)$  をとる.Ex1.8 より、 $0 \to \mathcal{F}'(U) \xrightarrow{f_U} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g_U} \mathcal{F}''(U)$  は exact.なのであとは  $g_U$  が surjective であることを示せば良い.

<sup>†8</sup> フランス語. フラスコのこと. 軟弱という意味. 発音は https://ja.forvo.com/word/flasque/.

元の exact sequence から g:: surjが言える. Ex1.3 より, 以下が成り立つ.

(\*) 
$$\bigcup \exists U_i = U, \exists t_i \in \mathcal{F}(U_i), \forall i, g(t_i) = s''|_{U_i}.$$

任意に i,j をとり、以下の可換図式で diagram chase をする. ただし  $U=U_i\cap U_j$  とした.



 $s'' \in \mathcal{F}''(U)$  と、(\*) から存在が示される  $t_i \in \mathcal{F}(U_i), t_j \in \mathcal{F}(U_j)$  から diagram chasing を始める.

- (1) naturality  $h \circ g_{U_{ij}}(t_i|_{U_{ij}}) = s''|_{U_{ij}} = g(t_j|_{U_{ij}}).$
- (2) よって列の完全性から  $t_i t_j \in \ker g_{U_{ij}} = \operatorname{im} f_{U_{ij}}$ .
- (3) したがって  $f_{U_{ij}}(u'_{ij})=t_i-t_j$  なる  $u'_{ij}\in\mathcal{F}'(U_{ij})$  が存在する.
- (4)  $\operatorname{res}_U^{U_{ij}}$  :: surj から  $s'_{ij}|_{U_{ij}}=u'_{ij}$  なる  $s'_{ij}\in\mathcal{F}'(U)$  が存在する.
- (5)  $s_{ij} = f_U(s'_{ij})|_{U_i} + t_j \in \mathcal{F}(U_i)$  とおく. (足すのは  $t_j$  であることに注意.)

以上から、 $g_U(s) = s''$  なる  $s \in \mathcal{F}(U)$  の存在が示せた.

#### (i) Another Proof

次の PDF の Lemma2.12(p.10) がこの演習問題と同じ命題である: http://www.math.mcgill.ca/goren/SeminarOnCohomology/Sheaf\_Cohomology.pdf. 次の PDF の Lemma0.3(p.12) も同じ: http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT4215/v15/notes1.pdf. どちらの証明でも Zorn's Lemma が用いられている.

(c) If  $0 \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}'' \to 0$  is Exact and  $\mathcal{F}', \mathcal{F}$  is Flasque, then  $\mathcal{F}''$  also.

U,V: open in  $X,V\subseteq U$  とする. (b) より,以下の完全列が得られる.

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(U) > \xrightarrow{f} \mathcal{F}(U) \xrightarrow{g} \mathcal{F}''(U) \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(V) > \xrightarrow{f} \mathcal{F}(V) \xrightarrow{g} \mathcal{F}''(V) \longrightarrow 0$$

証明は diagram chasing による.

- (1)  $s'' \in \mathcal{F}''(V)$  を任意に取る.
- (2)  $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}''(V)$  :: surj から、 $g(\tilde{s})|_{V} = s''$  なる  $\tilde{s} \in \mathcal{F}(U)$  が取れる.
- (3) naturality から  $g(\tilde{s}|_V) = s'' = g(\tilde{s})|_V$ .

 $s:=g(\tilde{s})\in\mathcal{F}''(U)$  とおけば  $s|_V=s''$ .

(d) If  $f: X \to Y$  is Conti. and  $\mathcal{F}$  is Flasque, then  $f_*\mathcal{F}$  is Flasque.

U,V :: open in Y,  $V \subseteq U$  とする. このとき  $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U)$ . なので  $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$  :: surj より  $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) \to \mathcal{F}(f^{-1}(V))$  :: surj.  $f_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U))$  だから,  $f_*\mathcal{F}$  :: flasque.

(e) Discontinuous Sections.

 $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$  とする. これに対し、discontinuous sections of  $\mathcal{F}$  と呼ばれる sheaf  $\mathcal{G}$  が以下のように作れる.  $\pi$  は Ex1.13 の  $s_P \mapsto P$  なる写像である.

$$\mathcal{G}: U \mapsto \left\{ s: U \to \bigsqcup_{P \in U} \mathcal{F}_P \mid \pi \circ s = \mathrm{id}_U \right\}$$

 $\mathcal{G}$  が flasque sheaf であることと、 $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$  の自然な単射が存在することを示す.

**■**g:: sheaf. g:: presheaf は明らか. sheaf であることを示すため, U:: open in X とその open cover  $\{U_i\}_{i\in I}$  をとり,固定する.任意の  $i\in I$  について  $s|_{U_i}=0$  であるような  $s\in \mathcal{G}(U)$  が存在したとする.  $\bigcup U_i=U$  より,任意の点  $P\in U$  に対して s(P)=0. これは Identity Axiom の成立を意味する.同様に " $\forall i,j, \ \forall P\in U_i\cap U_j, \$ "を " $\forall P\in U, \$ "に書き換えるだけで,Gluability Axiom の成立が証明できる.

 $\blacksquare \mathcal{G}$  :: flasque.  $V \subset U$  とする、 $s \in \mathcal{G}(V)$  をとる、これは例えば以下のように拡張できる、

$$\bar{s}(P) = \begin{cases} s(P) & (P \in V) \\ 0 & (P \in U \setminus V) \end{cases}$$

■ $\alpha$  in Ex1.13 is injective. Ex1.13 の  $\alpha:s\mapsto [P\mapsto s_P]$  が injective であることは以下のように示される. ある  $s,t\in \mathcal{F}(U)$  について  $\alpha(s)=\alpha(t)$  が成立するとしよう. すると十分小さい open set  $(P\in)V_P(\subset U)$  が存在して, $s|_{V_P}=t|_{V_P}$  となる. 明らかに  $\{V_P\}_{P\in U}$  は U の open cover なので, $s-t\in \mathcal{G}$  に Identity Axiom を用いて s=t が得られる.

# Ex1.17 Skyscraper Sheaves.

X:: topological space,  $P \in X$ , A:: abelian group とする. sheaf  $i_P(A)$  を以下で定める.

$$i_P(A)(U) = \begin{cases} A & (P \in U) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

点 P を含む最小の閉集合を  $\{P\}^-$  と書く.

(a)  $(i_P(A))_Q = A$  is A if  $Q \in \{P\}^-$ , otherwise 0 .

U を Q を含む極小の開集合とした時, $(i_P(A))_Q$  は集合として  $\mathcal{F}(U)$  と一致する.したがって以下が成立する.

$$\begin{split} (i_P(A))_Q &= A \\ \iff {}^\forall U \subset X, \quad Q \in U \implies P \in U \\ \iff {}^\forall U \subset X, \quad P \in U^c \implies Q \in U^c. \end{split}$$

最後の行は対偶として得られた.一方,点 P を含む最小の閉集合  $\{P\}^-$  は以下を満たす唯一の集合として特徴づけられる.

$${}^\forall U\subset X,\ P\in U^c\implies \{P\}^-\subseteq U^c$$

よって  $(i_P(A))_Q = A \iff Q \in \{P\}^-$ . 他の場合は明らかに  $(i_P(A))_Q = 0$  となる. また,この特徴付けの対偶から  $U \cap \{P\}^- \neq \emptyset$  ならば  $P \in U$ .  $P \in U$  ならば  $P \in U \cap \{P\}^-$  なので逆も成立する.

## (b) $i_P(A)$ can be described as direct image.

abelian group A に伴う  $\{P\}^-$  上の constant sheaf を A とする. すると  $i_P(A)$  は埋め込み写像  $i:\{P\}^-\hookrightarrow X$  の direct image  $i_*(A)$  に等しい.実際,開集合 U について  $i_*(A)(U)=A(i^{-1}(U))=A(U\cap\{P\}^-)$  であるから以下のようになる.

$$i_*(\mathcal{A})(U) \cong \begin{cases} A & (U \cap \{P\}^- \neq \emptyset) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}.$$

(a) で見たとおり  $U \cap \{P\}^- \neq \emptyset$  と  $P \in U$  は同値. よって  $i_*(A) = i_P(A)$ . 特に, $\{P\}^-$  はその最小性から irreducible なので,Ex1.16a,d と合わせれば  $i_P(A)$  は flasque であることが分かる.

# Ex1.18 Adjoint Property of $f^{-1}$ .

X,Y を位相空間とし, $\mathcal{F},\mathcal{G}$  をそれぞれ X,Y 上の sheaf とする。 $f:X\to Y$  を連続写像に対し, $f^p\mathcal{G}$  を  $U\mapsto \varinjlim_{V\supseteq f(U)}\mathcal{G}(V)$  で定まる presheaf, $f^{-1}\mathcal{G}$  を  $f^p\mathcal{G}$  の sheafification, $(f_*\mathcal{F})(U')=\mathcal{F}(f^{-1}(U'))$  とおく.つまり,

$$f^p: \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{PSh}(X), f^{-1}: \mathbf{Sh}(Y) \to \mathbf{Sh}(X), f_*: \mathbf{PSh}(X) \to \mathbf{PSh}(Y)$$

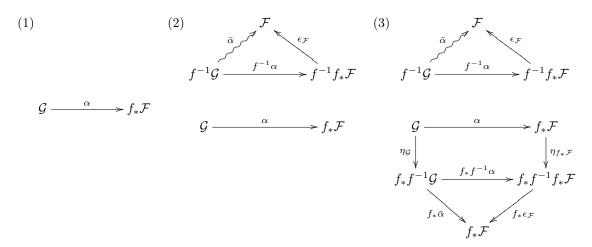
であり、 $f_*$  は sheaf を sheaf に写す functor である. natural transformation

$$\eta: \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(Y)} \to f_* f^{-1}, \epsilon: f^{-1} f_* \to \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$$

を定義し、sheaf  $\mathcal{F},\mathcal{G}$  について  $\operatorname{Hom}(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F})\cong \operatorname{Hom}(\mathcal{F},f_*\mathcal{F})$  を示す.

- Construction of  $\tilde{\eta}, \eta$ .
- $\blacksquare \tilde{\eta}, \eta$  is Natural.
- Construction of  $\tilde{\epsilon}$ ,  $\epsilon$ .
- $\blacksquare \tilde{\epsilon}, \epsilon$  is Natural.

■Construction of  $\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}, \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ .  $\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} : \operatorname{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \leftrightarrow \operatorname{Hom}(f^{-1}\mathcal{G}, \mathcal{F}) : \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$  を構築する.  $\alpha \in \operatorname{Hom}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F})$  から始める.



図式 (1) を  $f^{-1}$  で写したものに,F と  $\epsilon_F$  を追加すると,射の結合として  $\bar{\alpha}$  が得られる.これが図式 (2) であり,

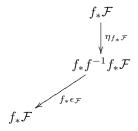
$$\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\alpha) = \bar{\alpha} = \epsilon_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}\alpha \in \operatorname{Hom}(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F})$$

と定義する. さらに (2) の上の三角形を  $f_*$  で写したものが図式 (3) の下の三角形である.  $\eta$  の自然性から, $\eta$  を追加した図式 (3) も可換である. すると  $\bar{\alpha} \in \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F})$  から

$$\Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\bar{\alpha}) = f_* \bar{\alpha} \circ \eta_{\mathcal{G}} \in \text{Hom}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F})$$

が得られる.

 $\blacksquare \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \circ \Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(\mathcal{G},f_*\mathcal{F})}$ . 今, $\alpha$  から  $\Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\bar{\alpha}) = \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\alpha))$  が得られた。この二つが等しいことを示そう。これは  $\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$  が単射であることを意味する。そのためには,直前の図式 (3) における以下の path が  $\mathrm{id}_{f_*\mathcal{F}}$  であることを示せば良い.



 $f_*f^{-1}f_*\mathcal{F}$  は  $f_*f^pf_*\mathcal{F}$  の sheafification である. 任意の U :: open in X について,  $(f^pf_*\mathcal{F})(U)$  は

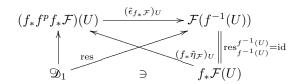
$$\mathfrak{D}_0 = \{ \mathcal{F}(V) \mid V \supseteq f(f^{-1}(U)) \}$$

の direct limit である. 写像についての基本的な事実から,  $U \supseteq f(f^{-1}(U))$  となる. つまり  $\mathcal{F}(U) \in \mathfrak{D}_0$ . 図式  $\eta_{\mathcal{F}}: \mathfrak{D}_0 \to (f^pf_*\mathcal{F})(U)$  を  $f_*$  で写せば,  $(f_*f^pf_*\mathcal{F})(U)$  が

$$\mathfrak{D}_1 = \{ \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \mid V \supseteq f(f^{-1}(U)) \}$$

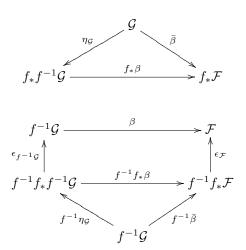
の direct limit であることがわかる. さらに  $V \supseteq f(f^{-1}(U))$  であるとき  $f^{-1}(V) \supseteq f^{-1}(f(f^{-1}(U))) = f^{-1}(U)$  だから,  $\mathfrak{D}_1$  の任意の元から  $\mathcal{F}(f^{-1}(U)) = f_*\mathcal{F}(U)$  へ restriction map が伸びる. 以上から, 以

下の図式が書ける.

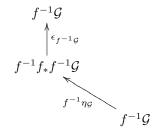


 $\mathfrak{D}_1$  から伸びる 2 本の射と整合的に  $(\epsilon_{f_*\mathcal{F}})_U$  が生えている.これはつまり上の図式で  $\mathfrak{D}_1$  を頂点に持つ三角形が可換である,ということである. $f_*\mathcal{F}(U)\in \mathfrak{D}_1$  に注目すれば,これは直ちに  $\tilde{\epsilon}_{f_*\mathcal{F}}\circ f_*\tilde{\eta}_{\mathcal{F}}=\mathrm{id}$  を意味する.ここまでは  $f_*f^pf_*\mathcal{F}$  についての議論だったが,これを sheafification すれば最初の目的の等式が得られる.

■ $\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \circ \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F})}$ . 今度は  $\beta \in \mathrm{Hom}(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F})$  をとる.  $\Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}} \circ \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(\beta) = \beta$  を示そう. 前段落及び前前段落と同様に図式を書く.



よって以下が $id_{f^{-1}G}$ であることを示せば良いと分かる.



そこで最初に次の図式を考える.

$$(f^{p}\mathcal{G})(U) \xrightarrow{(f^{p}\tilde{\eta}_{\mathcal{G}})_{U}} \rightarrow (f^{p}f_{*}f^{p}\mathcal{G})(U) - \frac{(\tilde{\epsilon}_{f^{p}\mathcal{G}})_{U}}{-} \rightarrow (f^{p}\mathcal{G})(U)$$

$$\uparrow \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \uparrow$$

$$\mathfrak{D}' \qquad \mathfrak{D}$$

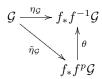
ただし  $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}'$  は以下の direct system であり、 $U \subseteq X$  及び  $V, W \subseteq Y$  はすべて開集合である.

$$\mathfrak{D} = \{ \mathcal{G}(V) \mid f(U) \subseteq V \}, \mathfrak{D}' = \{ \mathcal{G}(W) \mid f(U) \subseteq V, f(f^{-1}(V)) \subseteq W \}.$$

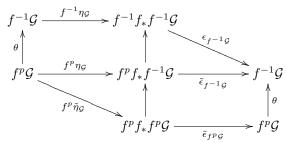
V,W は open set である.  $\mathfrak{D},\mathfrak{D}'$  は、実は等しい、なぜなら、初歩的な写像についての結果から、

$$[f(U)=f(f^{-1}(f(U)))\subseteq f(f^{-1}(V))\subseteq W]\wedge [f(f^{-1}(V))\subseteq V]$$

が成り立つからである。前半は  $\mathfrak{D}\supseteq\mathfrak{D}'$  を意味し,後半は  $\mathfrak{D}\subseteq\mathfrak{D}'$  を意味する。よって  $(f^p\mathcal{G})(U)$  が持つ UMP から,左の  $(f^p\mathcal{G})(U)$  から右の  $(f^p\mathcal{G})(U)$  への射は id である。ここから当初の予定の等式を得るためには,前段落の場合と違って注意が必要である。なぜなら,前段落では  $f_*f^{-1}f_*F$  は  $f_*f^pf_*F$  を一回 sheafification したものだが, $f^{-1}f_*f^{-1}G = Shf^pf_*Shf^pG$  は 2 回 sheafification を行っているからである。だから,議論は次のように行う,次の可換図式から始める。



この可換図式を  $f^p$  で写し, $\tilde{\epsilon}_{f^{-1}G}$ ,  $\tilde{\epsilon}_{f^pG}$  を追加して,もう一度 sheafification すると,以下の可換図式が得られる.



この可換図式の上の辺は、一番下の辺(今 id であることを示した)を元に、 $f^p G$  の sheafification の UMP を使って作り出したものに等しい。id から出来た射なので、一番上の辺は id. (Sh と  $f_*$  が交換できることについては書いていない。)

 $\blacksquare \Phi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}, \Psi_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$  is Natural.

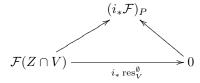
# Ex1.19 Extending a Sheaf by Zero.

X:: topological space, Z:: closed subset in X,  $U=X\setminus Z$  とする。 さらに  $i:Z\hookrightarrow X, j:U\hookrightarrow X$  を埋め込み写像とする。

### (a) $i_*\mathcal{F}$ : Extending $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(Z)$ by Zero Outside Z.

 $F \in \mathbf{Sh}(Z)$  とする. i は埋め込み写像なので、開集合 U について  $(i_*F)(U) = F(U \cap Z)$ . 点 P の開近傍を考える.

■Case:  $P \in Z^c$ .  $Z^c$  は開集合だから, $P \in Z^c$  ならば,開近傍 V が存在して  $P \in V \subseteq Z^c$  となる. このとき, $\mathcal{F}(Z \cap V) = \mathcal{F}(\emptyset) = 0$  となる.しかも  $\mathcal{F}(Z \cap V) = 0$  は十分小さいすべての U について成り立つ.したがって P の任意の開近傍 V について次の図式が可換.



よって  $\mathcal{F}(Z\cap V)\to (i_*\mathcal{F})_P$  はゼロ写像しかなく,  $(i_*\mathcal{F})_P$  の UMP から  $(i_*\mathcal{F})_P=0$ .

- ■Case:  $P \in Z$ . 逆に  $P \in Z$  ならば、点 P の X における開近傍 U から作られる  $Z \cap U$  は、常に空でない P の開近傍. いつでも埋め込み射  $F(V) \to F(Z \cap V)$  が存在するので、結局 F(V)  $(P \in V)$  なるabelian group 全てから  $(i_*F)_P$  に射がのびている.よって  $(i_*F)_P = F_P$ .
- ■Conclusion. まとめると、以下が成り立つ.

$$(i_*\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & (P \in Z) \\ 0 & (P \notin Z) \end{cases}$$

(b)  $j_1\mathcal{F}$ : Extending  $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(U)$  by Zero Outside U

 $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(U)$  とし、 $j_!\mathcal{F}$  を以下で定まる presheaf の sheafification とする.

$$(j_!\mathcal{F})^{pre}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}(V) & (V \subseteq U) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

sheafification で stalk は変わらないから, $(j_!\mathcal{F})_P = (j_!\mathcal{F})_P^{pre}$ . 点 P の開近傍を考えよう.

- ■Case:  $P \in U$ . U:: open なので、ある V:: open が存在して  $P \in V \subseteq U$  となる.このような V について  $(j_!\mathcal{F})^{pre}(V) = \mathcal{F}(V)$ . U より小さい任意の開近傍 V については  $(j_!\mathcal{F})^{pre}(V) = \mathcal{F}(V)$  となる上,U より大きい任意の開近傍 V から射  $\operatorname{res}_V^{U \cap V}: \mathcal{F}(V) \to \mathcal{F}(U)$  が生えている.よって  $(j_!\mathcal{F})_{P}^{pre} = \mathcal{F}_{P}$ .
- ■Case:  $P \in U^c$ . このとき,どのように P の開近傍 V をとっても, $P \in V$  かつ  $P \notin U$  なので  $V \not\subseteq U$ . したがって  $(j_!\mathcal{F})_P^{pre}=0$  となる.
- ■Conclusion. まとめると,以下が成り立つ.

$$(j_!\mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & (P \in U) \\ 0 & (P \notin U) \end{cases}$$

(c)  $0 \to j_!(\mathcal{F}|_U) \to \mathcal{F} \to i_*(\mathcal{F}|_Z) \to 0$  is Exact.

Ex1.2c を応用する.  $P \in X$  を任意の点とする.  $P \in U$  exor Z なので、それぞれの場合について考える.

- ■Case:  $P \in Z$ . この時,  $(j_!(\mathcal{F}|_U))_P = \mathcal{F}_P$ ,  $(i_*(\mathcal{F}|_Z))_P = 0$  となる. よって  $0 \to (j_!(\mathcal{F}|_U))_P \to \mathcal{F}_P \to (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P \to 0$  は  $0 \to \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P \to 0 \to 0$  に等しく,これは完全列.
- ■Case:  $P \in U$ . この時,  $(j_!(\mathcal{F}|_U))_P = 0$ ,  $(i_*(\mathcal{F}|_Z))_P = \mathcal{F}_P$  となる. よって  $0 \to (j_!(\mathcal{F}|_U))_P \to \mathcal{F}_P \to (i_*(\mathcal{F}|_Z))_P \to 0$  は  $0 \to 0 \to \mathcal{F}_P \to \mathcal{F}_P \to 0$  に等しく、これは完全列.

## Ex1.20 Subsheaf with Supports.

Z:: closed in  $X, \mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(X)$  とする.  $\Gamma_Z(X, \mathcal{F})$  を以下で定める.

$$\Gamma_Z(X, \mathcal{F}) = \{ s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X) \mid \operatorname{Supp}(s) \subseteq Z. \}.$$

"Supp $(s)\subseteq Z$ "は " $\forall P\in Z^c,\ s(P)=0$ "と同値である。また、特に Supp $(0)=\emptyset$  より、 $0\in\Gamma_Z(X,\mathcal{F})$ .

(a) Presheaf  $V \mapsto \Gamma_{V \cap Z}(V, \mathcal{F}|_V)$  is a Sheaf.

Presheaf  $\mathcal{H}_{Z}^{0}(\mathcal{F})$  &

$$\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}): V \mapsto \Gamma_{V \cap Z}(V, \mathcal{F}|_V)$$

で定める. これが sheaf であることを示そう. 開集合 V とその開被覆  $\{V_i\}_{i\in I}$  を任意にとる.

- ■Identity Axiom.  $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V)$  をとる。任意の  $i \in I$  について  $s|_{V_i} = 0$  が成り立つとしよう。この時, $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$  の定義から, $s \in \mathcal{F}(V)$  と  $\operatorname{Supp}(s|_V) \subseteq V \cap Z$  が成り立つ。 $\mathcal{F}$  の indentity axiom をもちいて, $s|_V = 0$  が得られる.
- ■Gluability Axiom.  $s_i \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V_i)$  をとる。任意の  $i,j \in I$  について  $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$  が成り立つとしよう。するとやはり  $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$  なので, $\mathcal{F}$  の gluability axiom から, $s|_{V_i} = s_i$  なる  $s \in \mathcal{F}(V)$  が存在する。あとは  $s \in \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})(V)$ ,すなわち  $\operatorname{Supp}(s) \subseteq V \cap Z$  を示せば良い。これは

$$\operatorname{Supp}(s_i) = \operatorname{Supp}(s|_{V_i}) = \operatorname{Supp}(s) \cap V_i \subseteq V_i \cap Z$$

から  $\operatorname{Supp}(s) = \bigcup (\operatorname{Supp}(s) \cap V_i) \subseteq \bigcup (V_i \cap Z) = V \cap Z$  と計算できる.

(b) For  $U = X \setminus Z$ ,  $0 \to \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|_U)$  is Exact.

開集合  $U=X\setminus Z$  と  $j:U\hookrightarrow X$  について、 $0\to\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})\to\mathcal{F}\to j_*(\mathcal{F}|_U)$  が exact であることを示す。 さらに、 $\mathcal{F}::$  flasque ならば  $0\to\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})\to\mathcal{F}\to j_*(\mathcal{F}|_U)\to 0$  も exact であることを示す。 定義より、 $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}),j_*(\mathcal{F}|_U)$  は以下のような集合である。

$$\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) = \{ s \in \mathcal{F}(V) \mid {}^\forall Q \in U \cap V, \quad s(Q) = 0. \}, \quad j_*(\mathcal{F}|_U) = \mathcal{F}(U \cap V).$$

そこで写像  $\zeta: \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|_U)$  を以下で定義する.

$$\zeta(s)(Q) = [Q \in U \cap V]s(Q)$$
 where  $V :: \text{ open in } X, s \in \mathcal{F}(V), Q \in V.$ 

ただし  $[Q \in U \cap V]$  は Iverson の記法である. (ここは指示関数を用いて  $\chi_{U \cap V}(Q)$  と書いても良い.) すると既に確認した  $\mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$  の定義から、 $\ker \zeta = \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$ . よって  $0 \to \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \hookrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\zeta} j_*(\mathcal{F}|_U)$  は exact. さらに  $\mathcal{F}$ :: flasque だと仮定する. すると、 $s \in \mathcal{F}(U \cap V)$  に対して  $s'|_{U \cap V} = s$  なる  $s' \in \mathcal{F}(V)$  が存在する. 明らかに  $\zeta(s') = s$  となるから、この時  $\zeta$  は全射.したがって  $0 \to \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to j_*(\mathcal{F}|_U) \to 0$  も exact になる.

## Ex1.21 Some Examples of Sheaves on Varieties.

k :: algebraically closed field, X :: variety over k とする.  $\mathcal{O}_X$  を the sheaf of regular functons on X (Example 1.0.1) とする.

(a) The Sheaf of Ideals  $\mathcal{I}_Y$ .

Y:: closed in X とする. 任意の U:: open in X について,  $\mathcal{I}_Y(U)$  を以下で定める.

$$\mathcal{I}_{V}: U \mapsto \{f \in \mathcal{O}_{X}(U) \mid \forall P \in Y \cap U, f(P) = 0.\}.$$

 $\mathcal{I}_Y(U)$  は  $\mathcal{O}_X(U)$  のイデアルである. この時,  $\mathcal{I}_Y(\subseteq \mathcal{O}_X)$  が sheaf であることを示す.

- (b) If Y :: subvariety, then  $\mathcal{O}_X \cong i_*(\mathcal{O}_Y)$ .
- (c)
- (d)
- (e)

# Ex1.22 Glueing Sheaves.

X:: topological space,  $\mathfrak{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ :: open cover of X,  $\mathcal{F}_i\in\mathbf{Sh}(U_i)$  とする. この  $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$  に付随して,同型写像  $\phi_{ij}:\mathcal{F}_i|_{U_i\cap U_j}\stackrel{\equiv}{\to} \mathcal{F}_j|_{U_i\cap U_j}$  が存在し, $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$  with  $\{\phi_{ij}\}_{i,j\in I}$  が inverse system をなすとする. この時,inverse limit  $\mathcal{F}$  の存在を示す.さらに, $\mathcal{F}|_{U_i}\equiv\mathcal{F}_i$  となることを示す.この命題は section でなく sheaf の Gluablity Axiom と言える.

Prop1.1 を用いて仮定を書き換える.  $\{\mathcal{F}_i\}_{i\in I}$  について,以下の同型がある.

$$\forall i, j \in I, \quad \forall P \in U_i \cap U_j, \quad (\mathcal{F}_i)_P \cong (\mathcal{F}_i)_P.$$

この時, sheaf  $\mathcal{F}$  が存在して,

$$\forall i \in I, \quad \forall P \in U_i, \quad \mathcal{F}_P = (\mathcal{F}|_{U_i})_P \cong (\mathcal{F}_i)_P$$

となることを示す. Ex1.19b の結果が結論によく似ているので,これを参考にする.

 $\mathcal{F}$  を以下の presheaf の sheafification と定義する.

$$\mathcal{F}^{pre}(V) = \begin{cases} \mathcal{F}_i(V) & (\exists i \in I, \ V \subseteq U_i) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

もし $V\subseteq U_i$  なる i が複数存在した時には、どれを選んでも構わない。その時 $V\subset U_i\cap U_j$  なる  $i,j\in I$  が存在し、i,j どちらを選んでも  $\mathcal{F}^{pre}(V)$  が  $\phi_{ij}$  を介して同型になるからである。そして Ex1.19b の証明から分かるように、 $(\mathcal{F}|_{U_i})_P=(\mathrm{emb}_!^{U_i}\,\mathcal{F}_i)_P=(\mathcal{F}_i)_P$ 。ただし  $\mathrm{emb}^{U_i}:U_i\hookrightarrow U$  は埋め込み写像である。