

ゼミノート #2

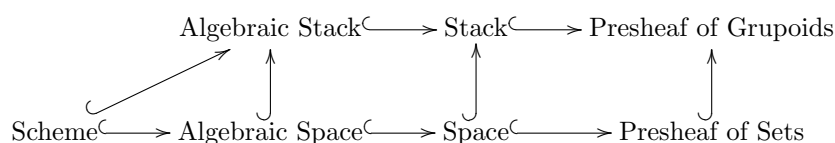
Sites and Sheaves

七条彰紀

2018 年 10 月 16 日

1 Motivation.

scheme, stack 等には以下のような包含関係がある.



最終的にセミナーを通じて我々が定義したいのは algebraic stack であるが, 今回はそれよりも定義が簡素な “space” を定義する. 先に space の定義文を示そう.

定義 1.1 (Space, [1] p.26)

$S ::$ scheme とする. Space over S (or S -space) とは, big etale site over S 上にある, 集合の sheaf である.

ここに現れる “big etale site” と “big etale site 上の sheaf” を以下で定義する. さらに sheaf の射について幾つか定義をすれば, algebraic space まで定義できる.

定義だけでは space の local は性質を調べる手段がないため, 次回は「高次版の sheaf の貼り合わせ」と呼べる “Descent theory” を学ぶ.

2 Definitions : Sites.

以下で導入する Grothendieck topology は, 「Sheaf を定義するのに必要な位相空間の定義を抽出し, 圏論的に一般化したもの」である. $X ::$ topological space とし, sheaf on X の定義を見なおしてみよう. すると, sheaf on X は次に挙げるもののみに用いて定義されていると分かる.

1. X の開部分集合と包含写像が成す圏.
2. 開部分集合 $U \subseteq X$ の open covering.
3. 同じく U の open covering $:: \{U_i\}_i$ が与えられたときの族 $\{U_i \cap U_j\}_{i,j}$

そこで次のように定義する.

定義 2.1 (Grothendieck Topology)

$\mathbf{C} :: \text{category}$ について, \mathbf{C} 上の Grohendieck topology は任意の $X \in \mathbf{C}$ に \mathbf{C} の射の集まり (collection) $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ を対応させる Cov で構成される. さらに, Cov は以下を満たすように要請される.

- (a) $X' \rightarrow X :: \text{iso}$ ならば $\{X' \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X)$.
- (b) $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U), V \rightarrow U \in \mathbf{C}$ について, $\{U_i \times_U V \rightarrow V\} \in \text{Cov}(V)$.
- (c) $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \text{Cov}(U)$ をとり, さらに各 i について $\{V_{i,j} \rightarrow U_i\}_j \in \text{Cov}(U_i)$ をとる.
この時, 合成も Cov に入っている: $\{V_{i,j} \rightarrow U_i \rightarrow U\}_{i,j} \in \text{Cov}(U)$.

注意 2.2

Cov の条件のうち, (b), (c) はそれぞれ stable under base change, stable under composition に対応する.

Cov の元には大抵, 以下の条件が課される.

定義 2.3 ((Jointly) Surjective Family)

ある圏の射の集まり $\{U_i \rightarrow U\}_i$ について,

$$\bigsqcup_i U_i \rightarrow U$$

が surjective である時, (同値な条件として, $\text{im}(U_i \rightarrow U)$ の set-theoretic union が U に等しい時,) この集まり $\{U_i \rightarrow U\}$ を (jointly) surjective family という.

注意 2.4

ここで「集合」ではなく「集まり」という言葉を用いたのは, これらが集合ではない可能性があるからである.

定義 2.5 (Site)

圏 \mathbf{C} と \mathbf{C} 上の Grothendieck topology $:: \text{Cov}$ の組を site と呼ぶ. site に対し, その部分である圏を the underlying category と呼ぶ. しばしば Cov を略して \mathbf{C} のみで site を表す.

定義 2.6 (Localized Site.)

site $:: \mathbf{C}$ と $X \in \mathbf{C}$ について, localized site $:: \mathbf{C}/X$ を以下のように定義する.

\mathbf{C}/X の underlying category は slice cageory $:: \mathbf{C}/X$ である. したがって対象は \mathbf{C} 内の X への射である. Grothendieck topology $:: \text{Cov}$ は,

$$\{[U_i \rightarrow X] \rightarrow [U \rightarrow X]\}_i \in \text{Cov}([U \rightarrow X]) \implies \{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U).$$

のように定められる.

定義 2.7 (Diagrams (or Comma Site).)

$\Delta :: \text{category}, \mathbf{C} :: \text{site}, F: \Delta^{op} \rightarrow \mathbf{C} :: \text{functor}$ とする. この時 site $:: \mathbf{C}_F$ を以下のように定める.

まず undrelying category は $(\text{id}_{\mathbf{C}} \downarrow F)$ である. したがって対象は $X \rightarrow F(\delta)$ ($\delta \in \Delta$) である. Cov は以下のように定める.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X'_i & \xrightarrow{f_i^b} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(\delta_i) & \xrightarrow{f_i} & F(\delta) \end{array} \right\} \in \text{Cov}([X \rightarrow F(\delta)]) \implies f_i: \delta \rightarrow \delta_i :: \text{iso. and } \{f_i^b: X'_i \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X).$$

定義 2.8 (Continuous Functor.)

$\mathbf{C}, \mathbf{C}' :: \text{sites}$, $T(T') :: \text{topos associated } \mathbf{C}(\mathbf{C}')$ とする. $f: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}' :: \text{functor}$ が \S continuous とは, 以下の 2 つが成立すること:

1. 任意の $X \in \mathbf{C}$ と $\{U_i \rightarrow X\}_i \in \text{Cov}_{\mathbf{C}}(X)$ について,

$$\{f(U_i) \rightarrow f(X)\}_i \in \text{Cov}_{\mathbf{C}'}(f(X))$$

となる.

2. \mathbf{C} の任意の射 $X_1 \rightarrow Y, X_2 \rightarrow Y$ について, fiber product $:: X_1 \times_Y X_2$ が \mathbf{C} に存在するならば,

$$f(X_1 \times_Y X_2) \cong f(X_1) \times_{f(Y)} f(X_2).$$

注意 2.9

$X, X' :: \text{topological space}$ について, $O(X), O(X') :: \text{classical site}$, $f: X \rightarrow X' :: \text{continuous map}$ とする. この時, $f^{-1}: O(X') \rightarrow O(X) :: \text{continuous functor}$. 2 つめの条件は f^{-1} が \cap と交換することと対応する.

注意 2.10

後に示すように, continuous functor はよくあるケースで category of sheaves on site の間の関手を誘導する. これは scheme の間の continuous map が category of sheaves on scheme の間の関手 (e.g. inverse image functor, direct image functor) を定めるのと同じである.

3 Examples : Sites.

3.1 Site.

例 3.1 (Classical topology.)

$X :: \text{topological space}$ とし, $O(X)$ を以下のような圏とする.

対象 X の開集合.

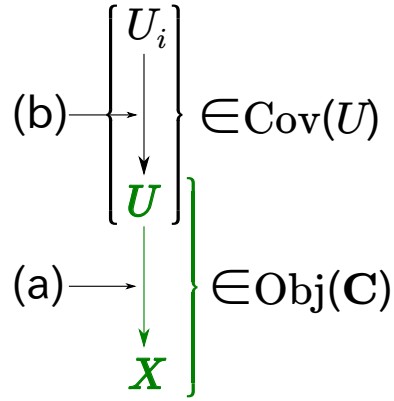
射 包含射.

この時, $U \in O(X)$ の covering $:: \text{Cov}(U)$ を, U への包含射のみから成る jointly surjective family の集合^{†1} とする.

以上で定まる site $:: (O(X), \text{Cov})$ は通常の topology を Grothendieck topology の枠組の中で再現している.

以下で主に用いるのは, \mathbf{C} が slice category $:: \mathbf{Sch}/X$ ($X \in \mathbf{Sch}$) の部分圏であるような site である. $X \in \mathbf{Sch}$ に対して, このような site は underlying category ($\subset \mathbf{Sch}/X$) と Grothendieck topology (Cov) からなるから, 以下の図の (a) $U \rightarrow X$, (b) $U_i \rightarrow U$ がどのようなものであるか定めれば定義できる.

^{†1} 包含射の個数は高々 $2^{\#X}$ 以下の濃度なので, family の集まりは集合.



すなわち，以下の未完成な定義文をテンプレートとする，一連の定義文の群がある．

定義 3.2 (** site)

$X :: \text{scheme}$ について，圏 \mathbf{C} を以下で定める．

対象 (a) である射 $U \rightarrow X$ ．

射 二つの対象の間の射 $[U \rightarrow X] \rightarrow [U' \rightarrow X]$ は， X -morphism $U \rightarrow U'$ ．

$[U \rightarrow X] \in \mathbf{C}$ に対して， $\text{Cov}(U)$ を (b) である射の集まり $\{U_i \rightarrow U\}_i$ であって jointly surjective family であるものの集まりとする．

以上の \mathbf{C} と Cov からなる site を ** site of X と呼ぶ．

注意 (2.2) で触れたとおり，性質 (b) が stable under base change & composition であれば，以上のテンプレ

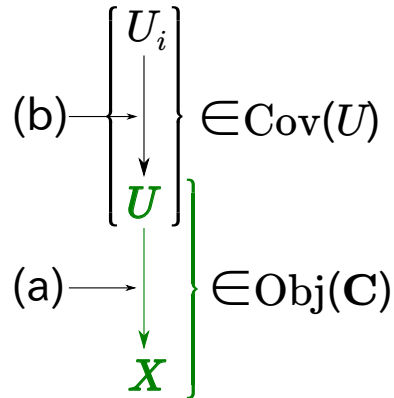
レートは site の定義文と成る.

定義 3.3

以上の定義文テンプレートを用いて, (a), (b) と各 site の定義を以下のように対応させる. (a) が “-” とある箇所は「 \mathbf{Sch}/X の任意の射」を意味する. さらに, “open inclusion” は Zariski 開集合の間にある包含射のことである (したがって small Zariski site の underlying category には Zariski 開集合しか無い).

***	small Zariski	big Zariski	small etale	big etale
(a)	open immersion	–	etale	–
(b)	open immersion	open immersion	etale	etale
***	lissee-etale	smooth	fppf	fpqc
(a)	smooth	smooth	–	–
(b)	etale	smooth	flat&locally of finite presentation	flat&quasi-compact

図の再掲:



注意 3.4

“fppf” は “fidèlement plate de présentation finie” (仏語) すなわち “faithfully flat and of finite presentation” の略である. flat& locally of finite presentation ならば実際にこのように成る. 同様に “fpqc” は “fidèlement plat et quasi-compact” (仏語) すなわち “faithfully flat and quasi-compact” の略である.

定義 3.5

*** site of X の記号を以下のように定める.

***	small Zariski	big Zariski	small etale	big etale
名前	Zar(X)	ZAR(X)	Et(X)	ET(X)
***	lissee-etale	smooth	fppf	fpqc
名前	Lis-Et(X)	Sm(X)	Fppf(X)	Fpqc(X)

[3] では big Zariski site of X を $(\mathbf{Sch}/X)_{\text{Zariski}}$ などと書く.

3.2 Point.

以下は small/big etale site のみで使われるものである.

定義 3.6 (Geometric Point, Etale Neighborhood, [2] 1.3.15.)

- (i) $X :: \text{scheme}$ に対し, $k :: \text{separably closed field}$ を用いて $\bar{x}: \text{Spec } k \rightarrow X$ と表される射を geometric point と呼ぶ.
- (ii) geometric point $:: \bar{x}: \text{Spec } k \rightarrow X$ について, \bar{x} の etale neighborhood とは $U \rightarrow X$ が etale であるような以下の可換図式のことである.

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow & \downarrow \\ \text{Spec } k & \xrightarrow{\bar{x}} & X \end{array}$$

- (iii) geometric point $:: \bar{x}: \text{Spec } k \rightarrow X$ について, \bar{x} の 2 つの etale neighborhood $:: U_1, U_2$ を考える. この時, U_1 と U_2 の間の射とは, 以下の図式を可換にする morphism of schemes $:: \eta: U_1 \rightarrow U_2$ のことである.

$$\begin{array}{ccccc} & & U_1 & \xrightarrow{\eta} & U_2 \\ & \nearrow & & \searrow & \nearrow \\ \text{Spec } k & & & & X \end{array}$$

注意 3.7

より一般的な point of site の定義が存在する ([3] Tag 04JU). これは etale か否かに依らず採用できる. しかしこの一般的な定義は複雑であるし, 我々は small/big etale site しか扱わないので, 我々は以上の定義のみ用いる.

3.3 Continuous Functor.

例 3.8

inclusion $\text{Zar}(X) \hookrightarrow \text{Et}(X) \hookrightarrow \text{Fppf}(X)$

例 3.9

flat morphism $:: f: X \rightarrow Y$ をとり, f による pullback functor を P_f とする.

4 Definitions : Sheaves.

定義 4.1 (Sheaf, Topos, Morphism of Topoi.)

- (i) site $:: S$ 上の presheaf とは, functor $:: \mathcal{F}: S^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ のことである.
- (ii) presheaf on $S :: \mathcal{F}$ が sheaf であるとは, 以下の図式が equalizer diagram であるということ.

$$\mathcal{F}(U) \longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)$$

ここで右の並行射はそれぞれ射影 $\text{pr}_1, \text{pr}_2: U_i \times U_j \rightarrow U_i, U_j$ から \mathcal{F} により誘導される射である。

- (iii) Site $:: S$ 上の, 圏 $\mathbf{C}(= \mathbf{Sets}, \mathbf{Rings}, \mathbf{AbGrp}, \dots)$ への presheaf の圏を $\mathbf{PSh}(S, \mathbf{C})$, sheaf の圏を $\mathbf{Sh}(S, \mathbf{C})$ と書く。
- (iv) morphism of shaeves $:: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ とは, natural transformation のことである。
- (v) $T ::$ category が topos であるとは, category of sheaves of sets on a site と圏同値であるということである。
- (vi) $T, T' ::$ topoi とする. morphism of topoi $:: f: T \rightarrow T'$ とは, 以下の 3 つの射 (2 functor and 1 isomorphism.) からなる。

$$f_*: T \rightarrow T', \quad f^*: T' \rightarrow T, \quad \phi: \text{Hom}_T(f^*(-), -) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{T'}(-, f_*(-)).$$

注意 4.2

上で定義した sheaf of sets と同様に, sheaf of abelian groups, sheaf of rings, ... が定義できる。これらはそれぞれ sheaf of sets の圏 $:: \mathbf{Sh}(\mathbf{C}, \mathbf{Sets})$ における abelian group objects, ring objects, ... と定義される。

注意 4.3

“Topos” はギリシャ語で「場 (place)」を意味する。ギリシャ語なので複数形は “topoi”。

$X ::$ scheme について, X に関する topos を X_{et}, X_{ET}, \dots などと書く。著者 (例えば [3]) によつてはこれらの記号を \mathbf{Sch}/X を underlying category とする site に用いる。しかし “Grothendieck’ s insight is that the basic object of study is the topos, not the site.” (M.Olsson “Stacks”) というということから, topos に site より簡単な記号を与えるのは理解できることである。

定義 4.4 (Ringed Topos.)

- (i) $T ::$ topos と T の ring object $:: \Lambda$ を合わせて ringed topos と呼ぶ。
- (ii) morphism of ringed topoi $:: (f, f^\#): (T, \Lambda) \rightarrow (T', \Lambda')$ は,
 - morphism of topoi $:: f = (f_*, f^*, \phi): T \rightarrow T'$ と,
 - morphism of ring in $T' :: f^\#: \Lambda' \rightarrow f_*\Lambda$
の組である。

定義 4.5 (Stalk, [2] 1.3.15.)

$U \in I_{\bar{x}}$ について, $\mathcal{F}(U)$ から $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ への標準的射がある。この射による $s \in \mathcal{F}(U)$ の像を $s_{\bar{x}}$ と表し, germ of s at \bar{x} と呼ぶ。

5 Examples : Sheaves.

例 5.1

$X ::$ scheme と, \mathbf{Sch}/X の部分圏を underlying category とする site $:: \mathbf{C}$ (e.g. small/big Zariski site) について, $\underline{X}(-) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$ で functor $:: \underline{X}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ を定める。この時, $\underline{X} ::$ presheaf on \mathbf{C} . 特に small/big Zariski site, small/big etale site では sheaf である。

例 5.2

constant (pre)sheaf

6 Propositions : Sheaves.

定理 6.1

$\mathbf{C} :: \text{site}$ とする. 忘却関手

$$Fgt : (\text{Category of Sheaves on } \mathbf{C}) \rightarrow (\text{Category of Presheaves on } \mathbf{C}).$$

は left adjoint functor $:: Sh$ を持つ.

命題 6.2

[2] 1.4.9 $\underline{X} :: \text{sheaf}$.

7 Definitions : Morphism of Shaves.

定義 7.1 (Injective, Surjective)

8 Examples : Morphism of Shaves.

9 Propositions : Morphism of Shaves.

命題 9.1

inj/surj/iso at stalk.

参考文献

- [1] Toms L.Gmez. Algebraic stacks. <https://arxiv.org/abs/math/9911199v1>, 1999.
- [2] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [3] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.