Ex2.1 Grothendieck Vanithing Thm is Best Possible.

(a) Let $X = \mathbb{A}^1, U = X - \{P, Q\}$. $H^1(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$.

k :: infinite field, $X = \mathbb{A}^1_k$, $P, Q \in X$ :: distinct closed points, $Y = \{P, Q\}, U = X - Y$ とおく．$\#Y < \#k = \infty$ なので $\#U = \infty$.

次の完全列が成り立つ．

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathbb{Z}_Y \longrightarrow 0.$$

ここから次の長完全列が誘導される．

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathbb{Z}_U) \longrightarrow \Gamma(X, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow \Gamma(X, \mathbb{Z}_Y) \\ \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_U) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_Y) \\ \longrightarrow \cdots \end{array}$$

完全列であるから，$H^1(X, \mathbb{Z}_U) = 0$ は $\Gamma(X, \mathbb{Z}_X) \to \Gamma(X, \mathbb{Z}_Y)$ が全射であることと同値である．一方，$\#U = \infty, \#Y = 2$ であるから，

$$\Gamma(X, \mathbb{Z}_X) = \mathbb{Z}, \qquad \Gamma(X, \mathbb{Z}_Y) = \Gamma(\{P\} \sqcup \{Q\}, \mathbb{Z}_Y) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

（$\sqcup$ は disjoint union を意味する．）よって全射にはなり得ない．したがって $H^1(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$.

(b) Generalization for $\mathbb{A}^n$.

k :: infinite field, $X = \mathbb{A}^n_k$, $H_1, \ldots, H_{n+1}$ :: hyperplanes, $Y = \bigcup_{i=1}^{n+1} H_i, U = X - Y$ とおく．$H^n(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$ を示す．$n = 1$ の場合については (a) で示したから，$n > 1$ とする．

完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathbb{Z}_Y \longrightarrow 0$$

から誘導される長完全列の一部は次の様になる．

$$H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_Y) \longrightarrow H^n(X, \mathbb{Z}_U) \longrightarrow H^n(X, \mathbb{Z}_X).$$

また，$\mathbb{Z}_X$ :: constant sheaf on irreducible space なので $\mathbb{Z}_X$ :: flasque (II, Ex1.16a), acyclic (Prop2.5). 今 $n > 1$ だから $H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_X) = H^n(X, \mathbb{Z}_X) = 0$. よって $H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_Y) \cong H^n(X, \mathbb{Z}_U)$ が得られる．なので我々は $H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_Y) \neq 0$ を示すことにする．

Ex2.2 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$ :: acyclic.

Ex2.3 Cohomology with Supports.

X :: topological space, Y :: closed subset of X, $U = X - Y$, $\mathcal{F}$ :: sheaf of abelian group on X とする．この時，$\Gamma_Y(X, \mathcal{F})$ を以下で定める．

$$\Gamma_Y(X, \mathcal{F}) = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid \operatorname{Supp} s \subseteq Y\} = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid s|_{X-Y} = 0\}.$$

(a) $\Gamma_Y(X,-) : \mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}$ :: left exact functor.

$\mathfrak{Ab}(X)$ の完全列を考える．

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}''.$$

ここから誘導される以下の列が完全であることは II, Ex1.8 で示した．

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}') \xrightarrow{f} \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{g} \Gamma(X,\mathcal{F}'').$$

Γ を Γ_Y に付け替えても完全列であることを示す．

■Exact at $\Gamma_Y(X,\mathcal{F}')$. 示すべきことは次のこと．

$$^\forall s \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}'), \quad f(s) = 0 \implies s = 0.$$

$f : \Gamma(X,\mathcal{F}') \to \Gamma(X,\mathcal{F})$ が単射なので，その制限 $f|_{\Gamma_Y(X,\mathcal{F}')}$ も単射．よって主張が示せた．

■Exact at $\Gamma_Y(X,\mathcal{F})$. 示すべきは次のこと．

$$^\forall t \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}), \quad g(t) = 0 \iff {}^\exists u \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}'), \quad f(u) = t.$$

$\Longleftarrow$ は $g \circ f = 0$ から直ちに分かる． $\Longrightarrow$ は次のように示す．元の完全列があるため，$f(u) = t$ を満たす u が $\Gamma(X,\mathcal{F}')$ からはとれる．今 $t \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F})$ から t は以下を満たす．

$$^\forall P \in U, \quad t_P = (f(u))_P = f_P(u_P) = 0.$$

f_P は単射であるから，任意の点 $P \in U$ について $u_P = 0$. よって $u \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}')$.

(b) $\mathcal{F}'$ :: flasque then $0 \to \Gamma_Y(X,\mathcal{F}') \to \Gamma_Y(X,\mathcal{F}) \to \Gamma_Y(X,\mathcal{F}'') \to 0$ is exact.

次の完全列は成立する (II, Ex1.16b).

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}') \xrightarrow{f} \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{g} \Gamma(X,\mathcal{F}'') \longrightarrow 0.$$

これらの Γ を Γ_Y に取り替えても良いことを示す．(a) で示したことを合わせれば，次のことを示せば良いということになる．

$$^\forall t \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}''), \quad {}^\exists u \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}), \quad g(u) = t.$$

元の完全列から，$g(u) = t$ を満たす u が $\Gamma(X,\mathcal{F})$ からはとれる．今 $t \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}'')$ から t は以下を満たす．

$$t|_U = (g(u))|_U = g|_U(u|_U) = 0.$$

元の完全列があるため，$f|_U(\tilde{s}) = u|_U$ となる $\tilde{s} \in \Gamma(U,\mathcal{F}')$ がとれる．$\mathcal{F}'$ :: flasque なので $s|_U = \tilde{s}$ となる $s \in \Gamma(X,\mathcal{F}')$ が存在する．構成から

$$f(s)|_U = u|_U \iff \bar{u} := u - f(s) \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}).$$

$g \circ f = 0$ なので $g(\bar{u}) = g(u - f(s)) = g(u) = t$. よって $\bar{u}$ が条件を満たす．

(c) injective sheaves are acyclic for $\Gamma_Y(X,-)$.

Prop2.5(injective sheaves are acyclic for $\Gamma(X,-)$) の証明がそのまま使える．この証明では (b) の内容の他には derived functor の性質しか使わない．

(d) $\mathcal{F}$ :: flasque then $0 \to \Gamma_Y(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(X-Y,\mathcal{F}) \to 0$ is exact.

引き続き $U := X - Y$ とする．$\mathrm{res}^U_X : \Gamma(X,\mathcal{F}) \to \Gamma(U,\mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ :: flasque ゆえに全射．この写像の kernel は次のような集合である．

$$\ker \mathrm{res}^U_X = \{s \in \Gamma(X,\mathcal{F}) \mid s|_U = 0\}.$$

これは $\Gamma_Y(X,\mathcal{F})$ に他ならない．

(e) there is a long exact seq :: $\cdots \to H^i_Y(X,\mathcal{F}) \to H^i(X,\mathcal{F}) \to H^i(U,\mathcal{F}|_U) \to \cdots$.

$\mathcal{F}$ の injective resolution :: $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^*$ をとる．このとき $\mathcal{I}^*$ は flasque resolution でもある．すると (d) より次の図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma_Y(X,\mathcal{I}^0) \arrow[r, "(d^0_X)|_{\subseteq Y}"] \arrow[d, hook] & \Gamma_Y(X,\mathcal{I}^1) \arrow[r, "(d^1_X)|_{\subseteq Y}"] \arrow[d, hook] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{I}^0) \arrow[r, "d^0_X"] \arrow[d, "\mathrm{res}^U_X"] & \Gamma(X,\mathcal{I}^1) \arrow[r, "d^1_X"] \arrow[d, "\mathrm{res}^U_X"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \Gamma(U,\mathcal{I}^0) \arrow[r, "d^0_U"] \arrow[d] & \Gamma(U,\mathcal{I}^1) \arrow[r, "d^1_U"] \arrow[d] & \cdots \\
& 0 & 0 & \cdots
\end{tikzcd}$$

ここで $\mathcal{I}^*$ の微分射を $d^i : \mathcal{I}^i \to \mathcal{I}^{i+1}$ とした．また $(d^i_X)|_{\subseteq Y} = (d^i_X)|_{\Gamma_Y(X,\mathcal{I}^i)}$ とした．以上の写像の定義から，それぞれの四角形が可換であることが確認できる．

まとめると，次の exact sequence of complexs が存在する．

$$0 \to \Gamma_Y(X,\mathcal{I}^*) \to \Gamma(X,\mathcal{I}^*) \to \Gamma(X-Y,\mathcal{I}^*) \to 0.$$

よって derived functor の一般論から主張の long exact sequence が得られる．

(f) $Y \subseteq V$ :: open in X then $H^i_Y(X,\mathcal{F}) \cong H^i_Y(V,\mathcal{F}|_V)$.

主張 Ex2.3.1
Y を X の閉集合，V を Y を含む X の開集合とする．任意の $\mathcal{F}$ :: sheaf on X of abelian group について次が成り立つ．

$$\Gamma_Y(X,\mathcal{F}) \cong \Gamma_Y(V,\mathcal{F}|_V).$$

(証明)．同型写像を次のように定める．

$$\begin{array}{cccc}
\rho : & \Gamma_Y(X,\mathcal{F}) & \to & \Gamma_Y(V,\mathcal{F}|_V) \\
& s & \mapsto & s|_V \\
& \epsilon & \leftarrow\!\shortmid & t
\end{array}$$

ただし ϵ は次のような section である:

$$^\forall P \in X,\quad \epsilon_P = \begin{cases} t_P & (P \in V) \\ 0 & (P \in Y^c). \end{cases}$$

$V \cap Y^c$ において $t_P = 0$ なのでこれは well-defined. また，ϵ は $t \in \Gamma(V, \mathcal{F})$ と $0 \in \Gamma(Y^c, \mathcal{F})$ の張り合わせであるから，glubability axiom より $\epsilon \in \Gamma(X, \mathcal{F})$. よって ρ 全体も well-defiend. ∎

$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{I}^*$ :: injective resolution of $\mathcal{F}$ をとる．この時，$0 \to \mathcal{F}|_V \to \mathcal{I}^*|_V$ は injective/flasque resolution of $\mathcal{F}|_V$. 主張から $\Gamma_Y(X, \mathcal{I}^*) \cong \Gamma_Y(V, \mathcal{I}^*|_V)$ なので，求める cohomology group の同型が得られる．

Ex2.4 Mayer–Vietoris Sequence.

Y_1, Y_2 :: closed subset of X とする．$\mathcal{F}$ :: sheaf of abelian group on X について次の完全列が存在することを証明する．

$$\ldots \longrightarrow H^i_{Y_1 \cap Y_2}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i_{Y_1}(X, \mathcal{F}) \oplus H^i_{Y_2}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^i_{Y_1 \cup Y_2}(X, \mathcal{F})$$
$$\longrightarrow H^i_{Y_1 \cap Y_2}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \ldots$$

主張 Ex2.4.1
$\mathcal{F}$ :: flasque sheaf on X について，次の完全列が存在する．

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Y_1 \cap Y_2}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_{Y_1}(X, \mathcal{F}) \oplus \Gamma_{Y_2}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma_{Y_1 \cup Y_2}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

(証明). 9-Lemma を用いる．

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \Gamma_{Y_1 \cap Y_2}(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{Y_1}(X, \mathcal{F}) \oplus \Gamma_{Y_2}(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma_{Y_1 \cup Y_2}(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathcal{F}) \oplus \Gamma(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Gamma(X - (Y_1 \cap Y_2), \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X - Y_1, \mathcal{F}) \oplus \Gamma(X - Y_2, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(X - (Y_1 \cup Y_2), \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

各列は Ex2.3d から exact. 真ん中の行は明らかに split exact sequence で，一番下の行は以下の写像で exact になる．よって一番上の行も exact.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Gamma(X - (Y_1 \cap Y_2), \mathcal{F}) \arrow[r] & \Gamma(X - Y_1, \mathcal{F}) \oplus \Gamma(X - Y_2, \mathcal{F}) \arrow[r] & \Gamma(X - (Y_1 \cup Y_2), \mathcal{F}) \arrow[r] & 0 \\
 & a \arrow[r, mapsto] & (a|_{X - Y_1}, -a|_{X - Y_2}) & & \\
 & & (a, b) \arrow[r, mapsto] & a|_{X - (Y_1 \cup Y_2)} + b|_{X - (Y_1 \cup Y_2)} &
\end{tikzcd}$$

∎

主張から次の exact sequence of complexs が得られる．

$$0 \longrightarrow \Gamma_{Y_1 \cap Y_2}(X, \mathcal{I}^*) \longrightarrow \Gamma_{Y_1}(X, \mathcal{I}^*) \oplus \Gamma_{Y_2}(X, \mathcal{I}^*) \longrightarrow \Gamma_{Y_1 \cup Y_2}(X, \mathcal{I}^*) \longrightarrow 0.$$

これから derived functor の一般論によって所望の完全列が得られる．

Ex2.5 $H^i_P(X, \mathcal{F}) = H^i_P(X_P, \mathcal{F}_P)$.

Ex2.6 $\{\mathcal{I}_\alpha\}$ :: direct system of injective sheaves then $\lim \mathcal{I}_\alpha$ :: injective sheaf.

X :: noetherian topological space, $\{\mathcal{I}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ :: direct system of injective sheaves of abelian groups on X とする．この時，$\varinjlim_{\alpha \in A} \mathcal{I}_\alpha$ :: injective であることを示す．

主張 Ex2.6.1
$\mathcal{I}$ :: sheaf of abelian groups on X とする．$\mathcal{I}$ :: injective と，次の可換図式で，$\bar{f}$ が存在することは同値である．

$$\begin{tikzcd} {}^\forall\mathcal{R} \arrow[r, hook] \arrow[d, "{}^\forall f"'] & \mathbb{Z}_{{}^\forall U} \arrow[dl, "{}^\exists \bar{f}"] \\ \mathcal{I} & \end{tikzcd}$$

(証明)．injective ならば $\bar{f}$ が存在することは injective の定義から従う．逆を示そう．

$\alpha \in A$ と $\mathcal{F}_\alpha$ を Thm2.7 の証明の Step 3 と同様に定義する．また $\alpha' \subsetneq \alpha$ と $f : \mathcal{R} \to \mathcal{I}$ について，$f_{\alpha'} = f|_{\mathcal{R} \cap \mathcal{F}_{\alpha'}}$ と置く．$\sum : \bigoplus_{\alpha' \subsetneq \alpha} \mathcal{F}_{\alpha'} \to \mathcal{F}_\alpha$ を $\sum (\bigoplus_{\alpha'} s_{\alpha'}) = \sum_{\alpha'} s_{\alpha'}$ と定めると，これは全射に成る．(2) において $f_{\alpha'}$ の拡張 $\overline{f_{\alpha'}}$ が存在すれば，$\bar{f} = (\bigoplus_{\alpha'} \overline{f_{\alpha'}}) \circ \sum^{-1}$ と置くことで（TODO: この $\bar{f}$ は well-defined?）f の拡張が得られる (TODO)．

(1)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"] & \mathcal{F}_\alpha \\ & \mathcal{I} \end{tikzcd}$$

(2)

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\alpha' \subsetneq \alpha}(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}_{\alpha'}) \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[drr, bend right, "\bigoplus_{\alpha'} f_{\alpha'}"'] & \bigoplus_{\alpha' \subsetneq \alpha} \mathcal{F}_{\alpha'} \arrow[d, "\Sigma"] & \\ \mathcal{R} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"] & \mathcal{F}_\alpha & \\ & \mathcal{I} & \end{tikzcd}$$

(3)

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{\alpha' \subsetneq \alpha}(\mathcal{R} \cap \mathcal{F}_{\alpha'}) \arrow[rr, hook] \arrow[d] \arrow[dr, bend right, "\bigoplus_{\alpha'} f_{\alpha'}"'] & & \bigoplus_{\alpha' \subsetneq \alpha} \mathcal{F}_{\alpha'} \arrow[d, "\Sigma"'] \arrow[dl, bend left, "\bigoplus_{\alpha'} \overline{f_{\alpha'}}"] \\ \mathcal{R} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "f"] & & \mathcal{F}_\alpha \arrow[dl, "\bar{f}"'] \\ & \mathcal{I} & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{F} = \varinjlim_{\alpha \in A} \mathcal{F}_\alpha$ と $|\alpha|$ についての帰納法を用いれば，主張が得られる． ∎

$U \subseteq X$ :: open subset, $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{Z}_U$ :: subsheaf を任意に取る．U を irreducible component に分解し $U = \bigsqcup_i U_i$ とする．X :: noetherian ゆえ U_i は有限個しかない．

今，$\mathcal{R}(U_i) \subseteq \mathbb{Z}_U(U_i) = \mathbb{Z}$ なので $\mathcal{R}(U_i)$ は $s_i \in \mathbb{Z}$ で生成される abelian group である．V :: open subset of U_i を任意に取った時，$\mathcal{R}(V)$ は $(s_i)|_V$ で生成される．実際，$\mathcal{R}(V) \subseteq \mathbb{Z}_U(V)$ の生成元を $g \in \mathbb{Z}_U(V)$ とすると，$\mathbb{Z}_{U_i}$ :: flasque (II, Ex1.16a) なので $\bar{g}|_V = g$ なる $\bar{g} \in \mathbb{Z}_U(U_i)$ が存在する．したがって $\bar{g} = r \cdot s_i$ となるが，$(s_i)|_V, r \cdot (s_i)|_V \in \mathcal{R}(V)$ であり，$\mathcal{R}(V)$ の生成元はただひとつなので，結局 $r = 1$ となる．すなわち $(s_i)|_V$ が $\mathcal{R}(V)$ の生成元．以上から $\mathcal{R}$ は有限個の元 $\{s_i\}_i$ で生成される．

$f : \mathcal{R} \to \varinjlim \mathcal{I}_\alpha$ を任意に取る．すると全ての i について $\Gamma(U_i, f)(s_i) \in \Gamma(U_i, \varinjlim \mathcal{I}_\alpha)$ なので

$$\Gamma(U_i, f)(s_i) \in \Gamma(U_i, \mathcal{I}_{\alpha_i})$$

なる α_i が存在する．したがって $f|_{U_i} : \mathcal{R}|_{U_i} \to \mathcal{I}_{\alpha_i}|_{U_i}$ が得られる．これは $\mathcal{I}_{\alpha_i}$ :: injective ゆえ拡張できて

$$(f|_{U_i})^{-} : \mathbb{Z}_{U_i} \to \mathcal{I}_{\alpha_i}|_{U_i} \to (\varinjlim \mathcal{I}_\alpha)|_{U_i}$$

が得られる．貼り合わせれば $\bar{f} : \mathcal{R} \to \varinjlim \mathcal{I}_\alpha$ となる．

Ex2.7　$H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) \cong \mathbb{Z}$.