Ex8.1 Strengthen Some Results in the Text.

Ex8.2 $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 0$.

X :: variety of dimension n over k, $\mathcal{E}$ :: locally free sheaf of rank $> n$, $V^\# \subset \Gamma(X, \mathcal{E})$ :: k-vector space of global sections which generate $\mathcal{E}$ とする．X :: variety より X :: connected なので $\mathcal{E}$ の rank は X 全体で一定である．$\operatorname{rank} \mathcal{E} = r(> n)$ としておこう．

主張 Ex8.2.1
ある $s \in V$ について次が成立する．

$$^\forall x \in X, \quad s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x.$$

■Convensions and Notations.　X の closed point 全体を X^+ と書く．Ex3.14 より，これは dense in X．また，$d = \dim_k V^\#, V = \mathbb{P}_k^{d-1}$ とし，$V^+ = (V^\# - \{0\})/k^*$ を V の closed points と同一視する．この同一視の仕方は Prop7.7 や dual projective space と同じである．$\dim_k V^\# - 1 = \dim V$ に注意．$V^\#$ の subspace も同様に V の subspace とみなす．

■Definition of B, B^+.　$B \subseteq X \times_k V$ を次のように置く．

$$B = \bigcap_{s \in V^\#} \mathrm{pr}_1^{-1}(\{x \in X \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}).$$

B は $X \times V$ の closed subscheme である．($\{\}$ 部分が closed であることは Ex2.16 を参照.）B には reduced structure を与えておく．$\mathrm{pr}_1|_B : B \to X$ を p_1 と略す．B の closed points :: B^+ は次のような集合である．

$$B^+ = \{(x, s) \in X^+ \oplus V^+ \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}.$$

■Plot.　主張は，$\mathrm{pr}_2(B) \not\supseteq V^+$ と言い換えられる．（詳細は後ほど.）これには B の次元が V の次元より小さいことを言えば良い．B の次元は Ex3.22 の結果を用いればその fiber :: B_x から計算できる．全ての $x \in X$ について $\dim B_x$ を計算することは難しい．しかし少し妥協して，$x \in X^+$ についての $\dim B_x$ を計算することは出来る．この場合でも Ex3.22c の結果を用いて $\dim B_x$ が計算できる．

■Definition of ϕ_x.　$x \in X$ について次の写像を考える．

$$\begin{array}{cccc} \phi_x : & V^\# & \to & \mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \\ & s & \mapsto & s_x \otimes 1 \end{array}$$

これが k-linear map であることは明らか．$k(x) := \mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_x$ より $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$．このことと ϕ_x の定義の仕方から，$\ker \phi_x = \{s \in V^\# \mid s_x \in \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x\}$.

■ϕ_x for $x \in X^+$.　この段落では $x \in X^+$ とする．すると $k(x) = k$ [†1] なので $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x$．また $\mathcal{E}_x \otimes_k k(x) \cong \mathcal{E}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$．さらに $V^\#$ :: global generators of $\mathcal{E}$ であるから，ϕ_x は surjective．なので $x \in X^+$ について $\dim \ker \phi_x$ が分かる．

$$\dim_k \ker \phi_x = \dim_k V^\# \otimes_k k(x) - \dim_k \mathcal{E}_x = \dim_k V^\# - r.$$

■Dimension of fiber :: $\dim B_x$.　p_1 についての $x \in X^+$ の fiber :: B_x の base space は，Ex3.10 より，$\operatorname{sp} B_x \approx p_1^{-1}(x)$．したがって次が分かる．

$$\operatorname{sp} B_x \cap \operatorname{sp} B^+ \approx p_1^{-1}(x) \cap \operatorname{sp} B^+ = \{x\} \times \ker \phi_x.$$

ここで $\times$ は集合としての直積を表す．よって B_x の次元が分かる[†2]．

$$\dim B_x = \dim_k \ker \phi_x - 1 = \dim_k V^\# - r - 1 = \dim V - r.$$

■p_1 :: closed map.　$V \to \operatorname{Spec} k$ は projective であり，$V, \operatorname{Spec} k$ 共に noetherian であるからこの射は proper．よって universally closed である．

$$\begin{tikzcd} X \times_k V \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] & V \arrow[d, "\substack{\text{universally}\\ \text{closed}}"] \\ X \arrow[r] & \operatorname{Spec} k \end{tikzcd}$$

B :: closed なので B の closed subset は X でも closed．したがって $p_1 = \mathrm{pr}_1|_B$ :: closed map.

■$p_1(B) = X$ or $B = \emptyset$.　$p_1(B) \supseteq X^+$ とする．すると $p_1(B)$ :: closed より $p_1(B) \supseteq \mathrm{cl}_X(X^+) = X$．次に $p_1(B) \not\supseteq X^+$ とする．すると上で述べたこと（全ての $x \in X^+$ について $\dim p_1^{-1}(x)$ が等しいこと）から，結局 $p_1(B) \cap X^+ = \emptyset$ が分かる．$p_1(B)$ が空でないと仮定しよう．すると p_1 :: closed map より，$x \in p_1(B)$ なら $\mathrm{cl}_X(\{x\}) \subseteq p_1(B)$．$\mathrm{cl}_X(\{x\})$ は closed point を含むので矛盾が生じる．よって $p_1(B) \not\supseteq X^+$ ならば $p_1(B) = \emptyset$．これは $B = \emptyset$ を意味し，さらにこれは 0 を除く全ての $V^\#$ の元が claim の条件を満たすことを意味する．<u>以下，$B \neq \emptyset$ と仮定する．</u>

■$p_1^{-1}(x)$ :: irreducible.　任意の closed point :: $x \in X^+$ について $p_1^{-1} = (\ker \phi_x - \{0\})/k^*$．これは projective linear space だから irreducible.

[†1] X :: variety より，k :: algebraically closed field かつ X :: finite type / k．$A = k[x_1, \ldots, x_n], \mathfrak{a} \subseteq A$ とし，$\mathfrak{m}/\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \subseteq X$ が x に対応する極大イデアルだとする．ここで $\mathfrak{m}$ は A の極大イデアル．$S = A - \mathfrak{m}$ とすると

$$k(x) = \frac{S^{-1}(A/\mathfrak{a})}{S^{-1}(\mathfrak{m}/\mathfrak{a})} \cong S^{-1}\left(\frac{A/\mathfrak{a}}{\mathfrak{m}/\mathfrak{a}}\right) \cong S^{-1}(A/\mathfrak{m}).$$

$A/\mathfrak{m} \cong k$ は体だから，これは $k(x) \cong k$.

[†2] closed subscheme of B :: C について $\dim C = \dim C \cap B^+$ を示す．$C \cap B^+ \subset C$ より $\dim C \geq \dim C \cap B^+$ は明らか．$d = \dim C$ とし，C の irreducible closed subset が成す真の極大上昇鎖をとる: $Z_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Z_d$. closed immersion $\Longrightarrow$ finite type に注意すると，Z_i :: finite type/k．なので Ex3.14 より $Z_i \cap B^+$ :: dense in Z_i．したがって $Z_i \cap B^+ = Z_j \cap B^+ \Longrightarrow Z_i = Z_j$ となり，$Z_0 \cap B^+ \subsetneq \cdots \subsetneq Z_d \cap B^+$ は B^+ の irreducible closed subset が成す真の上昇鎖．以上から $\dim C \leq \dim C \cap B^+$ も成り立つ．

■B :: irreducible. 以上から B :: irreducible が分かる．B が二つの閉集合 C_1, C_2 の和であったとすると，$x \in X^+$ について $p_1^{-1}(x)$ は次のように書ける．

$$p_1^{-1}(x) = (C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)) \cup (C_2 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)).$$

これは irreducible だから，$C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ か $C_2 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)$ に一致する．$x_1, x_2 \in X^+$ について次のようになっていたと仮定しよう．

$$p_1^{-1}(x_1) = C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x), \quad p_1^{-1}(x_2) = C_2 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x).$$

すると，$x_1 \in, x_2 \notin p_1(C_1)$ となる．$p_1(C_2)$ も同様．すなわち $p_1(C_1), p_1(C_2)$ は $p_1(B)(= X)$ 空でないの真の閉集合である．しかし $X = p_1(B) = p_1(C_1) \cup p_1(C_2)$ であり X :: irreducible であるから，これはありえない．よって任意の $x \in X^+$ について $p_1^{-1}(x) = C_1 \cap \mathrm{pr}_1^{-1}(x)$（あるいは $= C_2 \cap ...$）となる．両辺で $\bigcup_{x \in X^+}$ として

$$p_1^{-1}(X^+) = C_1 \cap p_1^{-1}(X^+).$$

$p_1^{-1}(X^+) = (X^+ \times V) \cap B \supset B^+$ であり，B^+ :: dense in B．$B^+ \cap C_1$ :: dense in C_1 も Ex3.14 から得られるので，両辺の B での閉包を取って $B = C_1$．したがって B :: irreducible.

■Dimension of B. B :: integral & finite type$/k$ ($\implies$ variety$/k$) なので，Ex3.22c から次が成り立つ: $x \in U$ ならば $\dim B_x = \dim B - \dim X$，となる U :: open dense subset in X が存在する．U :: non-empty open subset と X^+ :: dense から，$U \cap X^+ \neq \emptyset$．$x \in X^+$ であるときの及び開集合 $\dim B_x$ が既に分かっているから，$\dim B$ も分かる．

$$\dim B = \dim B_x + \dim X = \dim V - r + n.$$

$r > n$ なので，$\dim B < \dim V$.

■$\mathrm{pr}_2(B) \supseteq V^+ \implies \dim B \geq \dim V$. $\mathrm{pr}_2(B) \supseteq V^+$ としよう．B^+ の場合と同様に $\dim V^+ = \dim V$．ch I, Ex1.10 より，$\dim U = \dim V$ を満たす affine open subset of V :: U がとれる．適当に $\mathrm{pr}_1(B)$ からも affine open subset :: U' をとると，X, V 共に finite type $/k$ だから，ch I, Ex3.15 (Products of Affine Varieties) が使える．よって $\dim U \times U' = \dim U + \dim U' \geq \dim U = \dim V$．$U \times_k U' \subset B$ だから $\dim B \geq \dim V$

■Complete proof of the claim. 今はこれの対偶が成立する．すなわち，$s \in V^+ - \mathrm{pr}_2(B)$ が存在する．この s と任意の $x \in X$ について $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ が成り立つ．

■An exact sequence. Φ を以下で定める．

$$\begin{array}{cccc} \Phi: & \mathcal{O}_X & \to & \mathcal{E} \\ & \langle U, \sigma \rangle & \mapsto & \langle U, (s|_U) \cdot \sigma \rangle \end{array}$$

これの $x \in X$ における stalk を見ると，$\Phi_x : \sigma_x \mapsto s_x \cdot \sigma_x$ と成っている．$\mathcal{E}_x \cong \mathcal{O}_x^{\oplus r}$ かつ $\mathcal{O}_x$ :: domain より，$\mathrm{Ann}(\mathcal{E}_x) = 0$．そして $s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x$ から，$s_x \neq 0$．なので Φ_x は，したがって Φ は injective．よって $\mathcal{E}' = \operatorname{coker} \Phi$ とおくと以下は exact sequence.

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}' \to 0.$$

■$\mathcal{E}'$ :: locally free. $\mathcal{E}'$ が locally free であることを示そう．Ex5.7b から，任意の点における stalk が free であることを示せば十分．以下，$\mathcal{E}_x = \mathcal{O}_x^{\oplus r}$（$\cong$ でなく $=$）とする．点 $x \in X$ について

$$s_x = (s_x^{(i)})_i \in \mathcal{O}_x^{\oplus r} = \mathcal{E}_x$$

とする．$s_x \notin \mathfrak{m}_x \mathcal{E}_x = \mathfrak{m}_x^{\oplus r}$ から，ある i について $s_x^{(i)} \notin \mathfrak{m}_x$．すなわち $s_x^{(i)}$ :: unit．ここでは $i = 0$ とし，

$$u = (s_x^{(0)})^{-1} s_x = \left(1, s_x^{(2)}(s_x^{(0)})^{-1}, \ldots, s_x^{(r)}(s_x^{(0)})^{-1}\right) \in s_x \mathcal{O}_x$$

と置く．すると $\mathcal{E}'_x \cong \mathcal{E}_x / \operatorname{im} \Phi_x = \mathcal{O}_x^{\oplus r}/s_x\mathcal{O}_x$ は次の写像で $\mathcal{O}_x^{\oplus r-1}$ と同型．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_x^{\oplus r}/s_x\mathcal{O}_x & \to & 0 \oplus \mathcal{O}_x^{\oplus r-1} \\ (t^{(j)})_j \bmod s_x\mathcal{O}_x & \mapsto & (t^{(j)})_j - t^{(0)} u \end{array}$$

well-defined であることは明らか．逆写像は次のもの．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_x^{\oplus r-1} & \to & \mathcal{O}_x^{\oplus r}/s_x\mathcal{O}_x \\ t & \mapsto & (0 \oplus t) \bmod s_x\mathcal{O}_x \end{array}$$

2.0.1 B の別構成.

$d + 1 = \dim_k V^\#$ とし，$\mathcal{V} = (V^\#)^\sim$ とする．$V^\# \cong k^{\oplus d+1}$ から $\mathcal{V}$ は $\operatorname{rank} \mathcal{V} = d + 1$ の locally free sheaf となる．そして全射 $\mathcal{V} \otimes_k \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$ が $\langle U, s\rangle \otimes \langle U, a\rangle \mapsto \langle U, sa\rangle$ の様に構成できる[†3]．これの ker を $\mathcal{B}$ とおく．

$$0 \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{V} \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

構成から $\mathcal{B}$ :: locally free と $\operatorname{rank} \mathcal{B} = d + 1 - r$ が分かる（？）．双対をとる．（すなわち $\mathscr{H}om(-, \mathcal{O}_X)$ で写す.）

$$0 \longrightarrow \check{\mathcal{E}} \longrightarrow \check{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \check{\mathcal{B}} \longrightarrow 0$$

全射 $\check{\mathcal{V}} \otimes \mathcal{O}_X \to \check{\mathcal{B}}$ から，injective X-morphism :: $\mathbb{P}(\check{\mathcal{B}}) \to \mathbb{P}_k^d \times X$ が誘導される（？）．ここでの $\mathbb{P}(\check{\mathcal{B}})$ が B である（？）．構成の仕方から，$\dim B = \operatorname{rank} \check{\mathcal{B}} - 1$.

2.0.2 $\mathcal{E}'$ :: locally free の別証明.

任意の点 $x \in X$ における stalk を考える．

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_x \xrightarrow{\times s_x} \mathcal{E}_x \longrightarrow \mathcal{E}'_x \longrightarrow 0$$

これを $\otimes_{\mathcal{O}_x} k(x)$ で写し，$k(x)$-module の exact sequence にする．

$$\mathcal{O}_x \otimes k(x) \xrightarrow{\times (s_x \otimes 1)} \mathcal{E}_x \otimes k(x) \longrightarrow \mathcal{E}'_x \otimes k(x) \longrightarrow 0$$

同型で書き換える．

$$k(x) \xrightarrow{\times (s_x)^-} \mathcal{E}_x/\mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x \longrightarrow \mathcal{E}'_x \otimes k(x) \longrightarrow 0$$

[†3] $\mathcal{O}_X$ が k-module であることは次のように分かる．今，$f : X \to \operatorname{Spec} k$ が存在するので $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k} \to f^*\mathcal{O}_X$ が存在する．これの adjoint :: $f^{-1}\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k} \to \mathcal{O}_X$ を考えれば，開集合 $U \subseteq X$ について $\mathcal{O}_X(U)$ が k-module であることが分かる．また，ここで書いた $\mathcal{V} \otimes_k \mathcal{O}_X \to \mathcal{E}$ の定義は presheaf :: $U \mapsto \mathcal{V}(U) \otimes_k \mathcal{O}_X(U)$ からの morphism なので sheafification が必要である．

ただし $(s_x)^{-} = s_x \bmod \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$．これは $s_x \notin \mathfrak{m}_x\mathcal{E}_x$ から，0 でない．したがって左の写像は $1 \in k(x)$ を非ゼロ元に写す．この exact sequence は $k(x)$-module のものだったから，左の写像は injective．よって次が分かる．

$$\dim_{k(x)} \mathcal{E}'_x \otimes k(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{E}_x \otimes k(x) - \dim_{k(x)} k(x) = r - 1.$$

すなわち $\dim_{k(x)} \mathcal{E}'_x \otimes k(x)$ は $x \in X$ について定数関数．Ex5.8 より，$\mathcal{E}'$ :: locally free と分かる．

Ex8.3 Product Schemes.

3.1 $\Omega_{X\times_S Y/S} \cong \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/S} \oplus \mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/S}$.

S :: scheme, X, Y :: scheme $/S$ とする．Thm8.10 より，$\Omega_{X\times Y/Y} \cong \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/S}$ が分かる．これと Thm8.11 を合わせて次の完全列が得られる．

$$\mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/S} \longrightarrow \Omega_{X\times Y/S} \longrightarrow \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/S} \longrightarrow 0. \qquad (*)$$

X と Y を交換したものと合わせて次の図式を得る．これは $\mathcal{O}_{X\times Y}$-module の図式である．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/S} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\gamma}"] & \Omega_{X\times Y/S} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] & \mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/S} \arrow[r] & 0 \\
0 & \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/S} \arrow[l] & \Omega_{X\times Y/S} \arrow[l] & \mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/S} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

この図式において $\bar{\gamma}$ は $\Omega_{X\times Y/S}$ を経由する射の合成である．$\gamma = \mathrm{id}_{\mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/S}}$ が示せれば，α :: inj & split が得られる．これは $X \times Y$ の open affine cover をとって local に調べれば良い．$\operatorname{Spec} R \subseteq S, \operatorname{Spec} A \subseteq X, \operatorname{Spec} B \subseteq Y$ を任意にとり，$C = A \otimes_R B$ とする．図式全体を $\Gamma(\operatorname{Spec} C, -)$ で写す．Ω の構成から，これは次のように成る．これは C-module の図式である．

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega_{A/S} \otimes_A C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma"] & \Omega_{C/S} \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] & \Omega_{B/S} \otimes_B C \arrow[r] & 0 \\
0 & \Omega_{A/S} \otimes_A C \arrow[l] & \Omega_{C/S} \arrow[dl, "\beta"] & \Omega_{B/S} \otimes_B C \arrow[l] & \\
 & \Omega_{C/A} \arrow[u, "\cong"] & & &
\end{tikzcd}$$

それぞれの写像は次のように定義される (Matsumura, p.193 & Eisenbud, Prop16.4)．

$$\begin{array}{rccc}
\alpha: & [\mathrm{d}_{A/S}\, a] \otimes c & \mapsto & [\mathrm{d}_{C/S}\, (a \otimes 1_B)] \cdot c \\
\beta: & \mathrm{d}_{C/S}\, c & \mapsto & \mathrm{d}_{C/A}\, c \\
\cong: & \mathrm{d}_{C/A}\, (a \otimes b) & \mapsto & [\mathrm{d}_{A/S}\, a] \otimes (1_A \otimes b)
\end{array}$$

よって γ は次のように成る．

$$[\mathrm{d}_{A/S}\, a] \otimes c \mapsto [\mathrm{d}_{C/S}\, (a \otimes 1_B)] \cdot c \mapsto [\mathrm{d}_{C/A}\, (a \otimes 1_B)] \cdot c \mapsto ([\mathrm{d}_{A/S}\, a] \otimes 1_C) \cdot c = [\mathrm{d}_{A/S}\, a] \otimes c.$$

以上より $\gamma = \mathrm{id}$ が示された．

3.2 $\omega_{X\times Y} \cong \mathrm{pr}_X^* \omega_X \otimes \mathrm{pr}_Y^* \omega_Y$.

X, Y :: nonsingular varieties over a field k とする．$d_X = \dim X, d_Y = \dim Y$ とする．この時 Thm8.15 より，$\Omega_{X/k}, \Omega_{Y/k}$ はそれぞれ rank $= d_X, d_Y$ の locally free sheaf である．また (a) の完全列 $(*)$ より，$\operatorname{rank} \Omega_{X\times_k Y/k} = d_X + d_Y$ [†4].

Ex5.16d を (a) の完全列 $(*)$ に用いれば，

$$\omega_{X\times Y} = \bigwedge^{d_X+d_Y} \Omega_{X\times Y/k} \cong \left(\bigwedge^{d_X} \mathrm{pr}_X^* \Omega_{X/k}\right) \otimes \left(\bigwedge^{d_X} \mathrm{pr}_Y^* \Omega_{Y/k}\right).$$

Ex5.16e より $\mathrm{pr}_X^*, \mathrm{pr}_Y^*$ はそれぞれ $\bigwedge$ と交換できる．よって $\omega_{X\times Y} \cong \mathrm{pr}_X^* \omega_X \otimes \mathrm{pr}_Y^* \omega_Y$.

3.3 An Example that Gives $p_g \neq p_a$.

$Y \subset \mathbb{P}_k^2$ を non-singluar cubic curve とする．さらに $Y \times_k Y$ を Segre embedding で $\mathbb{P}^8$ に埋め込んだものを X とする．

Example8.20.3 より，$\omega_Y \cong \mathcal{O}_Y(0) = \mathcal{O}_Y$. したがって (b) より $p_g(X)$ が計算できる．

$$p_g(X) = \dim_k \Gamma(X, \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}_Y \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{O}_Y) = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X) = \dim_k k = 1.$$

ここで Ex5.11: $\mathcal{O}_X(1) \cong \mathrm{pr}_1^* \mathcal{O}_Y(1) \otimes \mathrm{pr}_2^* \mathcal{O}_Y(1)$ （両辺に逆元をテンソルすれば利用した同型が得られる）と Ex4.5d を順に用いた．

I, Ex7.2b より $p_a(Y) = \frac{1}{2}(3-1)(3-2) = 1$. 同じく I, Ex7.2e より $p_a(X)$ が計算できる．

$$p_a(X) = (p_a(Y))^2 - 2p_a(Y) = -1.$$

3.3.1 Direct Calc of ω_Y.

体 k の標数は 0 としておく．$U_z = \mathcal{Z}_p(z)^c \cong \mathbb{A}^2$ とし，$Y \cap U_z \subset \mathbb{A}^2$ の定義多項式を $y^2 - f(x) \in k[x, y]$ とする．ただし $\deg f = 3$.

$$B = k[x, y], \quad I = (y^2 - f(x))B, \quad C = B/I$$

と置いて加群 $\Omega_{C/k}$ を求めよう．$\omega_Y = \bigwedge^1 \Omega_{Y/k} \cong \Omega_{Y/k}$ だから，ω_Y も以下の計算から分かる．second exact sequence (Thm8.4) を用いると $\Omega_{C/k}$ が計算できる．

$$\begin{aligned}\Omega_{C/k} &\cong \frac{\Omega_{B/k} \otimes_B C}{\delta(I/I^2)} \\ &\cong \frac{(B\mathrm{d}x \oplus B\mathrm{d}y) \otimes C}{\langle \mathrm{d}\alpha \otimes 1 \mid \alpha \in I \rangle} \\ &\cong \frac{C\mathrm{d}\bar{x} \oplus C\mathrm{d}\bar{y}}{\langle 2\bar{y} \cdot \mathrm{d}\bar{y} - (\partial_x f)\mathrm{d}\bar{x} \rangle}.\end{aligned}$$

ここで $\bar{x} = x \bmod I, \bar{y} = y \bmod I$ とした．以下，これらの $\bar{\square}$ は省略する．

[†4] 各点での stalk をとって rank が additive であることを使えば分かる．

点 $\mathfrak{p} \in C$ における $\Omega_{C/k}$ の局所化を計算する．Y :: non-singular から，$2y, \partial_x f$ の両方が同時に 0 になることはない．なので任意の点において $\mathrm{d}x = (*)\mathrm{d}y$ あるいは $\mathrm{d}y = (*)\mathrm{d}x$ の形になる．より詳細には次の通り．

$$(\Omega_{C/k})_{\mathfrak{p}} \cong \begin{cases} C_{\mathfrak{p}}\mathrm{d}x & \text{if} \quad \mathfrak{p} \in D(y) \\ C_{\mathfrak{p}}\mathrm{d}y & \text{if} \quad \mathfrak{p} \in D(\partial_x f). \end{cases}$$

よって $\operatorname{rank} \Omega_{C/k} = 1$．（TODO: $\Omega_{Y/k} \cong \mathcal{O}_Y$ は示せるか？）

Ex8.4 Complete Intersections in $\mathbb{P}^n$.

Ex8.5 Blowing Up a Nonsingular Subvariety.

Ex8.6 The Infinitesimal Lifting Property.

k :: algebraically closed field, A :: finitely generated k-algebra とし，$\operatorname{Spec} A$ :: nonsingular variety/k と仮定する．さらに $0 \to I \to B' \to B \to 0$ を k-algebra の完全列とし，$I^2 = 0$ とする．

以下を示す．

定理 Ex8.6.1

A は Infinitesimal Lifting Property を持つ．すなわち，任意の k-algebra homomorphism :: $f : A \to B$ に対し，次の図式を可換にする $g : A \to B'$ がただひとつ存在する．

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] \\ & I \arrow[d] \\ & B' \arrow[d] \\ A \arrow[ur, dashed, "{}^{\exists_1} g"] \arrow[r, "{}^{\forall} f"'] & B \arrow[d] \\ & 0 \end{tikzcd}$$

g は f の lifting と呼ばれる．

6.1 $Der_k(A, I) = \{g - g' \mid g, g' :: \text{lifting of } f\}$.

Matsumura, p.191 と同じ議論をする．$\pi : B' \to B$ を与えられた完全列中の全射としよう．

■Consider I as A-module. $a \in A$ に対し，$\pi^{-1}(f(a))$ の元をひとつ取って $\tilde{a} \in B'$ とする．これをもちいて $i \in I$ に対し $a \cdot i = \tilde{a}i$ と置く．これが well-defined であることは $I^2 = 0$ から従う．実際，$\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \in \pi^{-1}(f(a))$ をとると，$\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \in I$ なので

$$\tilde{a}_1 i - \tilde{a}_2 i \in Ii = 0.$$

■$\subseteq$. g, g' を f の lifting とし，$\theta = g - g'$ とする．まず $\operatorname{im}\theta \subseteq I$ を確かめよう．図式の可換性から次が得られる．

$$\pi \circ \theta = \pi \circ g - \pi \circ g' = f - f = 0.$$

よって $\mathrm{im}\,\theta \subseteq \ker \pi = I$. 次に $x, y \in A$ をとり，θ が Leibniz rule を満たすことを確かめる．

$$\begin{aligned}
&\theta(xy)\\
=&g(x)g(y) - g'(x)g'(y)\\
=&g(x)g(y) - g'(x)g(y) + g'(x)g(y) - g'(x)g'(y)\\
=&(g(x) - g'(x))g(y) + g'(x)(g(y) - g'(y))\\
=&\theta(x)g(y) + g'(x)\theta(y)\\
=&\theta(x)\cdot y + x\cdot\theta(y)
\end{aligned}$$

ここで $\pi \circ g(y) = f(y)$ より $g(y) \in \pi^{-1}(f(a))$ であることに注意せよ．$g'(x)$ も同様．$\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$ は自明である．

■$\supseteq$. g を f の lifting とし，$\theta \in Der_k(A, I)$ をとる．$g' = g + \theta$ が f の lifting であることを示そう．まず準同型であることを示す．和を保つことは明らかなので積を保つことを見る．$x, y \in A$ をとる．

$$\begin{aligned}
&g'(xy)\\
=&g(x)g(y) - \theta(x)\cdot y - x\cdot\theta(y)\\
=&g(x)g(y) - \theta(x)g(y) - g(x)\theta(y) + \theta(x)\theta(y)\\
=&(g(x) - \theta(x))(g(y) - \theta(y))\\
=&g'(x)g'(y)
\end{aligned}$$

ここで $\theta(x)\theta(y) \in I^2 = 0$ と $g(x) \in \pi^{-1}(f(x)), g(y) \in \pi^{-1}(f(y))$ を用いた．以上から g' も代数の準同型．さらに $\mathrm{im}\,\theta \subseteq \ker \pi = I$ だから，

$$\pi \circ g' = f + \pi \circ \theta = f.$$

よって g' は lifting.

6.2 $P = k[x_1, \ldots, x_n] \to B'$.

$P = k[x_1, \ldots, x_n]$ とし，$A = P/J$ とする．次の図式を可換にする写像 h の存在を示す．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
J \arrow[d] & I \arrow[d] \\
P \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "\rho"'] & B' \arrow[d, "\pi"] \\
A \arrow[r, "f"'] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

h は x_i の像で決定されるから，$b_i \in \pi^{-1}(f \circ \rho(x_i))$ を選び，$h : x_i \mapsto b_i$ で写像を定めれば良い．b_i のとり方から図式が可換になることは明らか．

可換性から，$\pi(h(J)) = f(\rho(J)) = 0$．したがって $h(J) \subseteq \pi^{-1}(0) = I$．また $h(J^2) = (h(J))^2 \subseteq I^2 = 0$．このことから，次のように A-module homomorphism が定まる．

$$\begin{array}{cccc}
\bar{h}: & J/J^2 & \to & I \\
& j \bmod J^2 & \mapsto & h(j)
\end{array}$$

6.3 Complete the proof.

$\operatorname{Spec} A \subseteq \operatorname{Spec} P = \mathbb{A}^n$ が non-singular であることから，Thm8.17 が使える．$\Gamma(\operatorname{Spec} A, -)$ が left-exact であったことと Thm8.4 から，次は exact．

$$0 \longrightarrow J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{P/k} \otimes_k A \longrightarrow \Omega_{A/k} \longrightarrow 0.$$

これを $\operatorname{Hom}_A(-, I)$ で写して次を得る．

$$0 \longrightarrow Der_k(A, I) \longrightarrow Der_k(P, I) \xrightarrow{\delta^*} \operatorname{Hom}_A(J/J^2, I).$$

δ^* を計算すると次のように成る．$D \in Der_k(P, I), x \in J$ をとり $\bar{x} = x \bmod J^2$ とおく．また，$\phi_D \in \operatorname{Hom}_P(\Omega_{P/k}, I)$ を D に対応する写像とし，$\iota : I \otimes B \to I$ と標準的同型写像とする．

$$\delta^*(D)(\bar{x}) = \iota((\phi_D \otimes \mathrm{id}_{B'}) \circ \delta)(\bar{x})) = \iota((\phi_D \otimes \mathrm{id}_{B'})(\mathrm{d}x \otimes 1_{B'})) = \iota(Dx \otimes 1_{B'}) = Dx.$$

主張 **Ex8.6.2**
$\delta^* : Der_k(P, I) \to \operatorname{Hom}_A(J/J^2, I)$ は全射である．

この主張を仮定すると，$\delta^*(\theta) = \bar{h}$ を満たす $\theta \in Der_k(P, I) \subset \operatorname{Hom}_k(P, B')$ が存在する．$x \in J$ とすると次のよう．

$$\delta^*(\theta)(x \bmod J^2) = \bar{h}(x \bmod J^2) = h(x).$$

一方，上で述べた $\delta^*(\theta)$ の計算から，$\delta^*(\theta)(x \bmod J^2) = \theta(x)$．よって $x \in J$ について $h(x) = \theta(x)$ が成立する．すなわち $h' = h - \theta$ と置くと $h'(J) = 0$. なので $h' : P \to B'$ から $g : A \to B'$ が誘導される．

$$\begin{array}{cccc} g: & A & \to & B' \\ & x \bmod J & \mapsto & h(x) - \theta(x) \end{array}$$

これが求めていた写像である．実際，$x \in P$ について，

$$\pi \circ g(x \bmod J) = \pi(h(x) - \theta(x)) = f(x \bmod J) - \pi(\theta(x)) = f(x \bmod J).$$

$\theta : P \to I$ に注意.

(証明). Matsumura による second fundamental exact sequence の証明 (pp.194-195) を参照する．ρ から誘導される A 加群の準同型 $P/J^2 \to A$ を ρ とする．元の準同型 $P \to A$ はこの証明に現れない．以下，A 加群はこの準同型に依って P/J^2 加群とみなす．

$J/J^2 \subset P/J^2$ と $\frac{P/J^2}{J/J^2} \cong P/J \cong A$ に注意して次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, dashed, "\sigma"'] & A \\ k \arrow[u] \arrow[r] & P/J^2 \arrow[u, "\rho"'] \end{tikzcd}$$

この図式に於いて，σ は h と同様に構成する．すなわち，$\bar{x}_i = x_i \bmod J \in A$ に対して $y_i \in \rho^{-1}(\bar{x}_i)$ を選び，$\sigma : \bar{x}_i \mapsto y_i$ で定義する．σ によって図式が可換に成ることは明らか．すると明らかに σ は ρ の section (i.e. $\rho\sigma = \mathrm{id}$) である．

この時 id_{P/J^2} と $\sigma\rho$ は ρ の lifting である．

$$\begin{tikzcd} P/J^2 \arrow[r, "\rho"] & A \\ & P/J^2 \arrow[u, "\rho"'] \arrow[ul, shift left, "\mathrm{id}"] \arrow[ul, shift right, "\sigma\rho"'] \end{tikzcd}$$

(a) での議論から，$D = \mathrm{id}_{P/J^2} - \sigma\rho$ は P/J^2 から P/J^2-module :: J/J^2 への k-derivation である．

$\psi \in \mathrm{Hom}_A(J/J^2, I)$ について，$D' : P \to I$ を次のように写像の合成で定める．

$$P \twoheadrightarrow P/J^2 \xrightarrow{D} J/J^2 \xrightarrow{\psi} I.$$

すると $D' \in Der_k(P, I)$ となる．（確認の際は各加群の係数環が何であるか，注意すること．）さらに既に行った計算から $\delta^*(D')(- \bmod J^2) = D'(-)$ となる．$x \in J$ とすると，

$$\delta^*(D')(x \bmod J^2) = D'(x) = \psi(D(x \bmod J^2)) = \psi(x \bmod J^2).$$

以上で δ^* が全射であることが示せた． ∎

(証明)．元の完全列

$$0 \longrightarrow J/J^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{P/k} \otimes_k A \longrightarrow \Omega_{A/k} \longrightarrow 0.$$

に現れる加群に対応する sheaves of modules on X は，Thm8.17 よりいずれも locally free である．そのためいずれも projective A-module（？）．特に $\Omega_{A/k}$ が projective だから，I の injective resolution から $\mathrm{Ext}^i_A(\Omega_{A/k}, I) = 0$ $(i > 0)$ が得られる．一方，元の完全列を $\Omega_{A/k}$ の projective resolution とみなしても $\mathrm{Ext}^i_A(\Omega_{A/k}, I)$ が得られる（？）.

$$0 \xrightarrow{d^0} \mathrm{Hom}_P(\Omega_{P/k}, I) \xrightarrow{d^1} \mathrm{Hom}_A(J/J^2, I) \xrightarrow{d^2} 0,$$
$$\mathrm{Ext}^2_A(\Omega_{A/k}, I) = \frac{\ker d^2}{\mathrm{im}\, d^1} = \frac{\mathrm{Hom}_A(J/J^2, I)}{\mathrm{im}\, d^1} = 0.$$

よって d^1 が，したがって δ^* が全射である． ∎

Notes

証明した図式で Spec をとると，次のように成る．

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[dl, dashed, "\exists_1 g"'] \\ X & Y \arrow[l, "\forall f"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

$Y \to Y'$ が closed immersion であるとき，$Y \subseteq Y'$ を infinitesimal thickening of Y と呼ぶ．

Ex8.7 Classifying Infinitesimal Extension: One Case.

■Infinitesimal Extension. X :: scheme of finite type $/k$, $\mathcal{F}$ :: coherent sheaf on X とする．この時，次の条件を満たす sheaf of ideal :: $\mathcal{I}$ をもつ X' :: scheme$/k$ の分類を考える:

1. $\mathcal{I}^2 = 0$,
2. $(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}) \cong (X, \mathcal{O}_X)$,
3. $\mathcal{I} \cong \mathcal{F}$ as $\mathcal{O}_X$-module.

$X', \mathcal{I}$ の組を infinitesimal extension of X by $\mathcal{F}$ と呼ぶ．

■Trivial One. trivial なものは次のように構成される．すなわち，$\operatorname{sp} X' = \operatorname{sp} X$ とし，structure sheaf を $\mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X * \mathcal{F}$ とする．これは Matsumura, p.191 にある trivial extension とほぼ同じ構成方法である．

■Setting. 次の場合の infinitesimal extension を考える: X :: non-singular affine scheme of finite type $/k$. coherent sheaf :: $\mathcal{F}$ と，infinitesimal extension of X by $\mathcal{F}$ :: $(X', \mathcal{I})$ を任意にとる．

■About Global Sections. $B' = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}), I = \Gamma(X', \mathcal{I}), A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ とする．$\Gamma(X', -)$ は単射を保つ関手なので包含写像 $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ から $I \hookrightarrow B'$ が得られる．また $\mathcal{I}^2$ は $U \mapsto (\Gamma(U, \mathcal{I}))^2$ で定まる sheaf だから[†5]，$I^2 = (\Gamma(X', \mathcal{I}))^2 = 0$ となる．$B = B'/I = \Gamma(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I})$ とおこう．

■Lifting of $\mathrm{id}: A \to A$. 同型 $(X', \mathcal{O}_{X'}/\mathcal{I}) \cong (X, \mathcal{O}_X)$ から環同型 $u: A \xrightarrow{\cong} B'/I = B$ が得られる．仮定より $X = \operatorname{Spec} A$ は nonsingular なので，Ex8.6 から，$A \to A \cong B$ の lifting が存在する．ここで π' は標準的全射 $B' \to B'/I = B$ と環同型 $u^{-1}: B \xrightarrow{\cong} A$ の合成である．

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] \\
& I \arrow[d] \\
& B' \arrow[d, "\pi'"] \\
A \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, dashed, "\sigma"] & A \arrow[d] \\
& 0
\end{tikzcd}$$

よって $\pi': B' \to B$ は split する．また，I, B', B を A-module とみなすことが出来る．$M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ とすると条件 $\mathcal{I} \cong \mathcal{F}$ as A-module から $I \cong M$ as A-module. 以上をまとめて，以下を示すことが出来る．

主張 Ex8.7.1

$$B' \cong A * M \text{ as } A\text{-module.}$$

よってこの設定では，infinitesimal extension of X by $\mathcal{F}$ は trivial なものしかない．

[†5] この presheaf が sheaf であることを示せば良い．問題は gluability axiom であるが，これは $(t|_{U_i})^2 = (t^2)|_{U_i}$ なので成立する．この等式自体は germ を見れば分かる．

(証明). five lemma を用いる．以下の A-module の可換図式を見よ．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d, "v"] & A * M \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "u"] \arrow[dl, "\sigma"'] & 0 \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & I \arrow[r, "\iota"'] & B' \arrow[r, shift right, "\pi"'] & B \arrow[l, shift right, "s"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ここで $M \to A * M, A * M \to A$ は標準的な入射と射影である（集合としては $A * M = A \oplus M$ であったことに注意せよ）．また，u, v は既に述べた同型写像である．$A * M \to B'$ を $(a, m) \mapsto \iota \circ v(m) + s \circ u(a)$ で定めると，図式が可換に成ることが分かる．よって five lemma より $A * M \cong B'$. ∎

Ex8.8 Plurigenera and Hodge Numbers are Birational Invariants.

X ::projective ninsingular variety/k とする．正整数 $n(>0)$ に対して，n-th plurigenus of X を

$$P_n = \dim_k \Gamma(X, \omega_X^{\otimes n})$$

と定める．また $0 \leq q \leq \dim X$ について Hodge numbers を

$$h^{q,0} = \dim_k \Gamma(X, \Omega_{X/k}^{\wedge q})$$

と定める．plurigenus と Hodge numbers が birational invariant であることを示す．

category of sheaves of modules on X の自己関手 M を，f^* (inverse image functor) と可換であるものとする．M は例えば $\square^{\otimes n}$ や $\square^{\wedge q}$ である．Thm8.19 (geometric genus is birational invarational invariant) の証明を見ると，この証明方法は，$\dim_k \Gamma(X, M\Omega_{X/k})$ が birational invariant であることの証明に使える．