

Ex5.1 The Dual of Locally Free Module Sheaf.

(X, \mathcal{O}_X) を ringed space とし, \mathcal{E} を有限階数の locally free \mathcal{O}_X -module とする. また, \mathcal{E} の双対を $\check{\mathcal{E}} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)$ で定める. ($\mathcal{H}om$ は Ex1.15 で定義されている.) $\mathcal{E}^{\vee\vee}$ も同様である.

補題 Ex5.1.1

$\mathcal{F} :: \mathcal{O}_X$ -module, $x \in X$ とする. このとき, x に対して $n > 0$ が存在して

$$(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}))_x \cong (\mathcal{F}_x)^{\oplus n} \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_x).$$

(証明). Ex5.7 の内容は使う. $U :: \text{open in } X$ を十分小さく取れば $\mathcal{E}|_U$ は free module になる. したがって以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} & (\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}))(U) \\ &= \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{E}|_U, \mathcal{F}|_U) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U^{\oplus n}, \mathcal{F}|_U) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_U}(\mathcal{O}_U, \mathcal{F}|_U)^{\oplus n} \\ &\cong (\mathcal{F}|_U)^{\oplus n} \\ &= \varinjlim_{W \supseteq U} (\mathcal{F}(W))^{\oplus n} \end{aligned}$$

(TODO: 4 行目が怪しい) 最後で \bigoplus と \varinjlim が可換であることを用いた. このことから以下を得る.

$$\varinjlim_{U \ni x} \varinjlim_{W \supseteq U} (\mathcal{F}(W))^{\oplus n} = \varinjlim_{W \ni x} (\mathcal{F}(W))^{\oplus n} = (\mathcal{F}_x)^{\oplus n}.$$

あとは $\mathcal{O}_{X,x}$ -module の同型から最後の同型を得る.

$$(\mathcal{F}_x)^{\oplus n} \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}((\mathcal{O}_{X,x})^{\oplus n}, \mathcal{F}_x) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_x).$$

■

\mathcal{O}_X -homomorphism を構成し, それが stalk で module の射として isomorphism になっていることを確認する.

(a) $\mathcal{E}^{\vee\vee} \cong \mathcal{E}$.

写像 $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}^{\vee\vee}$ を以下のように定める.

$$(\Phi_U(s))_V(\phi) = \phi(s|_V) \quad \text{where } U, V :: \text{open in } X, V \subseteq U, s \in \mathcal{E}(U), \phi \in \check{\mathcal{E}}(V).$$

これが \mathcal{O}_X -homomorphism であることは明らか. $x \in X$ を任意にとると, Φ_x は以下ようになる.

$$\Phi_x(s_x)(\phi_x) = \phi_x(s_x) \quad \text{where } s_x \in \mathcal{E}_x, \phi_x \in \check{\mathcal{E}}_x$$

補題より, $\check{\mathcal{E}}_x, (\mathcal{E}^{\vee\vee})_x$ が計算できる.

$$\check{\mathcal{E}}_x \cong \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{O}_X)_x \cong (\mathcal{E}_x)^*, \quad (\mathcal{E}^{\vee\vee})_x \cong \text{Hom}(\check{\mathcal{E}}_x, \mathcal{O}_{X,x}) = (\mathcal{E}_x)^{**}.$$

ただし, $(\mathcal{E}_x)^*$ は \mathcal{E}_x の $\mathcal{O}_{X,x}$ -module としての双対である. $(\mathcal{E}_x)^*$ は free module だから, 上記の同型が成り立つ. 上記の $\Phi_x : \mathcal{E}_x \rightarrow (\mathcal{E}^{\vee\vee})_x \cong (\mathcal{E}_x)^{**}$ が同型写像であることはよく知られている. よって Prop1.1 より, Φ も同型.

(b) For any \mathcal{O}_X -module \mathcal{F} , $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \cong \check{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$.

写像 Ψ を以下で定める.

$$\begin{aligned} \Psi_U : \quad \check{\mathcal{E}}(U) \otimes \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{H}om(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U) \\ \phi_U \otimes f &\mapsto [\mathcal{E}(V) \ni s \mapsto \phi_V(s) \cdot f|_V \in \mathcal{F}(V)] \end{aligned}$$

ただし U, V は X の開集合で $V \subseteq U$ を満たし, $[\]$ 内は $\mathcal{E}(V) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ の写像の定義である. この $x \in X$ における stalk は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \Psi_x : \quad \text{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{O}_{X,x}) \otimes \mathcal{F}_x &\rightarrow \text{Hom}(\mathcal{E}_x, \mathcal{F}_x) \\ \phi_x \otimes f_x &\mapsto [\mathcal{E}_x \ni s_x \mapsto \phi_x(s_x) \cdot f_x \in \mathcal{F}_x] \end{aligned}$$

(c) For any \mathcal{O}_X -module \mathcal{F}, \mathcal{G} , $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G}))$

$U :: \text{open in } X$ を任意に取る. テンソル積の定義 (普遍性) より, 以下が成り立つ.

$$\text{Hom}(\mathcal{E}(U) \otimes \mathcal{F}(U), \mathcal{G}(U)) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}(U), \text{Hom}(\mathcal{E}(U), \mathcal{G}(U)))$$

テンソル積と Hom は $\mathcal{O}_X(U)$ -module としてのものである. あとは

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{E}(U), \mathcal{G}(U)) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G})(U)$$

を示せば良い. (TODO: 主張自体が怪しい.) これは以下の写像で得られる.

$$\begin{aligned} \Theta_U : \quad \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}, \mathcal{G})(U) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{E}(U), \mathcal{G}(U)) \\ \phi : \mathcal{E}|_U \rightarrow \mathcal{G}|_U &\mapsto \phi_U : \mathcal{E}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U) \end{aligned}$$

これは $x \in U$ について $\Theta_x : \phi_x \mapsto \phi_x$ を与えるから, 同型写像.

(d) Projection Formula.

$f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ を ringed space の morphism とし, \mathcal{F} を \mathcal{O}_X -module, \mathcal{E} を finite rank locally free \mathcal{O}_Y -module とする. すると $f_*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{E}) \cong f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{E}$ という自然同型がある. これを示す.

米田の補題を用いて証明する. \mathcal{G} を任意の \mathcal{O}_Y -module とする.

$$\begin{aligned} &\text{Hom}_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{G}, f_*(\mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{E})) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{E}) && (\text{Ex1.18}) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes f^*\mathcal{E}^{\vee\vee}) && (a) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{F} \otimes (f^*\check{\mathcal{E}})^{\vee}) && (?) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G}, \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(f^*\check{\mathcal{E}}, \mathcal{F})) && (b) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*\mathcal{G} \otimes f^*\check{\mathcal{E}}, \mathcal{F}) && (c) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(f^*(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}), \mathcal{F}) && (?) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}, f_*\mathcal{F}) && (\text{Ex1.18}) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{H}om(\check{\mathcal{E}}, f_*\mathcal{F})) && (c) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{E}^{\vee\vee} \otimes f_*\mathcal{F}) && (b) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F} \otimes \mathcal{E}) && (a) \end{aligned}$$

$\check{\mathcal{E}}, \check{\mathcal{E}}^\vee, f^*\mathcal{E}$ が finite rank locally free module であることは容易に分かる。残すは以下の2つの主張である。

主張 Ex5.1.2

$$f^*\check{\mathcal{E}}^\vee \cong (f^*\check{\mathcal{E}})^\vee.$$

(証明). $U :: \text{open in } X$ をとる.

$$\begin{aligned} (f^*\check{\mathcal{E}})^\vee &= \mathcal{H}om(f^{-1}\check{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_X) \\ &= f^{-1}\mathcal{H}om(\check{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_X) \\ &= f^{-1}\mathcal{E}^\vee \otimes \mathcal{O}_X \end{aligned}$$

ここで $\mathcal{H}om(f^{-1}*, *) \cong f^{-1}\mathcal{H}om(*, *)$ とした。TODO: どう示す。 ■

主張 Ex5.1.3

$$f^*\mathcal{G} \otimes f^*\check{\mathcal{E}} \cong f^*(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}).$$

(証明).

$$\begin{aligned} &f^*\mathcal{G} \otimes f^*\check{\mathcal{E}} \\ &= (f^{-1}\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_X) \otimes (f^{-1}\check{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{O}_X) \\ &\cong (f^{-1}\mathcal{G} \otimes f^{-1}\check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ &\cong f^{-1}(\mathcal{G} \otimes f^{-1}\check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ &\cong f^{-1}f^{-1}(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ &= f^{-1}(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}) \otimes \mathcal{O}_X \\ &= f^*(\mathcal{G} \otimes \check{\mathcal{E}}) \end{aligned}$$

ここで $f^{-1}(\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}) \cong (f^{-1}\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$ を用いた。 ■

Ex5.2 Module Sheaves over the Spec of a D.V.R.

$R :: \text{D.V.R.}, X = \text{Spec } R, K = \text{Quot}(R)$ とおく。 X は2点空間 $\{\zeta, \mathfrak{m}\}$ ($\zeta = (0)$) であり、開集合系は $\{\emptyset, \{\zeta\}, X\}$ である。

(a) \mathcal{O}_X -module $\mathcal{F} \leftrightarrow \rho : M \otimes_R K \rightarrow L$.

$\mathcal{F} :: \mathcal{O}_X$ -module をとる。 $\mathcal{O}_X(\{\zeta\}) = K, \mathcal{O}_X(X) = R$ ^{†1} だから、 \mathcal{F} は K -module $L = \mathcal{F}(\{\zeta\})$ と R -module $M = \mathcal{F}(X)$ と、以下の図式を可換にする restriction map $\tilde{\rho}$ で与えられる。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad} & L \\ \uparrow & \tilde{\rho} & \uparrow \\ R & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & K \end{array}$$

^{†1} $\mathcal{O}_X(\{\zeta\})$ は affine scheme の sheaf の定義から分かる。つまり、 $\mathcal{O}_X(\{\zeta\})$ の元は $\{\zeta\} \rightarrow \mathcal{O}_{X,\zeta} = K$ の写像であって local には R の元の分数で書けるものである。 $\{\zeta\}$ は1点集合だから、これは $\zeta \mapsto f/g \in K$ なる写像全体を取れば良い。 $\mathcal{O}_X(\{\zeta\})$ と K に集合としての全単射だけでなく同型もあることは自明であろう。一般に、点 $x \in X$ について $\{x\}$ が開集合ならば $\mathcal{F}(\{x\}) \cong \mathcal{F}_x$.

ここで $l: R \rightarrow K = R_{(0)}$ は標準的な局所化写像である。したがって L も R -module とみなせて、以下の図式にある $\rho: m \otimes x \mapsto \tilde{\rho}(m) \cdot x$ が得られる。

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_R K & & \\ \uparrow & \searrow \rho & \\ M & \xrightarrow{\tilde{\rho}} & L \\ \uparrow & & \uparrow \\ R & \xrightarrow{l} & K \end{array}$$

逆に $\rho: M \otimes_R K \rightarrow L$ があるとき、 $\tilde{\rho} = \rho|_{M \otimes R}$ とすれば $\tilde{\rho}: M \rightarrow L$ が得られる。

(b) $\mathcal{F} :: \text{quasi-coherent} \iff \rho :: \text{isomorphism}$.

■ \implies . $\mathcal{F} :: \text{quasi-coherent}$ のとき、 $M := \Gamma(X, \mathcal{F})$ とすると、Prop5.1a から $\mathcal{F} = \tilde{M}$. \tilde{M} の定義から、restriction map $\tilde{\rho}$ は次のようなものである。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\rho}: M & \rightarrow & \tilde{M}(\{\zeta\}) \\ m & \mapsto & [\zeta \mapsto m/1 \in M_\zeta] \end{array}$$

こうして ρ が定まる。

$$\begin{array}{ccc} \rho: M \otimes K & \rightarrow & \tilde{M}(\{\zeta\}) \\ m \otimes x & \mapsto & [\zeta \mapsto x(m/1) \in M_\zeta] \end{array}$$

逆写像が $[\zeta \mapsto m/s] \mapsto m \otimes (1/s)$ (この逆写像が加群準同型かつ well-defined map であることは容易に分かる) で定まるからこれは同型である。

■ \longleftarrow . 仮定より、

$$\mathcal{F}(X) = M, \quad \mathcal{F}(\{\zeta\}) = L \cong M \otimes K \cong M_\zeta \cong \tilde{M}(\{\zeta\})$$

なので $\mathcal{F} = \tilde{M}$.

Ex5.3 $\tilde{\square}$ and $\Gamma(X, \square)$ are Adjoint Pair.

$A :: \text{ring}$, $X = \text{Spec } A$ とする。この時、 $\tilde{\square}$ と $\Gamma(X, \square)$ は adjoint である。すなわち、任意の $M :: A\text{-module}$, $\mathcal{F} :: \mathcal{O}_X\text{-module}$ について、

$$\text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathcal{F}).$$

写像 $\Phi: \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F})) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\tilde{M}, \mathcal{F})$ を次のように定める。 $U :: \text{open in } X$ に対し、 $\tilde{M}(U)$ の元 s は

$$\begin{array}{ccc} \sigma: U & \rightarrow & M_u \\ u & \mapsto & m/s \end{array}$$

のような写像である。この元 σ を $\alpha \in \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$ によって以下のように写す。

$$\begin{array}{ccc} (\Phi(\alpha))_U: \tilde{M}(U) & \rightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \sigma & \mapsto & \bar{\alpha}(\sigma)|_U \end{array}$$

ただし A_u -module homomorphism $\alpha_{(u)}$ を $m/s \mapsto \alpha(m)/s$ で定めた.

TODO: A -module homomorphism $\alpha \in \text{Hom}_A(M, \Gamma(X, \mathcal{F}))$ に対し, A_x -module homomorphism $\tilde{M}_x \rightarrow \mathcal{F}_x$ は $m/s \mapsto \alpha(m)_x/s$ で定まる. これを貼り合わせれば良い.

Ex5.4 The Original Definition of (Quasi-)Coherent Sheaves.

■quasi-coherent \iff cokernel of free sheaves locally. $\mathcal{F} ::$ sheaf on X が quasi-coherent ならば, 任意の open affine subset $U = \text{Spec } A$ について $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$ となる A -module M が存在する (Prop5.4). M は cokernel of free module として表現できる (Ati-Mac Prop2.3 の証明を参照せよ) から, 完全列 $0 \rightarrow A^m \rightarrow A^n \rightarrow M \rightarrow 0$ に対して functor $\tilde{}$ を用いれば $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$ は cokernel of free sheaves で表現できる事が得られる^{†2}. 逆は free sheaf が quasi-coherent であることと Prop5.7 より従う.

■coherent \iff cokernel of finite rank free sheaves locally. X が Noetherian で \mathcal{F} が coherent ならば, 任意の open affine subset $U = \text{Spec } A$ について $\mathcal{F}|_U \cong \tilde{M}$ となる finitely generated A -module M が存在する (Prop5.4). \tilde{M} が finite rank free sheaf であることは quasi-coherent の場合と同様. 逆は finite rank free sheaf が coherent であることと Prop5.7 より従う.

Ex5.5 Is $f_*\mathcal{F}$ Coherent?

(a) An Example that \mathcal{F} is Coherent but $f_*\mathcal{F}$ is NOT Coherent.

材料は次の通り.

$$A = \mathbb{C}, \quad B = \mathbb{C}[x], \quad X = \text{Spec } A = \text{Spec } \mathbb{C}, \quad \mathcal{F} = \tilde{\mathbb{C}} = \mathcal{O}_X.$$

明らかに \mathcal{F} は coherent \mathcal{O}_X -module である (Example 5.2.1). $f : \text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A$ を標準的埋込み $A \hookrightarrow B$ から誘導されるものとする, Prop5.1e より

$$f_*\mathcal{F} \cong (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x])^{\sim} \cong (\mathbb{C}[x])^{\sim} = \tilde{B}$$

となる. $B = \mathbb{C}[x]$ は明らかに finitely generated A -module でない.

(b) Closed Immersion is a Finite Morphism.

$f : X \rightarrow Y ::$ closed immersion をとる. Y の open affine subset $U = \text{Spec } A$ をとり, $V = f^{-1}(U)$ とすると, $f|_V : V \rightarrow \text{Spec } A$ は closed immersion になっている. Cor5.10 (あるいは Ex3.11b) より $V \cong \text{Spec } A/\mathfrak{a}$ となるイデアル \mathfrak{a} が存在する.

以上から任意の open affine subset $U = \text{Spec } A \subseteq Y$ に対し $V = f^{-1}(U) = \text{Spec } A/\mathfrak{a}$ かつ $B ::$ finitely generated A -module ($1 + \mathfrak{a}$ で生成される) なので $f ::$ finite.

(c) If $X, Y ::$ noetherian schemes, $f : X \rightarrow Y ::$ finite and $\mathcal{F} ::$ coherent on X , then $f_*\mathcal{F} ::$ coherent.

$f ::$ finite から, 任意の affine open subset $\text{Spec } B \subset Y$ に対して $f^{-1} \text{Spec } B$ は affine scheme $\text{Spec } A$ であり, かつ $A ::$ finitely generated B -module である. $U = \text{Spec } A, V = \text{Spec } B$ としておこう.

^{†2} Ex5.3 から $\tilde{}$ は left adjoint なので direct sum (colimit) と可換であることに注意.

Prop5.4 より, $\mathcal{F}|_{\text{Spec } A} = \tilde{M}$ なる finitely generated A -module M が存在する. $f|_U : \text{Spec } A \rightarrow \text{Spec } B$ だから Prop5.1 から

$$(f_*\mathcal{F})|_V \cong f_*(\mathcal{F}|_U) \cong f_*\tilde{M} \cong (M \otimes_B A).$$

(一番左の同型は任意の V の開集合上での section を見れば良い.) 今 M, B は共に finitely generated A -module だから, $f_*\tilde{M}$ も finitely generated \mathcal{O}_V -module. V は任意の affine open subset としていたから, $f_*\mathcal{F} :: \text{coherent}$.

Ex5.6 Support.

(a) $\text{Supp } m = V(\text{Ann}(m))$.

$A :: \text{ring}$, $M :: A\text{-module}$, $X = \text{Spec } A$ とおく. さらに $\mathcal{F} = \tilde{M}$ とする. $m \in M = \Gamma(X, \mathcal{F})$ について, $\text{Supp } m = \{\mathfrak{p} \in X \mid m_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ を考える. $\text{Ann } m = \{a \in A \mid am = 0\}$ とする.

$$m_{\mathfrak{p}} = 0 \iff \exists a \in A - \mathfrak{p}, \quad am = 0$$

だから, $m_{\mathfrak{p}} \neq 0$ となるのは $(A - \mathfrak{p}) \cap \text{Ann } m = \emptyset$ であるとき, すなわち $\text{Ann } m \subseteq \mathfrak{p}$ となっているときである. よって $\text{Supp } m = V(\text{Ann } m)$.

(b) If $X :: \text{Noetherian}$ and $M :: \text{Finitely Generated}$, then $\text{Supp } \mathcal{F} = V(\text{Ann } M)$.

Prop5.1 から $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$. M の生成元全体を G とすると, 以下のようなになる.

$$M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \iff \exists g \in G, \quad g_{\mathfrak{p}} \neq 0 \iff \exists g \in G, \quad \mathfrak{p} \supseteq \text{Ann } g \iff \mathfrak{p} \supseteq \bigcap_{g \in G} \text{Ann } g.$$

$\text{Ann } M = \bigcap_{g \in G} \text{Ann } g$ は明らか. よって $\text{Supp } \mathcal{F} = V(\text{Ann } M)$.

(c) The Support of a Coherent Sheaf on a Noetherian Scheme is Closed.

$\mathcal{F}|_U$ が finitely generated module ならば $\text{Supp } \mathcal{F}|_U :: \text{closed}$. このような開集合 U は有限個で十分だから $\text{Supp } \mathcal{F}$ が閉集合の有限和となり, したがって閉集合である.

(d) $\Gamma_a(M) \cong \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F})$.

(e) $\mathcal{F} :: (\text{Quasi-})\text{Coherent} \implies \mathcal{H}_Z^0(\mathcal{F}) :: (\text{Quasi-})\text{Coherent}$.

Ex5.7 A Sheaf is Locally Free \iff Its Stalks are Free.

(X, \mathcal{O}_X) を noetherian ringed space とし, \mathcal{F} を coherent sheaf とする.

(a) $\mathcal{F}_x :: \text{free} \implies \mathcal{F}|_U$ is free for a $x \in U :: \text{open in } X$.

$\mathcal{F} :: \text{coherent}$ より, $\mathcal{F}|_U = \tilde{M}$ となる $U = \text{Spec } A :: \text{open in } X$ と $M :: \text{finitely generated } A\text{-module}$ が存在する. M の generator が n 個あるとすると, finite rank free module $A^{\oplus n}$ の generator を M の generator に写す surjective module homomorphism f によって exact sequence が出来る.

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow A^{\oplus n} \xrightarrow{f} M \longrightarrow \text{coker } f = 0 \longrightarrow 0$$

この exact sequence を functor $\tilde{\square}$ で写し x での stalk をとると, Prop5.2, 5.1 から, 再び exact sequence が得られる.

$$0 \longrightarrow \ker f_x \longrightarrow (A_x)^{\oplus n} \xrightarrow{f_x} M_x \longrightarrow \operatorname{coker} f_x = 0 \longrightarrow 0$$

今 $(\mathcal{F}|_U)_x = \tilde{M}_x = M_x$ だから, f の作り方から $f_x :: \text{iso.}$ よって $\ker f_x = 0$. したがって十分小さな開集合 $(x \in) V (\subseteq U)$ をとれば $\ker f|_V = 0$ となる. $f :: \text{iso on } V$ ということになるから, $\Gamma(V, \mathcal{F}|_V) \cong A^{\oplus n}$, $\mathcal{F}|_V \cong (A^{\oplus n})^\sim$.

(b) $\mathcal{F} :: \text{locally free} \iff \mathcal{F}_x \text{ are free } \mathcal{O}_{X,x}\text{-modules for all } x \in X.$

\implies は定義から, \impliedby は (a) から明らか.

(c) $\mathcal{F} :: \text{invertible} \iff \exists \mathcal{G} :: \text{coherent}, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{O}_X.$

■ \implies . $\mathcal{G} = \tilde{\mathcal{F}}$ とおくと, Ex5.1b から

$$\mathcal{F} \otimes \mathcal{G} \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \cong \mathcal{O}_X.$$

■ \impliedby . $x \in X$ を任意にとり, stalk をみる. $\mathcal{F}, \mathcal{G} :: \text{coherent}$ だから, $\mathcal{F}_x, \mathcal{G}_x$ は finitely generated $\mathcal{O}_{X,x}$ -module と同型である.

$$M_x \otimes N_x \cong \mathcal{O}_{X,x}.$$

$\{\text{id}_{\mathcal{O}_{X,x}}\} = \text{Hom}(M_x \otimes N_x, *) \cong \text{Hom}(M_x, \text{Hom}(N_x, *))$ だから $M_x \cong \mathcal{O}_{X,x}$ (?). (a) から $\tilde{M} \cong \mathcal{O}_X$ が得られる. よって \mathcal{F} は invertible.

Ex5.8 $\phi(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x).$

$X :: \text{noetherian scheme}, \mathcal{F} :: \text{coherent sheaf on } X$ とする.

$$\phi(x) = \dim_{k(x)} \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x), \quad k(x) = \mathcal{O}_x / \mathfrak{p}_x$$

という関数を考えよう. Ati-Mac Ex2.1 から $\mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_x} k(x) \cong \mathcal{F}_x / \mathfrak{p}_x \mathcal{F}_x$.

(a) $\phi :: \text{upper semi-continuous}.$

任意の $n \in \mathbb{Z}$ について $\phi^{-1}(\mathbb{Z}_{\geq n}) :: \text{closed in } X$ を示す. $\mathcal{F}|_U$ が $A = \mathcal{O}_X(U)$ と置いた時 finitely generated A -module M を用いて \tilde{M} と書けるような $U :: \text{open in } X$ をとる. このような U で X を被覆できるから, $U \cap \phi^{-1}(\mathbb{Z}_{\geq n}) :: \text{closed in } U$ を示せば十分である.

Prop5.1 から $x \in U$ について $\mathcal{F}_x \cong M_x$. 完全列 $0 \rightarrow \mathfrak{m}_x M_x \rightarrow M_x \rightarrow M_x / \mathfrak{m}_x M_x \rightarrow 0$ と, $\mathfrak{m}_x = 0$ in $k(x)$ を考えれば, $\phi(x) = \dim_{k(x)} M_x$ と分かる. M の最小の生成元集合を G とおくと, $\dim_{k(x)} M_x$ は $g_x \neq 0$ であるような $g \in G$ の個数に等しい. そこで次の集合をとる.

$$\bigcup_{G_n \subseteq G} \bigcap_{g \in G_n} \text{Supp } g \subseteq U$$

この集合の点では n 個以上の $g \in G$ が 0 にならず, $\phi(x) \geq n$ となる. ただし $\bigcup_{G_n \subseteq G}$ は丁度 n 個の元を持つ G の部分集合 G_n すべてを渡る. Ex5.6a より, $g \in G$ について $\text{Supp } g :: \text{closed}$ で, G は有限だから, これは閉集合である.

(b) If $\mathcal{F} ::$ locally free and $X ::$ connected then $\phi ::$ constant.

$\mathcal{F} ::$ locally free から, $U ::$ open in X について, $A_U = \mathcal{O}_X(U)$ とおくと $\mathcal{F}|_U = (A_U^{\oplus n_U})^\sim$ となる n_U が存在する. したがって U においては ϕ の値は常に n_U である. この n_U を $\text{rank } \mathcal{F}|_U$ と書くことにする.

さて, $U \subseteq V$ ならば, $\mathcal{F}|_U = (\mathcal{F}|_V)|_U = ((A_V^{\oplus n_V})^\sim)|_U$ なので $\text{rank } \mathcal{F}|_U = \text{rank } \mathcal{F}|_V$. ここから一般に, $U \cap V \neq \emptyset$ ならば $\text{rank } \mathcal{F}|_U = \text{rank } \mathcal{F}|_V$ だと分かる. このことを元に次の同値関係を考える.

$$U \sim V \iff \exists W_1, \dots, W_s :: \text{open in } X, \quad U \cap W_1, W_1 \cap W_2, \dots, W_s \cap V \neq \emptyset.$$

$U \sim V$ ならば $\text{rank } \mathcal{F}|_U = \text{rank } \mathcal{F}|_V$ であることは今や明らか. $X ::$ connected より, この同値関係による X の開集合の同値類はただひとつ. よって $\phi ::$ constant.

(c) If $X ::$ reduced and $\phi ::$ constant then $\mathcal{F} ::$ locally free.

$\mathcal{F}|_U = \tilde{M}$ となるような $U ::$ affine open in X , $M ::$ finitely generated A -module ($A := \mathcal{O}_X(U)$) をとる. $X ::$ reduced noetherian scheme より $A ::$ reduced noetherian ring.

点 $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A = U$ をとり, $n = \phi(\mathfrak{p})$ とする. 次の完全列を考える.

$$0 \longrightarrow \ker \iota_{\mathfrak{p}} \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}^{\oplus n} \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0.$$

$A^{\oplus n}$ の標準基底を $\{e_i\}_{i=1}^n$ とすると, ι は $e_i \mapsto g_i$ なるものである. $k(\mathfrak{p}) ::$ field は平坦だから, $\otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p})$ は完全列を保つ.

$$0 \longrightarrow (\ker \iota_{\mathfrak{p}}) \otimes k(\mathfrak{p}) \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}^{\oplus n} \otimes k(\mathfrak{p}) \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{p}} \otimes 1} M_{\mathfrak{p}} \otimes k(\mathfrak{p}) \longrightarrow 0.$$

$n = \dim_{k(\mathfrak{p})} A_{\mathfrak{p}}^{\oplus n} \otimes k(\mathfrak{p}) = \dim_{k(\mathfrak{p})} M_{\mathfrak{p}} \otimes k(\mathfrak{p})$ と $\dim_{k(\mathfrak{p})}$ の加法性から, $(\ker \iota_{\mathfrak{p}}) \otimes k(\mathfrak{p}) = 0$. 変形すると $\ker \iota_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} \ker \iota_{\mathfrak{p}} = 0$. $\ker \iota_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ -module だったから, 中山の補題より $\ker \iota_{\mathfrak{p}} = 0$.

$\iota : A^{\oplus n} \rightarrow M$ を, 生成元を生成元へ写す標準的全射とする. もし $\ker \iota \neq 0$ ならば, $\ker \iota_{\mathfrak{p}} \neq 0$ であるような \mathfrak{p} がとれる (by $A ::$ reduced?). ((a)での議論と $\phi ::$ constant から, M の生成元の任意の点での局所化は常に non-zero.) しかし上での議論から常に $\ker \iota_{\mathfrak{p}} = 0$ だから, $\ker \iota = 0$. よって $M ::$ free module.

Ex5.9 Quasi-Finitely Generated Graded S -Modules.

Ex5.10 Saturated Ideals and Closed Sub-Schemes.

$S = A[x_0, \dots, x_n]$, $X = \text{Proj } S$ とおく. 既に homogeneous ideal $I \subset S$ が X の closed subscheme を定めること (Ex3.12), 逆に X の closed subscheme はこのように定まることを示した (5.16). homogeneous ideal $I \subset S$ に対し, その saturation を以下で定める.

$$\bar{I} = \{s \in S \mid \forall i = 0, \dots, n, \exists r \geq 0, x_i^r s \in I\}$$

$I = \bar{I}$ の時, I は saturated ideal であると言われる. S の saturated ideal と X の closed subscheme の間に一対一対応があることを示そう.

注意 Ex5.10.1

$x_i^r s \in I$ は $s \in (I : x_i^r), x_i^r \in (I : s)$ と同値である。なので $I :: \text{saturated ideal}$ について次が成り立つ。

$$\forall s \in S, \left[\forall i = 0, \dots, n, x_i \in \sqrt{(I : s)} \right] \implies s \in I.$$

\implies の左辺は $S_1 \subseteq \sqrt{(I : s)}$ と表現できる。あるいは次のようにも表現できる。

$$\bigcup_{i=0, \dots, n} \bigcup_{r>0} (I : x_i^r) \subseteq I.$$

Ex5.11 The Segre Embedding.

S, T を $S_0 = T_0 = A$ であるような graded ring とする。(S, T は A -module である。) これらの Cartesian product $S \times_A T$ を $\bigoplus_{d \geq 0} S_d \otimes_A T_d$ とする。 $X = \text{Proj } S, Y = \text{Proj } T$ の時, $\text{Proj}(S \times_A T) = X \times_A Y$ であること, 加えて $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S \times_A T)}(1) \cong (\text{pr}_1^* \mathcal{O}_X(1)) \otimes (\text{pr}_2^* \mathcal{O}_Y(1))$ となることを示す。

Ex5.12 Very Ample Invertible Sheaves.

Ex5.13 The d -uple Embedding.

$S :: \text{graded ring}$ とし, S_0 -algebra として S_1 で生成されているとする。この S と正整数 $d > 0$ に対して

$$S_n^{(d)} := S_{nd}, \quad S^{(d)} := \bigoplus_{n \geq 0} S_n^{(d)}$$

とおく。 $\text{Proj } S^{(d)} \cong \text{Proj } S$ を示そう。

仮定より S_1 が S を S_0 -algebra として生成する。また, 明らかに $S_1^{(d)} = S_d$ が $S^{(d)}$ を S_0 -algebra として生成する。そこで $g_0 \in S_1$ を適当にとる。すると $f \in S_1$ について $S_{(f)} = S_{(ff_0^{d-1})}^{(d)}$ が簡単に分かる。

$$\frac{a}{f^n} = \frac{a \cdot f_0^{n(d-1)}}{f^n \cdot f_0^{n(d-1)}}.$$

ここで $a, f^n \in S_n, a f_0^{n(d-1)}, f^n f_0^{n(d-1)} \in S_n^{(d)}$ に注意する。逆に $f' \in S_1^{(d)}$ をとると, $f \setminus f'$ であるような $f \in S_1$ について $S_{(f)} = S_{(f')}^{(d)}$ となる。したがって次が分かる。

$$\forall f \in S_1, f' \in S_1^{(d)}, f \setminus f' \implies \text{Spec } S_{(f)} = \text{Spec } S_{(f')}^{(d)}.$$

S の生成元 $f \in S_1$ (resp. $S^{(d)}$ の生成元 $f' \in S_1^{(d)}$) を様々に取れば $\text{Spec } S_{(f)}$ (resp. $\text{Spec } S_{(f')}^{(d)}$) で $\text{Proj } S$ (resp. $\text{Spec } S^{(d)}$) を被覆できる (S_1 の n 個の元の積全体で $S_1^{(d)}$ は生成されるから f' に対応する f は常に存在すると考えて良い)。よって $\text{Proj } S \cong \text{Proj } S^{(d)}$ 。

S_1 の n 個の元の積 f' をとり, $f \setminus f'$ となる $f \in S_1$ をとる。 $X_{(f')} = \text{Spec } S_{(f')}^{(d)}$ 上の $\mathcal{O}(1)$ の元

$$h \cdot \frac{a'}{f'^n} \quad (a' \in S_n^{(d)}, h \in S_1^{(d)})$$

は, 分子分母に $(f/f')^n$ をかければ直ちに

$$h \cdot \frac{a}{f^n} \quad (a \in S_n, h \in S_d)$$

と読み替えられる。よって $\mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f')}^{(d)}}(1) = \mathcal{O}_{\text{Spec } S_{(f)}}(d)$, $\mathcal{O}_{\text{Spec } S^{(d)}}(1) = \mathcal{O}_{\text{Spec } S}(d)$ 。

Ex5.14 The d -uple Embedding is Projectively Normal.

これは ch I, Ex3.17b で私が考察したことの Scheme における一般化である。

$A :: \text{ring}, S_A^r = A[x_0, \dots, x_r], X :: \text{closed subscheme of } \mathbb{P}_A^r = \text{Proj } S_A^r$ とおく. $i: X \rightarrow \mathbb{P}_A^r$ を埋め込みとし, $\mathcal{I}_X = \ker i^\#$ とおく. さらに $n \in \mathbb{Z}$ に対して以下のように定義する (p.50, p.117, p.118).

$$S_A^r(n) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} (S_A^r)_{d+n}, \quad \mathcal{O}_X(n) = (S_A^r(n))^\sim, \quad \mathcal{I}_X(n) = \mathcal{I}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n), \quad \Gamma_*(\mathcal{I}_X) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \Gamma(X, \mathcal{I}_X(d))$$

Ex3.12, Cor5.12 より, $I = \Gamma_*(\mathcal{I}_X), S(X) = S_A^r/I$ とおくと $X \cong \text{Proj } S(X)$ となる. また, X が normal であるとは, 任意の点で X の local ring が integrally closed であることで, X が projectively normal であるとは, $S(X)$ が integrally closed であることである.

以下 $k :: \text{integrally closed field}, X :: \text{connected normal closed subscheme of } \mathbb{P}_k^r$ とし, $S = S(X)$ とする. X の d -uple embedding (Ex5.13) が十分大きな $d > 0$ について projectively normal であることを示す.

(a) $S :: \text{domain}$ and $S' := \bigoplus_{n \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = \bar{S}$.

■ $\forall f \in S_1, S_{(f)} :: \text{domain} \implies S :: \text{domain}$. $S :: \text{not domain}$ とし, ゼロ因子 a, b を $a, b \neq 0$ かつ $ab = 0$ を満たすものとする. I は saturated ideal なので, Ex5.10 の解答に書いた注意より, 次が成立する.

$$\forall s \in S, S_1 \subseteq \sqrt{\text{Ann}(s)} \implies s = 0.$$

$a, b \neq 0$ だから対偶が成り立ち, $S_1 - (\sqrt{\text{Ann}(a)} \cup \sqrt{\text{Ann}(b)}) \neq \emptyset$. ここから元をとってそれを f とすると, 任意の $r > 0$ について $f^r a, f^r b \neq 0$ となる. したがって $S_{(f)}$ の元 $\frac{a}{f^{\deg a}}, \frac{b}{f^{\deg b}}$ は 0 でない. しかしこれらは明らかにゼロ因子である.

■ $X :: \text{integral scheme}$. $X :: \text{integral scheme}$ ならば, 任意の $f \in S_+$ について $\mathcal{O}_X(D_+(f)) = S_{(f)} :: \text{domain}$. したがって前段落より $S :: \text{domain}$ とわかる. なので $X :: \text{integral scheme}$ を示す. まず $X :: \text{normal}$ より, 任意の $x \in X$ について $\mathcal{O}_{X,x} :: \text{integral}$. なので Ex2.3a より $X :: \text{reduced}$. 次の段落で証明するとおり $X :: \text{irreducible}$ もわかる. Prop1.1 から $X :: \text{integral scheme}$. (以上の証明から, $X :: \text{normal scheme} \implies X :: \text{disjoint union of integral schemes}$ が分かる.)

■ $X :: \text{irreducible}$. X が二つ以上の異なる irreducible component を持っていたとして, それぞれ C_1, C_2 とする. $X :: \text{connected}$ より, $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ であるようにとれる. そこで $x \in C_1 \cap C_2$ をとると, $\mathcal{O}_{X,x}$ は integrally closed になり得ない. 実際, $x \in \text{Spec } R = U$ を affine open subset とすると, U は二つの異なる irreducible component $U \cap C_1, U \cap C_2$ をもつから, R はこれらに対応する 2 つの極小素イデアル $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ をもつ. x に対応する素イデアル $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{p}_1) \cap V(\mathfrak{p}_2)$ での局所化によって R の極小素イデアルが消えることはないから, 結局 $R_{\mathfrak{q}} \cong \mathcal{O}_{X,x}$ は二つの極小素イデアルをもつ. これは $\mathcal{O}_{X,x} :: \text{integral domain}$ に反する. よって $X :: \text{irreducible}$.

(i) $S' :: \text{integrally closed}$.

■ \mathcal{J} の定義. \mathcal{J}_x の元. $\mathcal{J} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(n)$ とおくと $S' = \Gamma(X, \mathcal{J})$ とみなせる. 点 $x \in X$ をとり, \mathcal{J}_x を考えよう. direct sum と stalk (どちらも direct limit) は可換だから,

$$\mathcal{J}_x = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{O}_X(n))_x = \bigoplus_{n \geq 0} (S(n))_x.$$

各 $(S(n))_x$ は次のような集合である.

$$(S(n))_x = (S(n))_{(\mathfrak{p}_x)} = \left\{ \frac{a}{f} \mid d \geq 0, f \in (S - \mathfrak{p}_x)_d, a \in (S(n))_d = S_{d+n} \right\}.$$

ただし \mathfrak{p}_x は点 x に対応する S の斉次素イデアルである. $n \geq 0$ だから

$$\mathcal{J}_x = \left\{ \frac{a}{f} \in S_{\mathfrak{p}_x} \mid f :: \text{homogeneous, } \text{ord } a \geq \deg f \right\}.$$

ここでの \deg, ord は S に付与されているものである. ただし $\text{ord } a$ は a が持つ斉次成分の次数で最低のものである. $\text{Quot}(\mathcal{J}_x) = \text{Quot}(S)$ も分かる.

■ $\mathcal{J}_x :: \text{integrally closed}$ / Introduction. $\mathcal{J}_x :: \text{integrally closed}$ であることを示すため, 次の等式を考える.

$$(*) \quad \left(\frac{a}{f} \right)^r + c_{r-1} \left(\frac{a}{f} \right)^{r-1} + \cdots + c_0 = 0 \quad \text{where } a/f \in \text{Quot}(S), \{c_i\}_{i=0}^{r-1} \subset \mathcal{J}_x.$$

$d = \deg a/f$ とおく. $\mathcal{O}_{X,x} = S_{(\mathfrak{p}_x)} :: \text{integrally closed}$ を利用するため, 操作を加えて $a/f, \{c_i\}$ を 0 次斉次元にしたい. 操作は d の符号によって変わってくる.

■ $d < 0$ はありえない. 最初に $d < 0$ と仮定する. すると十分大きな $s \in \mathbb{N}$ をとって $(*)$ に $(a/f)^s$ をかけることにより, 各項の次数 $\deg c_i + (i+s)d$ を有限負に出来る. しかし $\deg 0 = -\infty$ なので等式 $(*)$ が成立しなくなってしまう. よって $d \geq 0$.

■ $d = 0$ の場合. a/f が負の斉次成分を持つことはないので, a は斉次である. なので係数から 0 次斉次元成分を取り出しても正しい等式となる. (ch I, Thm3.4 で同様の操作を行った.)

■ $d > 0$ の場合. (TODO:) その上で $s \in (S - \mathfrak{p}_x)_1$ をとり^{†3}, 等式 $(*)$ の両辺に s^{-rd} を両辺にかけて, 0 次斉次元成分を取り出しても正しい等式となる. 以上から, 次の等式が得られる.

$$\left(\frac{a_d}{s^d f} \right)^r + \left(\frac{c_{r-1}}{s^d} \right)_0 \left(\frac{a_d}{s^d f} \right)^{r-1} + \cdots + \left(\frac{c_0}{s^{rd}} \right)_0 = 0$$

各項の 0 次斉次元成分が $\frac{(c_i a^i)_0}{s^{rd} f^{r-1}}$ でなく上のように取れるのは, $\frac{c_i}{s^{d(r-i)}}$ と $\frac{a}{a^d f}$ の斉次元成分がどちらも 0 以下のものしか無いことに拠る. 0 以下の整数同士を加えて 0 になるのは 0 同士の和のみ, ということである.

■ $\mathcal{J}_x :: \text{integrally closed}$ / Conclusion. 以上の操作により, a/f 及び係数 $\{c_i\}$ が 0 次斉次元になる. このことから f が斉次だと分かる. 等式 $(*)$ が操作後の条件を満たすとして, 等式の両辺に f^r を掛けて a^r を移項する:

$$c_{r-1} a^{r-1} \cdot f + \cdots + c_1 a^1 \cdot f^{r-1} + c_0 \cdot f^r = -a^r.$$

c_i, a は斉次元だから, 左辺は斉次元である. 加えて左辺の各項は次数が同じだから, 各項が斉次元. したがって f は斉次でなくてはならない. 以上から, $a/f \in S_{(0)}, \{c_i\} \subset S_{(\mathfrak{p}_x)}$ が分かり, $\mathcal{O}_{X,x} = S_{(\mathfrak{p}_x)} :: \text{integrally closed}$ より $f \in S - \mathfrak{p}_x$. まとめて, $a/f \in \mathcal{J}_x$. よって $\mathcal{J}_x :: \text{integrally closed}$.

^{†3} \mathfrak{p}_x が S_1 全体を含むことはない. そうなれば $S_+ \subseteq \mathfrak{p}_x$ となるが, これは $\text{Proj } S$ の定義からありえない. なので $s \in (S - \mathfrak{p}_x)_1$ がとれる.

■ $\forall x \in X, \mathcal{J}_x :: \text{integrally closed} \implies S' :: \text{integrally closed}$. Thm5.19 の証明後半から, $S' \subseteq \bar{S}$.
そこで $a/f \in \bar{S} \subset \text{Quot } S$ をとって考える. この時, 次のような等式が成立する.

$$\left(\frac{a}{f}\right)^r + c_{r-1} \left(\frac{a}{f}\right)^{r-1} + \cdots + c_0 = 0 \quad \text{where } \{c_i\}_{i=0}^{r-1} \subset S \subseteq S'.$$

$S' = \Gamma(X, \mathcal{J})$ だから, 任意の $x \in X$ について $\{c_i\} \subset \mathcal{J}_x$. したがって $\mathcal{J}_x :: \text{integrally closed}$ より $a/f \in \mathcal{J}_x \subset S_{\mathfrak{p}_x}$. 特に, f は斉次元である. f が S の単元でないと仮定すると, f が斉次元であることから, $f \in \mathfrak{p}_x$ なる $x \in X$ がとれる. この x について $a/f \notin \mathcal{J}_x$ となり, 矛盾が生じる. よって f は単元でしかありえない. すなわち $a/f \in S \subseteq S'$. 以上から $S' \supseteq \bar{S}$ が示された.

(b) $S_d = S'_d$ for all sufficiently large d .

S が Ex5.9 の仮定を満たすことは明らか. $\tilde{S} = \mathcal{O}_X$ なので, Ex5.9c から $S \approx S' = \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$.

(c) $S^{(d)}$ is integrally closed for sufficiently large d .

(b) より, d を十分大きく取れば, $S_{nd} = S'_{nd}$ ($n \geq 0$) となる ($S_0 = k = \bar{k} = S'_0$ に注意). なので, この d について, 斉次環 $S^{(d)} = \bigoplus_{n \geq 0} S_{nd}$ は S' の部分環である. $S^{(d)}$ の元を係数に持つ多項式が $\text{Quot}(S^{(d)})$ に根を持っていたとする.

$$\left(\frac{f}{g}\right)^r + c_{r-1} \left(\frac{f}{g}\right)^{r-1} + \cdots + c_0 = 0 \quad \text{where } f, g \in S^{(d)}, \{c_i\}_{i=0}^{r-1} \subset S^{(d)}.$$

$S^{(d)} \subset S'$ かつ (a) から S' は integrally closed なので, $h := f/g \in S'$. 上の等式で $(f/g)^r = h^r$ を移項してみると, $\deg c_i$ が d の倍数であることから, $\deg h^r = r \deg h$ も d の倍数だと分かる. r はいくらでも大きくできるから, r と d が互いに素であるようにすれば, $\deg h$ が d の倍数であることが得られる. 以上から $h = f/g \in S^{(d)}$ であり, $S^{(d)} :: \text{integrally closed}$.

(d) $X :: \text{projectively normal} \iff X :: \text{normal and } \Gamma(\mathbb{P}^r_A, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r_A}(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ is surj.

$X \subseteq \mathbb{P}^r_A :: \text{connected closed subscheme}$ とする. $X :: \text{projectively normal}$ と, $X :: \text{normal}$ かつ自然な写像 $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ が $n \geq 0$ の時全射であること, が同値であることを示す.

■ \implies . $X :: \text{projectively normal}$ の時, 定義から $S = \bar{S}$ なので, (a) 後半から $S \cong S' = \Gamma(X, \mathcal{J})$. $x \in X$ とすると, $\mathcal{O}_{X,x} = S_{(\mathfrak{p}_x)} = \mathcal{J}_x$ であり, (a) 後半の証明から $\mathcal{J}_x :: \text{integrally closed}$. また closed immersion の定義から全射 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r} \rightarrow \mathcal{O}_X$ が存在する. homomorphism of graded rings の定義を考えれば, 全射が $\Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n))$ に遺伝することが分かる.

■ \impliedby . $S'_A(n) = \Gamma(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}(n)) \rightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n)) = S(n)$ が全射かつ $X :: \text{normal}$ とする. すると直ちに全射 $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \rightarrow \Gamma_*(\mathcal{O}_X)$ が得られる. Ex5.9 より, 全射 $(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \rightarrow \mathcal{O}_X$ が存在し, \mathcal{I}_X の定義から, この \ker が I である. Prop5.13 より $\Gamma_*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^r}) \cong S'_A$ なので, $S = S'_A/I \cong \Gamma_*(\mathcal{O}_X) = S'$. (a) 後半から, これは integrally closed. ($k :: \text{integrally closed field}$ は (c) でのみ使われている.)

Ex5.15 Extension of Coherent Sheaves.

$X ::$ noetherian scheme, $U ::$ open in X , $\mathcal{F} ::$ coherent sheaf on U とする. この時, $\mathcal{F}' ::$ coherent sheaf on X であって $\mathcal{F}'|_U = \mathcal{F}$ となるものが存在する. つまり Noetherian Scheme の開集合上の coherent sheaf は拡張できる. これをいくつかの段階に分けて証明する.

Ex5.16 Tensor Operations on Sheaves.

$(X, \mathcal{O}_X) ::$ ringed space, $\mathcal{F} :: \mathcal{O}_X$ -module とする.

(a) If $\mathcal{F} ::$ locally free \mathcal{O}_X -module then $T^r(\mathcal{F}), S^r(\mathcal{F}), \bigwedge^r(\mathcal{F}) ::$ locally free.

Prop5.1,5.2 (まとめたものが Cor5.5) と, $M ::$ free A -module に対して $T^r(M), S^r(M), \bigwedge^r(M) ::$ free modules となることから, $T^r(\mathcal{F}), S^r(\mathcal{F}), \bigwedge^r(\mathcal{F}) ::$ locally free が分かる.

また, それぞれの rank も計算できる. $\text{rank } M = n$ ($M \cong A^{\oplus n}$) とする.

$$\text{rank } T^r(M) = \text{rank} \left(\bigotimes_{i=1}^r A^{\oplus n} \right) = n^r.$$

$\text{rank } S^r(M)$ は r 個の一次独立な元を n 個の基底 ($A^{\oplus n}$ の基底) からとる重複組み合わせの総数に等しい.

$$\text{rank } S^r(M) = H_r^n = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}.$$

$\text{rank } \bigwedge^r(M)$ は r 個の一次独立な元を n 個の基底 ($A^{\oplus n}$ の基底) からとる (重複なし) 組み合わせの総数に等しい.

$$\text{rank } \bigwedge^r(M) = C_r^n = \binom{n}{r}.$$

(b) the multiplication map induces $\bigwedge^r \mathcal{F} \cong (\bigwedge^{n-r} \mathcal{F})^\vee \otimes \bigwedge^n \mathcal{F}$.

$M ::$ locally free A -module とし, M の基底を x_1, \dots, x_n とする.

■Notation. $S = \{1, \dots, n\}$ とし, $I \subseteq S$ に対して $x_I = \bigwedge_{i \in I} x_i$ とする. ただし, $i \in I$ は小さいものから取る. 例えば $I = \{3, 2, 5\}$ なら $x_I = x_2 \wedge x_3 \wedge x_5$ である. $x_\emptyset = 1 \in A$ としておく. また $\text{sgn } I = \pm 1$ を $x_I \wedge x_{I^c} = (\text{sgn } I) x_S$ で定める.

■ \rightarrow . $\bigwedge^n M = Ax_S \cong A$ が分かる. $\bigwedge M$ の multiplication map は次のものである.

$$\begin{aligned} \mu: \bigwedge^r M \otimes \bigwedge^{n-r} M &\rightarrow \bigwedge^n M \cong A \\ x_I \otimes x_J &\mapsto x_I \wedge x_J. \end{aligned}$$

ただし $I, J \subset S$ は $\#I = r, \#J = n-r$ を満たす. 定義より $I \cap J \neq \emptyset$ ならば $\mu(x_I, x_J) = 0$, $I \cap J = \emptyset$ ならば $\mu(x_I, x_J)$ は $\text{sgn } I = \pm 1 \in A$ へ写る. そこで, $I \subseteq S, x_I \in \bigwedge^r M$ に対し, $\mu(x_I, *) \otimes (x_{I^c} \wedge x_I)$ を x_I の像とする. 以上で $\bigwedge^r M$ 全体からの写像が出来た.

■ \leftarrow . $\phi \otimes x_S \in (\bigwedge^{n-r} M)^\vee \otimes \bigwedge^n M$ の像を次のように定める.

$$\sum_{I \subseteq S, \#I = n-r} (\text{sgn } \sigma_I) \phi(x_I) x_{I^c}.$$

ただし S_n は n 次対称群である.

■ isomorphism であること. $\mu(x_I, x_J) \neq 0$ となるのは $J = I^c$ の時のみ. なので x_I の像 $\mu(x_I, *) \otimes (x_{I^c} \wedge x_I)$ の像は $(\text{sgn } I)^2 x_I = x_I$. 逆に $\phi \otimes x_S$ の像 $\sum_I (\text{sgn } I) \phi(x_I) x_{I^c}$ の像は, $\phi = \sum_I (\text{sgn } I) \phi(x_I) \mu(x_{I^c}, *)$ ゆえに $\phi \otimes x_S$.

Ex5.17 Affine Morphisms.

Scheme morphism $f : X \rightarrow Y$ が affine morphism であるとは, $\text{Spec } A \in \mathfrak{U}$ ならば $f^{-1}(\text{Spec } A)$ も affine であるような Y の affine cover \mathfrak{U} が存在する, ということである.

(a) $f : X \rightarrow Y :: \text{affine} \iff \text{for any } \text{Spec } A \subseteq Y \ f^{-1} \text{Spec } A :: \text{affine}.$

\Leftarrow は明らか. \Rightarrow を示す. $\text{Spec } A \subseteq Y$ をとり, $U = \text{Spec } A, V = f^{-1} \text{Spec } A$ とおく. $f|_V : V \rightarrow \text{Spec } A$ だけを考えれば十分なので $f : X \rightarrow \text{Spec } A = Y$ とする. Ex3.1 の解答で証明した “Nike’s Lemma” (と Ex2.13b; $\text{sp}(Y) :: \text{quasi-compact}$) を使うと, $\bigcup_{i=1}^r D_A(a_i) = Y$ かつ $f^{-1} D_A(a_i) :: \text{affine}$ となる $\{a_i\}_{i=1}^r \subset A$ が存在することが分かる.

$f^{-1} D_A(a_i) = \text{Spec } B_i$ としよう. さらに $\phi = f_Y^\# : A = \mathcal{O}_Y(Y) \rightarrow \mathcal{O}_X(X) = B$ とする. Ex3.1 で証明した別の補題 “Preimage of POS is POS” を使うと, $f^{-1} D_A(a_i) = D_{B_i}(b_i)$ となる $b_i \in B_i$ が存在する事が分かる. $\bigcup_{i=1}^r D_A(a_i) = Y$ より $(a_1, \dots, a_r) = (1) = A$ だから, $(\phi(a_1), \dots, \phi(a_r)) = (1) = B$. “Preimage of POS is POS” の証明 (b_i の定め方) から, $X_{\phi(a_1)} = D_{B_i}(b_i) :: \text{affine}$. 以上から Ex2.17b より $f^{-1} \text{Spec } A :: \text{affine}$.

(b) An affine morphism is quasi-compact and separated. $\text{finite} \implies \text{affine}$

finite morphism が affine morphism であることは定義から明らか. affine morphism ならば quasi-compact (定義は Ex3.2) であることは Ex2.13b から分かる. affine morphism ならば separated であることは, Cor4.6f と Prop4.1 から.

(c) $\text{Spec } \mathcal{A}$.

$Y :: \text{scheme}, \mathcal{A} :: \text{quasi-coherent sheaf of } \mathcal{O}_Y\text{-algebra}$ とする. この時, 以下のような $X :: \text{scheme}$, $f : X \rightarrow Y$ が一意に存在する: 任意の affine open subset $U \subseteq V \subseteq Y$ について, $f^{-1}U \cong \text{Spec } \mathcal{A}(U)$ であり, $f^{-1}U \hookrightarrow f^{-1}V$ が restriction map $\mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{A}(U)$ に対応する. この X を $\text{Spec } \mathcal{A}$ で表す.

■ Construct X . Gluing Lemma(Ex2.12) を用いて X を構成する. 貼り合わせるのは $\text{Spec } \mathcal{A}(\text{Spec } R)$ である. $V, W :: \text{affine open subset of } Y$ に対し, $U_V = \text{Spec } \mathcal{A}(V), U_W = \text{Spec } \mathcal{A}(W)$ とする. 2つの restriction map $\text{res}_V, \text{res}_W : \mathcal{A}(V), \mathcal{A}(W) \rightarrow \mathcal{A}(V \cap W)$ から誘導される写像 $i_V, i_W : \text{Spec } \mathcal{A}(V \cap W) \rightarrow U_V, U_W$ をとる. $U_{V,W} = \text{im } i_V, U_{W,V} = \text{im } i_W$ とおくと, open immersion の定義に沿って $U_{V,W}, U_{W,V} :: \text{open in } U_V, U_W$ が確かめられる. ($\mathcal{O}_{U_V}|_{U_{V,W}} \cong \mathcal{O}_{\text{Spec } \mathcal{A}(V \cap W)}$ となる.) 以上の設定で gluing が出来ることは明らか. f は Ex2.12 にある isomorphism $(\psi_V)^{-1} : \psi_V(U_V) \rightarrow U_V$ を貼り合わせれば良い.

■ X satisfies the additional condition. $V, W :: \text{affine open subset of } Y$ をとる. $V \subseteq W$ の時, $f^{-1}V \rightarrow f^{-1}W$ は $i_W : \text{Spec } \mathcal{A}(V \cap W) = \text{Spec } \mathcal{A}(V) \rightarrow \text{Spec } \mathcal{A}(W)$ に対応し, i_W は定義から res_W に対応する.

■ Uniqueness.

(d) $f : X \rightarrow Y :: \text{affine} \iff \mathcal{A} \cong f_*\mathcal{O}_X :: \text{quasi-coherent } \mathcal{O}_Y\text{-algebra and } X \cong \text{Spec}\mathcal{A}.$

■ \implies . $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$ とおく. $U = \text{Spec } \mathcal{A} \subseteq Y$ とすると, $f^{-1}U :: \text{affine}$ だから $f^{-1}U = \text{Spec } \mathcal{O}_X(f^{-1}U) = \text{Spec } \mathcal{A}(U)$. また, $\text{Spec } \mathcal{A}(U) = f^{-1}U \hookrightarrow f^{-1}V = \text{Spec } \mathcal{A}(V)$ は直ちに $\text{res}_V^U : \mathcal{A}(V) \rightarrow \mathcal{A}(U)$ を誘導する. したがって (c) より $X \cong \text{Spec}\mathcal{A}$. また, 任意の $U :: \text{affine open subset in } Y$ について, $\mathcal{A}(U)$ は $f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow f_*\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{A}(U)$ によって $\mathcal{O}_Y(U)$ -algebra とみなすことが出来る. よって $\mathcal{A} :: \text{quasi-coherent } \mathcal{O}_Y\text{-algebra}.$

■ \impliedby . $\mathcal{A} :: \text{quasi-coherent } \mathcal{O}_Y\text{-algebra}$ ならば, (c) から $\text{Spec}\mathcal{A}$ が存在する. $\text{Spec}\mathcal{A}$ の定義から $f : \text{Spec}\mathcal{A} \rightarrow Y$ は affine. $f^\# : \mathcal{O}_Y \rightarrow f_*\mathcal{O}_X$ を考えると, $U = \text{Spec } \mathcal{A} \subseteq Y$ について $f^{-1}U \cong \text{Spec } \mathcal{A}(U)$ だから $\mathcal{O}_X(f^{-1}U) = (f_*\mathcal{O}_X)(U) \cong \mathcal{A}(U)$. このような U で Y を被覆できるから, $\mathcal{A} \cong f_*\mathcal{O}_X$.

(e) $\{ \text{quasi-coherent } \mathcal{O}_X\text{-modules} \} \leftrightarrow \{ \text{quasi-coherent } \mathcal{A}\text{-modules} \}.$

$f : X \rightarrow Y$ を affine morphism とし, $\mathcal{A} = f_*\mathcal{O}_X$ とおく. (b) と Prop5.8c より, $\mathcal{F} :: \text{quasi-coherent } \mathcal{O}_X\text{-module}$ について $f_*\mathcal{F} :: \text{quasi-coherent } \mathcal{A}\text{-module}$ が得られる.

逆に, $\mathcal{M} :: \text{quasi-coherent } \mathcal{A}\text{-module}$ をとる. $U = \text{Spec } \mathcal{A} :: \text{open in } Y$ をとると, $f^{-1}U :: \text{affine}$ なので $f^{-1}U = V = \text{Spec } B$ とする. この時, $\mathcal{M}|_U \cong \tilde{M}$ となる B -module ($B = \mathcal{A}(U)$) が存在する. $\phi = f_U^\# : A \rightarrow B$ によって M を A -module とみなしたものを ${}_A M$ と書くことにして, $\tilde{M}|_U = ({}_A M)^\sim$ とおく. こうして $\tilde{\mathcal{M}}$ を構成する^{†4}. $({}_A M) \otimes_A B \cong M$ が容易にわかるから, Prop5.2 から $f_*(\tilde{\mathcal{M}}|_U) \cong \mathcal{M}|_U$. ${}_A(M \otimes_A B) \cong M$ も同様にわかるから, $f_*(\widetilde{\mathcal{M}|_U}) \cong \mathcal{M}|_U$. \square と f_* が functorial であることは Prop5.2 で述べられているとおりである. 以上で主張が示せた.

Ex5.18 Vector Bundles.

^{†4} つまるところ $\tilde{\mathcal{M}} = f^*\mathcal{M}$ であるが, 上の構成は \mathcal{M} が \mathcal{O}_X -module でないという点で Prop5.2 の内容と異なる.