ゼミノート #9
Quotient Stacks

七条彰紀

2019 年 1 月 17 日

目次

Algebraic stack の具体例として Quotient stack を扱う．この例を通じて特に，「diagonal morphism $\Delta\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ が表現可能とはどういうことか」ということを考えたい．参考文献として [2] 1.3.2, [1] Example 4.8, [3] Example 8.1.12 を参照する．

1 Definitions

1.1 $\mathcal{G}$-torsor

定義 1.1 (Equivariant Morphism)
一般の site :: $\mathbf{C}$ をとり，$\mathcal{G}$ を $\mathbf{C}$ 上の sheaf of groups とする．sheaf :: $\mathcal{F}$ と，$\mathcal{G}$ からの左作用 $\alpha\colon \mathcal{G} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ を組にして $(\mathcal{F}, \alpha)$ と書く．$\mathcal{G}$ からの左作用を持つ sheaf の間の射 $(\mathcal{F}, \alpha) \to (\mathcal{F}', \alpha')$ とは，sheaf の射 $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ であって以下が可換図式であるもの．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} \times \mathcal{F} & \xrightarrow{\mathrm{id} \times f} & \mathcal{G} \times \mathcal{F}' \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ \mathcal{F} & \xrightarrow[f]{} & \mathcal{F}' \end{array}$$

このような射 f は $\mathcal{G}$-equivariant morphism（$\mathcal{G}$ 同変写像）と呼ばれる．

定義 1.2 ($\mathcal{G}$-Torsor, [3] 4.5.1, [4] Tag 04UJ)
一般の site :: $\mathbf{C}$ をとり，$\mathcal{G}$ を $\mathbf{C}$ 上の sheaf of groups とする．$\mathbf{C}$ 上の $\mathcal{G}$-torsor とは，$\mathbf{C}$ 上の sheaf :: $\mathcal{P}$ と左作用 $\alpha\colon \mathcal{G}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ の組であって，次を満たすもの．

T1 任意の $X\in\mathbf{C}$ について cover of X :: $\{X_i\to X\}$ が存在し，$\mathcal{P}(X_i)\neq\emptyset$.
T2 写像

$$\langle \mathrm{pr}_2,\alpha\rangle\colon \mathcal{G}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P}\times\mathcal{P};\quad (p,g)\mapsto(p,\alpha(g,p))$$

は同型．ただし，$\langle \mathrm{pr}_1,\alpha\rangle$ は $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ の普遍性と $\mathrm{pr}_1,\alpha\colon\mathcal{P}\times\mathcal{G}\to\mathcal{P}$ から得られる射である．

$\mathcal{G}$-torsor の射は $\mathcal{G}$-equivariant morphism である．
$(\mathcal{P},\alpha)$ が $\mathcal{G}$-torsor :: $(\mathcal{G},m)$ （ただし $m\colon\mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ は積写像）と同型である時 $\mathcal{G}$-torsor :: $(\mathcal{P},\alpha)$ は自明 (trivial) であると言う．

注意 1.3
$\mathcal{G},\mathcal{P}$ の両方が scheme で表現できる場合には，$\mathcal{G}$-torsor は principal bundle と呼ばれる．group scheme に対応する representable sheaf が

注意 1.4
任意の $X\in\mathbf{C}$ について $\mathcal{P}(X)\neq\emptyset$ である場合には，条件 T2 は作用 α が単純推移的であることを意味する．すなわち，任意の $p,q\in\mathcal{P}(X)$ についてただ一つの $g\in\mathcal{G}(X)$ が存在し，$q=g*q=\alpha(g,p)$ となる．

補題 1.5 ([4] Tag 03AI, [3] 4.5.1)
$\mathcal{G}$-torsor :: $(\mathcal{P},\alpha)$ が自明であることと，$\mathcal{P}$ が global section[†1] を持つことと同値．さらに，$\mathcal{P}(X)\neq\emptyset$ ならば制限 $\mathcal{P}|_X$ は trivial.

(証明). $(\mathcal{P},\alpha)$ が自明であると仮定すると，次のように global section が得られる．

$$1\to\mathcal{G}\cong\mathcal{P};\quad *\mapsto e$$

ただし e は $\mathcal{G}$ の単位元である．
p を $\mathcal{P}$ の global section とすると，

$$\mathcal{G}\to\mathcal{P};\quad g\mapsto\alpha(g,p)$$

という射が定義できる．これは定義にある条件 T2 から同型である．
$s\in\mathcal{P}(X)$ をとれば，scheme の任意の射 $\phi\colon U\to X$ について

$$1\to(\mathcal{P}|_X)(U)=\mathcal{P}(U);\quad *\mapsto\phi^*s$$

のように global section :: $1\to\mathcal{P}|_X$ が定まる． ∎

系 1.6
$\mathcal{G}$-torsor の任意の射は同型．

(証明). (TODO) ∎

[†1] 前層の圏 $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ の terminal object から $\mathcal{P}$ への射のこと ([4] Tag 06UN)．$\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ の terminal object は自明群で定まる constant sheaf である．

1.2 Quotient Stack

定義 1.7 (Quotient Stack, [3] Example 8.1.12)
X :: algebraic space, G :: smooth group scheme over S, acting on X とする．すなわち左作用 $\alpha\colon \underline{G}\times X \to X$ が存在するものとする．この時，fibered category :: $[X/G](\to \mathrm{ET}(S))$ を以下で定める．

Object 以下の 3 つ組．

- S-scheme :: U,
- $G_U := G\times_S U$-torsor on $\mathrm{ET}(U)$ :: $\mathcal{P}$,
- $\underline{G}$-torsor の射 $\pi\colon \mathcal{P}\to X_U := X\times_S U$.

Arrow 射 $(U,\mathcal{P},\pi)\to(U',\mathcal{P}',\pi')$ は二つの射の組 $(f\colon U\to U', f^\flat\colon \mathcal{P}\to f^*\mathcal{P}')$ であって，以下が可換となるもの．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[rr, "f^\flat"] \arrow[dr, "\pi"'] & & f^*\mathcal{P}' \arrow[dl, "f^*\pi'"] \\ & X_U & \end{tikzcd}$$

fibration は $(U,\mathcal{P},\pi)\mapsto U, (f,f^\flat)\mapsto f$ で与えられる．

補題 1.8
S :: scheme, X :: algebraic space, G :: smooth group scheme over S, acting on X とする．Quotient stack :: $[X/G]$ は stack in groupoids である．

(証明). stack であることは sheaf の貼り合わせが可能であることに拠る．詳しくは [3] 4.2.12, [4] Tag 04UK を参照せよ．$[X/G]$ が category fibered in groupoids(CFG) であることを確かめる．これは恒等射上の $[X/G]$ の射が同型射であることを確かめれば良い．

$U\in\mathrm{ET}(S)$ を固定し，射 $(\mathrm{id}_U, f^\flat)\colon (U,\mathcal{P},\pi)\to(U,\mathcal{P}',\pi')$ を考える．定義から，次が可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[rr, "f^\flat"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{P}' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & X_U & \end{tikzcd}$$

∎

2 Aim of This Session

定理 2.1
Quotient Stack は algebraic stack である．

3　準備

3.1　Definition of $\mathbf{Isom}(X, Y)$

最初に $\mathfrak{X}$ の cleavage を選択せずとも出来る **Isom** の構成を述べる．後の注意で特に splitting を選択した場合の構成も述べておく．

定義 3.1 ($\mathbf{Isom}(X, Y)$)
stack とは限らない fibration :: $\mathfrak{X} \to \mathbf{B}$ と，$U \in \mathbf{B}$ 及び U 上の対象 $X, Y \in \mathfrak{X}$ をとる．この時，CFG over $\mathbf{B}/U$:: $\mathbf{Isom}(X, Y)$ を以下のように定める．

Object. 以下の 4 つ組．

- $\mathbf{B}/U$ の対象 $f\colon V \to U$.
- f の cartesian lifting :: $f^*X \to X, f^*Y \to Y$.
- 同型 $\phi\colon f^*X \to f^*Y$.

Arrow. 射

$$(V \xrightarrow{f} U, f^*X \to X, f^*Y \to Y, f^*X \xrightarrow{\phi} f^*Y) \to (W \xrightarrow{g} U, g^*X \to X, g^*Y \to Y, g^*X \xrightarrow{\psi} g^*Y)$$

は，以下の 2 つからなる．

- $\mathbf{B}/U$ の射 $h\colon V \to W$（したがって $g \circ h = f$ が成立），
- 射 $f^*\psi, \phi$ の間の canonical な同型射 $(h^*g^*X \to f^*X, h^*g^*Y \to f^*Y)$.

$(h^*g^*X \to f^*X, h^*g^*Y \to f^*Y)$ を選択することで，$h^*g^*X \to X, h^*g^*Y \to Y$ が定まる．また Triangle Lifting により $f^*\psi$ も定まる．以下の図式を参考にすると良い．

in $\mathfrak{X}$

$$\begin{tikzcd}
 & h^*g^*X \arrow[r, "h^*\psi"] \arrow[dl] \arrow[dd] & h^*g^*Y \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
X & & & Y \\
 & f^*X \arrow[ul] \arrow[r, "\phi"'] & f^*Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi_{\mathfrak{X}}$$

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "g \circ h"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}"] & V \arrow[dr, "g \circ h"] \arrow[dd, "\mathrm{id}"] & \\
U & & & U \\
 & V \arrow[ul, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & V \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

fibration は次のように与えられる．

$$
\begin{array}{llcc}
\pi\colon & \mathbf{Isom}(X,Y) & \to & \mathbf{B}/U \\
\textbf{Objects:} & (f\colon V \to U, f^*X, f^*Y, \phi\colon f^*X \to f^*Y) & \mapsto & f \\
\textbf{Arrows:} & (h\colon V \to W, h^*g^*X \to f^*X, h^*g^*Y \to f^*Y) & \mapsto & h
\end{array}
$$

注意 3.2
$\mathfrak{X} \to \mathbf{B}$ の splitting を選んだ場合には $\mathbf{Isom}(X,Y)$ の定義は次のように簡単に成る．

Object. $\mathbf{B}/U$ の対象 $f\colon V \to U$ と同型 $\phi\colon f^*X \to f^*Y$ の組．
Arrow. 射 $(f,\phi) \to (g,\psi)$ は，$g \circ h = f$ を満たす $\mathbf{B}/U$ の射 h.

以下では $\mathbf{Isom}(X,Y)$ が algebraic space（これは sheaf）と同型であるかどうかを考えるので，こちらの定義だけを覚えていても問題はない．

3.2 Propositions

補題 3.3
任意の $U \in \mathbf{B}$ と $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ について，$\mathbf{Isom}(X,Y)$ は category fibered in sets.

(証明). 恒等射上の射は恒等射しかないことを確かめれば良い．$\mathbf{Isom}(X,Y)$ の射の定義から，恒等射上の射は次の形になっている．

$$(\mathrm{id}_U, f^*X \to f^*X, f^*Y \to f^*Y)\colon (f, f^*X, f^*Y, \phi) \to (f, f^*X, f^*Y, \psi)$$

$f^*X \to f^*X, f^*Y \to f^*Y$ は Triangle Lifting から得られる canonical なものなので，恒等射である． ∎

$\mathfrak{X}$ :: stack の場合は（$\mathfrak{X} \to \mathbf{B}$ の splitting を選べば）$\mathbf{Isom}(X,Y)$ は sheaf になる．

補題 3.4
一般の site :: $\mathbf{C}$ と CFG :: $\mathfrak{X} \to \mathbf{C}$ をとる．さらに $\mathfrak{X}$ は split fibered category であるとする．以下の二つは互いに同値．

(i) $\mathfrak{X}$ は prestack である．
(ii) 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}$ について $\mathbf{Isom}(X,Y)$ の fiber は sheaf である．

(証明). (TODO: 出典) ∎

3.3 Representability of Diagonal Morphism.

注意 3.5
以下，scheme S を固定し，特に断らない限り big etale site :: $\mathrm{ET}(S)$ 上の stack in groupoids のみ考える．

補題 3.6
$\mathfrak{X}$ :: stack in groupoids on $\mathbf{C}(= \mathrm{ET}(S))$ とする．この時，$\Delta\colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}$ が表現可能であることと，任意の $U \in \mathbf{C}$ と任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ について $\mathbf{Isom}(X,Y)$ が algebraic space であることは同値．

(証明). $x, y\colon \mathbf{Sch}/U(= U) \to \mathfrak{X}$ を，2-Yoneda Lemma により得られる $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ に対応する射とする[†2].

以下の図式が pullback diagram であることから分かる.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Isom}(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{pr}_U"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathfrak{X}}"'] \arrow[dr, phantom, "\stackrel{a}{\Nearrow}"] & \mathbf{Sch}/U \arrow[d, "x \times y"] \\
\mathfrak{X} \arrow[r, "\Delta"'] & \mathfrak{X} \times_S \mathfrak{X}
\end{tikzcd}
$$

任意の射 $\mathbf{Sch}/U \to \mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ が $x \times y$ の形で表されることは，$\mathfrak{X} \times \mathfrak{X}$ の普遍性から得られる.

まず，射と自然同型を定義する．$\mathbf{Isom}(X,Y)$ から伸びる射は次の関手である．ただし $\xi = (f\colon V \to U, f^*X, f^*Y, \phi\colon f^*X \to f^*Y), \eta = (g\colon W \to U, g^*X, g^*Y, \psi\colon g^*X \to f^*Y)$ とした.

$$
\begin{array}{llcc}
\mathrm{pr}_U & \mathbf{Isom}(X,Y) & \to & \mathbf{Sch}/U \\
\textbf{Objects:} & \xi & \mapsto & f \\
\textbf{Arrows:} & [\xi \to \eta] & \mapsto & h
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llcc}
\mathrm{pr}_{\mathfrak{X}} & \mathbf{Isom}(X,Y) & \to & \mathfrak{X} \\
\textbf{Objects:} & \xi & \mapsto & f^*X \\
\textbf{Arrows:} & [\xi \to \eta] & \mapsto & f^*X \to h^*g^*X
\end{array}
$$

自然同型 a は次で定める.

$$
\begin{array}{lccc}
a_\xi\colon & ((x \times y)\,\mathrm{pr}_U)(\xi) & \to & (\Delta\,\mathrm{pr}_{\mathfrak{X}})(\xi) \\
 & (f\colon V \to U, f^*X, f^*X, \alpha) & \mapsto & (\mathrm{id}_{f^*X}, \phi)
\end{array}
$$

$\mathbf{Isom}(X,Y)$ が pullback であることは，$\mathbf{Isom}(X,Y)$ が普遍性を持つことを通して確かめる.（TODO） ∎

補題 3.7 ([3] Exercise 5.G)

4　証明

参考文献

[1] Pierre Deligne and David Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.

[2] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[3] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[†2] 例えば x は $f \in \mathbf{Sch}/U$ を cartesian lifting f^*X へ写す.

[4] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.