

# 第1章 Etale Morphisms

七条彰紀

2020年3月17日

## 目次

1	Definitions.	1
2	Examples.	3
3	Propositions.	4

この章では etale morphism の定義, 例, 命題を取り上げる.

## 1 Definitions.

**定義 1.1** (Infinitesimal Thickening, Formally Smooth/Unramified/Etale) (i)  $i: Y'_0 \hookrightarrow Y' ::$  closed embedding について, defining ideal  $:: \ker i^\#$  が nilpotent <sup>†1</sup>であるとき,  $Y'_0$  を  $Y'$  の infinitesimal thickening (無限小肥大?) と呼ぶ. あるいは  $i$  を infinitesimal thickening と呼ぶ.

(ii)  $Y' ::$  affine  $Y$ -scheme,  $Y'_0(\hookrightarrow Y') ::$  infinitesimal thickening of  $Y'$  とする.  $f: X \rightarrow Y$  について, 以下の図式を見よ.

$$\begin{array}{ccc} Y'_0 & \xrightarrow{\quad} & X \\ \text{inf. thi.} \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

この時, 次の写像が定まる.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_Y(Y', X) & \rightarrow & \mathrm{Hom}_Y(Y'_0, X) \\ \text{blue } \rightarrow & \mapsto & \text{red } \rightarrow \end{array}$$

この写像が surjective injective, bijective であるとき, それぞれ formally smooth, formally unramified, formally etale という.

---

<sup>†1</sup> i.e.  $\exists n > 0, (\ker i^\#)^n = 0$

**定義 1.2** ((Locally) Of Finite Presented Module/Algebra/Sheaf/Morphism)

- (i)  $R$ -module  $:: M$  が finitely presented module であるとは, 次の完全列が存在すること.

$$A^{\oplus r} \longrightarrow A^{\oplus s} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

- (ii) surjective ring homomorphism  $:: \phi: R[x_1, \dots, x_s] \rightarrow A$  が存在し,  $\ker \phi$  が finitely generated ideal であるとき,  $A ::$  finitely presented  $R$ -algebra (of finite presentation over  $R$ ) という.
- (iii)  $\mathcal{F} ::$  quasi-coherent sheaf on a scheme  $X$  とする.  $\mathcal{F} ::$  locally finitely presented とは, 任意の affine open subscheme of  $X :: \text{Spec } A \subseteq X$  について,  $\Gamma(\text{Spec } B, \mathcal{F})$  が finitely presented  $B$ -module であること.
- (iv)  $f: X \rightarrow Y ::$  locally of finite presentation であるとは, 任意の  $\text{Spec } B \subseteq Y$  と  $\text{Spec } A \subseteq f^{-1}(\text{Spec } B)$  について,  $A ::$  finitely presented  $B$ -algebra であるということ. あるいは (同値な条件として), affine open cover of  $Y :: Y = \bigcup_i \text{Spec } B_i$  が存在して, 任意の  $\text{Spec } A_{ij} \subseteq f^{-1}(\text{Spec } B_i)$  について,  $A_{ij} ::$  finitely presented  $B_i$ -algebra であるということ.
- (v)  $f: X \rightarrow Y$  が quasi-compact であるとは, 任意の affine open subset of  $X :: \text{Spec } A$  について  $f^{-1}(\text{Spec } A) ::$  quasi-compact であること. あるいは (同値な条件として), affine open cover of  $Y :: Y = \bigcup_i \text{Spec } B_i$  が存在して,  $f^{-1}(\text{Spec } B_i) ::$  quasi-compact であること.
- (vi)  $f: X \rightarrow Y$  が quasi-separated であるとは, また diagonal morphism  $:: \Delta: X \rightarrow X \times_Y X$ <sup>†2</sup> が quasi-compact であること.
- (vii)  $f: X \rightarrow Y$  が locally of finite presentation かつ quasi-compact かつ quasi-separated である時,  $f ::$  finitely presented という.

環  $R$  や scheme  $:: Y$  を noetherian とすれば, (locally) of finite presentation と (locally) of finite type は同値になる. 一般に (locally) of finite presentation の方が強い条件である (例を参照せよ).

**定義 1.3** (Smooth/Unramified/Etale)

morphism  $:: f: X \rightarrow Y$  は, formally smooth / unramified / etale かつ finitely presented ならば smooth / unramified / etale という.

unramified については, finite type のみ要求する定義もある. finitely presented を要求するのは EGA からのもので, 我々が主に参照している [Ols16] もこの定義を取っている.

<sup>†2</sup>  $\Delta$  は以下のように pullback の普遍性から得られる射である.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\Delta} & X \times X & \longrightarrow & X \\ & \searrow & \downarrow & \text{p.b.} & \downarrow f \\ & & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

## 2 Examples.

### 例 2.1

locally of finite presentation かつ quasi-compact だが NOT quasi-separated である例を挙げる.

以下のように設定する.

- $k :: \text{field},$
- $Y = \text{Spec } k[x_1, x_2, \dots],$
- $z = (x_1, x_2, \dots) \in Y,$
- $U = Y - \{z\}.$

この時,  $U$  は quasi-compact でない. これは  $U :: \text{quasi-compact} \iff z :: \text{finitely generated}$  からわかる<sup>†3</sup>.

$X$  を, 二つの  $Y$  のコピーを  $U$  で貼り合わせたものとし,  $X_1, X_2 \subseteq X$  をその  $Y$  のコピーとする. すなわち  $X_1, X_2 \cong Y$ . この同型を  $\phi_i: X_i \rightarrow Y$  と名付ける. このとき,  $f: X \rightarrow Y$  を  $\phi_1, \phi_2$  の  $U$  に沿った貼り合わせとする. こうすると  $f|_{X_i} = \phi_i$  となる.

■  $f :: \text{locally of finite presentation.}$   $Y :: \text{affine scheme}$  で,  $f^{-1}(Y) = X_1 \cup X_2$  であり,  $X_1, X_2 \cong Y$  であった. なので  $f :: \text{locally of finite presentation.}$

■  $f :: \text{quasi-compact.}$  同じく,  $X_1, X_2 :: \text{quasi-compact}$  なので  $f^{-1}(Y) = X_1 \cup X_2$  が quasi-compact.

■  $f :: \text{NOT quasi-separated.}$   $\text{sp}(X \times_Y X)$  と  $\Delta: X \rightarrow X \times_Y X$  を考えると次のように成る.

$$\Delta: x \mapsto (\phi_1^{-1}(x), \phi_2^{-1}(x)).$$

一方,  $X_1 \times_Y X_2 (\subset X \times X)$  は,  $X_1, X_2 (\cong Y)$  が affine なので affine. そこで逆像  $\Delta^{-1}(X_1 \times_Y X_2)$  を取ると, これは  $U$  である. 既に述べたとおり, これは NOT quasi-compact.

### 例 2.2 (Smooth (BUT NOT Etale) Morphism.)

次のように定める.

$$\begin{aligned} f: \text{Spec } k[x, y] &\rightarrow \text{Spec } k[t] \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

これは affine scheme の間の射なので quasi-separated.  $f^{-1}(\text{Spec } k[t]) = \text{Spec } k[x, y]$  が noetherian scheme なので finitely presented. あとは formally smooth であることを示せば良い. (TODO)

### 例 2.3 (Unramified (BUT NOT Etale) Morphism.)

次のように定める:

$$\begin{aligned} h: \text{Spec } \frac{\mathbb{C}[x, y]}{(x^2 - y^3)} &\rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[x] \\ (x, y) &\mapsto x \end{aligned}$$

$f$  の場合と同様に, formally unramified だけ示せば良い. (TODO)

<sup>†3</sup> 私のノート: [https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne\\_AG\\_Ch2/section2\\_ex.pdf](https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section2_ex.pdf) 補題 Ex2.13.2 (II) に証明がある.

例 2.4 (Etale Morphism.)

次のように定める:

$$\begin{array}{ccc} h: \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[u, u^{-1}, y]/(y^d - u) & \rightarrow & \operatorname{Spec} \mathbb{Q}[t, t^{-1}] \\ (u, y) & \mapsto & u \end{array}$$

$A = \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ ,  $B = \mathbb{Q}[u, u^{-1}, y]/(y^d - u)$  とおくと,  $h$  に対応する環準同型は  $h^\# : A \rightarrow B; t \mapsto ua \bmod (y^d - u)$ .  $f$  の場合と同様に, formally etale だけ示せば良い.

以下の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\alpha} & R/I \\ h^\# \uparrow & \searrow \beta & \uparrow \pi \\ A & \xrightarrow{\phi} & R \end{array}$$

ここで  $I \subseteq R$  はイデアルで,  $I^N = 0$  となる整数  $N > 0$  が存在する. 与えられた  $\alpha$  から図式を可換にする  $\beta$  を構成し, このような  $\beta$  が  $\alpha$  に対し唯一であることを示す. まず  $\beta$  は  $t \in B$  の像のみで定まることに注意する. 図式が可換であることと, 次が成立することは同値.

$$\beta h^\#(t) = \beta(u) = \phi(t), \quad \pi \beta(u) = \alpha(u)$$

よって  $\beta(u) = \phi(t)$  で  $\beta$  を定めれば良い. このように定めれば後者も成立する. また, この構成から明らかに  $\beta$  はただ一つ.

例 2.5 (Formally Etale BUT NOT Etale Morphism.)

例 (2.1) の morphism  $:: f: X \rightarrow Y$  がそうである. このことを示すには, Formally etale であることだけ確かめれば十分.

### 3 Propositions.

命題 3.1

以下に列挙する性質は, stable under base exchange かつ stable under composition.

- (1) locally of finite presentation,
- (2) quasi-compact,
- (3) quasi-separated,
- (4) of finite presentation,
- (5) formally smooth,
- (6) formally unramified,
- (7) formally etale,
- (8) smooth,

(9) unramified,

(10) etale.

(証明). 証明が必要なものは (1), (2), (3) と (5), (6), (7) である. いずれも簡単なのでここでは証明しない. ■

**定義 3.2** (smooth of relative dimension  $n$ )

$n$  を 0 以上の整数とする. morphism  $f: X \rightarrow Y$  について以下が成立する時,  $f$  :: smooth of relative dimension  $n$  と呼ぶ.

- (i)  $f$  :: finite type over  $k$ ,
- (ii)  $f$  :: flat,
- (iii)  $X' \subseteq X, Y' \subseteq Y$  を  $f(X') \subseteq Y'$  を満たす irreducible component とする.  
この時  $\dim X' = \dim Y' + n$ ,
- (iv) 任意の  $x \in X$  について  $\dim_{k(x)}(\Omega_{X/Y} \otimes k(x)) = n$ .

**定理 3.3** ([Har97] Ex.III.10.3)

morphism  $f: X \rightarrow Y$  について以下は同値.

- (i)  $f$  :: etale,
- (ii)  $f$  :: flat and unramified,
- (iii)  $f$  :: smooth of relative dimension 0.

(証明). (TODO) ■

**命題 3.4**

formally smooth/unramified/etale は locally on codomain な性質である.

(証明). (TODO) ■

**命題 3.5** ([Ols16] Prop1.3.6 (i))

$f: X \rightarrow Y$  を finite presentation, quasi-separated morphism とする. この時  $\Omega_{X/Y}$  は次のように成る.

- (i)  $f$  :: smooth  $\implies \Omega_{X/Y}$  :: locally free sheaf of finite rank.
- (ii)  $f$  :: unramified  $\iff \Omega_{X/Y} = 0$ .
- (iii)  $f$  :: etale  $\implies \Omega_{X/Y} = 0$ .

(証明). 証明は [Mat87] §25 の内容を一部使う. 特に §25 始めから Thm25.1 の直前までがわかっているれば良い.

主張は local なものだから,  $X = \text{Spec } B, Y = \text{Spec } A$  と仮定して良い.  $f :: \text{smooth}$  より  $B :: \text{finitely presented } A\text{-algebra}$ .  $f$  に対応する準同型を  $\phi: A \rightarrow B$  とする.

(i) を示すために,  $\Omega_{B/A} :: \text{projective } B\text{-module}$  を示す (projective ならば locally free であることは [Sta19] section 10.84 に証明がある). これはすなわち,  $B\text{-module}$  の以下の図式に対し, 図式を可換にする  $\tilde{D}: \Omega_{B/A} \rightarrow M$  が存在するということである.

$$\begin{array}{ccc} & \Omega_{B/A} & \\ \tilde{D} \swarrow & \downarrow D & \\ M & \xrightarrow{t} & N \end{array}$$

ここで  $t :: \text{surj}$ .

次の図式を考える.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f_D} & B[N] \\ \phi \uparrow & & \uparrow \\ A & \longrightarrow & B[M] \end{array}$$

ここで  $B[M]$  は [Mat87] §25 でいう  $B * M$  である<sup>†4</sup>.  $B[N]$  も同様.  $f_D$  は  $A$ -derivation  $:: D$  に対応する射  $b \mapsto (b, D(b))$  である.  $B[M] \rightarrow B[N]$  は  $(b, m) \mapsto (b, t(m))$  で与えられる射で, したがって全射であり核は  $0 \oplus (\ker t)$ . これは square-zero ideal である. そして  $\phi :: \text{formally smooth}$  であるから, 図式を可換にする  $B \rightarrow B[M]$  が存在する. これに対応する  $A$ -derivation が所望の  $\tilde{D}$  である.

(ii) を示す.  $R :: \text{ring}, I \subseteq R :: \text{ideal}$  を  $I^2 = 0$  を満たすものとする. 以下が可換図式だったとしよう.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\theta} & R/I \\ \phi \uparrow & \searrow \lambda & \uparrow \pi \\ A & \longrightarrow & R \end{array}$$

この時,  $\lambda$  を lifting of  $\theta$  と呼ぶ. [Mat87] §25 より<sup>†5</sup>,

$$\text{Hom}_A(\Omega_{B/A}, I) = \text{Der}_A(B, I) = \{\lambda - \lambda' \mid \lambda, \lambda' :: \text{lifting of } \theta\}$$

となっている.  $\phi :: \text{formally unramified}$  なので, lifting of  $\theta$  は一つしか無い. よって  $\text{Hom}_A(\Omega_{B/A}, I) = 0$ . 任意の  $R, I$  についてこれが成立するので, これは  $\Omega_{B/A} = 0$  と同値.

formally etale  $\implies$  formally unramified なので (ii)  $\implies$  (iii) は明らか. ■

<sup>†4</sup> これらは  $B$ -algebra で, 加群としては  $B \oplus M$  で, 乗法は  $(b, m) \cdot (b', m') = (bb', bm' + b'm)$  で定まる. 重要な特性として,  $\pi_M: B[M] \rightarrow B; (b, m) \mapsto b$  の kernel は square-zero で,  $\pi_M$  の  $A$ -algebra section (section which is  $A$ -algebra morphism) と  $A$ -derivation  $B \rightarrow M$  が一対一に対応する.

<sup>†5</sup> あるいは私のノート [https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne\\_AG\\_Ch2/section8\\_ex.pdf](https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section8_ex.pdf) の Ex8.6(a) の解答より.

**命題 3.6** ([Ols16] Prop1.3.6 (iii))

- $g: X \rightarrow Y$  を smooth morphism,
- $i: Z \rightarrow X$  を locally of finite presented closed embedding

とする. この時,  $f = i \circ g: Z \rightarrow Y$  が smooth であることと, 以下の列が完全かつ locally split であることは同値である.

$$0 \longrightarrow i^* \mathcal{I}_Z \longrightarrow i^* \Omega_{X/Y} \longrightarrow \Omega_{Z/Y} \longrightarrow 0$$

ただし  $\mathcal{I}_Z = \ker i^\#$ .

(証明). 問題は local なものであるから,  $X = \operatorname{Spec} B, Y = \operatorname{Spec} A, Z = \operatorname{Spec} R = \operatorname{Spec} B/I$  とする. この時, 主張にある完全列は次のように成る.

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{B/A} \otimes_A R \longrightarrow \Omega_{R/A} \longrightarrow 0.$$

ただし  $\delta: i \bmod I^2 \mapsto d_{B/A}(i) \otimes 1_R$ .  $d_{B/A}$  は derivation である.

■方針. 左端の 0 を除いたものは Second Fundamental Exact Sequence として知られ, [Mat87] Thm25.2 などでも証明されているとおり, 常に成立する. また, 明らかに  $f :: \text{locally finitely presented}$ . したがって我々は,

- (a)  $Z = \operatorname{Spec} B/I \rightarrow \operatorname{Spec} A = Y :: \text{formally smooth}$  と,
- (b)  $\delta :: \text{split}$  が

同値であることを示せば良い.

■(b) の言い換え:  $\delta^* :: \text{surj}$ . 最初に (a)  $\implies$  (b) を示す. これは任意の  $R$ -module  $N$  について以下が成立することを示せば良い.

$$\delta^* = (- \circ \delta): \operatorname{Hom}_R(\Omega_{B/A} \otimes_A R, N) \cong \operatorname{Hom}_R(\Omega_{B/A}, N) \rightarrow \operatorname{Hom}_R(I/I^2, N) :: \text{surj}.$$

( $\cong$  はテンソル積の随伴性から得られる.) 実際,  $N = I/I^2$  とすると,  $\delta^* :: \text{surj}$  から  $\delta$  の retraction の存在が言える. したがって  $\delta :: \text{split}$ . split は inj を意味することに注意.

■問題のさらなる言い換え.  $\delta^*$  を具体的に計算すると, 示すべきは次のことであることが分かる.

**主張 3.7**

任意の  $\phi \in \operatorname{Hom}_R(I/I^2, N)$  に対し, 以下を満たす射  $\psi: B \rightarrow R[N]$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc} B \xrightarrow{\psi} R[N] \xrightarrow{\operatorname{pr}_1} R & = & B \text{--mod } I \longrightarrow R \\ I \hookrightarrow B \xrightarrow{\psi} R[N] & = & I \xrightarrow{\text{mod } I^2} I/I^2 \xrightarrow{\phi} N \rightarrowtail R[N] \end{array}$$

一行目の等号は  $\psi$  が  $\pi_N$  の section であることを意味し, 二行目の等号は  $\operatorname{pr}_2 \circ \psi: B \rightarrow N$  が  $\delta^*(\phi)$  に等しいことを意味する.

■  $\delta^* :: \text{surj.}$   $\psi$  は次のように構成する．まず次の可換図式を考える．

$$\begin{array}{ccc} R & \xlongequal{\quad} & R \\ \uparrow & & \uparrow \pi \\ A & \longrightarrow & B/I^2 \end{array}$$

$\pi$  は  $I/I^2$  による剰余をとる写像である． $A \rightarrow R :: \text{formally smooth}$  から，図式を可換にする射  $\sigma: R \rightarrow B/I^2$  が存在する．この射から次のように同型  $R[I/I^2] \cong B/I^2$  が作れる．

$$\begin{array}{ccc} q: & B/I^2 & \rightarrow & R[I/I^2] \\ & \tilde{b} & \mapsto & (\pi(\tilde{b}), (\text{id} - \sigma\pi)(\tilde{b})) \\ & \pi(r) + \tilde{i} & \leftarrow & (r, \tilde{i}) \end{array}$$

これを元に  $\psi$  を構成する．

$$B \longrightarrow B/I^2 \xrightarrow{q} R[I/I^2] \xrightarrow{\text{id} \oplus \phi} R[N]$$

これが主張の条件を満たすことは自明．

■ (b)  $\implies$  (a) の言い換え :  $I \subseteq \ker \tilde{h}$  にする．話を切り替えて (b)  $\implies$  (a) を証明しよう (これは [Mat87] で言及されていない)． $C :: A\text{-algebra}$ ,  $J \subset C :: \text{ideal with } J^2 = 0$  とし,  $D = C/J$  とおく．以下の図式 (1) を考える．

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} R \xrightarrow{h} D \\ \uparrow \quad \text{dashed} \uparrow \\ B \longrightarrow C \\ \uparrow \\ A \end{array} \quad (2) \quad \begin{array}{ccc} R \xrightarrow{h} D \\ \uparrow \quad \text{dashed } \tilde{h} \downarrow \\ B \longrightarrow C \\ \uparrow \\ A \end{array}$$

$A \rightarrow B :: \text{formally smooth}$  なので，図式 (2) の破線の射  $\tilde{h}$  を得る．我々の目的は図式を可換にする  $R \rightarrow C$  を見つけることである．これには， $I \subseteq \ker \tilde{h}$  であれば準同型定理から  $\tilde{h} = B \rightarrow R = B/I \rightarrow C$  が得られる．

■ 問題の言い換え :  $\text{im } \kappa_h = 0$  にする． $\ker(B \rightarrow R = B/I) = I$  なので  $\tilde{h}(I) \subseteq J$ ．また  $J^2 = 0$  なので， $\tilde{h}$  から  $\kappa_{\tilde{h}}: I/I^2 \rightarrow J$  が誘導される．構成から分かるとおり，示したい  $\tilde{h}(I) = 0$  と  $\text{im } \kappa_{\tilde{h}} = 0$  は同値である．そして我々は，以下の通り， $\text{im } \kappa_j = 0$  となる  $h$  を選ぶことが出来る．

■  $h$  の構成．仮定より  $\tilde{\alpha} \circ \delta = \kappa_{\tilde{h}}$  を満たす  $\tilde{\alpha}: \Omega_{B/A} \otimes_A R \rightarrow J$  が存在する．この  $\tilde{\alpha}$  を以下のように拡張し， $\alpha: B \rightarrow J$  とする：

$$\begin{array}{ccc} \alpha: & B & \rightarrow & J \\ & b & \mapsto & \tilde{\alpha}(d_{B/A}(b) \otimes 1_R) \end{array}$$

$h = \tilde{h} - \alpha$  と置いて， $\kappa_h(I/I^2)$  を計算する． $i \in I$  とする．

$$\begin{aligned} \kappa_h(i \bmod I^2) &= \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) - \alpha(d(i) \otimes 1_R) \\ &= \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) - (\alpha \circ \delta)(i \bmod I^2) \\ &= \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) - \kappa_{\tilde{h}}(i \bmod I^2) \\ &= 0. \end{aligned}$$

以上より， $h(I) = 0$  が得られる．



**命題 3.8** ([Sta19], Tag 02G7)

$f: X \rightarrow Y ::$  finitely presentation and quasi-separated が unramified morphism であることと、以下の条件 (\*) は同値: (\*) 任意の  $y \in Y$  について, fiber of  $f$  at  $y :: X_y$  は disjoint union of spectra of finite separable field extensions of  $k(y)$ .

(証明).

■(\*)  $\implies f ::$  unramified. 最初は  $f ::$  unramified であることを仮定する. unramified は stable under base exchange (命題 3.1) なので,  $Y = \text{Spec } k$  の場合を示せば良い.

定理 (3.3) と [Har97] Cor III.9.6 より,  $\dim X = \dim \text{Spec } k = 0$ . また  $X$  は finite type over  $k$  なので noetherian. したがって  $X ::$  artinian <sup>†6</sup>. artinian ring の構造定理 ([MA06] Thm8.7) と  $X ::$  quasi-compact より,  $X$  は

$$X = \bigsqcup \text{Spec } A_i$$

と disjoint に分解でき, 各  $A_i$  は local artinian ring である.

$\text{Spec } A_i \rightarrow \text{Spec } k ::$  unramified ゆえに  $\Omega_{A_i/k} = 0$  なので,  $A_i ::$  reduced <sup>†7</sup>.  $A_i$  の素イデアルは唯一つであるから,  $A_i ::$  field. unramified は stable under base extension なので, 同様にして  $A_i ::$  separable over  $k$ .

$A_i ::$  finitely generated  $k$ -algebra かつ体なので, Zariski's Lemma により,  $A_i/k ::$  finite algebraic extension.  $A_i ::$  separable field over  $k$  なので, 定義より  $A_i ::$  finite separable extension.

■ $f ::$  unramified  $\implies$  (\*). 次に命題の条件を仮定する.

まず  $K/k$  が finite separable field extension であるとする. すると primitive element theorem より,  $\alpha \in K$  を用いて  $K = k(\alpha)$  と書ける.  $f \in k[x]$  を  $\alpha$  の最小多項式とすると, 以下が成り立つ.

$$0 = d(f(\alpha)) = f'(\alpha) \cdot d(\alpha) \in \Omega_{K/k}.$$

$K/k ::$  separable より,  $f(\alpha) = 0$  かつ  $f'(\alpha) \neq 0$  となる. したがって  $f'(\alpha) ::$  unit in  $\Omega_{K/k}$  なので  $d(\alpha) = 0$ . よって  $\Omega_{K/k} = K \cdot d(\alpha) = 0$ .

$k$ -algebra  $A :: A = \bigoplus_i K_i$  を  $K_i ::$  finite separable field extension of  $k$  の直和とする.  $\mathfrak{p}_i$  を第  $i$  成分以外は 0 である元からなる素イデアルとすると,

$$(\Omega_{A/k})_{\mathfrak{p}_i} = \Omega_{A_{\mathfrak{p}_i}/k} = \Omega_{K_i/k} = 0.$$

$\text{sp Spec } A = \{\mathfrak{p}_i\}_i$  なので, これで  $\Omega_{A/k} = 0$  が示せた.

最後に, 一般の scheme で考える. 証明は命題 (3.5) を利用する.  $\text{Spec } A \subseteq Y$  と  $\text{Spec } B \subseteq f^{-1}(\text{Spec } A)$  をとり,  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } A$  における  $f$  の fiber を考える. 仮定 (\*) より  $B \otimes_A k(\mathfrak{p}) ::$  direct sum of finite separable field extensions of  $k$ . ここで, 上述のことから

$$\Omega_{B \otimes_A k(\mathfrak{p})/k(\mathfrak{p})} = \Omega_{B/A} \otimes_B k(\mathfrak{p}) = 0.$$

$\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p})) \approx f^{-1}(\mathfrak{p})$  を任意にとると,

$$(\Omega_{B/A} \otimes_B k(\mathfrak{p}))_{\mathfrak{q}} = (\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} \otimes_B k(\mathfrak{p}) = (\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} = 0.$$

<sup>†6</sup> noetherian scheme の定義にある語 “noetherian” を “artinian” に書き換えたのが artinian scheme の定義である.

<sup>†7</sup>  $x \in A_i$  が  $x^N = 0$  を満たすとする.  $I = \ker(A_i \otimes_k A_i \rightarrow A_i)$  とすると,  $x \otimes x^{N-1} \in I$  かつ  $\notin I^2$ . ゆえに  $\Omega_{A_i/k} = I/I^2 \neq 0$ .

これは局所環  $B_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(\mathfrak{p})$  上の加群であるから, Nakayama's Lemma より,  $(\Omega_{B/A})_{\mathfrak{q}} = 0$ .  $\mathfrak{q} \in \text{Spec}(B \otimes_A k(\mathfrak{p}))$  は任意に取っていたから, これは  $\Omega_{B/A} = 0$  を意味する. 命題 (3.5) より, これは  $f :: \text{unramified}$  と同値. ■

**定理 3.9** ([Sta19], Tag 04HM)

$f: X \rightarrow Y$  を separated etale morphism とする.  $y \in Y$  に対し  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$  とする (点  $x_i$  が有限個であることは命題 (3.8) による). etale neighbourhood  $:: \nu: (U, u) \rightarrow (Y, y)$  が存在し,  $X_U = X \times_{\nu, Y, f} U$  の disjoint union decomposition :

$$X_U = \bigsqcup_{i,j} V_{i,j}$$

について  $V_{i,j} \cong U$ .

**注意 3.10**

この定理は代数幾何学版の陰関数定理とも呼べる定理である. この現象を根拠にしたスローガン「etale morphism は代数幾何学版 locally homeomorphism」がある. 証明は, この定理だけのために必要な命題が幾つかあるため, 後の節に行く.

**命題 3.11**

(Jacobian criterion)  $f: X \rightarrow Y$  を, locally of finite presentation とする.  $f :: \text{smooth}$  と次の条件 (+) は同値である:

任意の点  $x \in X$  について,  $x$  と  $y = f(x) \in Y$  の間に affine neighborhood

$$x \in \text{Spec } B \subset X, \quad y = f(x) \in \text{Spec } A \subseteq Y \quad (\text{with } f(\text{Spec } B) \subseteq \text{Spec } A)$$

が存在し, ある  $n, s$  ( $s \leq n$ ) と  $f_1, \dots, f_s \in A[x_1, \dots, x_n]$  について

$$B \cong \frac{A[x_1, \dots, x_n]}{(f_1, \dots, f_s)}.$$

さらに, Jacobian matrix ( $n \times s$ -matrix)

$$J = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i,j}$$

は, 右逆行列をもつ (i.e.  $\exists J', JJ' = I$ ). 同値な条件として, regular (i.e. 行列式が unit element of  $B$ ) な部分  $s$  正方行列を  $J$  は持つ.

さらに,  $f :: \text{etale}$  と, この条件で  $n = s$  であることは同値である.

(証明). まずは  $(f(x) \in \text{Spec } A \text{ なる } \text{Spec } A \text{ と } f(\text{Spec } B) \subseteq \text{Spec } A \text{ かつ } x \in \text{Spec } B \text{ なる } \text{Spec } B \text{ を適当に取る. } f :: \text{locally of finite presentation から, surjective homomorphism}$

$$A[x_1, \dots, x_n] \rightarrow B$$

であって kernel  $:: I$  が有限生成であると仮定できる.

命題 (3.6) を  $\text{Spec } B \rightarrow \text{Spec } A[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{A}_A^n \rightarrow \text{Spec } A$  に適用すれば,  $f :: \text{smooth}$  と以下が split exact sequence であることが同値だと分かる.

$$0 \longrightarrow I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega_{A[x_1, \dots, x_n]/A} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B/A} \longrightarrow 0.$$

特に  $\delta :: \text{split injective}$  が同値である.

■  $f :: \text{smooth} \implies (+)$ .  $\{f_i\}_{i=1}^s$  を  $I$  の生成元とする. この時,  $\delta$  は次のように作用する.

$$\begin{bmatrix} \delta(\bar{f}_1) \\ \vdots \\ \delta(\bar{f}_s) \end{bmatrix} = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i,j} \begin{bmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix}$$

ここで現れた行列は主張にある Jacobian matrix である. 今, 命題 (3.5) (i) と, この exact sequence の存在から  $I/I^2 :: \text{free module}$  である. そしてこのとき  $\{\bar{f}_i\}_i$  ( $\bar{f}_i = f_i \bmod I^2$ ) は  $I/I^2$  の基底と成る. したがって  $\{\bar{f}_i\}_i$  と  $\{dx_j\}_j$  はそれぞれの自由加群の基底であるから,  $\delta$  が split injective であることは, 主張にある Jacobian matrix の条件と同値である.

■  $f :: \text{smooth} \iff (+)$ .  $J$  が right inverse を持つならば, 明らかに  $\delta$  が section を持つ. よって  $\delta :: \text{split injective}$ .

■  $f :: \text{etale} \iff (+)$  and  $n = s$ . 最初に述べた exact sequence から,  $\Omega_{B/A}$  の階数は以下のように成る.

$$\text{rank } \Omega_{B/A} = \text{rank}(\Omega_{A[x_1, \dots, x_n]/A} \otimes_A B) - \text{rank}(I/I^2) = n - s.$$

したがって  $n = s \iff \Omega_{B/A} = 0 \iff f :: \text{formally unramified. etale} = \text{smooth and formally etale}$  なので, 証明できた. ■

### 定理 3.12

scheme  $:: S$  について, category  $:: \text{ET}(S)$  を以下のように出さめる.

Objects etale morphism  $:: Z \rightarrow S$ ,

Arrows  $S$ -morphism  $:: Z \rightarrow Z'$ .

$i: S_0 \rightarrow S :: \text{infinitesimal thickening}$  について, 関手  $F$  を以下で定める.

$$\begin{aligned} F: \quad \text{ET}(S) &\rightarrow \text{ET}(S_0) \\ [Z \rightarrow S] &\mapsto [Z \times_S S_0 \rightarrow S_0] \end{aligned}$$

このとき,  $F$  は圏同値である.