

ゼミノート #1

Fine/Coarse Moduli Space の非存在

七条彰紀

2018 年 5 月 29 日

問 0.1

Fine/Coarse moduli space とは何か？

moduli space は “moduli functor” の情報を可能な限り精密に写した scheme のことである．その理解のためにはまず “functor of points” の概念が必要である．以下、私が過去に書いたノート “Group Scheme” を引用・加筆する．

1 Functor of Points

圏論で言う “generalized point” の概念を、名前を変えて用いる．

定義 1.1

- (i) $X, T \in \mathbf{Sch}/S$ に対し, $\underline{X}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/S}(T, X)$ を X の T -valued points と呼ぶ. $T = \mathrm{Spec} R$ と書けるときは $\underline{X}(T)$ を $\underline{X}(R)$ と書く. したがって \underline{X} は \mathbf{Sch}/S からの covariant functor と見ることも, k -algebra の圏からの contravariant functor と見ることも出来る. この関手 \underline{X} は functor of points と呼ばれる.
- (ii) 体 k 上の scheme X ($S = \mathrm{Spec} k, X \in \mathbf{Sch}/S$) と field extension $k \subseteq K$ について, $\underline{X}(K)$ を X の K -rational points と呼ぶ.
- (iii) morphism $h: X \rightarrow Y$ について自然変換 $\underline{h}: \underline{X} \rightarrow \underline{Y}$ は $\phi \mapsto h \circ \phi$ のように射を写す.

注意 1.2

\mathbf{Sch} は locally small category である．すなわち、任意の $X, Y \in \mathbf{Sch}$ について $\underline{X}(Y)$ は集合である．これを確かめるために、 $X, Y \in \mathbf{Sch}$ を任意にとり、 $\mathrm{Hom}(X, Y)$ の濃度がある濃度で抑えられることを見よう．射 $X \rightarrow Y$ の作られ方に沿って考える．

- (1) base space の間の写像 $f: \mathrm{sp} X \rightarrow \mathrm{sp} Y$ をとる．このような写像全体の濃度は高々 $|\mathrm{sp} Y|^{|\mathrm{sp} X|}$.
- (2) $|Y|$ の開集合 U をとる．開集合全体の濃度は高々 $2^{|\mathrm{sp} Y|}$.
- (3) 写像 $f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow (f_* \mathcal{O}_X)(U)$ を定める．このような写像全体の濃度は高々 $|(f_* \mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$.

したがって $\text{Hom}(X, Y)$ の濃度は高々

$$|\text{sp } Y|^{|\text{sp } X|} \times \prod_{U \in 2^{\text{sp } Y}} |(f_* \mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$$

となる．濃度の上限が存在する（すなわち，ある集合への単射を持つ）から， $\text{Hom}(X, Y)$ は集合である．

注意 1.3

上の注意から，Yoneda Lemma が成立する．したがって自然変換 $\underline{G} \rightarrow \underline{H}$ と射 $G \rightarrow H$ が一対一対応する．このため，scheme の間の射についての議論と functor of points の間の射の議論は（ある程度）互いに翻訳することが出来る．

注意 1.4

K -rational point については， $\underline{X}(K) = \{x \in X \mid k(x) \subseteq K\}$ とおく定義もある．ここで $k(x)$ は x での residue field である．しかし [6] Chapter.2 Ex2.7 から分かる通り，この二つの定義は翻訳が出来る．すなわち， $k(x) \subseteq K$ を満たす $x \in X$ と， $\text{Spec } k\text{-morpsihm} :: \text{Spec } K \rightarrow X$ は一対一に対応する．

また $X :: \text{finite type } /k$ であるとき，closed point $:: x \in X$ について， $k(x)$ は k の有限次代数拡大体である．これは Zariski's Lemma の帰結である．したがって $\underline{X}(\bar{k})$ は X の closed point 全体に対応する．ただし \bar{k} は k の代数閉包である．

例 1.5

\mathbb{R} 上の affine scheme $X = \text{Spec } \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$ の \mathbb{R} -rational point と \mathbb{C} -rational point を考えよう．

$\text{Spec } \mathbb{R} \rightarrow X$ の射は環準同型 $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2) \rightarrow \mathbb{R}$ と一対一に対応する．しかし直ちに分かる通り，このような環準同型は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (0, 0)$$

で定まるものしか存在し得ない．ここで $\bar{x} = x \bmod (x^2 + y^2), \bar{y} = y \bmod (x^2 + y^2)$ と置いた．よって $\underline{X}(\mathbb{R})$ は 1 元集合．また，この環準同型が誘導する $\text{Spec } \mathbb{R} \rightarrow X$ の射は 1 点空間 $\text{Spec } \mathbb{R}$ を原点へ写す．

一方，環準同型 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \rightarrow \mathbb{C}$ は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (a, \pm ia)$$

（ここで $i = \sqrt{-1}, a \in \mathbb{R}$ ）で定まることが分かる．すなわち， $\mathcal{Z}_a(x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ の点に対応して， $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \rightarrow \mathbb{C}$ の環準同型が定まる．逆の対応も明らか．よって $\underline{X}(\mathbb{C})$ の元は $\mathcal{Z}_a(x^2 + y^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ の点に対応している．

例 1.6

体 k 上の affine variety $:: X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ を多項式系 $:: F_1, \dots, F_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ で定まるものとする．すると k 上の環 R に対して，次の集合が考えられる．

$$V_R = \{p = (r_1, \dots, r_n) \in R^{\oplus n} \mid F_1(p) = \dots = F_n(p) = 0\}.$$

この集合の元も R -value point と呼ばれる．([12] ではこちらのみを R -value point と呼んでいる．実際，こちらのほうが字句 “value point” の意味が分かりやすいだろう．) V_R の点が $\underline{X}(R)$ の元と一対一に対応することを見よう．

X の affine coordinate ring を $A = k[x_1, \dots, x_n]/(F_1, \dots, F_n)$ とし, $\bar{x}_i = x_i \bmod (F_1, \dots, F_n)$ ($i = 1, \dots, n$) とおく. $\phi: A \rightarrow R$ を考えてみると, これは次のようにして定まる.

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \mapsto (r_1, \dots, r_n) \in V_R.$$

すなわち, V_R の点に対して $\text{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ の元が定まる. 逆の対応は明らか. そして, $\text{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ が $\text{Hom}_{\mathbf{Sch}/\text{Spec } k}(\text{Spec } R, X) = \underline{X}(R)$ と一対一対応することはよく知られている.

2 Moduli Functor and Fine/Coarse Moduli Space

A を代数幾何学的対象の集合とし, \sim を A の中の同値関係とする. “naive moduli problem” は, M の点^{†1}と A/\sim の元 (同値類) が一対一対応するような scheme $:: M$ を見つけよ, という問題である. 更に A/\sim の元が「連続的に変化」する様子も「エンコード」しているような M を見つけよ, という問題を “extended moduli problem” と呼ぶ (正確な定義は [8] §2.2). “extended moduli problem” を定式化するには, 「連続的に変化」と「エンコード」を定式化しなくてはならない. 前者の為に “family” が定義され, 後者の為に “moduli functor” が定義される. すると「エンコード」は関手の表現であると理解できる. 射の fibre として実現される, scheme (例えば smooth curve) の family は deformation theory の対象である.

2.1 Families

定義 2.1

\mathcal{P} を集合のクラス^{†2} とする. 集合 B について, B の構造と整合的な構造を持った集合 \mathcal{F} と全射写像 $\pi: \mathcal{F} \rightarrow B$ の組が \mathcal{P} の B 上の **family** であるとは, 各 $b \in B$ について集合 $\pi^{-1}(b) \subseteq \mathcal{F}$ が \mathcal{P} に属するという事.

「 B の構造と整合的な構造」というのは, 例えば, S が位相空間であって写像 $\mathcal{F} \rightarrow S$ を連続にするような位相が \mathcal{F} に入っている, ということである. family の構造は場合毎に明示されなくてはならない.

用語 “family” を厳密に定義しているものは全くと言っていいほど無いが, ここでは Renzo のノート^{†3} の定義を参考にした. “family” を上のように解釈して不整合が生じたことは, 私の経験の中ではない.

注意 2.2

moduli theory 以外で “family of \mathcal{C} ” と言えば, 単に \mathcal{C} の部分集合であろう. “family parametrized by S ” の様に言えば, S -indexed family (or set) のことを想像するであろう. しかし S -indexed family $:: \mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ は $S \rightarrow \mathcal{F}$ という写像で定まるから, ここでの “family” とは写像の向きが逆である.

上の定義を無心に読めば分かる通り, 「 \mathcal{C} の family $:: \mathcal{F}$ 」と言った時には, \mathcal{C} に属するのは \mathcal{F} の部分集合である. 属するのは (一般に) \mathcal{F} の元ではない. また \mathcal{F} は \mathcal{C} の元の和集合とみなせる. (正確には \mathcal{C} の元を S に沿って並べたものである.)

例 2.3

^{†1} [9] では, 特に M の geometric point. 定義は後述.

^{†2} 集合 X を変数とする述語 $X \in \mathcal{C}$ の意味を「 X はある条件を満たす対象である」と定義した, と考えて良い. 「属す」の意味は集合と同様に定める.

^{†3} <http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topics10/Notes.pdf>

$X, B :: \text{scheme}, f : X \rightarrow B :: \text{morphism of schemes}$ をとる. X は f によって B 上の family となる. B の点における f の fiber が moduli 問題の対象である. 我々が代数幾何学の一分野として Moduli 問題を扱う場合, 現れる family はこのようなもののみである.

例 2.4

k を体, S を適当な scheme とする. \mathbb{A}_k^2 の原点を通る直線の S 上の family として, line bundle $:: \mathcal{L} \subset \mathbb{A}^2 \times_k S$ を考えることが出来る. $\mathcal{L} \rightarrow S$ は射影写像で与えられる. 同様に \mathbb{A}^n の r 次元線形空間の S 上の family は r 次元 vector bundle $:: \mathcal{E} \subset \mathbb{A}^n \times S$ である.

例 2.5

k を適当な体とし, \mathbb{P}_k^1 の点 O_i ($i = 1, 2, 3$) を順に $(0 : 1), (1 : 0), (1 : 1)$ とする. この時, $PGL_2(k)$ は次の全単射で \mathbb{P}_k^1 の自己同型写像の $(\mathbb{P}_k^1)^{\oplus 3}$ 上の family になる.

$$\begin{aligned} \pi : PGL_2(k) &\rightarrow (\mathbb{P}_k^1)^{\oplus 3} \\ \phi &\mapsto (\phi^{-1}(O_i))_{i=1}^3. \end{aligned}$$

注意 2.6

family にしばしば要請される性質として, 特に “flat” がある. projective flat family は, base scheme に適切な条件をつけると各 fiber $:: X_t$ の Hilbert 多項式が t に依らない, という特徴がある ([6] III, Thm9.9). 詳細は [6] III, 9 を参照せよ.

2.2 Moduli Functor

以下の定義は [5] など, Moduli 問題に関する殆ど入門書で述べられている.

定義 2.7

moduli functor (または functor of families) とは, 各 scheme $:: S$ に対して, $\mathcal{M}(S)$ が代数幾何学的対象の S 上の family 達を family の間の同値関係で割ったもの (“{families over S } / \sim_S ” in [8]) であるような $\mathcal{M} : \mathbf{Sch} \rightarrow \mathbf{Set}$ のことである. morphism $:: f : S \rightarrow T$ は, \mathcal{M} によって pullback に写される. すなわち, $\phi : \mathcal{F} \rightarrow T$ は $\mathcal{M}(f)$ によって $\mathcal{F} \times_T S \rightarrow S$ に写される.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} \times_T S & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ \mathcal{M}(f)(\phi) \downarrow & & \downarrow \phi \\ S & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

moduli functor の定義はあえて曖昧に述べられている. これは「出来る限り多くのものを moduli theory の範疇に取り込みたい」という思いがあるからである ([5]).

2.3 Fine Moduli Space

定義 2.8

scheme $:: M$ が moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるとは, M が \mathcal{M} を表現する (represent) ということである. 言い換えれば, 関手 $\underline{M} = \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, M)$ が \mathcal{M} と自然同型, ということである.

注意 2.9

moduli functor $:: \mathcal{M}$ の fine moduli space $:: M$ が存在したとしよう．この時，任意の $X \in \mathbf{Sch}$ について $\mathcal{M}(X) \cong \underline{M}(X)$ ．これは X 上の family が成す同値類が M の X -valued point と一対一に対応していることを意味する．したがって， \mathcal{M} が指定する代数幾何学的対象の集合の同値類を M が「パラメトライズ」していると考えられる．

定義 2.10

moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対する fine moduli space を M であるとする．また $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \underline{M}$ を自然同型とする． $u = \Psi_M^{-1}(\text{id}_M) : \mathcal{U} \rightarrow M$ を universal family と呼ぶ．

universal family の名前の由来は次の命題に拠る．

命題 2.11

任意の family $:: \phi : \mathcal{F} \rightarrow B \in \mathcal{M}(B)$ は， $\chi = \Psi(\phi) : B \rightarrow M$ と universal family $:: u : \mathcal{U} \rightarrow M$ の pullback (fiber product) として得られる．

(証明)． $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \underline{M}$ は自然同型であるから， $\chi = \Psi(\phi) : B \rightarrow M$ から次の可換図式が得られる．

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(B) & \xleftarrow{\mathcal{M}(\chi)} & \mathcal{M}(M) \\ \Psi_B \downarrow & & \downarrow \Psi_M \\ \underline{M}(B) & \xleftarrow{\underline{M}(\chi)} & \underline{M}(M) \end{array}$$

$u \in \mathcal{M}(M)$ を $\mathcal{M}(\chi)$ で写すと $\mathcal{U} \times_M B \rightarrow B$ になる．同じ u を $\underline{M}(B)$ まで写すと， $\Psi_M(u) \circ \chi = \chi$ になる．これを Ψ_B^{-1} で写せば $\phi : \mathcal{F} \rightarrow B$ ．上の図式は可換図式であったから， $\phi = \mathcal{U} \times_M B \rightarrow B$ ． ■

例 2.12 ([8], Exercise 2.20)

例 2.4 で述べた \mathbb{A}^n の r 次元線形空間の S 上の family (vector bundle over S) の集合を，vector bundle の同型で割った集合を $\mathcal{M}(S)$ とする． $f : T \rightarrow S$ に対する $\mathcal{M}(f)$ は，vector bundle への post-composition で自然に定まる．

この moduli functor は fine moduli space を持つことが知られている．これが Grassmannian variety である．

残念ながら，多くの moduli functor に対して fine moduli space が存在し得ない．（このあたりの議論は [5] p.3 や [7] p.150 にある．この節の終わりでも理由と例を示す．）そのため Mumford は [9] で

2.4 Coarse Moduli Space

定義 2.13

moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対して，以下を満たす scheme $:: M$ を \mathcal{M} の coarse moduli space と呼ぶ．

- (i) 自然変換 $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \underline{M}$ が存在する．

(ii) Ψ は functor of points への自然変換の中で最も普遍的である:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M} & \\ \forall \tau \swarrow & & \searrow \Psi \\ \forall \tilde{M} & \xleftarrow{\exists_1 f} & \underline{M} \end{array}$$

この図式で $\tilde{M} :: \text{scheme}$, $f : M \rightarrow \tilde{M}$.

(iii) 任意の代数閉体 k について, $\Psi_{\text{Spec } k} : \mathcal{M}(k) \rightarrow \underline{M}(k)$ は全単射である.

条件 (ii) は “ M is the best (possible) approximation of \mathcal{M} ” だとか, “ M is corepresent of \mathcal{M} ” と表現される.

注意 2.14

条件 (ii) において f の向きを反転させると, coarse moduli space の定義が無意義に成る. 実際, f の向きを反転させた条件を考えると, **Sch** の initial object $:: \emptyset$ が条件を満たす. 普遍ならば一意なので, 任意の moduli functor に対する coarse moduli space は空集合 \emptyset しかなくなる. これは条件 (iii) を満たさないで, coarse moduli space は一切存在しないことに成る.

注意 2.15

代数閉体 k について, $\underline{M}(k)$ の元は “geometric point” と呼ばれる ([9], p.1).

例 2.16

楕円曲線の j -invariant. 後に示すとおり, これは fine でない coarse moduli space である. 自然変換 Ψ は j -invariant (楕円曲線についての関数) を用いて

$$\Psi_S(\mathcal{F} \rightarrow S) : S \rightarrow \mathbb{A}^1; \quad s \mapsto j(\mathcal{F}_s)$$

のように定義できる. 条件 (iii) は [6] IV, Thm4.1 で示されている. 以下, 条件 (ii) を示す.

ここでは [7] Prop 26.3 の証明を参照した. [11] では違う方針の証明が述べられている.

$B = \text{Spec } k[\lambda, 1/\lambda, 1/(1-\lambda)]$ とし, family $:: \phi : \mathcal{F} \rightarrow B$ を λ をパラメータとする family $:: y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ で定める. j -invariant は

$$j(\lambda) = \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

で定める. また, $\lambda \in B$ を以下の 6 元のいずれかへ写す 6 つの B の自己同型群 G は, B に作用する位数 6 の群となる.

$$\lambda, 1-\lambda, 1/\lambda, 1/(1-\lambda), (\lambda-1)/\lambda, \lambda/(\lambda-1).$$

今, scheme $:: M'$ と自然変換 $\Psi' : \mathcal{M} \rightarrow \underline{M}'$ が存在したとしよう. $\phi : \mathcal{F} \rightarrow B$ の Ψ' による像を $\chi' : B \rightarrow M'$ とする.

$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ と $y^2 = x(x-1)(x-(1-\lambda))$ は同型であることが知られている. 他の $1/\lambda, 1/(1-\lambda), \dots$ についても同様である. χ' は fiber の同型類と M' の点を (B の 6 点を経由して) 一対一対応させる. なので, 任意の $g \in G$ について $\chi' \circ g = \chi'$ すなわち, χ' は G -invariant map である.

G -invariant map は B の G による categorical quotient を介する二つの射に分解される. GIT quotient の理論により,

$$B // G = \text{Spec}(k[\lambda]^G)$$

が categorical quotient (特に good quotient. [8] 参照.). そしてこれは $\mathbb{A}_j^1 = \text{Spec } k[j]$ に等しい ([6] IV, Thm4.1 参照). なので $\chi' : B \rightarrow M'$ は $B \rightarrow \mathbb{A}_j^1 \rightarrow M'$ に分解される. こうして $\psi : \mathbb{A}_j^1 \rightarrow M'$ が得られた.

この ψ によって以下の図式が可換であることを確かめる. (TODO)

2.5 Properties of Fine / Coarse Moduli Spaces

命題 2.17

moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対して coarse moduli space は同型を除いて一意である.

命題 2.18 ([7], Prop23.6)

scheme $:: M$ が moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるならば, M は \mathcal{M} の coarse moduli space でもある.

この二つをまとめると次の図式に成る.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Fine moduli} & \Longrightarrow & \text{Coarse moduli} & \Longrightarrow & \text{Universality} \\ & & & & \Downarrow \\ & & & & \text{Uniqueness} \end{array}$$

命題 2.19

M を moduli functor \underline{M} の coarse moduli space とする. また $\Psi : \mathcal{M} \rightarrow \underline{M}$ を自然変換とする. M が fine moduli space であることは次と同値.

1. $\Psi(u) = \text{id}_M$ となる family $:: u : \mathcal{U} \rightarrow M$ が存在する.
2. 任意の scheme $:: S$ について $\Psi_S : \mathcal{M}(S) \rightarrow \underline{M}(S)$ は単射.

(証明). M が fine moduli space である (すなわち Ψ が自然同型である) ときに 2 条件が成り立つことは明らか.

任意の scheme $:: S$ について Ψ_S が同型 (iso) であることを示す. 今, $\mathcal{M}(S), \underline{M}$ がどちらも集合であるから, Ψ_S は写像である. iso map は surj+inj map と同値であるから, 我々は $\Psi_S :: \text{surj}$ のみ示せば良い. しかしこのことは命題 2.11 で証明されている. ■

命題 2.20 ([7], Prop23.5)

$S :: \text{scheme}$ の open subscheme と包含写像が成す圏を **OpenSubSch**(S) と書くことにする. これは **Sch**/ S の full subcategory である.

moduli functor $:: \mathcal{M}$ が fine moduli space をもつならば, 任意の $S :: \text{scheme}$ について $\mathcal{M}|_{\text{OpenSubSch}(S)}$ は S 上の sheaf である. 言い換えれば, \mathcal{M} は Zariski topology 上の sheaf である.

(証明). $M :: \text{fine moduli scheme for } \mathcal{M}$ とし, $S :: \text{scheme}$ を固定する. $\mathcal{F} := \underline{M}|_{\text{OpenSubSch}(S)}$ は開集合系からの contravariant functor だから presheaf であることは定義から従う. また \mathcal{F} の元は scheme の

morphism である．このことから sheaf の公理 Identity Axiom と Glueability Axiom を満たすことも簡単に分かる．（一応，[6] II, Thm3.3 Step3 を参考に挙げる．） ■

注意 2.21

それぞれの fiber が互いに同型である (i.e. $\forall t, s \in S, \mathcal{F}_t \cong \mathcal{F}_s$) ような family を fiberwise trivial family, 対象 X (なめらかな曲線など) を用いて $X \times S \rightarrow S$ の形に書ける family を trivial family と呼ぶ．

fine moduli space が存在するならば，fiberwise trivial family は trivial family である (cf. [7] Remark 23.1.1)．実際，任意の fiber が X と同型であるような family $\mathcal{F} \rightarrow S$ から得られる $\Psi_S(\mathcal{F} \rightarrow S) : S \rightarrow M$ は X に対応する点への constant map になっている． $\Psi_S(X \times S \rightarrow S)$ も明らかに同じ constant map となるから， $\Psi_S :: \text{isomorphism より } X \times S \rightarrow S \sim \mathcal{F} \rightarrow S$ ．

3 Non-existence of Fine/Coarse Moduli Space

問 3.1

Fine/Coarse Moduli Space はいつ存在するのか？

十分条件を示すのではなく，^{†4}．ここでは問を次のように限定する．

問 3.2

Fine/Coarse Moduli Space はいつ存在しないのか？

Moduli 問題の対象と一対一に対応する scheme が見つかったからと言って，それが fine moduli space であるとは言えない．問題と成るのは，family の同型である．以下では特に automorphism の存在と jump phenomenon が fine moduli space が存在するための障害と成ることを見る．

注意 (2.21) の内容を用いて証明する．

3.1 j -invariant is not a fine moduli space.

一つ例を見よう．

$S = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$ とする． S 上の楕円曲線の family \mathcal{F} を次で定める．

$$\mathcal{F} = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - s) \subseteq \mathbb{A}_k^2 \times_k S \xrightarrow{\text{pr}} S.$$

$\Psi(\mathcal{F})$ を j 不変量を用いて $s \mapsto j(\mathcal{F}_s)$ で定める． j 不変量が coarse moduli であることは既に見た．計算すると分かる通り， $\Psi(\mathcal{F})$ は定値写像である．したがって \mathcal{F} のそれぞれの fiber は互いに同型である．一方， $\mathcal{F}' = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - 1) \times S$ について同様に $\Psi(\mathcal{F}')$ を定めると，これも自明に定値写像である．しかし， $\mathcal{F} \not\cong \mathcal{F}'$ であることが示せる．よって注意 (2.21) から j 不変量は fine moduli にならない．fine/coarse moduli の一意性から，楕円曲線は fine moduli を持たない．

proof of $\mathcal{F} \not\cong \mathcal{F}'$. [6] I, Ex6.2 を参考にする．我々が調べるのは次の二つの環である．それぞれ $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ で

^{†4} 十分条件については次の命題が有る：<https://stacks.math.columbia.edu/tag/01JJ>．次のページでは，この命題を用いて Grassmannian functor が表現可能であることを示している：<https://stacks.math.columbia.edu/tag/089R>．

ある.

$$A = k[x, y, t, t^{-1}]/(y^2 - x^3 - t), \quad B = k[x, y]/(y^2 - x^3 - 1) \otimes_k k[t, t^{-1}],$$

A は UFD であるが B は UFD でない (GCD domain でさえない), ということを示す.

A は $k[x, y]_{y^2 - x^3}$ (1 元での局所化) と同型である. $k[x, y]$ は UFD であり, irreducible element での局所化でこれは保たれる. すなわち A は UFD.

B が UFD でないことを示すために, $\bar{x} = x \bmod (y^2 - x^3 - 1)$ が not prime だが irreducible であることを示す.

$\bar{x} :: \text{not prime}$ を示すために次の等式を考える.

$$\bar{x}^3 = \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} = (\bar{y} + 1) \cdot (\bar{y} - 1).$$

$\bar{x} :: \text{prime}$ と仮定すると, $\bar{y} + 1$ or $\bar{y} - 1 \in (\bar{x})$ となる. そこで例えば

$$\bar{y} + 1 = a\bar{x}$$

なる $a \in B$ が存在するとしよう. すると $y + 1 - ax \in I$ が得られる. これは楕円曲線 $y^2 = x^3 + 1$ が $y + 1 - ax = 0$ という曲線に含まれていることを意味する. したがって $x = 0$ と楕円曲線の交点は, 存在しても $(x, y) = (0, -1)$ の一つのみ, ということになる. しかし実際は $(0, -1)$ もこの楕円曲線に属するので矛盾.

$\bar{x} :: \text{irreducible}$ を示すために σ と N を準備する. $\sigma : k[x, y] \rightarrow k[x, y]$ を $y \mapsto -y$ で他の元は変化させないものとする. すると $\sigma(I) \subseteq I$ なので $\sigma : B \rightarrow B$ が誘導される. さらに $N(a) = a \cdot \sigma(a)$ で $N : B \rightarrow k[\bar{x}]$ を定める. N は積について準同型であることに注意せよ.

\bar{x} が irreducible でないならば, $\bar{x} = fg \bmod I$ なる $f, g \in k[x, y]$ が存在する. $f \bmod I, g \bmod I$ はどちらも単元でない. 両辺を N で写すと次のように成る.

$$(x^2 - N(f)N(g)) \bmod I = 0.$$

したがって $x^2 - N(f)N(g) = a(y^2 - x^3 - 1)$ なる $a \in k[x, y]$ が存在する. 左辺は $k[x]$ に属すから, y の次数を考えると $a = 0$ が示される. また $N(f), N(g)$ の次数は 2 以上であるから, $N(f), N(g)$ のいずれかは k^\times の元である. しかし $N(f) = f \cdot \sigma(f)$ (resp. $N(g)$) が単元ならば f (resp. g) も単元であり, f, g についての仮定に反する. よって $\bar{x} :: \text{irreducible}$. ■

したがって moduli functor は必ずしも fine moduli space を持たない.

3.2 Automorphism is an obstruction to the existence of fine moduli space.

Moduli 問題の対象が非自明な自己同型写像をもつなら, 多くの場合で fine moduli space が存在し得ない. 例を二つ考える. 最初の例は構成の仕方が schematic でないが, 直観的である.

例 3.1

$k :: \text{field}$ とし, \mathbb{A}_k^2 の原点を通る直線を, 同型を無視して分類する. 直線は全て同型であるから, これは一つしか無い. したがってこの問題に対する fine moduli space が存在すれば, それは一点空間である. したがって任意の scheme B について, B 上の family は全て trivial family と同型である.

L を \mathbb{A}^2 の原点を通る直線とし, その非自明な自己同型 $\sigma : L \rightarrow L$ をとる. $[0, 1]$ 上の trivial fiber $:[0, 1] \times L$ を, 次の同値関係で割って商空間を作る.

$$(t, Q) \sim (s, Q) \iff |t - s| = 1 \wedge P = \sigma(Q) \text{ where } s, t \in [0, 1], P, Q \in L.$$

例えば σ を $(x, y) \mapsto (-x, -y)$ と置くと、これは丁度メビウスの帯である。そしてこれは S^1 上の family となっている。

今 S^1 上の family として、 σ を使って構成したもの（メビウスの帯）と trivial family（斜めになった円筒）がある。これらは明らかに同型ではない。

例 3.2

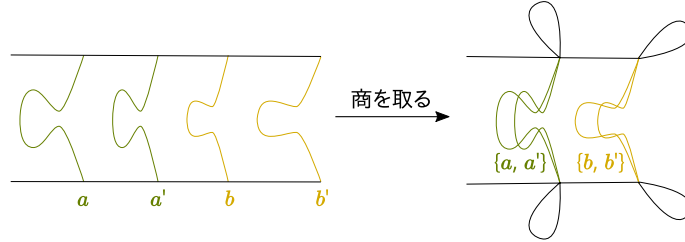
scheme $:: B$ と family over $B :: X$ を次のように定める。

$$B = \text{Spec } \mathbb{C}[\lambda, (\lambda(1-\lambda))^{-1}] = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 - \{0, 1\}, \quad X = \text{Proj } \frac{\mathbb{C}[x, y, z, \lambda, (\lambda(1-\lambda))^{-1}]}{(y^2z - x(x-z)(x-\lambda z))} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2 \times_{\mathbb{C}} B.$$

任意の \mathbb{C} 上の楕円曲線と同型なものが family $:: \text{pr} : X \rightarrow B$ に含まれている。そして j -invariant $:: A_{[j]}^1$ は B の次の群 G による商として得られる（このことは [7] Prop 26.3 の証明で示されている）。

$$G = \left\{ \lambda \mapsto \frac{a-b}{c-b} \mid \{a, b, c\} = \{0, 1, \lambda\} \right\}.$$

したがって \mathbb{C} 上の楕円曲線の universal family は、“quotient of family” $X/G \rightarrow B/G = \mathbb{A}_{[j]}^1$ として得られるはずである。同型な fiber はひとつの fiber にまとめてしまえば、同型類の代表をひとつずつ fiber にもつ family が作れるであろう、というわけである。



問題は X/G である。 X/G に言及するには G の X への作用を定める必要が有るが、楕円曲線には非自明な自己同型があるため、奇妙な族を作ることが出来る。これは以降の段落でももう少し具体的に述べる。もし楕円曲線の族の fine moduli space が存在するならば、fine moduli space も、universal family も、同型を除いて一意である。なので、 $X/G \rightarrow B/G$ が唯一の候補である。しかし $X/G \rightarrow B/G$ は楕円曲線の族ではない。したがって楕円曲線の universal family は存在せず、fine moduli space も存在しない。

ここでは B/G でなく、 G の元 σ で生成される G の部分群 $G' = \{\text{id}, \sigma\}$ による商 B/G' を考える。

$$G \ni \sigma : \lambda \mapsto \frac{\lambda-1}{0-1} = 1-\lambda.$$

σ は involution (i.e. $\sigma \circ \sigma = \text{id}$) である。対して X の自己同型を次のように取る。

$$\tau : (x, y, z, \lambda) \mapsto (x, -y, z, 1-\lambda).$$

こちらも σ 同様 involution である。そして τ は $\sigma : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$ の持ち上げである。すなわち、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tau} & X \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{A}^1 \end{array}$$

今, $H' = \{\text{id}, \tau\}$ は明らかに X に作用する. そして上の図式が可換であることから, family $:: \phi : X/H' \rightarrow B/G'$ が得られる. そこでこの family を考えてみると, σ の不動点 $\lambda = 1/2$ における ϕ の fiber $\phi^{-1}(1/2)$ は, $X_{1/2}$ の $\tau_{1/2} : (x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ による商となっている. この商は, Riemann-Hurwitz の公式によると, genus が 0 となっている^{†5}. しかし楕円曲線の種数は 1 でないから, ϕ は楕円曲線の族ではない. 同様にして $X/G \rightarrow B/G$ も楕円曲線ではないように作用 $G \curvearrowright X$ を作れる.

より抽象的な設定で証明しよう. これも fiberwise trivial but non-trivial family を構成すれば良い. ここでは [2] §4.8.2 と M.Hoeve のノート “An Introduction to Moduli Spaces of Curves” Example 3.2 を参照した. 他, D.Eisenbud and J.Harris “Schemes: The Language of Modern Algebraic Geometry” IV.B vii にも同様のことが記述されているのを発見した.

例 3.3

X を scheme over \mathbb{Z} とし, これが non-trivial automorphism $:: \sigma : X \rightarrow X$ を持つとする.

order of σ を n とする. すなわち, n を $\sigma^n = \text{id}$ となる最小のものとする. n は 2 以上の整数または無限大である. σ で生成される群を G_σ とする. これは cyclic group of order n .

base of family となる scheme $:: B$ と B の non-trivial isomorphism $:: \tau : B \rightarrow B$ を定める. これは n の値で場合分けすれば具体的に与えることが出来る.

$n = 2$: $B = \mathbb{P}^1 - \{(\pm 1 : 1)\}$ とし, τ を座標の交換 $(x : y) \mapsto (y : x)$ とする.

$2 < n < \infty$: $B = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 - \{(\pm i : 1)\}$ とし, τ を $2\pi/n$ 回転 (アフィン平面の回転から誘導されるもの) とする.

$n = \infty$: $B = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ とし, τ を $z \mapsto z + 2\pi i$ とする.

いずれの場合でも τ で生成される群 G_τ は cyclic group of order n であり, $\psi : \sigma \mapsto \tau$ によって G_σ と同型である. さらに τ は固定点をもたず, B は smooth irreducible scheme over \mathbb{C} となっている.

G_σ の $X \times B$ への作用を次で定める^{†6}.

$$\begin{aligned} \alpha : G_\sigma \times (X \times_{\mathbb{Z}} B) &\rightarrow X \times_{\mathbb{Z}} B \\ (g, (x, b)) &\mapsto (g(x), \psi(g)(b)) \end{aligned}$$

B にも G_σ の自明な作用を与えると, $\phi : (X \times B)/G_\sigma \rightarrow B/G_\sigma$ が得られる.

この時, $\phi : (X \times B)/G_\sigma \rightarrow B/G_\sigma$ は fiberwise trivial but non-trivial family である.

(証明). (TODO) ■

3.3 Jump Phenomenon.

coarse moduli space さえ持ち得ない moduli functor もある.

命題 3.4 ([8] Lemma 2.27, [7])

moduli functor $:: \mathcal{M}$ を考える. さらに \mathcal{M} とは無関係に algebraically closed field $:: k$ をとる. family $:: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{A}_k^1 \in \mathcal{M}(\mathbb{A}_k^1)$ が以下の条件を満たすと仮定する. すると \mathcal{M} の coarse moduli space は finite type over

^{†5} 楕円曲線は genus が 1 で, $0, 1, \lambda, \infty$ の 4 点で分岐しており, この 4 点それぞれの分岐指数は 2 である. $\phi^{-1}(1/2)$ は商写像 $X_{1/2} \rightarrow X/\tau_{1/2}$ による 2 重被覆だから, $\phi^{-1}(1/2)$ の genus を h とすると, $2 - 2 \cdot 1 = 2h - 4 \cdot (2 - 1)$. 故に $h = 0$.

^{†6} [2] §4.8.2 ではこの辺りに大きな間違いがある.

k ではない。この条件とはすなわち:

$$\mathcal{F}_s \sim \mathcal{F}_t \text{ and } \mathcal{F}_0 \not\sim \mathcal{F}_s \quad (\text{for } s, t \in \mathbb{A}^1 - \{0\}).$$

特に the best approximation of \mathcal{M} (定義 2.13 直後) が代数閉体上 finite type な scheme であった場合, \mathcal{M} は coarse moduli space を持たない。

命題の条件を満たす family を, jump phenomenon が起きている family と呼ぶ。

(証明). 代数閉体 k 上 finite type な scheme M をとり, 自然変換 $\Psi: \mathcal{M} \rightarrow \underline{M}$ が存在したとしよう。主張にある family $\mathcal{F}: \mathbb{A}^1 \rightarrow M$ を Ψ で写したものを $f: \mathbb{A}^1 \rightarrow M$ としよう。

\mathbb{A}^1 の closed points は M の closed point に写る¹⁷。 k :: algebraically closed field かつ \mathbb{A}_k^1, M 共に finite type over k であるから, closed points を考えることは $\text{Spec } k$ からの射を考えることに等しい。今, functor of points の間の natural transformation ::

$$\underline{f}(k): \underline{\mathbb{A}}^1(k) \rightarrow \underline{M}(k)$$

による $\underline{\mathbb{A}}^1(k) \ni s: \text{Spec } k \rightarrow \mathbb{A}^1$ の像は, $\underline{f}(s) \in \underline{M}(k)$ である。このことを closed points の言葉に書きなおせば: closed point $s: \text{Spec } k \rightarrow \mathbb{A}^1$ の像は M の closed point。

f が coarse moduli space ならば, $\Psi_k: \mathcal{M}(k) \rightarrow \underline{M}(k)$ は全単射である。 $s \in \mathbb{A}^1$ に対応する $\text{Spec } k \rightarrow \mathbb{A}^1$ を \bar{s} と書くことにすると,

$$\underline{f}(\bar{s}) = f \circ \bar{s} = \Psi_k(\mathcal{F}_s): \text{Spec } k \rightarrow M.$$

$s \neq 0$ ならば, $\mathcal{F}_s \not\sim \mathcal{F}_0$ なので $\Psi_k(\mathcal{F}_s) \neq \Psi_k(\mathcal{F}_0)$ 。これは $\text{Spec } k$ は 1 点空間だから, これは次と同値。

$$(f \circ \bar{s})(\text{Spec } k) = f(s) \neq f(0) = (f \circ \bar{0})(\text{Spec } k).$$

$s, t \neq 0$ ならば $\mathcal{F}_s \sim \mathcal{F}_t$ であるから, 合わせて $f^{-1}(f(\{0\})) = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ となる。これは closed subset ではない。しかし $f(\{0\}) \subset M$ は closed set であり, かつ f は連続であるから, これは有り得ない。 ■

注意 3.5

命題中の \mathbb{A}^1 と $0 \in \mathbb{A}^1$ は, より一般に connected scheme of finite type over an algebraically closed field と closed point に置き換えられる。connected は closed point の補集合が closed にならないために必要である。 M の条件「finite type over k ではない」についても, 脚注の通り一般化出来る。

例 3.6 ([5] Exercise (1.7))

moduli functor \mathcal{M} を, “flat families of reduced plane curves of degree 2 over \mathbb{C} , up to isomorphism” の moduli functor として定める。ただし, ここでは $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ の曲線を考える。 $\mathcal{M}(\mathbb{C})$ の元, すなわち “reduced plane curves of degree 2” の同型類は 2 つしかないことに注意する。

以下, the best approximation of \mathcal{M} は $\text{Spec } \mathbb{C}$ であることを示す。 t -line $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1$ 上の family $xy = t$ で jump phenomenon が起きるため, \mathcal{M} は coarse moduli space を持たない。

¹⁷ finite type over an algebraically closed field という条件は, このことを示すために付いている。実際のところは “ M :: Jacobson and f :: locally finite type” という条件が必要十分である。詳細は <https://stacks.math.columbia.edu/tag/01TB> を参照して欲しい。この必要十分条件が成立する典型例が今回の M, f の条件である。

(証明).

■ There exists natural transformations $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$. $\mathcal{M}(B) \ni \phi : \mathcal{F} \rightarrow B$ に対し, $\Psi(\phi) \in \mathbb{C}(B)$ を次のように定める. $b \in B$ について $\mathcal{F}_b \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ であることに注意せよ.

$$B \ni b \mapsto \mathcal{F}_b \xrightarrow{\text{pr}} \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \xrightarrow{\text{pr}} \text{Spec } \mathbb{C}$$

これは自然変換である. よって $\mathcal{M} \rightarrow \underline{\mathcal{M}}$ の自然変換が存在する.

■ The best approximation of \mathcal{M} is $\text{Spec } \mathbb{C}$. $\text{scheme} :: M'$ と自然変換 $\Psi' : \mathcal{M} \rightarrow \underline{\mathcal{M}}$ をとって固定する. Ψ は引き続き自然変換 $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}$ とする. $\phi : \mathcal{F} \rightarrow B :: \text{flat family of smooth conic}$ とする. この family は fiberwise trivial family だから, $\Psi'_B(\phi) : B \rightarrow X$ は定値写像である. その値を $x \in X$ とすると, 包含写像 $k(x) \hookrightarrow \mathbb{C}$ から射 $\pi : \text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow X$ が定まる ([6] II, Ex2.7). これは $\pi(\text{Spec } \mathbb{C}) = \{x\}$ を満たす. この射に依って $\Psi'(\phi) = \pi \circ \Psi(\phi)$ となることは明らか (TODO: どうすれば $k(x) \hookrightarrow \mathbb{C}$ の存在が保証できる?). ■

4 Dealing with Non-existence of Fine/Coarse Moduli Space.

fine moduli space が存在するための障害を回避する方法は幾つかある.

以下, moduli 問題の対象を object と呼ぶ.

4.1 Sub-Moduli Functor of “Objects Without Non-Trivial Automorphism”.

考えている moduli 問題を修正し, 対象を自明な自己同型しか持たないものに限定する. すると多くの場合で fine moduli が存在しうる. しかし, この修正された moduli 問題が解けても, 元の moduli 問題に関する情報が殆ど出てこないことが多い.

4.2 Rigidifying of Moduli Problem.

これは, 追加の情報を考慮に入れることで, objects を予め大雑把に分類しておく, ということである. 追加の情報としては以下のようなものが考えられる.

1. fixed sub-objects.
2. level structure.
3. ordered sets of (higher-order) Weierstrass points.

4.2.1 Fixed Sub-object

fixed sub-objects は, 例えば幾つかの固定された点を通る曲線の moduli 問題を考えるということである. この場合, 十分に固定点の個数を大きくすれば, non-trivial automorphism が存在しなくなる. この修正によって得られる moduli space がどれだけ元の問題の moduli を反映しているか, というのは不透明である. しかしこの修正はしばしば自然に現れる.

4.2.2 Level Structure

level structure は irreducibility of \mathcal{M}_g を証明する際に導入された. level structure を考慮して moduli 問題を修正すると, 元の問題の moduli space の finite cover が得られる. level n , genus g の curve の moduli space を $\mathcal{U}_g^{(n)}$ と書く.

level structure は様々な定義が存在する. abelian scheme の level structure の定義は [9] p.129, Definition 7.1 にある. これは abelian scheme の moduli space を研究するために用いられている. 特に elliptic curve over \mathbb{C} の Weil pairing, level structure については, [4] に詳しい記述がある. F.Voloch による course note にも整理された記述がある.^{†8} また, symplectic level structure は [3] で整理されている. Teichmüller structure of level G (G は有限群) は [10] で導入されている.

最初に二つ, 事前に定義しておく.

定義 4.1

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ を standard symplectic space と呼ぶ時, $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ には, 以下のように symplectic form ω を与える: $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{bmatrix}$ (I_g は $g \times g$ 単位行列) として,

$$\omega(a, b) = {}^t a \Omega b \quad \text{for } a, b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$$

定義 4.2 (From Jana Sotáková “Weil pairing”)

k :: algebraically closed field, A :: abelian variety over k , m :: positive integer with $\gcd(m, \text{char } k) = 1$ とする. A の m -torsion points を $A[m]$ と表す.

Weil pairing とは, 以下の条件を満たす pairing (bilinear form)

$$e_m : A[m] \times A[m] \rightarrow \mu_m = \{x \in k \mid x^m = 1\}$$

のことである. これは存在する (ここでは証明しない).

- (i) $e_m(S_1 + S_2, T) = e_m(S_1, T)e_m(S_2, T)$.
- (ii) $e_m(S, T_1 + T_2) = e_m(S, T_1)e_m(S, T_2)$.
- (iii) $e_m(T, T) = 1$.
- (iv) $e_m(S, T) = e_m(T, S)^{-1}$.
- (v) $\forall T \in A[m], \exists S \in A[m], e_m(S, T) \neq 1$.

注意 4.3

$S, T \in A[m]$ とし, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とする. 定義から次が成り立つ.

$$e_m(aS + bT, cS + dT) = e_m(S, T)^{ad-bc}.$$

したがって $A[m] \times A[m]$ に $M \in GL(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ を作用させた時, M の作用で e_m が保たれる必要十分条件は $\det M = 1$, すなわち $M \in SL(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ である.

以下は一般の体上の curve で定義できる level structure である. O. Bergvall “Cohomology of the moduli space of curves of genus three with level two structure”^{†9} Def2.3.1 からとった.

^{†8} <https://www.ma.utexas.edu/users/voloch/390-10.html>

^{†9} <http://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A715000&dswid=5675>

定義 4.4

k :: algebraically closed field, C :: smooth, irreducible, and projective curve of genus g , n :: positive integer with $\gcd(n, \text{char } k) = 1$ とする. n -torsion points of Jacobi variety of C :: $J(C)[n]$ を, Weil pairing を symplectic form とする symplectic vector space とみなす.

- (i) C の level n -structure とは, symplectic isomorphism :: $\alpha : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \rightarrow J(C)[n]$ のことである. したがって, 任意の $a, b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ について $\omega(a, b) = e_m(\alpha(a), \alpha(b))$ が成立する. ここで $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ は standard symplectic space である.
- (ii) morphism :: $\phi : C \rightarrow C'$ に対して, $\phi^* : J(C') \rightarrow J(C)$ が誘導される (line bundle の pullback で定まる). そこで, curves with level n -structure :: $(C, \alpha), (C', \alpha')$ が同型であることを, 以下のように定める: isomorphism :: $\phi : C \rightarrow C'$ が存在し, ϕ^* が $\phi^* \circ \alpha = \alpha'$ を満たす.

C が楕円曲線である場合 ($g = 1$) には, $J(C) = C$ ([6] ThmIII.4.11) である. またこの時, $\phi : C \rightarrow C'$ から誘導される $J(C') \rightarrow J(C)$ の射は ϕ に一致する.

ここでは Hesse cubic form を用いて, 代数閉体 k ($\text{char } k \neq 3$) 上の楕円曲線の level 3-structure と, level 3-structure を持つ楕円曲線の moduli space を解説する. 参考文献は二つ: <https://arxiv.org/abs/math/0611590>, <http://www.math.chalmers.se/~ulf/Teaching/AG.html>.

k を $\mathbb{Z}[1/3, \xi]/(\xi^2 + \xi + 1)$ を含む体, すなわち, 標数が 3 でなく 1 の原始 3 乗根を持つ体とする. k 上の楕円曲線 E を予め埋め込んで射影平面上のものとする. E の level 3-structure とは, $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ と group of 3-torsion points in E ::

$$E[3] = \{P \in E \mid 3P = O.\}$$

の間の同型 $\alpha : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rightarrow E[3]$ のことである. この同型は $\alpha(0, 1)$ と $\alpha(1, 0)$ の点を与えれば定まることに注意する.

この同型 α が存在することは, 以下のように分かる. 具体的な考察により, $E[3]$ の元は, その 1 点のみで E と交わる点, すなわち変曲点であることが分かる. これは E が 3 次曲線であることから, これは 9 点存在する. すなわち $E[3]$ は位数 9 のアーベル群. アーベル群の構造定理と, $E[3]$ の任意の元の位数が高々 3 であることから, $E[3] \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ が分かる.

我々がこれから主張することは,

$$B = \mathbb{A}^1 - \{1, \xi, \xi^2\}$$

が level 3-structure を持つ k 上の楕円曲線の fine moduli space であることである. まず level 3-structure を持つ k 上の楕円曲線の family を考える. S を k 上の scheme として, 楕円曲線とその 2 つの 3-torsion point の family を取る.

k 上の楕円曲線 E と level 3-structure :: $\alpha : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \rightarrow E[3]$ をとる. 埋め込み $i : E \rightarrow \mathbb{P}_k^2$ の像と $i \circ \alpha$ をとれば, 最初から E は \mathbb{P}^2 内の楕円曲線と考えられる. E を以下のような写像で写す.

$$\alpha(0, 0) \mapsto (0 : 1 : -1), \quad \alpha(1, 0) \mapsto (0 : 1 : -\xi), \quad \alpha(0, 1) \mapsto (-1 : 0 : 1), \quad \alpha(1, 1) \mapsto (-\xi : 0 : 1).$$

このような \mathbb{P}^2 の自己同型はただひとつ存在する. そしてこれは $E[3]$ の群構造を維持し, 像は以下の 9 点を通る.

$$K = \{(0 : 1 : -\beta) : (-\beta : 0 : 1), (1 : -\beta : 0) \mid \text{where } \beta^3 = 1\}.$$

\mathbb{P}^2 の種数 1 の曲線は 3 次曲線である．そして以上の 9 点を通る非特異曲線は，以下の形の多項式で定義される．

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\mu xyz = 0$$

こうして (E, α) から $\mu \in B$ への写像が定まる．この楕円曲線の 3-torsion points は上の 9 点である．

逆に，Hesse pencil $H_\mu : x^3 + y^3 + z^3 - 3\mu xyz = 0$ をとる．この level 3-structure は

$$\alpha(0, 0) \mapsto (0 : 1 : -1), \quad \alpha(1, 0) \mapsto (0 : 1 : -\xi), \quad \alpha(0, 1) \mapsto (-1 : 0 : 1).$$

で定まる．

level 3-structure のとり方には $SL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ の自由度がある．より具体的には $M \in SL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ について，以下のように変換する．

$$\begin{aligned} \sigma : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 &\rightarrow (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \\ (s, t) &\mapsto (s, t)M \end{aligned}$$

これに伴って， $PGL(3, k)$ の元 $\alpha \circ \sigma$ （正確には $PGL(2, k)$ の元であって $E[3]$ への制限が $\alpha \circ \sigma$ であるもの）が定まる．なお， $\sigma \in GL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ を $\det \sigma \neq 1$ であるものとする，Remark 4.3 より， α に課せられた条件 $\omega(a, b) = e_m(\alpha(a), \alpha(b))$ が成立しない．

H_μ のパラメータ μ は μ は $PSL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ の作用を反映する． $-I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ の作用では変化しない． $-I$ は α と合成すると， y, z 軸の交換に成る．

命題 4.5

同型 $f : H_\mu \rightarrow H_{\mu'}$ を， $H_\mu, H_{\mu'}$ の 3-torsion points $:: K$ を固定するものとする．この時， $f = \text{id}$ ．

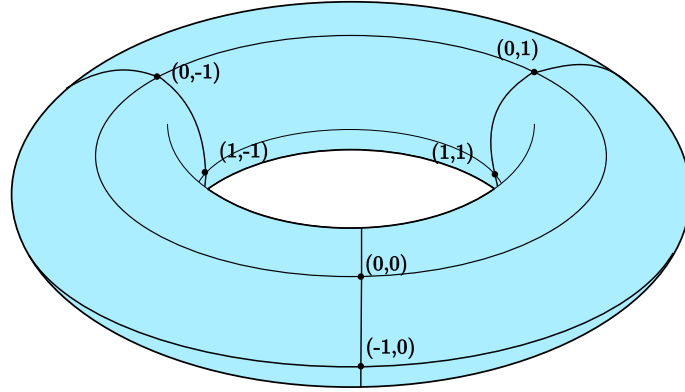
(証明)．Iku Nakamura “Compactification by GIT-stability of the moduli space of abelian varieties”^{†10} Claim 2.3.2 の証明を参照した．

f は K の点を固定するから， K の 3 点に乗った直線全体も固定する．そのため， f は線形変換とみなせる． f を行列 A で書いた時， A がスカラー行列であることを示そう．

K は直線 $x = 0, y = 0, z = 0$ 上の 3 点を含むから， A はこれら 3 直線を固定する．したがって A は対角行列である．さらに $(0 : 1 : -1)$ と $(1 : -1 : 0)$ を固定することから， A はスカラー行列．よって $f = \text{id}$ ． ■

\mathbb{C} 上の解析的な曲線 (compact Riemann surface) については，torsion point は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 係数の 1-cycle として理解できる． \mathbb{C} 上の楕円曲線はトーラスとみなせるが，その上の原点 $(0, 0)$ を固定し，大円を 3 等分した位置に $(0, 1)$ を，小円を 3 等分した位置に $(1, 0)$ をとる．そして加法的に $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1), \dots$ をとる．

^{†10} <https://arxiv.org/abs/1406.0174>



そして $(0,0)$ から各頂点への辺を 1-cycle として考える．こうして考えると，compact Riemann surface の level structure は homology を用いて定義することが出来る．

定義 4.6

C :: curve of genus g over \mathbb{C} , n :: positive integer とする． $H_1(C^{an}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ を， intersection pairing を symplectic form とする symplectic vector space とみなす．

- (i) C の level n -structure とは， symplectic isomorphism :: $\alpha : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \rightarrow H_1(C^{an}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ のことである． ここで $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ は standard symplectic space である．
- (ii) curves with level structure :: $(C, \alpha), (C', \alpha')$ が同型であることを， 以下のように定める: isomorphism :: $\phi : C \rightarrow C'$ が存在し， ϕ から誘導される写像 $\phi^* : H_1(C'^{an}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \rightarrow H_1(C^{an}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が $\phi^* \circ \alpha = \alpha'$ を満たす．

4.2.3 Weierstrass points

こちらを考えたも元の問題の moduli space の finite cover が得られる修正としては， ordered sets of (higher-order) Weierstrass points を考える， というものもある． Weierstrass points の定義は [1] pp.41-44 にある． C. Shor, T. Shaska “Weierstrass points of superelliptic curves” ^{†11} にも解説がある．

4.3 Representation by Algebraic Stacks.

moduli functor を scheme で表現できないのならもっと「情報量が多い」もので表現しよう， というのが動機である． stack は groupoid (全ての射が isomorphism である圏)， または 2-functor (\mathbf{Sch}^{op} から圏の圏 \mathbf{Cat} への sheaf) として定義される． 詳細は Tomás L. Gómez “Algebraic stacks” ^{†12} ．

参考文献

- [1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip Griffiths, and Joseph Daniel Harris. *Geometry of Algebraic Curves: Volume I (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 1st ed.

^{†11} <https://arxiv.org/pdf/1502.06285.pdf>

^{†12} <https://arxiv.org/abs/math/9911199>.

- 1985, corr. 2nd printing 2007 edition, 6 2006.
- [2] T.E.V. Balaji and Deutsche Nationalbibliothek. *An Introduction to Families, Deformations and Moduli*. Universitätsdrucke Göttingen. Universitätsverlag Göttingen, 2010.
 - [3] Frans Oort Bert van Geemen. *A Compactification of a Fine Moduli Space of Curves*, pp. 285–298. Birkhäuser Basel, Basel, 2000.
 - [4] Fred Diamond and Jerry Michael Shurman. *A First Course in Modular Forms (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1st ed. 2005, corr. 4th printing 2016 edition, 10 2016.
 - [5] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.
 - [6] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.
 - [7] Robin Hartshorne. *Deformation Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2010 edition, 12 2009.
 - [8] Victoria Hoskins. Moduli problems and geometric invariant theory. https://userpage.fu-berlin.de/hoskins/M15_Lecture_notes.pdf, 2016.
 - [9] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric Invariant Theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34)*. Springer-Verlag, 3rd ed. edition, 1992.
 - [10] D. Mumford P. Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.
 - [11] Jenia Tevelev. Moduli spaces and invariant theory. http://people.math.umass.edu/~tevelev/797_2017/.
 - [12] 向井茂. モジュライ理論 〈1〉 . 岩波書店, 12 2008.