ゼミノート #1
Fine/Coarse Moduli Space の非存在

七条彰紀

2018 年 5 月 10 日

> 問 0.1
>
> Fine/Coarse moduli space とは何か？

moduli space は "moduli functor" の情報を可能な限り精密に写した scheme のことである．その理解のためにはまず "functor of points" の概念が必要である．以下，私が過去に書いたノート "Group Scheme" を引用・加筆する．

1 Functor of Points

圏論で言う "generalized point" の概念を，名前を変えて用いる．

定義 1.1

(i) $X, T \in \mathbf{Sch}/S$ に対し，$\underline{X}(T) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/S}(T, X)$ を X の **T-valued points** と呼ぶ．$T = \operatorname{Spec} R$ と書けるときは $\underline{X}(T)$ を $\underline{X}(R)$ と書く．したがって $\underline{X}$ は $\mathbf{Sch}/S$ からの covariant functor と見ることも，k-algebra の圏からの contravariant functor と見ることも出来る．この関手 $\underline{X}$ は functor of points と呼ばれる．

(ii) 体 k 上の scheme :: X ($S = \operatorname{Spec} k, X \in \mathbf{Sch}/S$) と field extension :: $k \subseteq K$ について，$\underline{X}(K)$ を X の **K-rational points** と呼ぶ．

(iii) morphism :: $h : X \to Y$ について自然変換 $\underline{h} : \underline{X} \to \underline{Y}$ は $\phi \mapsto h \circ \phi$ のように射を写す．

注意 1.2

$\mathbf{Sch}$ は locally small category である．すなわち，任意の $X, T \in \mathbf{Sch}$ について $\underline{X}(T)$ は集合である．これを確かめるために，$X, Y \in \mathbf{Sch}$ を任意にとり，$\mathrm{Hom}(X, Y)$ の濃度がある濃度で抑えられることを見よう．射 $X \to Y$ の作られ方に沿って考える．

(1) base space の間の写像 $f : \operatorname{sp} X \to \operatorname{sp} Y$ をとる．このような写像全体の濃度は高々 $|\operatorname{sp} Y|^{|\operatorname{sp} X|}$．
(2) $|Y|$ の開集合 U をとる．開集合全体の濃度は高々 $2^{|\operatorname{sp} Y|}$．
(3) 写像 $f_U^{\#} : \mathcal{O}_Y(U) \to (f_* \mathcal{O}_X)(U)$ を定める．このような写像全体の濃度は高々 $|(f_* \mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$．

したがって $\mathrm{Hom}(X,Y)$ の濃度は高々

$$|\operatorname{sp} Y|^{|\operatorname{sp} X|} \times \prod_{U \in 2^{\operatorname{sp} Y}} |(f_* \mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$$

となる．濃度の上限が存在する（すなわち，ある集合への単射を持つ）から，$\mathrm{Hom}(X,Y)$ は集合である．

注意 1.3
上の注意から，Yoneda Lemma が成立する．したがって自然変換 $\underline{G} \to \underline{H}$ と射 $G \to H$ が一対一対応する．このため，scheme の間の射についての議論と functor of points の間の射の議論は（ある程度）互いに翻訳することが出来る．

注意 1.4
K-rational point については，$\underline{X}(K) = \{x \in X \mid k(x) \subseteq K\}$ とおく定義もある．ここで $k(x)$ は x での residue field である．しかし [6] Chapter.2 Ex2.7 から分かる通り，この二つの定義は翻訳が出来る．すなわち，$k(x) \subseteq K$ を満たす $x \in X$ と，$\operatorname{Spec} k$-morpsihm :: $\operatorname{Spec} K \to X$ は一対一に対応する．

また X :: finite type $/k$ であるとき，closed point :: $x \in X$ について，$k(x)$ は k の有限次代数拡大体である．これは Zariski's Lemma の帰結である．したがって $\underline{X}(\bar{k})$ は X の closed point 全体に対応する．ただし $\bar{k}$ は k の代数閉包である．

例 1.5
$\mathbb{R}$ 上の affine scheme $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2)$ の $\mathbb{R}$-rational point と $\mathbb{C}$-rational point を考えよう．

$\operatorname{Spec} \mathbb{R} \to X$ の射は環準同型 $\mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2) \to \mathbb{R}$ と一対一に対応する．しかし直ちに分かる通り，このような環準同型は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (0,0)$$

で定まるものしか存在し得ない．ここで $\bar{x} = x \bmod (x^2+y^2), \bar{y} = y \bmod (x^2+y^2)$ と置いた．よって $\underline{X}(\mathbb{R})$ は 1 元集合．また，この環準同型が誘導する $\operatorname{Spec} R \to X$ の射は 1 点空間 $\operatorname{Spec} \mathbb{R}$ を原点へ写す．

一方，環準同型 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{C}$ は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (a, \pm ia)$$

（ここで $i = \sqrt{-1}, a \in \mathbb{R}$）で定まることが分かる．すなわち，$\mathcal{Z}_a(x^2+y^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ の点に対応して，$\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{C}$ の環準同型が定まる．逆の対応も明らか．よって $\underline{X}(\mathbb{C})$ の元は $\mathcal{Z}_a(x^2+y^2) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ の点に対応している．

例 1.6
体 k 上の affine variety :: $X \subseteq \mathbb{A}^n_k$ を多項式系 :: $F_1, \ldots, F_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$ で定まるものとする．すると k 上の環 R に対して，次の集合が考えられる．

$$V_R = \left\{ p = (r_1, \ldots, r_n) \in R^{\oplus n} \;\middle|\; F_1(p) = \cdots = F_n(p) = 0 \right\}.$$

この集合の元も R-value point と呼ばれる．([12] ではこちらのみを R-value point と呼んでいる．実際，こちらのほうが字句 “value point”の意味が分かりやすいだろう．) V_R の点が $\underline{X}(R)$ の元と一対一に対応することを見よう．

X の affine coordinate ring を $A = k[x_1, \dots, x_n]/(F_1, \dots, F_n)$ とし，$\bar{x}_i = x_i \bmod (F_1, \dots, F_n)$ $(i = 1, \dots, n)$ とおく．$\phi : A \to R$ を考えてみると，これは次のようにして定まる．

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \mapsto (r_1, \dots, r_n) \in V_R.$$

すなわち，V_R の点に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ の元が定まる．逆の対応は明らか．そして，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ が $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}/\operatorname{Spec} k}(\operatorname{Spec} R, X) = \underline{X}(R)$ と一対一対応することはよく知られている．

2 Moduli Functor and Fine/Corse Moduli Space

A を代数幾何学的対象の集合とし，$\sim$ を A の中の同値関係とする．“naive moduli problem”は，M の点[†1]と $A/\sim$ の元 (同値類) が一対一対応するような scheme :: M を見つけよ，という問題である．更に $A/\sim$ の元が「連続的に変化」する様子も「エンコード」しているような M を見つけよ，という問題を “extended moduli problem”と呼ぶ (正確な定義は [8] §2.2)．“extended moduli problem”を定式化するには，「連続的に変化」と「エンコード」を定式化しなくてはならない．前者の為に “family”が定義され，後者の為に “moduli functor”が定義される．すると「エンコード」は関手の表現であると理解できる．射の fibre として実現される，scheme（例えば smooth curve）の family は deformation theory の対象である．

2.1 Families

定義 2.1
$\mathcal{P}$ を集合のクラス[†2] とする．集合 B について，B の構造と整合的な構造を持った集合 $\mathcal{F}$ と全射写像 $\pi : \mathcal{F} \to B$ の組が $\mathcal{P}$ の B 上の **family** であるとは，各 $b \in B$ について集合 $\pi^{-1}(b) \subseteq \mathcal{F}$ が $\mathcal{P}$ に属すということ．

「B の構造と整合的な構造」というのは，例えば，S が位相空間であって写像 $\mathcal{F} \to S$ を連続にするような位相が $\mathcal{F}$ に入っている，ということである．family の構造は場合毎に明示されなくてはならない．

用語 “family”を厳密に定義しているものは全くと言っていいほど無いが，ここでは Renzo のノート[†3] の定義を参考にした．“family”を上のように解釈して不整合が生じたことは，私の経験の中ではない．

注意 2.2
moduli theory 以外で “family of $\mathcal{C}$”と言えば，単に $\mathcal{C}$ の部分集合であろう．“family parametrized by S”の様に言えば，S-indexed family (or set) のことを想像するであろう．しかし S-indexed family :: $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ は $S \to \mathcal{F}$ という写像で定まるから，ここでの “family”とは写像の向きが逆である．

上の定義を無心に読めば分かる通り，「$\mathcal{C}$ の family :: $\mathcal{F}$」と言った時には，$\mathcal{C}$ に属すのは $\mathcal{F}$ の部分集合である．属すのは（一般に）$\mathcal{F}$ の元ではない．また $\mathcal{F}$ は $\mathcal{C}$ の元の和集合とみなせる．（正確には $\mathcal{C}$ の元を S に沿って並べたものである．）

例 2.3

[†1] [9] では，特に M の geometric point．定義は後述．
[†2] 集合 X を変数とする述語 $X \in \mathcal{C}$ の意味を「X はある条件を満たす対象である」と定義した，と考えて良い．「属す」の意味は集合と同様に定める．
[†3] http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topics10/Notes.pdf

X, B :: scheme, $f : X \to B$ :: morphism of schemes をとる．X は f によって B 上の family となる．B の点における f の fiber が moduli 問題の対象である．我々が代数幾何学の一分野として Moduli 問題を扱う場合，現れる family はこのようなもののみである．

例 2.4
k を体, S を適当な scheme とする．$\mathbb{A}^2_k$ の原点を通る直線の S 上の family として, line bundle :: $\mathcal{L} \subset \mathbb{A}^2 \times_k S$ を考えることが出来る．$\mathcal{L} \to S$ は射影写像で与えられる．同様に $\mathbb{A}^n$ の r 次元線形空間の S 上の family は r 次元 vector bundle :: $\mathcal{E} \subset \mathbb{A}^n \times S$ である．

例 2.5
k を適当な体とし，$\mathbb{P}^1_k$ の点 O_i $(i = 1, 2, 3)$ を順に $(0 : 1), (1 : 0), (1 : 1)$ とする．この時，$PGL_2(k)$ は次の全単射で $\mathbb{P}^1_k$ の自己同型写像の $(\mathbb{P}^1_k)^{\oplus 3}$ 上の family になる．

$$\begin{array}{cccc} \pi : & PGL_2(k) & \to & (\mathbb{P}^1_k)^{\oplus 3} \\ & \phi & \mapsto & (\phi^{-1}(O_i))^3_{i=1}. \end{array}$$

注意 2.6
family にしばしば要請される性質として，特に "flat" がある．projective flat family は，base scheme に適切な条件をつけると各 fiber :: X_t の Hilbert 多項式が t に依らない，という特徴がある ([6] III, Thm9.9)．詳細は [6] III, 9 を参照せよ．

2.2 Moduli Functor

以下の定義は [5] など，Moduli 問題に関する殆どの入門書で述べられている．

定義 2.7
moduli functor（または functor of families）とは，各 scheme :: S に対して，$\mathcal{M}(S)$ が代数幾何学的対象の S 上の family 達を family の間の同値関係で割ったもの ("{families over S}/ $\sim_S$" in [8]) であるような $\mathcal{M} : \mathbf{Sch} \to \mathbf{Set}$ のことである．morphism :: $f : S \to T$ は，$\mathcal{M}$ によって pullback に写される．すなわち，$\phi : \mathcal{F} \to T$ は $\mathcal{M}(f)$ によって $\mathcal{F} \times_T S \to S$ に写される．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \times_T S \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{M}(f)(\phi)"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\phi"] \\ S \arrow[r, "f"'] & T \end{tikzcd}$$

moduli functor の定義はあえて曖昧に述べられている．これは「出来る限り多くのものを moduli theory の範疇に取り込みたい」という思いがあるからである ([5])．

2.3 Fine Moduli Space

定義 2.8
scheme :: M が moduli fuctor :: $\mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるとは, M が $\mathcal{M}$ を表現する (represent) ということである．言い換えれば，関手 $\underline{M} = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, M)$ が $\mathcal{M}$ と自然同型，ということである．

注意 2.9
moduli functor :: $\mathcal{M}$ の fine moduli space :: M が存在したとしよう．この時，任意の $X \in \mathbf{Sch}$ について $\mathcal{M}(X) \cong \underline{M}(X)$．これは X 上の family が成す同値類が M の X-valued point と一対一に対応していることを意味する．したがって，$\mathcal{M}$ が指定する代数幾何学的対象の集合の同値類を M が「パラメトライズ」していると考えられる．

定義 2.10
moduli fuctor :: $\mathcal{M}$ に対する fine moduli space を M であるとする．また $\Psi : \mathcal{M} \to \underline{M}$ を自然同型とする．$u = \Psi_M^{-1}(\mathrm{id}_M) : \mathcal{U} \to M$ を universal family と呼ぶ．

universal family の名前の由来は次の命題に拠る．

命題 2.11
任意の family :: $\phi : \mathcal{F} \to B \in \mathcal{M}(B)$ は，$\chi = \Psi(\phi) : B \to M$ と universal family :: $u : \mathcal{U} \to M$ の pullback (fiber product) として得られる．

(証明)．$\Psi : \mathcal{M} \to \underline{M}$ は自然同型であるから，$\chi = \Psi(\phi) : B \to M$ から次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}(B) \arrow[d, "\Psi_B"'] & \mathcal{M}(M) \arrow[l, "\mathcal{M}(\chi)"'] \arrow[d, "\Psi_M"] \\
\underline{M}(B) & \underline{M}(M) \arrow[l, "\underline{M}(\chi)"]
\end{tikzcd}$$

$u \in \mathcal{M}(M)$ を $\mathcal{M}(\chi)$ で写すと $\mathcal{U} \times_M B \to B$ になる．同じ u を $\underline{M}(B)$ まで写すと，$\Psi_M(u) \circ \chi = \chi$ になる．これを Ψ_B^{-1} で写せば $\phi : \mathcal{F} \to B$．上の図式は可換図式であったから，$\phi = \mathcal{U} \times_M B \to B$． ∎

例 2.12 ([8], Exercise 2.20)
例 2.4 で述べた $\mathbb{A}^n$ の r 次元線形空間の S 上の family (vector bundle over S) の集合を，vector bundle の同型で割った集合を $\mathcal{M}(S)$ とする．$f : T \to S$ に対する $\mathcal{M}(f)$ は，vector bundle への post-composition で自然に定まる．

この moduli functor は fine moduli space を持つことが知られている．これが Grassmannian variety である．

残念ながら，多くの moduli functor に対して fine moduli space が存在し得ない．（このあたりの議論は [5] p.3 や [7] p.150 にある．この節の終わりでも理由と例を示す．）そのため Mumford は [9] で

2.4 Coarse Moduli Space

定義 2.13
moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対して，以下を満たす scheme :: M を $\mathcal{M}$ の coarse moduli space と呼ぶ．

(i) 自然変換 $\Psi : \mathcal{M} \to \underline{M}$ が存在する．

(ii) Ψ は functor of points への自然変換の中で最も普遍的である:

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{M} \arrow[dl, "{}^{\forall}\tau"'] \arrow[dr, "\Psi"] & \\ {}^{\forall}\underline{\tilde{M}} & & \underline{M} \arrow[ll, dashed, "{}^{\exists_1}\underline{f}"] \end{tikzcd}$$

この図式で $\tilde{M}$ :: scheme, $f : M \to \tilde{M}$.

(iii) 任意の代数閉体 k について，$\Psi_{\operatorname{Spec} k} : \mathcal{M}(k) \to \underline{M}(k)$ は全単射である．

条件 (ii) は "M is the best (possible) approximation of $\mathcal{M}$"だとか，"M is corepresent of $\mathcal{M}$"と表現される．

注意 2.14

条件 (ii) において f の向きを反転させると，coarse moduli space の定義が無意義に成る．実際，f の向きを反転させた条件を考えると，**Sch** の initial object :: $\emptyset$ が条件を満たす．普遍ならば一意なので，任意の moduli functor に対する coarse moduli space は空集合 $\emptyset$ しかなくなる．これは条件 (iii) を満たさないので，coarse moduli space は一切存在しないことに成る．

注意 2.15

代数閉体 k について，$\underline{M}(k)$ の元は "geometric point"と呼ばれる ([9], p.1).

例 2.16

楕円曲線の j-invariant．後に示すとおり，これは fine でない coarse moduli space である．自然変換 Ψ は j-invariant（楕円曲線についての関数）を用いて

$$\Psi_S(\mathcal{F} \to S) : S \to \mathbb{A}^1; \qquad s \mapsto j(\mathcal{F}_s)$$

のように定義できる．条件 (iii) は [6] IV, Thm4.1 で示されている．以下，条件 (ii) を示す．

ここでは [7] Prop 26.3 の証明を参照した．[11] では違う方針の証明が述べられている．

$B = \operatorname{Spec} k[\lambda, 1/\lambda, 1/(1-\lambda)]$ とし，family :: $\phi : \mathcal{F} \to B$ を λ をパラメータとする family :: $y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ で定める．j-invariant は

$$j(\lambda) = \frac{(1-\lambda+\lambda^2)^3}{\lambda^2(1-\lambda)^2}$$

で定める．また，$\lambda \in B$ を以下の 6 元のいずれかへ写す 6 つの B の自己同型群 G は，B に作用する位数 6 の群となる．

$$\lambda, 1-\lambda, 1/\lambda, 1/(1-\lambda), (\lambda-1)/\lambda, \lambda/(\lambda-1).$$

今，scheme :: M' と自然変換 $\Psi' : \mathcal{M} \to \underline{M'}$ が存在したとしよう．$\phi : \mathcal{F} \to B$ の Ψ' による像を $\chi' : B \to M'$ とする．

$y^2 = x(x-1)(x-\lambda)$ と $y^2 = x(x-1)(x-(1-\lambda))$ は同型であることが知られている．他の $1/\lambda, 1/(1-\lambda), \ldots$ についても同様である．χ' は fiber の同型類と M' の点を（B の 6 点を経由して）一対一対応させる．なので，任意の $g \in G$ について $\chi' \circ g = \chi'$ すなわち，χ' は G-invariant map である．

G-invariant map は B の G による categorical quotient を介する二つの射に分解される．GIT quotient の理論により，

$$B /\!\!/ G = \mathrm{Spec}(k[\lambda]^G)$$

が categorical quotient（特に good quotient．[8] 参照．）．そしてこれは $\mathbb{A}^1_j = \mathrm{Spec}\, k[j]$ に等しい（[6] IV, Thm4.1 参照）．なので $\chi' : B \to M'$ は $B \to \mathbb{A}^1_j \to M'$ に分解される．こうして $\psi : \mathbb{A}^1_j \to M'$ が得られた．

この ψ によって以下の図式が可換であることを確かめる．(TODO)

2.5 Properties of Fine / Coarse Moduli Spaces

命題 2.17

moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対して coarse moduli space は同型を除いて一意である．

命題 2.18 ([7], Prop23.6)

scheme :: M が moduli functor :: $\mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるならば，M は $\mathcal{M}$ の coarse moduli space でもある．

この二つをまとめると次の図式に成る．

$$\begin{tikzcd} \text{Fine moduli} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Coarse moduli} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Universality} \arrow[d, Rightarrow] \\ & & \text{Uniqueness} \end{tikzcd}$$

命題 2.19

M を moduli functor $\underline{M}$ の coarse moduli space とする．また $\Psi : \mathcal{M} \to \underline{M}$ を自然変換とする．M が fine moduli space であることは次と同値．

1. $\Psi(u) = \mathrm{id}_M$ となる family :: $u : \mathcal{U} \to M$ が存在する．
2. 任意の scheme :: S について $\Psi_S : \mathcal{M}(S) \to \underline{M}(S)$ は単射．

(証明)．M が fine moduli space である（すなわち Ψ が自然同型である）ときに 2 条件が成り立つことは明らか．

任意の scheme :: S について Ψ_S が同型 (iso) であることを示す．今，$\mathcal{M}(S), \underline{M}$ がどちらも集合であるから，Ψ_S は写像である．iso map は surj+inj map と同値であるから，我々は Ψ_S :: surj のみ示せば良い．しかしこのことは命題 2.11 で証明されている． ∎

命題 2.20 ([7], Prop23.5)

S :: scheme の open subscheme と包含写像が成す圏を $\mathbf{OpenSubSch}(S)$ と書くことにする．これは $\mathbf{Sch}/S$ の full subcategory である．

moduli functor :: $\mathcal{M}$ が fine moduli space をもつならば，任意の S :: scheme について $\mathcal{M}|_{\mathbf{OpenSubSch}(S)}$ は S 上の sheaf である．言い換えれば，$\mathcal{M}$ は Zariski topology 上の sheaf である．

(証明)．M :: fine moduli scheme for $\mathcal{M}$ とし，S :: scheme を固定する．$\mathcal{F} := \underline{M}|_{\mathbf{OpenSubSch}(S)}$ は開集合系からの contravariant functor だから presheaf であることは定義から従う．また $\mathcal{F}$ の元は scheme の

morphism である．このことから sheaf の公理 Identity Axiom と Gluability Axiom を満たすことも簡単に分かる．（一応，[6] II, Thm3.3 Step3 を参考に挙げる．） ∎

注意 2.21
それぞれの fiber が互いに同型である (i.e. ${}^{\forall}t, s \in S,\ \ \mathcal{F}_t \cong \mathcal{F}_s$) ような family を fiberwise trivial family, 対象 X（なめらかな曲線など）を用いて $X \times S \to S$ の形に書ける family を trivial family と呼ぶ．

fine moduli space が存在するならば，fiberwise trivial family は trivial family である (cf. [7] Remark 23.1.1)．実際，任意の fiber が X と同型であるような family :: $\mathcal{F} \to S$ から得られる $\Psi_S(\mathcal{F} \to S) : S \to M$ は X に対応する点への constant map になっている．$\Psi_S(X \times S \to S)$ も明らかに同じ constant map となるから，Ψ_S :: isomorphism より $X \times S \to S \sim \mathcal{F} \to S$.

3 Non-existence of Fine/Coarse Moduli Space

問 3.1

Fine/Coarse Moduli Space はいつ存在するのか？

十分条件を示すのではなく,[†4]．ここでは問を次のように限定する．

問 3.2

Fine/Coarse Moduli Space はいつ存在しないのか？

Moduli 問題の対象と一対一に対応する scheme が見つかったからと言って，それが fine moduli space であるとは言えない．問題と成るのは，family の同型である．以下では特に automorphism の存在と jump phenomenon が fine moduli space が存在するための障害と成ることを見る．

注意 (2.21) の内容を用いて証明する．

3.1 j-invariant is not a fine moduli space.

一つ例を見よう．

$S = \mathbb{A}^1_k - \{0\}$ とする．S 上の楕円曲線の family :: $\mathcal{F}$ を次で定める．

$$\mathcal{F} = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - s) \subseteq \mathbb{A}^2_k \times_k S \xrightarrow{\mathrm{pr}} S.$$

$\Psi(\mathcal{F})$ を j 不変量を用いて $s \mapsto j(\mathcal{F}_s)$ で定める．j 不変量が coarse moduli であることは既に見た．計算すると分かる通り，$\Psi(\mathcal{F})$ は定値写像である．したがって $\mathcal{F}$ のそれぞれの fiber は互いに同型である．一方，$\mathcal{F}' = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - 1) \times S$ について同様に $\Psi(\mathcal{F}')$ を定めると，これも自明に定値写像である．しかし，$\mathcal{F} \ncong \mathcal{F}'$ であることが示せる．よって注意 (2.21) から j 不変量は fine moduli にならない．fine/coarse moduli の一意性から，楕円曲線は fine moduli を持たない．

proof of $\mathcal{F} \ncong \mathcal{F}'$. [6] I, Ex6.2 を参考にする．我々が調べるのは次の二つの環である．それぞれ $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ で

[†4] 十分条件については次の命題が有る：`https://stacks.math.columbia.edu/tag/01JJ`．次のページでは，この命題を用いて Grassmannian functor が表現可能であることを示している：`https://stacks.math.columbia.edu/tag/089R`.

ある．

$$A = k[x,y,t,t^{-1}]/(y^2 - x^3 - t), \qquad B = k[x,y]/(y^2 - x^3 - 1) \otimes_k k[t,t^{-1}],$$

A は UFD であるが B は UFD でない (GCD domain でさえない)，ということを示す．

A は $k[x,y]_{y^2-x^3}$(1 元での局所化) と同型である．$k[x,y]$ は UFD であり，irreducible element での局所化でこれは保たれる．すなわち A は UFD.

B が UFD でないことを示すために，$\bar{x} = x \bmod (y^2 - x^3 - 1)$ が not prime だが irreducible であることを示す．

$\bar{x}$ :: not prime を示すために次の等式を考える．

$$\bar{x}^3 = \bar{x} \cdot \bar{x} \cdot \bar{x} = (\bar{y}+1) \cdot (\bar{y}-1).$$

$\bar{x}$ :: prime と仮定すると，$\bar{y}+1$ or $\bar{y}-1 \in (\bar{x})$ となる．そこで例えば

$$\bar{y}+1 = a\bar{x}$$

なる $\bar{a} \in B$ が存在するとしよう．すると $y+1-ax \in I$ が得られる．これは楕円曲線 $y^2 = x^3+1$ が $y+1-ax = 0$ という曲線に含まれていることを意味する．したがって $x=0$ と楕円曲線の交点は，存在しても $(x,y) = (0,-1)$ の一つのみ，ということになる．しかし実際は $(0,-1)$ もこの楕円曲線に属すので矛盾．

$\bar{x}$ :: irreducible を示すために σ と N を準備する．$\sigma : k[x,y] \to k[x,y]$ を $y \mapsto -y$ で他の元は変化させないものとする．すると $\sigma(I) \subseteq I$ なので $\sigma : B \to B$ が誘導される．さらに $N(a) = a \cdot \sigma(a)$ で $N : B \to k[\bar{x}]$ を定める．N は積について準同型であることに注意せよ．

$\bar{x}$ が irreducible でないならば，$\bar{x} = fg \bmod I$ なる $f, g \in k[x,y]$ が存在する．$f \bmod I, g \bmod I$ はどちらも単元でない．両辺を N で写すと次のように成る．

$$(x^2 - N(f)N(g)) \bmod I = 0.$$

したがって $x^2 - N(f)N(g) = a(y^2 - x^3 - 1)$ なる $a \in k[x,y]$ が存在する．左辺は $k[x]$ に属すから，y の次数を考えると $a = 0$ が示される．また $N(f), N(g)$ の次数は 2 以上であるから，$N(f), N(g)$ のいずれかは $k^\times$ の元である．しかし $N(f) = f \cdot \sigma(f)$ (resp. $N(g)$) が単元ならば f (resp. g) も単元であり，f, g についての仮定に反する．よって $\bar{x}$ :: irreducible. ∎

したがって moduli functor は必ずしも fine moduli space を持たない．

3.2 Automorphism is an obstruction to the existence of fine moduli space.

Moduli 問題の対象が非自明な自己同型写像をもつなら，多くの場合で fine moduli space が存在し得ない．例を二つ考える．最初の例は構成の仕方が schemeatic でないが，直観的である．

例 3.1

k :: field とし，$\mathbb{A}^2_k$ の原点を通る直線を，同型を無視して分類する．直線は全て同型であるから，これは一つしか無い．したがってこの問題に対する fine moduli space が存在すれば，それは一点空間である．したがって任意の scheme :: B について，B 上の family は全て trivial family と同型である．

L を $\mathbb{A}^2$ の原点を通る直線とし，その非自明な自己同型 $\sigma : L \to L$ をとる．$[0,1]$ 上の trivial fiber :: $[0,1] \times L$ を，次の同値関係で割って商空間を作る．

$$(t,Q) \sim (s,Q) \iff |t-s| = 1 \wedge P = \sigma(Q) \quad \text{where} \quad s,t \in [0,1], P,Q \in L.$$

例えば σ を $(x,y)\mapsto(-x,-y)$ と置くと，これは丁度メビウスの帯である．そしてこれは S^1 上の family となっている．

今 S^1 上の family として，σ を使って構成したもの（メビウスの帯）と trivial family（斜めになった円筒）がある．これらは明らかに同型ではない．

例 3.2

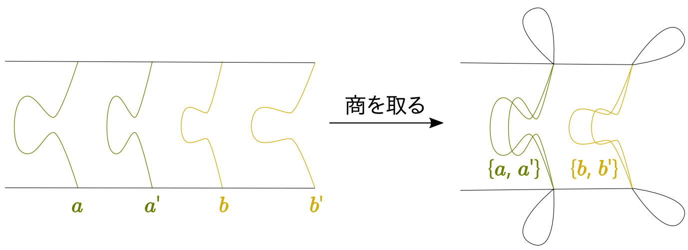
scheme :: B と family over B :: X を次のように定める．

$$B=\operatorname{Spec}\mathbb{C}[\lambda,(\lambda(1-\lambda))^{-1}]=\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}-\{0,1\},\qquad X=\operatorname{Proj}\frac{\mathbb{C}[x,y,z,\lambda,(\lambda(1-\lambda))^{-1}]}{(y^2z-x(x-z)(x-\lambda z))}\subset\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}\times_{\mathbb{C}}B.$$

任意の $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線と同型なものが family :: $\mathrm{pr}:X\to B$ に含まれている．そして j-invariant :: $A^1_{[j]}$ は B の次の群 G による商として得られる（このことは [7] Prop 26.3 の証明で示されている）．

$$G=\left\{\lambda\mapsto\frac{a-b}{c-b}\;\middle|\;\{a,b,c\}=\{0,1,\lambda\}\right\}.$$

したがって $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線の universal family は，“quotient of family” $X/G\to B/G=\mathbb{A}^1_{[j]}$ として得られるはずである．同型な fiber はひとつの fiber にまとめてしまえば，同型類の代表をひとつづつ fiber にもつ family が作れるであろう，というわけである．



問題は X/G である．X/G に言及するには G の X への作用を定める必要が有るが，楕円曲線には非自明な自己同型があるため，奇妙な族を作ることが出来る．これは以降の段落でもう少し具体的に述べる．もし楕円曲線の族の fine moduli space が存在するならば，fine moduli space も，universal family も，同型を除いて一意である．なので，$X/G\to B/G$ が唯一の候補である．しかし $X/G\to B/G$ は楕円曲線の族ではない．したがって楕円曲線の universal family は存在せず，fine moduli space も存在しない．

ここでは B/G でなく，G の元 σ で生成される G の部分群 $G'=\{\mathrm{id},\sigma\}$ による商 B/G' を考える．

$$G\ni\sigma:\lambda\mapsto\frac{\lambda-1}{0-1}=1-\lambda.$$

σ は involution(i.e. $\sigma\circ\sigma=\mathrm{id}$) である．対して X の自己同型を次のように取る．

$$\tau:(x,y,z,\lambda)\mapsto(x,-y,z,1-\lambda).$$

こちらも σ 同様 involution である．そして τ は $\sigma:\mathbb{A}^1\to\mathbb{A}^1$ の持ち上げである．すなわち，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\phi"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ \mathbb{A}^1 \arrow[r, "\sigma"'] & \mathbb{A}^1 \end{tikzcd}$$

今，$H' = \{\mathrm{id}, \tau\}$ は明らかに X に作用する．そして上の図式が可換であることから，family :: $\phi : X/H' \to B/G'$ が得られる．そこでこの family を考えてみると，σ の不動点 $\lambda = 1/2$ における ϕ の fiber$\phi^{-1}(1/2)$ は，$X_{1/2}$ の $\tau_{1/2} : (x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ による商となっている．この商は，Riemann-Hurwitz の公式によると，genus が 0 となっている[†5]．しかし楕円曲線の種数は 1 でないから，ϕ は楕円曲線の族ではない．同様にして $X/G \to B/G$ も楕円曲線ではないように作用 $G \curvearrowright X$ を作れる．

より抽象的な設定で証明しよう．これも fiberwise trivial but non-trivial family を構成すれば良い．ここでは [2] §4.8.2 と M.Hoeve のノート "An Introduction to Moduli Spaces of Curves" Example 3.2 を参照した．他，D.Eisenbud and J.Harris "Schemes:The Language of Modern Algebric Geometry" IV.B vii にも同様のことが記述されているのを発見した．

例 3.3
X を scheme over $\mathbb{Z}$ とし，これが non-trivial automorphism :: $\sigma : X \to X$ を持つとする．

order of σ を n とする．すなわち，n を $\sigma^n = \mathrm{id}$ となる最小のものとする．n は 2 以上の整数または無限大である．σ で生成される群を G_σ とする．これは cyclic group of order n.

base of family となる scheme :: B と B の non-trivial isomorphism :: $\tau : B \to B$ を定める．これは n の値で場合分けすれば具体的に与えることが出来る．

$n = 2$:　$B = \mathbb{P}^1 - \{(\pm 1 : 1)\}$ とし，τ を座標の交換 $(x : y) \mapsto (y : x)$ とする．
$2 < n < \infty$:　$B = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{(\pm i : 1)\}$ とし，τ を $2\pi/n$ 回転（アフィン平面の回転から誘導されるもの）とする．
$n = \infty$:　$B = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ とし，τ を $z \mapsto z + 2\pi i$ とする．

いずれの場合でも τ で生成される群 G_τ は cyclic group of order n であり，$\psi : \sigma \mapsto \tau$ によって G_σ と同型である．さらに τ は固定点をもたず，B は smooth irreducible scheme over $\mathbb{C}$ となっている．

G_σ の $X \times B$ への作用を次で定める[†6]．

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & G_\sigma \times (X \times_{\mathbb{Z}} B) & \to & X \times_{\mathbb{Z}} B \\ & (g, (x, b)) & \mapsto & (g(x), \psi(g)(b)) \end{array}$$

B にも G_σ の自明な作用を与えると，$\phi : (X \times B)/G_\sigma \to B/G_\sigma$ が得られる．

この時，$\phi : (X \times B)/G_\sigma \to B/G_\sigma$ は fiberwise trivial but non-trivial family である．

(証明)．(TODO) ∎

3.3 Jump Phenomenon.

coarse moduli space さえ持ち得ない moduli functor もある．

命題 3.4 ([8] Lemma2.27, [7])
moduli functor :: $\mathcal{M}$ を考える．さらに $\mathcal{M}$ とは無関係に algebraically closed field :: k をとる．family :: $\mathcal{F} \to \mathbb{A}^1_k \in \mathcal{M}(\mathbb{A}^1_k)$ が以下の条件を満たすと仮定する．すると $\mathcal{M}$ の coarse moduli space は finite type over

†5 楕円曲線は genus が 1 で，$0, 1, \lambda, \infty$ の 4 点で分岐しており，この 4 点それぞれの分岐指数は 2 である．$\phi^{-1}(1/2)$ は商写像 $X_{1/2} \to X/\tau_{1/2}$ による 2 重被覆だから，$\phi^{-1}(1/2)$ の genus を h とすると，$2 - 2 \cdot 1 = 2h - 4 \cdot (2 - 1)$．故に $h = 0$.
†6 [2] §4.8.2 ではこの辺りに大きな間違いがある．

kではない．この条件とはすなわち:

$$\mathcal{F}_s \sim \mathcal{F}_t \quad \text{and} \quad \mathcal{F}_0 \not\sim \mathcal{F}_s \quad (\text{for } s, t \in \mathbb{A}^1 - \{0\}).$$

特に the best approximation of $\mathcal{M}$ （定義 2.13 直後）が代数閉体上 finite type な scheme であった場合，$\mathcal{M}$ は coarse moduli space を持たない．

命題の条件を満たす family を，jump phenomenon が起きている family と呼ぶ．

(証明). 代数閉体 k 上 finite type な scheme :: M をとり，自然変換 $\Psi : \mathcal{M} \to \underline{M}$ が存在したとしよう．主張にある family :: $\mathcal{F} \to \mathbb{A}^1$ を Ψ で写したものを $f : \mathbb{A}^1 \to M$ としよう．

$\mathbb{A}^1$ の closed points は M の closed point に写る[†7]．k :: algebraically closed field かつ $\mathbb{A}^1_k, M$ 共に finite type over k であるから，closed points を考えることは $\operatorname{Spec} k$ からの射を考えることに等しい．今，functor of points の間の natural transformation ::

$$\underline{f}(k) : \underline{\mathbb{A}^1}(k) \to \underline{M}(k)$$

による $\underline{\mathbb{A}^1}(k) \ni s : \operatorname{Spec} k \to \mathbb{A}^1$ の像は，$\underline{f}(s) \in \underline{M}(k)$ である．このことを closed points の言葉に書きなおせば: closed point :: $s(\operatorname{Spec} k) \in \mathbb{A}^1$ の像は M の closed point.

f が coarse moduli space ならば，$\Psi_k : \mathcal{M}(k) \to \underline{M}(k)$ は全単射である．$s \in \mathbb{A}^1$ に対応する $\operatorname{Spec} k \to \mathbb{A}^1$ を $\bar{s}$ と書くことにすると，

$$\underline{f}(\bar{s}) = f \circ \bar{s} = \Psi_k(\mathcal{F}_s) : \operatorname{Spec} k \to M.$$

$s \neq 0$ ならば，$\mathcal{F}_s \not\sim \mathcal{F}_0$ なので $\Psi_k(\mathcal{F}_s) \neq \Psi_k(\mathcal{F}_0)$．これは $\operatorname{Spec} k$ は 1 点空間だから，これは次と同値.

$$(f \circ \bar{s})(\operatorname{Spec} k) = f(s) \neq f(0) = (f \circ \bar{0})(\operatorname{Spec} k).$$

$s, t \neq 0$ ならば $\mathcal{F}_s \sim \mathcal{F}_t$ であるから，合わせて $f^{-1}(f(\{0\})) = \mathbb{A}^1 - \{0\}$ となる．これは closed subset ではない．しかし $f(\{0\}) \subset M$ は closed set であり，かつ f は連続であるから，これは有り得ない． ∎

注意 3.5

命題中の $\mathbb{A}^1$ と $0 \in \mathbb{A}^1$ は，より一般に connected scheme of finite type over an algebraically closed field と closed point に置き換えられる．connected は closed point の補集合が closed にならないために必要である．M の条件「finite type over k ではない」についても，脚注の通り一般化出来る．

例 3.6 ([5] Exercise (1.7))

moduli functor :: $\mathcal{M}$ を，“flat families of reduced plane curves of degree 2 over $\mathbb{C}$, up to isomorphism” の moduli functor として定める．ただし，ここでは $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ の曲線を考える．$\mathcal{M}(\mathbb{C})$ の元，すなわち “reduced plane curves of degree 2”の同型類は 2 つしかないことに注意する．

以下，the best approximation of $\mathcal{M}$ は $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ であることを示す．t-line :: $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$ 上の family :: $xy = t$ で jump phenomenon が起きるため，$\mathcal{M}$ は coarse moduli space を持たない．

[†7] finite type over an algebraically closed field という条件は，このことを示すために付いている．実際のところは “M :: Jacobson and f :: locally finite type” という条件が必要十分である．詳細は https://stacks.math.columbia.edu/tag/01TB を参照して欲しい．この必要十分条件が成立する典型例が今回の M, f の条件である．

(証明).

■There exists natural transformations $\mathcal{M} \to \underline{\mathbb{C}}$. $\mathcal{M}(B) \ni \phi : \mathcal{F} \to B$ に対し，$\Psi(\phi) \in \underline{\mathbb{C}}(B)$ を次のように定める．$b \in B$ について $\mathcal{F}_b \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ であることに注意せよ．

$$B \ni b \mapsto \mathcal{F}_b \xrightarrow{\mathrm{pr}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \xrightarrow{\mathrm{pr}} \operatorname{Spec}\mathbb{C}$$

これは自然変換である．よって $\mathcal{M} \to \underline{M}$ の自然変換が存在する．

■The best approximation of $\mathcal{M}$ is $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$. scheme :: M' と自然変換 $\Psi' : \mathcal{M} \to \underline{M'}$ をとって固定する．Ψ は引き続き自然変換 $\mathcal{M} \to \underline{\mathbb{C}}$ とする．$\phi : \mathcal{F} \to B$ :: flat family of smooth conic とする．この family は fiberwise trivial family だから，$\Psi'_B(\phi) : B \to X$ は定値写像である．その値を $x \in X$ とすると，包含写像 $k(x) \hookrightarrow \mathbb{C}$ から射 $\pi : \operatorname{Spec}\mathbb{C} \to X$ が定まる ([6] II, Ex2.7)．これは $\pi(\operatorname{Spec}\mathbb{C}) = \{x\}$ を満たす．この射に依って $\Psi'(\phi) = \pi \circ \Psi(\phi)$ となることは明らか (TODO: どうすれば $k(x) \hookrightarrow \mathbb{C}$ の存在が保証できる？). ∎

4 Dealing with Non-existence of Fine/Coarse Moduli Space.

fine moduli space が存在するための障害を回避する方法は幾つかある．

以下，moduli 問題の対象を object と呼ぶ．

4.1 Sub-Moduli Functor of "Objects Without Non-Trivial Automorphism".

考えている moduli 問題を修正し，対象を自明な自己同型しか持たないものに限定する．すると多くの場合で fine moduli が存在しうる．しかし，この修正された moduli 問題が解けても，元の moduli 問題に関する情報が殆ど出てこないことが多い．

4.2 Rigidifying of Moduli Problem.

これは，追加の情報を考慮に入れることで，objects を予め大雑把に分類しておく，ということである．追加の情報としては以下のようなものが考えられる．

1. fixed sub-objects.
2. level structure.
3. ordered sets of (higher-order) Weierstrass points.

4.2.1 Fixed Sub-object

fixed sub-objects は，例えば幾つかの固定された点を通る曲線の moduli 問題を考えるということである．この場合，十分に固定点の個数を大きくすれば，non-trivial automorphism が存在しなくなる．この修正によって得られる moduli space がどれだけ元の問題の moduli を反映しているか，というのは不透明である．しかしこの修正はしばしば自然に現れる．

4.2.2 Level Structure

level structure は irreducibility of $\mathcal{M}_g$ を証明する際に導入された．level structure を考慮して moduli 問題を修正すると，元の問題の moduli space の finite cover が得られる．level n, genus g の curve の moduli space を $\mathcal{U}_g^{(n)}$ と書く．

level structure は様々な定義が存在する．abelian scheme の level structure の定義は [9] p.129, Definition 7.1 にある．これは abelian scheme の moduli space を研究するために用いられている．特に elliptic curve over $\mathbb{C}$ の Weil paring, level structure については，[4] に詳しい記述がある．F.Voloch による course note にも整理された記述がある．[†8] また，symplectic level structure は [3] で整理されている．Teichmüller structure of level G （G は有限群）は [10] で導入されている．

最初に二つ，事前に定義しておく．

定義 4.1
$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ を standerd symplectic space と呼ぶ時，$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ には，以下のように symplectic form :: ω を与える: $\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{bmatrix}$ （I_g は $g \times g$ 単位行列）として，

$$\omega(a,b) = {}^t a\Omega b \quad \text{for} \quad a, b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$$

定義 4.2 (From Jana Sotáková “Weil pairing”)
k :: algebraically closed field, A :: abelian variety over k, m :: positive integer with $\gcd(m, \operatorname{char} k) = 1$ とする．A の m-torsion points を $A[m]$ と表す．

Weil pairing とは，以下の条件を満たす pairing (bilinear form)

$$e_m : A[m] \times A[m] \to \mu_m = \{x \in k \mid x^m = 1\}$$

のことである．これは存在する（ここでは証明しない）．

(i) $e_m(S_1 + S_2, T) = e_m(S_1, T)e_m(S_2, T)$.
(ii) $e_m(S, T_1 + T_2) = e_m(S, T_1)e_m(S, T_2)$.
(iii) $e_m(T, T) = 1$.
(iv) $e_m(S, T) = e_m(T, S)^{-1}$.
(v) ${}^\forall T \in A[m], \quad {}^\exists S \in A[m], \quad e_m(S, T) \neq 1$.

注意 4.3
$S, T \in A[m]$ とし，$a, b, c, d \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ とする．定義から次が成り立つ．

$$e_m(aS + bT, cS + dT) = e_m(S, T)^{ad-bc}.$$

したがって $A[m] \times A[m]$ に $M \in GL(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ を作用させた時，M の作用で e_m が保たれる必要十分条件は $\det M = 1$，すなわち $M \in SL(2, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ である．

以下は一般の体上の curve で定義できる level structure である．O. Bergvall “Cohomology of the moduli space of curves of genus three with level two structure” [†9] Def2.3.1 からとった．

[†8] https://www.ma.utexas.edu/users/voloch/390-10.html
[†9] http://www.diva-portal.org/smash/record.jsf?pid=diva2%3A715000&dswid=5675

定義 4.4

k :: algebraically closed field, C :: smooth, irreducible, and projective curve of genus g, n :: positive integer with $\gcd(n, \operatorname{char} k) = 1$ とする．n-torsion points of Jacobi variety of C :: $J(C)[n]$ を，Weil paring を symplectic form とする symplectic vector space とみなす．

(i) C の level n-structure とは，symplectic isomorphism :: $\alpha : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \to J(C)[n]$ のことである．したがって，任意の $a, b \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ について $\omega(a, b) = e_m(\alpha(a), \alpha(b))$ が成立する．ここで $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ は standerd symplectic space である．

(ii) morphism :: $\phi : C \to C'$ に対して，$\phi^* : J(C') \to J(C)$ が誘導される（line bundle の pullback で定まる）．そこで，curves with level n-structure :: $(C, \alpha), (C', \alpha')$ が同型であることを，以下のように定める: isomorphism :: $\phi : C \to C'$ が存在し，ϕ^* が $\phi^* \circ \alpha = \alpha'$ を満たす．

C が楕円曲線である場合 $(g = 1)$ には，$J(C) = C$([6] ThmIII.4.11) である．またこの時，$\phi : C \to C'$ から誘導される $J(C') \to J(C)$ の射は ϕ に一致する．

ここでは Hesse cubic form を用いて，代数閉体 $k(\operatorname{char} k \neq 3)$ 上の楕円曲線の level 3-structure と，level 3-structure を持つ楕円曲線の moduli space を解説する．参考文献は二つ: `https://arxiv.org/abs/math/0611590`, `http://www.math.chalmers.se/~ulfp/Teaching/AG.html`.

k を $\mathbb{Z}[1/3, \xi]/(\xi^2 + \xi + 1)$ を含む体，すなわち，標数が 3 でなく 1 の原始 3 乗根を持つ体とする．k 上の楕円曲線 E を予め埋め込んで射影平面上のものと考える．E の level 3-structure とは，$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ と group of 3-torsion points in E ::

$$E[3] = \{P \in E \mid 3P = O.\}$$

の間の同型 $\alpha : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \to E[3]$ のことである．この同型は $\alpha(0,1)$ と $\alpha(1,0)$ の点を与えれば定まることに注意する．

この同型 α が存在することは，以下のように分かる．具体的な考察により，$E[3]$ の元は，その 1 点のみで E と交わる点，すなわち変曲点であることが分かる．これは E が 3 次曲線であることから，これは 9 点存在する．すなわち $E[3]$ は位数 9 のアーベル群．アーベル群の構造定理と，$E[3]$ の任意の元の位数が高々 3 であることから，$E[3] \cong (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ が分かる．

我々がこれから主張することは，

$$B = \mathbb{A}^1 - \{1, \xi, \xi^2\}$$

が level 3-structure を持つ k 上の楕円曲線の fine moduli space であることである．まず level 3-structure を持つ k 上の楕円曲線の family を考える．S を k 上の scheme として，楕円曲線とその 2 つの 3-torsion point の family を取る．

k 上の楕円曲線 E と level 3-structure :: $\alpha : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \to E[3]$ をとる．埋め込み $i : E \to \mathbb{P}^2_k$ の像と $i \circ \alpha$ をとれば，最初から E は $\mathbb{P}^2$ 内の楕円曲線と考えられる．E を以下のような写像で写す．

$$\alpha(0,0) \mapsto (0:1:-1), \quad \alpha(1,0) \mapsto (0:1:-\xi), \quad \alpha(0,1) \mapsto (-1:0:1), \quad \alpha(1,1) \mapsto (-\xi:0:1).$$

このような $\mathbb{P}^2$ の自己同型はただひとつ存在する．そしてこれは $E[3]$ の群構造を維持し，像は以下の 9 点を通る．

$$K = \{(0:1:-\beta) : (-\beta:0:1), (1:-\beta:0) \mid \quad \text{where} \quad \beta^3 = 1\}.$$

$\mathbb{P}^2$ の種数 1 の曲線は 3 次曲線である．そして以上の 9 点を通る非特異曲線は，以下の形の多項式で定義される．

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3\mu xyz = 0$$

こうして (E, α) から $\mu \in B$ への写像が定まる．この楕円曲線の 3-torsion points は上の 9 点である．

逆に，Hesse pencil $H_\mu : x^3 + y^3 + z^3 - 3\mu xyz = 0$ をとる．これの level 3-structure は

$$\alpha(0,0) \mapsto (0:1:-1), \quad \alpha(1,0) \mapsto (0:1:-\xi), \quad \alpha(0,1) \mapsto (-1:0:1).$$

で定まる．

level 3-structure のとり方には $SL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ の自由度がある．より具体的には $M \in SL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ について，以下のように変換する．

$$\begin{array}{cccc} \sigma & (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 & \to & (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 \\ & (s,t) & \mapsto & (s,t)M \end{array}$$

これに伴って，$PGL(3,k)$ の元 $\alpha \circ \sigma$（正確には $PGL(2,k)$ の元であって $E[3]$ への制限が $\alpha \circ \sigma$ であるもの）が定まる．なお，$\sigma \in GL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ を $\det \sigma \neq 1$ であるものとすると，Remark 4.3 より，α に課せられた条件 $\omega(a,b) = e_m(\alpha(a), \alpha(b))$ が成立しない．

H_μ のパラメータ μ は μ は $PSL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = SL(2, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})/\{\pm I\}$ の作用を反映する．$-I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ の作用では変化しない．$-I$ は α と合成すると，y, z 軸の交換に成る．

命題 4.5

同型 $f : H_\mu \to H_{\mu'}$ を，$H_\mu, H_{\mu'}$ の 3-torsion points :: K を固定するものとする．この時，$f = \mathrm{id}$.

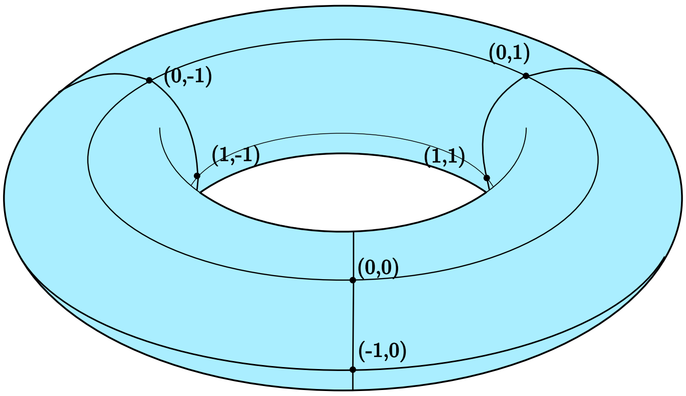
(証明). Iku Nakamura “Compactification by GIT-stability of the moduli space of abelian varieties” [†10] Claim 2.3.2 の証明を参照した．

f は K の点を固定するから，K の 3 点が乗った直線全体も固定する．そのため，f は線形変換とみなせる．f を行列 A で書いた時，A がスカラー行列であることを示そう．

K は直線 $x = 0, y = 0, z = 0$ 上の 3 点を含むから，A はこれら 3 直線を固定する．したがって A は対角行列である．さらに $(0:1:-1)$ と $(1:-1:0)$ を固定することから，A はスカラー行列．よって $f = \mathrm{id}$. ∎

$\mathbb{C}$ 上の解析的な曲線 (compact Riemann surface) については，torsion point は $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 係数の 1-cycle として理解できる．$\mathbb{C}$ 上の楕円曲線はトーラスとみなせるが，その上の原点 $(0,0)$ を固定し，大円を 3 等分した位置に $(0,1)$ を，小円を 3 等分した位置に $(1,0)$ をとる．そして加法的に $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), \ldots$ をとる．

[†10] https://arxiv.org/abs/1406.0174



そして $(0,0)$ から各頂点への辺を 1-cycle として考える．こうして考えると，compact Riemann surface の level structure は homology を用いて定義することが出来る．

定義 4.6

C :: curve of genus g over $\mathbb{C}$, n :: positive integer とする．$H_1(C^{an}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ を，intersection paring を symplectic form とする symplectic vector space とみなす．

(i) C の level n-strcuture とは，symplectic isomorphism :: $\alpha : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \to H_1(C^{an}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ のことである．ここで $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}$ は standerd symplectic space である．

(ii) curves with level structure :: $(C, \alpha), (C', \alpha')$ が同型であることを，以下のように定める: isomorphism :: $\phi : C \to C'$ が存在し，ϕ から誘導される写像 $\phi^* : H_1(C'^{an}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to H_1(C'^{an}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ が $\phi^* \circ \alpha = \alpha'$ を満たす．

4.2.3 Weierstrass points

こちらを考えても元の問題の moduli space の finite cover が得られる修正としては，ordered sets of (higher-order) Weierstrass points を考える，というものもある．Weierstrass points の定義は [1] pp.41-44 にある．C. Shor, T. Shaska “Weierstrass points of superelliptic curves” †11 にも解説がある．

4.3 Representation by Algebraic Stacks.

moduli functor を scheme で表現できないのならもっと「情報量が多い」もので表現しよう，というのが動機である．stack は groupoid（全ての射が isomorphism である圏），または 2-functor（$\mathbf{Sch}^{op}$ から圏の圏 **Cat** への sheaf）として定義される．詳細は Tomás L. Gómez “Algebraic stacks” †12．

参考文献

[1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip Griffiths, and Joseph Daniel Harris. *Geometry of Algebraic Curves: Volume I (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 1st ed.

†11 https://arxiv.org/pdf/1502.06285.pdf

†12 https://arxiv.org/abs/math/9911199.

1985, corr. 2nd printing 2007 edition, 6 2006.

[2] T.E.V. Balaji and Deutsche Nationalbibliothek. *An Introduction to Families, Deformations and Moduli*. Universitätsdrucke Göttingen. Universitätsverlag Göttingen, 2010.

[3] Frans Oort Bert van Geemen. *A Compactification of a Fine Moduli Space of Curves*, pp. 285–298. Birkhäuser Basel, Basel, 2000.

[4] Fred Diamond and Jerry Michael Shurman. *A First Course in Modular Forms (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1st ed. 2005, corr. 4th printing 2016 edition, 10 2016.

[5] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[6] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[7] Robin Hartshorne. *Deformation Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2010 edition, 12 2009.

[8] Victoria Hoskins. Moduli problems and geometric invariant theory. https://userpage.fu-berlin.de/hoskins/M15_Lecture_notes.pdf, 2016.

[9] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric Invariant Theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34)*. Springer-Verlag, 3rd ed. edition, 1992.

[10] D. Mumford P. Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.

[11] Jenia Tevelev. Moduli spaces and invariant theory. http://people.math.umass.edu/~tevelev/797_2017/.

[12] 向井茂. モジュライ理論〈1〉. 岩波書店, 12 2008.