層 (sheaf) の概観

代数幾何学に於いて

七条彰紀

2019 年 6 月 29 日

代数幾何学を始める人のために，またこれから学ぶ人のために書きます．ノートです．当然ですが．

1　代数幾何学に於ける sheaf という概念

まず代数幾何学での sheaf の立ち位置について書いておきます．sheaf，より一般に stack は代数幾何学の中心的概念です．

■scheme theory に於いて　scheme theory（スキーム論）では可換環から scheme という幾何学的な対象を構築します．この構築の際に，元と成っていた可換環を記憶しているのが sheaf です．可換環が「切り刻まれ貼り合わされて」structure sheaf（構造層）となっているのです．他に scheme theory で現れる sheaf としては，scheme 上の (quasi-)coherent sheaf（(準）連接層）が重要です．(quasi-)coherent sheaf を調べることは，scheme についての情報を得るための基本的な手段です．また scheme 上の sheaf cohomology（層係数コホモロジー）は，scheme に「変な感じの部分」がどれだけあるかを調べるための重要な道具となっています．（特に etale cohomology は数論においても重要な位置を占めています．）

■scheme theory をはみ出す　一方で，scheme だけでは用に足りないことがあります．例えば scheme の群による商を考えることがあります（これは普通の位相空間の群作用による商のようなものです)．定義は圏論的に，普遍性を用いて定義されるのですが，条件を満たす scheme が無い，ということはしょっちゅうです．これに対する一つの解決方法として，scheme の概念を拡張するということが考えられます．圏論的に性質の良い，都合の良い対象まで研究対象に収めようというわけです．

■圏論ちょっとわかる，という人向け　scheme の概念を拡張するには，どのような方策を取るべきでしょうか．当座の目標は「scheme の圏を包含する圏を探す」ということです．全ての極限を scheme の圏に付け加える (pro-scheme)，基礎を担う可換環論を非可換環論やモノイド論まで拡大する，などの手段があります．ですがまた別に，米田の補題を手がかりにする事が出来ます．米田の補題は，米田関手が scheme の圏から scheme 上の presheaf（前層）の圏への忠実充満関手となることをいっています．scheme の圏を包含する圏として「scheme の圏から scheme 上の presheaf の圏」が使える，ということです．

■scheme の一般化に於ける sheaf　この，scheme の一般化 (generalized scheme; 一般化スキーム) を考える方向では，sheaf が中心概念です．実際に generalized scheme の代表である algebraic space（代数的空間）は sheaf です．そして algebraic space の定義に algebraic space の位相空間の定義は含まれていません．

ちなみに極端なことを言うと，scheme でさえ最初から位相空間無しに定義することが可能です．これは”functorial scheme”（関手的スキーム？）などと呼ばれます．もちろんこれは普通の意味の scheme ではありませんが，”functorial scheme”から普通の scheme の体裁を整えることも，この逆も可能です．

■さらなる一般化　そして sheaf は stack（いわば，圏を値に取る sheaf．スタック）へ，algebraic space は algebraic stack (Artin/DM stack) へと一般化されます．恐ろしいことに algebraic space にも algebraic stack に関しても (quasi-)coherent sheaf や sheaf cohomology といった理論が構築されています．

2　sheaf の思想

■sheaf の定義　位相空間上の sheaf の定義の仕方は少なくとも 4 つ存在しますが，意味が分かりやすいのは “identity axiom”（一致公理？）と “gluability axiom”（接着性公理 or 貼り合わせ可能性公理？）を満たす preaheaf（前層）として定義することだと思います．この定義を以下に述べます．

定義 2.1

(i) 位相空間 X に対し，X の開集合と包含写像が成す圏を $\mathbf{Open}(X)$ とする．

(ii) $\mathbf{Open}(X)$ から集合の圏 $\mathbf{Sets}$ への反変関手 $\mathcal{F}\colon \mathbf{Open}(X) \to \mathbf{Sets}$ を X 上の presheaf と呼ぶ．

(iii) X 上の presheaf :: $\mathcal{F}$ と $U \in \mathbf{Open}(X)$ について，$s \in \mathcal{F}(U)$ を $\mathcal{F}$ の U 上の section と呼ぶ．

(iv) X の開集合の間に有る包含射 $\iota_V^U\colon U \hookrightarrow V \in \mathrm{Arr}\,\mathbf{Open}(X)$ を考える．X 上の presheaf :: $\mathcal{F}$ による ι_V^U の像を $\mathrm{res}_V^U (:= \mathcal{F}(\iota_V^U))$ と表し，restriction map（制限射）と呼ぶ．$s \in \mathcal{F}(U)$ の res_V^U の像はしばしば $s|_V (= \mathrm{res}_V^U(s))$ と表記される．

(v) さらに presheaf :: $\mathcal{F}$ が以下の 2 条件を満たす時，$\mathcal{F}$ は（集合の）sheaf と呼ばれる．ただし $U \in \mathbf{Open}(X)$ を X の開集合とし，$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ を U の X の開集合による被覆[†1]とする．

Identity Axiom

任意の 2 元 $s, t \in \mathcal{F}(U)$ が，任意の i について $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ であるならば，$s = t$．

Gluability Axiom

U の開部分集合上の sections の組 $(s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$ が次を満たすとする．

$$^{\forall} i, j \in I, \quad s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}.$$

この時，全ての $i \in I$ について $s|_{U_i} = s_i$ である section :: $s \in \mathcal{F}(U)$ が存在する．（identity axiom より，これは一意に存在する．）

■「局所的に調べ，大域的に知る」　identity axiom と gluability axiom はそれぞれ「2 つの section は，断片（すなわち $s|_{U_i}, t|_{U_i}$）が等しければ，等しい」「section の断片（すなわち s_i）は貼り合わせられる」と読めます．そのため，この二つの条件は「局所的な情報から大域的な情報が決定される」という気持ちを表現したものだ，と筆者は感じています．

■もう一つの定義　上記定義の (v)，すなわち identity axiom と gluability axiom を次のように述べることも出来ます．

[†1] すなわち，任意の点 $x \in U$ に対して，$x \in U_i$ を満たす $U_i \in \mathcal{U}$ が存在する．

定義 2.2
位相空間 X 上の presheaf :: $\mathcal{F}$ を考える．$U \in \mathbf{Open}(X)$ を X の開集合とし，$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ を U の X の開集合による被覆とする．この $U,\mathcal{U}$ に対し，集合 $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ を以下通り定義する．

$$\mathcal{F}(\mathcal{U}) = \left\{ (s_i)_{i \in I} \;\middle|\; {}^{\forall} i, j \in I,\ \ s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \right\}$$

$(s_i)_{i \in I}$ に課された条件は Gluability Axiom で述べられているものと全く同じである．この集合の元を descent datum（降下データム？）と呼ぶ．

さて，次のように写像を定める．

$$\begin{array}{rccc} \epsilon_{\mathcal{U}}: & \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \\ & s & \mapsto & (s|_{U_i})_{i \in I} \end{array}$$

$\mathcal{F}$ が sheaf であるとは，任意の $U,\mathcal{U}$ について $\epsilon_{\mathcal{U}}$ が全単射であるということ．

任意の $U,\mathcal{U}$ について，$\epsilon_{\mathcal{U}}$ が単射であることは $\mathcal{F}$ について identity axiom を満たすことと同値です．同じく，全射であることは gluability axiom を満たすことと同値です．

sheafification $\ker \phi$ と $\operatorname{im} \phi$．後者の非直感性．Cartier divisor による non-separatedness の検知