ゼミノート #4
Deformation Theory

七条彰紀

2018 年 7 月 8 日

1　Automorphism Group of Stable Curve

[5] 3.A, [7] §1 を参照する．

C, D :: stable curves of genus g over a scheme S の間の isomorphism group の scheme としての構造を与える．この scheme を $\mathrm{Isom}(C, D)$ と書く．そして $\mathrm{Aut}(C) = \mathrm{Isom}(C, C)$ と定義し，これの scheme としての特徴を調べる．

$\mathrm{Isom}(C, D)$ の特徴付けをするため，次の関手を考える．

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}som_S(C, D): & (\text{Scheme over } \mathbb{C}) & \to & (\text{Set}) \\ & S' & \mapsto & \{\ C \times_{\mathbb{C}} S' \to D \times_{\mathbb{C}} S' \ ::\ S'\text{-isomorphism}\} \end{array}$$

$\iota \in \mathcal{I}som(C, D)(S')$ から得られる ι^* は $\omega^\circ_{C \times S'/S'} = \iota^*(\omega^\circ_{D \times S'/S'})$ を満たす．また $\otimes$ と交換する（すなわち Picard 群の間の準同型である．[3] Ex II.6.8）．このことから $\mathrm{Isom}(C, D)$ が適当な r をとると $PGL(r+1)$ の部分群として書けることが分かる．

もう少し詳しく $\mathrm{Isom}(C, D)$ を書く．$n \geq 3$ を整数とする．次のように r, d をとる．

$$r + 1 = h^0((\omega^\circ_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n}) = (2n-1)(g-1), \qquad d = \deg(\omega^\circ_{C/\mathbb{C}})^{\otimes n} = 2n(g-1).$$

すると [3] II.7 より，C, D は $\mathbb{P}^r_{\mathbb{C}}$ の次数 d, arithmetic genus g の closed curve とみなせる（$\mathbb{P}^r$ に埋め込める）．なので Hildert scheme :: $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{d,g,r}$ の点として扱うことが出来る．ここで次のように射を定める．

$$\begin{array}{rccc} \mu: & PGL(r+1) & \to & \mathcal{H} \times \mathcal{H} \\ & \alpha & \mapsto & (\alpha \cdot [C], [D]) \end{array}$$

すると，$\mathcal{I}som(C, D)$ は $\mu^{-1}(\Delta)$ によって表現される[†1]．これを group scheme over $\mathbb{C}$ :: $\mathrm{Isom}(C, D)$ とする．

scheme over $\mathbb{C}$ :: X について少々一般の理論を述べる．$\mathbb{I} = \mathrm{Spec}\,\mathbb{C}[\epsilon]/(\epsilon^2)$ とおく (ref. [5] 1)．[3] Ex II.2.8 より，$t \in \underline{X}(\mathbb{I})$ は X の $\mathbb{C}$-rational point :: x と $T_x(X) = \mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_x^2 = \mathcal{T}_x$ の元に対応する．ここで $\mathcal{T}$ は tangent sheaf :: $\mathcal{T} = \mathscr{H}om_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ のことである．[5] でいう regular vector field とは $\mathcal{T}$ の section のこと（と思われる）．

[†1] Δ は $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ の diagonal set. $\mu^{-1}(\Delta)$ は

$$\Delta \cap \mathrm{im}\,\mu = \{(\alpha \cdot [C], [D]) \mid \alpha \cdot [C] = [D]\}$$

の $PGL(r+1)$ への逆像なので，この点と C, D の間の同型と対応することが分かるだろう．

定理 1.1
C :: stable curve of genus $g \geq 2$ について，

$$\mathrm{Ext}^0(\Omega_C, \mathcal{O}_C) = H^0(C, \mathcal{T}_C) = \mathcal{T}_C(C) = 0.$$

(証明). [7] §1.
$\pi : \tilde{C} \to C$ を normalization of C とする．また $\tilde{C}$ の connected component の個数を ν，それぞれの genus を g_i $(i = 1, \dots, \nu)$ とする．
今，$D \in \mathcal{T}_C(C)$ は pullback :: $\pi^* : \mathcal{T}_{\tilde{C}} \to \pi^* \mathcal{T}_C$ によって[†2]．$\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ C の double point に π で対応する点 (point laying over double point, plodp) で 0 になるような regular vector field :: $\tilde{D} \in \mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C})$ に対応する (TODO)．このような $\tilde{D}$ は 0 しかないことを確かめれば，$\mathcal{T}_C(C) = 0$ がわかる．

主張 1.2
1 点 $P \in \tilde{C}$ で $\tilde{D}_P = 0$ ならば，$\tilde{D} = 0$ である．

(証明). C :: reduced connected scheme に注意する．$P \in C$ において $\tilde{D} \in \mathcal{T}_C(C)$ が $\tilde{D}_P = 0$ を満たすとしよう．C の irreducible affine open cover :: $\mathfrak{U}$ をとり，$P \in U$ なる $U = \mathrm{Spec}\, A \in \mathfrak{U}$ をとって固定する．すると C :: reduced より A :: integral domain. $\tilde{D}|_U \in \mathcal{T}_C(U)$ が $P \in U$ で 0 になるのだから，次が成立する．

$$^\exists u \in A - \mathfrak{p}_P, \quad u \cdot (\tilde{D}|_U) = 0.$$

A :: integral より，これは $\tilde{D}|_U = 0$ を意味する．U と交わる irreducible affine open subset of C :: $V \in \mathfrak{U}$ についても，$\tilde{D}|_{U \cap V} = 0$ なので $\tilde{D}|_V = 0$. C :: connected なので，このように V を取り続けることで，全ての $V \in \mathfrak{U}$ について $\tilde{D}|_V = 0$ であることがわかる．sheaf の Identity Axiom から，C 全体で $t = 0$. ∎

したがって我々は $\tilde{C}$ の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつこと示せば良い．
$\mathcal{T}_{\tilde{C}} = \mathscr{H}\!om(\Omega_{\tilde{C}/\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$ なので，$\mathcal{T}_{\tilde{C}}$ に対応する divisor は $K_{\tilde{C}}$. $\deg K_{\tilde{C}} = 2\tilde{g} - 2$ なので，$\tilde{g} > 1$ ならば $\deg(-K_{\tilde{C}}) < 0$. したがって [3] Lemma IV.1.2 から $\dim_{\mathbb{C}} H^0(\tilde{C}, \mathcal{T}_{\tilde{C}}) = 0$. すなわち $\mathcal{T}_{\tilde{C}}(\tilde{C}) = 0$. なので以下では $\tilde{g}_i = 0, 1$ とする．
$\tilde{g}_i = 0, 1$ であるとき，$\tilde{C}$ の各 connected component は必ず plodp をもつ．実際，genus formula で $\delta = 0$ とすると

$$g = \sum_i (\tilde{g}_i - 1) + 1 \geq 2$$

したがって $\sum_i (\tilde{g}_i - 1) > 0$ ということになる．しかし仮定から $\tilde{g}_i - 1 \leq 0$ なので，$\delta > 0$. すなわち C は必ず node をもつ．$\tilde{C}$ の各 component は smooth であることと C が connected であることも踏まえて考えると，$\tilde{C}$ の各 component は少なくとも一つずつ plodp をもつことが分かる．（この辺りは [7] Lemma1.4 で詳しく述べられている）. ∎

命題 1.3
任意の閉点 $P \in \mathrm{Aut}(C)$ について，$\mathcal{O}_{\mathrm{Aut}(C),P} \cong \mathbb{C}$. 特に $\mathrm{Aut}(C)$ :: reduced scheme.

(証明). $X = \mathrm{Aut}(C)$ は group scheme over $\mathbb{C}$ であるから，X のある点での local な性質は transition を用いて単位元 e での性質と言い換えられる．なので $A := \mathcal{O}_{X,e}$ のみを考える．X :: group scheme over $\mathbb{C}$ より

[†2] R :: ring, A, B :: ring over R とする．一般に，k-homomorphism :: $\phi : A \to B$ があるとき，$D \in \mathrm{Der}_R(B)$ は $\phi^* : D \mapsto D \circ \phi$ によって $\mathrm{Der}_R(A)$ へ写すことが出来る．

e :: $\mathbb{C}$-rational point なので，A が体ならばそれは $\mathbb{C}(=A/\mathfrak{m}_A)$ と同型である．よって我々は A が体であることのみ示せば良い．

上記の定理 (1.1) から，$\mathcal{T}_C(C)=0$．これは $C\times\mathbb{I}$ の $\mathbb{I}$-automorphism は自明なものしか無いことを意味する（後述）．さらに $\mathrm{Aut}(C)$ の定義から，これは射 $\mathbb{I}\to\mathrm{Aut}(C)$ としては自明なものしか存在しないことを意味する．さらに [3] Ex II.2.8 より，これは $\mathfrak{m}_A/\mathfrak{m}_A^2=0$ を意味する．中山の補題から $\mathfrak{m}_A=0$．よって A は体である． ∎

2 Definitions of Deformations and Versal Deformation.

定義 2.1 ($\mathbb{C}$-pointed scheme [8] §1.2.1)
scheme :: Y と $\mathbb{C}$-rational point :: $y_0\in Y$ の組を $\mathbb{C}$-pointed scheme を呼び，(Y,y_0) と書く．

morphism of $\mathbb{C}$-pointed schemes :: $(S,s_0)\to(T,t_0)$ とは，moephism of schemes :: $\phi:S\to T$ であって，$\phi(s_0)=t_0$ を満たすもののこと．

定義 2.2 (Deformation of Scheme [8] §1.2.1, [5] §3.B) (i) deformation of X とは，以下のような pullback diagram のことである．ψ から $X\cong\mathcal{X}\times_Y\mathbb{C}$ が誘導される．

$$\xi:\quad\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle \text{flat, surj.}} \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[s]{} & Y \end{array}$$

S のことを ξ の parameter space, $\mathcal{X}$ を ξ の total space と呼ぶ.

(ii) 任意の scheme :: X と $\mathbb{C}$-pointed scheme :: (S,s_0) に対して，S が parameter space であるような deformation of X が存在する:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X\times_{\mathbb{C}}S \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow[s]{} & S \end{array}$$

これを product family または trivial family と呼ぶ.

(iii) morphism of $\mathbb{C}$-pointed schemes :: $(T,t_0)\to(S,s_0)$ は，parameter space が S である deformation :: ξ から base change によって次の deformation を誘導する．

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathcal{X}\times_S T \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \longrightarrow & T \end{array}$$

これを元の deformation の $f:(T,t_0)\to(S,s_0)$ による pullback と呼び，$f^*\xi$ と書く（このノート独自？）．

(iv) isomorphism of deformations of X :: $\xi\to\eta$ とは，以下の可換図式が成立する同型 $\mathcal{X}\cong\mathcal{Y},S\cong T$ の

こと．

$$
\begin{tikzcd}
& & \mathcal{Y} \arrow[dd] \\
X \arrow[r] \arrow[urr] \arrow[dd] & \mathcal{X} \arrow[ur, "\cong"'] \arrow[dd] & \\
& & T \\
\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[urr] & S \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}
$$

isomorphism of parameter spaces :: $(S, s_0) \to (T, t_0)$ と deformation から誘導される deformation は元の deformation と同型である．

定義 2.3 (Universal Deformation, [5] 3.B, [4] §15)
universal deformation for X とは，次の性質を満たす deformation of X :: ξ (parameter space :: S): 任意の deformation of X ::η (parameter space :: T) にたいし，morphism of pointed schemes :: $f : T \to S$ が一意に存在し，$f^*\xi \cong \eta$ となる．

Universal Deformation は，次の関手の表現対象であると言える．

$$\mathbf{Sch}/\mathbb{C} \ni S \mapsto \{\text{Deformation of } X\}.$$

したがって全ての Deformation は universal deformation から得られる．しかし，当然ながらというべきか，universal deformation は殆どの場合で存在しない．そこで universal deformation への要求を

- $S' \to S$ を locally about S' にとるものとし，
- $U \to S$ の一意性は要求しない

と弱める．一意 (uni-) ではないので，これを versal deformation と呼ぶ．

定義 2.4 (Versal Deformation)
（versal deformation の定式化が見つからないので保留．見つけた限りでは versal deformation for scheme は次で意義する formal derormation でのみ定義されている．[1] では versal deformation for (complex) manifold が定義されているのみである．）

3 Formal Deformation

以下では $\mathbf{Art}_{\mathbb{C}}, \hat{\mathbf{Art}}_{\mathbb{C}}$ を次の圏とする．

$\mathbf{Art}_{\mathbb{C}}$
$\hat{\mathbf{Art}}_{\mathbb{C}}$

定義 3.1 (Functor of Artinian rings)

定義 3.2 (Formal Deformation, [9] 7.2)

定義 3.3 (Homomorphism of Formal Deformations, [9] 7.2) homomorphism of deformations of X :: $(\alpha, f) : (\mathcal{X}, \mathbb{I}) \to (\mathcal{Y}, \mathbb{I})$ とは homomohpsim $f : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ と，$\alpha : f_*\mathcal{X} \cong \mathcal{Y}$ の組のことである．ここで $f_*\mathcal{X}$ は f と $\mathcal{X} \to \mathbb{I}$ の fiber product で得られる deformation である．

定義 3.4 (Versal Deformation for Formal Deformation, [9] 7.2)
deformation of X :: $\phi : \mathcal{X} \to (S, s_0)$ が versal deformation である（versality property をもつ）とは，次の性質を持つということである:

$$\begin{tikzcd} & (X, \mathbb{C}) \arrow[d, "\forall"] \\ (\mathcal{X}, S) \arrow[ur, dashed, "\exists"] \arrow[r, "\forall"] & (\mathcal{Y}, T) \end{tikzcd}$$

定義 3.5 (First Order Deformation)
$D = \mathbb{C}[x]/(x^2), \epsilon = x \bmod (x^2)$ とする．$\mathbb{I} = \operatorname{Spec} D$ の唯一の閉点を 0 で表す．$(\mathbb{I}, 0)$ 上の deformation を，first order deformation (or infinitesimal deformation) と呼ぶ．

4 First Order Deformation of Nonsingular Pre-Variety.

union of variety を prevariety とよぶ．これはすなわち，variety の定義から irreducibility を除いたものである．

補題 4.1 ([2] Cor6.2)
D-module :: M が flat であることは，$M/\epsilon M \xrightarrow{\times\epsilon} \epsilon M$ が同型であることと同値．

補題 4.2 ([6] Prop5.1)
X :: affine, nonsingular, finite type scheme over a field k とする．この時，X の first order deformation は自明な deformation :: $X \times_k \operatorname{Spec} D$ しか存在しない．

(証明). $\phi : \mathcal{X} \to \mathbb{I}, \psi : X \to \mathcal{X}$ を X の first order deformation とする．ϕ :: flat と上の補題を用いると，$X \xrightarrow{\cong} \mathcal{X} \times_D \operatorname{Spec} \mathbb{C}$ から $\psi^\# : \mathcal{O}_\mathcal{X}/\epsilon\mathcal{O}_\mathcal{X} \to \mathcal{O}_X$ が同型であることが得られる．逆にこの同型が存在する時 $\mathcal{X} \to \mathbb{I}$ が flat であることが言える．したがって X の first order deformation は infinitesimal extension of X by $\mathcal{O}_X$ ([3] Ex II.8.7) に対応する．しかし [3] Ex II.8.7 より，これは自明なものしか存在しない． ∎

補題 4.3 ([6] Prop5.2)
X :: nonsingular scheme of finite type over k とする．この時，次の sheaf を考える．

$$X \supseteq U \mapsto \{\mathbb{I}\text{-automorphisms of } D \times_k \mathbb{I}\}.$$

するとこの sheaf は tangent sheaf of X :: $\mathcal{T}_X$ と同型である．

定理 4.4 ([6] p.7)
X :: separated nonsingular scheme of finite type over k とする．特に，X :: nonsingular (abstruct) variety over K であればよい．この時，first oder deformation of X の同値類は $H^1(X, \mathcal{T}_X)$ の元と一対一に対応する．

(証明). ∎

5 Several Other Deformation Theory

ここでは first order deformation of a nonsingular variety の変種として，様々な "deformation of something" の問題とその "space of first order deformation" を列挙する．

ここでの "curve" は私のノート "session2_ApproachesToConstructionOfMg" 同様に smooth complete (abstruct) variety of dimention 1 over $\mathbb{C}$ を意味する．

5.1 Deformation of a nonsingular curve

5.2 Deformation of a nonsingular pointed curve

5.3 Deformation of a curve with line bundle.

5.4 Deformation of a map $f : X \to Y$ with X, Y both fixed.

5.5 Deformation of a map $f : X \to Y$ with only Y fixed.

5.6 Deformation of a singular point of plane curve.

5.7 Deformation of a singular variety.

参考文献

[1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, and Phillip Griffiths. *Geometry of Algebraic Curves: Volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 2011 edition, 4 2011.

[2] David Eisenbud. *Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1st ed. 1995. corr. 3rd printing 1999 edition, 3 1999.

[3] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[4] Robin Hartshorne. *Deformation Theory (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2010 edition, 12 2009.

[5] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[6] Brian Osserman.

[7] David Mumford Pierre Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.

[8] Edoardo Sernesi. *Deformations of Algebraic Schemes (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)*. Springer, 11 2010.

[9] Angelo Vistoli.