

Group Schemes

七条 彰紀

2018 年 1 月 11 日

目次

1	Preface	2
2	T -valued Points	2
3	Moduli Functor and Fine/Coarse Moduli Space	4
3.1	Families	4
3.2	Moduli Functor	5
3.3	Fine Moduli Space	5
3.4	Coarse Moduli Space	6
3.5	Properties of Fine / Coarse Moduli Spaces	6
3.6	Pathological behaviour.	7
4	Definition of Group Schemes	7
4.1	Definition	8
4.2	Examples	8
4.3	Action on Scheme	10
5	Categorical/Good/Geometric/Affine GIT Quotients	10
5.1	Categorical Quotient	10
5.2	G -invariant Function	11
5.3	Good and Geometric Quotient.	11
5.4	Affine GIT Quotient	12
5.5	Relations of Quotients.	13
6	Linear Reductivity.	13
6.1	Linear Representation	13
7	Affine GIT Quotient of Variety is Variety Again	14
8	Affine GIT Quotient is a Good Quotient	14

1 Preface

このノートの想定読者は、[4] の II, §3 までを読んだ、Geometric Invariant Theory と Moduli Problem に興味がある者である。主な参考文献は [1],[3],[2] である。大まかな議論の流れは前者の流れを採用し、用語などの定義は [1] で述べられているものより一般的なものを [3] と [2] から採る。[1] で使われる定義は素朴すぎるからである。一般的な定義で概念を導入した後、特別な場合では [1] での定義と同値に成ることを確かめる、という方針を採る。

このノートでは、次の順に定義していく。

1. T -valued point (where $T :: \text{scheme}$),
2. group scheme,
3. fine/corse moduli,
4. categorical/good/geometric/affine GIT quotient,
5. representation of group (scheme),
6. linearly reductive group,
7. closure equivalence,
8. unstable/semi-stable/stable.

目標とする命題は次のものである。

定理 1.1

$X :: \text{affine scheme}$, $G :: \text{linearly reductive group scheme acting on } X$ とする。

- (i) affine GIT quotient of X by $G :: X // G$ は good quotient である。
- (ii) X の stable points を X^s とすると、 $X // G$ の制限 $:: X^s / G$ は geometric quotient of X^s by G である。
- (iii) $X // G$ は quotient functor $:: \underline{X}/G$ の最良近似である。
- (iv) k を体とする。 X が finite type/ k ならば $X // G$ もそうである。

Notation

$S :: \text{scheme}$ 上の scheme と S -morphism が成す圏を \mathbf{Sch}/S で表す。これは slice category の一般的な notation から来ている。

affine scheme $:: \text{Spec } R$ は、混乱の恐れがないときは R と略す。

2 T -valued Points

圏論で言う “generalized point” の概念を、名前を変えて用いる。

定義 2.1

- (i) $X, T \in \mathbf{Sch}/S$ に対し、 $\underline{X}(T) = \text{Hom}_{\mathbf{Sch}/S}(T, X)$ を X の T -valued points と呼ぶ。 $T = \text{Spec } R$ と書けるときは $\underline{X}(T)$ を $\underline{X}(R)$ と書く。この関手 \underline{X} は functor of points と呼ばれる。

(ii) 体 k 上の scheme $:: X (S = \text{Spec } k, X \in \mathbf{Sch}/S)$ と field extension $:: k \subseteq K$ について, $\underline{X}(K)$ を X の K -rational points と呼ぶ.

(iii) morphism $:: h : G \rightarrow H$ について自然変換 $\underline{h} : \underline{G} \rightarrow \underline{H}$ は $\phi \mapsto h \circ \phi$ のように射を写す.

注意 2.2

\mathbf{Sch} は locally small category である. すなわち, 任意の $X, T \in \mathbf{Sch}$ について $\underline{X}(T)$ は集合である. これを確認するために, $X, Y \in \mathbf{Sch}$ を任意にとり, $\text{Hom}(X, Y)$ の濃度がある濃度で抑えられることを見よう. 射 $X \rightarrow Y$ の作られ方に沿って考える.

- (1) base space の間の写像 $f : \text{sp } X \rightarrow \text{sp } Y$ をとる. このような写像全体の濃度は高々 $|\text{sp } Y|^{|\text{sp } X|}$.
- (2) $|Y|$ の開集合 U をとる. 開集合全体の濃度は高々 $2^{|\text{sp } Y|}$.
- (3) 写像 $f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow (f_* \mathcal{O}_X)(U)$ を定める. このような写像全体の濃度は高々 $|(f_* \mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$.

したがって $\text{Hom}(X, Y)$ の濃度は高々

$$|\text{sp } Y|^{|\text{sp } X|} \times \prod_{U \in 2^{\text{sp } Y}} |(f_* \mathcal{O}_X)(U)|^{|\mathcal{O}_Y(U)|}$$

となる. 濃度の上限が存在する (すなわち, ある集合への単射を持つ) から, $\text{Hom}(X, Y)$ は集合である.

注意 2.3

上の注意から, Yoneda Lemma が成立する. したがって自然変換 $\underline{G} \rightarrow \underline{H}$ と射 $G \rightarrow H$ が一対一対応する. このため, scheme の間の射についての議論と functor of points の間の射の議論は (ある程度) 互いに翻訳することが出来る.

注意 2.4

K -rational point については, $\underline{X}(K) = \{x \in X \mid k(x) \subseteq K\}$ とおく定義もある. ここで $k(x)$ は x での residue field である. しかし [4] Chapter.2 Ex2.7 から分かる通り, この二つの定義は翻訳が出来る. すなわち, $k(x) \subseteq K$ を満たす $x \in X$ と, $\text{Spec } k\text{-morphisms} :: \text{Spec } K \rightarrow X$ は一対一に対応する.

また $X :: \text{finite type } /k$ であるとき, closed point $:: x \in X$ について, $k(x)$ は k の有限次代数拡大体である. これは Zariski's Lemma の帰結である. したがって $\underline{X}(\bar{k})$ は X の closed point 全体に対応する. ただし \bar{k} は k の代数閉包である.

例 2.5

\mathbb{R} 上の affine scheme $X = \text{Spec } \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2)$ の \mathbb{R} -rational point と \mathbb{C} -rational point を考えよう.

$\text{Spec } \mathbb{R} \rightarrow X$ の射は環準同型 $\mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2) \rightarrow \mathbb{R}$ と一対一に対応する. しかし直ちに分かる通り, このような環準同型は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (0, 0)$$

で定まるものしか存在し得ない. ここで $\bar{x} = x \bmod (x^2 + y^2), \bar{y} = y \bmod (x^2 + y^2)$ と置いた. よって $\underline{X}(\mathbb{R})$ は 1 元集合. また, この環準同型が誘導する $\text{Spec } \mathbb{R} \rightarrow X$ の射は 1 点空間 $\text{Spec } \mathbb{R}$ を原点へ写す.

一方, 環準同型 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \rightarrow \mathbb{C}$ は

$$(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (a, \pm ia)$$

(ここで $i = \sqrt{-1}, a \in \mathbb{R}$) で定まることが分かる. すなわち, $Z_a(x^2 + y^2) \subseteq A_{\mathbb{C}}^2$ の点に対応して,

$\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \rightarrow \mathbb{C}$ の標準同型が定まる．逆の対応も明らか．よって $\underline{X}(\mathbb{C})$ の元は $\mathcal{Z}_a(x^2+y^2) \subseteq \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$ の点に対応している．

例 2.6

体 k 上の affine variety $:: X \subseteq \mathbb{A}_k^n$ を多項式系 $:: F_1, \dots, F_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ で定まるものとする．すると k 上の環 R に対して，次の集合が考えられる．

$$V_R = \{p = (r_1, \dots, r_n) \in R^{\oplus n} \mid F_1(p) = \dots = F_n(p) = 0\}.$$

この集合の元も R -value point と呼ばれる．([1] ではこちらのみを R -value point と呼んでいる．実際，こちらのほうが字句 “value point” の意味が分かりやすいだろう．) V_R の点が $\underline{X}(R)$ の元と一対一に対応することを見よう．

X の affine coordinate ring を $A = k[x_1, \dots, x_n]/(F_1, \dots, F_n)$ とし， $\bar{x}_i = x_i \bmod (F_1, \dots, F_n)$ ($i = 1, \dots, n$) とおく． $\phi: A \rightarrow R$ を考えてみると，これは次のようにして定まる．

$$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \mapsto (r_1, \dots, r_n) \in V_R.$$

すなわち， V_R の点に対して $\text{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ の元が定まる．逆の対応は明らか．そして， $\text{Hom}_{\mathbf{Ring}/k}(A, R)$ が $\text{Hom}_{\mathbf{Sch}/\text{Spec } k}(\text{Spec } R, X) = \underline{X}(R)$ と一対一対応することはよく知られている．

3 Moduli Functor and Fine/Corse Moduli Space

3.1 Families

moduli 問題を語るには用語 “family” が必要である．

定義 3.1

\mathcal{P} を集合のクラス^{†1} とする．集合 B について， B の構造と整合的な構造を持った集合 \mathcal{F} と全射写像 $\pi: \mathcal{F} \rightarrow B$ の組が \mathcal{P} の B 上の **family** であるとは，各 $b \in B$ について集合 $\pi^{-1}(b) \subseteq \mathcal{F}$ が \mathcal{P} に属するという事．

「 B の構造と整合的な構造」というのは，例えば， S が位相空間であって写像 $\mathcal{F} \rightarrow S$ を連続にするような位相が \mathcal{F} に入っている，ということである．family の構造は場合毎に明示されなくてはならない．

用語 “family” を厳密に定義しているものは全くと言っていいほど無いが，ここでは Renzo のノート^{†2} の定義を参考にした．“family” を上のように解釈して不整合が生じたことは，私の経験の中ではない．

注意 3.2

moduli theory 以外で “family of \mathcal{C} ” と言えば，単に \mathcal{C} の部分集合であろう．“family parametrized by S ” の様に言えば， S -indexed family (or set) のことを想像するであろう．しかし S -indexed family $:: \mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ は $S \rightarrow \mathcal{F}$ という写像で定まるから，ここでの “family” とは写像の向きが逆である．

^{†1} 集合 X を変数とする述語 $X \in \mathcal{C}$ の意味を「 X はある条件を満たす対象である」と定義した，と考えて良い．「属す」の意味は集合と同様に定める．

^{†2} <http://www.math.colostate.edu/~renzo/teaching/Topics10/Notes.pdf>

上の定義を無心に読めば分かる通り、「 \mathcal{C} の family :: \mathcal{F} 」と言った時には、 \mathcal{C} に属するのは \mathcal{F} の部分集合である。属するのは（一般に） \mathcal{F} の元ではない。また \mathcal{F} は \mathcal{C} の元の和集合とみなせる。（正確には \mathcal{C} の元を S に沿って並べたものである。）

例 3.3

$X, B :: \text{scheme}$, $f : X \rightarrow B :: \text{morphism of schemes}$ をとる。 X は f によって B 上の family となる。射の fibre として実現される, scheme (例えば smooth curve) の family は deformation theory の対象である。

例 3.4

k を体, S を適当な scheme とする。 \mathbb{A}_k^2 の原点を通る直線の S 上の family として, line bundle :: $\mathcal{L} \subset \mathbb{A}_k^2 \times_k S$ を考えることが出来る。 $\mathcal{L} \rightarrow S$ は射影写像で与えられる。同様に \mathbb{A}^n の r 次元線形空間の S 上の family は r 次元 vector bundle :: $\mathcal{E} \subset \mathbb{A}^n \times S$ である。

例 3.5

k を適当な体とし, \mathbb{P}_k^1 の点 O_i ($i = 1, 2, 3$) を順に $(0 : 1), (1 : 0), (1 : 1)$ とする。この時, $PGL_2(k)$ は次の全単射で \mathbb{P}_k^1 の自己同型写像の $(\mathbb{P}_k^1)^{\oplus 3}$ 上の family になる。

$$\begin{aligned} \pi : PGL_2(k) &\rightarrow (\mathbb{P}_k^1)^{\oplus 3} \\ \phi &\mapsto (\phi^{-1}(O_i))_{i=1}^3. \end{aligned}$$

3.2 Moduli Functor

以下の定義は [9] など, Moduli 問題に関する殆どの入門書で述べられている。

定義 3.6

contravariant functor :: $\mathcal{M} : \mathbf{Sch} \rightarrow \mathbf{Set}$ が **moduli functor** (または functor of families) であるとは, 各 scheme :: S に対して, $\mathcal{M}(S)$ が代数幾何学的対象の S 上の family 達を family の間の同値関係で割ったもの (“{families over S } / \sim_S ” in [2]) である, ということ。

moduli functor の定義はあえて曖昧に述べられている。これは「出来る限り多くのものを moduli theory の範疇に取り込みたい」という思いがあるからである ([9])。

3.3 Fine Moduli Space

定義 3.7

scheme :: M が moduli functor :: \mathcal{M} に対する fine moduli space であるとは, M が \mathcal{M} を表現する (represent) ということである。言い換えれば, 関手 $\underline{M} = \text{Hom}_{\mathbf{Sch}}(-, M)$ が \mathcal{M} と自然同型, ということである。

注意 3.8

moduli functor :: \mathcal{M} の fine moduli space :: M が存在したとしよう。この時, 任意の $X \in \mathbf{Sch}$ について $\mathcal{M}(X) \cong \underline{M}(X)$ 。これは X 上の代数幾何学的対象が成す同値類が M の X -value point と一対一に対応していることを意味する。したがって, \mathcal{M} が指定する代数幾何学的対象の集合の同値類を M が「パラメトライズ」していると考えられる。

例 3.9 ([2], Exercise 2.20)

例 3.4 で述べた \mathbb{A}^n の r 次元線形空間の S 上の family (vector bundle over S) の集合を, vector bundle の同型で割った集合を $\mathcal{M}(S)$ とする. $f: T \rightarrow S$ に対する $\mathcal{M}(f)$ は, vector bundle への post-composition で自然に定まる.

この moduli functor は fine moduli space を持つことが知られている. これが Grassmannian variety である.

残念ながら, 多くの moduli functor に対して fine moduli space が存在し得ない. (このあたりの議論は [9] p.3 や [5] p.150 にある. この節の終わりでも理由と例を示す.) そのため Mumford は (おそらく GIT 本で) fine moduli space の代わりとして coarse moduli space を提唱した.

3.4 Coarse Moduli Space

定義 3.10

moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対して, 以下を満たす scheme $:: M$ を \mathcal{M} の coarse moduli space と呼ぶ.

- (i) 自然変換 $\eta: \mathcal{M} \rightarrow \underline{M}$ が存在する.
- (ii) η は自然変換 $\mathcal{M} \rightarrow \underline{\tilde{M}}$ の中で最も普遍的である:

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{M} & \\ \forall \tau \swarrow & & \searrow \eta \\ \forall \underline{\tilde{M}} & \xrightarrow[\exists! f]{} & \underline{M} \end{array}$$

この図式で $\tilde{M} :: \text{scheme}$, $f: M \rightarrow \tilde{M}$.

- (iii) 任意の代数閉体 $:: k$ について $\eta_{\text{Spec } k}: \mathcal{M}(\text{Spec } k) \rightarrow \underline{M}(\text{Spec } k)$ は全単射である.

例 3.11

楕円曲線の j -不変量. 後に示すとおり, これは fine でない.

3.5 Properties of Fine / Coarse Moduli Spaces

命題 3.12

moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対して coarse moduli space は同型を除いて一意である.

命題 3.13 ([5], Prop23.6)

scheme $:: M$ が moduli functor $:: \mathcal{M}$ に対する fine moduli space であるならば, M は \mathcal{M} の coarse moduli space でもある.

命題 3.14 ([5], Prop23.5)

$S :: \text{scheme}$ の open subscheme と包含写像が成す圏を $\mathbf{OpenSubSch}(S)$ と書くことにする. これは \mathbf{Sch}/S の full subcategory である.

moduli functor $:: \mathcal{M}$ が fine moduli space をもつならば, 任意の $S :: \text{scheme}$ について $\mathcal{M}|_{\mathbf{OpenSubSch}(S)}$ は S 上の sheaf である.

(証明). $M ::$ fine moduli scheme for \mathcal{M} とし, $S ::$ scheme を固定する. $\mathcal{F} := \underline{M}|_{\text{OpenSubSch}(S)}$ は開集合系からの contravariant functor だから presheaf であることは定義から従う. また \mathcal{F} の元は scheme の morphism である. このことから sheaf の公理 Identity Axiom と Glueability Axiom を満たすことも簡単に分かる. (一応, [4] II, Thm3.3 Step3 を参考に挙げる.) ■

3.6 Pathological behaviour.

$\mathcal{F}, \mathcal{G} \rightarrow S$ を fiber of morphism で実現される family だとする. (したがって \mathcal{F}, \mathcal{G} は scheme である.) \mathcal{F}, \mathcal{G} の同値関係を, scheme としての同型で定めよう. M を coarse moduli space, η を moduli functor から \underline{M} への自然変換だとする.

$\eta_S(\mathcal{F}) : S \rightarrow M$ は \mathcal{F} の fiber を M の点に対応させる. (添字の S は以降略す.)

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\longrightarrow S \xrightarrow{\eta(\mathcal{F})} M \\ \mathcal{F}_s &\longmapsto s \longmapsto m \end{aligned}$$

$\eta(\mathcal{G}) : S \rightarrow M$ についても同様である. したがって \mathcal{F}, \mathcal{G} が fiber 毎に同型であれば, $\eta(\mathcal{F}) = \eta(\mathcal{G})$ となる.

η は全単射であるから, これは $\mathcal{F} \cong \mathcal{G}$ を意味する. しかし, 対象が非自明な自己同型写像をもつときにはこのようにならない family が構成できてしまう.

例 3.15 ([5] §26)

$S = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$ とする. S 上の楕円曲線の family $:: \mathcal{F}$ を次で定める.

$$\mathcal{F} = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - s) \subseteq \mathbb{A}_k^2 \times_k S \xrightarrow{\text{pr}} S.$$

$\eta(\mathcal{F})$ を j 不変量を用いて $s \mapsto j(\mathcal{F}_s)$ で定める. j 不変量が coarse moduli であることは既に見た. 計算すると分かる通り, $\eta(\mathcal{F})$ は定値写像である. したがって \mathcal{F} のそれぞれの fiber は互いに同型である. 一方, $\mathcal{F}' = \mathcal{Z}_a(y^2 - x^3 - 1) \times S$ について同様に $\eta(\mathcal{F}')$ を定めると, これも自明に定値写像である. しかし, $\mathcal{F} \not\cong \mathcal{F}'$ であることが示せる (TODO). よって j 不変量は fine moduli にならない. fine/coarse moduli の一意性から, 楕円曲線は fine moduli を持たない.

それぞれの fiber が互いに同型である (i.e. $\forall t, s \in S, \mathcal{F}_t \cong \mathcal{F}_s$) ような family を fiberwise trivial family, $X \times S$ の形に書ける family を trivial family と呼ぶ. 一般に, fine moduli space が存在するならば, fiberwise trivial family は trivial family である ([5] Remark23.1.1).

また, coarse moduli space さえ持ち得ない moduli functor もある. これは jump phenomenon と呼ばれる性質を持つ family が存在する場合や, あるいは moduli functor が “unbounded” であるときに起きる. このノートでは深追いしない. 詳しくは [2] §2.4 を参照せよ.

4 Definition of Group Schemes

family の同値関係は, しばしば群作用の軌道分解で与えられる. そのため moduli 問題の理解のために, group scheme を知ることは不可欠である.

4.1 Definition

group scheme は圏論的に定義される．まずは圏論の言葉で述べよう．

定義 4.1

$S :: \text{scheme}$ とする． $G :: \text{scheme over } S$ が group scheme (over S) であるとは、 G が \mathbf{Sch}/S における group object であるということである．group scheme over S と homomorphisms が成す圏を $\mathbf{GrpSch}(S)$ と書く．

group object と homomorphisms の定義を展開すれば次のよう．

定義 4.2

- (i) $S :: \text{scheme}$ とする． $G :: \text{scheme over } S$ と次の 3 つの射から成る 4 つ組が **group scheme (over S)** であるとは、任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について $\underline{G}(T)$ の群構造が誘導されるということである．

$$\begin{aligned}\mu : G \times G &\rightarrow G && \text{multiplication} \\ \epsilon : S &\rightarrow G && \text{identity section} \\ \iota : G &\rightarrow G && \text{inverse}\end{aligned}$$

μ は group law と呼ばれる．なお、 $x, y \in \underline{G}(T)$ の積 $x * y \in \underline{G}(T)$ は $\underline{\mu}(\langle x, y \rangle)$ 、すなわち次の射である．

$$x * y : T \xrightarrow{\langle x, y \rangle} G \times G \xrightarrow{\mu} G$$

ここで $\langle x, y \rangle$ は $G \xleftarrow{x} T \xrightarrow{y} G$ から product の普遍性により誘導される射である．単位元は $\epsilon! : T \rightarrow S \xrightarrow{\epsilon} G$ ^{†3}、 $x \in \underline{G}(T)$ の逆元は $\iota(x) = \iota \circ x$ である．

- (ii) group scheme over $S :: G, H$ の間の射 $h : G \rightarrow H$ が **homomorphism** であるとは、任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について $\underline{h}(T) : \underline{G}(T) \rightarrow \underline{H}(T)$ が群準同型であることである．
 (iii) group schemes over S とその間の homomorphisms が成す圏を $\mathbf{GrpSch}(S)$ とする．

4.2 Examples

以下の例では k を適当な体とし、 k 上の affine group scheme を定義する．

例 4.3 (\mathbb{G}_a)

finitely generated k -algebra $:: A = k[x]$ と次の 3 つの k -linear map から、 k 上の group scheme $:: \mathbb{G}_a$ & μ, ϵ, ι が誘導される．

$$\begin{aligned}\tilde{\mu} : A &\rightarrow A \otimes_k A; && x \mapsto (x \otimes 1) + (1 \otimes x) \\ \tilde{\epsilon} : A &\rightarrow k; && x \mapsto 1 \\ \tilde{\iota} : A &\rightarrow A; && x \mapsto -x\end{aligned}$$

群構造を無視すれば $\mathbb{G}_a = \mathbb{A}_k^1$ ．この \mathbb{G}_a は additive group と呼ばれる．

^{†3} この射は $T \rightarrow G \rightarrow S \rightarrow G$ と書いても同じである．

$x_1 = x \otimes 1, x_2 = 1 \otimes x$ とすると, $A \otimes A \cong k[x_1, x_2]$ となる. したがって $f \in A$ について $\tilde{\mu}(f)(x_1, x_2) \in k[x_1, x_2]$ とみなせる. そして $k[x]$ の algebra としての和は $\tilde{\mu}(f)(x_1, x_2) = f(x_1 + x_2)$ のように co-algebra に反映されている. 単位元と逆元は $\tilde{\epsilon}(f)(x) = f(1), \tilde{\iota}(f)(x) = f(-x)$ のように反映されている.

\mathbb{G}_a に備わった群構造は closed point :: $(a, b) \in \mathbb{A}^2$ を $a + b \in \mathbb{A}^1$ に写す. これを確かめておこう. $\mathbb{A}_k^1 \times_k \mathbb{A}_k^1 \cong \mathbb{A}_k^2$ の \bar{k} -rational point :: (a, b) ^{†4} は極大イデアル

$$\mathfrak{p} = (x_1 - a, x_2 - b) = \{f \in k[x_1, x_2] \mid f(a, b) = 0\}$$

に対応する. したがって $\mu(\mathfrak{p}) = \tilde{\mu}^{-1}(\mathfrak{p})$ は次のよう.

$$\tilde{\mu}^{-1}(\mathfrak{p}) = \{g \in A = k[x] \mid \tilde{\mu}(g)(a, b) = g(a + b) = 0\}.$$

これは $a + b$ に対応する極大イデアル $(x - (a + b))$ に他ならない.

例 4.4

finitely generated k -algebra :: $A = k[x, x^{-1}]$ と次の 3 つの k -linear map から, k 上の group scheme :: \mathbb{G}_m & μ, ϵ, ι が誘導される.

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : A &\rightarrow A \otimes_k A; & x &\mapsto (x \otimes 1) \cdot (1 \otimes x) \\ \tilde{\epsilon} : A &\rightarrow k; & x &\mapsto 1 \\ \tilde{\iota} : A &\rightarrow A; & x &\mapsto -x \end{aligned}$$

群構造を無視すれば $\mathbb{G}_m = \mathbb{A}_k^1 - \{0\}$.

こちらも $\tilde{\mu}(f)(x_1, x_2) = f(x_1 x_2)$ の様に積が入っている. $\mu : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m$ が \bar{k} -rational point :: $(a, b) \in \mathbb{A}^2 - \{(a, b) \mid ab = 0\}$ を $ab \in \mathbb{A}^1$ に写すことは \mathbb{G}_a の場合と同様である.

例 4.5

正整数 n に対し finitely generated k -algebra :: $A = k[x_{ij}]_{i,j=1}^n [\det^{-1}]$ とおく. ここで \det は不定元が成す n 次正方形行列 $X = [x_{ij}]_{i,j=1}^n$ の determinant である. A と次の 3 つの k -linear map から, k 上の group scheme :: GL_n & μ, ϵ, ι が誘導される.

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} : A &\rightarrow A \otimes_k A; & X &\mapsto (X \otimes 1) \cdot (1 \otimes X) \\ \tilde{\epsilon} : A &\rightarrow k; & X &\mapsto I \\ \tilde{\iota} : A &\rightarrow A; & X &\mapsto X^{-1} \end{aligned}$$

I は n 次単位行列. ここで $\tilde{\iota} : X \mapsto I$ は $(X$ の (i, j) 成分) \mapsto (I の (i, j) 成分) という意味である. $\tilde{\mu}, \tilde{\iota}$ の定義も同様である.

$X_1 = X \otimes 1 = [x_{ij} \otimes 1]_{i,j=1}^n, X_2 = 1 \otimes X = [1 \otimes x_{ij}]_{i,j=1}^n$ とおけば, $f \in k[x_{ij}]$ について $\tilde{\mu}(f)(X_1, X_2) = f(X_1 X_2)$ となっている. $\mu : GL_n \times GL_n \rightarrow GL_n$ が \bar{k} -rational point :: $(M, N) \in GL_n \times GL_n$ を $MN \in GL_n$ へ写すことは \mathbb{G}_a での議論と同様である. $n = 1$ の時 $GL_n = \mathbb{G}_m$ であることに留意せよ.

3 つの例に現れた準同型 $\tilde{\mu}, \tilde{\epsilon}, \tilde{\iota}$ はそれぞれ co-multiplication, co-unit, co-inversion と呼ばれる. この 3 つの準同型によってそれぞれの k -finitely generated に Hopf algebra ^{†5} の構造が入る. 一般に affine group scheme と Hopf algebra が一対一に対応する ([7] II, Thm5.1).

^{†4} \bar{k} は k の代数閉体. rational point についての注意で触れたとおり, variety の \bar{k} -rational point 全体は closed point 全体と一致するのであった.

^{†5} algebra, co-algebra の構造をもつ finitely generated k -module であって antipode と呼ばれる自己準同型射を備えるもの.

定理 4.6 ([2] Thm3.9)

Any affine group scheme over a field is a linear algebraic group (i.e. subgroup of GL_n for some n).

4.3 Action on Scheme

最後に作用の定義を述べる.

定義 4.7

scheme/ $S :: X$ と, group scheme/ $S :: G$ が与えられたとする. G の X への **(left) action** とは, 次を満たす射 $\alpha : G \times_S X \rightarrow X$ である. すなわち, 任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ について, α は群 $\underline{G}(T)$ から集合 $\underline{X}(T)$ への作用を誘導する.

なお, $g \in \underline{G}(T)$ を $x \in \underline{X}(T)$ に作用させた $g \cdot x \in \underline{X}(T)$ は $\alpha(\langle g, x \rangle)$, すなわち

$$T \xrightarrow{\langle g, x \rangle} G \times_S X \xrightarrow{\alpha} X$$

である. ここで $\langle g, x \rangle$ は $G \xleftarrow{g} T \xrightarrow{x} X$ から product の普遍性により誘導される射である.

action :: $G \times X \rightarrow X$ のことを $G \curvearrowright X$ と表す. $g \in G$ を $x \in X$ に作用させたものをしばしば $g \cdot x$ と書く. $Gx := \alpha(G \times \{x\})$ と置き, これを点 x の **orbit** と呼ぶ.

5 Categorical/Good/Geometric/Affine GIT Quotients

以下, scheme :: S , scheme/ $S :: X$, group scheme/ $S :: G$, action :: $\alpha : G \curvearrowright X$ が与えられているとする.

5.1 Categorical Quotient

圏論的立場から「scheme の group scheme による quotient」と呼べる scheme は, categorical quotient であろう.

定義 5.1 (i) scheme の射 $q : X \rightarrow Y$ は, $q \circ \alpha = q \circ \text{pr}_X : G \times X \rightarrow Y$ であるとき, **G -invariant morphism** と呼ばれる. この条件は次のように翻訳できる: 任意の $T \in \mathbf{Sch}/S$ と任意の $g \in \underline{G}(T), x \in \underline{X}(T)$ について,

$$\underline{q}(\alpha \circ \langle g, x \rangle) = \underline{q}(g \cdot x) = \underline{q}(x) = \underline{q}(\text{pr}_X \circ \langle g, x \rangle).$$

(ii) scheme の射 $q : X \rightarrow Y$ は, q が $\alpha, \text{pr}_X : G \times X \rightrightarrows X$ の coequalizer であるとき, X の G による **categorical quotient** と呼ばれる. 言い換えれば, X からの G -invariant morphism として普遍的なものが q である.

すぐに分かる通り, この定義は \mathbf{Sch} を「finite product を持つ category」に書き換えても良い. この意味で, categorical quotient は最も普遍的な「群作用での商」を定義していると言える.

注意 5.2

categorical quotient は普遍性を持つものと定義されていることから分かる通り, 同型を除いて高々一つしか

無い。存在するかどうかは分からない。

さて, categorical quotient は確かに「商らしい」が, 幾何学的にも「商らしい」と言えるとは限らない。

例 5.3

$\mathbb{P}_k^1, \mathbb{A}_k^1$ の \mathbb{G}_m による群作用の商.

そのために, 他の意味で「商らしい商」もいくつか定義する. どういった意味で「商らしい」かによって定義は異なり, 以後は「商らしい商」が存在するかどうか・構成できるかどうか問題に成る. 後に示すが, 以下の「商らしい商」はいずれも categorical quotient である. なので一つ「商らしい商」が存在すれば, その商はより弱い意味でも「商らしい」ことに注意せよ.

5.2 G -invariant Function

定義 5.4 ([3])

$U :: \text{open in } X$ について, $f \in \mathcal{O}_X(U)$ は

$$\alpha^\#(f)|_{G \times_S U} = \text{pr}_X^\#(f) \in \mathcal{O}_{G \times_S X}(G \times_S U)$$

が成り立つとき **G -invariant function** と呼ばれる. ここで, $\alpha^{-1}(U) \supseteq G \times_S U = \text{pr}_X^{-1}(U)$ であるために左辺に restriction が必要であることに注意.

主張 5.5

G -invariant function を集めてできる \mathcal{O}_X の sub-presheaf $:: \mathcal{O}_X^G$ は, sheaf である.

(証明). sub-presheaf であることは明らか. また \mathcal{O}_X^G が identity axiom を満たすことは sub-presheaf であることから従う. なので gluing axiom を満たすことを示そう.

$U :: \text{open in } X$ をとり, $U = \bigcup_i U_i$ をその open cover とする. section 達 $t_i \in (\mathcal{O}_X^G)(U_i)$ が次を満たすでしょう.

$$\forall i, j, \quad t_i|_{U_i \cap U_j} = t_j|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j). \quad (@)$$

この時, $t|_{U_i} = t_i$ を満たす $t \in \mathcal{O}_X(U)$ が存在する. $t \in \mathcal{O}_X^G(U)$ を示したい. $V_i = \text{pr}_X^{-1}(U_i) = G \times U_i$ とおく. 上の条件 (@) で $t|_{U_i} = t_i$ と, sheaf morphism が restriction map と可換であることを用いる.

$$\forall i, j, \quad \alpha^\#(t)|_{V_i \cap V_j} = \alpha^\#(t|_{U_i \cap U_j})|_{V_i \cap V_j} = \text{pr}_X^\#(t|_{U_i \cap U_j}) = \text{pr}_X^\#(t)|_{V_i \cap V_j} \in \mathcal{O}_{G \times X}(V_i \cap V_j).$$

$\mathcal{O}_{G \times X}$ は sheaf だから, identity axiom を満たす. よって $\alpha^\#(t) = \text{pr}_X^\#(t)$, すなわち $t \in \mathcal{O}_X^G(U)$. ■

注意 5.6

affine scheme $:: X := \text{Spec } A$ の structure sheaf の元は, morphism $:: U \rightarrow \mathbb{A}_{\text{Quot}(A)}^1 \in \mathcal{O}_X(U)$ とみなすことが出来る. そこで G -invariant functions $:: (\mathcal{O}_X(U))^G$ を $\mathcal{O}_X(U)$ に属す G -invariant morphism の全体と定めることも出来る.

5.3 Good and Geometric Quotient.

定義 5.7 ([2])

scheme morphism $:: q : X \rightarrow Y$ が X の G による **good quotient** であるとは, 以下の条件が満たされると

いうこと.

- (i) $q :: G$ -invariant.
- (ii) $q ::$ surjective.
- (iii) $q ::$ affine morphism ^{†6}.
- (iv) $(q_* \mathcal{O}_X)^G \cong \mathcal{O}_Y$.
- (v) $W :: G$ -invariant closed subset of X について, $q(W) ::$ closed subset of Y .
- (vi) $W_1, W_2 ::$ disjoint G -invariant closed subsets of X について, $q(W_1), q(W_2) ::$ disjoint closed subsets of Y .

$q ::$ surjective と $q ::$ affine の 2 条件は, GIT [10] でなく [11] で導入された. 実際, 次の命題はこの 2 条件がなくとも成立する. しかし surjectivity は quotient を family として利用するために望ましい性質である. (affineness についてはよくわからない. しかし我々が扱う範囲で成立する.)

命題 5.8

good quotient is categorical quotient also.

定義 5.9 ([2])

good quotient $:: q : X \rightarrow Y$ が各点 $y \in Y$ について $q^{-1}(y)$ がただひとつの orbit からなる時, q は X の G による **categorical quotient** と呼ばれる.

5.4 Affine GIT Quotient

field $:: k$ affine scheme/ $k :: X$, affine group scheme/ $k :: G$, action $:: \alpha : G \curvearrowright X$ が与えられているとする. この場合には, 直接構成できる quotient scheme がある. それが GIT(Geometric Invariant Theory) quotient である. Mumford が構成した.

最初に, affine \curvearrowright affine の場合の作用について述べておこう. $\alpha : G \curvearrowright X$ に対応する環準同型を $\tilde{\alpha} : k[X] \rightarrow k[X] \otimes_k k[G]$ とする. 一方, $\text{pr}_X : G \times X \rightarrow X$ に対応する環準同型は

$$\begin{aligned} k[X] &\rightarrow k[X] \otimes_k k[G] \\ x &\mapsto x \otimes_k 1 \end{aligned}$$

である. したがって $\mathcal{O}_X^G (\subseteq \mathcal{O}_X)$ の global section は次のように成る.

$$k[X]^G := \{f \in k[X] \mid \tilde{\alpha}(f) = f \otimes 1\} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

定義 5.10

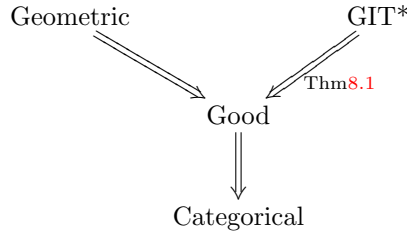
$X // G := \text{Spec } k[X]^G$ を G による X の affine GIT quotient と呼ぶ.

$X // G$ という記号は, affine GIT quotient は必ずしも (affine) geometric quotient でない, ということを意味している (例 5.3). しかしどちらも categorical quotient であるから, 両方共存在するならばそれらは同型を除いて一致する.

^{†6} すなわち, Y の任意の affine open subscheme の q による逆像が affine.

affine GIT quotient を張り合わせていくことで, projective GIT quotient が構成される. [1] chapter 6 を参照せよ.

5.5 Relations of Quotients.



6 Linear Reductivity.

引き続き, **field** $:: k$ **affine scheme** $/k :: X$, **affine group scheme** $/k :: G$, **action** $:: \alpha : G \curvearrowright X$ が与えられているとする. まず現状の確認をしよう. 我々は affine GIT quotient を定義した. affine GIT quotient は不変式環で与えられるため, 多くの場合で具体的に計算することが出来る. しかしこれが categorical/good/geometric quotient であるかどうかはまだ我々には分からない.

我々は group scheme $:: G$ が “linearly reductive” という性質を備えている場合に G による affine scheme の affine GIT quotient が categorical/good/geometric quotient であることを示す. (実はより弱い “reductive” で十分なのだが, これを定義するだけでも骨が折れるので, このノートでは扱わない,) このセクションでは “linearly reductive” を定義し, 調べていく.

6.1 Linear Representation

group scheme の linear representation として最も一般的なものは次のものである.

定義 6.1 ([8] 4,a)

$V ::$ vector space over k に対し, k 代数の圏から群の圏への関手 \mathcal{GL}_V を

$$R \mapsto \text{Aut}_R(V \otimes_k R)$$

で定める. G の V への linear representation とは, (群の圏への関手の) 準同型 $\rho : G \rightarrow \mathcal{GL}_V$ のことである.

注意 6.2

V が有限次元である場合には \mathcal{GL}_V は affine group scheme $:: GL_{\dim V}$ で表現できる. また, この時 ρ は homomorphism of group scheme である.

注意 6.3

直前の注意で述べたことを使って有限次元 k -vector space $:: V$ への G の表現が [1] での定義と一致することを確かめよう.

$n = \dim V$ とする. 直前の注意から, G の V への表現は group scheme homomorphism $:: h : G \rightarrow GL_n$ である. 対応する環準同型を $\tilde{h} : k[X, (\det X)^{-1}] \rightarrow k[G]$ としよう. ここで X は不定元からなる行列 $\begin{bmatrix} x_{ij} \end{bmatrix}_{i,j=1}^n$

である。(group scheme の例にある GL_n の定義も参照せよ.) $\tilde{X} := \tilde{h}(X)$ において, $\bar{h} : V \rightarrow V \otimes_k k[G]$ を次で定める.

$$v \mapsto (v \otimes 1)(1 \otimes \tilde{X}).$$

逆に $\mu : V \rightarrow V \otimes_k k[G]$ が与えられているとして $h : G \rightarrow GL_n$ を構成する. これには \bar{h} から \tilde{X} の情報を取り出せば良い. V の基底を $\{e_k\}_{k=1}^n$ とし, その双対基底を $\{e^k\}$ とする. また $\iota : k \otimes k[G] \mapsto k[G]$ を標準的同型とする. 以上の準備の下で \tilde{X} の (i, j) 成分 \tilde{x}_{ij} は次の様に取り出せる.

$$e_i \xrightarrow{\bar{h}} \sum_{k=1}^n e_k \otimes \tilde{x}_{ij} \xrightarrow{e^j \otimes \text{id}} 1 \otimes \tilde{x}_{ij} \xrightarrow{\iota} \tilde{x}_{ij}$$

こうして取り出した \tilde{X} から再び μ を構成できることは明らか.

7 Affine GIT Quotient of Variety is Variety Again

8 Affine GIT Quotient is a Good Quotient

定理 8.1 ([2] Thm4.30)

Affine GIT Quotient is Good Quotient.

参考文献

- [1] 向井茂 (2008) 『モジュライ理論 I』 岩波書店
- [2] Victoria Hoskins (2016) “Moduli Problems and Geometric Invariant Theory” https://userpage.fu-berlin.de/hoskins/M15_Lecture_notes.pdf
- [3] Gerard van der Geer, Ben Moonen “Abelian Varieties” <https://www.math.ru.nl/~bmoonen/research.html> (Preliminary Version. 2017/12/31 参照)
- [4] Robin Hartshorne(1977) “Algebraic Geometry” Springer
- [5] Robin Hartshorne “Deformation Theory” Springer
- [6] David Eisenbud(1999) “Commutative Algebra: with a View Toward Algebraic Geometry” Springer
- [7] J. Milne, “The basic theory of affine group schemes”, <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/AGS.pdf>
- [8] J. Milne, “Algebraic Groups”, <http://www.jmilne.org/math/CourseNotes/iAG200.pdf>
- [9] J. Harris, I. Morrison “Moduli of Curves”
- [10] D. Mumford, J. Forgyarty “Geometric Invariant Theory”
- [11] C.S. Seshadri (1972) “Quotient spaces modulo reductive algebraic groups”