ゼミノート #3
Sheaves on a Site, continued.

七条彰紀

2018 年 10 月 31 日

1 Propositions : Sheaves.

定理 1.1
$\mathbf{C}$ :: site とする．忘却関手

$$Fgt\colon \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C}).$$

は left adjoint functor :: *Shff* を持つ．

注意 1.2
以下で述べる *Shff* の構成は “plus construction” と呼ばれる．少し異なる方法が [4] で述べられているし，Kay Werndli “Sheaves From Scratch” §3.5 では etale bundle という物を用いた構成をしている．

証明のために幾つか定義しておく．

定義 1.3 ([5], Tag 00W1)
$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ と，$U \in \mathbf{C}$ の cover :: $\mathcal{U} = \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対し，

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{equalizer of } \left[\ \prod_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{(i,j)\in I\times I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j)\ \right]$$

ここで二つの並行射はそれぞれ $\mathrm{res}^{U_i\times U_j}_{U_i}, \mathrm{res}^{U_i\times U_j}_{U_j}$ である．すなわち，ここにある並行射は sheaf の定義にあるものである．この diagram は圏 $\mathbf{Sets}$ の中のものなので，**index :: I が集合ならば**この equalizer は常に存在する．

直ちに分かるとおり，$\mathrm{Cov}(U)$ は細分を射として圏を成し，$H^0(-, \mathcal{F})$ は圏 $\mathrm{Cov}(U)$ から $\mathbf{Sets}$ への反変関手である．$\mathcal{F}^+$ は

$$\mathcal{F}^+(U) = \mathrm{colim}_{\mathcal{U}\in\mathrm{Cov}(U)} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathrm{colim}(\mathrm{Cov}(U) \to^{H^0(-,\mathcal{F})} \mathbf{Sets}).$$

と定義される．

$H^0(\{\mathrm{id}_U\colon U \to U\}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(U)$ であり，しかも任意の cover of U は id_U の細分であるから，U 毎に標準

的な射 $\theta\colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}(U) \arrow[rr, dashed, "\theta"] \arrow[d] \arrow[rrd, bend left] & & \mathcal{F}^+(U) \\
\mathcal{F}(U) \quad \in & \Big\{ H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[rr] \arrow[rru, bend right] & & H^0(\mathcal{U}',\mathcal{F}) \Big\}_{\mathcal{U},\mathcal{U}'} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

定義 1.4

presheaf :: $\mathcal{P} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ は以下を満たす時 separated であるという．

$$^\forall U \in \mathbf{C},\ \ ^\forall\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U),\ \ \mathcal{P}(U) \to \prod_{i\in I}\mathcal{P}(U_i) :: \text{inj.}$$

補題 1.5 (A)

site :: $\mathbf{C}$, presheaf :: $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ を考える．さらに $U \in \mathbf{C}$ をとる．任意の $s \in \mathcal{F}^+(U)$ に対して以下が成り立つ．

$$^\forall s \in \mathcal{F}^+(U),\ \ ^\exists\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U),\ \ ^\forall i,\ \ ^\exists\tilde{s}_i \in \mathcal{F}(U_i),\ \ \theta(\tilde{s}_i|_{U_i}) = s|_{U_i}$$

(証明)．

$^\forall s \in \mathcal{F}^+(U)$, $^\exists\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$,

$$\begin{tikzcd}
\forall s \arrow[r, "\mathrm{res}_U^{U_0}"] & s|_{U_0} \\
\exists(\tilde{s}_U)_{U\in\mathcal{U}} \arrow[u] \arrow[r, "\prod \mathrm{res}_U^{U\times U_0}"] \arrow[rd, bend right, "\mathrm{pr}_{U_0}"'] & (\tilde{s}_U|_{U\times U_0})_{U\in\mathcal{U}} \arrow[u] \\
 & \tilde{s}_{U_0} \arrow[u, "\prod \mathrm{res}_{U_0}^{U\times U_0}"] \arrow[uu, bend right=60, "\theta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{F}^+(U) \arrow[r] & \mathcal{F}^+(U_0) \\
H^0(\mathcal{U},\mathcal{F}) \arrow[u] \arrow[r] \arrow[rd, bend right] & H^0(\mathcal{U}\times U_0,\mathcal{F}) \arrow[u] \\
 & \mathcal{F}(U_0) \arrow[u] \arrow[uu, bend right=60, "\theta"']
\end{tikzcd}$$

$(\tilde{s}_U)_{U\in\mathcal{U}}$ から $(\tilde{s}_U|_{U\times U_0})_{U\in\mathcal{U}}$ への 2 本の射が一致するのは，$H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ の定義から従う

$$\tilde{s}_U|_{U\times U_0} = \tilde{s}_{U_0}|_{U\times U_0}$$

が理由である． ∎

補題 1.6 (B)

site :: $\mathbf{C}$, presheaf :: $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ を考える．さらに $U \in \mathbf{C}$ をとる．$s, s' \in \mathcal{F}^+(U)$ が一致するとは，次が成立するということである．

$$^\exists\{U_i \to U\}_i \in \mathrm{Cov}(U),\ \ ^\forall i,\ \ ^\exists\tilde{s}_i, \tilde{s}'_i \in \mathcal{F}(U_i),\ \ \theta(\tilde{s}_i) = s|_{U_i} \text{ and } \theta(\tilde{s}'_i) = s'|_{U_i} \text{ and } \underline{\theta(\tilde{s}_i) = \theta(\tilde{s}'_i) \text{ in } \mathcal{F}(U_i)}.$$

(証明)．下線部以外は前の補題により成り立つことに注意．下線部が成り立つ時，以下の図式から，各 i について

$$(\tilde{s}_i|_V)_{V\in\mathcal{V}_i} = (\tilde{s}'_i|_V)_{V\in\mathcal{V}_i}$$

となる $\mathcal{V}_i \in \mathrm{Cov}(U_i)$ が存在し，これらは同じ $s|_{U_i} = s'|_{U_i} \in \mathcal{F}^+(U_i)$ に写る．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[rd, "\prod_{V\in\mathcal{V}} \mathrm{res}_U^V"'] & & \mathcal{F}^+(U) \\
 & \Big\{H^0(\mathcal{V},\mathcal{F})\Big\} \arrow[ru] &
\end{tikzcd}$$

そこで $\mathcal{V}_i$ と $\mathcal{U}$ を合わせて

$$\bar{\mathcal{U}} = \{V \to U_i \to U \mid V \in \mathcal{V}_i\}$$

とすれば，$\prod_i(\tilde{s}_i|_V), (=) \prod_i(\tilde{s}'_i|_V) \in H^0(\bar{\mathcal{U}}, \mathcal{F})$ が得られる．これらの $\mathcal{F}^+(U)$ での像がそれぞれ s, s' となるから，$s = s'$. ∎

補題 1.7

site :: $\mathbf{C}$, presheaf :: $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について以下が成り立つ．

(a) $\mathcal{F}^+$ :: separated.

(b) $\mathcal{F}^+$ :: sheaf if $\mathcal{F}$ :: separated.

(c) $\theta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ :: iso if $\mathcal{F}$ :: sheaf.

(d) $\theta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ :: universal,

(証明).

■$\mathcal{F}^+$ :: separated.　$U \in \mathbf{C}$ をとり，$s, s' \in \mathcal{F}^+(U)$ をとる．ある cover of U :: $\{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ について

$$^\forall i \in I, \quad s|_{U_i} = s'|_{U_i}$$

が成り立つと仮定して $s = s'$ を示す．

今，$s|_{U_i} = s'|_{U_i} \in \mathcal{F}^+(U_i)$ なので，補題 A より，cover of U_i :: $\mathcal{U}_i = \{U_{i,j} \to U_i\}_{j \in J_i} \in \mathrm{Cov}(U_i)$ が存在し，

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}) = s|_{U_{i,j}} = s'|_{U_{i,j}} = \theta(\tilde{s}'_{i,j})$$

を満たす $(\tilde{s}_{i,j})_j, (\tilde{s}'_{i,j})_j \in H^0(\mathcal{U}_i, \mathcal{F})$ が存在する．よって補題 B から $s = s'$.

■$\mathcal{F}^+$ :: sheaf if $\mathcal{F}$ :: separated.　$\mathcal{F}$ :: separated 故に $\mathcal{F}(U) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ :: inj なので θ :: inj.

cover of U :: $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ と，以下を満たす元 $(s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}^+(U_i)$ をとる:

$$^\forall i, i' \in I, \quad s_i|_{U_i \times U_{i'}} = s_{i'}|_{U_i \times U_{i'}} \tag{$*$}$$

すると補題 A より，

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}) = s_i|_{U_{i,j}}$$

となる $\{U_{i,j} \to U_i\} \in \mathrm{Cov}(U_i)$ と $\tilde{s}_{i,j} \in \mathcal{F}(U_{i,j})$ がとれる．各被覆の包含関係は以下の通り．

$$\begin{tikzcd}
U_{i,j} \times_U U_{i',j'} \arrow[r] \arrow[dr] & U_{i,j} \arrow[r] & U_i \arrow[r] & U \\
& U_i \times_U U_j \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$(*)$ から，

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}|_{U_{i,j} \times U_{i',j'}}) = s_i|_{U_{i,j} \times U_{i',j'}} = s_{i'}|_{U_{i,j} \times U_{i',j'}} = \theta(\tilde{s}_{i',j'}|_{U_{i,j} \times U_{i',j'}}).$$

θ :: inj より，$\tilde{s}_{i,j}|_{U_{i,j} \times U_{i',j'}} = \tilde{s}_{i',j'}|_{U_{i,j} \times U_{i',j'}}$．したがって $(\tilde{s}_{i,j}) \in H^0(\{U_{i,j} \to U\}, \mathcal{F})$ であり，ここから $s \in \mathcal{F}^+(U)$ が得られる．最後に，各 i について

$$^\forall j, \quad \theta(s_{i,j}) = s|_{U_{i,j}} = (s|_{U_i})|_{U_{i,j}} = s_i|_{U_{i,j}}$$

なので，$\mathcal{F}$ :: separated より，$s|_{U_i} = s_i$.

■$\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ :: iso if $\mathcal{F}$ :: sheaf. $\mathcal{F}$ :: sheaf であるとき，定義から任意の $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ について $H^0(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(U)$．なので θ :: iso.

■$\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ :: universal. $\mathit{Shff}(-) = ((-)^+)^+$ とすると，これが sheafification functor となる．その UMP を見よう．$\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C}), \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ とする．$\theta\colon \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \to \mathit{Shff}$ の naturality から，次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathit{Shff}\,\mathcal{F} \arrow[d] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "\sim"] & \mathit{Shff}\,\mathcal{G} \end{tikzcd}$$

$\theta_{\mathcal{G}}\colon \mathcal{G} \to \mathit{Shff}\,\mathcal{G}$ :: iso だから，$\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ から $\mathit{Shff}\,\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が得られた．次に，以下で示す可換図式 (1) が与えられたとしよう．全体を Shff で写し，$\mathit{Shff}|_{\mathbf{Sh}(X)} \cong \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$ を用いて可換図式 (2) が得られる．

$$(1)\ \begin{tikzcd} \mathit{Shff}\,\mathcal{F} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{G} \\ \mathcal{F} \arrow[u, "\alpha_{\mathcal{F}}"] \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd} \qquad (2)\ \begin{tikzcd} \mathit{Shff}\,\mathcal{F} \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & \mathcal{G} \\ \mathit{Shff}\,\mathcal{F} \arrow[u, equal] \arrow[ur, "\mathit{Shff}\,\phi"'] & \end{tikzcd}$$

したがって $f = g$．以上で existence & uniqueness が示せた． ∎

proof of Thm(1.1). 私のノート[†1] の Ex1.12 で θ の UMP(universal map property, [1]) から left adjointness を証明している． ∎

命題 1.8
topos has small limits and small cocomplete.

(証明)．前半は small product と equalizer を構成すればよい．後半は $\mathit{Shff}\colon \mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathbf{Cat}C)$ が left adjoint functor 故に colimit と交換することを用いれば良い． ∎

以下の 2 つはセミナー内で将来証明を扱う．

定理 1.9 ([4] 4.1.2)
$X \to Y$ :: morphism of schemes とする．representable sheaf :: $\underline{X}$ は $\mathrm{Fppf}(Y)$ 上の sheaf である．したがって fppf topology より荒い位相を持つ site，特に big etale site :: $\mathrm{ET}(Y)$ でも sheaf である．

命題 1.10
任意の presheaf は colimit of representable sheaves として表現できる

(証明)．証明は（各点）左 Kan 拡張を用いて，

$$\mathcal{P} = y^\dagger y(\mathcal{P}) = \mathrm{colim}(y{\downarrow}\mathcal{P} \to^{\pi_1} \mathbf{C} \to^{y} \mathbf{PSh}(\mathbf{C})).$$

ここで $y\colon \mathbf{C} \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ は米田埋め込みである．（[1] Prop8.10 でも同じ命題が証明されている.） ∎

以下はセミナー内でこれ以上現れないが，Topos theory の重要な定理である．

[†1] [2] ch.I sec.1 の演習問題への解答: https://github.com/ShitijjyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section1_ex.pdf

定理 1.11 (Giraud's theorem)
category :: $\mathbf{T}$ について，$\mathbf{T}$ が topos であることと $\mathbf{T}$ が以下のような圏であることは同値．

(G1) a locally small category with a small generating set,
(G2) with all finite limits,
(G3) with all small coproducts, which are disjoint, and pullback-stable,
(G4) where all congruences have effective quotient objects, which are also pullback-stable.

2 Definitions : Points and Stalks.

以下は small/big etale site のみで使われるものである．

定義 2.1 (Geometric Point, Etale Neighborhood, [4] 1.3.15.)

(i) X :: scheme に対し，k :: separabely closed field を用いて $\bar{x}\colon \operatorname{Spec} k \to X$ と表される射を geometric point と呼ぶ．

(ii) geometric point :: $\bar{x}\colon \operatorname{Spec} k \to X$ について，$\bar{x}$ の etale neighborhood とは $U \to X$ が etale であるような以下の可換図式のことである．

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[ur] \arrow[r, "\bar{x}"'] & X \end{tikzcd}$$

(iii) geometric point :: $\bar{x}\colon \operatorname{Spec} k \to X$ について，$\bar{x}$ の 2 つの etale neighborhood :: U_1, U_2 を考える．この時，U_1 と U_2 の間の射とは，以下の図式を可換にする morphism of schemes :: $\eta\colon U_1 \to U_2$ のことである．

$$\begin{tikzcd} & U_1 \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr] & U_2 \arrow[d] \\ \operatorname{Spec} k \arrow[ur] \arrow[urr] \arrow[rr] & & X \end{tikzcd}$$

注意 2.2
geometric point の定義に separabely closed field でなく algebraically closed field を用いることもある．

注意 2.3
より一般的な point of site の定義が存在する（[5] Tag 04JU）．これは etale か否かに依らず採用できる．しかしこの一般的な定義は複雑であるし，我々は small/big etale site しか扱わないので，我々は以上の定義のみ用いる．

定義 2.4 (Stalk, [4] 1.3.15.)
X :: scheme, $\mathcal{F} \in \mathrm{Et}(X)$ あるいは $\mathcal{F} \in \mathrm{ET}(X)$ とする．さらに $\bar{x}\colon \operatorname{Spec} k \to X$ :: geometric point とする．$\bar{x}$ に対して $\bar{x}$ の etale neighborhood が成す圏を $I_{\bar{x}}$ とする，

(i) $I_{\bar{x}}$ を用いて stalk of $\mathcal{F}$ at $\bar{x}$ を

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} := \varinjlim_{U \in I_{\bar{x}}} \mathcal{F}(U)$$

と定義する．

(ii) $U \in I_{\bar{x}}$ について，$\mathcal{F}(U)$ から $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ への標準的射がある．この射による $s \in \mathcal{F}(U)$ の像を $s_{\bar{x}}$ と表し，germ of s at $\bar{x}$ と呼ぶ．

3 Definitions : Morphism of Shaves.

定義 3.1 (Injective, Surjective)
（同値な条件を列挙したいので，命題 (5.2, 5.3) を参照せよ．）

定義 3.2 (Representable Morphism.)

定義 3.3 (Algebraic Space.)

4 Examples : Morphism of Shaves.

5 Propositions : Morphism of Shaves.

定義 5.1 (Kernel, Image.)
（$\operatorname{im}\phi$ の categorical な定義は https://www.wikiwand.com/en/Image_(category_theory) 等にもある．）

命題 5.2
site :: $\mathbf{C}$ 上の sheaf of sets :: $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ の間の morphism $\phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ をとる．ϕ について以下の 3 つは同値．

1. ${}^{\forall}U \in \mathbf{C}$,　$\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ :: inj,
2. ${}^{\forall}x$ :: geometric point,　$\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ :: inj,
3. ϕ :: mono.

この同値な条件を満たす射 ϕ は injective であるという．

(証明)．morphism between sheaves on a scheme の場合と全く同じである． ∎

命題 5.3
$\mathbf{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前の命題と同様にとる．ϕ について以下の 4 つは同値．

1. ${}^{\forall}U \in \mathbf{C}$,　${}^{\forall}s \in \mathcal{G}(U)$,　${}^{\exists}\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$,　${}^{\exists}t_i \in \mathcal{F}(U_i)$,　$\phi_{U_i}(t_i) = s|_{U_i}$.
2. ${}^{\forall}x$ :: geometric point,　$\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ :: surj,
3. $\operatorname{im}\phi = \mathcal{G}$,
4. ϕ :: epi.

この同値な条件を満たす射 ϕ は surjective であるという．

(証明)．こちらも，morphism between sheaves on a scheme の場合と全く同じである．二つだけ証明しよう．

■$\operatorname{im}\phi = \mathcal{G} \implies \phi$ :: surj.　仮定 $\operatorname{im}\phi = \mathcal{G}$ は以下の可換図式を意味する．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\forall"'] & & \mathcal{G} \arrow[dl, dashed, "\exists_1"', shift right] \\
& \forall\mathcal{H} \arrow[ur, "\forall"', shift right] &
\end{tikzcd}$$

(TODO)

■ϕ :: surj $\implies \phi$ :: epi.　以下の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\phi"] & \mathcal{G} \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \mathcal{H}
\end{tikzcd}$$

さらに，$\alpha \circ \phi = \beta \circ \phi$ であると仮定する．示したいのは $\alpha = \beta$ である．したがって任意の $U \in \mathbf{C}$ 上の section :: $t \in \mathcal{G}(U)$ について $\alpha_U(t) = \beta_U(t)$ を示せば良い．仮定 ϕ :: surj より，t に対し，以下を満たす $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ と $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ がとれる．

$$\phi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i).$$

ここで $t|_{U_i}$ は射 $\mathcal{G}(U_i \to U) \colon \mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(U_i)$ による t の像である．仮定より，

$$\alpha_{U_i} \circ \phi_{U_i}(s_i) = \alpha_{U_i}(t|_{U_i}) = \beta_{U_i}(t|_{U_i}) = \beta_{U_i} \circ \phi_{U_i}(s_i).$$

したがって $(\alpha_U(t))|_{U_i} = (\beta_U(t))|_{U_i}$ を得る．$\mathcal{H}$ :: sheaf，特に $\mathcal{H}$ :: separated presheaf なので $\alpha_U(t) = \beta_U(t)$. ∎

命題 5.4
$\mathbf{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前の命題と同様にとる．ϕ :: iso(=inj+surj) と ϕ :: epi+mono は同値.

(証明)．inj $\iff$ mono, surj $\iff$ epi は上のとおりなので，これらを単に合わせただけである． ∎

6　Definitions : Morphism of Topoi.

定義を 2 つ再掲する．

定義 6.1
T, T' :: topoi とする．morphism of topoi :: $f \colon T \to T'$ とは，以下の 3 つの射 (2 functor and 1 isomorphism.) からなる．

$$f_* \colon T \to T', \quad f^* \colon T' \to T, \quad \phi \colon \mathrm{Hom}_T(f^*(-), -) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{T'}(-.f_*(-)).$$

定義 6.2
$f \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を functor of sites とする．この時，$F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について

$$f_*F(-) := F(f(-))$$

とおくと，$f_*F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ が得られる．f :: continuous functor ならば，$\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ に対し同様にして $f_*\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ が得られる．

これを用いた別の stalk の定義の仕方がある．

定義 6.3 (Stalk, another definition)
1 点からなる空間には一意に位相が入る．そこで一点空間上の sheaf が成す圏を pt と書く．

(i) point of topos $\mathbf{T}$ とは，morphism of topoi $x\colon pt \to \mathbf{T}$ のことである．
(ii) $\mathcal{F} \in \mathbf{T}$ と point :: $x\colon pt \to \mathbf{T}$ について，$\mathcal{F}_x := x^*\mathcal{F}$ を stalk of $\mathcal{F}$ at x と呼ぶ．
(iii) morphism of sheaves :: $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が isomorphism であることと $x^*f\colon x^*\mathcal{F} \to x^*\mathcal{G}$ が isomorphism であることが同値（特に x^*f :: iso ならば f :: iso）であるとき，$\mathbf{T}$ :: having enough points という．

7 Propositions : Topoi.

命題 7.1
$\mathbf{C}, \mathbf{C}$ :: site とする．$\mathbf{C}, \mathbf{C}'$ は small category であると仮定する．

(i) $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を functor of sites とする．この時，functor :: $f_*\colon \mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ は left adjoint functor を持つ．
(ii) $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を continuous functor とする．この時，functor :: $f_*\colon \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ は left adjoint functor を持つ．

(証明). (ii) は (i) から従う．実際，$f_*\colon \mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ の left adjoint functor を f^p とすると，$f^* = \mathit{Shff}\, f^p$ と置けばこれが $f_*\colon \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ の left adjoint functor となる．証明は Shff :: left adjoint を用いて直接行えば良い．なので (i) のみ示す．

$f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ と $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について，$f_*\mathcal{F}$ は Kan 拡張の言葉（記号は [3] のもの）を用いて $(f^{op})^{-1}\mathcal{F}$ と書ける．ここで $f^{op}\colon \mathbf{C}^{op} \to (\mathbf{C}')^{op}$ は射の反転で得られる関手である．したがって，f_* の左随伴は左 Kan 拡張 $\mathrm{Lan}_{f^{op}}$ である．各点左 Kan 拡張を計算すると，

$$(\mathrm{Lan}_{f^{op}}\mathcal{F})(U) = \operatorname{colim}\left((U{\downarrow}f)^{op} = f^{op}{\downarrow}U \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{C}^{op} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Sets} \right).$$

ここで $U \downarrow f^{op}$ は Comma 圏で，π_1 は射影 $[f(V) \to U] \mapsto V$ である．$f^{op} \downarrow U$ は $\mathbf{C}^{op}$ の部分圏だから，特にこれは small colimit．$\mathbf{Sets}$ :: cocomplete なのでこの colimit は存在する． ∎

系 7.2
f_* は limit と交換し，f^* は colimit と交換する．

注意 7.3
実際に small となる有用な site となると，おそらく殆ど無い．実際，$\mathrm{ET}(X), \mathrm{Et}(X)$ は large である．しかし $\mathrm{Et}(X)$ :: essentially small (i.e. equivalent to small category) なので，適当に $\mathrm{Et}(X)$ の部分圏を取って，その上の category of presheaves が一致するように出来るかも知れない．なお，$\mathbf{Sch}/X$ は essentially small でさえ無い．

しかし，small でないと我々の議論は立ち行かなくなる．なので technical ではあるが，Grothendieck 宇宙の存在を仮定する（宇宙公理を仮定することと同値）などして任意の圏を small とする．

参考文献

[1] Steve Awodey. *Category Theory (Oxford Logic Guides)*. Oxford University Press, U.S.A., 2 edition, 8 2010.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[3] Saunders Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 2nd ed. 1978. softcover reprint of the original 2nd ed. 1978 edition, 2010.

[4] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[5] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.