ゼミノート #10
Topology and Shaves on Algebraic Stacks

七条彰紀

2019 年 8 月 21 日

目次

ここまでで artin stack が定義できたが，これは scheme で言えば structure sheaf だけ定義したような状態である．artin stack の Zariski 位相空間と，（Grothendieck topology 上の）sheaf を導入する．

1 Points of Artin Stack

いずれも [3] Tag 04XE, [2] section 5. を参照せよ．

定義 1.1 ([2] section 5)
体の Spec からの射 $x_1\colon \operatorname{Spec} k_1 \to \mathcal{X}, x_2\colon \operatorname{Spec} k_2 \to \mathcal{X}$ について $x_1 \sim x_2$ であるとは，ある k_{12} :: field と以下の 2-可換図式が存在すること．

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} k_{12} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k_1 \arrow[d, "x_1"] \\ \operatorname{Spec} k_2 \arrow[r, "x_2"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

命題 1.2 ([3] 04XF)
ここで定義した $\sim$ は同値関係である．

(証明). $\sim$ は反射律，対称律を満たすことは自明なので，推移律の成立を示す．

体から $\mathcal{X}$ への 3 つの射 :: x_1, x_2, x_3 を考える．これらが $x_1 \sim x_2, x_2 \sim x_3$ を同時に満たすとは，体 k_{12}, k_{23} と次の 2-可換図式が存在するということである．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k_{12} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k_2 \arrow[d, "x_2"] & \operatorname{Spec} k_{23} \arrow[l] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k_1 \arrow[r, "x_1"'] & \mathcal{X} & \operatorname{Spec} k_3 \arrow[l, "x_3"]
\end{tikzcd}$$

この時，k_{12}, k_{23} の合成体（すなわち最小の共通の拡大体）を k_{123} とする．$k_{12} \cap k_{23}$ は k_{123} の部分体として k_2 に一致する（あるいは，一致するように 2 つの準同型 $k_{12}, k_{23} \to k_{123}$ を選ぶ)．すると可換図式は次のように拡張される．

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Spec} k_{123} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\operatorname{Spec} k_{12} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k_2 \arrow[d, "x_2"] & \operatorname{Spec} k_{23} \arrow[l] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec} k_1 \arrow[r, "x_1"'] & \mathcal{X} & \operatorname{Spec} k_3 \arrow[l, "x_3"]
\end{tikzcd}$$

上の新たな四辺形は scheme の図式として可換なので，この artin stack の拡張後の図式も可換. ∎

注意 1.3

以上の定義は scheme の点に対応している．scheme :: X について，体の $Spec$ :: $\operatorname{Spec} k$ から X への射は点 $x \in X$ と体の準同型 :: $\phi\colon \kappa(x) \to k$ に対応する ([1] ch II, Ex2.7, [3] 01J5)．ここで $\kappa(x)$ は residue field である．したがって一点 x に対応する射は $\kappa(x)$ から体への準同型の数だけ有る．これらを全て同値なものとする同値関係を定めたい．

体から X への二つの射

$$x_1\colon \operatorname{Spec} k_1 \to \mathcal{X}, \quad x_2\colon \operatorname{Spec} k_2 \to \mathcal{X}$$

について，以下は同値．

(a) 位相空間の 2 つの写像 $|x_1|, |x_2|$ の像が x である．

(b) すなわち，体 k_{12} と次の可換図式が存在する．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k_{12} \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} k_1 \arrow[d, "x_1"] \\
\operatorname{Spec} k_2 \arrow[r, "x_2"'] & X
\end{tikzcd}$$

(a) $\Longrightarrow$ (b) は明らか．(a) $\Longleftarrow$ (b) は次のように示す．まず k_{12} は合成体 k_1k_2 と置けば良い．すると包含射 $k_1 \hookrightarrow k_{12}, k_2 \hookrightarrow k_{12}$ が存在する．体の準同型は単射しか無いから，x_1, x_2 からそれぞれ得られる $\kappa(x) \to k_1, \kappa(x) \to k_2$ は包含射に取り替えられる．包含関係は推移律を満たすから，以下が可換ということに成る．

$$\begin{tikzcd}
k_{12} & k_1 \arrow[l, hook'] \\
k_2 \arrow[u, hook] & \kappa(x) \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

上で述べた，体から X への射と $\kappa(x)$ から体への射の対応より，これは (b) の可換図式が存在することを意味する．

定義 1.4 ($|\mathcal{X}|, |f|$, [3] 04XG and the below paragraph)
points of $\mathcal{X}$ とは，field の Spec から $\mathcal{X}$ の射の，$\sim$ による同値類のことである．set of points of $\mathcal{X}$ を $|\mathcal{X}|$ と表す．すなわち，

$$|\mathcal{X}| = \{\operatorname{Spec} k \to \mathcal{X} \mid k :: \text{algebraically closed field } \}/\sim .$$

射 $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ について，$|f|$ を次で定義する．

$$\begin{array}{cccc} |f|\colon & |\mathcal{X}| & \to & |\mathcal{Y}| \\ & x & \mapsto & f \circ x \end{array}$$

定義 1.5 ([3] 0EMW)
X :: algebraic space over a scheme S とする．点 $x \in |X|$ の residue field とは，x を代表する monomorphism :: $\operatorname{Spec} k \to X$ が存在するような体 k のことである．

注意 1.6
residue field は常に存在するとは限らない．“descent algebraic space”と呼ばれる重要な種類の algebraic space では，任意の点が residue field をもつ．

補題 1.7
X :: algebraic space over a scheme S とする．点 $x \in |X|$ をとり，

- x を代表する monomorphism :: $\phi\colon \operatorname{Spec} k \to X$ と
- x を代表する任意の射 :: $\psi\colon \operatorname{Spec} l \to X$

をとる．この時 ψ は ϕ を通じて一意に分解する．

(証明). fiber product :: $Y = (\operatorname{Spec} k) \times_{\phi,X,\psi} (\operatorname{Spec} l)$ をとる．ϕ, ψ が同値であるから，Y は空でない．mono は pullback で保たれるから $Y \to \operatorname{Spec} l$ も mono．よって [3] 03DP [†1] から $Y \cong \operatorname{Spec} l$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, tail, "\cong"'] & \operatorname{Spec} k \arrow[d, tail, "\phi"] \\ \operatorname{Spec} l \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$

こうして ψ の ϕ を通じた分解が存在する．ϕ が mono なのでこの分解は一意. ∎

系 1.8
X :: algebraic space over a scheme S とする．点 $x \in |X|$ を代表する monomorphism は高々一つ．

[†1] 証明を簡単にまとめると次のように成る．(1) 可換代数の命題「体から代数への全射準同型 $\phi\colon k \to R$ は同型（特に単射）」に帰着させる．(2) $R \to R \otimes_k R; r \mapsto r \otimes 1$ は，$\tilde{r} \in \phi^{-1}(r)$ について $r \otimes 1 = \tilde{r}(1 \otimes 1)$ なので単射．(3) R は体上の代数なので free，特に faithfully flat k-module.

2 Zariski Topology of Artin Stack

2.1 Atlases of Artin Stacks

下準備として artin stack の atlas について幾つか命題を述べる．最初は読み飛ばして構わない．

補題 2.1
任意の artin stack は atlas by a scheme，すなわち scheme からの smooth surjective 射を持つ．

(証明)．この証明では **“smooth surjective”を “sm.surj.”，“etale surjective”を “et.surj.”と略す．**
artin stack と algebraic space の定義より，

- algebraic space から artin stack への sm.surj. 射 :: $\alpha\colon X \to \mathcal{X}$，
- scheme から algebraic space への et.surj. 射 :: $a\colon U \to X$

が存在する．合成すれば scheme から artin stack への sm.surj. 射 :: $\alpha \circ a\colon U \to \mathcal{X}$ が得られる．

α と a ではそれぞれ “smooth surjective”，“etale surjective”の定義の方法が異なるので，射 $\alpha \circ a$ が sm.surj. であることは調べる必要が有る．scheme からの sm.surj. 射 :: $V \to \mathcal{X}$ をとり，以下の pullback 図式を考える．

$$\begin{array}{ccc} U \times_{\mathcal{X}} V & \longrightarrow & U \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle a} \\ X \times_{\mathcal{X}} V & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ V & \longrightarrow & \mathcal{X} \end{array}$$

この図式から次の 3 つが分かる．

- $V \to \mathcal{X}$ は scheme からの sm. surj. 射，
- $a\colon U \to X$ が sm. surj. なので $U \times V \to X \times V$ も sm. surj.，
- $\alpha\colon X \to \mathcal{X}$ も sm. surj. 射.

artin stack の射の性質の定義（α が sm. surj. であることの定義）から，$U \times V \to X \times V \to V$ は sm. surj.．two pullback lemma も合わせて考えれば，これは $\alpha \circ a$ :: sm. surj. を意味する． ∎

補題 2.2 ([3] tag 04T1)
artin stack :: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ と $\mathcal{Y}$ の atlas :: $V \to \mathcal{Y}$ をとる．morphism of artin stacks :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ に対して，$\mathcal{X}$ の atlas :: $U \to \mathcal{X}$ と atlas の間の射 :: $\bar{f}\colon U \to V$ が存在し，以下が可換図式となる．

$$\begin{array}{ccc} {}^{\exists}U & \xrightarrow{\exists \bar{f}} & {}^{\forall}V \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} & \xrightarrow[\forall f]{} & \mathcal{Y} \end{array}$$

scheme の射の性質 P を，smooth surjective morphism による composition と base change で保たれるも

のとする．[†2] f が性質 P を持つならば $\bar{f}$ も性質 P を持つ．

(証明)．atlas of $\mathcal{X}$ :: $U \to \mathcal{X}$ を適当にとり，次の fiber product をとる．

$$\begin{tikzcd} U \times_{\mathcal{Y}} V \arrow[rr] \arrow[d] & & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & \mathcal{X} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{Y} \end{tikzcd}$$

artin stack の定義から $U \times_{\mathcal{Y}} V$ :: alg. sp. である．また smooth, surjective は stable under base change/composition なので $U \times_{\mathcal{Y}} V \to U \to \mathcal{X}$ は smooth surjective. よって $\bar{V} = U \times_{\mathcal{Y}} V, \bar{f} = \mathrm{pr}\colon U \times_{\mathcal{Y}} V \to V$ と置けばこれらが主張の条件を満たす．また，この証明から最後の段落の主張は明らかである． ∎

2.2 Definitions.

定義 2.3 (Zariski Topology on Points of Scheme/Algebraic Space/Artin Stack)

(i) scheme :: X とする．$|X|$ の (Zariski) open subset とは，ある open subscheme of X :: $i\colon U \to X$ によって $|i|(|U|)$ とかける集合のこと．

(ii) algebraic space :: X とし，A が scheme である atlas :: $a\colon A \to X$ をとる．$U \subseteq |X|$ が (Zariski) open subset であるとは，$|a|^{-1}(U)$ が $|A|$ の open subset であること．

(iii) artin stactk :: $\mathcal{X}$ とし，A が scheme である atlas :: $a\colon A \to \mathcal{X}$ をとる．$U \subseteq |\mathcal{X}|$ が (Zariski) open subset であるとは，$|a|^{-1}(U)$ が $|A|$ の open subset であること．

定義 2.4

P を位相空間の性質 (e.g. irreducible, connected, quasi-compact, ...) とする．artin stack :: $|\mathcal{X}|$ が P であるとは，$|\mathcal{X}|$ が P であるということ．

Q を位相空間の射の性質 (e.g. open, closed, dense, ...) とする．artin stack の射 :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が Q であるとは，$|f|$ が Q であるということ．

補題 2.5

X :: scheme について，$|X|$ は X の台位相空間と一致する．さらに scheme の射 :: $f\colon X \to Y$ について，$|f|$ は X と Y の間の台位相空間の射と一致する．

(証明)．注意 (1.3) より明らか． ∎

補題 2.6

artin stactk :: $\mathcal{X}$ について，$|\mathcal{X}|$ の Zariski topology は atlas に関わらず一意である．

(証明)．scheme から $\mathcal{X}$ への smooth surjective morphism を二つとり，それらの fiber product を作る．

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & U \arrow[d, "u"] \\ V \arrow[r, "v"'] & \mathcal{X} \end{tikzcd}$$

[†2] 例えば $P =$ smooth, surjective, flat, locally finite presentation, universally open. [3] tag 01V4.

artin stack の定義から，W :: scheme. また smooth ならば universally open である ([3] 04XL) から，$W \to U, W \to V$ は continuous, surjective, open. よって集合の間の射 $|W| \to |U|, |W| \to |V|$ も continuous, surjective, open.

なので以上の可換図式をたどれば，任意の $O \subseteq |\mathcal{X}|$ について，$|u|^{-1}(O) \subseteq |U|$ が open であることと $|v|^{-1}(O) \subseteq |V|$ が open であることが同値であると分かる．これは $|\mathcal{X}|$ の Zariski topology は atlas に関わらず一意であることを意味する． ∎

2.3 Propositions

命題 2.7 ([3] 04XL)

(i) artin stack 間の任意の射 $f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ について，$|f| \colon |\mathcal{X}| \to |\mathcal{Y}|$ は continuous.

(ii) algebraic space からの universally open 射 :: $f \colon U \to \mathcal{X}$ に対して，$|f|$ は continuous かつ open.

なお，smooth 射は flat and locally of finite presentation 射であり，したがって universally open である ([3] tag 01VE, 01VF, 01UA).

(証明). (i) は補題 (2.2) を用いれば容易に分かる． ∎

2.3.1 Surjectivity.

補題 2.8
任意の artin stack :: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ について，

$$|\mathcal{Z} \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}| \to |\mathcal{Z}| \times_{|\mathcal{Y}|} |\mathcal{X}|$$

は全射である．

補題 2.9
$f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が全射であることと，$|f| \colon |\mathcal{X}| \to |\mathcal{Y}|$ が全射であることは同値である．

2.3.2 Open sub-stack maps to open subset bijectively.

注意 2.10
artin stack の射にも “open immersion” であるものは存在するのだから，これを用いても open morphism などの概念が定義できる．この流儀での open morphism 等の概念と，我々の points of artin stack :: $|\mathcal{X}|$ を使う流儀での open morphism 等の概念は同値なものである，ということを次の命題 (2.13) で示す．

points of artin stack を使うと，台集合を $|\mathcal{X}|$ とする，通常の意味での位相空間が定義できる．その為，位相空間に関する概念を全て取り扱うことが出来る，というのが我々の流儀のアドバンテージである．

定義 2.11 ([3] 04YM)
artin stack :: $\mathcal{X}$ の open sub-stack とは，$\mathcal{X}$ の **strictly full** sub-category :: $\mathcal{U}$ [†3] で artin stack であるものであってかつ $\mathcal{X}$ への inclusion :: $\mathcal{U} \to \mathcal{X}$ が open immersion であるもの．closed sub-stack も同様である．

[†3] すなわち $\mathcal{U}$ は $\mathcal{X}$ の全ての対象と同型射を含んでいる．

注意 2.12
equivalence of artin stacks :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ があっても，open sub-stack of $\mathcal{X}$ の f による像が strictly full sub-category であるとは限らないことに注意.

命題 2.13 ([3] 06FJ, [2] Cor5.6.1)

(i) $\mathcal{U}$ が open sub-stack of $\mathcal{X}$ ならば $|\mathcal{U}|$ は $|\mathcal{X}|$ の open sub-set.

(ii) open sub-stack of $\mathcal{X}$ の集まりからの対応 $\mathcal{U} \mapsto |\mathcal{U}|$ は一対一.

これらは closed についても同様である.

(証明). (TODO) ∎

2.3.3 Topological Property of $|\mathcal{X}|$.

命題 2.14 ([2] 5.6.1(iii), 5.7.2)
atrin stack :: $\mathcal{X}$ を考える．位相空間 $|\mathcal{X}|$ について次が成り立つ.

(i) $|\mathcal{X}|$ :: quasi-compact.

(ii) $|\mathcal{X}|$ :: sober （すなわち，任意の irreducible component はただ一つの generic point を持つ.）

命題 2.15 ([2] 5.7)
artin stack の quasi-compact 射 :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ について，$|f|(\mathcal{X})$ :: stable under specialization.

3 Sheaves on Algebraic Stacks

3.1 Definitions

artin stack over S :: $\mathcal{X}$ について，scheme からなる big etale site :: $\mathrm{ET}(\mathcal{X}) = (\mathbf{Sch}/\mathcal{X})_{\mathrm{ET}}$ を我々は考える．$\mathrm{ET}(\mathcal{X})$ の sheaf と topos は通常と同様に定義する.

注意 3.1
歴史的には smooth morphism を underlying category にとり etale topology を備え付ける site, lisse-etale site が使われている．これは etale cohomology の点で有利だが，artin stack の射から誘導される functor :: f^*, f^{-1}, f_* などが exact で無いといった不満点が有る．このせいで sheaves on scheme の時のアナロジーも働かなくなる．定義も少々面倒なので，我々は big etale site を使う.

定義 3.2
site :: $\mathcal{S}$ 上の sheaf :: $\mathcal{F}$ について，set of global sections を以下で定める.

$$\Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{F}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sh}(\mathcal{S})}(*, \mathcal{F}).$$

ただし $*$ は category of sheaves of sets :: $\mathbf{Sh}(\mathcal{S})$ の terminal object である.

scheme :: U について，$\Gamma(U, \mathcal{F})$ と $\mathcal{F}(U)$ は異なるものであることに注意せよ.

注意 3.3

category of sheaves of sets の terminal object は，単元集合の constact sheaf である．したがって terminal object として特に単元集合 $\{*\}$ の constant sheaf をとると，$s \in \Gamma(\mathcal{F})$ は

$$\mathcal{S} \ni U \mapsto s_U(*) \in \mathcal{F}(U)$$

という対応を成す．$\mathcal{S}$ は scheme 上の site であれば，$\Gamma(\mathcal{F})$ の元が自然な方法で global section に一対一対応する．

定義 3.4 ([3] 06TU)
$\mathcal{X}$ の structure sheaf :: $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ を次で定める．

$$\mathrm{ET}(\mathcal{X}) \ni U \mapsto \mathcal{O}_U(U).$$

$\mathcal{O}_U$ は scheme :: U の structure sheaf である．

$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ が確かに sheaf であることは [3] 03DT で証明されている．

定義 3.5 ($u^p, {}_pu$ in [3] 00VC, 00XF)
artin stack over a scheme S :: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ の間の射 :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を考える．この f から topos の間の射 :: $\mathcal{X}_{\mathrm{ET}} \to \mathcal{Y}_{\mathrm{ET}}$ が誘導される．

まず sheaf :: $\mathcal{G} \in \mathcal{Y}_{\mathrm{ET}}$ について，

$$(f^{-1}\mathcal{G})(\ (U,u)\ ) = \mathcal{G}(\ (U, f \circ u)\ ) \quad \text{where} \quad (U,u) \in \mathrm{ET}(\mathcal{X})$$

で $f^{-1}\mathcal{G} \in \mathcal{X}_{\mathrm{ET}}$ を定める．同じく，sheaf :: $\mathcal{F} \in \mathcal{X}_{\mathrm{ET}}$ について，

$$(f_*\mathcal{F})(\ (V,v)\ ) = \lim \left(I_{(V,v)}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbf{Sch}/V \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Sets} \right) \quad \text{where} \quad (V,v) \in \mathrm{ET}(\mathcal{Y})$$

で $f_*\mathcal{F} \in \mathcal{Y}_{\mathrm{ET}}$ を定める．

ここで $I_{(V,v)}$ は次の圏である．

Objects: 以下の可換図式を満たす射の組 $(U \to \mathcal{X}, U \to V)$:

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle v} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow[f]{} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Arrows: 射 $(U \to \mathcal{X}, U \to V) \to (U' \to \mathcal{X}, U' \to V)$ は，以下を可換にする射 $U \to U'$ である．

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \big\downarrow & \searrow & \\ U' & \longrightarrow & V \\ \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle v} \\ \mathcal{X} & \xrightarrow[f]{} & \mathcal{Y} \end{array}$$

$(f_*\mathcal{G})(\ (V,v)\ )$ の定義に有る $I_{(V,v)}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbf{Sch}/V$ は

$$(U \to \mathcal{X}, U \to V) \mapsto [U \to V] \in \mathbf{Sch}/V$$

で与えられる．

3.2 Propositions

補題 3.6 ([3] 06NW)
artin stack :: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ と $\mathcal{F} \in \mathrm{ET}(\mathcal{X}), \mathcal{G} \in \mathrm{ET}(\mathcal{Y})$ をとる．任意の射 $f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ について $f^{-1}\mathcal{F}, f_*\mathcal{G}$ は確かに sheaf である．

命題 3.7 ([3] 00XF)
f^{-1} は f_* の left adjoint functor である．

(証明)．$(f\circ) \colon (\mathbf{Sch}/\mathcal{X}) \to (\mathbf{Sch}/\mathcal{Y})$ を $f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ の合成で得られる関手とする．すると関手 f^{-1} は関手 (sheaf) $(\mathbf{Sch}/\mathcal{Y}) \to \mathbf{Sets}$ と $(f\circ)$ の合成としてかける．

これを用いると上の定義は次のように変形できる．

$$(f_*\mathcal{F})(\ (V, v)\ ) = \lim\left(((f\circ) \downarrow (V, v))_{\mathrm{et}}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\pi_1} (\mathbf{Sch}/\mathcal{Y}) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Sets}\right)$$

$((f\circ) \downarrow (V, v))_{\mathrm{et}}^{\mathrm{op}}$ は圏 $(f\circ) \downarrow (V, v)$ の双対圏に etale Grothendieck topology を与えてできる site である．また $\pi_1 \colon [(f\circ)(\ (U, u)\ ) \to (V, v)] \mapsto (U, u)$.

右辺は各点右 Kan 拡張 $(\mathrm{Ran}_{(f\circ)}\mathcal{F})(\ (V, v)\ )$ なので，Kan 拡張の一般論により随伴性が分かる． ∎

命題 3.8 ([3] 06WS)
artin stack over a scheme S :: $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ を考える．射 :: $f \colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ と sheaf :: $\mathcal{F} \in \mathcal{X}_{\mathrm{ET}}$ について，

$$(f_*\mathcal{F})(\ (V, v)\ ) = \Gamma(\mathrm{ET}(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X}), \mathrm{pr}_2^{-1} \mathcal{F}).$$

ただし $\mathrm{pr}_2 \colon V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ は射影である．

(証明)．一般的な次の命題を用いる．証明は省略する．

補題 3.9 (`https://ncatlab.org/nlab/show/limit#limit_of_a_setvalued_functor`)
site :: $\mathcal{S}$ 上の set-value sheaf :: $\mathcal{F}$ を考える．この時，

$$\lim\left(\mathcal{S}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Sets}\right) = \Gamma(\mathcal{S}, \mathcal{F}).$$

今，一つ前の命題と合わせて

$$(f_*\mathcal{F})(\ (V, v)\ ) = \lim\left(((f\circ) \downarrow (V, v))_{\mathrm{et}}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathcal{F}\circ\pi_1} \mathbf{Sets}\right) = \Gamma(((f\circ) \downarrow (V, v))_{\mathrm{et}}, \mathcal{F} \circ \pi_1).$$

なので $((f\circ) \downarrow (V, v))_{\mathrm{et}}^{\mathrm{op}} = \mathrm{ET}(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X})$ と $\mathcal{F} \circ \pi_1 = \mathrm{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$ を確かめれば良い．

■$((f\circ) \downarrow (V, v))_{\mathrm{et}}^{\mathrm{op}} = \mathrm{ET}(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X})$．ET や $^{\mathrm{op}}$ の部分は単に site として必要な部分なので，

$$(f\circ) \downarrow (V, v) = \mathbf{Sch}/(V \times_{y, \mathcal{Y}, f} \mathcal{X})$$

を示せば十分．2-Yoneda embedding を用いて証明する．

対象から見ていく．図式

$$\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ \mathcal{X} & \underset{f}{\longrightarrow} & \mathcal{Y} \end{array}$$

を図式 $(*)$ と呼ぶことにする．圏 $(f\circ) \downarrow (V, v)$ の対象は

- 射 $U \to \mathcal{X} \xrightarrow{f} \mathcal{Y}$ と,
- 図式 $(*)$ を 2-可換にする射 $U \to V$

の組である．一方，$V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ の対象 (U, x, y, α) の対象は 2-Yoneda embedding によって次のように対応する:

- $U \in \mathbf{Sch}/S$ がそのまま scheme :: U に，
- $x \in (\mathbf{Sch}/V)(U)$ が射 $U \to V$ に，
- $y \in \mathcal{X}(U)$ が射 $U \to \mathcal{X}$ に，
- $\alpha\colon v(x) \xrightarrow{\cong} f(y)$ の存在が図式 $(*)$ の 2-可換性に対応する．

射についても見ていく．圏 $(f\circ) \downarrow (V, v)$ の射 $(U \to \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, U \to V) \to (U' \to \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, U' \to V)$ は，以下（の特に U を頂点とする二つの三角形）を 1-可換にする射 $U \to U'$ である．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& U' \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "v"] \\
& \mathcal{X} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

$V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ の対象の射

$$(U \to U', \phi_V\colon x \to x', \phi_{\mathcal{X}}\colon y \to y')$$

は，それぞれ

- $U \to U'$ はそのまま $U \to U'$ に，
- $\phi_V\colon x \to x'$ は U, U', V の可換な三角形に，
- $\phi_{\mathcal{X}}\colon y \to y'$ は U, U', V の可換な三角形に

対応する．これらの射が満たす条件は，二つの三角形の可換性と右下の四角形の 2-可換性とが整合的であることを意味している．

以上より，所望の圏同値が得られた．

■$\mathcal{F} \circ \pi_1 = \mathrm{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$． $\pi_1\colon (f\circ) \downarrow (V, v) \to (\mathbf{Sch}/\mathcal{X}), \mathrm{pr}_2\colon V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ はそれぞれ次のように定義されている．

$$\pi_1\colon [(f\circ)(\ (U, u)\ ) \to (V, v)] \mapsto (U, u\colon U \to \mathcal{X}), \quad \mathrm{pr}_2\colon (U, x, y, \alpha) \mapsto y\colon U \to \mathcal{X}$$

よって $\mathcal{F} \circ \pi_1 = \mathcal{F} \circ \mathrm{pr}_2 = \mathrm{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$．な，$\mathcal{F} \circ \pi_1$ は関手の合成，$\mathrm{pr}_2^{-1} \mathcal{F}$ は関手 pr_2^{-1} による像であるが，結局同じものである． ∎

注意 3.10

lisse-etale site を採用する場合は，f^{-1} は colimit として定義される ([2] section 12.5)．これは [3] 00XF における u_p であるが，f_* と adjoint ではない（$f^{-1} \dashv f_*$ は上で述べた）．

参考文献

[1] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[2] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[3] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. `https://stacks.math.columbia.edu`, 2019.