# ゼミノート #4
# Fibered Categories

七条彰紀

2018 年 11 月 9 日

## 1 Motivation : Fibered Categories

[1]

## 2 Definition : Fibered Categories

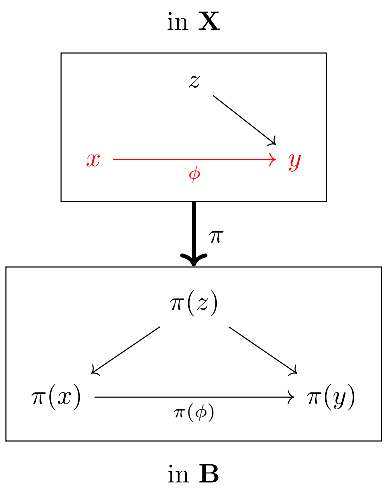
$\mathbf{X}, \mathbf{B}$ :: category と関手 $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ を考える．

- $\pi$ を projection と呼び，
- $\pi(O) = P$ であるとき $O$ は $P$ の上にある ($O$ is over $P$) という．

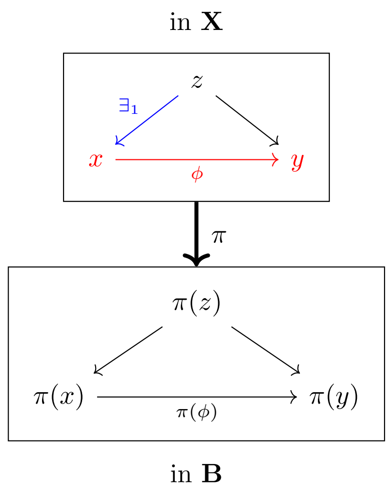
**定義 2.1** (Cartesian Arrow, Lifting Arrow, Base Preserving Natural Transformation)

(i) 以下の性質（Triangle Lifting という）を満たす $\mathbf{X}$ の射 $\phi\colon x \to y$ を cartesian arrow という: (1) にあるような対象と射があるとき，(2) の様に射 $z \to y$ がただ一つ存在し，可換と成る．

(1)




(2)




(ii) 次の性質 (Arrow Lifting という) をもつ $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ を fibered category という: $y \in \mathbf{X}, u \to \pi(y) \in \mathbf{B}$

が存在する時，$x \in \mathbf{X}$ と cartesian arrow :: $x \to y \in \mathbf{X}$ が存在し，以下の図式を満たす[†1].

$$\begin{tikzcd} \text{in } \mathbf{X} & x \arrow[r, "\text{cart.}"] \arrow[d, phantom, "\Big\downarrow \pi"] & y \\ \text{in } \mathbf{B} & u \arrow[r] & v \end{tikzcd}$$

(iii) 二つの fibered category :: $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}, \pi'\colon \mathbf{X}' \to \mathbf{B}$ について，$\mathbf{X}$ と $\mathbf{X}'$ の間の射とは，functor :: $g\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ であって，$\pi, \pi'$ と整合的[†2]であり，cartesian arrow を cartesian arrow に写すもの.

(iv) 二つの fibered category :: $\pi\colon \mathbf{X} \to \mathbf{B}, \pi'\colon \mathbf{X}' \to \mathbf{B}$ の間の 2 つの射 $g, g'\colon \mathbf{X} \to \mathbf{X}'$ と natural transformation :: $\alpha\colon g \to g'$ を考える.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{X} \arrow[d, bend right, "g"'] \arrow[d, bend left, "g'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\alpha}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, "\pi"] & \\ \mathbf{X}' \arrow[r, "\pi'"'] & \mathbf{B} \end{tikzcd}$$

任意の $x \in \mathbf{X}$ について，$\pi'(\alpha_x)\colon \pi'(g(x)) \to \pi'(g'(x))$ が恒等射になるとき，$\alpha$ を base-preserving natural transformation という.

**注意 2.2**
ここで定義した性質を階層別にまとめると次のように成る.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1-morphism | = | 1-cell, arrow | (i) Cartesian Arrow, (ii) Arrow Lifting |
| 2-morphism | = | 2-cell, functor | (iii) Morphism of Fibered Category |
| 3-morphism | = | 3-cell, natural transformation | (iv) Base-Preserving Natural Transformation |

なお，圏の対象 (object) はしばしば 0-cell，圏の射は 1-cell，等々と呼ばれる.

**注意 2.3**
少し圏論の言葉を整理しておく．通常の圏の対象の iso を 1-iso と呼び $\overset{1}{\cong}$ と書く．この時，階層ごとの iso/equiv は以下のようなものである.

[†1] すなわち，$\pi(x) = u, \pi(x \to y) = u \to \pi(y)$ を満たす.
[†2] すなわち $\pi' \circ g = \pi$ を満たす.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1-iso. | $x \overset{1}{\cong} y$ | $\iff$ | 2 つの 1-morphism $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi\circ\phi = \mathrm{id}_x, \phi\circ\psi = \mathrm{id}_y$. |
| 2-iso. | $x \overset{2}{\cong} y$ | $\iff$ | 2 つの 2-morphism $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi\circ\phi = \mathrm{id}_x, \phi\circ\psi = \mathrm{id}_y$. |
| 2-equiv. | $x \overset{2}{\simeq} y$ | $\iff$ | 2 つの 2-morphism $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi\circ\phi \overset{1}{\cong} \mathrm{id}_x, \phi\circ\psi \overset{1}{\cong} \mathrm{id}_y$. |
| 3-iso. | $x \overset{3}{\cong} y$ | $\iff$ | 2 つの 3-morphism $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi\circ\phi = \mathrm{id}_x, \phi\circ\psi = \mathrm{id}_y$. |
| 3-equiv. | $x \overset{3}{\simeq} y$ | $\iff$ | 2 つの 3-morphism $\phi\colon x \rightleftarrows y\colon \psi$ が存在し，$\psi\circ\phi \overset{2}{\cong} \mathrm{id}_x, \phi\circ\psi \overset{2}{\cong} \mathrm{id}_y$. |

**定義 2.4** (Fibered Category)

(i) fibered category over $\mathbf{B}$ が成す圏を $\mathbf{Fib_B}$ とする.

(ii) $\mathbf{Fib_B}$ の部分圏で，2-morphism(natural transformation) が base-preserving natural transformation に限られる圏を $\mathbf{Fib_B^{bp}}$ と書く.

**注意 2.5**

$\mathbf{Fib_B}, \mathbf{Fib_B^{bp}}$ は 2-category である．2-category は 2-morphism ($\mathbf{Fib_B}$ では natural transformation) に "vertical composition" と "horizontal composition" の二種類の合成が定まる圏である．詳しくはこのノートでは触れない.

**定義 2.6** (Equivalence, HOM)

(i) $\mathbf{Fib_B^{bp}}$ における 2-equivalence を単に equivalence of morphism of fibered categories over $\mathbf{B}$ と呼ぶ.

(ii) $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbf{Fib_B}$ について

$$\mathrm{HOM}_{\mathbf{B}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Fib_B^{bp}}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$$

と略す.

## 3 Examples : Fibered Categories

schemes over a scheme $\mathbf{Sch}/X \to \mathbf{Sch}$

## 4 Propositions : Fibered Categories

2-Yoneda Lemma "a version of the Yoneda lemma for fibered categories," "fully faithfull/equivalence iff fiber locally so"

## 5 Definition : Fiber of Fibered Categories

**定義 5.1** (Fiber)

**注意 5.2**

$B$-rational point 2-Yoneda Lemma

## 6 Proposition : Fiber of Fibered Categories

## 7 Motivation : Category Fibered in Groupoids/Sets

## 8 Definition : Category Fibered in Groupoids/Sets

**定義 8.1** (Groupoid, Category fibered in groupoids/sets)

**定義 8.2** (Category fibered in groupoid (Another Definition))

## 9 Propositions : Category Fibered in Groupoids/Sets

## 参考文献

[1] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.