以下での $(*)$ とは，次のもの:

- integral,
- separated,
- noetherian, and
- regular in codimention one.

また，$(\dagger)$ は次のもの: X :: noetherian scheme, $\mathcal{S}$ :: graded $\mathcal{O}_X$-algebra となっている．また，$d \in \mathbb{Z}, d \geq 0$ について，$\mathcal{S}_d$ :: homogeneous part of $\mathcal{S}$ を $U \mapsto \mathcal{S}(U)_d$．$X, \mathcal{S}$ は次をすべて満たす．

- $\mathcal{S}$ :: quasi-coherent.
- $\mathcal{S} = \bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_d$.
- $\mathcal{S}_0 = \mathcal{O}_X$.
- $\mathcal{S}_1$ :: coherent $\mathcal{O}_X$-module.
- $\mathcal{S}$ :: locally generated by $\mathcal{S}_1$ as $\mathcal{O}_X$-algebra.

Ex7.1　Surjective Mophism between Invertible Sheaves is Isomorphic.

X :: locally ringed space, $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ :: invertible sheaves on X, $f : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ :: surjective mophism，とする．

■Proof 1.　任意の点 $x \in X$ をとり，$A = \mathcal{O}_{X,x}$ とおく．$f_x : \mathcal{L}_x \to \mathcal{M}_x$ は同型写像を合成することで $\phi : A \to A$ :: surjective A-morphism と同一視出来る．ϕ :: surjective より，$\phi(\alpha) = 1 \in A$ となる $\alpha \in A$ がとれる．また ϕ は A-module morphism だから，$\alpha\phi(1) = 1$．そこで $\psi : A \to A$ を $a \mapsto \alpha a$ と定義すれば，これが ϕ の逆写像になる．よって ϕ, f_x は同型．Prop1.1 から，f :: iso.

■Proof 2.　Matsumura, Thm2.4 から分かる．これは NAK (or Nakayama's Lemma) からの帰結である．

注意 Ex7.1.1
$k(x)$ :: residue field と $f_x : \mathcal{L}_x \to \mathcal{M}_x$ をテンソルすると，$f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)}$ :: surjective $k(x)$-module morphism が得られる．よって $\ker(f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)}) = 0$．しかし，ここから NAK をつかって $\ker f_x = 0$ を導くことは出来ない．$k(x)$ が flat $\mathcal{O}_{X,x}$-module でなく，したがって $\ker(f_x \otimes \mathrm{id}_{k(x)})$ と $(\ker f_x) \otimes k(x)$ の間に同型があることが言えないからである．このことは flat $\implies$ torsion-free に気をつければすぐに分かる．同様の議論が f_x :: injective（と $\operatorname{coker} f_x$）の場合に出来ることにも気づくが，このときは $\mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2; 1 \mapsto 3$ という反例がある．

Ex7.2　Two Sets of Global Generators and Corresponding Morphisms.

k :: field, X :: scheme $/k$, $\mathcal{L}$ :: invertible sheaf on X, $S = \{s_0, \ldots, s_m\}, T = \{t_0, \ldots, t_n\}$ :: global generators of $\mathcal{L}$．とする．ここで S, T は同じ線形（部分）空間 $V \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ を張るとする．また $n \leq m, d = \dim_k V$ とする．
S, T からそれぞれ Thm7.1 のように定まる morphism を ϕ_S, ϕ_T とする．ϕ_S が次のように分解できる

ことを示す．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi_T"] \arrow[rrrr, bend right, "\phi_S"'] & \operatorname{im}\phi_T \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^m - L \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}^n \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

ここで π, α はそれぞれ linear projection と automorphism である．

$X \to \mathbb{P}^n$ の morphism を考えることは，$k[y_0, \dots, y_n]$ の元 $y_0, \dots,_n$ の変換を考えることと同じである．これは Thm7.1 の証明を観察すれば分かる．二つの k-linear map は ϕ_S^*, ϕ_T^* はそれぞれ，$y_i \mapsto s_i (i = 0, \dots, n)$，$y_i \mapsto t_i (i = 0, \dots, m)$ で定まっている．したがって問題は，$t_0, \dots, t_m$ を $s_0, \dots, s_n$ へ変換する projection と automorphism をつくる問題，と言い換えられる．

今，次のような $(m+1) \times (n+1)$ 行列 Q が存在する．

$$\begin{bmatrix} s_0 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} t_0 \\ \vdots \\ t_m \end{bmatrix}.$$

S, T が V の生成系であることから $\operatorname{rank} Q = \dim V =: d$．$Q$ は基本行列をいくつもかける（あるいは基本変形を繰り返し行う）ことにより，次の形に分解できる．

$$Q = LP_dR \quad \text{where} \quad L \in PGL(m, k), R \in PGL(n, k)$$

ただし行列 P_r $(r = 1, \dots, n+1)$ は $r \times r$-identity matrix I_r をもちいて $P_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と定義される行列である．（TODO: P_d を P_{n+1} に交換しても問題ない？）L, P_{n+1}, R が誘導する morphism をそれぞれ $\beta, \tilde{\pi}, \alpha$ とすれば，α, β は automorphism であり，$\tilde{\pi}$ は projection である．

$$\mathbb{P}^m \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^m \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^m - L \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{P}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n$$

求める射はこの α と，$\pi = \beta \circ i \circ \tilde{\pi}$ である．また，$L = \mathcal{Z}_p(y_0, \dots, y_n) \subseteq \mathbb{P}^m$ の次元は $m - (n+1)$ である．

Ex7.3　Morphism of $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ can be Decomposed into Common Ones.

$\phi : \mathbb{P}_k^n \to \mathbb{P}_k^m$ を考える．$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ :: invertible sheaves の global generator をそれぞれ $\{x_0, \dots, x_m\}, \{y_0, \dots, y_n\}$ とする．

(a)　$\operatorname{im}\phi = pt$ or $m \geq n$ and $\dim \operatorname{im}\phi = n$.

$s_i = \phi^*(x_i)$ $(i = 0, \dots, m)$ とおくと，$s_0, \dots, s_m$ は $\mathcal{L} := \phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$ の global generator である．$\mathcal{L}$ は $\mathbb{P}^n$ 上の invertible sheaf だから，Cor6.17 より，$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ となる $d \in \mathbb{Z}$ が存在する．Example7.8.3 同様，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ は $|d|$ 次斉次単項式で生成される．

■$m < n \implies \dim \operatorname{im}\phi = 0.$

■$m \geq n \implies \dim \operatorname{im}\phi = n.$

Ex7.4 If X Admits an Ample Invertible Sheaf, then X is Separated.

(a) Assumption of Thm7.6 $\Longrightarrow$ X :: separated.

A :: noetherian ring, X :: scheme of finite type $/A$ とする．$\mathcal{L}$ :: ample invertible sheaf on X が存在したとする．Thm7.6 から，immersion $i : X \to \mathbb{P}^n_A$ $(n > 0)$ が存在する．これは X から $\mathbb{P}^n_A$ の locally closed subscheme への isomorphism である．これに projection $\mathrm{pr} : \mathbb{P}^n_A = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A$ を合成したものは，quasi-projective.

$$X \xrightarrow{\sim} U \hookrightarrow Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A \xrightarrow{\mathrm{pr}} \operatorname{Spec} A$$

Z は $\mathbb{P}^n_A$ の closed subscheme, U は Z の open subscheme である．A, X についての仮定から $\operatorname{Spec} A, X$ :: noetherian scheme がわかる[†1] から，Thm4.9 より，この射 $X \to \operatorname{Spec} A$ は separated.

(b) There is No Ample Invertible Sheaf on / a field k.

k :: field, X :: affine with doubled origin $/k$ とする．より詳細に，X は $X_1 = \operatorname{Spec} k[x_1], X_2 = \operatorname{Spec} k[x_2]$ を $U_1 = X_1 - \{O_1\}, U_2 = X_2 - \{O_2\}$ で貼りあわせたものとする．ただし $O_1 \in X_1, O_2 \in X_2$ は原点である．$X_i, U_i, O_i \quad (i = 1, 2)$ はすべて X の部分集合とみなす．また $U = X_1 \cap X_2 = X - \{O_1, O_2\}$ とする．明らかに $U = U_1 = U_2 \cong \mathbb{A}^1 - \{0\} = \operatorname{Spec} k[x_1, x_1^{-1}]$．また $x_1|_U = x_2|_U$.

■Plot. まず，X 上の invertible sheaf 全体 $\operatorname{Pic} X$ がどのようなものか調べる．これは $\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}$ となる．$n \in \mathbb{Z}$ に対応する $\operatorname{Pic} X$ の元を $\mathcal{L}_n$ とする．次に，generated by global section であるような invertible sheaf を考える．これは $\mathcal{L}_0 (= \mathcal{O}_X)$ しかない．すると任意の $m > 0, n \neq 0$ について

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \otimes (\mathcal{L}_n)^{\otimes m} &= \mathcal{L}_{mn} \neq \mathcal{L}_0. \\ \mathcal{L}_n \otimes (\mathcal{L}_0)^{\otimes m} &= \mathcal{L}_n \quad \neq \mathcal{L}_0. \end{aligned}$$

なので，どの invertible sheaf も ample でない．

■X :: noetherian integral scheme. $X_1, X_2 \cong \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[x_1]$ と reduced が local な性質であることから X :: noetherian reduced scheme. X :: irreducible も明らかだから，X :: noetherian integral scheme.

■$\operatorname{Pic} X \ni \mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$. $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X$ を任意にとる．X :: integral と Prop6.15 より，$\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$ となる $D \in \operatorname{CaCl} X$ が存在する．Prop6.13 の証明から D がどのような形のものか考えよう．Example 6.3.1, Cor 6.16 より，$\operatorname{Pic} X_1, \operatorname{Pic} X_2$．なので $\mathcal{L}|_{X_1} \cong \mathcal{O}_{X_1}, \mathcal{L}|_{X_2} \cong \mathcal{O}_{X_1}$ となる．Prop6.13 の証明から，D は次のような形をしている．

$$D = \{\langle X_1, f_1 \rangle, \langle X_2, f_2 \rangle\} \quad \text{where} \quad f_1 \in \Gamma(X_1, \mathcal{K}^*_{X_1}) = (k(x_1))^*, f_2 \in \Gamma(X_2, \mathcal{K}^*_{X_2}) = (k(x_2))^*.$$

■$D \sim \{\langle X_1, x_1^n \rangle, \langle X_2, 1 \rangle\}$. Cartier divisor の定義から，$U = X_1 \cap X_2$ において $f_1/f_2 \in \Gamma(U, \mathcal{O}^*_U)$ となっている．$U \subseteq X_1 = \operatorname{Spec} k[x_1]$ と考えると，$U = \operatorname{Spec} k[x_1]_{x_1} = \operatorname{Spec} k[x_1, x_1^{-1}]$．（$U \subseteq X_1$ と見れ

[†1] $f : X \to \operatorname{Spec} A$ が finite type ならば $f^{-1} \operatorname{Spec} A = X$ は finite affine open cover をもち，各 affine open cover は finitely generated A-algebra の Spec である．finitely generated A-algebra は A から noetherian を受け継ぐから，X :: noetherian.

ば $U = \operatorname{Spec} k[x_2, x_2^{-1}]$ であるが，どちらでも同じである．）そして

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_U^*) = (k[x_1, x_1^{-1}])^* = \{\alpha x_1^n \mid \alpha \in k^*, n \in \mathbb{Z}\}.$$

であるから，$f_1/f_2 = \alpha x_1^n (\iff f_2/f_1 = (\alpha x_2^n)^{-1})$ と書ける．よって

$$D = \{\langle X_1, \alpha x_1^n f_2\rangle, \langle X_2, f_2\rangle\} \text{ where } f_2 \in \Gamma(X_2, \mathcal{K}_{X_2}^*) = (k(x_2))^*.$$

再び X :: integral から，$\mathcal{K}_X$ は constant sheaf であり，したがって $f_2 \in K = \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ となる．なので $\{\langle X_1, f_2\rangle, \langle X_2, f_2\rangle\}$ は principal. 加えて $\{\langle X_1, \alpha\rangle, \langle X_2, 1\rangle\} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*)$ なので[†2]，結局 $D \sim \{\langle X_1, x_1^n\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}$.

■$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}$. $n \in \mathbb{Z}$ に対し，次のように定める．

$$D_n = \{\langle X_1, x_1^n\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}, \quad \mathcal{L}_n = \mathcal{L}(D_n).$$

これは次の写像を定める．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \operatorname{CaCl} X \\ n & \mapsto & D_n \end{array}$$

明らかに $D_m + D_n = D_{m+n}, \mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{m+n}$ だから，これは加法群としての全射準同型．最後に，単射であることを見よう．$D_n = D_0$ ならば，D_0 同様 D_n も principal である．したがって次を満たす $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ が存在する．

$$f|_{X_1}/x_1^n \in \Gamma(X_1, \mathcal{O}_{X_1}^*) = k^*, \quad f|_{X_2}/1 \in \Gamma(X_2, \mathcal{O}_{X_2}^*) = k^*$$

ここから $f|_{X_1} \in k^*$ が得られる．よって $(f|_{X_1})/x_1^n \in k^*$ と合わせて $n = 0$ を得る．このことは次の段落でも使うので，別に主張として述べておく．

主張 Ex7.4.1
$f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ とする．$f|_{X_2} \in k^*$ ならば，$f|_{X_1} \in k^*$.

(証明). $f|_{X_2} \in k^*$ から $f|_U \in k^*$ が得られる．$f|_U = \alpha$ としよう．$U = \operatorname{Spec} k[x_1]_{x_1} \subset X_1$ をみなして考えると，$k[x_1]_{x_1}$ の元として $(f|_{X_1})|_U = \alpha$ となっている．なので整数 $r \geq 0$ が存在し，$k[x_1]$ の元として $x_1^r(f|_{X_1} - \alpha) = 0$. しかし $k[x_1]$ は整域なので，結局 $f|_{X_1} = \alpha \in k^*$. ■

■Globally Generated Invertible Sheaf on X. $n \in \mathbb{Z}$ を任意にとり，$\{g_i\}_i \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L}_n)$ が $\mathcal{L}_n$ の global generators であるとしよう．$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}(D_n)$ だから，$\mathcal{L}_n|_{X_1}$ は x_1^n で generate され，$\mathcal{L}_n|_{X_2}$ は 1 で generate されている．特に後者から，$\mathcal{L}_n|_U$ は 1 で generate されている．したがって stalk で見れば，次のようになっている．

$$\begin{array}{llll} {}^\forall P \in X_2, & \langle\{(g_i)_P\}_i\rangle = (\mathcal{L}_n)_P = \mathcal{O}_{X,P} & & \text{as } \mathcal{O}_{X,P}\text{-module.} \\ & \langle\{(g_i)_{O_1}\}_i\rangle_i = (\mathcal{L}_n)_{O_1} = (x_1^n)_{O_1}\mathcal{O}_{X,O_1} & & \text{as } \mathcal{O}_{X,O_1}\text{-module.} \end{array}$$

[†2] ここの部分は Prop6.13c を用いて

$$\mathcal{L}(\{\langle X_1, \alpha\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}) = \mathcal{O}_X = \mathcal{L}(\{\langle X_1, 1\rangle, \langle X_2, 1\rangle\})$$

故に $\{\langle X_1, \alpha\rangle, \langle X_2, 1\rangle\} = \{\langle X_1, 1\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}$，と理解しても良い．

これらを可換環に翻訳し，g_i を $g_i|_{X_2}, g_i|_U, g_i|_{X_1}$ の順に求めていく．$X_2 = \operatorname{Spec} k[x_2]$ だから，P に対応する素イデアル $\mathfrak{p} \subset k[x_2]$ がとれる．また，$g_i|_{X_2} \in \Gamma(X_2, \mathcal{O}_X) = k[x_2]$．$\mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}_{X_2,P} = k[x_2]_{\mathfrak{p}}$ であり，したがって $k[x_2]_{\mathfrak{p}}$-module として $\langle (g_i|_{X_1})_{\mathfrak{p}} \rangle = k[x_2]_{\mathfrak{p}}$．なので，次が成り立つ．

$$^{\forall}\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[x_2], \quad ^{\forall}i, \quad (g_i|_{X_2})_{\mathfrak{p}} \in (k[x_2]_{\mathfrak{p}})^* = k[x_2] \setminus \mathfrak{p}.$$

よって $g_i|_{X_2} \in (k[x_2])^* = k^*$ がわかる．前段落に書いた主張から $g_i|_{X_1} \in k^*$．$\langle (g_i)_{O_1} \rangle_i = (x_1^n)_{O_1} \mathcal{O}_{X,O_1}$ と合わせて $(g_i|_{X_1})/x_1^n \in k^*$ が得られ，$n = 0$ となる．以上より，$\mathcal{L}_0$ のみが generated by global sections である．

■Another Proof: Globally Generated Invertible Sheaf on X.　$n \in \mathbb{Z}$ をとり，$\{g_i\}_i \in \Gamma(X, \mathcal{L}_n)$ を $\mathcal{L}_n$ の global generator とする．$\mathcal{L}_n|_{X_1}$ は x_1^n で，$\mathcal{L}_n|_{X_2}$ は 1 で生成されており，X_1, X_2 共に affine scheme である．そのため，次のようになる．

$$\begin{aligned} \langle \{g_i|_{X_2}\}_i \rangle &= \Gamma(X_2, \mathcal{L}_n|_{X_2}) = k[x_2] && \text{as } k[x_2]\text{-module.} \\ \langle \{g_i|_{X_1}\}_i \rangle &= \Gamma(X_1, \mathcal{L}_n|_{X_1}) = x_1^n k[x_1] && \text{as } k[x_1]\text{-module.} \end{aligned}$$

一行目から，$\{g_i|_{X_2}\} \subseteq (k[x_2])^* = k^*$．なので前々段落の主張から，$\{g_i|_{X_1}\} \subseteq k^*$．よって $x_1^n \in (k[x_1])^* = k^*$ が得られる．

■**資料．**　詰まったところでは次のページを参考にした: `https://math.stackexchange.com/questions/70042`.

Ex7.5　Ample and Very Ample are Inherted by Tensor Products.

X :: noetherian scheme, $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ :: invertible sheaves on X とする．**"generated by global sections"は gbgs と略す．** (d), (e) では更に X :: finite type over a noetherian ring A，と仮定する．（これは Thm7.6 の仮定である．）

補題 Ex7.5.1
If $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ :: gbgs invertible sheaves on X, then $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}'$ :: gbgs.

(証明). $\{m_i\} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{M}), \{m'_j\} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{M}')$ をそれぞれ $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ の global generator とする．定義より，このことは次と同値である: 任意の点 $x \in X$ について $\mathcal{M}_x, \mathcal{M}'_x$ はそれぞれ $\{(m_i)_x\}_i, \{(m'_i)_x\}_j$ で $\mathcal{O}_{X,x}$-module として生成される．さて，tensor product は left adjoint であることから colimit と交換する．なので $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}')_x$ は $\mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}'_x$ と同型である．明らかにこれは $\{(m_i)_x \otimes (m'_i)_x\}_{i,j}$ で生成される（Ati-Mac §2.7）から，$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}'$ :: gbgs．global generator は $\{m_i \otimes m'_i\}_{i,j}$ である．■

(a)　If $\mathcal{L}$ :: ample and $\mathcal{M}$ :: gbgs then $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ :: ample.

$\mathcal{F}$ :: coherent sheaf on X とする．$\mathcal{L}$ :: ample なので，十分大きな $n > 0$ について $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ :: gbgs. これに $\otimes \mathcal{M}^{\otimes n}$ を合わせて整理すると，補題から $\mathcal{F} \otimes (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})^{\otimes n}$ :: gbgs．よって $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ :: ample.

(b)　If $\mathcal{L}$ :: ample and $\mathcal{M}$ :: arbitrary then $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ :: ample for some $n > 0$.

$\mathcal{M}$ :: coherent なので，十分大きな $n > 0$ について $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ :: gbgs．任意の $\mathcal{F}$ :: coherent sheaf に対して十分大きい $r > 0$ をとると，$\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes rn}$ :: gbgs．補題より次も gbgs:

$$(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes rn}) \otimes (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})^{\otimes r}.$$

整理して $\mathcal{F} \otimes (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2n})^{\otimes r}$ :: gbgs．よって $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2n}$ :: ample.

(c) If $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ :: ample then $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ :: ample.

$\mathcal{F}$ :: cohenrent sheaf on X とする．十分大きな $l > 0$ について，$\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l}$ :: gbgs．この sheaf も coherent なので，十分大きな $m > 0$ について $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l} \otimes \mathcal{M}^{\otimes m}$ :: gbgs．$n = \max(l, m)$ とすれば $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}$ :: gbgs．整理すれば $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ :: ample が得られる．

(d) If $\mathcal{L}$ :: very ample and $\mathcal{M}$ :: gbgs then $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ :: very ample.

$\mathcal{L}, \mathcal{M}$ に対応する morphism を，それぞれ $i : X \to \mathbb{P}^m_A, j : X \to \mathbb{P}^n_A$ とする．Thm7.1b より，$\mathcal{L} \cong i^*\mathcal{O}(1), \mathcal{M} \cong j^*\mathcal{O}(1)$．この時，次の (1) のような 2 重の fiber product を考える．ここでの $\mathbb{P}^N$ は $\mathbb{P}^m, \mathbb{P}^n$ の Cartesian product(Ex5.11) であり，$N = mn + m + n$ である．

(1)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\phi"] \arrow[drr, bend left, "i"] \arrow[ddr, bend right, "j"'] & & \\
& \mathbb{P}^N_A \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & \mathbb{P}^m_A \arrow[d] \\
& \mathbb{P}^n_A \arrow[r] & \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] \arrow[drr, "j"] & \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \mathbb{P}^N \\
\mathbb{P}^m \arrow[r] & \operatorname{Spec} A & \mathbb{P}^n \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(1) の図式に closed immersion :: ψ を加えたのが (2) である．(2) の図式で $\omega = \psi \circ \phi$ とする．$\omega^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ を計算すると，次のようになる．$\omega^* = \phi^*\psi^*$ に注意せよ．

$$\begin{aligned}
&\omega^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \\
\cong\ &\phi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n}(1) \\
\cong\ &\phi^*(p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) \\
\cong\ &\phi^*p_1^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A \phi^*p_2^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \\
\cong\ &(p_1 \circ \phi)^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A (p_2 \circ \phi)^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \\
\cong\ &i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A j^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \\
\cong\ &\mathcal{L} \otimes_A \mathcal{M}
\end{aligned}$$

上から順に，Ex5.11，Ex5.1 の解答にある補題，$(p_\_ \circ \omega)_*$ が $\omega^* p_\_^*$ に adjoint であること[†3]，図式の可換性を用いている．最後に ω が immersion であることを示そう．

主張 Ex7.5.2
$i : X \to \mathbb{P}^m_A$ を immersion とする．次の可換図式において，$\psi \circ \phi : X \to \mathbb{P}^N_A$ は immersion である．

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "i"'] \arrow[drr, "j"] & \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \mathbb{P}^N \\
\mathbb{P}^m \arrow[r] & \operatorname{Spec} A & \mathbb{P}^n \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

(証明)．次の 3 つが示せる．

[†3] もう少し詳しく述べておこう．$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を考える．f^*g^* は $g_*f_* = (g \circ f)_*$ と adjoint．そして $(g \circ f)_*$ は $(g \circ f)^*$ と adjoint．これと adjoint の一意性から $f^*g^* \cong (g \circ f)^*$ が得られる．

(i) closed immersion :: immersion.

(ii) composition of two immersion :: immersion.

(iii) immersion :: stable under base cahnge.

すると Ex4.8 の結果が immersion について使える．まず，図式において，p_1 は projective over A かつ A :: noetherian ring．したがって Ex4.9 から separated である．なので Ex4.8e より ϕ :: immersion．ψ :: immersion とあわせて $\psi \circ \phi$ :: immersion.

上の項目において，(ii) は一般には成立しない．しかし X :: noetherian scheme なので，immersion は closed ∘ open にも open ∘ closed にも分解でき，このことを用いて (ii) が示せる．`https://stacks.math.columbia.edu/tag/01QV` を参照するとよい． ∎

(e) If $\mathcal{L}$ :: ample then $\mathcal{L}^{\otimes n}$ :: very ample for sufficiently large all $n > 0$.

Thm7.6 より，ある正整数 $l > 0$ について $\mathcal{L}^{\otimes l}$ :: very ample．また，$\mathcal{L}$ :: ample より，正整数 $m_0 > 0$ が存在し，任意の整数 $m \geq m_0$ について $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ :: gbgs．したがって，$N = n + m_0$ とおけば，(d) より

$$(\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes l} = \mathcal{L}^{\otimes n} \quad (m \geq m_0, n \geq N)$$

は very ample である．

Ex7.6 The Riemann-Roch Problem.

k :: algebraically closed field, X :: nonsingular projective variety over k，D :: divisor on X とする．（したがって $|D|$ :: linear system が考えられる．）この時，n の関数 $\dim_k |nD|$ を考える．$\mathcal{L}$ を D に対応する invertible sheaf とすると，Prop7.7 より，これは $\dim_k \Gamma(X, \mathcal{L}^n) - 1$ とも書ける．

Ex2.14 と Cor5.16 を合わせると，$X = \operatorname{Proj} k[x_0, \ldots, x_d]/I$ なる I :: homogeneous ideal が存在することが分かる．そこで $S = k[x_0, \ldots, x_d], T = S/I$ としておく．また $\phi : S \to T = S/I$ を標準的全射としておく．

(a) D :: very ample $\implies {}^\forall n \gg 0, \quad \dim_k |nD| = P_X(n) - 1$.

今，$\mathcal{L}$ :: very ample だから，$i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1) \cong \mathcal{L}$ となる closed immersion $i : X \to \mathbb{P}_k^d$ が存在する．（closed であることは Remark5.16.1 と同様．）Ex6.8a（i^* と $\otimes$ が分配的であること）と Prop5.12（の証明）から次が分かる．

$$\mathcal{L}^{\otimes n} = (i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1))^{\otimes n} \cong i^*((\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1))^{\otimes n}) \cong i^*(S(n)\tilde{}) \cong (S(n) \otimes T)\tilde{}.$$

ϕ が次数を保つこと (したがって $\phi(S(n)) = T(n)$) から，$S(n) \otimes T \cong T(n)$．Ex5.9b より，十分大きい全ての n について $T_n \cong \Gamma(X, (T(n))\tilde{})$ となる．よって，P_X を X の Hilbert polynomial とすると，十分大きい全ての n について $P_X(n) = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$.

(b) If D is torsion element of order r, then $\dim_k |nD| = 0$ if $r \backslash n$ & $= -1$ otherwise

order の定義から，$nD = 0 \iff n \bmod r = 0$ であることに注意する．次を示す．

$$\dim_k |nD| = \begin{cases} 0 & n \bmod r = 0 \\ -1 & n \bmod r \neq 0 \end{cases}$$

■$n \bmod r = 0 \implies \dim_k |nD| = 0$. $n \bmod r = 0$ の時，$nD = 0$，$\mathcal{L}^{\otimes n} = \mathcal{O}_X$．今，$X$ :: integral & proper & finite type scheme over algebraically closed subset．なので Ex4.5d より，$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$. よって $\dim_k |nD| = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X) - 1 = 0$.

■$n \bmod r \neq 0 \implies |nD| = \emptyset \implies \dim_k |nD| = -1$. $n \bmod r \neq 0$ の時，$|nD| = \emptyset$ を示す．$E = \{\langle U_i, f_i\rangle\}_i \in |nD|$ がとれるとして矛盾を導くことにする．E :: effective かつ $E \sim nD \not\sim 0$ なので，$f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ は単元でない．したがって f_i^r も単元でない[†4]．いずれの i についても同様なので，rE は principal でない ($rE \not\sim 0$)．一方，$E \sim nD, rD = 0$ だから $rE \sim rnD \sim 0$.

Ex7.7　Some Rational Surfaces.

Ex7.8　Sections of $\pi : X \to \mathbb{P}(\mathcal{E}) \leftrightarrow$ Quotient Invertible Sheaves of $\mathcal{E}$.

X :: noetherian scheme, $\mathcal{E}$ :: coherent locally free sheaf on X とする．Prop7.12 において $Y = X, g = \mathrm{id}_X$ とすると，以下の図式を成立させる $\sigma : X \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ と quotient invertible sheaf of $\mathcal{E}$:: $\mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0$ が[†5] 対応することがわかる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[dl, "\pi"] \\ X & \end{tikzcd}$$

明らかに σ は π の section である．

Ex7.9　$\operatorname{Pic}\mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}$.

X :: regular noetherian scheme, $\mathcal{E}$ :: locally free coherent sheaf of rank ≥ 2 on X とする．$r = \operatorname{rank}\mathcal{E} (\geq 2)$ とおく．また $P = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ としておく．

(a)　$\operatorname{Pic}\mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}$.

これは Ex6.1 ($\operatorname{Pic}\mathbb{P}^n_X \cong \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}$) の relatively version である．

全射 $\mathcal{E} \to \mathcal{O}_X$ を考える．Ex7.8 の図式から次の split する図式が得られる (Ex6.8a を用いる)．

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Pic} P \arrow[r, shift left, "\sigma^*"] & \operatorname{Pic} X \arrow[l, shift left, "\pi^*"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

次の列が完全列であることを示したい．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "1 \mapsto \mathcal{O}_P(1)"] & \operatorname{Pic} P \arrow[r, shift left, "\sigma^*"] & \operatorname{Pic} X \arrow[l, shift left, "\pi^*"] \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Prop7.12（の証明）より $\sigma : X \to P$ に対して $\sigma^*(\mathcal{O}_P(1)) \cong \mathcal{O}_X$ が成立する．このことから $\{\mathcal{O}_P(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が $\ker \sigma^*$ に含まれることは明らか[†6]．よって調べるべきは次の二つである．

(i) $\mathbb{Z} \cong \{\mathcal{O}_P(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) $\ker \sigma^* \subseteq \{\mathcal{O}_P(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

[†4] f_i は単元でないから，$\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ の真のイデアルに属す．そして f_i^r もこのイデアルに属し，したがって f_i^r は単元でない．

[†5] $\mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0$ だけで $\mathcal{L}$ と全射 :: $\mathcal{E} \to \mathcal{L}$ の組を意味する．$g^*\mathcal{E} = \mathcal{E}$ に注意．

[†6] $-n < 0$ については $\mathcal{O}_P(-n)$ は $\mathcal{O}_P(n)$ の逆元である．

■$\mathbb{Z} \cong \{\mathcal{O}_P(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$．$1 \mapsto \mathcal{O}_P(1)$ が全射であることは明らか．なので単射であることを示せば良い．$\mathcal{O}_P(n) = \mathcal{O}_P$ が成立するとして $n = 0$ を導く．Prop7.11a と $\mathcal{O}_P(n) = \mathcal{O}_P$ より $\pi_* \mathcal{O}_P(n) \cong \pi_* \mathcal{O}_P, \mathrm{Sym}^n(\mathcal{E}) \cong \mathcal{O}_X$．Ex5.16a より次が分かる．

$$\operatorname{rank} \mathrm{Sym}^n(\mathcal{E}) = \binom{r+n-1}{r-1} = 1 = \operatorname{rank} \mathcal{O}_X.$$

よって $r-1=0$ or $r+n-1$．$r \geq 2$ なので $n=0$ が得られる．

■$\ker \sigma^* \subseteq \{\mathcal{O}_P(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$．$\mathcal{L} \in \ker \sigma^*$ をとる．$\sigma^* \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X \cong \sigma^* \mathcal{O}_P(1)$ なので，Ex6.8a を用いて $\sigma^*(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_P(-1)) = \mathcal{O}_X$ を得る．

(b) $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}') \iff {}^\exists \mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X, \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}.$

$\mathcal{E}'$ :: locally free coherent sheaf on X とする．名前を次のように付ける: $P = \mathbb{P}(\mathcal{E}), \pi : P \to X, P' = \mathbb{P}(\mathcal{E}'), \pi' : P' \to X$.

■ $\Longrightarrow$．$\phi : P' \xrightarrow{\cong} P$ をとる．

$$\begin{tikzcd}
P' \arrow[rr, shift left, "\phi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & P \arrow[ll, shift left, "\phi^{-1}"] \arrow[dl, "\pi"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{O}_{P'}(1) \in \operatorname{Pic} P \cong \operatorname{Pic} X \oplus \mathbb{Z}$ なので，

$$\phi^* \mathcal{O}_{P'}(1) \cong \mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^* \mathcal{L} \quad (\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X).$$

左辺は $\operatorname{Pic} P'$ の，右辺は $\operatorname{Pic} P$ の生成元である．（なので $\mathcal{O}_P(1)$ が右辺に現れる．）両辺に π_* を作用させて Ex5.1d, Prop7.11a を用いると次のよう．

$$\pi_* \phi^* \mathcal{O}_{P'}(1) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}.$$

あとは $\pi_* \phi^* = \pi'_*$ を示せば，Prop7.11a から主張が得られる．ϕ が同型写像であることに注意して計算する．

$$\begin{aligned}
&\pi_* \phi^* - \\
\cong &\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_P, \pi_* \phi^* -) \\
\cong &\operatorname{Hom}(\pi^* \mathcal{O}_P, \phi^* -) \\
\cong &\operatorname{Hom}((\phi^{-1})^* \pi^* \mathcal{O}_P, (\phi^{-1})^* \phi^* -) \\
\cong &\operatorname{Hom}(\pi'^* \mathcal{O}_P, -) \\
\cong &\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_P, \pi'_* -) \\
\cong &\pi'_* - .
\end{aligned}$$

■ $\Longleftarrow$．$\mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L} (, \mathcal{E} = \mathcal{E}' \otimes \mathcal{L}^{-1})$ とする．Prop7.11b から次の全射が得られる．

$$\pi^* \mathcal{E} \to \mathcal{O}_P(1) \to 0, \qquad \pi'^* \mathcal{E}' \to \mathcal{O}_{P'}(1) \to 0.$$

それぞれ $\pi^* \mathcal{L}, \pi'^* \mathcal{L}^{-1}$ を tensor する．π^*, π'^* が準同型であること (Ex6.8a) から，次のように成る．

$$\pi^* \mathcal{E}' \to \mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^* \mathcal{L} \to 0, \qquad \pi'^* \mathcal{E} \to \mathcal{O}_{P'}(1) \otimes \pi'^* \mathcal{L}^{-1} \to 0.$$

Prop7.12 から，それぞれ $\phi : P' \to P, \phi' : P \to P'$ を誘導し，次を満たす．

$$\phi^* \mathcal{O}_P(1) \cong \mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^* \mathcal{L}, \quad \phi'^* \mathcal{O}_{P'}(1) \cong \mathcal{O}_{P'}(1) \otimes \pi'^* \mathcal{L}^{-1}$$

及び $\pi' \circ \phi = \pi, \pi \circ \phi' = \pi'$．さて，(a) より，$\operatorname{Pic} P$ の元は $\mathcal{M} \in \operatorname{Pic} X, n \in \mathbb{Z}$ を用いて $\pi^* \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_P(n)$ と書ける．これに対して $(\phi' \circ \phi)^*$ を作用させると次のように成る．

$$\begin{aligned}
&(\phi' \circ \phi)^*(\pi^* \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_P(n)) \\
\cong &(\pi \circ \phi' \circ \phi)^* \mathcal{M} \otimes (\phi' \circ \phi)^* \mathcal{O}_P(n) \\
\cong &(\pi' \circ \phi)^* \mathcal{M} \otimes \phi^*(\mathcal{O}_{P'}(n) \otimes \pi'^* \mathcal{L}^{-n}) \\
\cong &\pi^* \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_P(n) \otimes \pi^* \mathcal{L}^n \otimes \phi^* \pi'^* \mathcal{L}^{-n} \\
\cong &\pi^* \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_P(n)
\end{aligned}$$

$\phi \circ \phi'$ についても同様である．Pic の同型射は $P \to P'$ の同型射に対応することを示せば証明は終わる．（これは Prop7.12 から分かると思う．）

Ex7.10 $\mathbb{P}^n$-Bundles Over a Scheme.

Ex7.11 Different Sheaves of Ideals can Give Rise to Isomorphic Blow Up Schemes.

Ex7.12

Ex7.13 * A Complete Nonprojective Variety.

Ex7.14