1　2016-04-13 収束半径

球 $B(r; z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \subset \mathbb{C}$ とする。いくつかの収束判定法を紹介した。

2　Abel theorem

定理 1 (Abel theorem)**.** $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ とする。

$$z_0 \in \mathbb{C},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n < \infty \implies \forall z \in B(|z_0|; 0), \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n < \infty$$

特に、この時 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ は正規収束 [1] する。

証明. 命題 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n < \infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$ と、$|\frac{z}{z_0}| < 1$ を用いて、M 判定法へ帰着する。

∎

3　Cauchy-Hadamard theorem

定理 2 (Cauchy-Hadamard theorem)**.** 一複素変数 z に関する、以下のような冪級数を考える。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

ここで $a, c_n \in \mathbb{C}$ とする。このとき、f の収束半径は以下のように与えられる。

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \left(|c_n|^{\frac{1}{n}}\right) := \lim_{n\to\infty} \sup\{|c_n|^{\frac{1}{n}} : k \geq n\}.$$

なお、sup は上限を意味する。

証明. $\limsup_{n\to\infty} \left(|c_n|^{\frac{1}{n}}\right) = 0$ のとき冪級数の収束半径が ∞ であることだけ示す。

仮定より、任意の正数 ϵ に対し、十分大きい n について $0 \leq |c_n|^{\frac{1}{n}} < \epsilon$ が成立する。そこで任意の $z \in \mathbb{C}$ をとり、$\epsilon = \frac{1}{2|z|}$ とする。すると、

$$0 \leq |c_n|^{\frac{1}{n}} < \epsilon \implies 0 \leq |c_n|^{\frac{1}{n}}|z| < 1/2 \implies 0 \leq |c_n||z|^n < (1/2)^n$$

よって M 判定法により、任意の $z \in \mathbb{C}$ について冪級数は収束する。

[1] M 判定法における数列 $\{M_n\}$ が存在するという意味。

4 Ratio test

定理 3 (Ratio test)**.** べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ について、

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

ならば、$R = \frac{1}{\rho}$ がべき級数の収束半径に等しい。

証明. 今、考えている冪級数を二つに分けて、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n + \sum_{n=N}^{\infty} a_n z^n$$

としてみると、前半は有限級数であるから有限値に収束する。なので後半の収束だけを考える。$z=0$ での収束は自明なので、以下では $z \neq 0$ とする

$0 \le \rho < \infty$ とする。極限の定義から、以下が成立。

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall n \in \mathbb{N}, n > N \implies 0 \le \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \rho + \epsilon$$

ここで、任意の $n \in \mathbb{N}$ について、

$$|a_n| = \overbrace{\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \left| \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \right| \cdots \left| \frac{a_N}{a_{N-1}} \right|}^{(n-N+1)\ \text{個}} |a_{N-1}|$$

となる、したがって次のように命題がつながる。

$$\begin{aligned}
&\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}\ s.t.\\
&\qquad \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad \implies \quad 0 \le \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \rho + \epsilon\\
&\iff \forall n \in \mathbb{N}, n > N \quad \implies \quad 0 \le \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|, \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right|, \dots, \left| \frac{a_N}{a_{N-1}} \right| < \rho + \epsilon\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \implies \quad 0 \le |a_n| < (\rho+\epsilon)^{n-N+1} |a_N|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \iff \quad 0 \le |a_n||z^n| < (\rho+\epsilon)^{n-N+1} |a_N||z^n|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \iff \quad 0 \le |a_n||z^n| < \frac{|z|^n}{\frac{1}{(\rho+\epsilon)^{n-N+1}}} |a_N|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \iff \quad 0 \le |a_n||z^n| < \left(\frac{|z|}{\frac{1}{\rho+\epsilon}} \right)^n (\rho+\epsilon)^{-N+1} |a_N|
\end{aligned}$$

$0 < \rho < \infty$ の場合を考える。まず、$|z| < 1/\rho$ となる任意の各 z に対して適切に ϵ をとれば [2)]、$\left(\frac{|z|}{\frac{1}{\rho+\epsilon}} \right) < 1$ となる。したがって、

$$\sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{|z|}{\frac{1}{\rho+\epsilon}} \right)^n (\rho+\epsilon)^{-N+1} |a_N| = (\rho+\epsilon)^{-N+1} |a_N| \sum_{n=N}^{\infty} \left(\frac{|z|}{\frac{1}{\rho+\epsilon}} \right)^n$$

[2)] $|z| \neq 0$ ならば $0 < \epsilon < \frac{1}{|z|} - \rho$ の範囲にある ϵ を、例えば $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{|z|} - \rho\right)$ をとる。

となる。N は各 ϵ に対して定まる有限値だから、これは収束する。M-判定法により、冪級数の収束半径は $1/\rho$

$\rho = 0$ の場合を考える。このときは 0 でない任意の z について、同様に $0 < \epsilon < \frac{1}{|z|}$ の範囲の ϵ をとれば $\left(\frac{|z|}{\frac{1}{\epsilon}}\right) < 1$ とすることができて、M-判定法により収束半径は ∞ となる。

最後に、$\rho = \infty$ の場合。ここまでほとんどこのケースの考察はしていないことに注意しておく。しかし同様の議論をすると $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \infty$ がわかる。したがって命題 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n < \infty \implies \lim_{n\to\infty} a_n z^n = 0 \implies \lim_{n\to\infty} |a_n z^n| = 0$ の対偶より、冪級数は発散する。

∎

これは $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \cdots$ のように、十分先の項でも係数が 0 になることがあるとそのままでは使えない。しかし $\sin z$(や $\cos z$) には以下のように変形するとこの方法が使える。

$$
\begin{aligned}
&\sin z \\
&\quad = 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\
&\quad = (z \cdot 1/z) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\
&\quad = z \cdot \left(1/z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}\right) \\
&\quad = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n}
\end{aligned}
$$

そこで、$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^n$ の収束半径を考える。以下の計算から、これの収束半径は ∞ と分かる。

$$
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n)(2n+1)} = 0
$$

したがって $\sin z = zS(z^2)$ の収束半径は $(\infty)^{1/2} = \infty$ であることが示される。