

ゼミノート #12

Quotients of Algebraic Spaces

七条彰紀

2019 年 8 月 3 日

目次

1	Notes on Topology	1
1.1	Constructible Topology	1
1.2	Equivalence Relation on Topological Space Induced by Groupoid	2
2	Quotients	2
2.1	Definitions	2
2.2	Propositions : Paraphase	3

このノートでは一貫して, $S :: \text{algebraic space}$ とし, groupoid in algebraic S -space $:: R \rightrightarrows_t^s X$ を考える.

1 Notes on Topology

1.1 Constructible Topology

以下を参考にした.

- D.Rydh(2010) “Submersions and effective descent of tale morphisms”
- Lecture note by B.Conrad, <http://virtualmath1.stanford.edu/~conrad/Perfseminar/Notes/L3.pdf>
- [2] 08YF <https://stacks.math.columbia.edu/tag/08YF>

定義 1.1

$X :: \text{topological space}$ とする.

- (i) X の locally closed subset とは, closed subset と open subset の共通部分で表せる subset である.
- (ii) X の constructible set とは, X の有限個の locally closed subset の和集合で表せる subset のことである.
- (iii) $U \subseteq X$ が X の locally constructible set であるとは, U のある開被覆 $\{U_i\}$ について, 各 $U \cap U_i$ が constructible set である, ということ.

- (iv) X の constructible topology とは, X の constructible set を開基とする位相のことである.
- (v) 有限個とは限らない X の constructible set の, 和集合を ind-constructible subset と呼び, 共通部分を pro-constructible subset と呼ぶ^{†1}.

次の命題は直ちに分かることなので証明しない.

命題 1.2

$X :: \text{topological space}$ とする.

- (i) X の open subset と closed subset は constructible set である.
- (ii) 有限個の constructible set の和, 共通部分は constructible set である. constructible set の補集合も constructible set である.
- (iii) X の constructible topology に於ける open subset は ind-constructible subset に限る. 同様に, closed subset は pro-constructible subset に限る.

命題 1.3 (i) qcqs(=quasi-compact and quasi-separated) scheme の pro-constructible subset は, affine scheme からの射の像に限る (Rydh10, Prop1.1).

- (ii) locally of finite presentation morphism は constructible topology において submersive.
- (iii) quasi-compact morphism は constructible topology において submersive.

constructible topology は spectral space^{†2} と共に扱われることが多い. 例えば qcqs scheme の underlying space は spectral である.

1.2 Equivalence Relation on Topological Space Induced by Groupoid

2 Quotients

2.1 Definitions

定義 2.1 (equivariant morphism)

定義 2.2 ((j, j_Y))

stabilizer はまたの機会に定義する.

Zariski quotient

Constructible quotient

Topological quotient

Strongly topological quotient

^{†1} “ind-”は inductive limit を意味し, “pro-”は projective limit を意味する.

^{†2} spectral space とは, 以下の性質をもつ位相空間: sober, quasi-compact, the intersection of two quasi-compact opens is quasi-compact, and the collection of quasi-compact opens forms a basis for the topology ([2] 08FG).

Geometric quotient

Strongly geometric quotient

定義 2.3 (universal, uniform quotient)

注意 2.4

geometric quotient in [1]

•

2.2 Propositions : Paraphase

参考文献

- [1] David Mumford, John Fogarty, and Frances Kirwan. *Geometric Invariant Theory (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 34)*. Springer-Verlag, 3rd ed. edition, 1992.
- [2] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2019.