Ex7.1 Surjective Mophism between Invertible Sheaves is Isomorphic.

X :: locally ringed space, $\mathcal{L},\mathcal{M}$ :: invertible sheaves on X, $f:\mathcal{L}\to\mathcal{M}$ :: surjective mophism，とする．

■Proof 1. 任意の点 $x\in X$ をとり，$A=\mathcal{O}_{X,x}$ とおく．$f_x:\mathcal{L}_x\to\mathcal{M}_x$ は同型写像を合成することで $\phi:A\to A$ :: surjective A-morphism と同一視出来る．ϕ :: surjective より，$\phi(\alpha)=1\in A$ となる $\alpha\in A$ がとれる．また ϕ は A-module morphism だから，$\alpha\phi(1)=1$．そこで $\psi:A\to A$ を $a\mapsto\alpha a$ と定義すれば，これが ϕ の逆写像になる．よって ϕ,f_x は同型．Prop1.1 から，f :: iso.

■Proof 2. Matsumura, Thm2.4 から分かる．これは NAK (or Nakayama's Lemma) からの帰結である．

注意 Ex7.1.1

$k(x)$ :: residue field と $f_x:\mathcal{L}_x\to\mathcal{M}_x$ をテンソルすると，$f_x\otimes\mathrm{id}_{k(x)}$ :: surjective $k(x)$-module morphism が得られる．よって $\ker(f_x\otimes\mathrm{id}_{k(x)})=0$．しかし，ここから NAK をつかって $\ker f_x=0$ を導くことは出来ない．$k(x)$ が flat $\mathcal{O}_{X,x}$-module でなく，したがって $\ker(f_x\otimes\mathrm{id}_{k(x)})$ と $(\ker f_x)\otimes k(x)$ の間に同型があることが言えないからである．このことは flat $\implies$ torsion-free に気をつければすぐに分かる．同様の議論が f_x :: injective（と $\mathrm{coker}\, f_x$）の場合に出来ることにも気づくが，このときは $\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_2; 1\mapsto 3$ という反例がある．

Ex7.2 Two Sets of Global Generators and Corresponding Morphisms.

k :: field, X :: scheme $/k$, $\mathcal{L}$ :: invertible sheaf on X, $S=\{s_0,\dots,s_m\}, T=\{t_0,\dots,t_n\}$ :: global generators of $\mathcal{L}$. とする．ここで S,T は同じ線形（部分）空間 $V\subseteq\Gamma(X,\mathcal{L})$ を張るとする．また $n\le m, d=\dim_k V$ とする．

S,T からそれぞれ Thm7.1 のように定まる morphism を ϕ_S,ϕ_T とする．ϕ_S が次のように分解できることを示す．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi_T"] \arrow[rrrr, bend right, "\phi_S"'] & \mathrm{im}\,\phi_T \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^m - L \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{P}^n \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

ここで π,α はそれぞれ linear projection と automorphism である．

$X\to\mathbb{P}^n$ の morphism を考えることは，$k[y_0,\dots,y_n]$ の元 $y_{0,\dots,n}$ の変換を考えることと同じである．これは Thm7.1 の証明を観察すれば分かる．二つの k-linear map は ϕ_S^*,ϕ_T^* はそれぞれ，$y_i\mapsto s_i(i=0,\dots,n)$，$y_i\mapsto t_i(i=0,\dots,m)$ で定まっている．したがって問題は，$t_0,\dots,t_m$ を $s_0,\dots,s_n$ へ変換する projection と automorphism をつくる問題，と言い換えられる．

今，次のような $(m+1)\times(n+1)$ 行列 Q が存在する．

$$\begin{bmatrix} s_0\\ \vdots\\ s_n\end{bmatrix}=Q\begin{bmatrix} t_0\\ \vdots\\ t_m\end{bmatrix}.$$

S,T が V の生成系であることから $\mathrm{rank}\, Q=\dim V=:d$．$Q$ は基本行列をいくつもかける（あるいは基本変形を繰り返し行う）ことにより，次の形に分解できる．

$$Q=LP_dR \quad \text{where} \quad L\in PGL(m,k), R\in PGL(n,k)$$

ただし行列 P_r $(r = 1, \ldots, n+1)$ は $r \times r$-identity matrix I_r をもちいて $P_r = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ と定義される行列である．（TODO: P_d を P_{n+1} に交換しても問題ない？）L, P_{n+1}, R が誘導する morphism をそれぞれ $\beta, \tilde{\pi}, \alpha$ とすれば，α, β は automorphism であり，$\tilde{\pi}$ は projection である．

$$\mathbb{P}^m \xrightarrow{\beta} \mathbb{P}^m \xhookrightarrow{i} \mathbb{P}^m - L \xrightarrow{\tilde{\pi}} \mathbb{P}^n \xrightarrow{\alpha} \mathbb{P}^n$$

求める射はこの α と，$\pi = \beta \circ i \circ \tilde{\pi}$ である．また，$L = \mathcal{Z}_p(y_0, \ldots, y_n) \subseteq \mathbb{P}^m$ の次元は $m - (n+1)$ である．

Ex7.3 Morphism of $\mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^m$ can be Decomposed into Common Ones.

$\phi : \mathbb{P}^n_k \to \mathbb{P}^m_k$ を考える．$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ :: invertible sheaves の global generator をそれぞれ $\{x_0, \ldots, x_m\}, \{y_0, \ldots, y_n\}$ とする．

(a) $\operatorname{im} \phi = pt$ or $m \geq n$ and $\dim \operatorname{im} \phi = n$.

$s_i = \phi^*(x_i)$ $(i = 0, \ldots, m)$ とおくと，$s_0, \ldots, s_m$ は $\mathcal{L} := \phi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$ の global generator である．$\mathcal{L}$ は $\mathbb{P}^n$ 上の invertible sheaf だから，Cor6.17 より，$\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ となる $d \in \mathbb{Z}$ が存在する．Example7.8.3 同様，$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ は $|d|$ 次斉次単項式で生成される．

■$m < n \implies \dim \operatorname{im} \phi = 0$.

■$m \geq n \implies \dim \operatorname{im} \phi = n$.

Ex7.4 If X Admits an Ample Invertible Sheaf, then X is Separated.

(a) Assumption of Thm7.6 $\implies$ X :: separated.

A :: noetherian ring, X :: scheme of finite type $/A$ とする．$\mathcal{L}$ :: ample invertible sheaf on X が存在したとする．Thm7.6 から，immersion $i : X \to \mathbb{P}^n_A$ $(n > 0)$ が存在する．これは X から $\mathbb{P}^n_A$ の locally closed subscheme への isomorphism である．これに projection $\mathrm{pr} : \mathbb{P}^n_A = \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} A$ を合成したものは，quasi-projective.

$$X \xrightarrow{\sim} U \hookrightarrow Z \hookrightarrow \mathbb{P}^n_A \xrightarrow{\mathrm{pr}} \operatorname{Spec} A$$

Z は $\mathbb{P}^n_A$ の closed subscheme, U は Z の open subscheme である．A, X についての仮定から $\operatorname{Spec} A, X$ :: noetherian scheme がわかる[†1] から，Thm4.9 より，この射 $X \to \operatorname{Spec} A$ は separated.

(b) There is No Ample Invertible Sheaf on / a field k.

k :: field, X :: affine with doubled origin $/k$ とする．より詳細に，X は $X_1 = \operatorname{Spec} k[x_1], X_2 = \operatorname{Spec} k[x_2]$ を $U_1 = X_1 - \{O_1\}, U_2 = X_2 - \{O_2\}$ で貼りあわせたものとする．ただし $O_1 \in X_1, O_2 \in X_2$ は原点である．X_i, U_i, O_i $(i = 1, 2)$ はすべて X の部分集合とみなす．また $U = X_1 \cap X_2 = X - \{O_1, O_2\}$ とする．明らかに $U = U_1 = U_2 \cong \mathbb{A}^1 - \{0\} = \operatorname{Spec} k[x_1, x_1^{-1}]$．また $x_1|_U = x_2|_U$.

[†1] $f : X \to \operatorname{Spec} A$ が finite type ならば $f^{-1} \operatorname{Spec} A = X$ は finite affine open cover をもち，各 affine open cover は finitely generated A-algebra の Spec である．finitely generated A-algebra は A から noetherian を受け継ぐから，X :: noetherian.

■Plot. まず，X 上の invertible sheaf 全体 $\operatorname{Pic} X$ がどのようなものか調べる．これは $\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}$ となる．$n \in \mathbb{Z}$ に対応する $\operatorname{Pic} X$ の元を $\mathcal{L}_n$ とする．次に，generated by global section であるような invertible sheaf を考える．これは $\mathcal{L}_0 (= \mathcal{O}_X)$ しかない．すると任意の $m > 0, n \neq 0$ について

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 \otimes (\mathcal{L}_n)^{\otimes m} &= \mathcal{L}_{mn} \neq \mathcal{L}_0. \\ \mathcal{L}_n \otimes (\mathcal{L}_0)^{\otimes m} &= \mathcal{L}_n \quad \neq \mathcal{L}_0. \end{aligned}$$

なので，どの invertible sheaf も ample でない．

■X :: noetherian integral scheme. $X_1, X_2 \cong \mathbb{A}^1 = \operatorname{Spec} k[x_1]$ と reduced が local な性質であることから X :: noetherian reduced scheme. X :: irreducible も明らかだから，X :: noetherian integral scheme.

■$\operatorname{Pic} X \ni \mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$. $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic} X$ を任意にとる．X :: integral と Prop6.15 より，$\mathcal{L} = \mathcal{L}(D)$ となる $D \in \operatorname{CaCl} X$ が存在する．Prop6.13 の証明から D がどのような形のものか考えよう．Example 6.3.1, Cor 6.16 より，$\operatorname{Pic} X_1, \operatorname{Pic} X_2$．なので $\mathcal{L}|_{X_1} \cong \mathcal{O}_{X_1}, \mathcal{L}|_{X_2} \cong \mathcal{O}_{X_1}$ となる．Prop6.13 の証明から，D は次のような形をしている．

$$D = \{\langle X_1, f_1\rangle, \langle X_2, f_2\rangle\} \quad \text{where} \quad f_1 \in \Gamma(X_1, \mathcal{K}^*_{X_1}) = (k(x_1))^*, f_2 \in \Gamma(X_2, \mathcal{K}^*_{X_2}) = (k(x_2))^*.$$

■$D \sim \{\langle X_1, x_1^n\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}$. Cartier divisor の定義から，$U = X_1 \cap X_2$ において $f_1/f_2 \in \Gamma(U, \mathcal{O}^*_U)$ となっている．$U \subseteq X_1 = \operatorname{Spec} k[x_1]$ と考えると，$U = \operatorname{Spec} k[x_1]_{x_1} = \operatorname{Spec} k[x_1, x_1^{-1}]$.（$U \subseteq X_1$ と見れば $U = \operatorname{Spec} k[x_2, x_2^{-1}]$ であるが，どちらでも同じである．）そして

$$\Gamma(U, \mathcal{O}^*_U) = (k[x_1, x_1^{-1}])^* = \{\alpha x_1^n \mid \alpha \in k^*, n \in \mathbb{Z}\}.$$

であるから，$f_1/f_2 = \alpha x_1^n (\iff f_2/f_1 = (\alpha x_2^n)^{-1})$ と書ける．よって

$$D = \{\langle X_1, \alpha x_1^n f_2\rangle, \langle X_2, f_2\rangle\} \quad \text{where} \quad f_2 \in \Gamma(X_2, \mathcal{K}^*_{X_2}) = (k(x_2))^*.$$

再び X :: integral から，$\mathcal{K}_X$ は constant sheaf であり，したがって $f_2 \in K = \Gamma(X, \mathcal{K}^*_X)$ となる．なので $\{\langle X_1, f_2\rangle, \langle X_2, f_2\rangle\}$ は principal. 加えて $\{\langle X_1, \alpha\rangle, \langle X_2, 1\rangle\} \in \Gamma(X, \mathcal{O}^*_X)$ なので[†2]，結局 $D \sim \{\langle X_1, x_1^n\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}$.

■$\operatorname{Pic} X \cong \mathbb{Z}$. $n \in \mathbb{Z}$ に対し，次のように定める．

$$D_n = \{\langle X_1, x_1^n\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}, \quad \mathcal{L}_n = \mathcal{L}(D_n).$$

これは次の写像を定める．

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \operatorname{CaCl} X \\ n & \mapsto & D_n \end{array}$$

明らかに $D_m + D_n = D_{m+n}, \mathcal{L}_m \otimes \mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{m+n}$ だから，これは加法群としての全射準同型．最後に，単射であることを見よう．$D_n = D_0$ ならば，D_0 同様 D_n も principal である．したがって次を満たす $f \in \Gamma(X, \mathcal{K}^*_X)$ が存在する．

$$f|_{X_1}/x_1^n \in \Gamma(X_1, \mathcal{O}^*_{X_1}) = k^*, \quad f|_{X_2}/1 \in \Gamma(X_2, \mathcal{O}^*_{X_2}) = k^*$$

[†2] ここの部分は Prop6.13c を用いて

$$\mathcal{L}(\{\langle X_1, \alpha\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}) = \mathcal{O}_X = \mathcal{L}(\{\langle X_1, 1\rangle, \langle X_2, 1\rangle\})$$

故に $\{\langle X_1, \alpha\rangle, \langle X_2, 1\rangle\} = \{\langle X_1, 1\rangle, \langle X_2, 1\rangle\}$，と理解しても良い．

ここから $f|_{X_1} \in k^*$ が得られる．よって $(f|_{X_1})/x_1^n \in k^*$ と合わせて $n=0$ を得る．このことは次の段落でも使うので，別に主張として述べておく．

主張 Ex7.4.1
$f \in \Gamma(X, \mathcal{K}_X^*)$ とする．$f|_{X_2} \in k^*$ ならば，$f|_{X_1} \in k^*$．

(証明)．$f|_{X_2} \in k^*$ から $f|_U \in k^*$ が得られる．$f|_U = \alpha$ としよう．$U = \operatorname{Spec} k[x_1]_{x_1} \subset X_1$ をみなして考えると，$k[x_1]_{x_1}$ の元として $(f|_{X_1})|_U = \alpha$ となっている．なので整数 $r \geq 0$ が存在し，$k[x_1]$ の元として $x_1^r(f|_{X_1} - \alpha) = 0$．しかし $k[x_1]$ は整域なので，結局 $f|_{X_1} = \alpha \in k^*$． ∎

(証明)．$k^* \subseteq \mathcal{O}_{X,O_1}^* \cap \mathcal{O}_{X,O_2}^*$ だから，$f_{O_2} \in k^*$ より $f_{O_1} \in k^*$．他の点における f の germ が k^* に含まれることは $f|_{X_2} \in k^*$ より明らか．よって $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^*) = k^*$． ∎

この主張は X が non-separated であることを暗示している．

■Globally Generated Invertible Sheaf on X．$n \in \mathbb{Z}$ を任意にとり，$\{g_i\}_i \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L}_n)$ が $\mathcal{L}_n$ の global generators であるとしよう．$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}(D_n)$ だから，$\mathcal{L}_n|_{X_1}$ は x_1^n で generate され，$\mathcal{L}_n|_{X_2}$ は 1 で generate されている．特に後者から，$\mathcal{L}_n|_U$ は 1 で generate されている．したがって stalk で見れば，次のようになっている．

$$\begin{aligned} {}^\forall P \in X_2,\quad \langle\{(g_i)_P\}_i\rangle &= (\mathcal{L}_n)_P = \mathcal{O}_{X,P} && \text{as } \mathcal{O}_{X,P}\text{-module.} \\ \langle\{(g_i)_{O_1}\}_i\rangle_i &= (\mathcal{L}_n)_{O_1} = (x_1^n)_{O_1}\mathcal{O}_{X,O_1} && \text{as } \mathcal{O}_{X,O_1}\text{-module.} \end{aligned}$$

これらを可換環に翻訳し，g_i を $g_i|_{X_2}, g_i|_U, g_i|_{X_1}$ の順に求めていく．$X_2 = \operatorname{Spec} k[x_2]$ だから，P に対応する素イデアル $\mathfrak{p} \subset k[x_2]$ がとれる．また，$g_i|_{X_2} \in \Gamma(X_2, \mathcal{O}_X) = k[x_2]$．$\mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}_{X_2,P} = k[x_2]_\mathfrak{p}$ であり，したがって $k[x_2]_\mathfrak{p}$-module として $\langle (g_i|_{X_1})_\mathfrak{p}\rangle = k[x_2]_\mathfrak{p}$．なので，次が成り立つ．

$${}^\forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} k[x_2],\quad {}^\forall i,\quad (g_i|_{X_2})_\mathfrak{p} \in (k[x_2]_\mathfrak{p})^* = k[x_2] \setminus \mathfrak{p}.$$

よって $g_i|_{X_2} \in (k[x_2])^* = k^*$ がわかる．前段落に書いた主張から $g_i|_{X_1} \in k^*$．$\langle (g_i)_{O_1}\rangle_i = (x_1^n)_{O_1}\mathcal{O}_{X,O_1}$ と合わせて $(g_i|_{X_1})/x_1^n \in k^*$ が得られ，$n = 0$ となる．以上より，$\mathcal{L}_0$ のみが generated by global sections である．

■Another Proof: Globally Generated Invertible Sheaf on X．$n \in \mathbb{Z}$ をとり，$\{g_i\}_i \in \Gamma(X, \mathcal{L}_n)$ を $\mathcal{L}_n$ の global generator とする．$\mathcal{L}_n|_{X_1}$ は x_1^n で，$\mathcal{L}_n|_{X_2}$ は 1 で生成されており，X_1, X_2 共に affine scheme である．そのため，次のようになる．

$$\begin{aligned} \langle\{g_i|_{X_2}\}_i\rangle &= \Gamma(X_2, \mathcal{L}_n|_{X_2}) = k[x_2] && \text{as } k[x_2]\text{-module.} \\ \langle\{g_i|_{X_1}\}_i\rangle &= \Gamma(X_1, \mathcal{L}_n|_{X_1}) = x_1^n k[x_1] && \text{as } k[x_1]\text{-module.} \end{aligned}$$

一行目から，$\{g_i|_{X_2}\} \subseteq (k[x_2])^* = k^*$．なので前々段落の主張から，$\{g_i|_{X_1}\} \subseteq k^*$．よって $x_1^n \in (k[x_1])^* = k^*$ が得られる．

■**資料**． 詰まったところでは次のページを参考にした: `https://math.stackexchange.com/questions/70042`.

Ex7.5 Ample and Very Ample are Inherted by Tensor Products.

X :: noetherian scheme, $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ :: invertible sheaves on X とする．**"generated by global sections"は gbgs と略す．** (d), (e) では更に X :: finite type over a noetherian ring A，と仮定する．（これは Thm7.6 の仮定である．）

補題 Ex7.5.1

If $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ :: gbgs invertible sheaves on X, then $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}'$ :: gbgs.

(証明). $\{m_i\} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{M}), \{m'_j\} \subseteq \Gamma(X, \mathcal{M}')$ をそれぞれ $\mathcal{M}, \mathcal{M}'$ の global generator とする．定義より，このことは次と同値である: 任意の点 $x \in X$ について $\mathcal{M}_x, \mathcal{M}'_x$ はそれぞれ $\{(m_i)_x\}_i, \{(m'_i)_x\}_j$ で $\mathcal{O}_{X,x}$-module として生成される．さて，tensor product は left adjoint であることから colimit と交換する．なので $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}')_x$ は $\mathcal{M}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{M}'_x$ と同型である．明らかにこれは $\{(m_i)_x \otimes (m'_i)_x\}_{i,j}$ で生成される（Ati-Mac §2.7）から，$\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}'$ :: gbgs. global generator は $\{m_i \otimes m'_i\}_{i,j}$ である． ∎

(a) If $\mathcal{L}$ :: ample and $\mathcal{M}$ :: gbgs then $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ :: ample.

$\mathcal{F}$ :: coherent sheaf on X とする．$\mathcal{L}$ :: ample なので，十分大きな $n > 0$ について $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ :: gbgs. これに $\otimes \mathcal{M}^{\otimes n}$ を合わせて整理すると，補題から $\mathcal{F} \otimes (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})^{\otimes n}$ :: gbgs. よって $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ :: ample.

(b) If $\mathcal{L}$ :: ample and $\mathcal{M}$ :: arbitrary then $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ :: ample for some $n > 0$.

$\mathcal{M}$ :: coherent なので，十分大きな $n > 0$ について $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$ :: gbgs. 任意の $\mathcal{F}$ :: coherent sheaf に対して十分大きい $r > 0$ をとると，$\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes rn}$ :: gbgs. 補題より次も gbgs:

$$(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes rn}) \otimes (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})^{\otimes r}.$$

整理して $\mathcal{F} \otimes (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2n})^{\otimes r}$ :: gbgs. よって $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2n}$ :: ample.

(c) If $\mathcal{L}, \mathcal{M}$ :: ample then $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ :: ample.

$\mathcal{F}$ :: cohenrent sheaf on X とする．十分大きな $l > 0$ について，$\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l}$ :: gbgs. この sheaf も coherent なので，十分大きな $m > 0$ について $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l} \otimes \mathcal{M}^{\otimes m}$ :: gbgs. $n = \max(l, m)$ とすれば $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{M}^{\otimes n}$ :: gbgs. 整理すれば $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ :: ample が得られる．

(d) If $\mathcal{L}$ :: very ample and $\mathcal{M}$ :: gbgs then $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ :: very ample.

$\mathcal{L}, \mathcal{M}$ に対応する morphism を，それぞれ $i : X \to \mathbb{P}^m_A, j : X \to \mathbb{P}^n_A$ とする．Thm7.1b より，$\mathcal{L} \cong i^*\mathcal{O}(1), \mathcal{M} \cong j^*\mathcal{O}(1)$. この時，次の (1) のような 2 重の fiber product を考える．ここでの $\mathbb{P}^N$ は $\mathbb{P}^m, \mathbb{P}^n$ の Cartesian product(Ex5.11) であり，$N = mn + m + n$ である．

(1)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, "\phi"] \arrow[drr, bend left, "i"] \arrow[ddr, bend right, "j"'] & & \\
& \mathbb{P}^N_A \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] & \mathbb{P}^m_A \arrow[d] \\
& \mathbb{P}^n_A \arrow[r] & \operatorname{Spec} A
\end{tikzcd}$$

(2)
$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[d, "i"'] \arrow[drr, "j"] & & \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dll, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & \mathbb{P}^N \\
\mathbb{P}^m \arrow[r] & \operatorname{Spec} A & \mathbb{P}^n \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

(1) の図式に closed immersion :: ψ を加えたのが (2) である．(2) の図式で $\omega = \psi \circ \phi$ とする．$\omega^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ を計算すると，次のようになる．$\omega^* = \phi^* \psi^*$ に注意せよ[†3]．

$$
\begin{aligned}
& \omega^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) \\
\cong\ & \phi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n}(1) \\
\cong\ & \phi^* (p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)) \\
\cong\ & \phi^* p_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A \phi^* p_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \\
\cong\ & (p_1 \circ \phi)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A (p_2 \circ \phi)^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \\
\cong\ & i^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes_A j^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \\
\cong\ & \mathcal{L} \otimes_A \mathcal{M}
\end{aligned}
$$

上から順に，Ex5.11，Ex5.1 の解答にある補題，図式の可換性を用いている．最後に ω が immersion であることを示そう．

主張 Ex7.5.2
$i : X \to \mathbb{P}^m_A$ を immersion とする．次の可換図式において，$\psi \circ \phi : X \to \mathbb{P}^N_A$ は immersion である．

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\phi"] \arrow[d, "i"'] \arrow[drr, "j"] & & \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dll, "p_1"'] \arrow[d, "p_2"] & \mathbb{P}^N \\
\mathbb{P}^m \arrow[r] & \operatorname{Spec} A & \mathbb{P}^n \arrow[l] &
\end{tikzcd}
$$

(証明)．次の 3 つが示せる．

(i) closed immersion :: immersion.
(ii) composition of two immersion :: immersion.
(iii) immersion :: stable under base cahnge.

すると Ex4.8 の結果が immersion について使える．まず，図式において，p_1 は projective over A かつ A :: noetherian ring．したがって Ex4.9 から separated である．なので Ex4.8e より ϕ :: immersion. ψ :: immersion とあわせて $\psi \circ \phi$ :: immersion.

上の項目において，(ii) は一般には成立しない．しかし X :: noetherian scheme なので，immersion は closed $\circ$ open にも open $\circ$ closed にも分解でき，このことを用いて (ii) が示せる．`https://stacks.math.columbia.edu/tag/01QV` を参照するとよい． ∎

(e) If $\mathcal{L}$ :: ample then $\mathcal{L}^{\otimes n}$ :: very ample for sufficiently large all $n > 0$.

Thm7.6 より，ある正整数 $l > 0$ について $\mathcal{L}^{\otimes l}$ :: very ample．また，$\mathcal{L}$ :: ample より，正整数 $m_0 > 0$ が存在し，任意の整数 $m \geq m_0$ について $\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}$ :: gbgs．したがって，$N = n + m_0$ とおけば，(d) より

$$
(\mathcal{O}_X \otimes \mathcal{L}^{\otimes m}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes l} = \mathcal{L}^{\otimes n} \quad (m \geq m_0, n \geq N)
$$

は very ample である．

[†3] もう少し詳しく述べておこう．$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ を考える．$f^* g^*$ は $g_* f_* = (g \circ f)_*$ と adjoint．そして $(g \circ f)_*$ は $(g \circ f)^*$ と adjoint．これと adjoint の一意性から $f^* g^* \cong (g \circ f)^*$ が得られる．

Ex7.6 The Riemann-Roch Problem.

k :: algebraically closed field, X :: nonsingular projective variety over k，D :: divisor on X とする．（したがって $|D|$ :: linear system が考えられる．）この時，n の関数 $\dim_k |nD|$ を考える．$\mathcal{L}$ を D に対応する invertible sheaf とすると，Prop7.7 より，これは $\dim_k \Gamma(X, \mathcal{L}^n) - 1$ とも書ける．

Ex2.14 と Cor5.16 を合わせると，$X = \operatorname{Proj} k[x_0, \ldots, x_d]/I$ なる I :: homogeneous ideal が存在することが分かる．そこで $S = k[x_0, \ldots, x_d], T = S/I$ としておく．また $\phi : S \to T = S/I$ を標準的全射としておく．

(a) D :: very ample $\implies {}^{\forall} n \gg 0, \quad \dim_k |nD| = P_X(n) - 1.$

今，$\mathcal{L}$ :: very ample だから，$i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1) \cong \mathcal{L}$ となる closed immersion $i : X \to \mathbb{P}^d_k$ が存在する．（closed であることは Remark5.16.1 と同様．）Ex6.8a（i^* と $\otimes$ が分配的であること）と Prop5.12（の証明）から次が分かる．

$$\mathcal{L}^{\otimes n} = (i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1))^{\otimes n} \cong i^*((\mathcal{O}_{\mathbb{P}^d}(1))^{\otimes n}) \cong i^*(S(n)\tilde{\ }) \cong (S(n) \otimes T)\tilde{\ }.$$

ϕ が次数を保つこと (したがって $\phi(S(n)) = T(n)$) から，$S(n) \otimes T \cong T(n)$．Ex5.9b より，十分大きい全ての n について $T_n \cong \Gamma(X, (T(n))\tilde{\ })$ となる．よって，P_X を X の Hilbert polynomial とすると，十分大きい全ての n について $P_X(n) = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$.

(b) If D is torsion element of order r, then $\dim_k |nD| = 0$ if $r \backslash n$ & $= -1$ otherwise

order の定義から，$nD = 0 \iff n \bmod r = 0$ であることに注意する．次を示す．

$$\dim_k |nD| = \begin{cases} 0 & n \bmod r = 0 \\ -1 & n \bmod r \neq 0 \end{cases}$$

■$n \bmod r = 0 \implies \dim_k |nD| = 0$．$n \bmod r = 0$ の時，$nD = 0$，$\mathcal{L}^{\otimes n} = \mathcal{O}_X$．今，$X$ :: integral & proper & finite type scheme over algebraically closed subset．なので Ex4.5d より，$\Gamma(X, \mathcal{O}_X) = k$．よって $\dim_k |nD| = \dim_k \Gamma(X, \mathcal{O}_X) - 1 = 0$.

■$n \bmod r \neq 0 \implies |nD| = \emptyset \implies \dim_k |nD| = -1$．$n \bmod r \neq 0$ の時，$|nD| = \emptyset$ を示す．$E = \{\langle U_i, f_i \rangle\}_i \in |nD|$ がとれるとして矛盾を導くことにする．E :: effective かつ $E \sim nD \not\sim 0$ なので，$f_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ は単元でない．したがって f_i^r も単元でない[†4]．いずれの i についても同様なので，rE は principal でない ($rE \not\sim 0$)．一方，$E \sim nD, rD = 0$ だから $rE \sim rnD \sim 0$.

Ex7.7 Some Rational Surfaces.

Ex7.8 Sections of $\pi : X \to \mathbb{P}(\mathcal{E}) \leftrightarrow$ Quotient Invertible Sheaves of $\mathcal{E}$.

X :: noetherian scheme, $\mathcal{E}$ :: coherent locally free sheaf on X とする．Prop7.12 において $Y = X, g = \mathrm{id}_X$ とすると，以下の図式を成立させる $\sigma : X \to \mathbb{P}(\mathcal{E})$ と quotient invertible sheaf of $\mathcal{E}$::

[†4] f_i は単元でないから，$\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ の真のイデアルに属す．そして f_i^r もこのイデアルに属し，したがって f_i^r は単元でない．

$\mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0$ が[†5] 対応することがわかる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & \mathbb{P}(\mathcal{E}) \arrow[dl, "\pi"] \\ X & \end{tikzcd}$$

明らかに σ は π の section である．

注意 Ex7.8.1
$\mathcal{L}$ :: invertible sheaf on X とする．一般に次が成り立つ．

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X) = \Gamma(X, \mathscr{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)) = \Gamma(X, \mathcal{L}^{-1}).$$

$X = \mathrm{Proj}\, A[x_0, \ldots, x_n], \mathcal{L} = \mathcal{O}(n)$ $(n > 0)$ の時は，Prop5.13 と合わせて $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X) = 0$ が得られる．X が Ex5.14 の条件を満たすときについても同じことが言える．

Ex7.9 $\mathrm{Pic}\, \mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \mathrm{Pic}\, X \oplus \mathbb{Z}$.

X :: **connected** regular noetherian scheme, $\mathcal{E}$ :: locally free coherent sheaf of rank ≥ 2 on X とする．$r = \mathrm{rank}\, \mathcal{E} (\geq 2)$ とおく．また $P = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ としておく．

(a) $\mathrm{Pic}\, \mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \mathrm{Pic}\, X \oplus \mathbb{Z}$.

これは Ex6.1 ($\mathrm{Pic}\, \mathbb{P}^n_X \cong \mathrm{Pic}\, X \oplus \mathbb{Z}$) の relatively version である．

(i) 方針.

次の写像が同型写像であることを示す．

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathrm{Pic}\, X \oplus \mathbb{Z} & \to & \mathrm{Pic}\, \mathbb{P}(\mathcal{E}) \\ & \mathcal{L} \oplus n & \mapsto & \pi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_P(n) \end{array}$$

π^* が準同型である (Ex6.8a) から，ϕ が準同型であることは明らか．ϕ :: surj が難しい部分である．これは 3 つの部分に分けられる．U :: irreducible affine open subset in X, $V = \pi^{-1}(U) (\cong \mathbb{P}^{r-1}_A)$ とする．

(a) Ex6.1 の結果を $\mathrm{Pic}\, V$ の場合に翻訳する．
(b) $\mathcal{L}|_V$ が $\mathcal{O}_V(n_U)$ と書けるとき n_U は U に依存しないことを示す．
(c) $\mathcal{L}|_V$ が $\pi^* \mathcal{M}_U$ $(\mathcal{M}_U \in \mathrm{Pic}\, U)$ と書けるとき $\mathcal{L}$ は $\pi^* \mathcal{M}$ と書けることを示す．

(ii) ϕ :: inj.

$\phi(\mathcal{L} \oplus n) = \pi^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_P(n) \cong \mathcal{O}_P$ となる $\mathcal{L} \oplus n \in \mathrm{Pic}\, X \oplus \mathbb{Z}$ が存在したとする．両辺に π_* を作用させて Ex5.1d (Projective formula), Prop7.11a を用いると次のよう．

$$\mathcal{L} \otimes \mathrm{Sym}^n(\mathcal{E}) \cong \mathcal{O}_X.$$

両辺の rank を計算すると $\binom{r+n-1}{r-1} = 1$ (Ex5.18a)．よって $r - 1 = 0$ or $r + n - 1$ となり，$r \geq 2$ より $n = 0$ が得られる．さらに $n = 0$ から $\mathcal{L} \otimes \mathrm{Sym}^n(\mathcal{E}) \cong \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$．まとめて，$\phi$ :: inj.

[†5] $\mathcal{E} \to \mathcal{L} \to 0$ だけで $\mathcal{L}$ と全射 :: $\mathcal{E} \to \mathcal{L}$ の組を意味する．$g^* \mathcal{E} = \mathcal{E}$ に注意．

(iii)　ϕ :: surj.

$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上の任意の invertible sheaf が $\pi^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{O}_P(n)$ の様に書けることを示さなくてはならない．まず，local にはそれが出来ることを示す．

U :: irreducible affine open subset in X, $V=\pi^{-1}(U)(\cong\mathbb{P}_A^{r-1})$ とする．X :: regular noetherian scheme だから，Prop4.1 と合わせて U :: $(*)$ (p.130)．また Cor6.16 が成り立つ．

主張 Ex7.9.1

X を，Cor6.16 が成立するものとする (特に X :: integral)．$Y=\mathbb{P}_X^n(=\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^n\times X)$ とし，また $\pi:Y\to X$ を projection of fiber product とする．Z :: prime divisor in X をとる．Cor6.16 の同型写像 $\operatorname{Cl}X\xrightarrow{\cong}\operatorname{Pic}X$ によって，$\mathcal{L}\in\operatorname{Pic}X$ が Z に対応するならば，$\pi^*\mathcal{L}\in\operatorname{Pic}Y$ は $\pi^*Z=\pi^{-1}(Z)$ (cf. Prop6.6) に対応する．

(証明)．U.Görts, T.Wedhorn “Algebraic Geometry I” p.312 にある “(11.16) Inverse image of divisors.”を参照した．

準備として，$y\in Y$ について $\pi^\#_{\pi(y)}:\mathcal{O}_{X,\pi(y)}\to\mathcal{O}_{Y,y}$ を調べよう．$\pi(y)\in V=\operatorname{Spec}A, y\in U=\operatorname{Spec}A[x_0,\dots,x_n]_{(f)}(\subset\pi^{-1}(V))$ とする．ただし $f\in A[x_0,\dots,x_n]$ は正次数をもつ斉次元である．今，projection :: $\pi|_U$ は包含写像 $A\hookrightarrow A[x_0,\dots,x_n]_{(f)}$ から誘導されている[†6]．なので $y,\pi(y)$ に対応する素イデアルをそれぞれ $\mathfrak{p},\mathfrak{q}$ とすると $\mathfrak{q}=\mathfrak{p}\cap A$ が成り立つ．また $\pi^\#_{\pi(y)}=(\pi|_U)^\#_{\pi(y)}$ だから，$\pi^\#_{\pi(y)}$ も包含写像である．

ここで，$l\geq 0$ について $\mathfrak{q}^l=\mathfrak{p}^l\cap A$ が成り立つことに注意する．このことから，$a\in A$ について

$$\pi^\#_{\pi(y)}(a)=a\in\mathfrak{p}^l\iff a\in\mathfrak{q}^l.$$

一般に，DVR :: $(R,\mathfrak{m})$ の valuation :: v_R は $r\in R$ について次を満たす．

$$v_R(r)=\sup\left\{l\geq 0\,\middle|\,r\in\mathfrak{m}^l\right\}.$$

したがって $\mathcal{O}_{X,\pi(y)},\mathcal{O}_{Y,y}$ が共に DVR である時，$\pi^\#_{\pi(y)}$ は valuation を保つ．

$$v_y\left(\pi^\#_{\pi(y)}(*)\right)=\sup\left\{l\geq 0\,\middle|\,\pi^\#_{\pi(y)}(*)\in(\mathfrak{m}_{Y,y})^l\right\}=\sup\left\{l\geq 0\,\middle|\,*\in(\mathfrak{m}_{X,\pi(y)})^l\right\}=v_{\pi(y)}(*)$$

いよいよ invertible sheaf と divisor の関係を調べていく．Z の generic point を ζ とし，Z に対応する Cartier divisor を $D=\{\langle U_i,f_i\rangle\}_i\in\operatorname{CaCl}X$ とする．$x\in X$ を codimension one の点だとすると，Prop6.11 の証明にある D の構成方法から，次が成り立つ．

$$v_x((f_i)_x)=\begin{cases}1 & x=\zeta\\ 0 & x\neq\zeta.\end{cases}$$

v_x は DVR :: $\mathcal{O}_{X,x}$ の valuation である．(X について仮定から $(*)$ が成立していることに注意．) i は $x\in U_i$ であるものならばどれでも良い．また，Z :: effective から，D :: effective (Remark 6.17.1)．すなわち，各 i について $f_i\in\Gamma(U_i,\mathcal{O}_{U_i})$．

$\pi^*\mathcal{L}$ の $y\in Y$ での stalk を見る．$\pi(y)\in U_i\subseteq X$ なる i を一つとって固定すると，次が成り立つ．

$$(\pi^*\mathcal{L})_y\cong\mathcal{L}_{\pi(y)}\otimes_{\mathcal{O}_{X,\pi(y)}}\mathcal{O}_{Y,y}=\left[(f_i^{-1})_{\pi(y)}\otimes 1_{\mathcal{O}_{Y,y}}\right]\mathcal{O}_{X,\pi(y)}\otimes_{\mathcal{O}_{X,\pi(y)}}\mathcal{O}_{Y,y}.$$

[†6] より正確には $A\to A\otimes\mathbb{Z}[x_0,\dots,x_n]_{(f)}$; $a\mapsto a\otimes 1$ から誘導されている．しかし $A\otimes\mathbb{Z}[x_0,\dots,x_n]_{(f)}\cong A[x_0,\dots,x_n]_{(f)}$; $a\otimes b\mapsto ab$ を通せばこれは単なる包含写像である．

最左の $\cong$ は left adjoint preserves colimits (LAPC) を用いて示すことが出来る．今，$\pi^{\times}_{\pi(y)}:\mathcal{O}_{X,\pi(y)}\to\mathcal{O}_{Y,y}$ を用いて $\mathcal{O}_{Y,y}$ を $\mathcal{O}_{X,\pi(y)}$-module (submodule of $\mathcal{K}_{Y,y}$) とみなしている．したがって更に計算が出来て次が得られる．

$$(\pi^*\mathcal{L})_y\cong[\pi^{\#}_{\pi(y)}((f_i)_{\pi(y)})]^{-1}\mathcal{O}_{Y,y}.$$

こうして，$\pi^*\mathcal{L}$ に対応する Cartier divisor の germ が分かった．

点 $y\in Y,\pi(y)\in X$ を共に codimension one の点だとする．i を $\pi(y)\in U_i$ なるものとしてとる．この時，X については仮定から，Y については Ex6.1 から $(*)$ が成立する．したがって $v_y(\pi^{\#}_{\pi(y)}((f_i)_{\pi(y)}))$ の値が考えられる．上述した $v_y\circ\pi^{\#}_{\pi(y)}=v_{\pi(y)}$ より，これは次の通り．

$$v_y\left(\pi^{\#}_{\pi(y)}((f_i)_{\pi(y)})\right)=v_{\pi(y)}((f_i)_{\pi(y)})=\begin{cases}1 & \pi(y)=\zeta\\ 0 & \pi(y)\neq\zeta.\end{cases}$$

よって，点 $\eta\in Y$ を $\pi(\eta)=\zeta$ を満たす codimension one の点だとすれば，$\pi^*\mathcal{L}$ は $\mathrm{cl}_Y(\{\eta\})$ に対応する．計算すると，$\mathrm{cl}_Y(\{\eta\})=\pi^{-1}(Z)=\pi^*Z.$ ∎

系 Ex7.9.2

D :: Weil divisor U をとり，$\mathcal{L}\in\operatorname{Pic}U$ が D に対応する invertible sheaf だとする．π^*D(Prop6.6) に対応する invertible sheaf は $\pi^*\mathcal{L}$ である．

irreducible & affine open subset of X :: U であって，かつ $\mathcal{E}|_U\cong\mathcal{O}_U^{\oplus r}$ となるようなものからなる open cover を $\mathfrak{U}$ とする．X :: noetherian scheme から $\mathfrak{U}$ :: finite cover.

$U\in\mathfrak{U}$ をとり，$V=\pi^{-1}(U)(\cong\mathbb{P}^{r-1}_{\mathbb{Z}}\times U)$ とする．Cor6.16 から $\operatorname{Cl}U\cong\operatorname{Pic}U$．Ex6.1 と上の主張を合わせて，$\mathbb{P}(\mathcal{E})$ 上の任意の invertible sheaf は，local には（すなわち，V に制限すれば）$(\pi|_V)^*\mathcal{L}_U\otimes\mathcal{O}_V(n_U)$ と書ける．Cor6.16 の証明にあるとおり，hyperplane (prime divisor) は twisted sheaf に対応することに注意.

$\mathcal{M}\in\operatorname{Pic}P$ をとる．上での議論から，上のような各 U,V について $\mathcal{M}|_V\cong(\pi|_V)^*\mathcal{L}_U\otimes\mathcal{O}_V(n_U)$．任意の $U\in\mathfrak{U}$ で n_U が等しいことを示そう．適当な $U\in\mathfrak{U}$ について，$n_U<0$ ならば $\mathcal{M}$ の代わりに $\mathcal{M}^{-1}$ を考える．こうすれば，少なくともひとつの U について $n_U\geq 0$ となる．projective formula を用いて以下の計算を行う．

$$\begin{aligned}&(\pi_*\mathcal{M})|_U\\ \cong&(\pi|_V)_*(\mathcal{M}|_V)\\ \cong&\mathcal{L}_U\otimes(\pi|_V)_*\mathcal{O}_V(n_U)\\ \cong&\mathcal{L}_U\otimes\operatorname{Sym}^{n_U}(\mathcal{E})|_U\end{aligned}$$

最後に Prop7.11a を用いた．$n_U\geq 0$ だから，この X 上の locally free sheaf の rank は，$\binom{n_U+r-1}{r-1}$．X :: connected より，$\pi_*\mathcal{M}$ の rank は $U\in\mathfrak{U}$ に依らない．すなわち，任意の $U,U'\in\mathfrak{U}$ について

$$\binom{n_U+r-1}{r-1}=\binom{n_{U'}+r-1}{r-1}$$

となる．ここから直ちに $n_U=n_{U'}$ が得られる．この値を $n(=n_U)$ としておこう．

$\mathcal{L}=\pi_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{O}_P(-n))$ とおく．すると $\mathcal{L}|_U=\mathcal{L}_U$ が得られる．

$$\begin{aligned}&\mathcal{L}|_U\\ \cong&(\pi|_V)_*(\mathcal{M}\otimes\mathcal{O}_P(-n))|_V\\ \cong&(\pi|_V)_*(\mathcal{M}|_V\otimes\mathcal{O}_V(-n))\\ \cong&(\pi|_V)_*(\pi|_V)^*\mathcal{L}_U\\ \cong&\mathcal{L}_U\end{aligned}$$

最後に projective formula を用いた．こうして各 $U \in \mathfrak{U}, V = \pi^{-1}(U)$ について $\mathcal{M}|_V \cong (\pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_P(n))|_V$ となる．

あとは $\mathcal{M} \cong \pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_P(n)$ を示せば良い．これは次のように示せる．$\mathrm{id}_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \pi_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_P(-n))$ を考える．これを adjoint pair :: $\pi^* \dashv \pi_*$ を使って写す．

$$\pi^*\mathcal{L} \to \mathcal{M} \otimes \mathcal{O}_P(-n).$$

additive category における adjoint functor についての一般論から，これは再び同型写像である．tensor product は全射性を保つから，$\pi^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_P(n) \to \mathcal{M}$ は全射．Ex7.1 より，これは同型である．

注意 Ex7.9.3

X の connected component が丁度 g 個ある場合には $\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \mathrm{Pic}\,X \oplus \mathbb{Z}^{\oplus g}$ となる．具体的に，各 connected component を $C_1, \dots, C_g$ とすると，$\mathrm{Pic}\,\mathbb{P}(\mathcal{E})$ の connected component は $\pi^{-1}(C_1), \dots, \pi^{-1}(C_g)$．そこで $\iota_i : \pi^{-1}(C_i) \hookrightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$ を包含射とすると同型写像は次のように成る．

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}\,X \oplus \mathbb{Z}^{\oplus g} & \to & \mathrm{Pic}\,\mathbb{P}(\mathcal{E}) \\ (\mathcal{L}, n_1, \dots, n_g) & \mapsto & \pi^*\mathcal{L} \otimes \left(\bigoplus_i (\iota_i)_*(\iota_i)^*\mathcal{O}_P(n_i) \right) \end{array}$$

証明は X の各 connected component ごとに上で示したことを用いれば良い．

(b) $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}') \iff {}^\exists\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}\,X, \quad \mathcal{E}' = \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}.$

$\mathcal{E}'$ :: locally free coherent sheaf on X とする．名前を次のように付ける: $P = \mathbb{P}(\mathcal{E}), \pi : P \to X, P' = \mathbb{P}(\mathcal{E}'), \pi' : P' \to X$.

■ $\Longrightarrow$．$\phi : P' \xrightarrow{\cong} P$ をとる．

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[rr, shift left, "\phi"] \arrow[dr, "\pi'"'] & & P \arrow[ll, shift left, "\phi^{-1}"] \arrow[dl, "\pi"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{O}_{P'}(1) \in \mathrm{Pic}\,P \cong \mathrm{Pic}\,X \oplus \mathbb{Z}$ なので，

$$\phi^*\mathcal{O}_{P'}(1) \cong \mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^*\mathcal{L} \quad (\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}\,X).$$

左辺は $\mathrm{Pic}\,P'$ の，右辺は $\mathrm{Pic}\,P$ の生成元である．（なので $\mathcal{O}_P(1)$ が右辺に現れる．）両辺に π_* を作用させて Ex5.1d (Projective formula), Prop7.11a を用いると次のよう．

$$\pi_*\phi^*\mathcal{O}_{P'}(1) \cong \mathcal{E} \otimes \mathcal{L}.$$

あとは $\pi_*\phi^* \cong \pi'_*$ を示せば，Prop7.11a から主張が得られる．ϕ が同型写像であることに注意して計算する．

$$\begin{aligned} & \mathrm{Hom}(-, \pi_*\phi^*-) \\ \cong\, & \mathrm{Hom}(\pi^*-, \phi^*-) \\ \cong\, & \mathrm{Hom}((\phi^{-1})^*\pi^*-, (\phi^{-1})^*\phi^*-) \\ \cong\, & \mathrm{Hom}(\pi'^*-, -) \\ \cong\, & \mathrm{Hom}(-, \pi'_*-) \end{aligned}$$

よって Yoneda principal から $\pi_*\phi^* \cong \pi'_*$.

■ $\Longleftarrow$． 次を示すと，Lemma7.9 から $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{P}(\mathcal{E}')$ が得られる．

$$\mathrm{Sym}^d(\mathcal{E} \otimes \mathcal{L}) \cong \mathrm{Sym}^d(\mathcal{E}) \otimes \mathcal{L}^{\otimes d}.$$

両辺が presheaf として同型であること，すなわち次が成り立つことを示す．U を X の任意の開集合とし，$A = \Gamma(U, \mathcal{O}_X), E = \Gamma(U, \mathcal{E}) \cong A^{\oplus r}, L = \Gamma(U, \mathcal{L})$ とする．

$$\mathrm{Sym}^d(E \otimes L) \cong \mathrm{Sym}^d(E) \otimes L^{\otimes d}.$$

$\mathrm{Sym}^d(E \otimes L)$ の元をとる．これは E の元 $e_1, \dots, e_d$ と L の元 $l_1, \dots, l_d$ を用いて次のように表せる．

$$(e_1 \otimes l_1) \otimes \cdots \otimes (e_d \otimes l_d).$$

また $\mathrm{Sym}^d(E) \otimes L^{\otimes d}$ の元は次のよう．

$$(e_1 \otimes \cdots \otimes e_d) \otimes (l_1 \otimes \cdots \otimes l_d).$$

これらが互いに書き換えられることは明らか．よって所望の同型が得られる．

Ex7.10 $\mathbb{P}^n$-Bundles Over a Scheme.

Ex7.11 Different Sheaves of Ideals can Give Rise to Isomorphic Blow Up Schemes.

Ex7.12

Ex7.13 * A Complete Nonprojective Variety.

Ex7.14 Very ample invertible sheaf on $\mathbf{Proj}$.

定理 Ex7.14.1

Let S be a scheme, and let X be a scheme over S. If $\mathcal{L}$ is an invertible sheaf on X, and if $s_0, \dots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ are global sections which generate $\mathcal{L}$, then there exists a unique S-morphisn1 $\phi : X \to \mathbb{P}^n_A$ such that $\mathcal{L} \cong \phi^*(\mathcal{O}_X(1))$ and $s_i = \phi^*(x_i)$ under this isomorphism.

(証明)．この定理は Thm7.1b の拡張である．前提より，$f : X \to S$ がある．まず $V = \operatorname{Spec} A \subseteq S$ をとり，$U = f^{-1}(V)$ としよう．すると $f|_U : U \to \operatorname{Spec} A$ なる射が出来る．そして Thm7.1 の証明と同じことを U と $\operatorname{Spec} A$ に行う．ただし，X_i の代わりに使うのは $U \cap X_i$ である．V を動かしていけば，$U \cap X_i$ で X を覆うことができる．そして出来上がる大量の射 :: $U \cap X_i \to \operatorname{Spec} A[x_0, \dots, x_n]_{(x_0)}$ を貼り合わせられることは明らか． ▮

定理 Ex7.14.2

Let X be a quasi-compact and finite type scheme over a scheme S, and let $\mathcal{L}$ be an invertible sheaf on X. Then $\mathcal{L}$ is ample if and only if $\mathcal{L}^{\otimes m}$ is very ample over S for some $m > 0$.

注意 Ex7.14.3

この定理は Thm7.6 の拡張である．他にこの定理の拡張は様々に述べられているが，最も拡張して述べているのはこれであろう: X is locally of finite type over S [†7]．ただし，脚注で示したページに

[†7] https://stacks.math.columbia.edu/tag/01VS

ある証明では，EGA での immersion の定義を用いている．また証明には "we can find finitely many such elements" という文があるが，この文が成り立つためには X :: quasi-compact が必要である．X :: quasi-compact を加えると，EGA での immersion の定義と教科書での immersion の定義が一致する．また "X is locally of finite type over S" は "X is of finite type over S" になる．なのでこの命題の仮定は，弱めてもこの命題のように成る．

(証明). まず，$U = \operatorname{Spec} A \subseteq S$ をとる．そして $f^{-1}(U)$ に含まれる affine open subset :: V をとる．$X - V$ について p.154 最下から p.155 最上までの議論を行うと，適当な $s \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n_s})$ について X_s :: affine open subset of X となる．$X_s \subset V \subset f^{-1}(U)$ かつ X_s :: affine なので，Ex3.3c より $\Gamma(X_s, \mathcal{O}_X)$ :: finitely generated A-algebra. U, s を動かせば X が X_s で被覆できる．X :: quasi-compact なので，U, s は有限個で事足りる．$U_i = \operatorname{Spec} A_i$ と $s_{ij} \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ を使うことにしよう．X :: quasi-compact を加えると，ただし $n = \max_{ij} n_{s_{ij}}$．また $X_{ij} = X_{s_{ij}}$ とする．後の議論は p.155 の "Now for each i, let $B_i =$..." と全く同じ．A の代わりに A_i を，B_i の代わりに $B_{ij} = \Gamma(X_{ij}, \mathcal{O}_X)$ を用いる．そして B_{ij} の A_i-algebra としての generator を b_{ijk} とし，これを Lemma5.14 を用いて拡張して c_{ijk} とする．$\{s_{ij}^n\}, \{c_{ijk}\}$ は，全て合わせて $N+1$ 個あるとしよう．これらの global sections を元に，上の定理（Thm7.1b の一般化）から $X \to \mathbb{P}_S^N$ の射を得る．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{P}_S^N \arrow[dl, "\pi'"] \\ S & \end{tikzcd}$$

i, j を適当にとり，$U = U_i \subseteq S, V = \bigcup_j X_{ij} = f^{-1}(U) \subseteq X$ とする．そこで次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi|_V"] \arrow[d, "f|_V"'] & \mathbb{P}_U^N \arrow[dl, "\pi'|_{\mathbb{P}_U^N}"] \\ U & \end{tikzcd}$$

Thm7.6 の証明と同様に $\phi|_V$ :: immersion. immersion は local な性質だから，ϕ :: immersion. ∎

(a) Example: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ is not very ample relative to X.

k :: field, $X = \mathbb{P}_k^1, r - 1 > 0, \mathcal{E} = (\mathcal{O}_X(-1))^{\oplus r}$ とする．また $P = \mathbb{P}(\mathcal{E})$ としておく．

もし $\mathcal{O}_P(1)$ が very ample ならば，上の Thm から，これは ample でもある．したがって十分大きい全ての $n > 0$ について $\mathcal{O}_P(n)(= \mathcal{O}_P(1)^{\otimes n})$ :: generated by global sections （以降は gbgs と略す）[†8]．しかし次が成り立つ．

主張 Ex7.14.4

$$^\forall n > 0, \quad \Gamma(P, \mathcal{O}_P(n)) = 0.$$

一方，$\mathcal{O}_P(n)$ は invertible sheaf だから $\mathcal{O}_P(n) \neq 0$．したがって $\mathcal{O}_P(n)$ は gbgs でなく，$\mathcal{O}_P(1)$ は very ample でない．

(証明). $n > 0$ を任意にとる．$\operatorname{rank} \mathcal{E} = r \geq 2$ であるから，Prop7.11a より次のように成る．

$$\Gamma(P, \mathcal{O}_P(n)) = \Gamma(X, \pi_* \mathcal{O}_P(n)) = \Gamma(X, \operatorname{Sym}^n(\mathcal{E})).$$

[†8] ample sheaf の定義において，$\mathcal{F} = \mathcal{O}_P$ とすると $\mathcal{F} \otimes (\mathcal{O}_P(1))^{\otimes n} = \mathcal{O}_P(n)$ :: gbgs.

$\mathrm{Sym}^n(\mathcal{E})$ の代わりに $T^n(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^{\otimes n}$ を考える．

$$\Gamma(X, \mathcal{E}^{\otimes n}) = \Gamma(X, [(\mathcal{O}_X(-1))^{\oplus r}]^{\otimes n}) = \Gamma(X, (\mathcal{O}_X(-n))^{\oplus r}).$$

Ex1.9 にある direct sum の定義から，これは $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-n))^{\oplus r}$ に等しい．そして Prop5.13 から，これは $\Gamma(X, \mathcal{O}_X(-n))^{\oplus r} = 0$.

$\Gamma(X, \mathrm{Sym}^n(\mathcal{E}))$ の定義の仕方から，$\Gamma(X, T^n(\mathcal{E})) = 0$ は $\Gamma(X, \mathrm{Sym}^n(\mathcal{E})) = 0$ を意味する．よって $\Gamma(P, \mathcal{O}_P(n)) = 0$. ∎

注意 Ex7.14.5

very ample の定義から $\mathcal{O}_X(1)$ :: very ample on X relative to $\mathrm{Spec}\, k$. Thm から $\mathcal{O}_X(1)$ :: ample. これらと Prop7.10 から，十分大きい全ての $n \gg 0$ について，$\mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(n)$ :: very ample. Prop7.11a から $\pi_*(\mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^*\mathcal{O}_X(n)) = \mathcal{E}(n)$ であることも留意せよ．

(b) $\forall n \gg 0, \quad \mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes \pi^*\mathcal{L}^n$ :: very ample.

以下のように設定する．

- X :: noetherian scheme [†9],
- Y :: scheme,
- $\mathcal{L}$ :: ample invertible sheaf on X,
- $\mathcal{J}$ :: sheaf of graded $\mathcal{O}_X$-algebra satisfying (†),
- $f : X \to Y$ :: morphism of finite type.

また $P = \mathbf{Proj}\, \mathcal{J}$ とし，$\pi : P \to X$ を projection とする．

$$P \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

“very ample invertible sheaf on P relative to Y”を $[P/Y]$ と書くことにする．

$\mathcal{L}$ :: ample on X が存在するので，Prop7.10 より，$\mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^*\mathcal{L}^{\otimes m}$ :: $[P/X]$. また Thm より十分大きい $n > 0$ について $\mathcal{L}^{\otimes n}$ :: $[X/Y]$. このことと Ex5.12b より以下は $[P/Y]$.

$$(\mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^*\mathcal{L}^{\otimes m}) \otimes \pi^*(\mathcal{L}^{\otimes n}) = \mathcal{O}_P(1) \otimes \pi^*\mathcal{L}^{\otimes m+n}$$

[†9] 教科書では明記されていないが (†) の一部である．