

ゼミノート #2

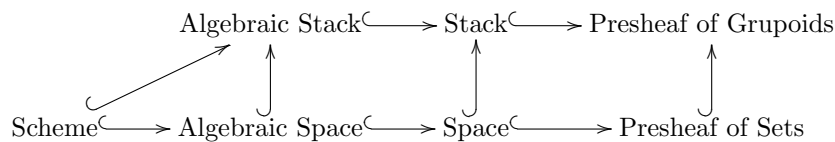
Sites and Sheaves

七条彰紀

2018 年 10 月 12 日

1 Motivation.

scheme, stack 等には以下のような包含関係がある.



最終的にセミナーを通じて我々が定義したいのは algebraic stack であるが, 今回はそれよりも定義が簡素な “space” を定義する. 先に space の定義文を示そう.

定義 1.1 (Space, [1] p.26)

$S :: \text{scheme}$ とする. Space over S (or S -space) とは, big etale site over S 上にある, 集合の sheaf である.

ここに現れる “big etale site” と “big etale site 上の sheaf” を以下で定義する. さらに sheaf の射について幾つか定義をすれば, algebraic space まで定義できる.

定義だけでは space の local は性質を調べる手段がないため, 次回は「高次版の sheaf の貼り合わせ」と呼べる “Descent theory” を学ぶ.

2 Definitions : Sites.

以下で導入する Grothendieck topology は, 「Sheaf を定義するのに必要な位相空間の定義を抽出し, 圏論的に一般化したもの」である. $X :: \text{topological space}$ とし, sheaf on X の定義を見なおしてみよう. すると, sheaf on X は次に挙げるもののみに用いて定義されていると分かる.

1. X の開部分集合と包含写像が成す圏.
2. 開部分集合 $U \subseteq X$ の open covering.
3. 同じく U の open covering $:: \{U_i\}_i$ が与えられたときの族 $\{U_i \cap U_j\}_{i,j}$

定義 2.1 (Grothendieck Topology)

$\mathbf{C} :: \text{category}$ について, \mathbf{C} 上の Grothendieck topology は任意の $X \in \mathbf{C}$ に \mathbf{C} の射の集まり (collection) $\{X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ を対応させる Cov で構成される. さらに, Cov は以下を満たすように要請される.

- (a) $X' \rightarrow X :: \text{iso}$ ならば $\{X' \rightarrow X\} \in \text{Cov}(X)$.
- (b) $\{U_i \rightarrow U\} \in \text{Cov}(U), V \rightarrow U \in \mathbf{C}$ について, $\{U_i \times_U V \rightarrow V\} \in \text{Cov}(V)$.
- (c) $\{U_i \rightarrow U\}_i \in \text{Cov}(U)$ をとり, さらに各 i について $\{V_{i,j} \rightarrow U_i\}_j \in \text{Cov}(U_i)$ をとる.
この時, 合成も Cov に入っている: $\{V_{i,j} \rightarrow U_i \rightarrow U\}_{i,j} \in \text{Cov}(U)$.

注意 2.2

Cov の条件のうち, (b), (c) はそれぞれ stable under base change, stable under composition に対応する.

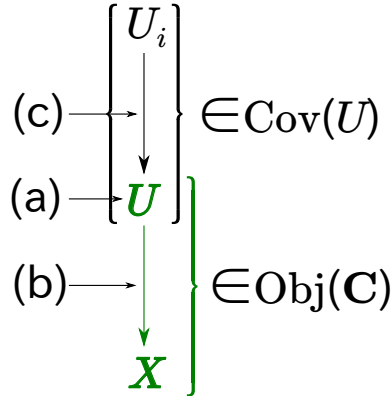
定義 2.3 (Site)

圏 \mathbf{C} と \mathbf{C} 上の Grothendieck topology $:: \text{Cov}$ の組を site と呼ぶ.

3 Examples : Sites.

例 3.1 (Classical topology.)

以下で実際に用いるのは, \mathbf{C} が slice category $:: \mathbf{Sch}/X$ ($X \in \mathbf{Sch}$) の部分圏であるような site である.
 $X \in \mathbf{Sch}$ に対して, このような site は圏と Cov からなるから, 以下の図の (a) U , (b) $U \rightarrow X$, (c) $U_i \rightarrow U$ がどのようなものであるか定めれば定義できる.



すなわち, 以下の未完成な定義文をテンプレートとする, 一連の定義文の群がある.

定義 3.2 (***) site)

$X :: \text{scheme}$ について, 圏 \mathbf{C} を以下で定める.

対象 (a) である scheme $:: U$ から X への, (b) である射 $U \rightarrow X$.

射 二つの対象の間の射 $[U \rightarrow X] \rightarrow [U' \rightarrow X]$ は, X -morphism $:: U \rightarrow U'$.

$[U \rightarrow X] \in \mathbf{C}$ に対して, $\text{Cov}(U)$ を以下のような集まりとする: (c) を満たす射の集まり $\{U_i \rightarrow U\}_i$ であって

$$\bigsqcup_i U_i \rightarrow U$$

が surjective であるものからなる集まりが $\text{Cov}(U)$.

以上の \mathbf{C} と Cov からなる site を *** site と呼ぶ.

注意 (2.2) で触れたとおり, 性質 (c) が stable under base change & composition であれば, 以上のテンプレートは site の定義文と成る.

定義 3.3

4 Definitions : Sheaves.

5 Examples : Sheaves.

6 Propositions : Sheaves.

7 Definitions : Morphism of Shaves.

8 Examples : Morphism of Shaves.

参考文献

[1] Toms L.Gmez. Algebraic stacks. <https://arxiv.org/abs/math/9911199v1>, 1999.