

ゼミノート #4.5

Fibered Categories, continued

七条彰紀

2018 年 11 月 25 日

1 Grothendieck Construction

今, fibered category から fiber として psuedo-functor を構成した. 実はこの逆が出来る.

定義 1.1 (Grothendieck Construction, [3], [2])

psuedo-functor $:: P: \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{Cat}/\mathbf{B}$ について, 以下のように圏 $\int P$ を定義する.

Object. $b \in \mathbf{B}$ と $x \in P(b)$ の組 (b, x) .

Arrow. $\phi: b \rightarrow b'$ と $\Phi: P(\phi)(x) \rightarrow x'$ の組 (ϕ, Φ) .

射の合成は $(\psi, \Psi) \circ (\phi, \Phi) = (\psi \circ \phi, \Psi \circ P(\psi)(\Phi))$ で与えられる.

この圏によって以下の関手が定まる.

$$\begin{array}{ccc} \int: \left\{ \begin{array}{c} \text{psuedo-functor} \\ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{Cat} \end{array} \right\} & \rightarrow & \mathbf{Fib}(\mathbf{B}) \\ P & \mapsto & \int P \end{array}$$

例 1.2

\underline{S} は \mathbf{Sch}/S に対応する. $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ は $\bigsqcup_{c \in \mathbf{C}} F(c)$ に対応する.

注意 1.3

David I. Spivak “Category theory for scientists”によると, Grothendieck Construction を最初に構成したのは Grothendieck ではない. 例えば MacLane が以前から扱っている.

定理 1.4 (Grothendieck Construction give Category Equivalence)

Grothendieck Construction

$$\int: \left\{ \begin{array}{c} \text{psuedo-functor} \\ \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{Cat} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{Fib}(\mathbf{B})$$

は圏同値である.

(証明). P. T. Johnstone “Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium vol.1 (Oxford Logic Guides 43)” に証明がある (この文献で言う cloven fibered category が我々の定義する fibered category である). ■

2 Category Fibered in Groupoids/Sets

2.1 Motivation

Category Fibered in Groupoids は「綺麗すぎる」fibered category であるが、我々が研究する範囲では珍しいものではない。

2.2 Definition

定義 2.1 (Groupoid)

任意の射が同型射である圏を groupoid と呼ぶ。

注意 2.2

群は対象がただ一つで任意の射が同型であるものとみなせるため、groupoid にはこの名前がある。

群以外の極めて単純な groupoid として、集合を射が恒等射しかない圏（離散圏）とみなしたものがある。そのため、逆に恒等射しか無い圏も set と呼ぶ。

定義 2.3 (Category fibered in groupoids/sets)

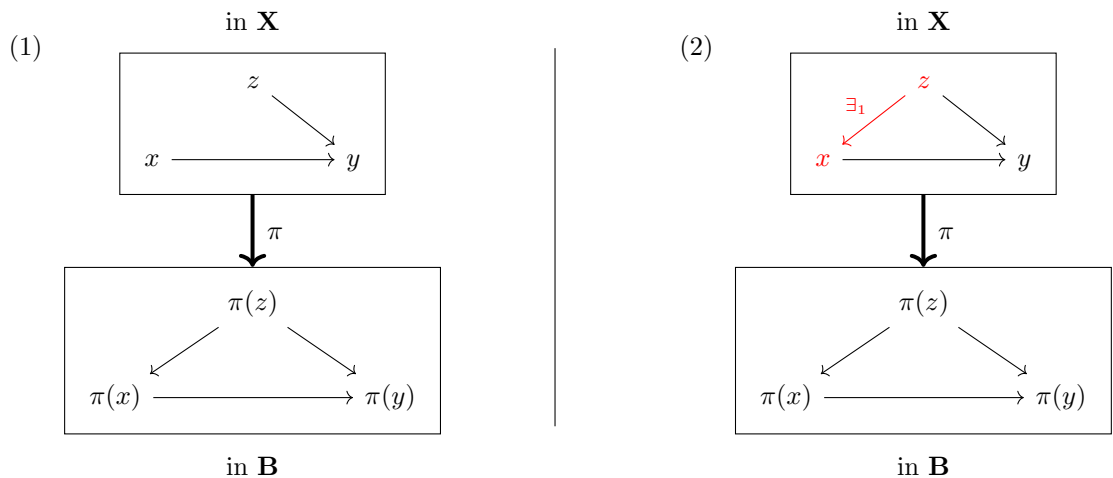
$\pi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{B}$ を fibered category とする。任意の $b \in \mathbf{B}$ について、 π の b における $\text{fiber} \mathbf{X}(b)$ が groupoid (set) であるとき、 \mathbf{X} を category fibered in groupoids (sets) と呼ぶ。

category fibered in groupoids は次のように定義しても同値である。

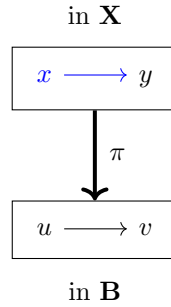
定義 2.4 (Category fibered in groupoid (Another Definition))

任意の射が cartesian である fibered category を category fibered in groupoids と呼ぶ。すなわち、以下の 2 条件が成立する圏 \mathbf{X} と関手 $\pi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{B}$ を category fibered in groupoids と呼ぶ。

- (i) 以下の図式 (1) において、上の箱と下の箱が π で対応し、下の箱にある図式が可換であるとする。この時、図式 (2) のように上の箱にある図式を可換にし、 π での対応を保つ射 $z \rightarrow x$ がただ一つ存在する。



(ii) $y \in \mathbf{X}, u \rightarrow \pi(y) \in \mathbf{B}$ に対し，以下の図式を満たす^{†1} $x \in \mathbf{X}$ と射 $x \rightarrow y \in \mathbf{X}$ が存在する．



3 Splittings of fibered categories

(ここで扱おうと思ったが，今は扱うモチベーションがないので後回しにする．)

4 Fiber Product of Category Fibered in Groupoids

(ここで扱おうと思ったが，今は扱うモチベーションがないので後回しにする．)

5 Equivalence of Fibered Categories

Fibered category の一般論の最後に，この直後に扱うことと成る Equivalence を扱う．

この節では fibered categories $:: \pi: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{B}, \pi': \mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{B}$ と，これらの間の射 $g: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}'$ を考える．

5.1 Definition

定義 5.1 (Equivalence)

g が equivalence of fibered categories であるとは，別の射 $h: \mathbf{X}' \rightarrow \mathbf{X}$ が存在し， $g \circ h, h \circ g$ がそれぞれ恒等関手と base-preserving isomorphic であるということである．

この時， $\mathbf{X} \simeq \mathbf{X}'$ と書き， h は psuedo-inverse of g と呼ばれる．

注意 5.2

比較すれば分かるとおり，equivalence of fibered categories は，通常の圏同値の定義に “base-preserving” という条件が追加されただけである．

5.2 Propositions

命題 5.3

fibered とは限らない圏 \mathbf{C}, \mathbf{D} とその間の関手 $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ について， F が圏同値であることは以下の 2 条件が同時に成立することと同値．

^{†1} すなわち， $\pi(x) = u, \pi(x \rightarrow y) = u \rightarrow \pi(y)$ を満たす．

Fully Faithfulness.

任意の $c, c' \in \mathbf{C}$ について,

関手 F が与える class の対応 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(c, c') \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(F(c), F(c'))$ は全単射である.

Essential Surjectivity.

任意の $d \in \mathbf{D}$ について, $F(c) \cong d$ となる対象 $c \in \mathbf{C}$ が存在する.

(証明). [1] Prop7.26 を参照せよ. ■

命題 5.4 ([3] Prop3.1.18, 3.1.10)

$b \in \mathbf{B}$ について, g を $\mathbf{X}(b)$ に制限して得られる関手を $g_b: \mathbf{X}(b) \rightarrow \mathbf{X}'(b)$ とする.

(a) $g :: \text{fully faithful} \iff$ 任意の $b \in \mathbf{B}$ について, $g_b :: \text{fully faithful}$.

(b) $g :: \text{equivalence} \iff$ 任意の $b \in \mathbf{B}$ について, $g_b :: \text{equivalence}$.

(証明). (TODO) ■

参考文献

- [1] Steve Awodey. *Category Theory (Oxford Logic Guides)*. Oxford University Press, U.S.A., 2 edition, 8 2010.
- [2] Behrang Noohi. A quick introduction to fibered categories and topological stacks. <http://www.maths.qmul.ac.uk/~noohi/papers/quick.pdf>.
- [3] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.