第 5 章
Algebraic Stacks and Spaces

七条彰紀

2019 年 7 月 21 日

目次

affine scheme, scheme. algebraic space, algebraic stack という貼り合わせの連なりを意識した定義をした後，algebraic stack が scheme の貼り合わせとして定義できることを示す．algebraic space と algebraic stack の定義は全く平行に行われる．そのことが分かりやすい記述を志向する．

1 Fiber Product

命題 1.1
任意の site :: $\mathbf{C}$ について，$\mathbf{C}$ 上の sheaf の圏 $\mathbf{Shv}(\mathbf{C})$ は fiber poduct を持つ．

(証明)．二つの射 $\mathcal{F} \to \mathcal{H}, \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ をとる．

$$\mathbf{C} \ni U \mapsto \mathcal{F}(U) \times_{\mathcal{H}(U)} \mathcal{G}(U)$$

とすれば，これは fiber product となる． ∎

$\mathbf{B}$ :: category とする．この時，$\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ は以下のような圏であった．

Objects: fibered categories over $\mathbf{B}$.
Arrows: base-preserving natural transtormation.

新たに圏 $\mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ を以下のように定義する．

Objects: categories fibered in groupoids(CFG) over $\mathbf{B}$.
Arrows: base-preserving natural transtormation.

重要なのは次の存在命題である．

命題 1.2 ([3] p.10)
任意の圏 $\mathbf{C}$ について，$\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ と $\mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ は fibered product を持つ．

(証明)．$\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ の射 $F : \mathcal{X} \to \mathcal{Z}$ と $F : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ をとり，F, G の fiber product を実際に構成する．

■圏 $\mathbf{P}$ の構成　圏 $\mathbf{P}$ を以下のように定義する．

Objects: 以下の 4 つ組

(i) $b \in \mathbf{B}$,
(ii) $x \in \mathcal{X}(b)$,
(iii) $y \in \mathcal{Y}(b)$,
(iv) $\mathcal{Z}$ の恒等射上の同型射 $\alpha : Fx \to Gy$.

Arrows:

射 $(b, x, y, \alpha) \to (b', x', y', \alpha')$ は，二つの射 $\phi_{\mathcal{X}} : x \to x', \phi_{\mathcal{Y}} : y \to y'$ であって以下を満たすもの: $\phi_{\mathcal{X}}, \phi_{\mathcal{Y}}$ は同じ射 $b' \to b$ 上の射で，以下の可換図式を満たすもの．

$$\begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F\phi_{\mathcal{X}}"'] & Gy \arrow[d, "G\phi_{\mathcal{Y}}"] \\ Fx' \arrow[r, "\alpha'"'] & Gy' \end{tikzcd}$$

■**Cartesian Lifting in P.**　この圏は $\pi\colon (b,x,y,\alpha)\mapsto b$ によって fibered category と成る．$f\colon b'\to b$ の $\xi=(b,x,y,\alpha)$ に関する Cartesian Lifting :: $f^*\xi\to\xi$ は次のように定義される．

$$\chi_\xi=(f^*x\xrightarrow{\chi_x}x,f^*y\xrightarrow{\chi_y}y)\colon f^*\xi=(b',f^*x,f^*y,\bar{\alpha})\to\xi.$$

ここで $\chi_x\colon f^*x\to x$ は f の x に関する Cartesian Lifting である．χ_y も同様．さらに $\bar{\alpha}$ は以下の Triangle Lifting で得られる射である[†1]．

in $\mathcal{Z}$

$$\begin{tikzcd}
Ff^*x \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "F\chi_x"'] & Gf^*y \arrow[d, "G\chi_y"] \\
Fx \arrow[r, "\alpha"'] & Gy
\end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi_{\mathcal{Z}}$$

$$\begin{tikzcd}
b' \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "f"'] & b' \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, "\mathrm{id}"] & b
\end{tikzcd}$$

in **B**

fibered category の間の射は cartesian arrow を保つので $F\chi_x,G\chi_y$ も cartesian．したがって Triangle Lifting が出来る．$\bar{\alpha}$ が同型であることは Triangle Lifting の一意性を用いて容易に証明できる．また，この可換図式から χ_ξ が $\mathbf{P}$ の射であることも分かる．

■$\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}$ **が category fibered in groupoids(CFG) ならば P も CFG**　$\mathcal{X},\mathcal{Y},\mathcal{Z}$ が CFG ならば $\mathbf{P}$ も CFG となる．実際，$\phi_{\mathcal{X}}\colon x\to x'$ と $\phi_{\mathcal{Y}}\colon y\to y'$ の両方が cartesian ならば $(\phi_{\mathcal{X}},\phi_{\mathcal{Y}})\colon (b,x,y,\alpha)\to(b',x',y',\alpha')$ は cartesian である．

■**P からの射影写像．**　定義から明らかに $\mathrm{pr}_1\colon\mathbf{P}\to\mathcal{X},\mathrm{pr}_2\colon\mathbf{P}\to\mathcal{Y}$ が定義できる．射の定義にある可換図式は，以下の A が natural transformation であることを意味している．

$$\begin{array}{rccc}
A\colon & F\,\mathrm{pr}_1 & \to & G\,\mathrm{pr}_2 \\
 & (F\,\mathrm{pr}_1)((b,x,y,\alpha))=Fx & \mapsto & \alpha(Fx)=\alpha((F\,\mathrm{pr}_1)((b,x,y,\alpha)))
\end{array}$$

A が base-preserving であることは α が恒等射上のもの (i.e. $\pi_{\mathcal{Z}}(\alpha)=\mathrm{id}$) であることから，isomorphism であることは α が同型であることから示される．

■**P :: fiber product．**　今，$\mathcal{W}\in\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B})$ と射 $S\colon\mathcal{W}\to\mathcal{X},T\colon\mathcal{W}\to\mathcal{Y}$ 及び base-preserving isomorphism :: $\delta\colon FS\to GT$ をとる．base-preserving なので，任意の $w\in\mathcal{W}$ について $\pi_{\mathcal{Z}}(FS(w))=\pi_{\mathcal{Z}}(GT(w))$．そこで次のように関手が定義できる．

[†1] $f^*\alpha\colon f^*Fx\to f^*Gy$ とは異なる．同型 $Ff^*x\to F^*Fx,Gf^*y\to f^*Gy$ と $f^*\alpha\colon Fx\to Gy$ を合成しても $\bar{\alpha}$ は得られる．

$$
\begin{array}{llcc}
H\colon & \mathcal{W} & \to & \mathbf{P} \\
\textbf{Object} & w & \mapsto & (\pi_{\mathcal{Z}}(FS(w)), Sw, Tw, \delta_w) \\
\textbf{Arrow} & [\phi\colon w \to w'] & \mapsto & (S\phi\colon Sw \to Sw', T\phi\colon Tw \to Tw')
\end{array}
$$

このように置くと，$S = \mathrm{pr}_1 H, T = \mathrm{pr}_2 H$ となる．逆に $S \cong \mathrm{pr}_1 H', T \cong \mathrm{pr}_2 H'$ となる関手 $H'\colon \mathcal{W} \to \mathbf{P}$ は H と同型に成ることが直ちに分かる． ∎

注意 1.3

session4 命題 4.5 より，CFG の恒等射上の射は同型射である．したがって $\alpha\colon Fx \to Gy$ に課せられた条件は，$\mathcal{Z}$ が CFG ならば一つしか無い．

例 1.4

representable fibered category の fiber product.

sheaf に対応する fibered category の fiber product $\int \mathcal{F} \times_{\int \mathcal{H}} \int \mathcal{G}$ に対応する sheaf は，sheaf の fiber product に対応する．

$$
\left(\int \mathcal{F} \times_{\int \mathcal{H}} \int \mathcal{G} \right)(-) = \mathcal{F} \times_{\mathcal{H}} \mathcal{G} \quad \in \mathbf{Shv}(\mathbf{C})
$$

我々が扱うのは stack であるから，stack という性質が fiber product で保たれていて欲しいが，果たしてそうなる．

命題 1.5 ([5] Prop 4.6.4)

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ :: stack over $\mathbf{C}$ とし，morphism of stacks :: $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Z}, G\colon \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ をとる．この時，F, G についての fiber product :: $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}$ は stack である．

したがって結局 $\mathbf{Fib}^{\mathrm{bp}}(\mathbf{B}), \mathbf{CFG}(\mathbf{B})$ と，stack の圏及び stack in groupoids の圏は fiber product を持つ．我々が実際に扱うのは stack in groupoids である．

(証明)．$\mathcal{P} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}$ とおく．$U \in \mathbf{C}, \mathcal{U} = \{\phi_i\colon U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ を任意にとり，$\epsilon_{\mathcal{U}}\colon \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ を計算する．

■$\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$．　$\xi = (b, x, y, \alpha)$ をとり，$\epsilon_{\mathcal{U}}(\xi)$ を計算する．まず $\{\phi_i^* \xi\}_i$ は既に詳しく説明した．注意が必要なのは同型 $\sigma_{ij}\colon \mathrm{pr}_2^* \phi_i^* \xi \to \mathrm{pr}_1^* \phi_j^* \xi$ である．可換性は以下の図式から分かる．

in $\mathcal{Z}$

$$
\boxed{\begin{tikzcd}
F \operatorname{pr}_2^* \phi_j^* x \arrow[r, "\bar{\alpha}"] \arrow[d, "\sigma_{ij}^x"'] & G \operatorname{pr}_2^* \phi_j^* y \arrow[d, "\sigma_{ij}^y"] \\
F \operatorname{pr}_1^* \phi_i^* x \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] \arrow[d] & G \operatorname{pr}_1^* \phi_i^* y \arrow[d] \\
Fx \arrow[r, "\alpha"'] & Gy
\end{tikzcd}}
$$

$$\Big\downarrow \pi_{\mathcal{Z}}$$

$$
\boxed{\begin{tikzcd}
b' \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & b' \arrow[d, equal] \\
b' \arrow[r, equal] \arrow[d, "\phi_j \circ \operatorname{pr}_2"'] & b' \arrow[d, "\phi_i \circ \operatorname{pr}_1"] \\
b \arrow[r, equal] & b
\end{tikzcd}}
$$

in $\mathbf{B}$

■$\epsilon_{\mathcal{U}}(\kappa)$. (TODO)

∎

2 Diagonal Map

注意 2.1

以降は S :: scheme をとり，$\mathbf{C} = \mathrm{ET}(S)$ :: big etale site over S 上の sheaf あるいは stack in groupoids のみを考える．

定義 2.2 (Diagonal Map)

sheaf あるいは stack in groupoids over S:: $\mathcal{X}/S$（すなわち射 $\mathcal{X} \to S$）の diagonal map :: Δ とは，以下の可換図式に収まる射のことである．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[dr, "\Delta"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& \mathcal{X} \times \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d] \\
& \mathcal{X} \arrow[r] & S
\end{tikzcd}
$$

3 Local Property of Scheme/Morphism of Them

定義 3.1 ([2] p.100, Local Property for the topology.)

S :: scheme とし，$(\mathbf{Sch}/S)$ 上の site :: $\mathbf{C}$ を考える．X, Y :: scheme とし，$\{\phi_i \colon X_i \to X\} \in$

$\mathrm{Cov}(X), \{\psi_i\colon Y_i \to Y\} \in \mathrm{Cov}(Y)$ を任意に取る．

(i) P を scheme の性質とする．P が local for the topology であるとは，以下が成り立つということ: X が P であることは，全ての U_i が P であることと同値．

(ii) P を scheme の射の性質とする．P が local on source であるとは，以下が成り立つということ: $f\colon X \to Y$ が P であることは，全ての $f \circ \phi_i$ が P であることと同値．

(iii) P を scheme の射の性質とする．P が local on target であるとは，以下が成り立つということ: $f\colon X \to Y$ が P であることは，全ての $\mathrm{pr}_2\colon X \times_Y Y_i \to Y_i$ が P であることと同値．

(iv) ([5] 5.1.3) P を scheme の射の性質とする．以下が全て成り立つ時，P は stable であると呼ばれる．

- 任意の同型は P.
- P は，射の合成で保たれる．
- P は，任意の $\mathbf{C}$ の射による base change で保たれる．
- local on target.

(v) ([4] p.33, [3] p.16) P を scheme の射の性質とする．以下が全て成り立つ時，P は smooth (resp. etale) local on source and target であると呼ばれる．: $X' \to Y' \times X, Y' \to Y$ が smooth (resp. etale) surjective であるような，次の形の任意の可換図式をとる．

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & Y' \times X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

この時，f が P であることは f' が P であることと同値．

例 3.2 ([6] Tag 0238)
etale topology での定義を挙げる．

local for the topology である性質の例
: locally Noetherian, reduced, normal, regular.

local on source である性質の例
: flat, locally of finite presentation, locally of finite type, open, smooth, etale, unramified, locally quasi-finite.

local on target である性質の例
: quasi-compact, quasi-separated, universally closed, separated, surjective, locally of finite type, locally of finite presentation, proper, smooth, etale, unramified, flat.

local on source and target である性質の例
: flat, locally of finite presentation, locally finite type, smooth, etale, unramified...

注意 3.3
“local on source and target” は，algebraic space, algebraic stack の射について性質を定めるときに必要に成る．この定義は文献に寄って数種類ある．私が知る限りのものを以下に列挙する．

SP
: [6] Tag 04QZ.

DM

X, Y を scheme とし，$\{\phi_i : X_i \to X\} \in \mathrm{Cov}(X), \{\psi_i : Y_i \to Y\} \in \mathrm{Cov}(Y)$ を任意の cover とする．$\{f_i : X_i \to Y_i\}$ を以下の可換図式を満たす射の族とする．

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "f_i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y_i \arrow[r, "\psi_i"'] & Y \end{tikzcd}$$

この時，射 f が P であることと，全ての射 f_i が P であることは同値．[2], p.100 より．

DM'

以下の scheme の可換図式が成立しているとする．

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

ただし $X' \to X, Y' \to Y$ は cover である．この時，射 f が P であることと，射 f' が P であることは同値．[6] Tag 04R4 で Deligne-Mumford の定義として参照されている．

ST

local on source かつ local on target.

ST+

次の 5 条件を合わせたもの．

- 同型について成立する，
- stable under composition,
- stable under base change,
- local on source,
- local on target.

[5] Def 5.1.3, 5.4.11 で採用されている．

La

X, Y :: scheme とし，射 $Y' \to Y, X' \to Y' \times X$ を cover とする．この時，$f : X \to Y$ と合わせると次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & Y' \times X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y' \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

この時，f が P であることは f' が P であることと同値．[4] p.33, [3] p.16 で採用されている．

La'

X, Y :: scheme とし，射 $Y' \to Y, X' \to X$ を cover とする．この時，$f : X \to Y$ と合わせると次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd} X' \times_Y Y' \arrow[rr] \arrow[d, "f'"'] \arrow[drr, phantom, "\text{p.b.}"] & & Y' \arrow[d] \\ X' \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

この時，f が P であることは f' が P であることと同値.

強弱関係は次の通り.

$$
\begin{tikzcd}
ST+ \arrow[r, Rightarrow] & SP \arrow[r, Rightarrow] & DM \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & DM' \arrow[r, Rightarrow] & La \arrow[r, Rightarrow] & La' \\
 & & & ST \arrow[u, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}
$$

SP $\Longrightarrow$ DM $\Longrightarrow$ ST は [6] Tag 04R4 による．SP $\Longrightarrow$ DM $\Longrightarrow$ ST, DM' $\Longrightarrow$ La $\Longrightarrow$ La' のそれぞれの $\Longrightarrow$ は逆が成り立たないことも分かっている．また，DM' と local on target を合わせたものは DM と同値である.

我々としては,「便利な性質」をもち，かつ弱い定義を取りたい．後に示すとおり，La を仮定すれば十分「便利」である.

4 Algebraic Space

4.1 Representable Ones.

定義 4.1 (Representable Space)
stack :: $\mathcal{X}$ が representable (by scheme) であるとは，ある scheme :: X が存在し，$\mathcal{X} \cong X = \mathbf{Sch}/X$ であるということ.

定義 4.2 (Representable Morphism of Spaces)
morphism of spaces :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が representable (by scheme) であるとは，任意の S-scheme :: U と $\mathbf{C}$ の射 $U \to \mathcal{Y}$ について，fiber product :: $U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ が representable (by scheme) であるということ.

命題 4.3 (Representable Diagonal Morphism)
$\mathcal{F}$ :: stack on $\tau(S)$ 以下は同値である.

(i) $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ は表現可能.

(ii) 任意の scheme :: U と射 $U \to \mathcal{X}$ について，$U \to \mathcal{X}$ :: representable.

(iii) 任意の scheme :: U, V と射 $u\colon U \to \mathcal{X}, v\colon V \to \mathcal{X}$ について $U \times_{\mathcal{X}} V$ :: representable.

(証明). (ii) $\Longleftrightarrow$ (iii) は representable morphism の定義から直ちに分かる．(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) は以下が pullback diagram であることから分かる.

$$
\begin{tikzcd}
U \times_{\mathcal{X}} V \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & U \times_S V \arrow[d, "u\times v"] \\
\mathcal{X} \arrow[r, "\Delta"'] & \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}
\end{tikzcd}
$$

(TODO: もう少し詳しく．) ∎

定義 4.4 (Property of Representable Spaces/Morphism of Them)

(i) $\mathcal{P}$ を scheme の性質で local for etale topology であるものとする．この時，representable space :: $\mathcal{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathcal{X}$ を represent する scheme が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである.

(ii) $\mathcal{P}$ を morphism of schemes の性質で local on target かつ stable under base change であるものとする．この時，representable morphism of spaces :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，任意の $U \in \mathbf{C}$ と射 $U \to \mathcal{Y}$ について，$\mathrm{pr}\colon \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U \to U$ （に対応する morphism of algebraic schemes）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

4.2 Definition of Algebraic Space

定義 4.5 (Algebraic Space)
S :: scheme とし，$\mathcal{X}$ を space over S（すなわち big etale site $\mathrm{Et}(S)$ 上の sheaf）とする．$\mathcal{X}$ が algebraic であるとは，次が成り立つということである．

(i) diagonal morphism :: $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が representable である．

(ii) scheme :: U からの etale surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ が存在する．

Algebraic space の射は space としてのものである．

以下では scheme の性質と scheme の射の性質を algebraic space へ拡張する．

4.3 Properties of Algebraic Space/Morphism of Algebraic Spaces

定義 4.6 (Property of Algebraic Spaces)

(i) $\mathcal{P}$ を scheme の性質であって，local for etale topology であるものとする．この時，algebraic stack :: $\mathcal{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathcal{X}$ のある atlas が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(ii) algebraic stack :: $\mathcal{X}$ が quasi-compact [†2]であるとは，$\mathcal{X}$ のある atlas が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

定義 4.7 (Property of Morphism of Algebraic Spaces)
$\mathcal{P}$ を morphism of scheme の性質であって，local on source and target であるものとする．以下の可換図式で，$V \to \mathcal{Y}, U \to V \times \mathcal{X}$ は cover であるとする．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & V \times \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ & V \arrow[r] & \mathcal{Y} \end{tikzcd} \tag{PM}$$

この時，<u>morphism of algebraic spaces</u> :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，この可換図式にある f'（に対応する morphism of scheme）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

補題 4.8

(a) $\mathcal{X}$ を representable space とし，P を algebraic space の性質とする．f が algebraic space として性質 P を持つことと，representable space として性質 P を持つことは同値．

(b) $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を representable morphism とし，P を algebraic space の射の性質とする．f が algebraic space の射として性質 P を持つことと，representable morphism として性質 P を持つことは同値．

[†2] 明らかに，これは local for etale topology ではない．

(証明). $\mathcal{X}$ が scheme :: X で表現されるならば $X \to \mathbf{Sch}/X \cong \mathcal{X}$ が atlas なので (a) が成立する．

以下の図式で id: $V \to V$ が etale surjective なので $U \to V \times \mathcal{X}$ も etale surjective である．また representable morphism の性質は，scheme の射の性質として local on target であるものに限っていた．したがって (b) が成立する．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[d, "f''"'] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & V \times \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\
V \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & V \arrow[r] & \mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

∎

補題 4.9

(a) P を scheme の性質で local for etale topology なものとする．
一つの etale surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ について U が性質 P を持つならば，
任意の etale surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ について U が性質 P を持つ．

(b) P を morphism of scheme の性質であって，local on source and target であるものとする．
一つの $V \to \mathcal{Y}, U \to U \times \mathcal{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つならば，
任意の $V \to \mathcal{Y}, U \to U \times \mathcal{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つ．

(証明). [6] Tag 06FM ∎

補題 4.10

P を algebraic space の射の性質とする．

(a) P が scheme の射の性質として stable under base change ならば，algebraic space の射の性質としても stable under base change.

(b) P が scheme の射の性質として stable under composition ならば，algebraic space の射の性質としても stable under composition.

(証明). (a) は [6] Tag 0CII を参考にすれば良い．

(b) を示す．準備として次を示す．

主張 4.11

U :: scheme とする．$f\colon U \to \mathcal{X}, g\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が etale, surjective ならば，合成 $g \circ f\colon U \to \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ も etale, surjective である．

(証明). etale, surjective は scheme の射の性質として stable under base change かつ stable under composition であることに注意する．

$V \to \mathcal{Y}, W \to V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ を scheme からの etale surjective (e.s.) 射とする．この時 fiber product を組み合

わせて以下の可換図式が得られる．(pullback lemma を暗黙のうちに用いている．)

$$\begin{tikzcd}
W \times_{\mathcal{X}} U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & V \times_{\mathcal{X}} U \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & U \arrow[d, "f"] \\
W \arrow[r] \arrow[dr] & V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "g"] \\
& V \arrow[r] & \mathcal{Y}
\end{tikzcd}$$

この時，以下のように $W \times U \to W \to V$ と $W \times U \to V \times U$ が e.s. であることが示せる．

- $f\colon U \to \mathcal{X}$ :: e.s. かつ representable $\implies$ $W \times U \to W$ :: e.s.
- $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ :: e.s. $\implies$ $W \to V$ :: e.s.
- $W \times U \to W, W \to V$ :: e.s. $\implies$ $W \times U \to W \to V$ :: e.s.
- $W \to V \times \mathcal{X}$ :: e.s. かつ representable $\implies$ $W \times U = W \times (V \times U) \to V \times U$ :: e.s.

etale は local on source な性質なので $V \times U \to V \times X \to V$ も etale. また surjective の圏論的な性質から surjective であることも分かる．この二つから，representable morphism :: $g \circ f\colon U \to \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ は e.s. である． ∎

この主張を用いて (b) を示す．

etale surjective 射 :: $W \to \mathcal{Z}, V \to W \times \mathcal{Y}, U \to V \times \mathcal{X}$ から次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & V \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & W \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\
& V \arrow[r] \arrow[dr, "g'"'] & W \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{Y} \arrow[d, "g"] \\
& & W \arrow[r] & \mathcal{Z}
\end{tikzcd}$$

定義から g が P であることと g' が P であることは同値．また，主張から $W \to W \times \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ は etale surjective 射である．したがって再び定義から，f が P であることと f' が P であることは同値．最後に，$U \to V \times \mathcal{X} \to W \times \mathcal{X}$ も etale surjective であるから，$g \circ f$ が P であることと $g' \circ f'$ が P であることは同値である． ∎

5 Algebraic Stack

節 5.2 以外は algebraic space の節にある定義文を

- “Space” $\to$ “Stack”,
- “Scheme” $\to$ “Algebraic Space”

と置換しただけで得られるので読み飛ばして構わない．

5.1 Representable Ones

定義 5.1 (#Representable Stack)
stack :: $\mathcal{X}$ が representable であるとは，ある algebraic space :: X が存在し，$\mathcal{X} \cong \mathcal{X} = \int X$ であるということ．

定義 5.2 (#Representable Morphism of Stacks)
morphism of stacks :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が representable であるとは，任意の S-algebraic space :: U と $\mathbf{C}$ の射 $U \to \mathcal{Y}$ について，fiber product :: $U \times_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}$ が representable であるということ．

補題 5.3 (#)
$\mathcal{X}$ :: stack in groupoids on $\mathbf{C}$ とする．以下は同値である．

(i) $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ は表現可能．

(ii) 任意の algebraic space :: U と射 $U \to \mathcal{X}$ について，$U \to \mathcal{X}$ :: representable.

(iii) 任意の algebraic space :: U, V と射 $U \to \mathcal{X}, V \to \mathcal{X}$ について $U \times_{\mathcal{X}} V$ :: representable.

定義 5.4 (#Property of Representable Stacks/Morphism of Them)

(i) $\mathcal{P}$ を scheme の性質で local for etale topology であるものとする．この時，representable stack :: $\mathcal{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathcal{X}$ を represent する algebraic space が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(ii) $\mathcal{P}$ を morphism of scheme の性質で local on target かつ stable under base change であるものとする．この時，representable morphism of stacks :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，任意の $U \in \mathbf{C}$ と射 $U \to \mathcal{Y}$ について，$\mathrm{pr}\colon \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} U \to U$ （に対応する morphism of algebraic algebraic spaces）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

5.2 Definition of Algebraic Stack

定義 5.5 (Algebraic Stack (Artin Stack))
S :: scheme とし，$\mathcal{X}$ を stack on $\mathrm{ET}(S)$ とする．$\mathcal{X}$ が algebraic であるとは，次が成り立つということである．

(a) diagonal morphism :: $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が representable である．

(b) algebraic space :: U からのsmooth surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ が存在する．

射は stack in groupoids としての射である．

補題 (5.3) から，二つの条件は意味を成す．

定義 5.6 (#Deligne-Mumford(DM) Stack)
S :: scheme とし，$\mathcal{X}$ を stack on $\mathrm{ET}(S)$ とする．$\mathcal{X}$ が algebraic であるとは，次が成り立つということである．

(a) diagonal morphism :: $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が representable である．

(b) algebraic space :: U からの etale surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ が存在する．

射は stack in groupoids としての射である．

以下，Algebraic Stack と言った時は DM か Artin かを限定しない．

注意 5.7
我々が採用する algebraic stack の定義は，しばしば Artin stack の定義として参照される．

歴史的には，DM stack の方が先に定義された．これは 1969 年の論文 [2] でのことである．動機は algebraic stack $\bar{\mathcal{M}}_g$ を通して，coarse moduli scheme の性質を調べることだった．しばしば DM stack の定義として $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ は quasi-compact かつ separated であるものとする．しかしこれは [2] では要求されて居ない．

一方，Artin stack は 1974 年の論文 [1] で DM stack の一般化として定義された．我々が扱う Algebraic stack の定義（したがって多くの文献での "Artin stack"の定義）は，原論文のものとは異なる．Artin stack をどの site 上の stack として定義するか，という部分にも文献に寄って違いがある．[1], [6] では fppf site を考え，[4], [5] では etale site を考える．

5.3 Properties of Algebraic Stack/Morphism of Algebraic Stacks

以下では scheme の性質と scheme の射の性質を algebraic stack へ拡張する．

定義 5.8 (#Property of Algebraic Stack)

(i) $\mathcal{P}$ を scheme の性質であって，local for etale topology であるものとする．この時，algebraic stack :: $\mathcal{X}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，$\mathcal{X}$ のある atlas が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

(ii) algebraic stack :: $\mathcal{X}$ が quasi-compact [†3]であるとは，$\mathcal{X}$ のある atlas が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

定義 5.9 (#Property of Morphism of Algebraic Stack, [4] p.33, [2] p.100)
$\mathcal{P}$ を morphism of scheme の性質であって，smooth local on source and target であるものとする．あるいは，DM stack を考えるならば etale local on source and target であるものとする．以下の可換図式で，$V \to \mathcal{Y}, U \to V \times \mathcal{X}$ は atlas であるとする[†4]．

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[dr, "f'"'] & V \times \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & \mathcal{X} \arrow[d, "f"] \\ & V \arrow[r] & \mathcal{Y} \end{tikzcd} \tag{PM}$$

この時，morphism of algebraic spaces :: $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ が性質 $\mathcal{P}$ を持つとは，この可換図式にある f'（に対応する morphism of scheme）が性質 $\mathcal{P}$ を持つということである．

補題 5.10 (#)

[†3] 明らかに，これは local for etale topology ではない．
[†4] すなわち，algebraic stack(Artin stack) を考えているならば smooth surjective morphism を考え，DM stack を考えているならば etale surjective morphism を考える．

(i) $\mathcal{X}$ を representable stack とし，P を algebraic stack の性質とする．f が algebraic stack として性質 P を持つことと，representable stack として性質 P を持つことは同値．

(ii) $f\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ を representable morphism とし，P を algebraic stack の射の性質とする．f が algebraic stack の射として性質 P を持つことと，representable morphism として性質 P を持つことは同値．

補題 5.11 (#)

(i) P を scheme の性質で local for etale topology なものとする．
一つの etale surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ について U が性質 P を持つならば，
任意の etale surjective morphism :: $U \to \mathcal{X}$ について U が性質 P を持つ．

(ii) P を morphism of scheme の性質であって，local on source and target であるものとする．
一つの $V \to \mathcal{Y}, U \to U \times \mathcal{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つならば，
任意の $V \to \mathcal{Y}, U \to U \times \mathcal{X}$ の組み合わせについて図式 (PM) の f' が性質 P を持つ．

(証明)．[6] Tag 06FM ∎

補題 5.12 (#)
P を algebraic stack の射の性質とする．

(i) P が scheme の射の性質として stable under base change ならば，algebraic stack の射の性質としても stable under base change.

(ii) P が scheme の射の性質として stable under composition ならば，algebraic stack の射の性質としても stable under composition.

(証明)．algebraic space の場合の繰り返しである． ∎

6 Definition of Quotient stack

Algebraic stack の具体例として Quotient stack を扱う．この例を通じて特に，「diagonal morphism $\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が表現可能とはどういうことか」ということを考えたい．参考文献として [4] 1.3.2, [2] Example 4.8, [5] Example 8.1.12 を参照する．

6.1 Definitions.

6.1.1 $\mathcal{G}$-torsor

定義 6.1 (Equivariant Morphism)
一般の site :: $\mathbf{C}$ をとり，$\mathcal{G}$ を $\mathbf{C}$ 上の sheaf of groups とする．sheaf :: $\mathcal{F}$ と，$\mathcal{G}$ からの左作用 $\alpha\colon \mathcal{G} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ を組にして $(\mathcal{F}, \alpha)$ と書く．$\mathcal{G}$ からの左作用を持つ sheaf の間の射 $(\mathcal{F}, \alpha) \to (\mathcal{F}', \alpha')$ とは，sheaf の射 $f\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ であって以下が可換図式であるもの．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} \times \mathcal{F} \arrow[r, "\mathrm{id}\times f"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathcal{G} \times \mathcal{F}' \arrow[d, "\alpha'"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "f"'] & \mathcal{F}' \end{tikzcd}$$

このような射 f は $\mathcal{G}$-equivariant morphism（$\mathcal{G}$ 同変写像）と呼ばれる．

定義 6.2 ($\mathcal{G}$-Torsor, [5] 4.5.1, [6] Tag 04UJ)
一般の site :: $\mathbf{C}$ をとり，$\mathcal{G}$ を $\mathbf{C}$ 上の sheaf of groups とする．$\mathbf{C}$ 上の $\mathcal{G}$-torsor とは，$\mathbf{C}$ 上の sheaf :: $\mathcal{P}$ と左作用 $\alpha\colon \mathcal{G}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P}$ の組であって，次を満たすもの．

T1 任意の $X\in\mathbf{C}$ について cover of X :: $\{X_i\to X\}$ が存在し，$\mathcal{P}(X_i)\neq\emptyset$.
T2 写像

$$\langle \mathrm{pr}_2,\alpha\rangle\colon \mathcal{G}\times\mathcal{P}\to\mathcal{P}\times\mathcal{P};\quad (p,g)\mapsto(p,\alpha(g,p))$$

は同型．ただし，$\langle \mathrm{pr}_1,\alpha\rangle$ は $\mathcal{P}\times\mathcal{P}$ の普遍性と $\mathrm{pr}_1,\alpha\colon \mathcal{P}\times\mathcal{G}\to\mathcal{P}$ から得られる射である．

$\mathcal{G}$-torsor の射は $\mathcal{G}$-equivariant morphism である．
$(\mathcal{P},\alpha)$ が $\mathcal{G}$-torsor :: $(\mathcal{G},m)$ （ただし $m\colon \mathcal{G}\times\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ は積写像）と同型である時 $\mathcal{G}$-torsor :: $(\mathcal{P},\alpha)$ は自明 (trivial) であると言う．

注意 6.3
$\mathcal{G},\mathcal{P}$ の両方が scheme で表現できる場合には，$\mathcal{G}$-torsor は principal bundle と呼ばれる．group scheme に対応する representable sheaf が

注意 6.4
任意の $X\in\mathbf{C}$ について $\mathcal{P}(X)\neq\emptyset$ である場合には，条件 T2 は作用 α が単純推移的であることを意味する．すなわち，任意の $p,q\in\mathcal{P}(X)$ についてただ一つの $g\in\mathcal{G}(X)$ が存在し，$q=g*q=\alpha(g,p)$ となる．

補題 6.5 ([6] Tag 03AI, [5] 4.5.1)
(i) $\mathcal{G}$-torsor :: $(\mathcal{P},\alpha)$ が自明であることと，$\mathcal{P}$ が global section[†5] を持つことと同値．
(ii) $\mathcal{P}(X)\neq\emptyset$ ならば制限 $\mathcal{P}|_X$ は trivial.
(iii) 同型 $\mathcal{G}|_X\to\mathcal{P}|_X$ と $\mathcal{P}(X)$ の元は一対一に対応する．

(証明). $(\mathcal{P},\alpha)$ が自明であると仮定すると，次のように global section が得られる．

$$1\to\mathcal{G}\cong\mathcal{P};\quad *\mapsto e$$

ただし e は $\mathcal{G}$ の単位元である．
p を $\mathcal{P}$ の global section とすると，

$$\mathcal{G}\to\mathcal{P};\quad g\mapsto\alpha(g,p)$$

という射が定義できる．これは定義にある条件 T2 から同型である．
$s\in\mathcal{P}(X)$ をとれば，scheme の任意の射 $\phi\colon U\to X$ について

$$1\to(\mathcal{P}|_X)(U)=\mathcal{P}(U);\quad *\mapsto\phi^*s$$

のように global section :: $1\to\mathcal{P}|_X$ が定まる． ∎

[†5] 前層の圏 $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ の terminal object から $\mathcal{P}$ への射のこと ([6] Tag 06UN)．$\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ の terminal object は自明群で定まる constant sheaf である．

系 6.6
$\mathcal{G}$-torsor の任意の射は同型．

(証明)．isomorphism は etale local on the target なので (TODO)，条件 T1 にあるような etale cover $\{\phi_i : U_i \to X\}$ を取れば主張は「trivial $(\phi_i)^*\mathcal{G}$-torsor の射は同型」という命題に帰着される．

$\mathcal{G}$ の単位元（射 $e : 1 \to \mathcal{G}$ の像）を e と書くことにすると，射 $(\phi_i)^*\mathcal{G} \to (\phi_i)^*\mathcal{G}$ は，$g \mapsto g \cdot f(e)$ と書ける．$f(e) \in (\phi_i)^*\mathcal{G}$ も群の元なので逆元が存在する．なので $g' \mapsto g' \cdot f(e)^{-1}$ とすれば逆射が作れる． ∎

6.1.2 Quotient Stack

定義 6.7 (Quotient Stack, [5] Example 8.1.12)
X :: algebraic space, G :: smooth group scheme over S, acting on X とする．すなわち左作用 $\alpha : \underline{G} \times X \to X$ が存在するものとする．この時，fibered category :: $[X/G] (\to \mathrm{ET}(S))$ を以下で定める．

Object 以下の 3 つ組．
- S-scheme :: U,
- $G_U (:= G \times_S U)$-torsor on $\mathrm{ET}(U)$ :: $\mathcal{P}$,
- $\underline{G_U}$-torsor の射 $\pi : \mathcal{P} \to X_U (:= X \times_S U)$.

Arrow 射 $(U, \mathcal{P}, \pi) \to (U', \mathcal{P}', \pi')$ は二つの射の組 $(f : U \to U', f^\flat : \mathcal{P} \to f^*\mathcal{P}')$ であって，以下が可換となるもの．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \arrow[rr, "f^\flat"] \arrow[dr, "\pi"'] & & f^*\mathcal{P}' \arrow[dl, "f^*\pi'"] \\ & X_U & \end{tikzcd}$$

π と $f^*\pi'$ の codomain，すなわち X_U と $f^*X_{U'}$ が一致していることに注意．

fibration は $(U, \mathcal{P}, \pi) \mapsto U, (f, f^\flat) \mapsto f$ で与えられる．

注意 6.8
任意の $[U \to S] \in \mathbf{Sch}/S$ について，$G_U (:= G \times U)$ は群になる．単位セクション $e_U : 1 \to G_U$，$e : 1 \to G$ の pullback から得られる．積 m_U なども同様．特に射影 $\mathrm{pr}_U : G_U \to U$ は，smooth morphism :: $G \to S$ の pullback なので smooth.

補題 6.9
S :: scheme, X :: algebraic space, G :: smooth group scheme over S, acting on X とする．Quotient stack :: $[X/G]$ は stack in groupoids である．

(証明)．stack であることは sheaf の貼り合わせが可能であることに拠る．詳しくは [5] 4.2.12, [6] Tag 04UK を参照せよ．$[X/G]$ が category fibered in groupoids(CFG) であることを確かめる．これは恒等射上の $[X/G]$ の射が同型射であることを確かめれば良い．

$U \in \mathrm{ET}(S)$ を固定し，射 $(\mathrm{id}_U, f^\flat)\colon (U, \mathcal{P}, \pi) \to (U, \mathcal{P}', \pi')$ を考える．定義から，次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P} \arrow[rr, "f^\flat"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{P}' \arrow[dl, "\pi'"] \\
& X_U &
\end{tikzcd}$$

∎

7 Quotient Stack is an Artin Stack.

定理 7.1

X :: algebraic space, G :: smooth group scheme over S, acting on X とする．Quotient Stack :: $[X/G]$ は Artin stack である．

7.1 Preparation.

7.1.1 Definition of $\mathbf{Isom}(X, Y)$

最初に $\mathcal{X}$ の cleavage を選択せずとも出来る **Isom** の構成を述べる．後の注意で特に splitting を選択した場合の構成も述べておく．

定義 7.2 ($\mathbf{Isom}(X, Y)$)

stack とは限らない fibration :: $\mathcal{X} \to \mathbf{B}$ と，$U \in \mathbf{B}$ 及び U 上の対象 $X, Y \in \mathcal{X}$ をとる．この時，CFG over $\mathbf{B}/U$:: $\mathbf{Isom}(X, Y)$ を以下のように定める．

Object. 以下の 4 つ組．

- $\mathbf{B}/U$ の対象 $f\colon V \to U$.
- f の cartesian lifting :: $f^*X \to X, f^*Y \to Y$.
- 同型 $\phi\colon f^*X \to f^*Y$.

Arrow. 射

$$(V \xrightarrow{f} U, f^*X \to X, f^*Y \to Y, f^*X \xrightarrow{\phi} f^*Y) \to (W \xrightarrow{g} U, g^*X \to X, g^*Y \to Y, g^*X \xrightarrow{\psi} g^*Y)$$

は，以下の 2 つからなる．

- $\mathbf{B}/U$ の射 $h\colon V \to W$（したがって $g \circ h = f$ が成立），
- 射 $h^*\psi, \phi$ の間の canonical な同型射 $(h^*g^*X \to f^*X, h^*g^*Y \to f^*Y)$.

$(h^*g^*X \to f^*X, h^*g^*Y \to f^*Y)$ を選択することで，$h^*g^*X \to X, h^*g^*Y \to Y$ が定まる．また Triangle Lifting により $h^*\psi$ も定まる．以下の図式を参考にすると良い．

in $\mathcal{Z}$

$$\begin{tikzcd}
& h^*g^*X \arrow[r, "h^*\psi"] \arrow[dl] \arrow[dd] & h^*g^*Y \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
X & & & Y \\
& f^*X \arrow[r, "\phi"'] \arrow[ul] & f^*Y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

$$\Big\downarrow \pi_{\mathcal{Z}}$$

$$\begin{tikzcd}
& V \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, "g\circ h"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}"'] & V \arrow[dr, "g\circ h"] \arrow[dd, "\mathrm{id}"] & \\
U & & & U \\
& V \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ul, "f"] & V \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

in $\mathbf{B}$

fibration は次のように与えられる．

$$\begin{array}{lccc}
\pi\colon & \mathbf{Isom}(X,Y) & \to & \mathbf{B}/U \\
\textbf{Objects:} & (f\colon V\to U, f^*X, f^*Y, \phi\colon f^*X\to f^*Y) & \mapsto & f \\
\textbf{Arrows:} & (h\colon V\to W, h^*g^*X\to f^*X, h^*g^*Y\to f^*Y) & \mapsto & h
\end{array}$$

注意 7.3

$\mathcal{X}\to\mathbf{B}$ の splitting を選んだ場合には $\mathbf{Isom}(X,Y)$ の定義は次のように簡単に成る．

Object. $\mathbf{B}/U$ の対象 $f\colon V\to U$ と同型 $\phi\colon f^*X\to f^*Y$ の組．

Arrow. 射 $(f,\phi)\to(g,\psi)$ は，$g\circ h=f$ を満たす $\mathbf{B}/U$ の射 h.

以下では $\mathbf{Isom}(X,Y)$ が algebraic space（これは sheaf）と同型であるかどうかを考えるので，こちらの定義だけを覚えていても問題はない．

7.1.2 Propositions

補題 7.4

任意の $U\in\mathbf{B}$ と $X,Y\in\mathcal{X}(U)$ について，$\mathbf{Isom}(X,Y)$ は category fibered in sets.

(証明). 恒等射上の射は恒等射しかないことを確かめれば良い．$\mathbf{Isom}(X,Y)$ の射の定義から，恒等射上の射は次の形になっている．

$$(\mathrm{id}_U, f^*X\to f^*X, f^*Y\to f^*Y)\colon (f,f^*X,f^*Y,\phi)\to(f,f^*X,f^*Y,\psi)$$

$f^*X\to f^*X, f^*Y\to f^*Y$ は Triangle Lifting から得られる canonical なものなので，恒等射である． ∎

$\mathcal{X}$ :: stack の場合は（$\mathcal{X}\to\mathbf{B}$ の splitting を選べば）$\mathbf{Isom}(X,Y)$ は sheaf になる．

補題 7.5
一般の site :: $\mathbf{C}$ と CFG :: $\mathcal{X} \to \mathbf{C}$ をとる．さらに $\mathcal{X}$ は split fibered category であるとする．以下の二つは互いに同値.

(i) $\mathcal{X}$ は prestack である.

(ii) 任意の $X, Y \in \mathcal{X}$ について $\mathbf{Isom}(X, Y)$ の fiber は sheaf である.

(証明). (TODO: 出典) ∎

7.1.3 Representability of Diagonal Morphism.

注意 7.6
以下，scheme S を固定し，特に断らない限り big etale site :: $\mathrm{ET}(S)$ 上の stack in groupoids のみ考える.

補題 7.7
$\mathcal{X}$ :: stack in groupoids on $\mathbf{C}(= \mathrm{ET}(S))$ とする．この時，$\Delta\colon \mathcal{X} \to \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}$ が表現可能であることと，任意の $U \in \mathbf{C}$ と任意の $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ について $\mathbf{Isom}(X, Y)$ が algebraic space であることは同値.

(証明). $x, y\colon \mathbf{Sch}/U(= U) \to \mathcal{X}$ を，2-Yoneda Lemma により得られる $X, Y \in \mathcal{X}(U)$ に対応する射とする[†6].

以下の図式が pullback diagram であることから分かる.

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Isom}(X,Y) \arrow[r, "\mathrm{pr}_U"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathcal{X}}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{a}{\nearrow}"] & \mathbf{Sch}/U \arrow[d, "x \times y"] \\
\mathcal{X} \arrow[r, "\Delta"'] & \mathcal{X} \times_S \mathcal{X}
\end{tikzcd}$$

任意の射 $\mathbf{Sch}/U \to \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ が $x \times y$ の形で表されることは，$\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ の普遍性から得られる.

まず，射と自然同型を定義する．$\mathbf{Isom}(X, Y)$ から伸びる射は次の関手である．ただし $\xi = (f\colon V \to U, f^*X, f^*Y, \phi\colon f^*X \to f^*Y), \eta = (g\colon W \to U, g^*X, g^*Y, \psi\colon g^*X \to f^*Y)$ とした.

$$\begin{array}{llcc}
\mathrm{pr}_U & \mathbf{Isom}(X,Y) & \to & \mathbf{Sch}/U \\
\textbf{Objects:} & \xi & \mapsto & f \\
\textbf{Arrows:} & [\xi \to \eta] & \mapsto & h
\end{array}$$

$$\begin{array}{llcc}
\mathrm{pr}_{\mathcal{X}} & \mathbf{Isom}(X,Y) & \to & \mathcal{X} \\
\textbf{Objects:} & \xi & \mapsto & f^*X \\
\textbf{Arrows:} & [\xi \to \eta] & \mapsto & f^*X \to h^*g^*X
\end{array}$$

自然同型 a は次で定める.

$$\begin{array}{rccc}
a_\xi\colon & ((x \times y)\,\mathrm{pr}_U)(\xi) & \to & (\Delta\,\mathrm{pr}_{\mathcal{X}})(\xi) \\
 & (f\colon V \to U, f^*X, f^*X, \alpha) & \mapsto & (\mathrm{id}_{f^*X}, \phi)
\end{array}$$

[†6] 例えば x は $f \in \mathbf{Sch}/U$ を cartesian lifting f^*X へ写す.

$\mathbf{Isom}(X,Y)$ が pullback であることは，$\mathbf{Isom}(X,Y)$ が普遍性を持つことを通して確かめる．（TODO） ∎

7.2 Proof.

7.2.1 Δ is Representable.

示した補題から，任意の $U \in \mathbf{C}$ と任意の G_U-torsor :: $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{X}(U)$ について $\mathbf{Isom}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ が algebraic space であることは同値である．これは次のようにして自明な場合に帰着できる．

■$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ が自明な場合に帰着させる．

補題 7.8 ([5] Exc 5.G)
U :: scheme をとる．sheaf on ET(U) :: $\mathcal{F}$ と etale surjective morphism :: $V \to U$ に対し，$V \times_U \mathcal{F}$ が algebraic space ならば，$\mathcal{F}$ は algebraic space.

補題 7.9
$X, Y \in \mathcal{X}(U)$ と $v \colon V \to U$ について

$$V \times_U \mathbf{Isom}(X,Y) \cong \mathbf{Isom}(v^*X, v^*Y).$$

(補題 7.8 の証明). $\mathcal{F}' := (V \times_U \mathcal{F}) \times_V (V \times_U \mathcal{F})$ とおく．
まず diagonal morphism の表現可能性を考える．pullback lemma から次が分かる．

$$(V \times_U \mathcal{F}) \times_V (V \times_U \mathcal{F}) \cong (V \times_U \mathcal{F}) \times_U \mathcal{F} \cong V \times_U (\mathcal{F} \times_U \mathcal{F}).$$

このことから，$\Delta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F} \times_U \mathcal{F}$ を $V \to Y$ で pullback したものが $\Delta' \colon \mathcal{F}' \to \mathcal{F}' \times \mathcal{F}'$ だと分かる．
atlas の存在は次のように分かる．$A \to \mathcal{F}'$ を $\mathcal{F}'$ の atlas とする．

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & \mathcal{F}' & \longrightarrow & \mathcal{F} \\ & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ & & V & \xrightarrow[\text{etale, surj.}]{} & U \end{array}$$

$V \to Y$ が etale surjective なので $\mathcal{F}' \to \mathcal{F}$ も etale surjective. 今 $A \to \mathcal{F}'$ が etale surjective なので，併せて $A \to \mathcal{F}$ が etale surjective と分かる． ∎

(補題 7.9 の証明). 定義を変形するだけである．

$$\begin{aligned} & (V \times_U (\mathbf{Isom}(X,Y)))(W) \\ =& V(W) \times_{U(W)} \mathbf{Isom}(X,Y)(W) \\ =& \{(w \colon W \to V, f \colon W \to U, \rho \colon f^*X \xrightarrow{\cong} f^*Y) \mid u \circ v = f\} \\ =& \{(w \colon W \to V, \rho \colon w^*u^*X \xrightarrow{\cong} w^*u^*Y)\} \\ =& \mathbf{Isom}(v^*X, v^*Y)(V) \end{aligned}$$

∎

$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ が自明に成る etale cover :: $\mathcal{V}$ [†7] をとり，$v \colon V = \coprod_{V \in \mathcal{V}} V \to X$ とすれば，$v^*\mathcal{P}, v^*\mathcal{P}_2$ は自明な G_U-torsor となる．こうして $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ が自明な場合に議論を帰着させることが出来る．

[†7] i.e. $\forall V \in \mathcal{V}, \quad \mathcal{P}_1(V), \mathcal{P}_2(V) \neq \emptyset$.

同型 $G_Y \cong \mathcal{P}_1, G_Y \cong \mathcal{P}_2$ を固定する．これらと π_1, π_2 を合成して

$$\rho_1 \colon G_Y \to X_Y, \quad \rho_2 \colon G_Y \to X_Y$$

を得る．

■$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ **が自明な場合について証明する．** $\mathbf{Isom}(\ (G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2)\ )$ がどのような sheaf か考える．trivial torsor の任意の自己同型 $\phi\colon G_Y \to G_Y$ は，これが equivariant であることから，$\phi(e)$ の左からの積になっている．逆に任意の G_Y の元を取れば左からの積が自己同型になるから，集合 $\mathbf{Isom}(\ (G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2)\ )$ は G_Y の部分集合である．そこで，$g \in G_Y$ (i.e. $g\colon 1 \to G_Y$) から得られる自己同型 $(\cdot g)\colon G_Y \to G_Y$ が満たすべき条件を考える．

$[X/G]$ の定義から，次が可換である．

$$\begin{tikzcd} G_Y \arrow[rr, "(\cdot g)"] \arrow[dr, "\rho_1"'] & & G_Y \arrow[dl, "\rho_2"] \\ & X_Y & \end{tikzcd}$$

$(\cdot g)$ は equivariant だから，この図式が可換であることは $\rho_1(e) = \rho_2(g)$ と同値である．したがって

$$\begin{aligned} &\mathbf{Isom}(\ (G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2)\ )(V) \\ =&\{g \in G_Y(V) \mid \rho_1(e) = \rho_2(g)\} \\ =&\{(g, x) \in G_Y(V) \times X_Y(V) \mid (\rho_1(e), \rho_2(g)) = (x, x)\} \end{aligned}$$

これは次のように，fiber product で表現出来る．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Isom}(\ (G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2)\ ) \arrow[r] \arrow[d] & G_Y \arrow[d] \\ X_Y \arrow[r, "\Delta"'] & X_Y \times_Y X_Y \end{tikzcd}$$

射 $G_Y \to X_Y \times_Y X_Y$ は $g \mapsto (\rho_1(e), \rho_2(g))$ である．この図式が pullback diagram であることは $\mathbf{Isom}(\ (G_Y, \rho_1), (G_Y, \rho_2)\ )$ が algebraic space であることを意味している．

7.2.2 $[X/G]$ has an Atlas.

射 $a\colon X \to [X/G]$ を trivial G_X-torsor :: $(G_X, m_X) \in [X/G](X)$ に（2-Yoneda Lemma によって）対応する射とする．この射 a が atlas であることを示す．a が representable であることは Δ が representable であることから分かる．a が smooth, surjective であることを示す．

以下の pullback diagram を考える．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{p.b.}"] & X \arrow[d, "(G_X, m_X)"] \\ Y \arrow[r, "(\mathcal{P}, \pi)"'] & {[X/G]} \end{tikzcd}$$

ただし $Y \to [X/G]$ は a と同様に $(\mathcal{P}, \pi) \in [X/G](Y)$ に対応する射である．$\mathcal{P}$ は作用 $\alpha\colon G_Y \times \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ を持つとする．

この時，$\mathbf{P}$ は sheaf として $\mathcal{P}$ と同型である．これは次のように同型が得られる．まず $\mathbf{P}(U)$ は以下の 3 つの組の集合である．

- $x\colon U \to X$,
- $y\colon U \to Y$,
- $\rho\colon x^*(G_X, m_X) \xrightarrow{\cong} y^*(\mathcal{P}, \pi))$.

ただし x, y について以下が可換．

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{x} & X \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & S \end{array}$$

上のような x, y を一つとり，x_0, y_0 と名前を付ける．すると $(y_0)^*G_Y = (x_0)^*G_X$ となる．$\mathbf{P}(U)$ の元 (x, y, ρ) が存在するならば，$x^*X = y^*X_Y$ ゆえに x, y は上の可換図式を満たすことに注意せよ．

次のように同型を定める．

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}(U) & \to & \mathcal{P}(U) \\ (x, y, \rho) & \mapsto & \rho_U(e) \\ (x_0, y_0, (y_0)^*\alpha(-, p)) & \leftarrow\!\shortmid & p \end{array}$$

$(f^*\mathcal{P})(U) = \mathcal{P}(U)$ は f^* の colomit を用いた定義から得られる．

最後に $\mathcal{P} \to Y$ が etale surjective であることを確かめる．$\mathcal{P}(Y_i) \neq \emptyset$ となる Y の cover :: $\{Y_i \to Y\}$ をとる．$\mathcal{P}|_{Y_i}$ は trivial torsor :: G_{Y_i} と同型となる．$\mathrm{pr}_{Y_i}\colon G_{Y_i} \to Y_i$ は smooth surjective であり，smooth, surjective はどちらも etale local on target な性質なので，$\mathcal{P} \to Y$ も etale, surjective.（ついでに $\mathcal{P}$ :: algebraic space も分かる.）

参考文献

[1] M. Artin. Versal deformations and algebraic stacks. *Inventiones mathematicae*, Vol. 27, No. 3, pp. 165–189, Sep 1974.

[2] Pierre Deligne and David Mumford. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.

[3] Tomàs L. Gòmez. Algebraic stacks, 1999. https://arxiv.org/abs/math/9911199v1.

[4] G. Laumon and L. Moret-Bailly. *Champs algébriques*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge (A Series of Modern Surveys in Mathematics). Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[5] Martin Olsson. *Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications)*. Amer Mathematical Society, 4 2016.

[6] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. https://stacks.math.columbia.edu, 2019.