Cantor-Schröder-Bernsteinの定理

七条 彰紀

平成29年4月13日

以下で述べる証明は，[1] にある証明を再構成したものである．元の証明では写像 F が現れる理由が明記されていないため，その部分を補った．この証明の歴史については [2] の Part IV が参考になる．特に，ここでの証明は Chapter 35(pp.343-353) にある Tarski's Fixed-Point Theorem を応用したものに近いと思われる．

1 定理

定理 1.1 (表現 1)**.** 集合 A, B についてそれぞれの濃度を $|A|, |B|$ のように表す．$|A| \leq |B|$ かつ $|A| \geq |B|$ ならば $|A| = |B|$ である．

定理 1.2 (表現 2)**.** A, B を集合とし，単射 $f : A \to B$ と単射 $g : B \to A$ があったとする．この時全単射 $h : A \to B$ が存在する．

表現 1 はこの定理を証明するモチベーションの出処がよく分かる．表現 2 からは定理が写像についての基本的な定理であることが分かる．

2 証明

この定理が述べているのは全単射 h の存在であるから，証明の方針は二つ有る．一つは別の存在定理の帰結として h の存在を示す方針，もう一つは全単射 h を実際に構成する方針である．このレポートでは後者の方針を取る．前者の方針での証明は知らない．可能かどうかもわからない．

2.1 全単射 h の構成方法

$f, g^{-1}; M \to N$ とする．M から N への全単射 h を作る方法として，M の各元が M の部分集合 S に属すか属さないかによって M の元を送る先を $f(x)$ か $g^{-1}(x)$ にする方法がある．

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in S) \\ g^{-1}(x) & (x \in M \setminus S) \end{cases}$$

ただし $S \subset M$ は以下の 3 つの条件を満たす.

(a) $f(S) \cup g^{-1}(M \setminus S) = N$.

(b) $f(S) \cap g^{-1}(M \setminus S) = \emptyset$.

(c) $M \setminus S \subseteq g(N)$.

f は M 全体で定義されるが，像が N 全体とは限らない．一方 g^{-1} は M 全体で定義されるとは限らないが，像は N 全体である．この二つを組み合わせることで全単射が作れそうだ，というのがこの構成の着想である．しかし f, g^{-1} が互いをうまく補い合えるかどうかは自明でない．(b) が必要な理由は今の段階ではわかりにくいが，後に必要なので，集合 S の性質としてここにまとめて書いておく．

2.2 部分集合 S に課された条件の整理.

実は上で S に要求した 3 つの条件のうち，(b), (c) は残る (a) から導かれる．

(a) $\Longrightarrow$ (b). まず，(a) $\Longrightarrow$ (b) が成り立つ．そのことを示すため，(a) 式の両辺を g で写す．

$$g \circ f(S) \cup (M \setminus S) = g(N).$$

この時，$g \circ f$ が単射であることから，$g \circ f(S) \subseteq S$ が成り立つ．したがって $g \circ f(S) \cap (M \setminus S) = \emptyset$. 再び両辺を g^{-1} で写して，$f(S) \cap g^{-1}(M \setminus S) = \emptyset$ が得られる．

(a) $\Longrightarrow$ (c) 上で見た式 $g \circ f(S) \cup (M \setminus S) = g(N)$ より明らかである．

2.3 写像 F

再び (a) $f(S) \sqcup g^{-1}(M \setminus S) = N$ に注目する．この式は g^{-1} を用いているが，これを取り除く方針で式変形をする．

$$\begin{aligned} f(S) \sqcup g^{-1}(M \setminus S) &= N \\ g^{-1}(M \setminus S) &= N \setminus f(S) \\ M \setminus S &= g(N \setminus f(S)) \\ S &= M \setminus g(N \setminus f(S)) \end{aligned}$$

一行目から二行目への変形で (b) $f(S) \cap g^{-1}(M \setminus S) = \emptyset$ を用いた．そこで，写像 F を次のように定義する．

$$\begin{aligned} F : \mathcal{P}(M) &\to \mathcal{P}(N) \\ S &\mapsto M \setminus g(N \setminus f(S)) \end{aligned}$$

すると，部分集合 S が満たすべき 3 つの条件は，$F(S) = S$ すなわち「S の写像 F の不動点である」ということと同値になる．

2.4 F の不動点

以上の議論から，我々は写像 F の不動点さえ求めれば全単射 h が構成できることがわかった．また，F が写像であることから，

$$^{\forall} I \subseteq J \subseteq M, \quad F(I) \subseteq F(J)$$

が成り立つ．このことを用いて 2 つの証明を述べる．

2.5　F の不動点が存在することの証明 (非構成的)

2.6　F の不動点が存在することの証明 (構成的)

明らかに $M \supseteq F(M)$ なので，両辺を繰り返し F で写せば

$$M \supseteq F(M) \supseteq F^2(M) \supseteq \cdots .$$

が得られる．さて，以下の集合が F の不動点である．

$$S = \bigcap_{i \geq 0} F^i(M) = M \cap F(M) \cap F(F(M)) \cap \cdots .$$

これが不動点であることは以下のように示される．

$$\begin{aligned}
F(S) =& F\left(\bigcap_{i \geq 0} F^i(M)\right) \\
=& M \setminus g\left(N \setminus f\left(\bigcap_{i \geq 0} F^i(M)\right)\right) \\
=& M \setminus g\left(N \setminus \bigcap_{i \geq 0} f(F^i(M))\right) \\
=& M \setminus g\left(\bigcup_{i \geq 0} N \setminus f(F^i(M))\right) \\
=& M \setminus \bigcup_{i \geq 0} g(N \setminus f(F^i(M))) \\
=& \bigcap_{i \geq 0} M \setminus g(N \setminus f(F^i(M))) \\
=& \bigcap_{i \geq 0} F(F^i(M)) \\
=& \bigcap_{i \geq 1} F^i(M) \\
=& M \cap \bigcap_{i \geq 1} F^i(M) \\
=& \bigcap_{i \geq 0} F^i(M) \\
=& S
\end{aligned}$$

$M \supseteq F(M) \supseteq \cdots$ の他に，f が単射であることを用いた．

参考文献

[1] マーティン・アイグナー（英語版），ギュンター・ツィーグラー（英語版）『天書の証明』 蟹江幸博 訳，丸善出版，2012 年 9 月（原著 2002 年 12 月），縮刷版．

[2] Arie Hinkis (2013) “Proofs of the Cantor-Bernstein theorem. A mathematical excursion” Science Networks. Historical Studies 45, Springer Basel.