ゼミノート#3

Sheaves on a Site, continued.

七条彰紀

2018年10月31日

1 Propositions : Sheaves.

定理 1.1

C:: site とする. 忘却関手

$$Fgt \colon \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C}).$$

は left adjoint functor :: Shff を持つ.

注意 1.2

以下で述べる *Shff* の構成は "plus construction"と呼ばれる. 少し異なる方法が [4] で述べられているし, Kay Werndli "Sheaves From Scratch" §3.5 では etale bundle という物を用いた構成をしている.

証明のために幾つか定義しておく.

定義 **1.3** ([5], Tag 00W1)

 $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ と、 $U \in \mathbf{C}$ の cover :: $\mathcal{U} = \{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ に対し、

$$H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \text{equalizer of } \left[\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \Longrightarrow \prod_{(i,j) \in I \times I} \mathcal{F}(U_i \times_U U_j) \right]$$

ここで二つの並行射はそれぞれ $\operatorname{res}_{U_i}^{U_i \times U_j}$, $\operatorname{res}_{U_j}^{U_i \times U_j}$ である。すなわち,ここにある並行射は sheaf の定義にあるものである。この diagram は圏 **Sets** の中のものなので,**index ::** I が集合ならばこの equalizer は常に存在する.

直ちに分かるとおり、 $\mathrm{Cov}(U)$ は細分を射として圏を成し、 $H^0(-,\mathcal{F})$ は圏 $\mathrm{Cov}(U)$ から \mathbf{Sets} への反変関手である。 \mathcal{F}^+ は

$$\mathcal{F}^+(U) = \operatorname{colim}_{\mathcal{U} \in \operatorname{Cov}(U)} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \operatorname{colim}(\operatorname{Cov}(U) \to^{H^0(-, \mathcal{F})} \mathbf{Sets}).$$

と定義される.

 $H^0(\{\mathrm{id}_U\colon U\to U\},\mathcal{F})=\mathcal{F}(U)$ であり、しかも任意の cover of U は id_U の細分であるから、U 毎に標準

的な射 θ : $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}^+(U)$ が存在する.

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}^{+}(U)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow \qquad \uparrow$$

$$\mathcal{F}(U) \in \left\{ H^{0}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\theta} H^{0}(\mathcal{U}', \mathcal{F}) \right\}_{\mathcal{U}, \mathcal{U}'}$$

定義 1.4

presheaf :: $\mathcal{P} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ は以下を満たす時 separated であるという.

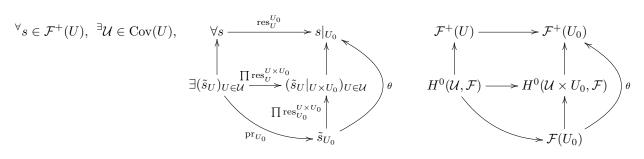
$$\forall U \in \mathbf{C}, \quad \forall \{U_i \to U\}_i \in \text{Cov}(U), \quad \mathcal{P}(U) \to \prod_{i \in I} \mathcal{P}(U_i) :: \text{ inj.}$$

補題 1.5 (A)

site :: \mathbf{C} , presheaf :: $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ を考える. さらに $U \in \mathbf{C}$ をとる. 任意の $s \in \mathcal{F}^+(U)$ に対して以下が成り立つ.

$$\forall s \in \mathcal{F}^+(U), \quad \exists \{U_i \to U\}_i \in \text{Cov}(U), \quad \forall i, \quad \exists \tilde{s}_i \in \mathcal{F}(U_i), \quad \theta(\tilde{s}_i|_{U_i}) = s|_{U_i}$$

(証明).



 $(\tilde{s}_U)_{U\in\mathcal{U}}$ から $(\tilde{s}_U|_{U\times U_0})_{U\in\mathcal{U}}$ への 2 本の射が一致するのは, $H^0(\mathcal{U},\mathcal{F})$ の定義から従う

$$\tilde{s}_U|_{U\times U_0} = \tilde{s}_{U_0}|_{U\times U_0}$$

が理由である.

補題 1.6 (B)

site :: \mathbf{C} , presheaf :: $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ を考える. さらに $U \in \mathbf{C}$ をとる. $s, s' \in \mathcal{F}^+(U)$ が一致するとは、次が成立するということである.

 $\exists \{U_i \to U\}_i \in \operatorname{Cov}(U)$, $\forall i$, $\exists \tilde{s}_i, \tilde{s}_i' \in \mathcal{F}(U_i)$, $\theta(\tilde{s}_i) = s|_{U_i}$ and $\theta(\tilde{s}_i') = s'|_{U_i}$ and $\underline{\theta(\tilde{s}_i)} = \theta(\tilde{s}_i')$ in $\mathcal{F}(U_i)$. (証明). 下線部以外は前の補題により成り立つことに注意. 下線部が成り立つ時, 以下の図式から, 各 i について

$$(\tilde{s}_i|_V)_{V\in\mathcal{V}_i} = (\tilde{s}_i'|_V)_{V\in\mathcal{V}_i}$$

となる $\mathcal{V}_i \in \mathrm{Cov}(U_i)$ が存在し、これらは同じ $s|_{U_i} = s'|_{U_i} \in \mathcal{F}^+(U_i)$ に写る.

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\theta} \mathcal{F}^{+}(U)$$

$$\Pi_{V \in \mathcal{V}} \operatorname{res}_{U}^{V}$$

$$\left\{ H^{0}(\mathcal{V}, \mathcal{F}) \right\}$$

そこで V_i とUを合わせて

$$\bar{\mathcal{U}} = \{ V \to U_i \to U \mid V \in \mathcal{V}_i \}$$

とすれば、 $\prod_i (\tilde{s}_i|_V), (=) \prod_i (\tilde{s}_i'|_V) \in H^0(\bar{\mathcal{U}},\mathcal{F})$ が得られる.これらの $\mathcal{F}^+(U)$ での像がそれぞれ s,s' となるから,s=s'.

補題 1.7

site :: \mathbf{C} , presheaf :: $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について以下が成り立つ.

- (a) \mathcal{F}^+ :: separated.
- (b) \mathcal{F}^+ :: sheaf if \mathcal{F} :: separated.
- (c) $\theta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+ :: \text{ iso if } \mathcal{F} :: \text{ sheaf.}$
- (d) $\theta \colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+ :: universal,$

(証明).

■ \mathcal{F}^+ :: separated. $U \in \mathbf{C}$ をとり、 $s, s' \in \mathcal{F}^+(U)$ をとる. ある cover of U :: $\{U_i \to U\}_{i \in I} \in \mathrm{Cov}(U)$ について

$$\forall i \in I, \ s|_{U_i} = s'|_{U_i}$$

が成り立つと仮定して s = s' を示す.

今, $s|_{U_i}=s'|_{U_i}\in\mathcal{F}^+(U_i)$ なので、補題 A より、cover of $U_i::\mathcal{U}_i=\{U_{i,j}\to U_i\}_{j\in J_i}\in\mathrm{Cov}(U_i)$ が存在し、

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}) = s|_{U_{i,i}} = s'|_{U_{i,i}} = \theta(\tilde{s}'_{i,j})$$

を満たす $(\tilde{s}_{i,j})_j, (\tilde{s}'_{i,j})_j \in H^0(\mathcal{U}_i, \mathcal{F})$ が存在する. よって補題 B から s=s'.

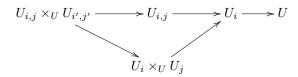
■ \mathcal{F}^+ :: sheaf if \mathcal{F} :: separated 故に $\mathcal{F}(U) \to H^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$:: inj なので θ :: inj. cover of U :: $\mathcal{U} = \{U_i \to U\}_{i \in I} \in \operatorname{Cov}(U)$ と,以下を満たす元 $(s_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{F}^+(U_i)$ をとる:

$$\forall i, i' \in I, \quad s_i|_{U_i \times U_{i'}} = s_{i'}|_{U_i \times U_{i'}} \tag{*}$$

すると補題 A より,

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}) = s_i|_{U_{i,j}}$$

となる $\{U_{i,j} \to U_i\} \in \mathrm{Cov}(U_i)$ と $\tilde{s}_{i,j} \in \mathcal{F}(U_{i,j})$ がとれる. 各被覆の包含関係は以下の通り.



(*) から,

$$\theta(\tilde{s}_{i,j}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}}) = s_i|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}} = s_{i'}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}} = \theta(\tilde{s}_{i',j'}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}}).$$

 θ :: inj より, $\tilde{s}_{i,j}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}}=\tilde{s}_{i',j'}|_{U_{i,j}\times U_{i',j'}}$. したがって $(\tilde{s}_{i,j})\in H^0(\{U_{i,j}\to U\},\mathcal{F})$ であり,ここから $s\in\mathcal{F}^+(U)$ が得られる.最後に,各 i について

$$\forall j, \ \theta(s_{i,j}) = s|_{U_{i,j}} = (s|_{U_i})|_{U_{i,j}} = s_i|_{U_{i,j}}$$

なので、 \mathcal{F} :: separated より、 $s|_{U_i} = s_i$.

 $\blacksquare \theta$: $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$:: iso if \mathcal{F} :: sheaf. \mathcal{F} :: sheaf であるとき,定義から任意の $\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(U)$ について $H^0(\mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(U)$. なので θ :: iso.

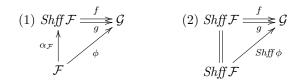
■ θ : $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$:: universal. $Shff(-) = ((-)^+)^+$ とすると、これが sheafification functor となる. その UMP を見よう. $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C}), \mathcal{G} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ とする. θ : $\mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)} \to Shff$ の naturality から、次の可換図式が 得られる.

$$\mathcal{F} \longrightarrow Shff \mathcal{F}$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\mathcal{G} \stackrel{\sim}{\longrightarrow} Shff \mathcal{G}$$

 $\theta_{\mathcal{G}}$: $\mathcal{G} \to \mathit{Shff}\mathcal{G}$:: iso だから, $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ から $\mathit{Shff}\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が得られた.次に,以下で示す可換図式 (1) が与えられたとしよう.全体を Shff で写し, $\mathit{Shff}|_{\mathbf{Sh}(X)} \cong \mathrm{id}_{\mathbf{Sh}(X)}$ を用いて可換図式 (2) が得られる.



したがって f = g. 以上で existence & uniqueness が示せた.

 $proof\ of\ Thm(1.1)$. 私のノート $^{\dagger 1}$ の Ex1.12 で θ の UMP(universal map property, [1]) から left adjointness を証明している.

命題 1.8

topos has small limits and small cocomplete.

(証明). 前半は small product と equalizer を構成すればよい. 後半は $Shff: \mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathbf{Cat}C)$ が left adjoint functor 故に colimit と交換することを用いれば良い.

以下の2つはセミナー内で将来証明を扱う.

定理 1.9 ([4] 4.1.2)

 $X \to Y$:: morphism of schemes とする. representable sheaf:: \underline{X} は $\operatorname{Fppf}(Y)$ 上の sheaf である. したがって fppf topology より荒い位相を持つ site, 特に big etale site:: $\operatorname{ET}(Y)$ でも sheaf である.

命題 1.10

任意の presheaf は colimit of representable sheaves として表現できる

(証明). 証明は(各点) 左 Kan 拡張を用いて,

$$\mathcal{P} = y^{\dagger} y(\mathcal{P}) = \operatorname{colim}(y \downarrow \mathcal{P} \to^{\pi_1} \mathbf{C} \to^y \mathbf{PSh}(\mathbf{C})).$$

ここで $y: \mathbf{C} \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ は米田埋め込みである. ([1] Prop8.10 でも同じ命題が証明されている.)

以下はセミナー内でこれ以上現れないが、Topos theory の重要な定理である.

^{†&}lt;sup>1</sup> [2] ch.I sec.1 の演習問題への解答: https://github.com/ShitijyouA/MathNotes/blob/master/Hartshorne_AG_Ch2/section1_ex.pdf

定理 1.11 (Giraud's theorem)

category :: T について, T が topos であることと T が以下のような圏であることは同値.

- (G1) a locally small category with a small generating set,
- (G2) with all finite limits,
- (G3) with all small coproducts, which are disjoint, and pullback-stable,
- (G4) where all congruences have effective quotient objects, which are also pullback-stable.

2 Definitions: Points and Stalks.

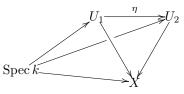
以下は small/big etale site のみで使われるものである.

定義 2.1 (Geometric Point, Etale Neighborhood, [4] 1.3.15.)

- (i) X :: scheme に対し、k :: separabely closed field を用いて \bar{x} : Spec $k \to X$ と表される射を geometric point と呼ぶ.
- (ii) geometric point :: \bar{x} : Spec $k \to X$ について, \bar{x} の etale neighborhood とは $U \to X$ が etale であるような以下の可換図式のことである.



(iii) geometric point :: \bar{x} : Spec $k \to X$ について、 \bar{x} の 2 つの etale neighborhood :: U_1, U_2 を考える. この時, U_1 と U_2 の間の射とは,以下の図式を可換にする morphism of schemes :: η : $U_1 \to U_2$ のことである.



注意 2.2

geometric point の定義に separabely closed field でなく algebraically closed field を用いることもある.

注意 2.3

より一般的な point of site の定義が存在する([5] Tag 04JU). これは etale か否かに依らず採用できる。しかしこの一般的な定義は複雑であるし,我々は small/big etale site しか扱わないので,我々は以上の定義のみ用いる.

定義 **2.4** (Stalk, [4] 1.3.15.)

X :: scheme, $\mathcal{F} \in \operatorname{Et}(X)$ あるいは $\mathcal{F} \in \operatorname{ET}(X)$ とする. さらに \bar{x} : Spec $k \to X$:: geometric point とする. \bar{x} に対して \bar{x} の etale neighborhood が成す圏を $I_{\bar{x}}$ とする,

(i) $I_{\bar{x}}$ を用いて stalk of \mathcal{F} at \bar{x} を

$$\mathcal{F}_{\bar{x}} := \varinjlim_{U \in I_{\bar{x}}} \mathcal{F}(U)$$

と定義する.

- (ii) $U \in I_{\bar{x}}$ について, $\mathcal{F}(U)$ から $\mathcal{F}_{\bar{x}}$ への標準的射がある.この射による $s \in \mathcal{F}(U)$ の像を $s_{\bar{x}}$ と表し,germ of s at \bar{x} と呼ぶ.
- 3 Definitions : Morphism of Shaves.

定義 3.1 (Injective, Surjective)

(同値な条件を列挙したいので、命題 (5.2, 5.3) を参照せよ.)

定義 3.2 (Representable Morphism.)

定義 3.3 (Algebraic Space.)

- 4 Examples: Morphism of Shaves.
- 5 Propositions: Morphism of Shaves.

定義 5.1 (Kernel, Image.)

(im ϕ の categorical な定義は https://www.wikiwand.com/en/Image_(category_theory) 等にもある.)

命題 5.2

site :: \mathbf{C} 上の sheaf of sets :: \mathcal{F}, \mathcal{G} の間の morphism $\phi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ をとる. ϕ について以下の 3 つは同値.

- 1. $\forall U \in \mathbf{C}, \quad \phi_U \colon \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U) :: \text{inj},$
- 2. $\forall x :: \text{ geometric point}, \quad \phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x :: \text{ inj},$
- 3. ϕ :: mono.

この同値な条件を満たす射 ϕ は injective であるという.

(証明). morphism between sheaves on a scheme の場合と全く同じである.

命題 5.3

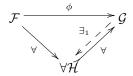
 $\mathbf{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前の命題と同様にとる. ϕ について以下の 4 つは同値.

- 1. $\forall U \in \mathbf{C}, \forall s \in \mathcal{G}(U), \exists \{U_i \to U\} \in \text{Cov}(U), \exists t_i \in \mathcal{F}(U_i), \phi_{U_i}(t_i) = s|_{U_i}.$
- 2. $\forall x :: \text{ geometric point}, \quad \phi_x \colon \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x :: \text{ surj},$
- 3. $\operatorname{im} \phi = \mathcal{G}$,
- 4. ϕ :: epi.

この同値な条件を満たす射 ϕ は surjective であるという.

(証明). こちらも, morphism between sheaves on a scheme の場合と全く同じである. 二つだけ証明しよう.

 $\blacksquare \operatorname{im} \phi = \mathcal{G} \implies \phi :: \operatorname{surj}.$ 仮定 $\operatorname{im} \phi = \mathcal{G}$ は以下の可換図式を意味する.



(TODO)

 $\blacksquare \phi$:: surj $\implies \phi$:: epi. 以下の図式を考える.

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\alpha \atop \beta} \mathcal{H}$$

さらに、 $\alpha \circ \phi = \beta \circ \phi$ であると仮定する. 示したいのは $\alpha = \beta$ である. したがって任意の $U \in \mathbf{C}$ 上の section :: $t \in \mathcal{G}(U)$ について $\alpha_U(t) = \beta_U(t)$ を示せば良い. 仮定 ϕ :: surj より,t に対し,以下を満たす $\{U_i \to U\} \in \mathrm{Cov}(U)$ と $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ がとれる.

$$\phi_{U_i}(s_i) = t|_{U_i} \in \mathcal{G}(U_i).$$

ここで $t|_{U_i}$ は射 $\mathcal{G}(U_i \to U)$: $\mathcal{G}(U) \to \mathcal{G}(U_i)$ による t の像である. 仮定より,

$$\alpha_{U_i} \circ \phi_{U_i}(s_i) = \alpha_{U_i}(t|_{U_i}) = \beta_{U_i}(t|_{U_i}) = \beta_{U_i} \circ \phi_{U_i}(s_i).$$

したがって $(\alpha_U(t))|_{U_i}=(\beta_U(t))|_{U_i}$ を得る. \mathcal{H} :: sheaf, 特に \mathcal{H} :: separated presheaf なので $\alpha_U(t)=\beta_U(t)$.

命題 5.4

 $\mathbf{C}, \mathcal{F}, \mathcal{G}, \phi \colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ を前の命題と同様にとる. $\phi :: \mathrm{iso}(=\mathrm{inj}+\mathrm{surj})$ と $\phi :: \mathrm{epi}+\mathrm{mono}$ は同値.

(証明). inj ← mono, surj ← epi は上のとおりなので,これらを単に合わせただけである.

6 Definitions: Morphism of Topoi.

定義を2つ再掲する.

定義 6.1

T,T':: topoi とする. morphism of topoi :: $f:T\to T'$ とは、以下の 3 つの射 (2 functor and 1 isomorphism.) からなる.

$$f_* \colon T \to T', \quad f^* \colon T' \to T, \quad \phi \colon \operatorname{Hom}_T(f^*(-), -) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Hom}_{T'}(-.f_*(-)).$$

定義 6.2

 $f \colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を functor of sites とする. この時, $F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について

$$f_*F(-) := F(f(-))$$

とおくと, $f_*F \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ が得られる. f :: continuous functor ならば, $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C})$ に対し同様にして $f_*\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ が得られる.

これを用いた別の stalk の定義の仕方がある.

定義 **6.3** (Stalk, another definition)

1 点からなる空間には一意に位相が入る。そこで一点空間上の sheaf が成す圏を pt と書く。

- (i) point of topos T とは、morphism of topoi $x: pt \to T$ のことである.
- (ii) $\mathcal{F} \in \mathbf{T}$ と point :: $x: pt \to \mathbf{T}$ について, $\mathcal{F}_x := x^* \mathcal{F}$ を stalk of \mathcal{F} at x と呼ぶ.
- (iii) morphism of sheaves :: $f: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が isomorphism であることと $x^*f: x^*\mathcal{F} \to x^*\mathcal{G}$ が isomorphism であることが同値 (特に $x^*f:$ iso ならば f: iso) であるとき、T: having enough points という.

7 Propositions : Topoi.

命題 7.1

C, C:: site とする. C, C' は small category であると仮定する.

- (i) $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を functor of sites とする. この時, functor :: $f_*: \mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ は left adjoint functor を持つ.
- (ii) $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ を continuous functor とする. この時, functor :: $f_*: \mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ は left adjoint functor を持つ.

(証明). (ii) は (i) から従う. 実際, f_* : $\mathbf{PSh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C}')$ の left adjoint functor を f^p とすると, $f^* = \mathit{Shff}\, f^p$ と置けばこれが f_* : $\mathbf{Sh}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathbf{C}')$ の left adjoint functor となる. 証明は Shff :: left adjoint を用いて直接行えば良い. なので (i) のみ示す.

 $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ と $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ について、 $f_*\mathcal{F}$ は Kan 拡張の言葉(記号は [3] のもの)を用いて $(f^{op})^{-1}\mathcal{F}$ と書ける。ここで $f^{op}: \mathbf{C}^{op} \to (\mathbf{C}')^{op}$ は射の反転で得られる関手である。したがって、 f_* の左随伴は左 Kan 拡張 Lan f_{op} である。各点左 Kan 拡張を計算すると、

$$(\operatorname{Lan}_{f^{op}}\mathcal{F})(U) = \operatorname{colim}\left((U \downarrow f)^{op} = f^{op} \downarrow U \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{C}^{op} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathbf{Sets} \right).$$

ここで $U \downarrow f^{op}$ は Comma 圏で、 π_1 は射影 $[f(V) \to U] \mapsto V$ である。 $f^{op} \downarrow U$ は \mathbf{C}^{op} の部分圏だから、特にこれは small colimit. **Sets** :: cocomplete なのでこの colimit は存在する.

系 7.2

 f_* は limit と交換し、 f^* は colimit と交換する.

注意 7.3

実際に small となる有用な site となると、おそらく殆ど無い.実際, $\mathrm{ET}(X),\mathrm{Et}(X)$ は large である.しかし $\mathrm{Et}(X)$:: essentially small (i.e. equivalent to small category) なので,適当に $\mathrm{Et}(X)$ の部分圏を取って,その上の category of presheaves が一致するように出来るかも知れない.なお, \mathbf{Sch}/X は essentially small で さえ無い.

しかし、small でないと我々の議論は立ち行かなくなる. なので technical ではあるが、Grothendieck 宇宙の存在を仮定する(宇宙公理を仮定することと同値)などして任意の圏を small とする.

参考文献

- [1] Steve Awodey. Category Theory (Oxford Logic Guides). Oxford University Press, U.S.A., 2 edition, 8 2010.
- [2] Robin Hartshorne. Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52). Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.
- [3] Saunders Mac Lane. Categories for the Working Mathematician (Graduate Texts in Mathematics). Springer, 2nd ed. 1978. softcover reprint of the original 2nd ed. 1978 edition, 2010.
- [4] Martin Olsson. Algebraic Spaces and Stacks (American Mathematical Society Colloquium Publications). Amer Mathematical Society, 4 2016.
- [5] The Stacks Project Authors. Stacks Project. https://stacks.math.columbia.edu, 2018.