Ex4.1　Finite Morphism is Proper.

$f : X \to Y$ を finite だとする．Cor4.8f と Ex3.4 より，X, Y が affine scheme である場合について調べれば十分である．

$X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B$ とすると，A :: finitely generated B-module．なので特に X :: Noetherian scheme．任意の R :: valuation ring をとり，$K = \operatorname{Quot} R$ とする．今，以下の可換図式が成り立っているとする．

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Spec} A \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} R \arrow[r] & \operatorname{Spec} B
\end{tikzcd}$$

これに対応して，以下の環の可換図式が成り立つ．Prop2.3 より，二つの可換図式は一対一に対応している．

$$\begin{tikzcd}
K & A \arrow[l, "u"'] \\
R \arrow[u, hook] & B \arrow[l, "v"'] \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

A :: integral / B から $v(B) \subseteq u(A)$ :: integral ring extension が得られる[†1]．$v(B) \subseteq R$ と合わせて，$u(A) (\subseteq K)$ :: initegral / R．R が付値環であることから，R は K 上整閉．よって $u(A) \subseteq R$．このことから $u : A \to R$ の存在が得られる．さらに，$R \to K$ が単射であることからこのような射はただひとつ．図式の一対一対応から，$\operatorname{Spec} R \to \operatorname{Spec} A$ の射がただひとつ存在することがわかった．

Ex4.2

U :: dense in X とし，以下の可換図式で f, g :: S-morphism は $f|_U = g|_U$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[d, hook] & & & \\
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] \arrow[drrr, "g"] & Y \times_S Y \arrow[dl] \arrow[drr] & & Y \arrow[l, "\Delta"'] \arrow[d, equal] \arrow[dlll, equal] \\
Y \arrow[rr] & & S & Y \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

$U \to X \to Y = Y \to Y \times_S Y$ とたどると，$\Delta(f(U)) = h(U)$ が得られる．$f(U) \subseteq Y$ から $h(U) \subseteq \Delta(Y)$．さらに次の計算から $h(X) \subseteq \Delta(Y)$ が得られる．

$$h(X) = h(\mathrm{cl}_X(U)) \subseteq \mathrm{cl}_Y(h(U)) \subseteq \mathrm{cl}_Y(\Delta(Y)) = \Delta(Y).$$

最後の等号で Y :: separated / S を用いた．可換図式にある $Y \times_S Y \to Y$ の射を $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2$ とする．$h(X) \subseteq \Delta(Y)$ から以下が得られる．

$${}^\forall x \in X,\ \ {}^\exists y \in Y,\ \ f(x) = \mathrm{pr}_1 \circ h(x) = \mathrm{pr}_1 \circ \Delta(y) = y = \mathrm{pr}_2 \circ \Delta(y) = \mathrm{pr}_2 \circ h(x) = g(x).$$

よって topological space の射として $f = g$．

さらに scheme の射として $f = g$ であることを示す．

[†1] $a \in A$ をとると，$a^n + \phi(b_{n-1})a^{n-1} + \cdots + \phi(b_0) = 0$ となる $n > 0$ と $b_i \in B$ が存在する．両辺を u で写すと，$u \circ \phi = v$ より $u(a)^n + v(b_{n-1})u(a)^{n-1} + \cdots + v(b_0) = 0$.

主張 Ex4.2.1. V :: open in Y を任意に取る．$\bar{V} = f^{-1}V \cap U = g^{-1}V \cap U (\neq \emptyset)$ とする．任意の $s \in \mathcal{O}_Y(V)$ に対し $s|_{\bar{V}} = 0$ ならば $s = 0$.

$f|_U = g|_U$ から $(f^{\#}(s) - g^{\#}(s))|_{\bar{V}} = 0$ が直ちに得られる．なので，この主張が示されれば $f^{\#}(s) - g^{\#}(s) = 0$ すなわち $f^{\#} = g^{\#}$ が得られる．

(証明). V :: affine の場合に調べれば十分なので $V = \operatorname{Spec} A$ とする．$\mathfrak{p} \in \bar{V}$ を任意に取ると，$s|_{\bar{V}} = 0$ より $s_{\mathfrak{p}} = 0$. これは $s = 0$ in $A_{\mathfrak{p}}$ を意味する．したがって次が成り立つ．

$$^{\exists}t \notin \mathfrak{p}, \quad st = 0 \in \mathfrak{p}.$$

よって $s \in \mathfrak{p}$，$\mathfrak{p} \in V(s)$ となる．$\mathfrak{p} \in \bar{V}$ は任意にとっていたので $\bar{V} \subseteq V(s)$. $\bar{V}$ は $V = \operatorname{Spec} A$ で dense だから，両辺の閉包をとって $V = V(s)$. すなわち $s = 0$. ∎

Ex4.3 X :: Separated over an Affine Scheme S.

S :: affine scheme, X :: separated scheme $/S$, U, V :: affine open subscheme of X とする．以下が fiber product であれば，主張が示せる．

$$\begin{tikzcd}
U \cap V \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "\Delta"] \\
U \times_S V \arrow[r] & X \times_S X
\end{tikzcd}$$

実際，Δ :: closed immersion と Ex3.11a より $U \cap V \to U \times_S V$ は closed immersion. $U \times_S V$ :: affine と Ex3.11b より $U \cap V$ :: affine.

Ex4.4 "The Image of a Proper Scheme is Proper."

Ex4.5

Ex4.6 f :: proper morphism of affine varieties$/k$. Then f :: finite.

$f : X \to Y$ を考える．X, Y :: affine variety / k より，X, Y は A, B :: affine domain / k を用いて $X = \operatorname{Spec} A, Y = \operatorname{Spec} B$ と書ける．f から誘導される環準同型を $\phi : B \to A$ とする．A, B :: affine domain / k から特に X, Y は Noetherian である．また，f :: finite type より A :: finitely generated B-algebra. よって，f :: finite であるためには ϕ :: integral すなわち A :: integral / $\phi(B)$ を示せば十分である．

$K = \operatorname{Quot}(\phi(B))$ とし，R を $\phi(B) \subseteq R \subset K$ であるような任意の valuation ring とする．Thm4.7 から以下の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
K & A \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
R \arrow[u, hook] & B \arrow[l] \arrow[u, "\phi"']
\end{tikzcd}$$

$A \to R \to K = A \to K$ かつ右辺が埋め込みであることから $A \to R$ は埋め込みである．すなわち $(\phi(B) \subseteq) A \subseteq R$. R のとり方と Thm4.11 より，$A \subseteq \overline{\phi(B)}$. よって A :: integral / $\phi(B)$.

Ex4.7 Schemes Over $\mathbb{R}$

Ex4.8 Let $\wp$ :: Property of Morphisms of Schemes

Ex4.9 Composition of Projective Morphisms is Projective

Ex4.10 Chow's Lemma.

Ex4.11

Ex4.12 Examples of Valuation Rings.