1 Derived Functors

2 Cohomology of Sheaves

2.1 Lemma2.4.

Lemma2.4(p.207) で次の補題が使われている．

補題 2.1
$(X, \mathcal{O}_X)$ :: ringed space, $\mathcal{M}$ :: $\mathcal{O}_X$-module とする．開集合 $U \subseteq X$ について次が成立する．

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_U, \mathcal{M}) \cong \mathcal{M}(U).$$

しかもこの同型は $U, \mathcal{M}$ について自然．

(証明). 次のように写像を定める．

$$\begin{array}{cccc} \Phi : & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_U, \mathcal{M}) & \to & \mathcal{M}(U) \\ & \phi & \mapsto & \phi_U(1) \\ & [\langle V, t\rangle \mapsto \langle V, t \cdot (s|_V)\rangle] & \leftarrow\!\shortmid & s \end{array}$$

∎

2.2 Prop2.5.

Prop2.5 の証明で long exact sequence を使っている部分が行間に成っているので説明する．Thm1.11c より次の完全列が得られる．

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{I}) \xrightarrow{\phi} \Gamma(X, \mathcal{G}) \\ \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}) \\ \xrightarrow{\delta^1} H^2(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \longrightarrow H^2(X, \mathcal{G}) \\ \xrightarrow{\delta^2} \cdots \end{array}$$

もともとの完全列から ϕ :: surj. また $\Gamma(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathcal{F}) \to 0$ :: exact から δ^0 :: surj も得られる．完全列は complex でもあるから，$\delta^0 \circ \phi = 0$．以上より次が分かる．

$$H^1(X, \mathcal{F}) = \mathrm{im}\, \delta^0 = \delta^0(\phi(\Gamma(X, \mathcal{I}))) = \mathrm{im}(\delta^0 \circ \phi) = 0.$$

上の long exact sequence の一部を取り出す．ここでは $i \geq 1$ としている．

$$0 \longrightarrow H^i(X, \mathcal{G}) \xrightarrow{\delta^i} H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

これが exact であるから，$H^i(X, \mathcal{G}) \cong H^{i+1}(X, \mathcal{F})$．この同型と $\mathcal{G}$ も flasque であることを用いると，$H^i(X, -)$ の添字 i についての帰納法で Prop2.5 の主張が証明される．

2.3 Prop2.6.

Prop2.6 の意味は次の通り．$(X, \mathcal{O}_X)$ :: ringed space, $\mathcal{F} \in \mathfrak{Mod}(X)$ とする．$\mathcal{O}_X$-module の構造を忘却すれば，$\mathcal{F} \in \mathfrak{Ab}(X)$ とみなせる．（constant sheaf :: $\mathbb{Z}_X$ は $\mathfrak{Mod}(X)$ の initial object だから，$\mathcal{F}$ は $\mathbb{Z}_X$-module とみなすことが出来る．そして $\mathbb{Z}_X$-module は sheaf of abelian group に他ならない．Cor2.3 の証明も参照せよ．）なので $\mathcal{F}$ の injective resolution を $\mathfrak{Mod}(X), \mathfrak{Ab}(X)$ の中でそれぞれ取る．

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^0 \longrightarrow \mathcal{I}^1 \longrightarrow \dots$$

すなわち $\mathcal{I}^i$ として $\mathfrak{Mod}(X)$ の object または $\mathfrak{Ab}(X)$ の object をとる．するとどちらの圏で resolution をとるかによって，異なる完全列が得られるだろう．しかし得られる cohomology group は同じである，というのが Prop2.6 の主張である．

証明は次の様に行う: $\mathfrak{Mod}(X)$ における $\mathcal{F}$ の injective resolution

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{I}^0 \longrightarrow \mathcal{I}^1 \longrightarrow \dots$$

は，$\mathcal{F}, \mathcal{I}^i$ が持つ $\mathcal{O}_X$-module の構造を忘却して $\mathfrak{Ab}(X)$ の完全列とみなせば，$\Gamma(X, -) : \mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}$ についての acyclic resolution である．したがって Thm1.2 より，この resolution から得られる cohomology group は $H^i(X, \mathcal{F})$ に等しい．

2.4 Proof of Thm2.7.

p.210, proof of 2.7 についてコメント．証明では Step 1 と類似の議論が何度も繰り返される．この議論を一般化して述べると次のように成る．

補題 2.2
$U \subseteq X$ を開集合とすると $Y = X - U$ は閉集合．

(i)
$$H^i(X, \mathcal{F}_Y) = 0 \text{ and } H^i(X, \mathcal{F}_U) = 0 \text{ for } i > n \tag{$*$}$$

が成立するならば，$H^i(X, \mathcal{F}) = \text{for } i > n$ も成り立つ．

(ii) $\dim Y < \dim X$ ならば $(*)$ の一方である $H^i(X, \mathcal{F}_Y) = 0$ $(i > n)$ が成立する．

(i) と (ii) を合わせると，

$$\dim Y < \dim X \text{ and } H^i(X, \mathcal{F}_U) = 0 \ (i > n) \implies H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \ (i > n)$$

ということになる．

(証明)．(i) を示すには完全列:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_U \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_Y \longrightarrow 0.$$

から誘導される長完全列を見れば良い．仮定を用いれば次のように成る．

$$
\begin{array}{l}
\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} H^n(X,\mathcal{F}_U) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^n(X,\mathcal{F}_Y) \\
\xrightarrow{\quad\delta^{n}\quad} 0 \longrightarrow H^{n+1}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow 0 \\
\xrightarrow{\quad\delta^{n+1}\quad} 0 \longrightarrow H^{n+2}(X,\mathcal{F}) \longrightarrow 0 \\
\xrightarrow{\quad\delta^{n+2}\quad} \dots
\end{array}
$$

よって $H^i(X,\mathbb{Z}_U)=0$ $(i>n)$. (ii) は帰納法の仮定である． ∎

Thm2.7 の証明のうち，Step 3 が難しい．$\alpha \in A$ は，$\mathcal{F}$ の有限個の section の集合である．そこで $\alpha=\{\langle U_i,s_i\rangle\}_{i=1}^r$ とする．$\mathcal{F}_\alpha$ は次のように書ける．

$$\mathcal{F}_\alpha=\sum_{i=1}^r(\iota_i)_*(s_i\mathbb{Z}_{U_i})$$

ここで ι_i は包含写像 $U_i\hookrightarrow X$ であり，$s_i\mathbb{Z}_{U_i}$ は s_i で生成される abelian group の sheaf である．$x\in X$ での stalk をとると，

$$(\mathcal{F}_\alpha)_x=\sum_{i|x\in U_i}(s_i)_x\mathbb{Z}.$$

右辺は $\{(s_i)_x\}_{i|x\in U_i}$ で生成される abelian group. A は包含関係によって directed set となり，$\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ も sheaf としての包含関係（subsheaf の関係）で direct system となる．そして各 $\mathcal{F}_\alpha$ は $\mathcal{F}$ の subsheaf である．したがって direct limit の定義から，次の図式が可換に成るような $\varinjlim\mathcal{F}_*\to\mathcal{F}$ がただひとつ存在する．

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim \mathcal{F}_* \arrow[r, dashed, "\phi"] & \mathcal{F} \\
\{\ \mathcal{F}_{\alpha'} \arrow[u] \arrow[r, hook] \arrow[ur, bend right] & \mathcal{F}_\alpha\ \} \arrow[u] \arrow[ul, bend left]
\end{tikzcd}
$$

この図式全体を stalk の関手 $(-)_x$ で写す．direct limit 同士は交換できることを用いると次のように成る．

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim (\mathcal{F}_*)_x \arrow[r, "\phi_x"] & \mathcal{F}_x \\
\{\ (\mathcal{F}_{\alpha'})_x \arrow[u] \arrow[r, hook] \arrow[ur, bend right] & (\mathcal{F}_\alpha)_x\ \} \arrow[u] \arrow[ul, bend left]
\end{tikzcd}
$$

$(\mathcal{F}_\alpha)_x$ は上のとおりのもの．なので $\varinjlim(\mathcal{F}_*)_x=\mathcal{F}_x$. また下の行 (direct system) から上の行への射はいずれも包含写像だから，二つの三角形は同じものである．

$$
\begin{tikzcd}
\varinjlim (\mathcal{F}_*)_x & \\
\{\ (\mathcal{F}_{\alpha'})_x \arrow[u] \arrow[r, hook] & (\mathcal{F}_\alpha)_x\ \} \arrow[ul, bend left]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{F}_x \\
\{\ (\mathcal{F}_{\alpha'})_x \arrow[r, hook] \arrow[ur, bend right] & (\mathcal{F}_\alpha)_x\ \} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

よって ϕ_x :: iso. II, Prop1.1 から ϕ :: iso, すなわち $\varinjlim\mathcal{F}_*=\mathcal{F}$.

$\alpha' \subseteq \alpha$ としよう．すると次の完全列が存在する．

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}_{\alpha'} \longrightarrow \mathcal{F}_{\alpha} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow 0$$

$x \in X$ における stalk をとると，$\alpha' \subseteq \alpha$ ゆえ

$$\mathcal{G}_x = (\mathcal{F}_\alpha)_x / (\mathcal{F}_{\alpha'})_x = \sum_{i \left| \substack{x \in U_i \\ \langle U_i, s_i \rangle \in \alpha - \alpha'} \right.} (s_i)_x \mathbb{Z} = (\mathcal{F}_{\alpha - \alpha'})_x.$$

となる．よって $\mathcal{G} = \mathcal{F}_{\alpha-\alpha'}$．なので $\#\alpha$（α の元の個数）について帰納的に考えていくと，α が 1 元集合の場合のみ考えれば十分だとと分かる．

$$H^i(X, \mathcal{F}_{\alpha'}) = 0 \text{ and } H^i(X, \mathcal{F}_{\{\langle U,s \rangle\}}) = 0 \implies H^i(X, \mathcal{F}_{\alpha' \cup \{\langle U,s \rangle\}}) = 0.$$

標準的な全射 $\mathbb{Z}_X \to \mathcal{F}_{\{\langle U,s \rangle\}} = j_*(s\mathbb{Z}_U)$ $(j : U \hookrightarrow X)$ が存在するため，この全射の ker を $\mathcal{R}$ とすれば $\mathcal{F}_{\{\langle U,s \rangle\}} \cong \mathbb{Z}_X / \mathcal{R}$.

3 Cohomology of a Noetherian Affine Scheme