ゼミノート #2

七条彰紀

2018 年 4 月 19 日

以降は，curve と言えば

smooth, complete, reduced and connected scheme of dimension 1 over $\mathbb{C}$

のことである．[2] II, 6.7 より，以上の意味での curve は projective である．

[1] では "curve" の定義に "curve" を用いているので些か定義を定め難い．このノートでは，通常要求される irreducibility は要求しないことにした．これは [1] Exercise 1.7 に現れる $xy = 0$ を除外しないためである．

また，(geometric) genus of curve は通常 g で表す．

1 Moduli spaces we'll be concerned with

以降で考えていく moduli space を簡単に紹介する．

1.1 $\mathcal{M}_g$ :: the coarse moduli space of curves of genus g.

これまで議論してきた．まだ存在は示されていない．trivial automorphism しか持たない curve に対応する $\mathcal{M}_g$ の点全体を $\mathcal{M}_g^0$ と書くことにする．これは $\mathcal{M}_g$ の開集合であることが知られている．

1.2 $\mathcal{M}_{g,n}$ :: the coarse moduli space of pairs of curve of genus g and n distinct points.

$\mathcal{C}_g = \mathcal{M}_{g,1}$ もここで述べる．

corve of genus g :: C と C の n 個の互いに異なる点 :: $p_1, \ldots, p_n$ を合わせた順序組 $(C, p_1, \ldots, p_n)$ の moduli space を $\mathcal{M}_{g,n}$ と呼ぶ．

[1] によれば，圏点をつけた条件（互いに異なる点の順序組）は，$\mathcal{M}_{d,g}$ の compactification を考える上で必要である．また，curve :: C と，互いに異なるとは限らない点の順序無し組の組 $(C, \{p_1, \ldots, p_n\})$ の coarse moduli space を構成することも出来る．

$(C, p_1, \ldots, p_n)$ から n 点 $p_1, \ldots, p_n$ の情報を忘れると，標準的な射 $\mathcal{M}_{g,n} \to \mathcal{M}_g$ が得られる．

1.3 $\mathcal{P}_{d,g}$ :: the coarse moduli space of pairs of curve of genus g and line bundle of degree d.

$\mathcal{P}_{d,g}$ は，curve of genus g とその上の line bundle of degree d の組 $(C, \mathcal{L})$ から $\mathcal{L}$ の情報を忘れれば，標準的な射 $\phi : \mathcal{P}_{d,g} \to \mathcal{M}_g$ が得られる．

■ 次の同型が存在する．

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{P}_{d,g} & \cong & \mathcal{P}_{d+(2g-2),g}, & & \mathcal{P}_{d,g} & \cong & \mathcal{P}_{-d,g} \\ (C,\mathcal{L}) & \mapsto & (C, L\otimes K_C), & & (C,\mathcal{L}) & \mapsto & (C, L^{-1}) \end{array}.$$

このことと Exercise 2.6 から，互いに同型にならない $\mathcal{P}_{d,g}$ は，各 g に対して丁度 $g-1$ 個ある[†1]．

$$\mathcal{P}_{0,g}, \mathcal{P}_{1,g}, \ldots, \mathcal{P}_{d-1,g}.$$

2 Constructions of $\mathcal{M}_g$

2.1 Generally Steps of Construction of Moduli Space.

moduli space の構成方法はある程度決まった手順がある．ここではそれを述べる．

まず，対象 X と付随する情報 (extra data) の組たちを，何らかの大きい空間 W の点に対応させる．多くの場合で対象の同型類と点の対応は $1:1$ ではなく，$1:$ 多となっている．1 つの対象の同型類 $[X]$ に :: 対応する W の点たちが成す集合 $S_{[X]}$ を観察する．この集合 $S_{[X]}$ を何らかの群 G の W への作用に拠る軌道と考えることが出来れば ($S_{[X]}=Gw$ なる $w\in W$ が存在すれば)，求める moduli space は商空間 W/G として実現できる．

まとめると，moduli space を構成する際には以下の 4 つの要素を中心に考えることに成る．

Extra Data	分類対象 (Object) に付随させる情報.
Container Space	扱いやすい空間.
Correspondance	組 (Object, Extra Data) と Container Space の点の対応.
Group	Container Space に作用し，1 つの Object に対応する点の集合が 1 つの軌道である群.

例 2.1

（[3]）k :: field とし，moduli space of hypersurface of degree d in $\mathbb{P}^n_k$ を構成しよう．H :: hypersurface of degree d in $\mathbb{P}^n_k$ は，次のような形の $k[x_1,\ldots,x_n]$ の斉次 d 次多項式で定まる．

$$\sum_{|\alpha|=d} a_\alpha x^\alpha.$$

ただし α は多重添字である．そして多項式はその係数 a で定まる (Correspondance).

a は $k^{\oplus N}(N:=\binom{n+d}{d})$ の元である．したがって H は $\mathbb{A}^N_k$ (Container Space) の点 $(a_{(d,0,\ldots,0)},\ldots,a_{(0,\ldots,0,d)})$ に対応する．しかし，a に正則行列 $g\in GL_{n+1}(k)$ (Group) を作用させた a' も，H と同型な hypersurface に対応する（g の作用のさせ方はここで述べない）．逆に H の同型な hypersurface に対応する $\mathbb{A}^N$ の点の全体は，$GL_{n+1}(k)$ による a の軌道として得られる．よって $\mathbb{A}^N_k/GL_{n+1}(k)$ がもとめる moduli space である．

以下では $\mathcal{M}_g$ :: the coarse moduli space of smooth curves of genus g の構成方法の概略を述べる．分類対象 (Object) に付随させる情報．方法は大きく分けて 3 つある．最初の二つは解析的な方法で，最後のものは完全に代数的である．

[†1] $\mathbb{Z}$ を $s:d\mapsto d+(2g-2)$ と $t:d\mapsto -d$ の二つの自己同型で生成される群で割る．s が生成する群は $(2g-2)\mathbb{Z}(<\mathbb{Z})$ と同型で，t が生成する群は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型．よって $\#(\mathbb{Z}/(2g-2)\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})))=(2g-2)/2=g-1$.

2.2 The Teichmüller approach

Extra Data	Normalized set of generators for $\pi_1(C)$, or Homeomorphism which C^{an} to standard compact orientable surface X_0.
Container Space	Teichmüller space :: $T_g \subseteq \mathbb{C}^{3g-3}$.
Group	Γ_G :: Group of diffeomorphisms of X_0, modulo isotopy.

この方法で構成された $\mathcal{M}_g$ は analytic variety になる．

この方法の利点は，$\mathcal{M}_g$ の位相を扱いやすいことと，$\mathcal{M}_g$ に自然な計量を入れられることである．

2.3 The Hodge theory approach

Extra Data	1. Symplectic basis of $H_1(C, \mathbb{Z})$ :: $\{a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g\}$, 2. Basis of $H^0(C, K_C)$ :: $\{\omega_1, \ldots, \omega_g\}$, 3. The intersection pairing.
Container Space	$\mathfrak{c}_g \subseteq \mathfrak{h}_g$.
Correspondance	$P = [\int_{b_i} \omega_j]_{i,j} \in \mathfrak{h}_g$
Group	$Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ :: Symplectic group.

ここで $\mathfrak{h}_g$ は次のように定義される．

$$\mathfrak{h}_g = \left\{ \tau \in M_{g\times g}(\mathbb{C}) \;\middle|\; \tau^T = \tau, \Im(\tau) :: \text{positive difinite.} \right\}$$

これは Siegel upper-halfspace of dimension g と呼ばれている．$\mathfrak{h}_1$ が通常の upper-halfplane と一致することに注意．$b_1, \ldots, b_g$ の選び方によって $P = [\int_{b_i} \omega_j]_{i,j}$ は変わるが，これは以下の $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ による作用に対応する．

$$Sp_{2g}(\mathbb{Z}) = \left\{ \gamma \in GL_{2g}(\mathbb{Z}) \;\middle|\; \gamma^T \Omega \gamma = \Omega \right\}, \quad \text{where} \quad \Omega = \begin{bmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{bmatrix}.$$

構成方法から，$\mathcal{M}_g$ は $\mathcal{A}_g = \mathfrak{h}_g / Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ に含まれる．$\mathcal{A}_g$ は coarse moduli space for abelian varieties of dimension g である．

この方法は $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ が Γ_g よりも分かりやすいという点で Teichmüller approach に優っている．しかし $\mathfrak{c}_g$ の方は把握が難しく，「$\mathfrak{c}_g$ はどのようなものか」という問は the Schottky problem と呼ばれている．これについては様々な考察がなされているが，$\mathfrak{c}_g$ の具体的な記述は得られていない．

この方法の別の利点は，compactification of $\mathcal{A}_g$ :: $\tilde{\mathcal{A}}_g$ [†2] が自然に得られるということである．compactification of $\mathcal{M}_g$ :: $\tilde{\mathcal{M}}_g$ は $\tilde{\mathcal{A}}_g$ での $\mathcal{M}_g$ の閉包として得られる．$\tilde{\mathcal{M}}_g$ を用いた議論によって，$\mathcal{M}_g$ が projective でも affine でも無いことが分かる（TODO: ここでの $\mathcal{M}_g$ って scheme ではないでのは？）．

2.4 The geometric invariant theory (G.I.T.) approach

$n \geq 3$ を任意にとって固定する．

[†2] $\mathcal{A}_g$ を analytic open subset として含む compact analytic variety の事．

Extra Data	(Nothing.)
Container Space	$K \subseteq \mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}$ $(N := (2n-1)(g-1)-1)$.
Group	$PGL_{N+1}(\mathbb{C})$.

$\mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}$ は subscheme of degree $2(g-1)n$ and genus g in $\mathbb{P}^N$ の Hilbert scheme である．
この方法の利点は，代数的であることの他に二つある．

1. $\mathcal{M}_g$ が quasiprojective algebraic variety として得られる．
2. compactification of $\mathcal{M}_g$ についての考察が自然に得られる．

compactification of $\mathcal{M}_g$ を得る方法として，K の $\mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}(=: \mathcal{H})$ での閉包を取って $PGL_{N+1}(\mathbb{C})$ で割る，ということが思いつく．しかしこれで得られるのは K の compactification でなく，K を含む集合 $\tilde{K}$ の compactification である．これらの包含関係は $K \subset \tilde{K} \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{H}}(K)$ となる．

この拡張が必要な理由は，次のように説明される: 次のような $t \in \mathbb{A}^1 - \{0\}$ でパラメトライズされる family of smooth curves を考える．has only nodes as singularities and has only finitely many automor- phisms.

$$C : y^2z = x^3 - t^2axz - t^3bz^3 \quad \text{where} \quad a, b, t \in \mathbb{C}, t \neq 0.$$

$t \neq 0$ ならば $C_t \cong C_1$ となる．しかし C_0 は cuspidal curve となる．$C \to \mathbb{A}^1 - \{0\}$ に対応する j-invariant map を $\chi : \mathbb{A}^1 - \{0\} \to \mathbb{A}^1$ とすると，$t \to 0$ で χ の値は $\mathbb{A}^1_j$ の外側の点に収束してしまう．なので $\mathcal{M}_1 = \mathbb{A}^1_j$ をコンパクト化するには，C_0 に対応する点を $\mathcal{M}_1$ に加えなければならない．なお，この曲線族は a, b の値を変えることで任意の楕円曲線を含むものに成る．

では $\tilde{K}$ に含まれる曲線は何だろうか，ということになるが，これは (Deligne-Mumford) stable curve と呼ばれるものである．

定義 2.2
stable curve とは，以下を満たす曲線（scheme of dimension 1 over $\mathbb{C}$）である．

1. 完備 (=proper),
2. 連結,
3. 特異点は高々 2 重点 (node),
4. 自己同型群が有限位数.

ここで再び曲線族 $C \to \mathbb{A}^1_t$ を考える．これは $C_t \cong C_1 (t \neq 0)$ かつ $C_1 \ncong C_0$ となっている．そこで $C_1 \not\sim C_0$ とすると，jump phenomenon が起きる．したがって任意の $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線 (C_1) と cuspidal curve $(C_0) :: y^2 = x^3$ は「同値」なものとして扱わなければならない．では楕円曲線と cuspidal curve の関係は何かというと，これが degeneration である．

stable n-pointed curve も定義できる．

定義 2.3
stable n-pointed curve とは，以下を満たす曲線 C（scheme of dimension 1 over $\mathbb{C}$）

1. 完備 (=proper),
2. 連結,
3. 特異点は高々 2 重点 (node),

と，n 個の互いに異なる C の点 $p_1, \dots, p_n$ の組であって，$\sigma(p_i) = p_i$ を満たすような自己同型 $\sigma : C \to C$ が有限個しか存在しないものである．

これは stable curve と n 個の点の組で，

参考文献

[1] Joe Harris and Ian Morrison. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[3] 向井茂. モジュライ理論〈1〉. 岩波書店, 12 2008.