Ex2.1 Grothendieck Vanithing Thm is Best Possible.

(a) Let $X = \mathbb{A}^1, U = X - \{P, Q\}$. $H^1(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$.

k :: infinite field, $X = \mathbb{A}^1_k$, $P, Q \in X$ :: distinct closed points, $Y = \{P, Q\}, U = X - Y$ とおく．$\#Y < \#k = \infty$ なので $\#U = \infty$.

次の完全列が成り立つ．

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathbb{Z}_Y \longrightarrow 0.$$

ここから次の長完全列が誘導される．

$$\begin{aligned}
0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathbb{Z}_U) &\longrightarrow \Gamma(X, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow \Gamma(X, \mathbb{Z}_Y) \\
\longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_U) &\longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_Y) \\
\longrightarrow \cdots
\end{aligned}$$

完全列であるから，$H^1(X, \mathbb{Z}_U) = 0$ は $\Gamma(X, \mathbb{Z}_X) \to \Gamma(X, \mathbb{Z}_Y)$ が全射であることと同値である．一方，$\#U = \infty, \#Y = 2$ であるから，

$$\Gamma(X, \mathbb{Z}_X) = \mathbb{Z}, \qquad \Gamma(X, \mathbb{Z}_Y) = \Gamma(\{P\} \sqcup \{Q\}, \mathbb{Z}_Y) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

（$\sqcup$ は disjoint union を意味する．）よって全射にはなり得ない．したがって $H^1(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$.

(b) Generalization for $\mathbb{A}^n$.

k :: infinite field, $X = \mathbb{A}^n_k$, $H_1, \ldots, H_{n+1}$ :: hyperplanes, $Y = \bigcup_{i=1}^{n+1} H_i, U = X - Y$ とおく．$H^n(X, \mathbb{Z}_U) \neq 0$ を示す．$n = 1$ の場合については (a) で示したから，$n > 1$ とする．

完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_U \longrightarrow \mathbb{Z}_X \longrightarrow \mathbb{Z}_Y \longrightarrow 0$$

から誘導される長完全列の一部は次の様になる．

$$H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_X) \longrightarrow H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_Y) \longrightarrow H^n(X, \mathbb{Z}_U) \longrightarrow H^n(X, \mathbb{Z}_X).$$

また，$\mathbb{Z}_X$ :: constant sheaf on irreducible space なので $\mathbb{Z}_X$ :: flasque (II, Ex1.16a), acyclic (Prop2.5). 今 $n > 1$ だから $H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_X) = H^n(X, \mathbb{Z}_X) = 0$. よって $H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_Y) \cong H^n(X, \mathbb{Z}_U)$ が得られる．なので我々は $H^{n-1}(X, \mathbb{Z}_Y) \neq 0$ を示すことにする．

Ex2.2 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}$ :: acyclic.

Ex2.3 Cohomology with Supports.

X :: topological space, Y :: closed subset of X, $U = X - Y$, $\mathcal{F}$ :: sheaf of abelian group on X とする．この時，$\Gamma_Y(X, \mathcal{F})$ を以下で定める．

$$\Gamma_Y(X, \mathcal{F}) = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid \operatorname{Supp} s \subseteq Y\} = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid s|_{X-Y} = 0\}.$$

(a)　$\Gamma_Y(X,-) : \mathfrak{Ab}(X) \to \mathfrak{Ab}$ :: left exact functor.

$\mathfrak{Ab}(X)$ の完全列を考える．

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}''.$$

ここから誘導される以下の列が完全であることは II, Ex1.8 で示した．

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}') \xrightarrow{f} \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{g} \Gamma(X,\mathcal{F}'').$$

Γ を Γ_Y に付け替えても完全列であることを示す．

■Exact at $\Gamma_Y(X,\mathcal{F}')$.　示すべきことは次のこと．

$$^\forall s \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}'),\quad f(s)=0 \implies s=0.$$

$f:\Gamma(X,\mathcal{F}') \to \Gamma(X,\mathcal{F})$ が単射なので，その制限 $f|_{\Gamma_Y(X,\mathcal{F}')}$ も単射．よって主張が示せた．

■Exact at $\Gamma_Y(X,\mathcal{F})$.　示すべきは次のこと．

$$^\forall t \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}),\quad g(t)=0 \iff {}^\exists u \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}'),\quad f(u)=t.$$

$\Longleftarrow$ は $g\circ f=0$ から直ちに分かる． $\Longrightarrow$ は次のように示す．元の完全列があるため，$f(u)=t$ を満たす u が $\Gamma(X,\mathcal{F}')$ からはとれる．今 $t\in\Gamma_Y(X,\mathcal{F})$ から t は以下を満たす．

$$^\forall P \in U,\quad t_P = (f(u))_P = f_P(u_P) = 0.$$

f_P は単射であるから，任意の点 $P\in U$ について $u_P=0$. よって $u\in\Gamma_Y(X,\mathcal{F}')$.

(b)　$\mathcal{F}'$ :: flasque then $0\to\Gamma_Y(X,\mathcal{F}')\to\Gamma_Y(X,\mathcal{F})\to\Gamma_Y(X,\mathcal{F}'')\to 0$ is exact.

次の完全列は成立する (II, Ex1.16b).

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{F}') \xrightarrow{f} \Gamma(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{g} \Gamma(X,\mathcal{F}'') \longrightarrow 0.$$

これらの Γ を Γ_Y に取り替えても良いことを示す．(a) で示したことを合わせれば，次のことを示せば良いということになる．

$$^\forall t \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}''),\quad {}^\exists u \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}),\quad g(u)=t.$$

元の完全列から，$g(u)=t$ を満たす u が $\Gamma(X,\mathcal{F})$ からはとれる．今 $t\in\Gamma_Y(X,\mathcal{F}'')$ から t は以下を満たす．

$$t|_U = (g(u))|_U = g|_U(u|_U) = 0.$$

元の完全列があるため，$f|_U(\tilde{s})=u|_U$ となる $\tilde{s}\in\Gamma(U,\mathcal{F}')$ がとれる．$\mathcal{F}'$ :: flasque なので $s|_U=\tilde{s}$ となる $s\in\Gamma(X,\mathcal{F}')$ が存在する．構成から

$$f(s)|_U = u|_U \iff \bar{u} := u - f(s) \in \Gamma_Y(X,\mathcal{F}).$$

$g\circ f=0$ なので $g(\bar{u})=g(u-f(s))=g(u)=t$. よって $\bar{u}$ が条件を満たす．

(c)　injective sheaves are acyclic for $\Gamma_Y(X,-)$.

Prop2.5(injective sheaves are acyclic for $\Gamma(X,-)$) の証明がそのまま使える．この証明では (b) の内容の他には derived functor の性質しか使わない．

(d) $\mathcal{F}$ :: flasque then $0 \to \Gamma_Y(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X - Y, \mathcal{F}) \to 0$ is exact.

引き続き $U := X - Y$ とする．$\mathrm{res}_X^U : \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ は $\mathcal{F}$ :: flasque ゆえに全射．この写像の kernel は次のような集合である．

$$\ker \mathrm{res}_X^U = \{s \in \Gamma(X, \mathcal{F}) \mid s|_U = 0\}.$$

これは $\Gamma_Y(X, \mathcal{F})$ に他ならない．

(e) there is a long exact seq :: $\cdots \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(X, \mathcal{F}) \to H^i(U, \mathcal{F}|_U) \to \cdots$.

TODO: injective sheaves are flasque と (d) を使うと思われる．

(f) $Y \subseteq V$ :: open in X then $H_Y^i(X, \mathcal{F}) \cong H_Y^i(V, \mathcal{F}|_V)$.

Ex2.4 Mayer–Vietoris Sequence.

Ex2.5 $H_P^i(X, \mathcal{F}) = H_P^i(X_P, \mathcal{F}_P)$.

Ex2.6 $\{\mathcal{I}_\alpha\}$ :: direct system of injective sheaves then $\lim \mathcal{I}_\alpha$ :: injective sheaf.

Ex2.7 $H^1(S^1, \mathbb{Z}_{S^1}) \cong \mathbb{Z}$.