ゼミノート #3
Stable Curves

七条彰紀

2018 年 6 月 6 日

[3] 2.C,D を中心に stable curve について記述する．以下で曲線は全て **arithmetic genus** が 2 以上であるものとする．これは特異曲線を扱うために arithmetic genus を用い，自己同型群が有限であるために ≥ 2 とする．

1 Motivation: To Get Modular Compactification of $\mathcal{M}_g$.

G.I.T. によって $\mathcal{M}_g$ を得る方法では，Hilbert scheme $\mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}$[†1]の開集合 K を用いて $\mathcal{M}_g = K/PGL(N+1,\mathbb{C})$ として $\mathcal{M}_g$ を得た．

そこで compactification of $\mathcal{M}_g$ （ここでは $\mathcal{M}_g$ を開集合として含む projetive scheme over $\mathbb{Z}$）を得る方法として，K の $\mathcal{H}_{2(g-1)n,g,N}$ での閉包を取って $PGL_{N+1}(\mathbb{C})$ で割る，ということが思いつく．しかしこれでは moduli space が得られない．moduli space を得るためには，K を含む集合 $\tilde{K}$ の商 $\tilde{K}/PGL_{N+1}(\mathbb{C})$ をとらなくてはならない．これらの包含関係は $K \subset \tilde{K} \subset \mathrm{cl}_{\mathcal{H}}(K)$ となる．

$\bar{K}$ でなく $\tilde{K}$，という制限が必要な理由は次のように説明される: 次のような $(s:t) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{(0:1),(1:0)\} =: B$ でパラメトライズされる family of smooth curves を考える．

$$C_{(a,b)} : s^3y^2z = s^3x^3 - st^2axz - t^3bz^3 \quad \text{where} \quad a,b \in \mathbb{C}, (s:t) \neq (0:1),(1:0)$$

j-invariant を計算すると，これは fiberwise trivial family（session1A2A 参照）になっている．また，この曲線族 $C_{(a,b)}$ は a,b の値を変えることで任意の楕円曲線を含むものに成る．今 family :: $C_{(a,b)} \to B$ があるから，coarse moduli space の定義より，morphism :: $\phi\colon B \to \overline{\mathcal{M}}_g$ が存在する．今，$\overline{\mathcal{M}}_g$ は projective (over $\mathbb{Z}$) であるから，proper ([2] Thm II.4.9)．なので $B = \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{(0:1),(1:0)\} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ は $\bar{\phi}: \mathbb{P}^1 \to \overline{\mathcal{M}}_g$ へ拡張される[†2]．そこで $\bar{\phi}$ の $(s:t) = (1:0)$ における fiber を考えると，明らかにこれは cuspidal curve :: $y^2z = x^3$ である．これは rational curve であり，他の fiber と同型でない．他の fiber は全て同型であったから，この family では jamp phenomenon が発生している．したがって moduli space を得るためには，cuspidal curve に対応する点を K に（そして $\mathcal{M}_g$ に）付け加えてはならない．この意味で cuspidal curve は楕円曲線の “bad degeneration”と呼べる．

[†1] $N = (2n-1)(g-1) - 1$.

[†2] 証明の概略: criterion of properness を用いて $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,\zeta} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ を $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1,t} \to \overline{\mathcal{M}}_g$ に拡張し，これらが ϕ と貼り合わせられることを射の一意性から述べる．https://math.stackexchange.com/questions/1540201, http://lovelylittlelemmas.rjprojects.net/properness-and-completeness-of-curves/ を参照のこと．

ではjump phenomenonが発生しないような "good degeneration" は何か，というと，これがstable curveである．DeligneとMumfordがstable curveを定義し，研究した．

3A, 4A

2 Definition.

定義 2.1 (Stable Curve)
stable curveとは，以下を満たす曲線（scheme of dimension 1 over $\mathbb{C}$）である．

1. 完備 (=proper),
2. 連結,
3. （存在すれば）特異点は通常2重点 (node) のみ[†3],
4. 自己同型群が有限位数．

注意 2.2
Hurwitz's automorphisms theoremから，connected proper smooth curve of genus $g \geq 2$は全てstable curveである．

まったく同様にstable n-pointed curveも定義できる．

定義 2.3
stable n-pointed curveとは，以下を満たす曲線C（scheme of dimension 1 over $\mathbb{C}$）

1. 完備 (=proper),
2. 連結,
3. （存在すれば）特異点は通常2重点 (node) のみ,

と，n個の互いに異なるCの点$p_1, \ldots, p_n$の組$(C, p_1, \ldots, p_n)$であって，$\sigma(p_i) = p_i$を満たすような自己同型$\sigma : C \to C$が成す群が有限群であるものである．

関連してsemi-stable (pointed) curveとunstable (pointed) curveの概念がある．これは「自己同型群が有限群」であるという条件をゆるめたもので，「自己同型群が簡約群 (reductive group)」とする．reductive groupはG.I.T.の文脈で現れる概念である．

自己同型に関する条件は以下のように言い換えることが出来る．

命題 2.4
C :: proper, connected curve that has nodal point at worst, とする．この時，自己同型群$\mathrm{Aut}(C)$が有限位数であることと，以下は同値である: EをCのsmooth rational irreducible componentとする．この時，EとE以外の部分 $(= \mathrm{cl}_C(C - E) =: R)$ の交点は3つ以上．

(証明). 参考: https://math.stackexchange.com/questions/248722.

$r = \#(R \cap E)$とし，最初に$\mathbb{P}^1$の自己同型のうち互いに異なるr点を固定するものを考える．これは$PGL(2, \mathbb{C})$の元のうち，対応する点を固有ベクトルにもつものである．このようなものは$r < 3$の時無数に

[†3] nodeとは，$(x - y)(x + y) = 0$の原点とanalytically isomorphicである点．

存在し，$r=3$ なら有限個，$r>3$ なら単位写像しか存在しない．

E は $\mathbb{P}^1$ と birational equivalent だから，ある開集合 $U \subseteq E, V \subseteq \mathbb{P}^1$ について，isomorphism :: $\phi : U \to V$ が存在する．$\phi((E \cap R) \cap U)$ を固定する $\mathbb{P}^1$ の自己同型をとって α とする．（TODO: $(E \cap R) \cap U = E \cap R$ でないと $\mathbb{P}^1 - \{r\text{ 点 }\}$ の自己同型の数 $=E \cap R$ を固定する E の自己同型の数にならないのでは？）これらを用いて $\psi = \phi^{-1} \circ (\alpha|_V) \circ \phi : U \to U$ とする．E は smooth and proper であるから，ψ は $\mathrm{cl}_E(U) = E$ の自己同型 $\bar{\psi}$ に持ち上げられる．よって $\mathbb{P}^1$ の r 点を固定する自己同型 α から $E \cap R$ を固定する E の自己同型 $\bar{\psi}$ が得られる．

$E \cap R$ を固定する E の自己同型は，E の各点を $\bar{\psi}$ で写し，R の各点を固定するものとして C 全体へ拡張できる．こうして $\mathbb{P}^1$ の互いに異なる r 点を固定する自己同型から，C の自己同型が作れた．したがって C の自己同型は $r<3$ の時かつその時のみ無数に存在する． ∎

semi-stable は「交点が 2 つ以上」と書き換えたものと同値である．

3 Example

例 3.1
次の $\mathbb{A}^1$ 上の family を考える．

$$C_t : y^2 z = x(x-1)(x-t) \quad \text{where} \quad t \in \mathbb{A}^1.$$

$t \neq 0,1$ の時，C_t は楕円曲線である．また，任意の $\mathbb{C}$ 上の楕円曲線はこの family のいずれかの fiber と同型である．すなわち，fiberwise trivial family ではない．そして $t=0,1$ の時 C_t は stable curve となっている．（plot するときは $y \mapsto iy$ と線形変換したほうが node が見やすい．）

4 $\Delta = \overline{\mathcal{M}}_g - \mathcal{M}_g$

node を δ 個持つ stable curve が成す locus を考える．

主張 4.1
node を δ 個持つ stable curve が成す locus を $N_\delta \subset \bar{\mathcal{M}}_g$ とする．この時，

$$\dim N_\delta = 3g-3-\delta \quad (\implies \operatorname{codim} N_\delta = \delta).$$

また，$\mathrm{cl}_{\bar{\mathcal{M}}_g}(N_\delta)$ は node を δ 個以上持つ stable curve が成す locus に一致する．

このことは [3] Thm3.150 直後の段落でも触れられている．

node を 1 個以上持つ curve の locus :: $\Delta = \overline{\mathcal{M}}_g - \mathcal{M}_g$ は，$\mathcal{M}_g$ が $\overline{\mathcal{M}}_g$ の開集合であるから，これは closed in $\overline{\mathcal{M}}_g$．上の主張から，Δ は node を丁度 1 つ持つ curve の locus の closure である．そこで Δ_0 と Δ_i $(i=1,\ldots,\lfloor g/2 \rfloor)$ を次のように定める．

- $\Delta_0 = \mathrm{cl}_{\overline{\mathcal{M}}_g}(\{[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g \mid C :: \text{ irreducible curve with 1 node }\})$.
- $\Delta_0 = \mathrm{cl}_{\overline{\mathcal{M}}_g}(\{[C] \in \overline{\mathcal{M}}_g \mid C :: \text{ union of two smooth curves of genus } i \text{ and } g-i\text{, meeting at 1 pt }\})$ for $i = 1,\ldots,\lfloor g/2 \rfloor$.

注意 4.2
命題 (2.4) から，“union of two smooth curves of genus 0 and g, meeting at 1 pt”は stable curve ではない．なので Δ_0 は smooth rational irreducible component を持たず，node をただひとつ持つ曲線に対応する点の集合の閉包として定義されている．

$\Delta_0, \ldots, \Delta_{\lfloor g/2 \rfloor}$ は irreducible である．これは以下のように証明する．まず Δ_0 を考える．C :: irreducible curve with 1 node とする．これの normalization を $\tilde{C}$ とすると，C の node は $\tilde{C}$ の 2 点に対応する．そこで $\tilde{C}$ とこの 2 点を組にして $\mathcal{M}_{g-1,2}$ の点とする．こうして $\phi_0 : \mathcal{M}_{g-1,2} \to \Delta_0$ が得られる．Δ_i $(i > 0)$ の場合，C の normalization は genus i, genus $g - i$ の component からなる．交点に対応する点をそれぞれ一つずつ持つから，これを distinguished point として $\phi_i : \mathcal{M}_{i,1} \times_k \mathcal{M}_{g-i,1} \to \Delta_i$ が得られる．こうして得られる $\phi_0, \ldots, \phi_{\lfloor g/2 \rfloor}$ は連続である (FACT).

$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ は irreducible である (Thm2.15)．したがってその開集合 $\mathcal{M}_{g,n}$ も irreducible である（Δ :: closed より）．$\mathcal{M}_{g,n}$ は代数閉体上の scheme（実際には variety, Thm2.15）なので，これらの fiber product も irreducible．連続写像で写す操作と閉包をとる操作で irreducibility が保たれるので，$\Delta_i = \mathrm{cl}(\mathrm{im}\,\phi_i)$ $(i = 0, \ldots, \lfloor g/2 \rfloor)$ は irreducible である．

5 (Semi-)Stable Reduction.

これは [3] 3.C で詳しく扱う．

定理 5.1 (Deligne–Mumford Stable Reduction [4])
B :: smooth curve, $0 \in B$ :: closed point, $B^* := B - \{0\}$ とする．さらに $X \to B^*$ :: flat family of stable (resp.semi-stable) curves of arithmetic genus $g \geq 2$ とする．この時，branched cover which totally ramified over 0 :: $B' \to B$ が存在し，$X \times_{B^*} B'$ を stable family :: $X' \to B'$ へ拡張することが出来る．この拡張で得られる X'_0 は $B' \to B$ と $X \times B'$ の拡張に依らず，同型を除いて一意である．

参考文献として他に [1] を挙げる．

参考文献

[1] Sebastian Casalaina-Martin. *A tour of stable reduction with applications (v2)*. 2013. https://arxiv.org/abs/1207.1048v2.

[2] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry (Graduate Texts in Mathematics. 52)*. Springer, 1st ed. 1977. corr. 8th printing 1997 edition, 4 1997.

[3] Ian Morrison Joe Harris. *Moduli of Curves (Graduate Texts in Mathematics)*. Springer, 1998 edition, 8 1998.

[4] David Mumford Pierre Deligne. The irreducibility of the space of curves of given genus. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Vol. 36, No. 1, pp. 75–109, Jan 1969.