Stefan Fischer
Benjamin Neidhardt
Merle Kammer

1	2	3	4	Σ

Übungsblatt Nr. 3

(Abgabetermin 11.05.2017)

Aufgabe 1

a)

b)

c)

d)

Aufgabe 2

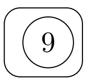
Aufgabe 3

a)

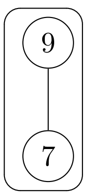
$A = \{9, 7, 21, 14, 88, 23, 10, 26, 13\}$

Bilden des Heaps:

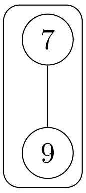
Einfügen von 9



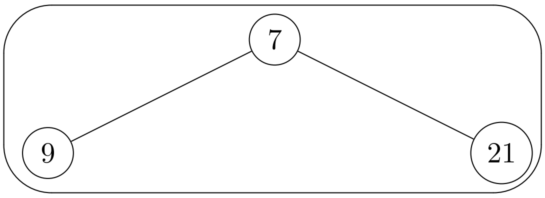
Einfügen von 7



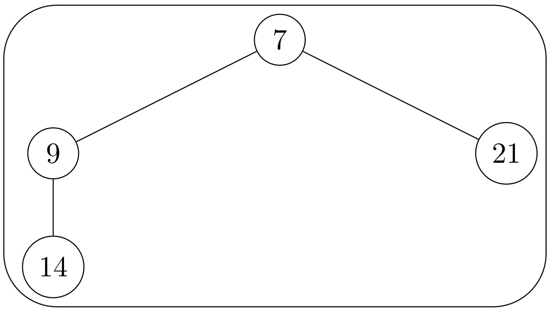
Wiederherstellen des Heap mit Beachtung des Kriteriums



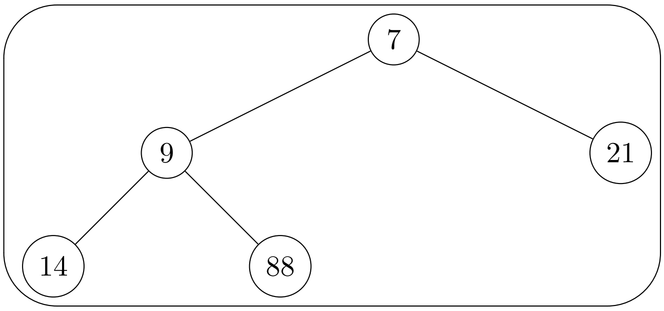
Einfügen von 21



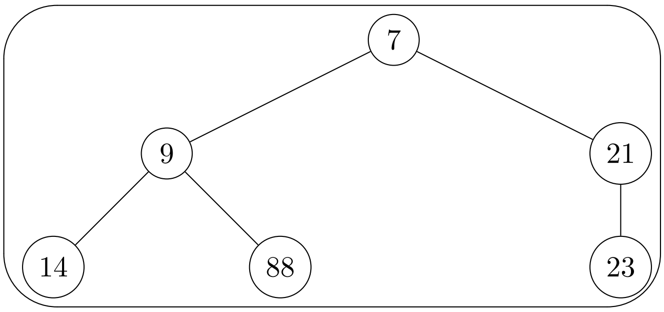
Einfügen von 14



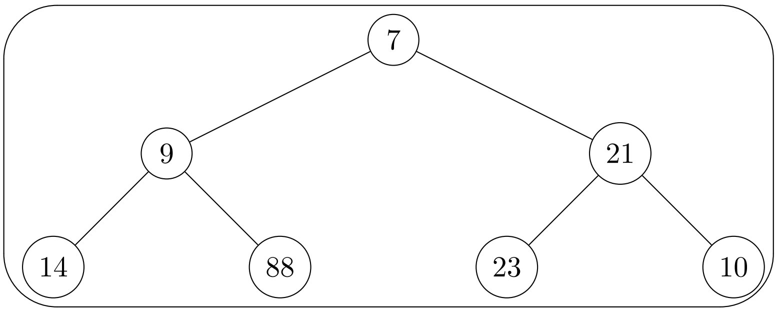
Einfügen von 88



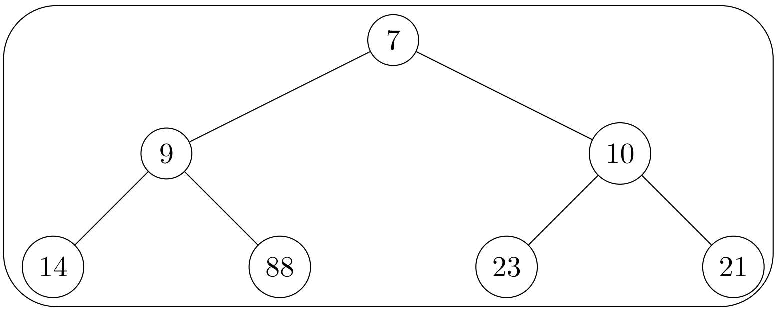
Einfügen von 23



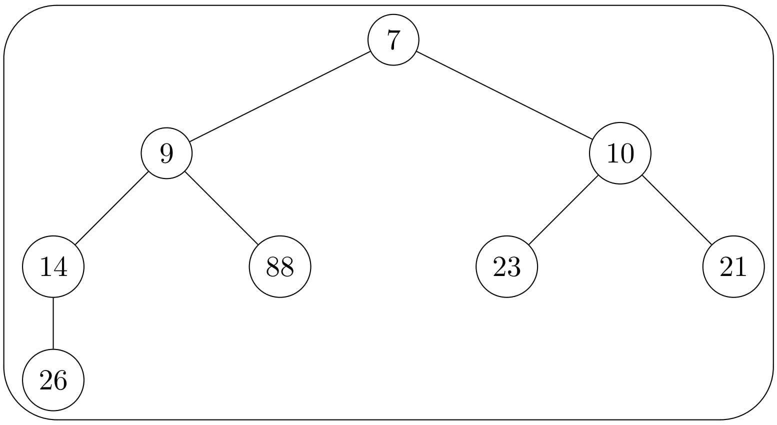
Einfügen von 10



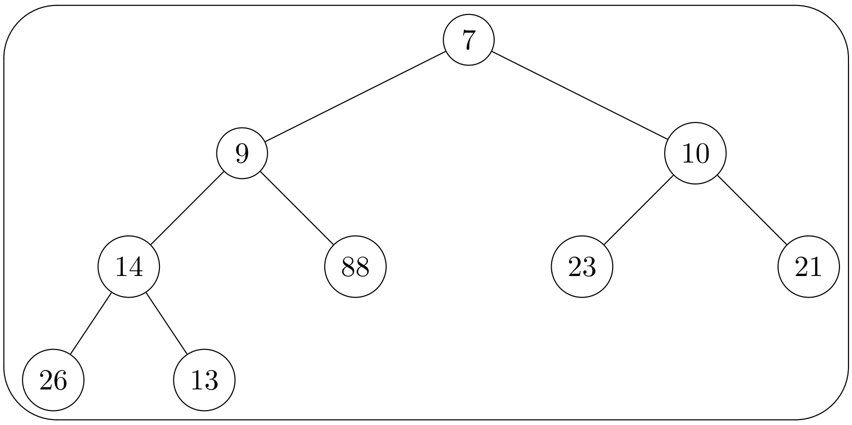
Wiederherstellen des Heap mit Beachtung des Kriteriums



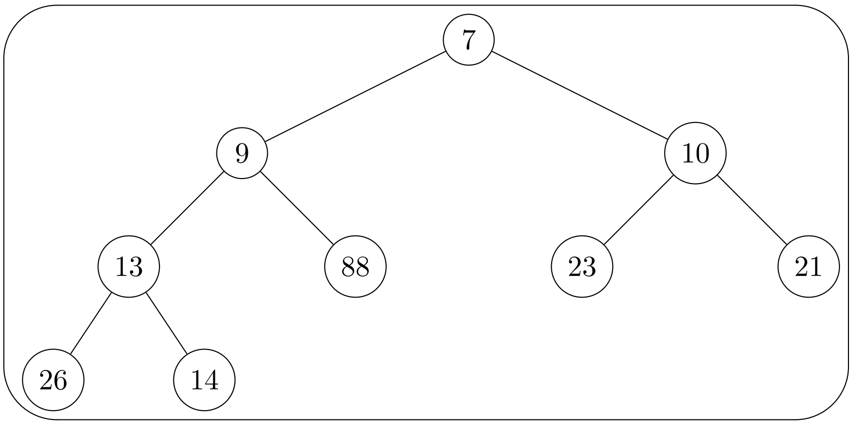
Einfügen von 26



Einfügen von 13

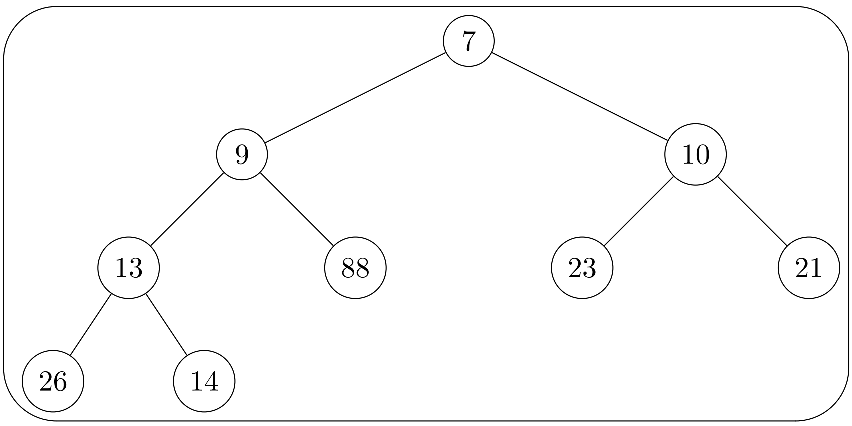


Wiederherstellen des Heap mit Beachtung des Kriteriums

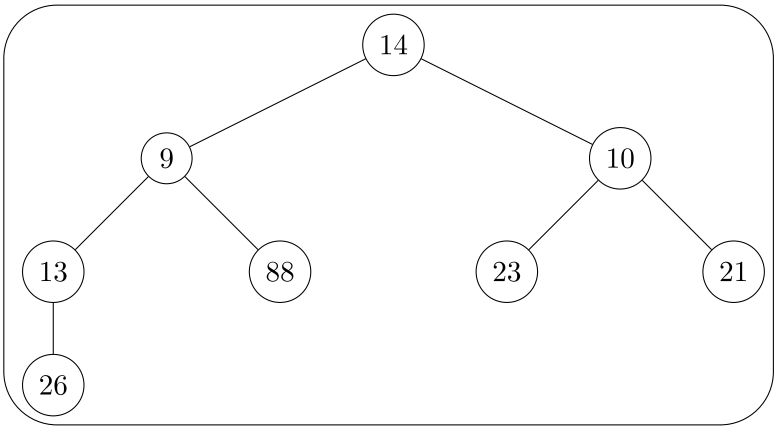


b)

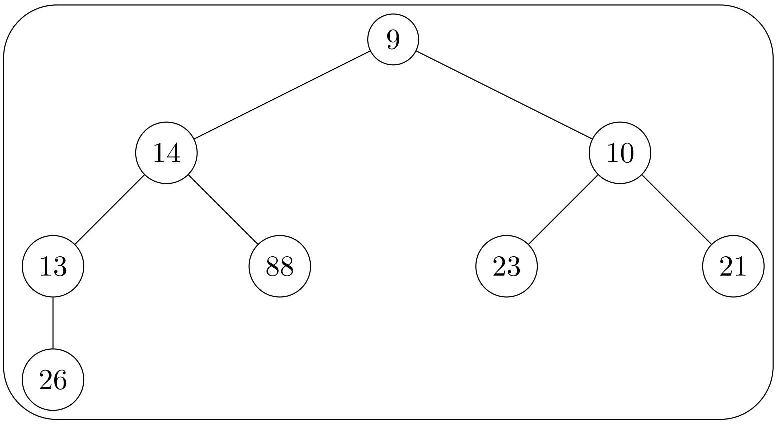
EXTRACTMIN Operation ausführen und Heap-Eigenschaft wiederherstellen:



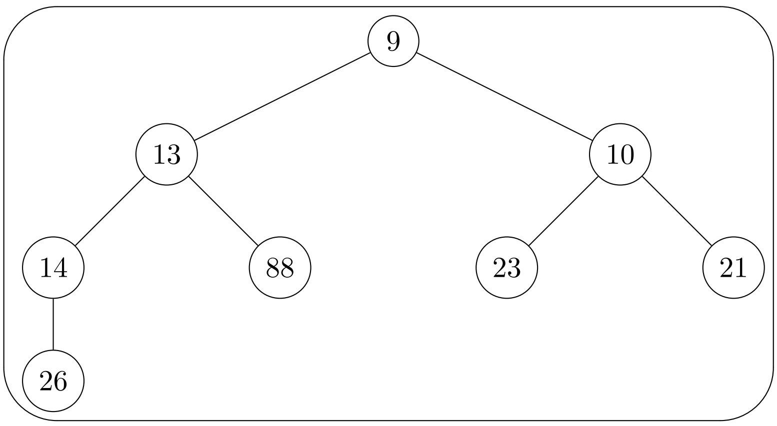
Entnehme das Minimum d.h. die Wurzel des Baumes und füge 14 als neue Wurzel hinzu:



Vergleiche 14 mit beiden Kindelementen und tausche mit kleinerem, also der 9:



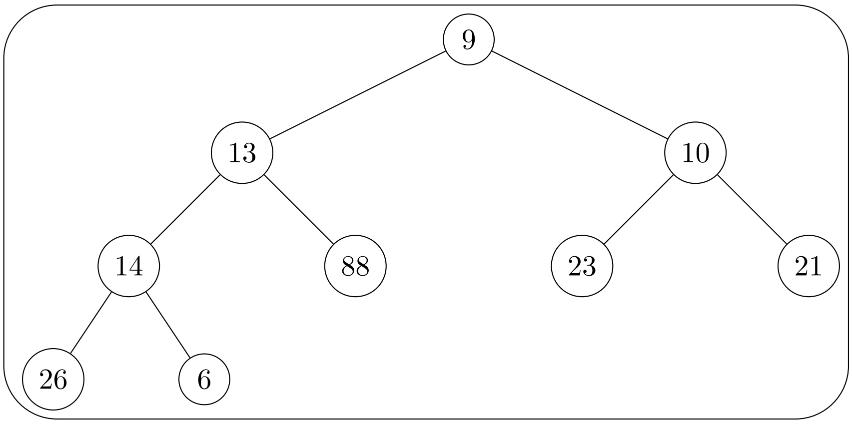
Vergleiche 14 wieder mit beiden Kindelementen, falls kleiner, tausche mit dem kleinsten, in dem Fall der 13:



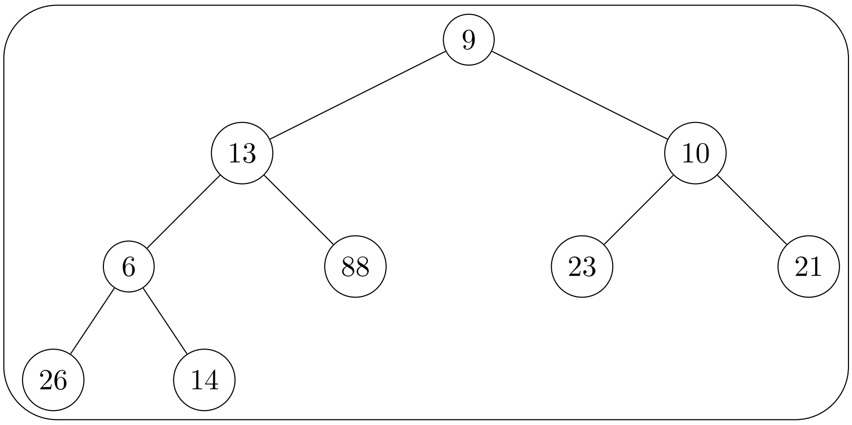
Dies ist der finale Heap, da die Heap-Eigenschaft nun komplett wiederhergestellt ist.

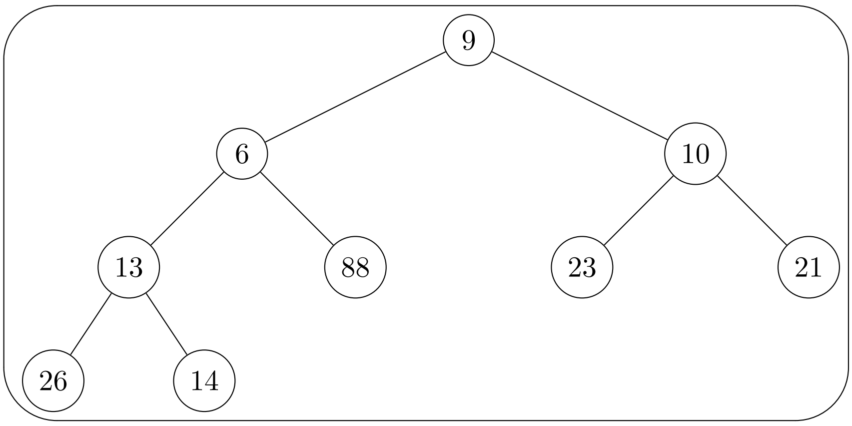
c)

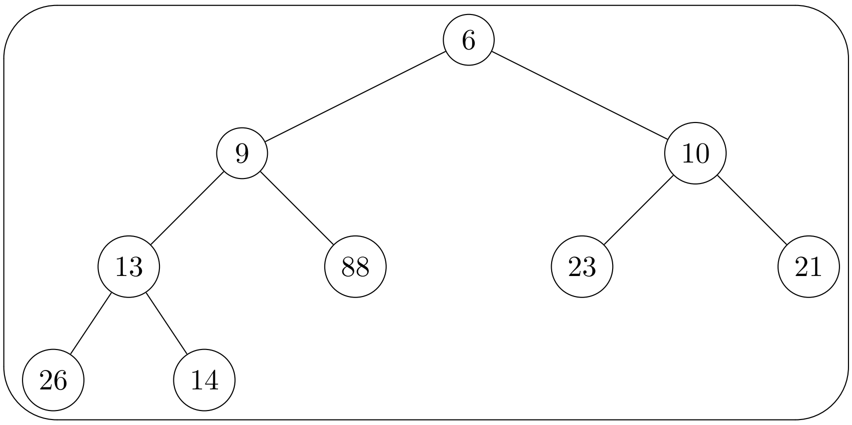
Neues Element 6 zu Heap hinzufügen:



Heap-Eigenschaft nach und nach wiederherstellen:







d)

Schritte in O-Notation um maximales Element aus dem Heap zu löschen?
→ man vergleicht alle Blätter, aber nicht die Elternknoten, da diese nach der Heap-Eigenschaft nicht das größte Element sein können

Schritt 1: Das Maximum finden → $[\frac{n}{2}]$ mit n Anzahl der Elemente d.h. O($[\frac{n}{2}]$)

Schritt 2: Maximum an unterstes Blatt,, welches am weitesten rechts steht → O(1)

Schritt 3: Heap-Eigenschaft wiederherstellen: max O($\log n$), da Höhe von Baum ausgewogen

Schritt 4: Maximum aus Baum entfernen (Heap-Eigenschaft bleibt durch Schritt 1 immer erhalten)

$\rightarrow [\frac{n}{2}] + 1 + \log n + 1 = [\frac{n}{2}] + \log n + 2 \rightarrow$ O(n)

Aufgabe 4

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a)

(a) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A = \{2\}$ ist: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$

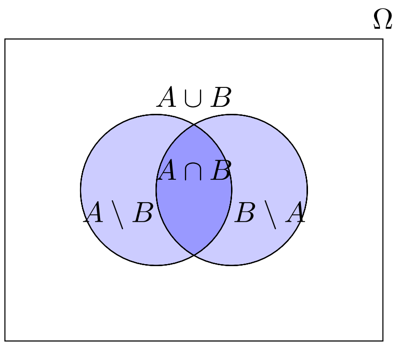
(b) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $A = \{2, 4, 6\}$ ist: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

b)

Zu zeige: Falls $A \cap B = \emptyset$, dann gilt $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$
(1)

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &\overset{(*)}{=} P((A \setminus B)\dot{\cup}(A \cap B)\dot{\cup}(B \setminus A)) \\
&= P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A) \quad \leftarrow \sigma\text{-additivität} \\
&= \underbrace{P(A \setminus B) + P(A \cap B)}_{=P(A)} + \underbrace{P(B \setminus A) + P(A \cap B)}_{=P(B)} - P(A \cap B) \\
&= P(A) + P(B) + P(A \cap B) \\
&\text{für } A \cap B = \emptyset \text{ gilt somit} \\
&= P(A) + P(B) \qquad \square
\end{aligned}$$

(*):
$A \cup B = (A \setminus B)\dot{\cup}(A \cap B)\dot{\cup}(B \setminus A)$



Für $A \cap B \neq \emptyset$ gilt $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ denn:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leftarrow$ siehe Beweis (1)
$\Rightarrow P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

c)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$
Das Ereignis, dass Älle drei Würfel ein Auge zeigen ist $A = \{(1, 1, 1)\}$. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist: $P(A) = P(\{(1, 1, 1)\}) = \frac{|\{(1,1,1)\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$

d)

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$

(a)

$$\begin{aligned}
[X = 4] &= \{(x, y) \in \Omega \mid X(x, y) = 4\} \\
&= \{(4, 4), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (4, 6), (6, 4)\}
\end{aligned}$$

Es werden zwei Würfel geworfen. Das Ereignis $[X = 4]$ tritt ein, wenn einer der Würfel eine 4 zeigt und die Augenzahl des anderen Würfels ≥ 4 ist. Das heißt das Minimum der gewürfelten Augenzahlen muss 4 sein, damit das Ereignis $[X = 4]$ eintrifft.

(b) $P([X = 4]) = P(\{(4,4),(4,4),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4)\}) = \frac{|\{(4,4),(4,4),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4)\}|}{|\Omega|} = \frac{6}{6^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
Unter Annahme der Gleichverteilung der Ereignisse ist $P([X = 4]) = \frac{1}{6}$.