

# Frequency Domain

## شیوا رادمنش

اطلاعات گزارش	چکیده
تاریخ: ۱۳۹۹/۹/۲۲	در این گزارش به معرفی تبدیل فوریه و عکس تبدیل فوریه، ویژگی‌های حوزه‌ی فرکانس و تفاوت آن با حوزه‌ی مکان و فیلترینگ در حوزه‌ی فرکانس و رفتار تصاویر در این حوزه پرداخته می‌شود.
واژگان کلیدی:	
تبدیل فوریه	
حوزه‌ی فرکانس	
تبدیل فوریه‌ی معکوس	
طیف	
فاز	

### ۱- مقدمه

شده است. در حوزه‌ی فرکانس مقادیر فرکانس اعداد مختلط بوده و شامل بخش‌های طیف و فاز می‌باشند. در صورت تغییر بخش فاز تصویر به هم می‌ریزد لذا در پردازش تصاویر در حوزه‌ی فرکانس، تغییرات تنها به بخش طیف اعمال می‌شوند. برای محاسبه‌ی تبدیل فوریه‌ی تصاویر و فیلترها از تبدیل فوریه‌ی گسسته دو بعدی استفاده می‌شود. این تبدیل به صورت زیر قابل تعریف است.

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

در این تبدیل  $f(x, y)$  مقدار پیکسل در مختصات  $(x, y)$  در حوزه‌ی مکان و  $F(u, v)$  مقدار

یکی از روش‌های پردازش تصویر بردن آن به حوزه‌ی فرکانس و بررسی و پردازش فرکانس‌های تصویر است. اعمال برخی فیلترها در حوزه‌ی فرکانس بار پردازشی کمتری نسبت به حوزه‌ی مکان دارد. تمامی توابع پیاده سازی شده در این تمرین با استفاده از کتابخانه‌ی numpy و opencv پایتون نوشته شده است.

### ۲- شرح تکنیکال

در هر یک از بخش‌های این تمرین برای بدست آوردن هر تصویر در حوزه‌ی فرکانس، از تابع فوریه استفاده

پیکسل در مختصات  $(u, v)$  در حوزه‌ی فرکانس و  $M$  و  $N$  ابعاد تصویر می‌باشند.

به همین ترتیب برای بازگرداندن تصویر از حوزه‌ی فرکانس به حوزه‌ی مکان از تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی معکوس استفاده می‌شود. این تبدیل به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد.

$$f(x, y) = \frac{1}{MN} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{-j2\pi(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N})}$$

در این تمرین برای تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی از تابع `fft2` و برای تبدیل فوریه‌ی گسسته‌ی دو بعدی معکوس از تابع `ifft2` متعلق به کتابخانه‌ی `numpy` استفاده شده است.

## ۲-۱-۱ سوال ۴.۱.۱

### ۲-۱-۱- تبدیل فوریه

در این بخش به تبدیل فوریه‌ی فیلترهای زیر پرداخته می‌شود.

$$a) \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

برای اعمال این فیلترها در حوزه‌ی فرکانس در ابتدا به تصویر و فیلتر صفر اضافه کرده تا ابعاد آنها به  $P=2M$  و  $Q=2N$  تغییر کند ( $M$  و  $N$  ابعاد اصلی تصویر هستند). سپس حاصل تبدیل فوریه‌ی تصویر و

فیلتر را بدست می‌آوریم. در اینجا برای اینکه فیلترها و تصاویر در حوزه‌ی فرکانس به خوبی قابل مشاهده باشند آن را شیفت داده تا مبدا در مرکز تصویر و فیلتر قرار گیرد. برای اعمال شیفت از تابع `fftshift` متعلق به کتابخانه‌ی `numpy` استفاده شده است. حال فیلتر را فقط به طیف تصویر اعمال می‌کنیم. برای اعمال فیلتر در حوزه‌ی فرکانس تنها کافی است حاصل ضرب آرایه‌ای فیلتر حقیقی بر بخش حقیقی تصویر (طیف) را بدست آورد. پس از اعمال فیلتر به تصویر تصویر شیفت داده تا مرکز تصویر دوباره در نقطه‌ی  $(0,0)$  قرار گیرد. حال با اعمال تبدیل فوریه‌ی معکوس به تصویر آن را به حوزه‌ی مکان بازمی‌گردانیم و بخش موهومی آن را حذف می‌کنیم. از گوشه‌ی بالای سمت چپ تصویر حاصل بخشی به اندازه‌ی  $M \times N$  جدا می‌کنیم.

### ۲-۱-۲ بررسی separable بودن فیلتر

یک فیلتر را `separable` گوئیم اگر بتوان آن را از حاصل ضرب دو بردار بدست آورد.

در بین فیلترهای گفته شده تنها فیلتر `a` این ویژگی را دارد و `separable` می‌باشد.

`Separable` بودن این فیلتر بر اساس عبارت زیر اثبات می‌شود.

$$\frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

## ۲-۲- سوال ۴.۱.۲

در این بخش به بررسی تاثیر لگاریتم و شیفت در حوزه فرکانس پرداخته می شود.

وقتی از یک تصویر تبدیل فوریه میگیریم و آن را به حوزه فرکانس می بریم، مبدا فرکانس تصویر گوشه‌ی بالا سمت چپ تصویر می باشد که برای مشاهده‌ی بهتر تصویر از نظر بصری در حوزه فرکانس می توان مبدا را به مرکز تصویر شیفت داد. در اینجا به کمک تابع  $\text{fftshift}$  مبدا مختصات به مرکز تصویر شیفت داده شده است.

در حوزه فرکانس در مبدا یک عدد بسیار بزرگ داریم که حاصل جمع مقادیر پیکسل ها است و باعث می شود اختلاف مرکز تصویر با سایر قسمت ها خیلی زیاد باشد. می توان از لگاریتم برای نمایش بهتر استفاده کرد و اختلاف مرکز را با سایر پیکسل های تصویر کم کرد.

## ۲-۳- سوال ۴.۲.۱

### ۲-۳-۱- مراحل فیلترینگ

در ابتدا P و Q را با توجه به M و N که ابعاد تصویر هستند محاسبه می کنیم. (M و N در اینجا

برابر ۲۵۶ می باشند) به این صورت که  $P=2*M$  و  $Q=2*N$  که در اینجا این مقادیر برابر ۵۱۲ می شود.

حال به تصویر و فیلتر صفر اضافه می کنیم تا ابعاد آنها برابر با  $P*Q$  شود. اضافه کردن صفر بدین صورت است پیکسل های (۰ و ۰) تا (۲۵۵ و ۲۵۵) شامل تصویر اصلی بوده و بقیه‌ی پیکسل های تصویر  $۵۱۲*۵۱۲$  برابر با صفر می باشد. برای فیلتر نیز پیکسل های (۰ و ۰) تا (۱۱ و ۱۱) شامل فیلتر اصلی بوده و سایر پیکسل های فیلتر  $۵۱۲*۵۱۲$  برابر با صفر می باشند.

پس از افزودن صفر به فیلتر و تصویر از آن ها تبدیل فوریه گرفته و آنها را از حوزه مکان به حوزه فرکانس منتقل می کنیم.

در مرحله‌ی فعلی می توان مبدا فرکانس را به مرکز تصویر شیفت داد اما در اینجا چون هم فیلتر و هم تصویر با تبدیل فوریه از حوزه مکان به حوزه فرکانس منتقل شده اند مبدا هر دو در نقطه‌ی (۰ و ۰) می باشد، لذا لزومی به شیفت دادن نیست اما در صورت اعمال آن باید حتما قبل از بازگشت به حوزه مکان مبدا به شیفت داد تا مبدا فرکانسی از مرکز به نقطه‌ی (۰ و ۰) برگردد.

پیکسل‌هایی در شرط  $Y(m, n) = Z(m, n)$  صدق می‌کنند که:

$$\frac{N}{2} < m, n < M - \frac{N}{2}$$

#### ۴-۲-۲ سوال ۴.۲.۲

در این بخش از نوعی فیلتر استفاده شده که در آن برخی از پیکسل‌ها را با توجه به مختصات آنها در حوزه فرکانس، دستکاری می‌کند. روش کار به شرح زیر است.

- ابتدا تبدیل فوریه تصویر را گرفته و آن را به حوزه فرکانس می‌بریم.

- فرکانس پیکسل‌های مورد نظر را تغییر می‌دهیم. در اینجا منظور از تغییر صفر کردن فرکانس پیکسل مورد نظر می‌باشد.

- تصویر را با تبدیل فوریه معکوس به حوزه مکان بازمی‌گردانیم.

خروجی را به گونه ای نرمال می‌کنیم تا مقادیر آن بین ۰ تا ۲۵۵ قرار گیرد. تصویر حاصل خروجی مورد نظر ما می‌باشد.

### ۳- شرح نتایج

#### ۳-۱-۱ سوال ۴.۱.۱

##### ۳-۱-۱- تبدیل فوریه فیلترها

حال بخش حقیقی فیلتر (طیف) را به بخش حقیقی تصویر اعمال می‌کنیم. اعمال فیلتر به سادگی با ضرب آرایه‌ای فیلتر در تصویر صورت می‌گیرد.

پس از اعمال فیلتر در صورتی که مبدا را به مرکز شیف‌ت داده ایم باید آن را به حالت اولیه بازگردانیم.

سپس تصویر را با استفاده از تبدیل فوریه معکوس به حوزه مکان می‌بریم.

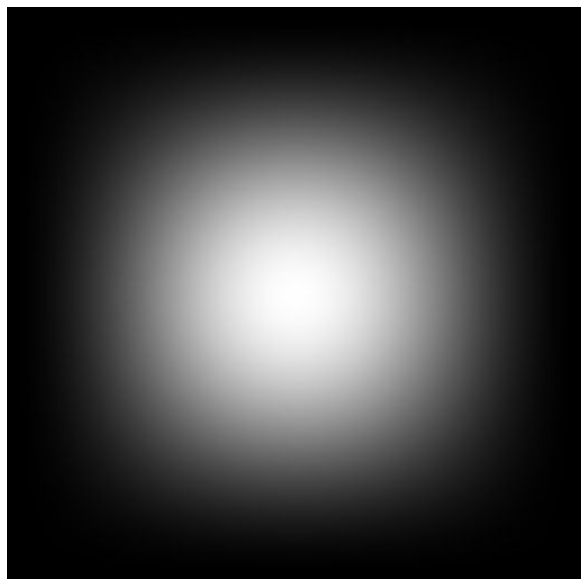
اعمال فیلتر ممکن است سبب شود تصویر نهایی در حوزه مکان دارای بخش موهومی شود. بدین منظور بخش موهومی تصویر حاصل در حوزه مکان را حذف می‌کنیم.

حال از گوشه‌ی سمت چپ تصویر حاصل به اندازه‌ی تصویر  $M \times N$  جدا می‌کنیم که در اینجا می‌شود  $255 \times 255$ . تصویر حاصل خروجی مورد نظر ماست.

#### ۲-۳-۲ مقایسه‌ی خروجی حوزه مکان و فرکانس

فرض کنیم ابعاد فیلتر  $N \times N$  و ابعاد تصویر  $M \times M$  باشند. برای اعمال فیلتر در حوزه مکانی به پدینگ احتیاج داریم. اندازه‌ی این پدینگ  $N/2$  از هر طرف می‌باشد. پس از انجام عمل کانولوشن در حوزه مکان در تصویر نهایی که ابعاد آن  $M \times M$  است،  $N/2$  پیکسل ابتدایی و انتهایی در هر جهت پیکسل‌هایی هستند که پدینگ بر روی آنها تاثیر گذاشته است.

این فیلتر عمل edge enhancement را بر تصویر اعمال می‌کند.



شکل ۱- طیف فیلتر a در حوزه فرکانس

این فیلتر یک فیلتر low pass می‌باشد. در حوزه فرکانس، فرکانس‌های پایین حول مرکز قرار دارند و فرکانس‌های بالا در حاشیه‌های تصویر (در حالت شیفت داده شده). در این فیلتر فرکانس‌های پایین (حول مرکز) عبور داده شده و فرکانس‌های بالا صفر می‌شوند. اعمال این فیلتر باعث می‌شود اطلاعات کلی تصویر حفظ شود و اطلاعات جزئی‌تر مانند لبه‌ها کمرنگ شوند و در واقع عمل smoothing انجام می‌شود.

این فیلتر یک فیلتر separable می‌باشد. این مسئله در بخش ۲-۱-۲ توضیح داده شده است. این فیلتر از

$$a) \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

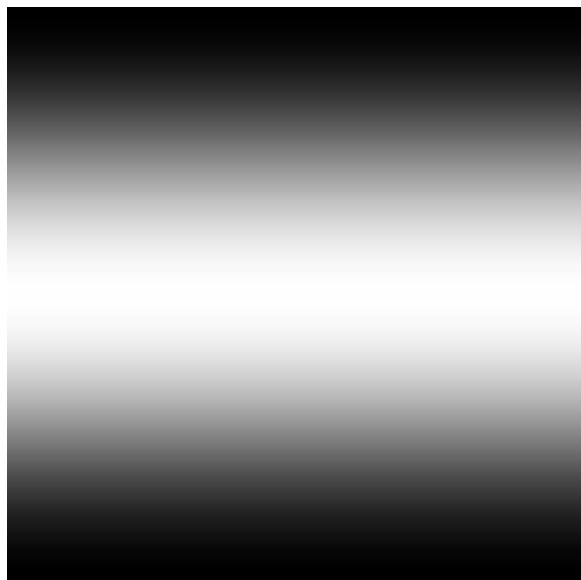
فیلتر a یک فیلتر میانگین گیر می‌باشد و انتظار می‌رود که عمل smoothing را بر تصویر اعمال کند.

فیلتر b در نواحی یکنواخت که همه‌ی پیکسل‌هایی که درون پنجره‌ی فیلتر قرار گرفته اند مقدار یکسان دارند، مقدار صفر را اعمال می‌کند اما در نواحی غیر یکنواخت مقداری غیر صفر می‌دهد و در واقع وقتی پیکسل مرکزی روی لبه باشد به آن مقداری بزرگتر از صفر اعمال می‌کند. در واقع از این فیلتر انتظار می‌رود که عمل edge detection را بر تصویر اعمال کند.

فیلتر c در واقع از حاصل جمع مقدار پیکسل مرکزی با یک فیلتر لبه یاب بدست آمده است.

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

این فیلتر در نواحی یکنواخت که همه‌ی پیکسل‌هایی که درون پنجره‌ی فیلتر قرار گرفته اند مقدار یکسان دارند، مقدار پیکسل مرکزی را تغییر نداده و در نواحی غیر یکنواخت مانند لبه مقدار لبه را با مقدار پیکسل در تصویر اصلی جمع می‌کند و باعث تقویت لبه‌ها می‌شود و در نتیجه تصویر را sharp می‌کند.



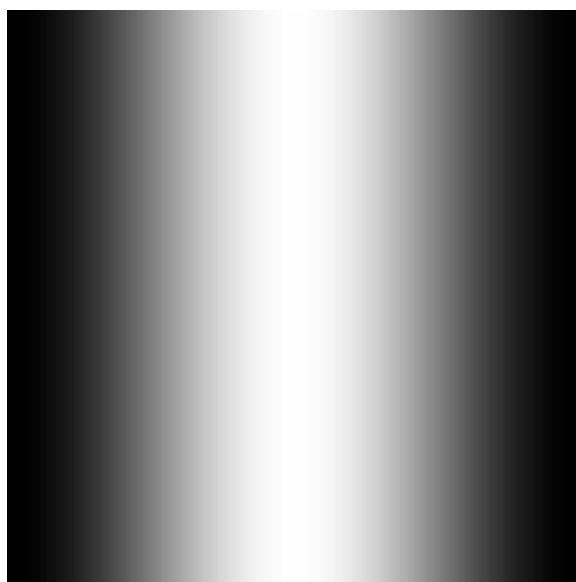
شکل ۳- طیف بردار  $a$  در حوزه فرکانس

فیلتر  $a$  عملیات smoothing را در همه ی جهات انجام می دهد اما بردارهای  $a$  و  $b$  به صورت جدا عملیات میانگین گیری افقی و عمودی را بر تصویر اعمال می کنند.

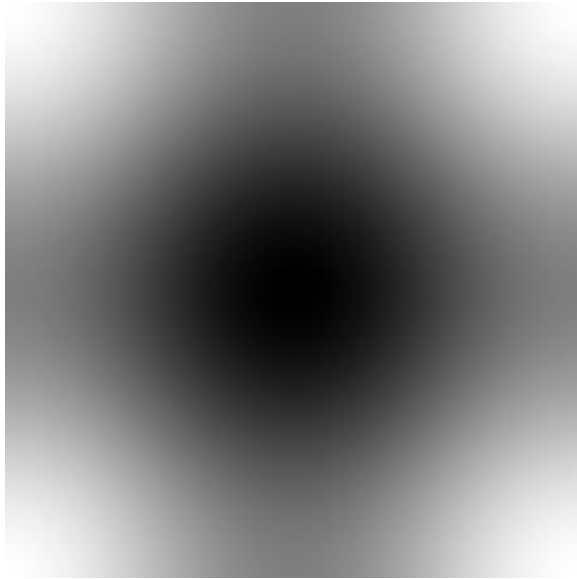
حاصل ضرب دو بردار بدست می آید. این بردارها به شرح زیر می باشند.

$$a = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



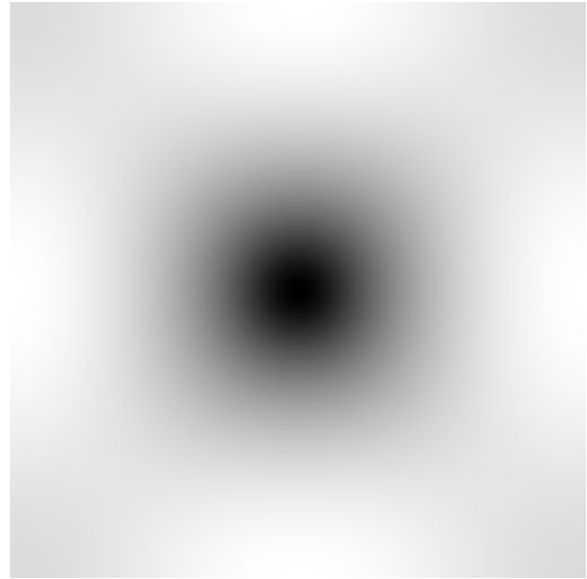
شکل ۲- طیف بردار  $b$  در حوزه فرکانس



**شکل ۵- طیف فیلتر c در حوزه‌ی فرکانس**

فیلتر c به فرکانس‌های بالا وزن بیشتری می‌دهد و آنها را تقویت می‌کند، همچنین به فرکانس‌های پایین وزن کمتری می‌دهد اما آنها را حذف نمی‌کند. این عمل باعث تقویت جزئیاتی مانند لبه‌ها در تصویر می‌شود که سبب sharp شدن تصویر می‌شود.

## **۲-۱-۳- نتیجه‌ی اعمال فیلترها به تصویر Barbara**



**شکل ۴- طیف فیلتر b در حوزه‌ی فرکانس**

فیلتر b یک high pass است. در حوزه‌ی فرکانس، فرکانس‌های پایین حول مرکز قرار دارند و فرکانس‌های بالا در حاشیه‌های تصویر (در حالت شیف‌ت داده شده). در این فیلتر فرکانس‌های بالا عبور داده شده و فرکانس‌های پایین حذف می‌شوند. فرکانس‌های بالا مربوط به جزئیاتی مثل لبه‌ها در تصویر هستند. بنابراین این فیلتر اطلاعات کلی تصویر را حذف کم کرده و اطلاعات جزئی را نگه می‌دارد و در واقع عمل edge detection انجام می‌دهد.



**شکل ۸-** نتیجه‌ی اعمال بردار b به تصویر Barbara



**شکل ۶-** تصویر Barbara

در ادامه نتیجه‌ی اعمال فیلترهای گفته شده قابل مشاهده می‌باشد.



**شکل ۹-** نتیجه‌ی اعمال بردار a به تصویر Barbara

همانطور که انتظار می‌رفت اعمال فیلتر a که یک فیلتر میانگین گیر است، به تصویر باعث smooth تر شدن آن شده است.



**شکل ۷-** نتیجه‌ی اعمال فیلتر a به تصویر Barbara



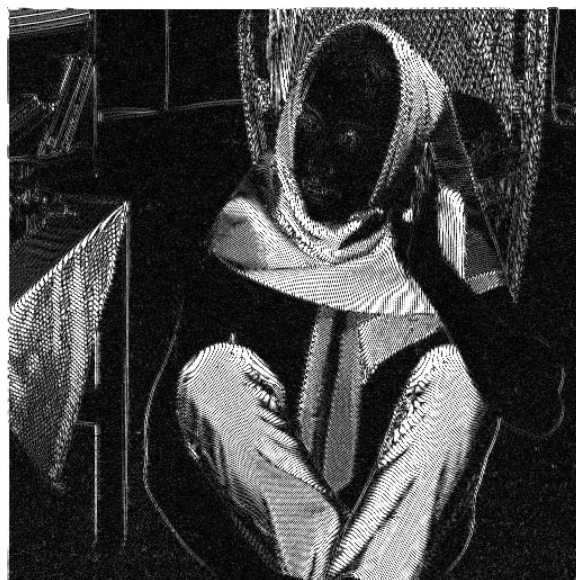
همانطور که مشاهده می‌شود این فیلتر لبه‌های موجود در تصویر را تقویت کرده و باعث sharp تر شدن تصویر شده است.

### ۲-۳- سوال ۲.۱.۴



شکل ۱۲- تصویر Lena

طیف تصویر Lena در حوزه‌ی فرکانس با حالات مختلف با شیفت/بدون شیفت و با لگاریتم/بدون لگاریتم در ادامه نمایش داده شده است.

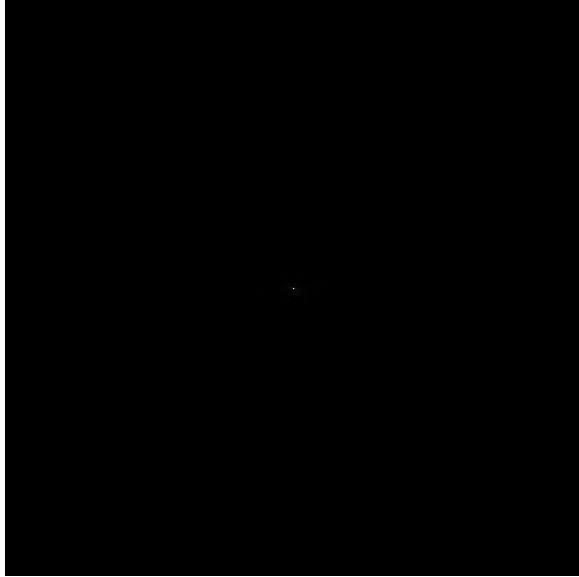


شکل ۱۰- نتیجه‌ی اعمال فیلتر b به تصویر Barbara

همانطور که انتظار می‌رفت، این فیلتر لبه‌ها را شناسایی می‌کند.

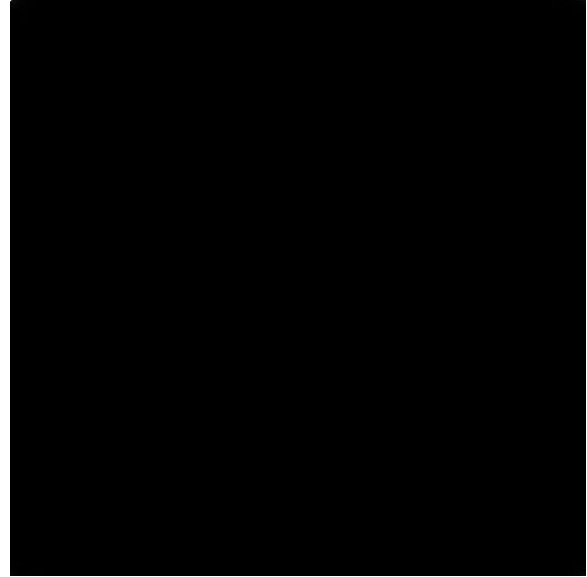


شکل ۱۱- نتیجه‌ی اعمال فیلتر c به تصویر Barbara



**شکل ۱۴-** تصویر Lena در حوزه‌ی فرکانس با شیفت و بدون لگاریتم

در حالتی که مبدا فرکانس به مرکز تصویر شیفت داده شود، این نقطه‌ی سفید که مقدار بزرگی دارد و حاصل جمع پیکسل‌ها می‌باشد، در مرکز تصویر قابل مشاهده است.



**شکل ۱۳-** تصویر Lena در حوزه‌ی فرکانس بدون شیفت و بدون لگاریتم

در حالت بدون شیفت و بدون لگاریتم تنها یک نقطه سفید در مبدا تصویر (گوشه‌ی سمت چپ) مشاهده می‌شود.

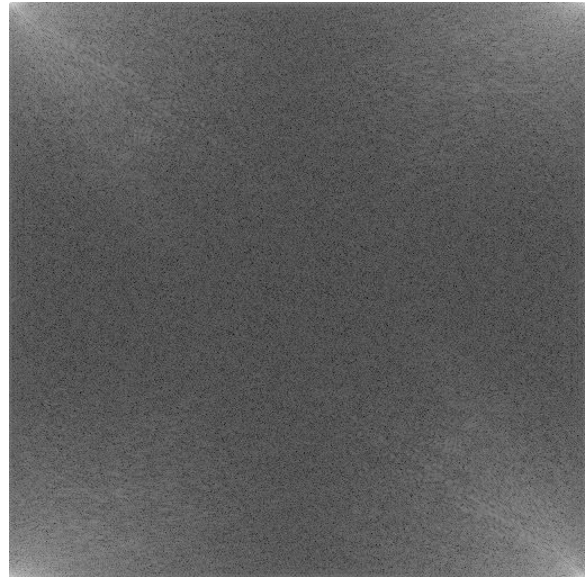
**شکل ۱۶-** تصویر Lena در حوزه‌ی فرکانس با شیفت و با

لگاریتم

با اعمال شیفت و لگاریتم به صورت همزمان مبدا در مرکز تصویر قرار می‌گیرد و همچنین اختلاف مقدار پیکسل مبدا با سایر پیکسل‌ها به خوبی کنترل می‌شود.

خطوط عمودی در شکل ۱۶ به دلیل وجود لبه‌های افقی در تصویر (حوزه‌ی مکانی) و خطوط افقی به دلیل وجود لبه‌ای عمودی تصویر (حوزه‌ی مکانی) می‌باشد. همچنین خطوط قطری به دلیل وجود لبه‌های قطری عمود بر آن خطوط در تصویر اصلی می‌باشد.

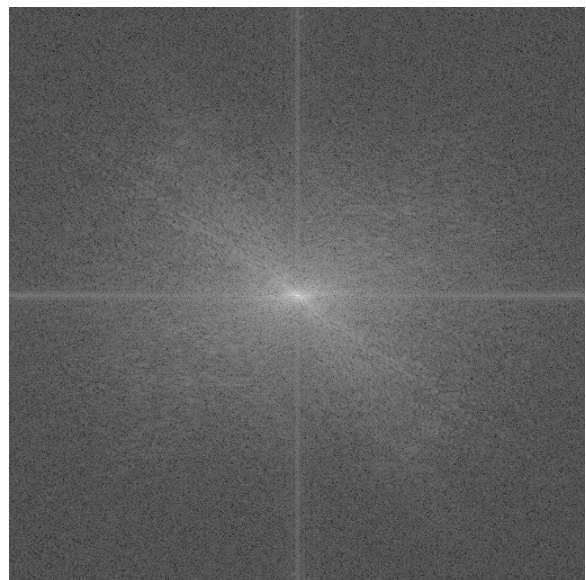
در شکل ۱۶ اینطور به نظر می‌رسد که خطوط قطری در جهت قطر فرعی بیشتر از قط اصلی وجود دارند. احتمالاً به دلیل وجود لبه‌های قطری بیشتر در جهت قطر اصلی در تصویر Lena در حوزه‌ی مکان می‌باشد، مانند لبه‌های مربوط به کلاه و لبه‌ی آینه.



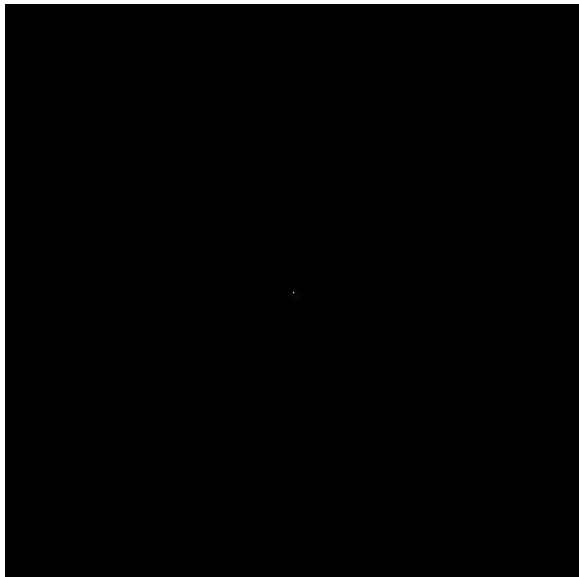
**شکل ۱۵-** تصویر Lena در حوزه‌ی فرکانس بدون شیفت

و با لگاریتم

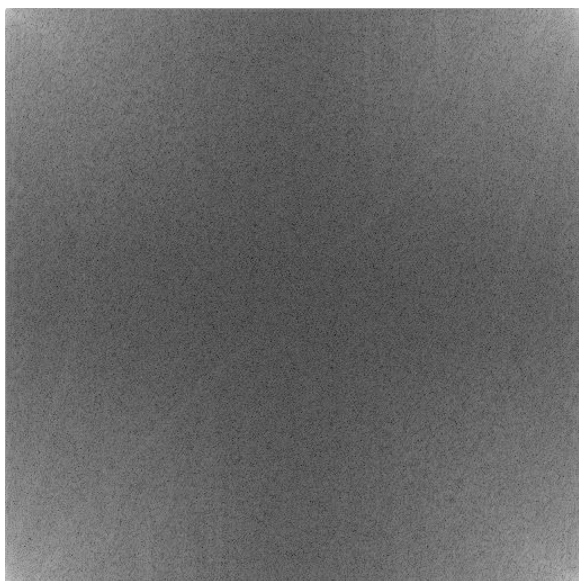
با اعمال لگاریتم اختلاف مبدا فرکانس با سایر پیکسل‌ها کمتر شده و از نظر بصری قابل مقایسه‌تر می‌شود.



**شکل ۱۸-** تصویر F16 در حوزه‌ی فرکانس بدون شیفت و بدون لگاریتم



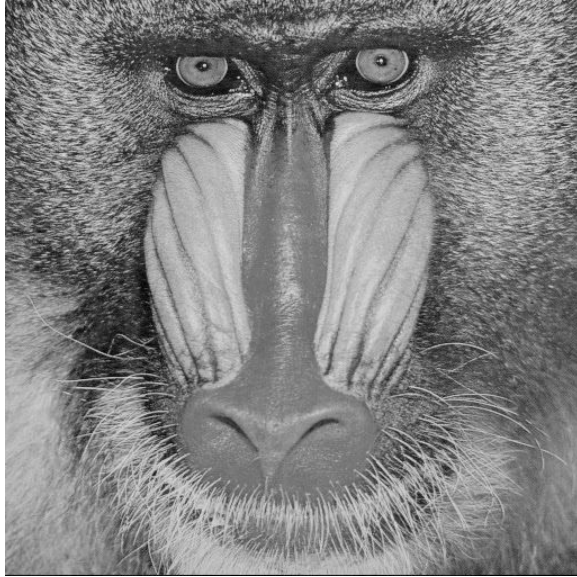
**شکل ۱۹-** تصویر F16 در حوزه‌ی فرکانس با شیفت و بدون لگاریتم



**شکل ۱۷-** تصویر F16

طیف تصویر F16 در حوزه‌ی فرکانس با حالات مختلف با شیفت/بدون شیفت و با لگاریتم/بدون لگاریتم در ادامه نمایش داده شده است.

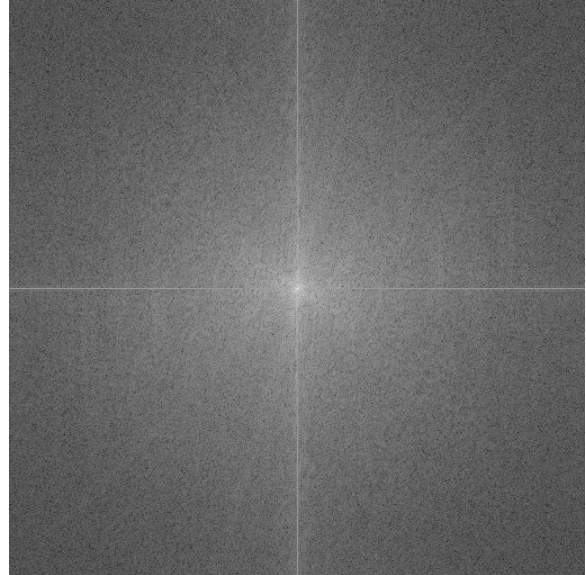




شکل ۲۲- تصویر Baboon

طیف تصویر Baboon در حوزه‌ی فرکانس با حالات مختلف با شیفت/بدون شیفت و با لگاریتم/بدون لگاریتم در ادامه نمایش داده شده است.

شکل ۲۰- تصویر F16 در حوزه‌ی فرکانس بدون شیفت و با لگاریتم



شکل ۲۱- تصویر F16 در حوزه‌ی فرکانس با شیفت و با لگاریتم

خطوط عمودی در شکل ۲۱ مربوط به لبه‌های افقی در تصویر اصلی (در حوزه‌ی مکانی) و خطوط افقی مربوط به لبه‌های افقی در تصویر اصلی هستند. از نظر بصری خطوط عمودی در این شکل واضح‌تر هستند که احتمالاً به خاطر لبه‌های افقی ملموس‌تر مانند هواپیما می‌باشد.

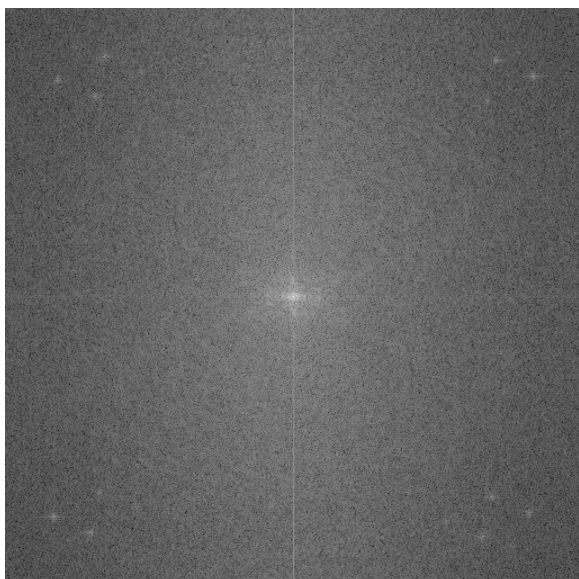
همچنین در این شکل به طور نسبتاً واضحی خطوط قطری در جهت قطر اصلی مشاهده می‌شود که به دلیل وجود لبه‌های قطری در جهت قطر فرعی در تصویر F16 در حوزه‌ی مکان می‌باشد، مانند لبه‌ی مربوط به قسمت انتهایی هواپیما



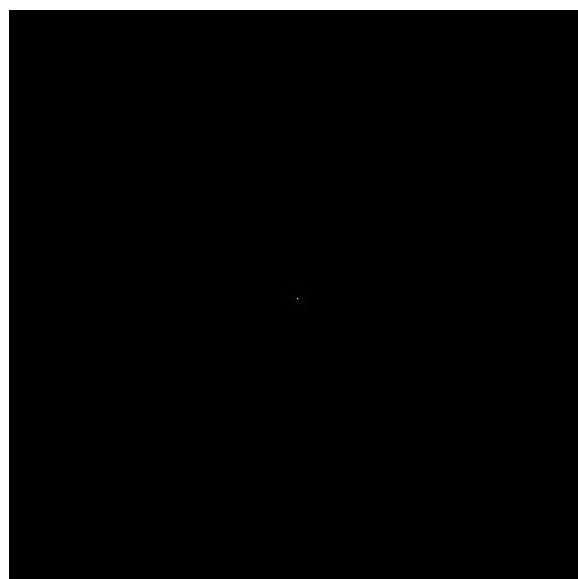
**شکل ۲۴-** تصویر Baboon در حوزه‌ی فرکانس بدون  
شیفت و با لگاریتم



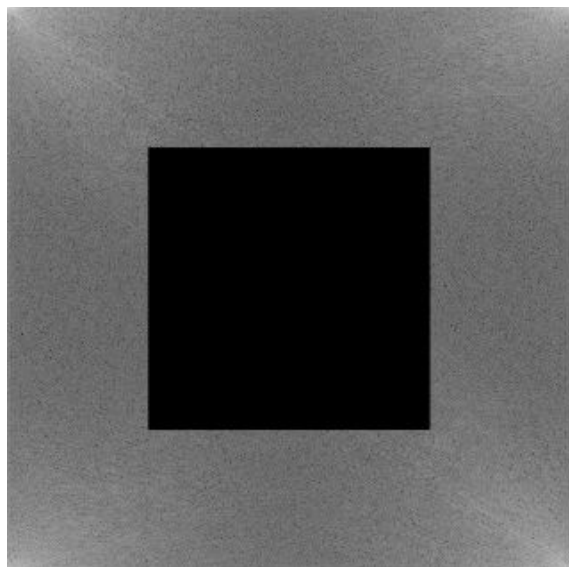
**شکل ۲۲-** تصویر Baboon در حوزه‌ی فرکانس بدون  
شیفت و بدون لگاریتم



**شکل ۲۵-** تصویر Baboon در حوزه‌ی فرکانس با شیفت  
و با لگاریتم



**شکل ۲۳-** تصویر Baboon در حوزه‌ی فرکانس با شیفت  
و بدون لگاریتم



وجود خطوط عمودی در شکل ۲۵ به دلیل وجود لبه‌های افقی مانند موهای صورت بابون می‌باشد. تفاوت این شکل با تبدیل فوریه‌ی دو تصویر دیگر در وجود الگوهایی در حاشیه‌های تصویر می‌باشد. وجود این الگوها می‌تواند به دلیل وجود لبه‌های مربوط به ریش‌های بابون باشد که هر کدام در یک جهت اند.

### ۳-۳- سوال ۴.۲.۲

شکل ۲۷- حاصل اعمال فیلتر  $a$  با  $t=1/4$  در حوزه‌ی فرکانس

این فیلتر یک فیلتر low pass می‌باشد. با توجه به اینکه تصویر شیفت داده نشده است، مرکز تصویر شامل مبدا فرکانس و در نتیجه شامل فرکانس‌های پایین نیست. این فیلتر فرکانس‌های بالا را صفر می‌کند. این کار باعث می‌شود بخشی از جزئیات تصویر حذف شود.



شکل ۲۶- تصویر Lena

در ادامه حاصل اعمال فیلترها به تصویر Lena ارائه شده است.



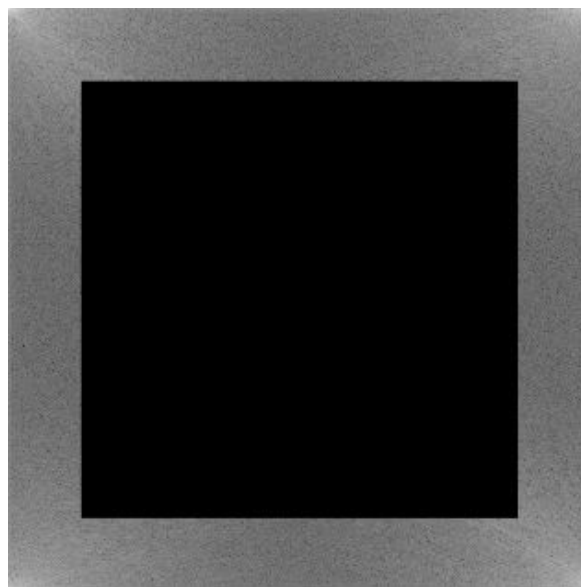
**شکل ۳۰-** حاصل اعمال فیلتر  $a$  با  $t=1/8$  در حوزه مکان

با کاهش مقدار  $t$  ابعاد آن بخش از تصویر که فرکانس آن را صفر می‌کنیم بزرگتر می‌شود و این امر باعث می‌شود فرکانس پیکسل‌های بیشتری را صفر کنیم.

همانطور که مشاهده می‌شود، تصویر حاصل از اعمال فیلتر با  $t=1/8$  نسبت به تصویر حاصل از اعمال فیلتر با  $t=1/4$ ، جزئیات بیشتری از دست داده و مقداری smooth تر شده است.

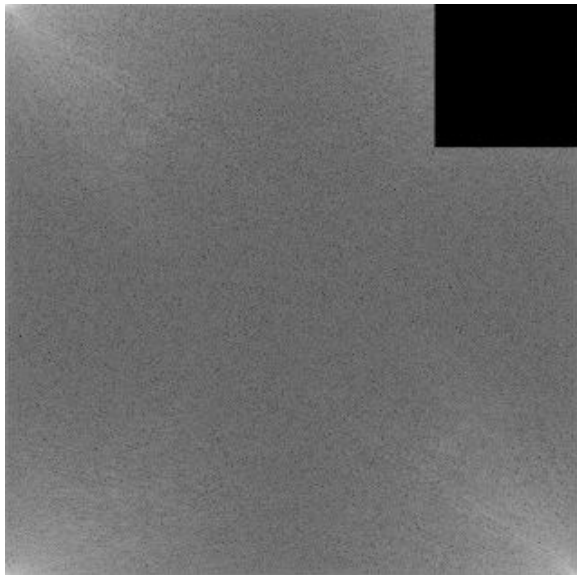


**شکل ۲۸-** حاصل اعمال فیلتر  $a$  با  $t=1/4$  در حوزه مکان

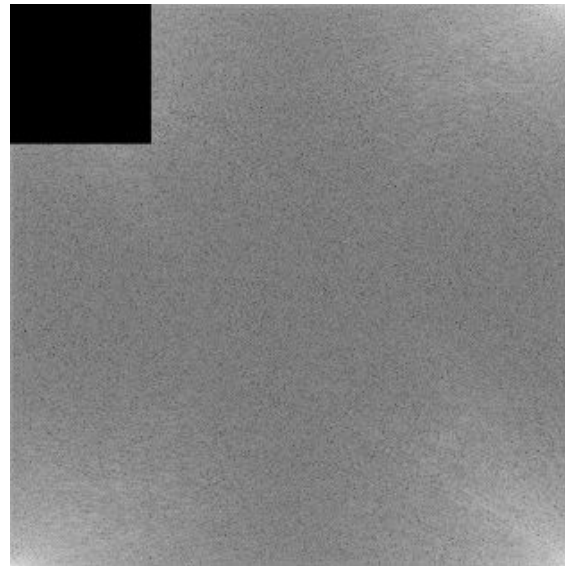


**شکل ۲۹-** حاصل اعمال فیلتر  $a$  با  $t=1/8$  در حوزه فرکانس





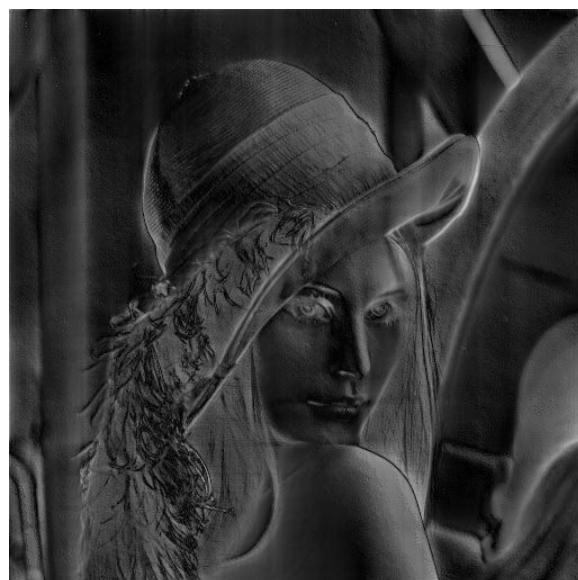
شکل ۳۳- حاصل اعمال فیلتر b.ii با  $t=1/4$  در حوزه فرکانس



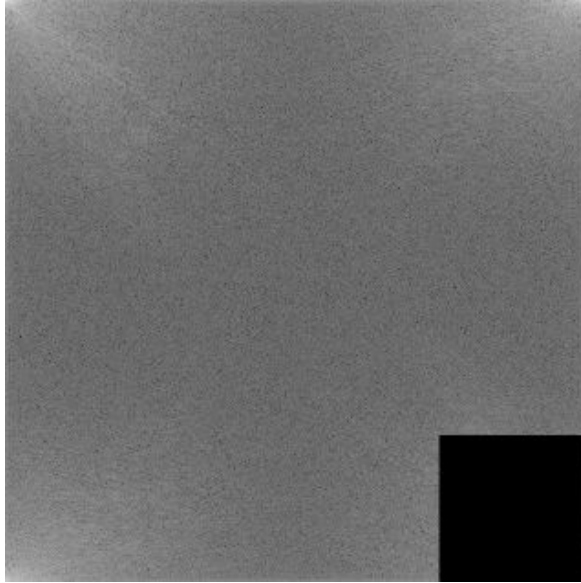
شکل ۳۱- حاصل اعمال فیلتر b.i با  $t=1/4$  در حوزه فرکانس



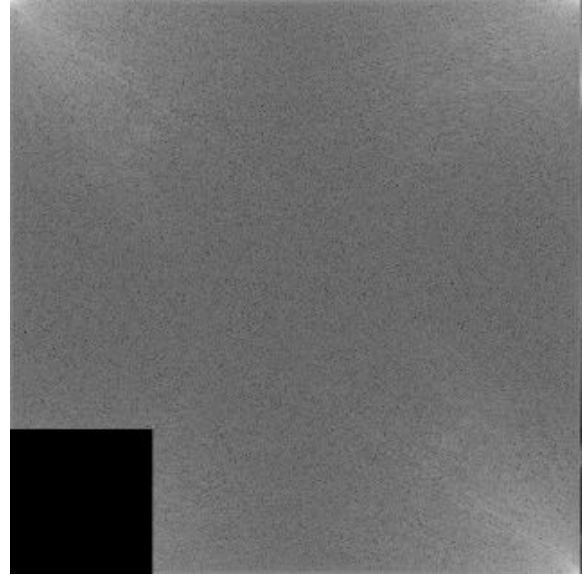
شکل ۳۴- حاصل اعمال فیلتر b.ii با  $t=1/4$  در حوزه مکان



شکل ۳۲- حاصل اعمال فیلتر b.i با  $t=1/4$  در حوزه مکان



شکل ۳۷- حاصل اعمال فیلتر b.iv با  $t=1/4$  در حوزه فرکانس



شکل ۳۵- حاصل اعمال فیلتر b.iii با  $t=1/4$  در حوزه فرکانس



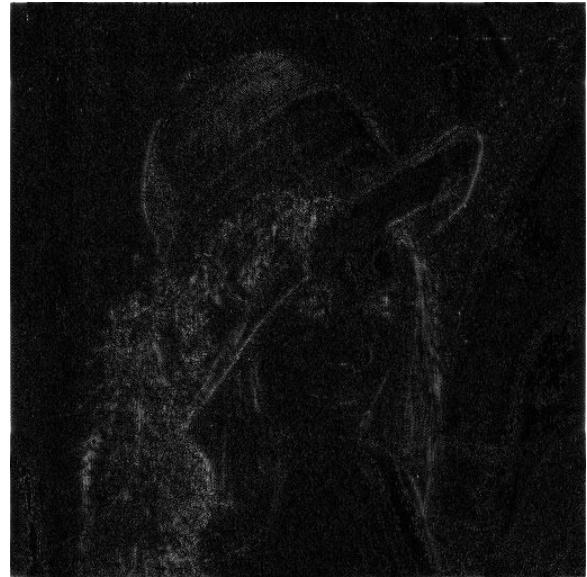
شکل ۳۸- حاصل اعمال فیلتر b.iv با  $t=1/4$  در حوزه مکان



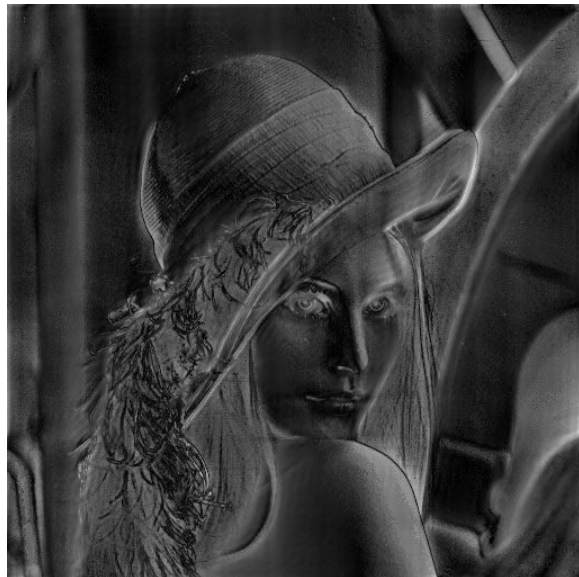
شکل ۳۶- حاصل اعمال فیلتر b.iii با  $t=1/4$  در حوزه مکان



**شکل ۴۰-** حاصل اعمال فیلتر b.i با  $t=1/8$  در حوزه فرکانس

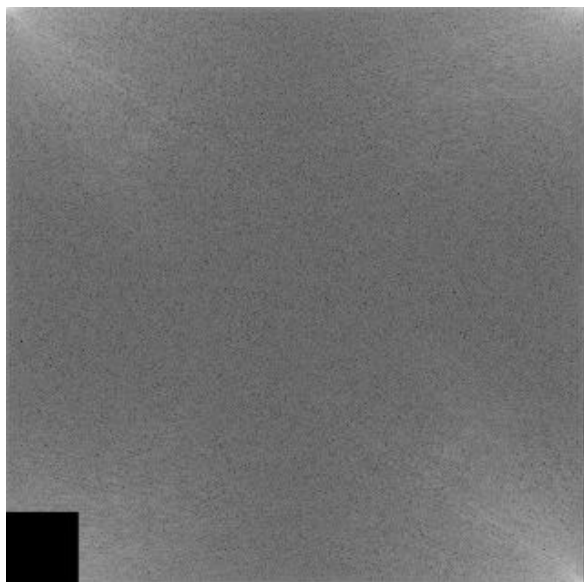


**شکل ۳۹-** حاصل اعمال همه‌ی مراحل فیلتر b با  $t=1/4$  در حوزه مکان

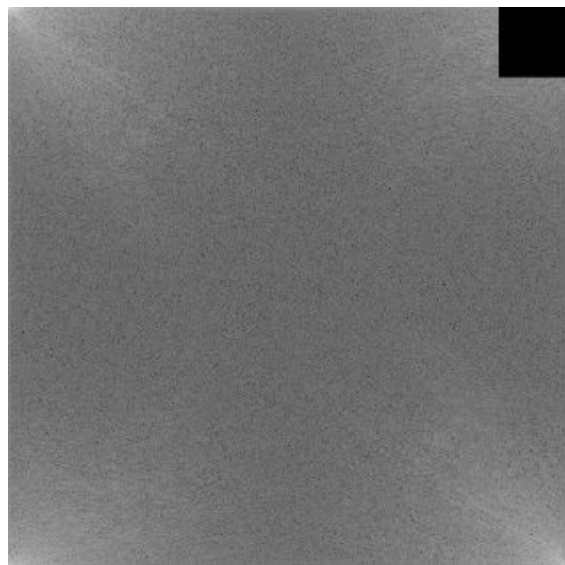


**شکل ۴۱-** حاصل اعمال فیلتر b.i با  $t=1/8$  در حوزه مکان

فیلترهای b.i و b.ii و b.iii و b.iv هر کدام بخشی از فرکانس‌های پایین تصویر را صفر می‌کنند. با توجه به اینکه تصویر شیف‌ت داده نشده است، فرکانس‌های پایین تصویر در گوشه‌های آن قرار گرفته‌اند و با صفر کردن آنها اطلاعات کلی تصویر از بین رفته و اطلاعات جزئی از جمله لبه‌ها باقی می‌ماند. این فیلتر لبه‌های تصویر را تشخیص داده است.



شکل ۴۴- حاصل اعمال فیلتر b.iii با  $t=1/8$  در حوزه فرکانس



شکل ۴۲- حاصل اعمال فیلتر b.ii با  $t=1/8$  در حوزه فرکانس



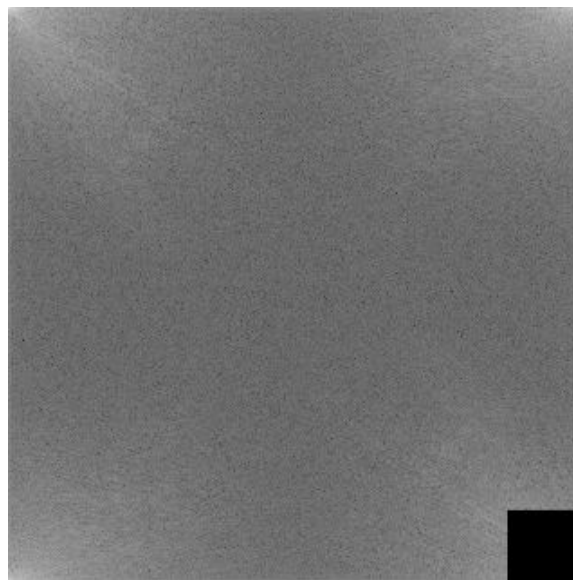
شکل ۴۵- حاصل اعمال فیلتر b.iii با  $t=1/8$  در حوزه مکان



شکل ۴۳- حاصل اعمال فیلتر b.ii با  $t=1/8$  در حوزه مکان



**شکل ۴۸-** حاصل اعمال همه‌ی مراحل فیلتر  $b$  با  $t=1/8$  در حوزه‌ی مکان



**شکل ۴۶-** حاصل اعمال فیلتر  $b.iv$  با  $t=1/8$  در حوزه‌ی فرکانس

در این فیلتر با کاهش مقدار  $t$  آن بخش از تصویر که فرکانس آن صفر می‌شود کوچکتر می‌شود، بنابراین انتظار داریم تصویر حاصل از اعمال فیلتر  $b$  با  $t=1/8$  نسبت به تصویر حاصل از اعمال فیلتر  $b$  با  $t=1/4$  جزئیات بیشتری داشته باشد. مشاهده می‌شود که شکل ۴۸ نسبت به شکل ۳۹ لبه‌ها را بیشتر و بهتر نمایش می‌دهد.



**شکل ۴۷-** حاصل اعمال فیلتر  $b.iv$  با  $t=1/8$  در حوزه‌ی مکان

- [1] Digital Image Processing, Rafael C. Gonzalez, Richard E. Wood
- [2] <https://dsp.stackexchange.com/questions/35190/how-to-prove-a-2d-filter-is-separable>
- [3] <https://numpy.org/doc/stable/reference/routines.fft.html>

## Appendix

```
import cv2
import numpy as np
import math

#-----
# this method compute the fourier transform of a filter
# returns the magnitude of the fourier transformed filter
# m, n are the size of the image that filter is going to apply to
def dft_filter(filterr, m, n):
    pad = padding(filterr, m, n)
    fft = np.fft.fft2(pad)
    shift = np.fft.fftshift(fft)
    mag = np.abs(shift)
    mag = normal(mag)
    return mag

#-----
def normal(img):
    min_val = np.amin(img)
    max_val = np.amax(img)
    output = np.zeros_like(img)

    for i in range(np.size(img, 0)):
        for j in range(np.size(img, 1)):
            new_val = math.floor(((img[i, j] - min_val)*255) / (max_val -
min_val))
            output[i, j] = new_val
    return output

#-----
def padding(img, p, q):
    my_img = np.zeros((p, q))
    if(np.ndim(img) == 2):
        my_img[0:np.size(img, 0), 0:np.size(img, 1)] = img
    elif(np.ndim(img) == 1):
        my_img[0, 0:np.size(img, 0)] = img
```

```

    return my_img
#-----
def freq_filter(my_filter, img):
    m, n = img.shape
    p = 2*m
    q = 2*n

    pad_filter = padding(my_filter, p, q)
    pad_img = padding(img, p, q)

    fft_filter = np.fft.fft2(pad_filter)
    fft_img = np.fft.fft2(pad_img)

    shift_filter = np.fft.fftshift(fft_filter)
    shift_img = np.fft.fftshift(fft_img)

    filter_mag = np.abs(shift_filter)
    img_mag = np.abs(shift_img)
    img_phase = shift_img - img_mag
    output = shift_filter * shift_img
    output = output + img_phase
    output = np.fft.ifftshift(output)
    ifft = np.fft.ifft2(output)
    mag = np.abs(ifft)
    new_img = normal(mag)
    unpad = new_img[0:m, 0:n]

    return unpad
#-----
def filter_a(img, t):
    m, n = img.shape
    fft = np.fft.fft2(img)
    mag = np.abs(fft)
    phase = fft - mag

    for k in range(m):
        for l in range(n):
            if((t*n) < k and (t*n) < l and k < ((1-t)*n) and l < ((1-t)*n)):
                fft[k, l] = 0

    output = phase + mag
    # output = np.fft.ifftshift(output)

```

```

output = np.fft.ifft2(fft)
output = np.abs(output)
output = normal(output)
return output
#-----
def filter_b(img, t):
    for k in range(m):
        for l in range(n):

            if(0 <= k and 0 <= l and k <= (t*m) and l <= (t*n)):
                fft[k, l] = 0

            elif(0 <= k and k <= (t*m) and ((1 -t)*n) <= l and l <= (n-1)):
                fft[k, l] = 0

            elif(((1 -t)*m) <= k and k <= (m-1) and 0 <= l and l <= (t*n)):
                fft[k, l] = 0

            elif(((1 -t)*m) <= k and l <= (n-1)):
                fft[k, l] = 0

    output = np.fft.ifft2(fft)
    output = np.abs(output)
    output = normal(output)
    return output

```