第一章 离散时间信号与系统

- 第一章 离散时间信号与系统
  - 1.1 符号表示及基础
    - 1.1.1 常见典型序列
    - 1.1.2 序列的运算
  - 1.2 离散时间信号的傅里叶变换与 z 变换
    - 1.2.1 离散时间信号的傅里叶变换
    - 1.2.2 z变换
    - 1.2.3 逆z变换
    - 1.2.4 z变换的性质
    - 1.2.5 z变换与$DTFT$的关系
    - 1.2.6 Parseval 定理
  - 1.3 离散时间系统
    - 1.3.1 线性系统（Linear system）
    - 1.3.2 时不变（time-invariant）系统
    - 1.3.3 线性时不变（linear time-invariant, LTI）系统
    - 1.3.4 稳定系统（stable system）和因果系统（causal system）

1.1 符号表示及基础

离散时间信号通常用序列：
$\{x(n)\}$，n 为 $0, 1, 2...$，$x(n)$ 表示为序列中第 n 个样本值。

$\{\cdot\}$ 表示全部样本值的集合

$\{x*(n)\}$ 表示复序列的共轭

连续时间序列 $x\{t\}$ 与离散时间序列 $\{x(n)\}$ 的关系：

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT) \tag{1.1}$$

其中采样频率$f_s = \frac{1}{T}$（T为采样周期，即两个样本间的时间间隔）

周期序列表示为 $\tilde{x}(n)$
其中

$$\widetilde{x}(n)=x(n+kN),0\leq n\leq N-1,k\text{为任意整数} \tag{1.2}$$

1.1.1 常见典型序列

1. 单位脉冲序列

$$\delta(n)=\begin{cases}1,n=0\\0,n\neq 0\end{cases} \tag{1.3}$$

2. 单位阶跃序列

$$u(n)=\begin{cases}1,n\geq 0\\0,n<0\end{cases} \tag{1.4}$$

3. 矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1,n\leq n\leq N-1\\ \quad 0,n<0,n\geq N\end{cases} \tag{1.5}$$

4. 实指数序列

$$x(n)=a^n u(n) \tag{1.6}$$

$a\neq 0,|a|<1$ 时收敛，$|a|\geq 1$ 时发散

5. 正弦序列

$$x(n)=sin(\omega_0 n) \tag{1.7}$$

ω_0为数字角频率，单位为弧度 rad

6. 复指数序列

$$x(n)=(re^{j\omega_0})^n=r^n[cos(\omega_0 n)+jsin(\omega_0 n)] \tag{1.8}$$

1.1.2 序列的运算

1. 序列的加法

$$z(n)=x(n)+y(n) \tag{1.9}$$

2. 序列的相乘

$$z(n)=x(n)y(n) \tag{1.10}$$

3. 序列的位移

$$z(n) = x(n-n_0) \tag{1.11}$$

当 $n_0>0$ 时 $z(n)$ 是 $x(n)$ 的延迟；当 $n_0<0$ 时 $z(n)$ 超前于 $x(n)$；

4. 序列的能量及序列的绝对值

序列的能量定义为序列样本值的平方和

$$S=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 \tag{1.12}$$

如果序列 $x(n)$ 满足 $S<\infty$ 则为平方可和序列

如果序列满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|<\infty \tag{1.13}$$

则为绝对可和序列

如果序列的每一个样本值的绝对值均小于某一个有限的正整数 B_x 则 $x(n)$ 为有界序列，即

$$|x(n)|\le B_x<\infty \tag{1.14}$$

5. 实序列的偶部和奇部

任何序列均可以分解成偶对成序列和奇对称序列的和的形式，即

$$x(n)=x_e(n)+x_o(n) \tag{1.15}$$

$x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 分别称为 $x(n)$ 的偶部和基部，其分别等于

$$x_e(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(-n)] \tag{1.15a}$$

$$x_o(n)=\frac{1}{2}[x(n)-x(-n)] \tag{1.15b}$$

6. 任意序列的单位脉冲表示

任一序列 $x(n)$ 都可以表示成单位脉冲序列移位的加权和，即

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m) \tag{1.16}$$

1.2 离散时间信号的傅里叶变换与 z 变换

1.2.1 离散时间信号的傅里叶变换

离散时间傅里叶变换 $DTFT$ (discrete-time Fourier tansform) ,序列的 $DTFT$ 定义为:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n},\omega=\frac{2\pi f}{f_S} \tag{1.17}$$

式中， ω 为数字角频率，它是频率 f 对采样频率 f_s 作归一化后的角频率。
$X(e^{j\omega})$ 时 ω 的连续函数，且周期为 2π
式（1.17）级数不一定总是收敛的，当 $x(n)$ 绝对可和时，它的 $DTFT$ 一定存在。
离散时间信号的傅里叶逆变换（$IDTFT$）：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega \tag{1.18}$$

$x(n)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 对应关系可表示为：$X(e^{j\omega})=DTFT[x(n)]$,$x(n)=IDTFT[X(e^{j\omega})]$

$X(e^{j\omega})$ 的几种表示方法:

$$X(e^{j\omega})=Re[X(e^{j\omega})]+jIm[X(e^{j\omega})]=|X(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)} \tag{1.19}$$

$Re[\cdot]$ 和 $Im[\cdot]$ 表示取实部和虚部。
$|X(e^{j\omega})|$ 为离散序列 $x(n)$ 的幅度谱，$\phi(\omega)$为离散序列的相位谱。

$DTFT$ 的主要特性

序列	$DTFT$
$ax(n)+by(n)$	$aX(e^{j\omega})+Y(e^{j\omega})$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x^*(-n)$	$X^*(e^{j\omega})$

序列	$DTFT$
$x(n-n_0)$	$e^{-jn_0\omega}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
$Re[x(n)]$	$X_e(e^{j\omega})$ [$X(e^{j\omega})$ 的共轭偶对称部分]
$jIm[x(n)]$	$X_o(e^{j\omega})$ [$X(e^{j\omega})$ 的共轭奇对称部分]
$x(n)$ 为实序列	$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$
	$Re[X(e^{j\omega})]=Re[X(e^{-j\omega})]$
	$Im[X(e^{j\omega})]=-Im[X(e^{-j\omega})]$
	$arg[X(e^{j\omega})]=-arg[X(e^{-j\omega})]$
$x_e(n)$ [$x(n)$ 的共轭偶对称部分]	$Re[X(e^{j\omega})]$
$x_o(n)$ [$x(n)$ 的共轭偶奇称部分]	$jIm[X(e^{j\omega})]$

1.2.2 z变换

序列 $x(n)$ 的 z 变换定义为:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n},(n=0\text{时为单边}z\text{变换}) \tag{1.20}$$

上式中 z 为复变量，也可记为 $\mathscr{Z}[x(n)]=X(z)$
对于所有的序列或所有的 z 值，z变换并不总是收敛，使 z 变换收敛的 z 值的集合称作收敛区域，一般为 z 平面上的一个环形区域，该区域为:

$$R_{x^-}<|z|<R_{x^+} \tag{1.21}$$

其中 R_{x^-} 可以小到0，R_{x^+} 可以大到 ∞

以下讨论几种序列的收敛域

1. 有限长序列
   仅有有限个数的序列值是非零值，从而有:

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n} \tag{1.22}$$

其中 n_1, n_2 为有限整数，分别为 $x(n)$ 的起点和终点。除了当 $n_1<0$ 时 $z=\infty$ 以及 $n_2>0$ 时 $z=0$ 之外， z 所在的区域均收敛，即有限长序列的收敛区域至少是：

$$0<|z|<\infty$$

其收敛区域可能包括 $z=0$ 或包括 $z=\infty$

2. 右边序列
   右边序列为 $n<n_1$ 时 $x(n)=0$ 的序列， z 变换为：

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{1.23}$$

   右边序列的收敛域是一个半径为 R_{x^-} 的圆的外部，即：

$$|Z|>R_{x^-}$$

   当 $n_1\geq 0$ 时 z 变换在 $z=\infty$ 处收敛，反之 $n_1<0$ 时 z 变换在 $z=\infty$ 处将不收敛
3. 左边序列
   左边序列为 $n>n_2$ 时 $x(n)=0$ 的序列， z 变换为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n)z^{-n} \tag{1.24}$$

   左边序列的收敛域是一个半径为 R_{x^-} 的圆的内部，即：

$$|z|<R_{x^+}$$

   若$n_2<0$ 则左边序列的 z 变换在 $z=0$ 处将收敛
4. 双边序列
   双边序列可视为一个左边序列与一个右边序列之和，其 z 变换的收敛域就是这两个序列 z 变换的公共收敛区间

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n} \tag{1.25}$$

第一个级数是右边序列，对 $|z|>R_{x^-}$ 收敛；第二个级数是左边序列，对 $|z|<R_{x^+}$ 。若 $R_{x^-}<R_{x^+}$ ，则有一个形式为：

$$R_{x^-}<|z|<R_{x^+}$$

的公共收敛区域。若 $R_{x^-}>R_{x^+}$ ，则没有公共收敛区域，因此式（1.25）不能收敛。

1.2.3 逆z变换

已知函数 $X(z)$ 及其收敛域，反求序列的变换，其表示及变换关系式（柯西积分定理推导）为：

$$x(n)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz \tag{1.26}$$

式中 C 为 $X(z)$ 收敛域内的一条逆时针方向绕原点的闭合曲线

1.2.4 z变换的性质

z变换特性表

序列	z 变换	收敛域
$x(n)$	$X(z)$	$R_{x^-}<\|\|z\|\|<R_{x^+}$
$y(n)$	$Y(z)$	$R_{y^-}<\|\|z\|\|<R_{y^+}$
$ax(n)+bx(n)$	$aX(z)+bY(z)$	$max[R_{x^-},R_{y^-}]<\|\|z\|\|<min[R_{x^+},R_{y^+}]$
$x(n+n_0)$	$z^{n_0}X(z)$	$R_{x^-}<\|\|z\|\|<R_{x^+}$
$a^nx(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|\|a\|\|R_{x^-}<\|\|z\|\|<\|\|a\|\|R_{x^+}$
$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$R_{x^-}<\|\|z\|\|<R_{x^+}$
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	$R_{x^-}<\|\|z\|\|<R_{x^+}$

序列	z 变换	收敛域
$x(-n)$	$X(\frac{1}{z})$	$\frac{1}{R_{x^+}} < \|z\| < \frac{1}{R_{x^-}}$
$x(n) * y(n)$	$X(z)Y(z)$	$max[R_{x^-}, R_{y^-}] < \|z\| < min[R_{x^+}, R_{y^+}]$
$x(n)y(n)$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_C X(v)Y(\frac{z}{v})v^{-1}dv$	$R_{x^-}R_{y^-} < \|z\| < R_{x^+}R_{y^+}$
$x(0) = X(\infty)$		$\|z\| > R_{x^-}$
$x(\infty) = Res[X(z), 1]$		$(z-1)X(z)$收敛于$\|z\| \geq 1$

1.2.5 z变换与$DTFT$的关系

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\omega} \tag{1.27}$$

当 $z = e^{j\omega}$ 时，z 变换与 $DTFT$ 相等，即采样序列单位圆上的z变换就等于该序列的$DTFT$
由于$e^{j\omega} = e^{j(\omega+2k\pi)}$,所以 $X(e^{j\omega})$ 是以 2π 为周期的周期函数， z 平面单位圆上一周正好对应 $X(e^{j\omega})$ 的一个周期。

1.2.6 Parseval 定理

设两个序列 $x(n), y(n)$ 则Paseval定理为：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)Y^*(\frac{1}{v^*})v^{-1}dv \tag{1.28}$$

上式中，积分围线取在 $X(v)$ 和 $Y^*(\frac{1}{v^*})$ 的收敛区域的交叠范围内。
Parseval定理的一个很重要的应用式计算序列的能量：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)x^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega})d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \tag{1.29}$$

1.3 离散时间系统

离散时间系统在数学上定义为将输入序列 $x(n)$ 映射成输出序列 $y(n)$ 的唯一性变换或运算，或者说将一个序列变换成另一个序列的系统。表示为：

$$y(n) = T[x(n)] \tag{1.30}$$

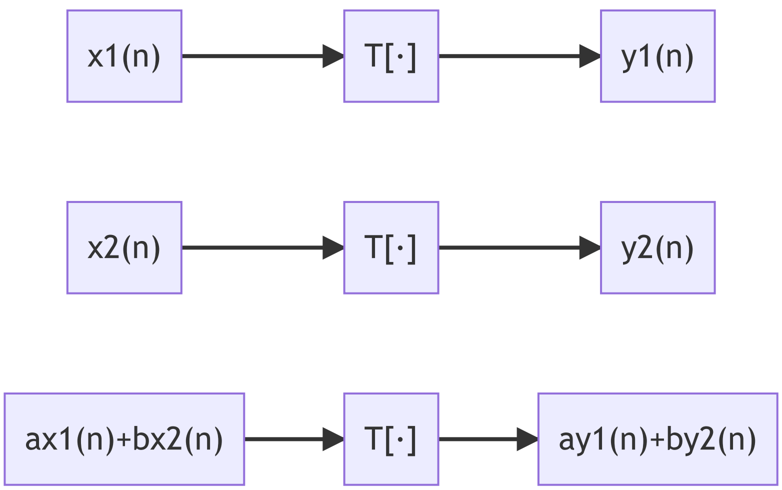
算子 $T[\cdot]$ 表示种种约束条件。

1.3.1 线性系统（Linear system）

满足叠加原理的系统具有线性特性。即若对两个激励 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 有：

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)], a, b\text{为任意常数} \tag{1.31}$$

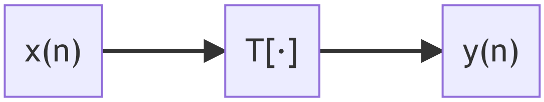
线性系统满足叠加性原理，不满足上述关系的为非线性系统。

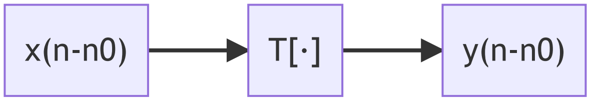


1.3.2 时不变（time-invariant）系统

时不变系统就是系统的参数不随时间而变化，不管输入信号作用的时间先后，输出信号响应的形状均相同，仅出现的时间不同。

$$T[x(n)] = y(n)T[x(n-n_0)] = y(n-n_0) \tag{1.32}$$





1.3.3 线性时不变（linear time-invariant, LTI）系统

1.3.4 稳定系统（stable system）和因果系统（causal system）

只要输入序列是有界的，其输出必定是有界的，这样的系统称为稳定系统，稳定系统的充要条件是其单位脉冲响应绝对可和，即：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

因果系统，就是系统的输出只取决于此时以及此时以前的输入（ $x(n), x(n-1), x(n-2)...$ 等）
一个线性时不变系统是因果系统的充要条件是

$$h(n) \equiv 0, n < 0$$

通常将 $n < 0$ 时等于 0 的序列称为因果序列。