第一章 离散时间信号与系统

1.1 符号表示及基础

离散时间信号通常用序列：
$\{x(n)\}$，n 为 $0, 1, 2...$，$x(n)$ 表示为序列中第 n 个样本值。

$\{\cdot\}$ 表示全部样本值的集合

$\{x*(n)\}$ 表示复序列的共轭

连续时间序列 $x\{t\}$ 与离散时间序列 $\{x(n)\}$ 的关系：

$$x(n) = x_a(t)|_{t=nT} = x_a(nT) \tag{1.1}$$

其中采样频率$f_s = \frac{1}{T}$（T为采样周期，即两个样本间的时间间隔）

周期序列表示为 $\widetilde{x}(n)$
其中

$$\widetilde{x}(n) = x(n+kN), 0 \leq n \leq N-1, k\text{为任意整数} \tag{1.2}$$

1.1.1 常见典型序列

1. 单位脉冲序列

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \tag{1.3}$$

2. 单位阶跃序列

$$u(n) = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

3. 矩形序列

$$R_N(n) = \begin{cases} 1, n \leq n \leq N-1 \\ \quad 0, n < 0, n \geq N \end{cases} \tag{1.5}$$

4. 实指数序列

$$x(n) = a^n u(n) \tag{1.6}$$

$a \neq 0, |a| < 1$ 时收敛，$|a| \geq 1$ 时发散

5. 正弦序列

$$x(n) = sin(\omega_0 n) \tag{1.7}$$

   ω_0 为数字角频率，单位为弧度 rad

6. 复指数序列

$$x(n) = (re^{j\omega_0})^n = r^n[cos(\omega_0 n) + jsin(\omega_0 n)] \tag{1.8}$$

1.1.2 序列的运算

1. 序列的加法

$$z(n) = x(n) + y(n) \tag{1.9}$$

2. 序列的相乘

$$z(n) = x(n)y(n) \tag{1.10}$$

3. 序列的位移

$$z(n) = x(n - n_0) \tag{1.11}$$

   当 $n_0 > 0$ 时 $z(n)$ 是 $x(n)$ 的延迟；当 $n_0 < 0$ 时 $z(n)$ 超前于 $x(n)$；

4. 序列的能量及序列的绝对值
   序列的能量定义为序列样本值的平方和

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 \tag{1.12}$$

   如果序列 $x(n)$ 满足 $S < \infty$ 则为平方可和序列
   如果序列满足

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty \tag{1.13}$$

则为绝对可和序列
如果序列的每一个样本值的绝对值均小于某一个有限的正整数 B_x 则 $x(n)$ 为有界序列，即

$$|x(n)| \leq B_x < \infty \tag{1.14}$$

5. 实序列的偶部和奇部
任何序列均可以分解成偶对成序列和奇对称序列的和的形式，即

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n) \tag{1.15}$$

$x_e(n)$ 和 $x_o(n)$ 分别称为 $x(n)$ 的偶部和基部，其分别等于

$$x_e(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(-n)] \tag{1.15a}$$

$$x_o(n) = \frac{1}{2}[x(n) - x(-n)] \tag{1.15b}$$

6. 任意序列的单位脉冲表示
任一序列 $x(n)$ 都可以表示成单位脉冲序列移位的加权和，即

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m) \tag{1.16}$$

1.2 离散时间信号的傅里叶变换与 z 变换

1.2.1 离散时间信号的傅里叶变换

离散时间傅里叶变换 $DTFT$ (discrete-time Fourier tansform) ,序列的 $DTFT$ 定义为:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}, \omega = \frac{2\pi f}{f_S} \tag{1.17}$$

式中， ω 为数字角频率，它是频率 f 对采样频率 f_s 作归一化后的角频率。
$X(e^{j\omega})$ 时 ω 的连续函数，且周期为 2π
式（1.17）级数不一定总是收敛的，当 $x(n)$ 绝对可和时，它的 $DTFT$ 一定存在。
离散时间信号的傅里叶逆变换（$IDTFT$）：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega m}d\omega \tag{1.18}$$

$x(n)$ 和 $X(e^{j\omega})$ 对应关系可表示为：$X(e^{j\omega})=DTFT[x(n)]$,$x(n)=IDTFT[X(e^{j\omega})]$

$X(e^{j\omega})$ 的几种表示方法：

$$X(e^{j\omega})=Re[X(e^{j\omega})]+jIm[X(e^{j\omega})]=|X(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)} \tag{1.19}$$

$Re[\cdot]$ 和 $Im[\cdot]$ 表示取实部和虚部。
$|X(e^{j\omega})|$ 为离散序列 $x(n)$ 的幅度谱，$\phi(\omega)$为离散序列的相位谱。

$DTFT$ 的主要特性

序列	$DTFT$
$ax(n)+by(n)$	$aX(e^{j\omega})+Y(e^{j\omega})$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x^*(-n)$	$X^*(e^{j\omega})$
$x(n-n_0)$	$e^{-jn_0\omega}X(e^{j\omega})$
$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
$Re[x(n)]$	$X_e(e^{j\omega})$ [$X(e^{j\omega})$ 的共轭偶对称部分]
$jIm[x(n)]$	$X_o(e^{j\omega})$ [$X(e^{j\omega})$ 的共轭奇对称部分]
$x(n)$ 为实序列	$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$
	$Re[X(e^{j\omega})]=Re[X(e^{-j\omega})]$
	$Im[X(e^{j\omega})]=-Im[X(e^{-j\omega})]$
	$arg[X(e^{j\omega})]=-arg[X(e^{-j\omega})]$
$x_e(n)$ [$x(n)$ 的共轭偶对称部分]	$Re[X(e^{j\omega})]$
$x_o(n)$ [$x(n)$ 的共轭偶奇称部分]	$jIm[X(e^{j\omega})]$

1.2.2 z变换

序列 $x(n)$ 的 z 变换定义为:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n},(n=0\text{时为单边}z\text{变换}) \tag{1.20}$$

上式中 z 为复变量，也可记为 $\mathscr{Z}[x(n)]=X(z)$
对于所有的序列或所有的 z 值，z变换并不总是收敛，使 z 变换收敛的 z 值的集合称作收敛区域，一般为 z 平面上的一个环形区域，该区域为:

$$R_{x^-}<|z|<R_{x^+} \tag{1.21}$$

其中 R_{x^-} 可以小到0，R_{x^+} 可以大到 ∞

以下讨论几种序列的收敛域

1. 有限长序列
   仅有有限个数的序列值是非零值，从而