A2 – [II.2409] Approches Formelles
Examen du 16 Juin 2010 – durée 3h

Richard Bonichon, Olivier Hermant et Matthieu Manceny

Correction

Ce sujet d'examen est volontairement long (les notes seront ajustées en conséquence). N'hésitez pas à sauter certaines questions si vous les trouvez trop difficiles, quitte à y revenir plus tard. Les indications de temps sont approximatives.
Si vous repérez ce que vous pensez être une erreur dans l'énoncé, indiquez le sur votre copie, ainsi que les actions en découlant que vous entreprenez.

1 Preuves en Déduction Naturelle

Dans cette partie, vous devez prouver des séquents, avec les notations suivantes : A, B, C et D sont des symboles de proposition atomiques, P et Q sont des symboles de prédicat unaires, R est un symbole de prédicat binaire et enfin, $0, 1, 2$ sont des constantes.

1.1 Logique Propositionnelle (35mn)

Prouver les séquents suivants :

1. $\vdash ((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow (A \wedge (C \wedge B))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{(A \wedge B) \wedge C \vdash (A \wedge B) \wedge C}}{(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge B}}{(A \wedge B) \wedge C \vdash A} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{(A \wedge B) \wedge C \vdash (A \wedge B) \wedge C}}{(A \wedge B) \wedge C \vdash C} \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{(A \wedge B) \wedge C \vdash (A \wedge B) \wedge C}}{(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge B}}{(A \wedge B) \wedge C \vdash B}}{(A \wedge B) \wedge C \vdash C \wedge B}}{(A \wedge B) \wedge C \vdash A \wedge (C \wedge B)}}{\vdash ((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow (A \wedge (C \wedge B))}$$

2. $\vdash (A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma, A \vdash A \Rightarrow C} \quad \overline{\Gamma, A \vdash A}}{\Gamma, A \vdash C} \qquad \dfrac{\overline{\Gamma, B \vdash B \Rightarrow C} \quad \overline{\Gamma, B \vdash B}}{\Gamma, B \vdash C} \qquad \overline{\Gamma \vdash A \vee B}}{A \vee B, A \Rightarrow C, B \Rightarrow C \vdash C}}{A \vee B, A \Rightarrow C \vdash (B \Rightarrow C) \Rightarrow C}}{A \vee B \vdash (A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C)}}{\vdash (A \vee B) \Rightarrow ((A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow C))}$$

3. $\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\Gamma \vdash \neg(A \vee B)} \qquad \dfrac{\overline{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash A \vee B}}{\neg(A \vee B), \neg A \vdash \bot}}{\neg(A \vee B) \vdash \neg A}}{\vdash \neg(A \vee B) \Rightarrow \neg A}$$

4. $\vdash ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow C} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash C}}{(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C), A \vdash B \wedge C}}{(A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (B \wedge C)}}{\vdash ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))}
$$

5. $\vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow A \vee (B \wedge C)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash A \wedge B}}{\Gamma, A \wedge B \vdash A} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \wedge C \vdash A \wedge C}}{\Gamma, A \wedge C \vdash A} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}}{\Gamma \vdash A}}{(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \vee (B \wedge C)}}{\vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow A \vee (B \wedge C)}
$$

6. $\vdash ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \Rightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee D))$. Il y a une typo dans cette formule. Ce séquent n'est pas prouvable. Il s'agissait en fait de prouver le séquent : $\vdash ((A \wedge B) \vee (C \wedge D)) \Rightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee D))$, dont voici la preuve :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash A \wedge B}}{\Gamma, A \wedge B \vdash A}}{\Gamma, A \wedge B \vdash A \vee C} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \wedge B \vdash A \wedge B}}{\Gamma, A \wedge B \vdash B}}{\Gamma, A \wedge B \vdash B \vee D}}{\Gamma, A \wedge B \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee D)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, C \wedge D \vdash C \wedge D}}{\Gamma, C \wedge D \vdash C}}{\Gamma, C \wedge D \vdash A \vee C} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, C \wedge D \vdash C \wedge D}}{\Gamma, C \wedge D \vdash D}}{\Gamma, C \wedge D \vdash B \vee D}}{\Gamma, C \wedge D \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee D)} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash (A \wedge B) \vee (A \wedge C)}}{(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \vdash (A \vee C) \wedge (B \vee D)}}{\vdash ((A \wedge B) \vee (C \wedge D)) \Rightarrow ((A \vee C) \wedge (B \vee D))}
$$

7. $\vdash ((A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \wedge C) \Rightarrow B$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash A \Rightarrow B} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_1 \vdash A \wedge C}}{\Gamma_1 \vdash A}}{\Gamma, A \Rightarrow B \vdash B} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_2 \vdash C \Rightarrow B} \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma_2 \vdash A \wedge C}}{\Gamma_2 \vdash C}}{\Gamma, C \Rightarrow B \vdash B} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow B)}}{(A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow B), A \wedge C \vdash B}}{(A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow B) \vdash (A \wedge C) \Rightarrow B}}{\vdash ((A \Rightarrow B) \vee (C \Rightarrow B)) \Rightarrow (A \wedge C) \Rightarrow B}
$$

1.2 Logique du Premier Ordre (25mn)

Prouver les séquents suivants :

1. $\forall x P(x) \vdash P(0) \vee P(1)$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x P(x) \vdash \forall x P(x)}}{\forall x P(x) \vdash P(1)}}{\forall x P(x) \vdash P(0) \vee P(1)}
$$

2. $\vdash \forall x(P(x) \Rightarrow A) \Rightarrow P(0) \Rightarrow A$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x(P(x) \Rightarrow A)}}{\Gamma \vdash P(0) \Rightarrow A} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash P(0)}}{\forall x(P(x) \Rightarrow A), P(0) \vdash A}}{\forall x(P(x) \Rightarrow A) \vdash P(0) \Rightarrow A}}{\vdash \forall x(P(x) \Rightarrow A) \Rightarrow P(0) \Rightarrow A}
$$

ou, encore plus court (merci à D. Wagner, A. Poinsot et M. Potier) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\forall x(P(x)\Rightarrow A)\vdash \forall x(P(x)\Rightarrow A)}}{\forall x(P(x)\Rightarrow A)\vdash P(0)\Rightarrow A}}{\vdash \forall x(P(x)\Rightarrow A)\Rightarrow P(0)\Rightarrow A}$$

3. $\vdash (\exists x\neg P(x))\Rightarrow\neg(\forall x P(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\neg P(z)}\quad\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\forall xP(x)}}{\Gamma\vdash P(z)}\,x\text{ instancié par }z}{\exists x\neg P(x),\forall xP(x),\neg P(z)\vdash\bot}\qquad\dfrac{}{\exists x\neg P(x),\forall xP(x)\vdash\exists x\neg P(x)}}{\exists x\neg P(x),\forall xP(x)\vdash\bot}\,x\text{ fraîche ! (Attention}}{\exists x\neg P(x)\vdash\neg(\forall xP(x))}}{\vdash(\exists x\neg P(x))\Rightarrow\neg(\forall xP(x))}$$

4. $\vdash \forall y(P(y)\Rightarrow Q(y))\Rightarrow(\forall xP(x)\Rightarrow\forall xQ(x))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\forall y(P(y)\Rightarrow Q(y))}}{\Gamma\vdash P(x)\Rightarrow Q(x)}\quad\dfrac{}{\Gamma\vdash P(x)}}{\forall y(P(y)\Rightarrow Q(y)),\forall xP(x)\vdash Q(x)}\,x\text{ est frais}}{\forall y(P(y)\Rightarrow Q(y)),\forall xP(x)\vdash\forall xQ(x)}}{\forall y(P(y)\Rightarrow Q(y))\vdash\forall xP(x)\Rightarrow\forall xQ(x)}}{\vdash\forall y(P(y)\Rightarrow Q(y))\Rightarrow(\forall xP(x)\Rightarrow\forall xQ(x))}$$

5. On note $\mathcal{T}rans$ la formule $\forall x\forall y\forall z((R(x,y)\wedge R(y,z))\Rightarrow R(x,z))$, et $\mathcal{R}efl$ la formule $\forall x\forall y(R(x,y)\Rightarrow R(y,x))$. Prouver le séquent :

$$\mathcal{R}efl,\mathcal{T}rans\vdash(R(0,1)\wedge R(2,1))\Rightarrow R(0,2)$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\forall x\forall y\forall z((R(x,y)\wedge R(y,z))\Rightarrow R(x,z))}}{\Gamma\vdash\forall y\forall z((R(0,y)\wedge R(y,z))\Rightarrow R(0,z))}}{\Gamma\vdash\forall z((R(0,1)\wedge R(1,z))\Rightarrow R(0,z))}}{\Gamma\vdash(R(0,1)\wedge R(1,2))\Rightarrow R(0,2)}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash R(0,1)\wedge R(2,1)}}{\Gamma\vdash R(0,1)}\quad\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\forall x\forall y(R(x,y)\Rightarrow R(y,x))}}{\Gamma\vdash\forall y(R(2,y)\Rightarrow R(y,2))}}{\Gamma\vdash R(2,1)\Rightarrow R(1,2)}\quad\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash R(0,1)\wedge R(2,1)}}{\Gamma\vdash R(2,1)}}{\Gamma\vdash R(1,2)}}{\Gamma\vdash R(0,1)\wedge R(1,2)}}{\mathcal{R}efl,\mathcal{T}rans,R(0,1)\wedge R(2,1)\vdash R(0,2)}}{\mathcal{R}efl,\mathcal{T}rans\vdash(R(0,1)\wedge R(2,1))\Rightarrow R(0,2)}$$

2 λ-calcul pur (25mn)

On rappelle d'une part que le lieur λ lie le plus loin possible. C'est à dire que si l'on voit $\lambda x.t_1\ t_2$ is faut comprendre $\lambda x.(t_1\ t_2)$ (et non pas $(\lambda x.t_1)\ t_2$. D'autre part, si l'on voit $t_1\ t_2\ t_3$, cela veut dire $(t_1\ t_2)\ t_3$ et non pas $t_1\ (t_2\ t_3)$: l'application est associative à gauche. Réduire les λ-termes suivants :

1.

$$\begin{array}{rcl}(\lambda\underline{x}.\lambda y.\lambda z.(z\ x))\ \underline{x_1}\ y_1\ (\lambda y.y) & \rhd & (\lambda\underline{y}.\lambda z.(z\ x_1))\ \underline{y_1}\ (\lambda y.y)\\ & \rhd & (\lambda\underline{z}.(z\ x_1))\ \underline{(\lambda y.y)}\\ & \rhd & (\lambda\underline{y}.y)\ \underline{x_1}\\ & \rhd & x_1\end{array}$$

2. $(\lambda f.\lambda x.((f\ x)\ f))\ \lambda a.\lambda b.(a\ b)$

$$\begin{array}{rcl}(\lambda\underline{f}.\lambda x.((f\ x)\ f))\ \underline{\lambda a.\lambda b.(a\ b)} & \rhd & \lambda x.(((\lambda\underline{a}.\lambda b.(a\ b))\ \underline{x})\ \ (\lambda a.\lambda b.(a\ b)))\\ & \rhd & \lambda x.((\lambda\underline{b}.(x\ b))\ \underline{(\lambda a.\lambda b.(a\ b))})\\ & \rhd & \lambda x.(x\ (\lambda a.\lambda b.(a\ b)))\end{array}$$

3. (*encodage de Church des booléens*). Réduire les *deux* λ-termes suivants :

$$(\lambda m.\lambda n.(m\ n)\ m)\ (\lambda a.\lambda b.a)\ (\lambda a.\lambda b.b)$$
$$(\lambda m.\lambda n.(m\ m)\ n)\ (\lambda a.\lambda b.b)\ (\lambda a.\lambda b.a)$$

$$\begin{array}{rcl}
(\underline{\lambda m}.\lambda n.(m\ n)\ m)\ (\underline{\lambda a.\lambda b.a})\ (\lambda a.\lambda b.b) & \rhd & (\lambda n.((\underline{\lambda a}.\lambda b.a)\ \underline{n})\ (\lambda a.\lambda b.a))\ (\lambda a.\lambda b.b) \\
 & \rhd & (\lambda n.(\underline{\lambda b}.n)\ (\underline{\lambda a.\lambda b.a}))\ (\lambda a.\lambda b.b) \\
 & \rhd & (\underline{\lambda n}.n)\ (\underline{\lambda a.\lambda b.b}) \\
 & \rhd & \lambda a.\lambda b.b \\
(\underline{\lambda m}.\lambda n.(m\ m)\ n)\ (\underline{\lambda a.\lambda b.b})\ (\lambda a.\lambda b.a) & \rhd & (\underline{\lambda n}.((\lambda a.\lambda b.b)\ (\lambda a.\lambda b.b))\ n)\ (\underline{\lambda a.\lambda b.a}) \\
 & \rhd & ((\underline{\lambda a}.\lambda b.b)\ (\underline{\lambda a.\lambda b.b}))\ (\lambda a.\lambda b.a) \\
 & \rhd & (\underline{\lambda b}.b)\ (\underline{\lambda a.\lambda b.a}) \\
 & \rhd & \lambda a.\lambda b.a
\end{array}$$

4. $\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.(((m\ n)\ f)\ x)\ \ (\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ (f\ x))))\ \ (\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x)))$

$$\begin{array}{rl}
\underline{\lambda m}.\lambda n.\lambda f.\lambda x.(((m\ n)\ f)\ x)\ \ (\underline{\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ (f\ x)))})\ \ (\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x))) & \rhd \\
\lambda n.\lambda f.\lambda x.((((\underline{\lambda f}.\lambda x.(f\ (f\ (f\ x))))\ \underline{n})\ f)\ x)\ \ (\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x))) & \rhd \\
\lambda n.\lambda f.\lambda x.(((\underline{\lambda x}.(n\ (n\ (n\ x))))\ \underline{f})\ x)\ \ (\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x))) & \rhd \\
\underline{\lambda n}.\lambda f.\lambda x.((n\ (n\ (n\ f)))\ x)\ \ (\underline{\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x))}) & \rhd \\
\lambda f.\lambda x.(((\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x)))\ ((\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x)))\ ((\underline{\lambda f}.\lambda x.(f\ (f\ x)))\ \underline{f})))\ x) & \rhd \\
\lambda f.\lambda x.(((\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x)))\ ((\underline{\lambda f}.\lambda x.(f\ (f\ x)))\ (\underline{\lambda x.(f\ (f\ x))})))\ x) & \rhd \\
\lambda f.\lambda x.(((\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x)))\ (\lambda x.((\lambda x.(f\ (f\ x)))\ ((\underline{\lambda x}.(f\ (f\ x)))\ \underline{x}))))\ x) & \rhd \\
\lambda f.\lambda x.(((\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ x)))\ (\underline{\lambda x}.((\lambda x.(f\ (f\ x)))\ (\underline{f\ (f\ x)}))))\ x) & \rhd \\
\lambda f.\lambda x.(((\underline{\lambda f}.\lambda x.(f\ (f\ x)))\ (\underline{\lambda x.(f\ (f\ (f\ (f\ x))))}))\ x) & \rhd \\
\lambda f.\lambda x.((\underline{\lambda x}.((\lambda x.(f\ (f\ (f\ (f\ x)))))\ ((\lambda x.(f\ (f\ (f\ (f\ x)))))\ x)))\ \underline{x}) & \rhd \\
\lambda f.\lambda x.((\lambda x.(f\ (f\ (f\ (f\ x)))))\ ((\underline{\lambda x}.(f\ (f\ (f\ (f\ x)))))\ \underline{x})) & \rhd \\
\lambda f.\lambda x.((\underline{\lambda x}.(f\ (f\ (f\ (f\ x)))))\ (\underline{f\ (f\ (f\ (f\ x)))})) & \rhd \\
\lambda f.\lambda x.(f\ (f\ (f\ (f\ (f\ (f\ (f\ (f\ x)))))))) &
\end{array}$$

3 λ-calcul typé (correspondance de Curry-Howard, 35mn)

1. Reprendre la preuve du premier séquent de la section 1.1 ($\vdash\ ((A \wedge B) \wedge C)\ \Rightarrow\ (A \wedge (C \wedge B))$) et indiquer le terme de preuve correspondant à la preuve construite.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\ (A \wedge B) \wedge C \vdash x:\ (A \wedge B) \wedge C}}{x:\ (A \wedge B) \wedge C \vdash fst(x):\ A \wedge B}}{x:\ (A \wedge B) \wedge C \vdash fst(fst(x)):\ A} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\ (A \wedge B) \wedge C \vdash x:\ (A \wedge B) \wedge C}}{x:\ (A \wedge B) \wedge C \vdash snd(x):\ C} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\ (A \wedge B) \wedge C \vdash x:\ (A \wedge B) \wedge C}}{x:\ (A \wedge B) \wedge C \vdash fst(x):\ A \wedge B}}{x:\ (A \wedge B) \wedge C \vdash snd(fst(x)):\ B}}{x:\ (A \wedge B) \wedge C \vdash \langle snd(x), snd(fst(x))\rangle:\ C \wedge B}}{\dfrac{x:\ (A \wedge B) \wedge C \vdash \langle fst(fst(x)), \langle snd(x), snd(fst(x))\rangle\rangle:\ A \wedge (C \wedge B)}{\vdash \lambda x.\langle fst(fst(x)), \langle snd(x), snd(fst(x))\rangle\rangle:\ ((A \wedge B) \wedge C) \Rightarrow (A \wedge (C \wedge B))}}$$

2. Même question pour le quatrième séquent de cette même section ($\vdash\ ((A \Rightarrow B) \wedge (A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \wedge C))$).

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x:\ (A\Rightarrow B)\wedge(A\Rightarrow C)}}{\Gamma\vdash fst(x):\ A\Rightarrow B} \qquad \dfrac{}{\Gamma\vdash y:\ A}}{\Gamma\vdash fst(x)\ y:\ B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x:\ (A\Rightarrow B)\wedge(A\Rightarrow C)}}{\Gamma\vdash snd(x):\ A\Rightarrow C} \qquad \dfrac{}{\Gamma\vdash y:\ A}}{\Gamma\vdash snd(x)\ y:\ C}}{x:\ (A\Rightarrow B)\wedge(A\Rightarrow C), y:\ A\vdash \langle fst(x)\ y, snd(x)\ y\rangle:\ B\wedge C}}{x:\ (A\Rightarrow B)\wedge(A\Rightarrow C)\vdash \lambda y.\langle fst(x)\ y, snd(x)\ y\rangle:\ A\Rightarrow(B\wedge C)}}{\vdash \lambda x.\lambda y.\langle fst(x)\ y, snd(x)\ y\rangle:\ ((A\Rightarrow B)\wedge(A\Rightarrow C))\Rightarrow(A\Rightarrow(B\wedge C))}
$$

3. Pour les trois preuves ci-dessous :
   (i) Trouver le λ-terme (*i.e.* le terme de preuve) correspondant.
   (ii) Réduire ce λ-terme
   (iii) Ecrire la preuve correspondant à ce nouveau λ-terme.
   a. Dans cette question, on note $\Gamma = B\wedge(B\Rightarrow C), C\Rightarrow A$ et $\Delta = \Gamma, B$.

$$
\Rightarrow_i\dfrac{\Rightarrow_i\dfrac{\Rightarrow_e\dfrac{\Rightarrow_i\dfrac{\Rightarrow_e\dfrac{\text{Ax.}\dfrac{}{\Delta\vdash C\Rightarrow A} \qquad \Rightarrow_e\dfrac{\wedge_{e2}\dfrac{\text{Ax.}\dfrac{}{\Delta\vdash B\wedge(B\Rightarrow C)}}{\Delta\vdash B\Rightarrow C} \qquad \dfrac{}{\Delta\vdash B}\text{Ax.}}{\Delta\vdash C}}{\Gamma, B\vdash A}}{\Gamma\vdash B\Rightarrow A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash B\wedge(B\Rightarrow C)}\text{Ax.}}{\Gamma\vdash B}\wedge_{e1}}{B\wedge(B\Rightarrow C), C\Rightarrow A\vdash A}}{B\wedge(B\Rightarrow C)\vdash (C\Rightarrow A)\Rightarrow A}}{\vdash (B\wedge(B\Rightarrow C))\Rightarrow(C\Rightarrow A)\Rightarrow A}
$$

Ici, on rappelle la technique à utiliser : tout d'abord, nommer les hypothèses introduites par les règles $\Rightarrow_i$ (ainsi que celles déjà présentes dans les hypothèses de départ si elles ne sont pas vides, et celles introduites par des règles $\vee_e$ ou $\exists_e$). On choisit $\Gamma = x:\ B\wedge(B\Rightarrow C), y:\ C\Rightarrow A$ et $\Delta = \Gamma, z:\ B$. Ensuite, on part du haut (les axiomes) vers le bas pour typer. Ce qui nous donne :

$$
\Rightarrow_i\dfrac{\Rightarrow_i\dfrac{\Rightarrow_e\dfrac{\Rightarrow_i\dfrac{\Rightarrow_e\dfrac{\text{Ax.}\dfrac{}{\Delta\vdash y:\ C\Rightarrow A} \qquad \Rightarrow_e\dfrac{\wedge_{e2}\dfrac{\text{Ax.}\dfrac{}{\Delta\vdash x:\ B\wedge(B\Rightarrow C)}}{\Delta\vdash snd(x):\ B\Rightarrow C} \qquad \dfrac{}{\Delta\vdash z:\ B}\text{Ax.}}{\Delta\vdash snd(x)\ z:\ C}}{\Gamma, z:\ B\vdash y\ (snd(x)\ z):\ A}}{\Gamma\vdash \lambda z.y\ (snd(x)\ z):\ B\Rightarrow A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash x:\ B\wedge(B\Rightarrow C)}\text{Ax.}}{\Gamma\vdash fst(x):\ B}\wedge_{e1}}{x:\ B\wedge(B\Rightarrow C), y:\ C\Rightarrow A\vdash (\lambda z.y\ (snd(x)\ z))fst(x):\ A}}{x:\ B\wedge(B\Rightarrow C)\vdash \lambda y.((\lambda z.y\ (snd(x)\ z))fst(x)):\ (C\Rightarrow A)\Rightarrow A}}{\vdash \lambda x.\lambda y.((\lambda z.y\ (snd(x)\ z))fst(x)):\ (B\wedge(B\Rightarrow C))\Rightarrow(C\Rightarrow A)\Rightarrow A}
$$

On trouve :

$$\lambda x.\lambda y.((\lambda z.y\ (snd(x)\ z))fst(x)) \quad \triangleright \quad \lambda x.\lambda y.(y\ (snd(x)\ fst(x)))$$

Ce qui donne la preuve (reconstruite de bas en haut, cette fois-ci :

$$
\Rightarrow_i\dfrac{\Rightarrow_i\dfrac{\Rightarrow_e\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash y:\ C\Rightarrow A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash x:\ B\wedge(B\Rightarrow C)}}{\Gamma\vdash snd(x):\ B\Rightarrow C} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash x:\ B\wedge(B\Rightarrow C)}}{\Gamma\vdash fst(x):\ B}}{\Gamma\vdash snd(x)\ fst(x):\ C}\Rightarrow_e}{x:\ B\wedge(B\Rightarrow C), y:\ C\Rightarrow A\vdash y\ (snd(x)\ fst(x)):\ A}}{x:\ B\wedge(B\Rightarrow C)\vdash \lambda y.(y\ (snd(x)\ fst(x))):\ (C\Rightarrow A)\Rightarrow A}}{\vdash \lambda x.\lambda y.(y\ (snd(x)\ fst(x))):\ (B\wedge(B\Rightarrow C))\Rightarrow(C\Rightarrow A)\Rightarrow A}
$$

b.

$$
\Rightarrow_i\dfrac{\wedge_{e2}\dfrac{\wedge_i\dfrac{\Rightarrow_i\dfrac{\text{Axiome}\dfrac{}{A, B\vdash B}}{A\vdash B\Rightarrow B} \qquad \dfrac{\dfrac{}{A\vdash A}\text{Axiome}}{A\vdash A\vee B}\vee_{i1}}{A\vdash (B\Rightarrow B)\wedge(A\vee B)}}{A\vdash A\vee B}}{\vdash A\Rightarrow(A\vee B)}
$$

On nomme les hypothèses introduites par des $\Rightarrow_i$: $x : A$ et $y : B$. Ce qui donne :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\ A, y:\ B \vdash y:\ B}\text{Axiome}}{x:\ A \vdash \lambda y.y:\ B \Rightarrow B}\Rightarrow_i \qquad \dfrac{\dfrac{}{x:\ A \vdash x:\ A}\text{Axiome}}{x:\ A \vdash i(x):\ A \vee B}\vee_{i1}}{\dfrac{x:\ A \vdash \langle \lambda y.y, i(x)\rangle:\ (B \Rightarrow B) \wedge (A \vee B)}{x:\ A \vdash snd(\langle \lambda y.y, i(x)\rangle):\ A \vee B}\wedge_{e2}}\wedge_i}{\vdash \lambda x.snd(\langle \lambda y.y, i(x)\rangle):\ A \Rightarrow (A \vee B)}\Rightarrow_i$$

Ce terme de preuve se réduit de la manière suivante :

$$\lambda x.snd(\langle \lambda y.y, i(x)\rangle) \quad \triangleright \quad \lambda x.i(x)$$

Ce qui donne la preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\ A \vdash x:\ A}}{x:\ A \vdash i(x):\ A \vee B}}{\vdash \lambda x.i(x):\ A \Rightarrow (A \vee B)}$$

c. dans cette question, on note $\Gamma = B \wedge (C \wedge A), C \Rightarrow A$, et $\Delta = \Gamma, B \wedge C$. On donne directement la solution, avec $\Gamma = x:\ B \wedge (C \wedge A), y:\ C \Rightarrow A$, et $\Delta = \Gamma, z:\ B \wedge C$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash y:\ C \Rightarrow A} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Delta \vdash z:\ B \wedge C}}{\Delta \vdash snd(z):\ C}}{\Gamma, z:\ B \wedge C \vdash y\ snd(z):\ A}}{\Gamma \vdash \lambda z.(y\ snd(z)):\ (B \wedge C) \Rightarrow A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x:\ B \wedge (C \wedge A)}}{\Gamma \vdash fst(x):\ B} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x:\ B \wedge (C \wedge A)}}{\Gamma \vdash snd(x):\ C \wedge A}}{\Gamma \vdash fst(snd(x)):\ C}}{\Gamma \vdash \langle fst(x), fst(snd(x))\rangle:\ B \wedge C}}{x:\ B \wedge (C \wedge A), y:\ C \Rightarrow A \vdash (\lambda z.(y\ snd(z)))\langle fst(x), fst(snd(x))\rangle:\ A}$$

$$\begin{array}{rcl} (\lambda z.(y\ snd(z)))\langle fst(x), fst(snd(x))\rangle & \triangleright & (y\ snd(\langle fst(x), fst(snd(x))\rangle)) \\ & \triangleright & y\ fst(snd(x)) \end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash y:\ C \Rightarrow A} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash x:\ B \wedge (C \wedge A)}}{\Gamma \vdash snd(x):\ C \wedge A}}{\Gamma \vdash fst(snd(x)):\ C}}{\Gamma \vdash y\ fst(snd(x)):\ A}$$

4. Pour les deux λ-termes suivants, trouver une preuve en déduction naturelle y correspondant :

a. $\lambda x.i(fst(x))$

Raisonner de bas en haut, et reconstruire la structure de la preuve que voici :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x:\ \sqcup \vdash x:\ \sqcup}\text{Axiome}}{x:\ \sqcup \vdash fst(x):\ \sqcup}\wedge_{e1}}{x:\ \sqcup \vdash i(fst(x)):\ \sqcup}\vee_{i1}}{\vdash \lambda x.i(fst(x)):\ \sqcup}\Rightarrow_i$$

Il ne reste plus qu'à remplir les “trous” $\sqcup$ avec des propositions ayant la bonne structure, *i.e*, qui respecte les contraintes imposées par les règles de déduction. Par exemple, pour la règle $\wedge_{e1}$ on doit avoir une conjonction dans la prémisse et on en récupère le premier membre dans la conclusion, pour la règle $\vee_{i1}$ on obtient en conclusion une disjonction, et pour la règle $\Rightarrow_i$, on a une implication dans le séquent conclusion, dont le membre droit est l'axiome que l'on utilise tout en haut, et le membre gauche se retrouve dans la prémisse (elle doit donc être une disjonction). Etc, etc.

On se retrouve donc avec, *par exemple*, l'arbre de preuve suivant, où C est une proposition complètement arbitraire [1] :

1. cela pourrait être A, B, $A \vee A$, peu importe, car on n'a aucune information sur son compte

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x :\ A \wedge B \vdash x :\ A \wedge B}\,\text{Axiome}}{x :\ A \wedge B \vdash fst(x) :\ A}\,\wedge_{e1}}{x :\ A \wedge B \vdash i(fst(x)) :\ A \vee C}\,\vee_{i1}}{\vdash \lambda x.i(fst(x)) :\ (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee C)}\,\Rightarrow_i$$

b. $\lambda x.\lambda y.(x\ i(y))$. Avec la même technique que précédemment, on peut obtenir l'arbre de dérivation suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{x :\ (A \vee B) \Rightarrow C, y :\ A \vdash x :\ (A \vee B) \Rightarrow C} \quad \dfrac{\dfrac{}{x :\ (A \vee B) \Rightarrow C, y :\ A \vdash y :\ A}}{x :\ (A \vee B) \Rightarrow C, y :\ A \vdash i(y) :\ A \vee B}}{x :\ (A \vee B) \Rightarrow C, y :\ A \vdash x\ i(y) :\ C}}{x :\ (A \vee B) \Rightarrow C \vdash \lambda y.(x\ i(y)) :\ A \Rightarrow C}}{\vdash \lambda x.\lambda y.(x\ i(y)) :\ ((A \vee B) \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C}$$

4 Model Checking (45mn)

4.1 Modélisation d'une machine à café (20mn)

On considère une machine à café dont le système de contrôle est décrit ci-après.

– La machine délivre 2 types de boissons : des petits cafés qui coûtent 30 centimes, et des grands café pour 40 centimes.
– La machine accepte uniquement les pièces de 10 et 20 centimes (les actions associées sont appelées `Payer10` et `Payer20`), et il est demandé à l'utilisateur de faire l'appoint.
– Le contrôleur garde en mémoire (dans une variable `somme`) la somme entrée par l'utilisateur.
– Dès que la somme de 30 centimes est atteinte, le contrôleur passe dans l'état `choisir` et l'action `choixPetit`, permettant de commander un petit café, devient disponible. L'utilisateur a également la possibilité de mettre 10 centimes de plus dans la machine.
– Dès que la somme de 40 centimes est atteinte, l'action `choixGrand`, permettant de commander un grand café, devient disponible.
– Lorsque l'utilisateur a choisi son café (petit ou grand), la machine encaisse la somme correspondante et sert la boisson (action `servir`, état `servirPetit` et `servirGrand`).
– Lorsque la boisson est servie, le contrôleur revient à son état initial (action `retour`).
– Tant que l'utilisateur n'a pas choisi sa boisson, il peut décider d'annuler sa commande (action `annuler`). La machine lui rend alors ses pièces, et le contrôleur revient dans l'état initial.

1. Dessiner une machine à états modélisant le contrôle de la machine à café.

   Réponse : voir la figure 1.

2. Dessiner le système de transitions correspondant (en vous limitant aux configurations accessibles depuis l'état initial).

   Réponse : voir la figure 2.

4.2 Logique temporelle (25mn)

On note état=E la propriété « *le contrôleur de la machine à café est dans l'état E* ».

On note somme=S la propriété « *la machine à café a reçu S centimes* ». (On pourra utiliser si besoin les notations somme$\leq$S, somme$\geq$S, somme$\neq$S).

1. Traduire en formules CTL* les propositions données en langage naturel suivantes :
   – « *La machine à café finit toujours par revenir à l'état initial.* »
   – « *Après avoir servi un petit café, la machine à café revient toujours immédiatement à l'état initial.* »

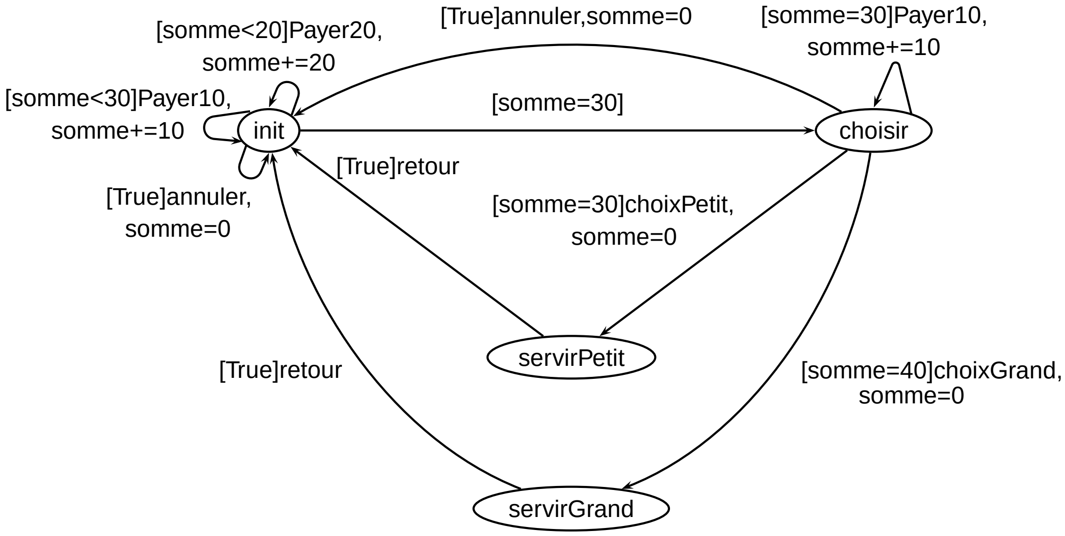

FIGURE 1 – Machine à états modélisant le contrôle de la machine à café

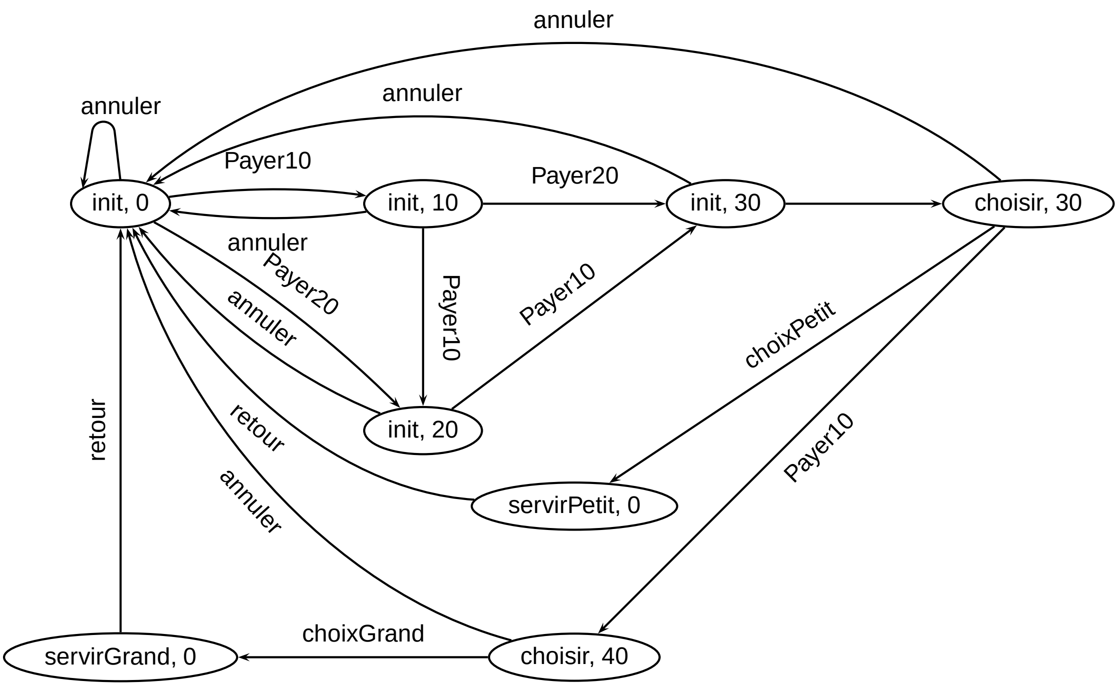

FIGURE 2 – Système de transitions associé à la machine à états de la figure 1

- *« Lorsque la machine a reçu 30 centimes, elle peut servir un grand café. »*
- *« Tant que la machine n'a pas reçu au moins 30 centimes, elle ne sert pas de café. »*

Réponses :
- A G A F (état=init)
- A G (état=ServirPetit ⇒ X(état=init))
- A G (somme=30 ⇒ E F (état=ServirGrand))
- A G (somme<30 ⇒ A(¬ X(état=ServirPetit ∨ état=ServirGrand)))

2. Traduire en langage naturel les formules CTL suivantes :
   - ¬ E F G (etat=init)
   - A G (état=choisir ⇒ X(somme=0))
   - A ((état=init) U (état=choisir))
   - E (X(somme=0) ∧ F(état=servirGrand))

   Réponses :
   - *« La machine à café ne peut pas atteindre une situation où elle reste infiniment*

dans l'état init. »
– « *Lorsque la machine à café est dans l'état choisir, alors immédiatement après la somme est toujours égale à 0.* »
– « *La machine à café reste dans l'état init jusqu'à passer dans l'état choisir, ce qui arrive.* »
– « *Il est possible d'avoir une somme nulle à l'état suivant et que la machine serve un grand café ensuite.* »

3. Parmi les quatre formules CTL* précédentes, lesquelles sont vérifiées par la machine à café ?

Réponses : Seule la dernière formule est vérifiée par la machine à café :
– Il est possible de rester toujours dans l'état init (en mettant une pièce et en appuyant sur annuler par exemple).
– La machine peut être dans l'état choisir avec une somme de 30 centimes. Dans ce cas, si l'utilisateur ajoute 10 centimes, la machine se retrouve dans l'état choisir avec une somme de 40 centimes.
– La troisième formule impose que l'état choisir soit atteint, ce qui peut ne pas être le cas si la machine reste infiniment souvent dans l'état initial.

5 Bonus (0mn)

Dans la partie 2, on affirme dans le point `3` qu'il s'agit d'un encodage des Booléens. En fait, cet encodage fonctionne de la manière suivante. On définit :

$$\begin{array}{rcl}\textbf{true} & := & \lambda a.\lambda b.a \\ \textbf{false} & := & \lambda a.\lambda b.b\end{array}$$

Dans cette optique, on dit qu'un λ-terme `b` est un Booléen (de Church) si et seulement s'il se réduit soit vers **true**, soit vers **false**. Cela est justifié par le comportement suivant : dans un language de programmation, quand on considère la construction conditionnelle :

`if (`*test*`) then (`*instrT*`) else (`*instrF*`)`

alors si *test* s'évalue en **true**, la construction précédente se réduit vers *instrT*, et si *test* s'évalue en **false**, la construction précédente se réduit vers *instrF*.

Ici, on retrouve ce comportement : si on dispose d'un booléen (de Church) b, alors ons sait qu'il se réduit soit vers **true**, soit vers **false**. Ainsi, le λ-terme $b\ instrT\ instrF$ se réduira soit sur *instrT* dans le cas où b se réduit sur **true** et sur *instrF* dans le cas contraire. Cela permet de simuler dans le λ-calcul les structures conditionnelles des langages de programmation.

Par exemple, $\lambda a.\lambda b.((\lambda x.x)\ a)$ *est* un booléen de Church (dont la forme normale est **true**), et on a la séquence de réductions :

$$\begin{array}{rcl}(\lambda a.\lambda b.((\lambda x.x)\ a))\ instrT\ instrF & \rhd & (\lambda a.\lambda b.a)\ instrT\ instrF \\ & \rhd & (\lambda b.instrT)\ instrF \\ & \rhd & instrT\end{array}$$

Questions (*Bonus*) :

1. Que représentent les λ-termes $(\lambda m.\lambda n.(m\ n)\ m)$ et $(\lambda m.\lambda n.(m\ m)\ n)$ du point `3`, section 2 ?

   Réponse : la conjonction (et) et la disjonction (ou).

2. Trouver un λ-terme permettant d'encoder la négation booléenne.

   Réponse :$\lambda m.\lambda a.\lambda b.(m\ b\ a)$

3. Si maintenant on considère les entiers de Church, qu'encode le λ-terme du point 4 de la section 2) $\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.(((m\ n)\ f)\ x)$?

   Réponse : l'exponentiation n^m.

4. Montrer formellement (*i.e.* par récurrence sur n et/ou sur m) ce résultat (difficile - il faudra vous servir des différents λ-termes sur les entiers vus en cours).

   Réponse : par récurrence sur m. Si $m = \lambda f.\lambda x.x = 0$, on a :

$$\begin{array}{rcl}
\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.(((m\ n)\ f)\ x)\ \ (\lambda f.\lambda x.x)\ \ n & \rhd & \lambda n.\lambda f.\lambda x.((((\lambda f.\lambda x.x)\ n)\ f)\ x)\ \ n \\
& \rhd & \lambda n.\lambda f.\lambda x.(((\lambda x.x)\ f)\ x)\ \ n \\
& \rhd & \lambda n.\lambda f.\lambda x.(f\ x)\ \ n \\
& \rhd & \lambda f.\lambda x.f\ x \\
& = & 1
\end{array}$$

   On a donc bien $n^0 = 1$. Maintenant, supposons la propriété vraie pour m et montrons la pour $m+1 = \lambda f.\lambda x.(f\ (m\ f\ x))$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
\lambda m.\lambda n.\lambda f.\lambda x.(((m\ n)\ f)\ x)\ \ (\lambda f.\lambda x.(f\ (m\ f\ x)))\ \ n & \rhd & \lambda n.\lambda f.\lambda x.((((\lambda f.\lambda x.(f\ (m\ f\ x)))\ n)\ f)\ x)\ \ n \\
& \rhd & \lambda f.\lambda x.((((\lambda f.\lambda x.(f\ (m\ f\ x)))\ n)\ f)\ x) \\
& \rhd & \lambda f.\lambda x.((\lambda x.(n\ (m\ n\ x))\ f)\ x) \\
& \rhd & \lambda f.\lambda x.((n\ (m\ n\ f))\ x) \\
& \rhd & ...
\end{array}$$

   or, le λ-terme $(n\ (m\ n\ f))\ x$ représente la fonction $m\ n\ f$ composée n fois puis appliquée à x. Or, par hypothèse de récurrence, pour tout λ-terme y,

$$m\ n\ f\ y = n^m\ f\ y = \overbrace{f\ f\ \cdots\ f}^{n^m \text{ fois}}\ x$$

   on a donc :

$$\begin{array}{rcl}
(n\ (m\ n\ f))\ x & = & \overbrace{(m\ n\ f)\ (m\ n\ f)\ \cdots\ (m\ n\ f)}^{n \text{ fois}}\ x \\
& = & \overbrace{\underbrace{f\ f\ \cdots\ f}_{n^m \text{ fois}}\ \cdots\ \underbrace{f\ f\ \cdots\ f}_{n^m \text{ fois}}}^{n \text{ fois}}\ x \\
& = & \underbrace{f\ \cdots\ f}_{n * n^m \text{ fois}}\quad x
\end{array}$$

   soit la composition de f exactement $n * n^m = n^{m+1}$ fois. CQFD.

5. On définit un nouveau connecteur de la logique $\Leftrightarrow$ (l'équivalence logique). On souhaite inclure des règles de déduction pour ce nouveau symbole. En remarquant que $A \Leftrightarrow B$ est (logiquement) équivalent à $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$:
   – Proposer les règles d'introduction et d'élimination de ce symbole (*indication :* une règle d'intro, deux règles d'élim)

     Réponse :
     En concaténant les règles d'introduction de $\wedge$ et de $\Rightarrow$ on obtient l'arbre de preuve suivant :

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad \dfrac{\Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash B \Rightarrow A}}{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}$$

La règle d'intro du $\Leftrightarrow$ est donc :

$$\frac{\Gamma, A \vdash B \qquad \Gamma, B \vdash A}{\Gamma \vdash (A \Leftrightarrow B)} \Leftrightarrow\text{-intro}$$

De même en combinant les règles d'éliminiation de $\wedge$ et de $\Rightarrow$ on obtient :

$$\frac{\dfrac{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \qquad\qquad \frac{\dfrac{\Gamma \vdash (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)}{\Gamma \vdash B \Rightarrow A} \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A}$$

Ce qui nous donne les deux règles d'élimination suivantes :

$$\Leftrightarrow\text{-elim 1}\ \frac{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A} \Leftrightarrow\text{-elim 2}$$

– Dites ce qu'est une coupure sur ce symbole et comme elle(s) s'élimine(nt).

Deux types de coupure :

$$\Leftrightarrow\text{-elim 1}\ \frac{\dfrac{\dfrac{\pi_B}{\Gamma, A \vdash B} \qquad \dfrac{\pi_A}{\Gamma, B \vdash A}}{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow\text{-intro} \qquad \dfrac{\nu_A}{\Gamma \vdash A}}{\Gamma \vdash B} \qquad\qquad \frac{\dfrac{\dfrac{\pi_B}{\Gamma, A \vdash B} \qquad \dfrac{\pi_A}{\Gamma, B \vdash A}}{\Gamma \vdash A \Leftrightarrow B} \Leftrightarrow\text{-intro} \qquad \dfrac{\nu_B}{\Gamma \vdash B}}{\Gamma \vdash A} \Leftrightarrow\text{-elim 2}$$

Qui s'éliminent de la façon suivante :

$$\frac{\pi_B \text{ où les axiomes } \Delta \vdash A \text{ sont remplacés par } \nu_A}{\Gamma \vdash B} \qquad\qquad \frac{\pi_A \text{ où les axiomes } \Delta \vdash B \text{ sont remplacés par } \nu_B}{\Gamma \vdash A}$$

Réponse :

– Proposer une extension de la correspondance de Curry-Howard pour ce symbole.

Réponse : On peut proposer un nouveau lieur μ, qui lie deux variables et deux preuves en même temps pour la règle d'introduction :

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash \pi_B : B \qquad \Gamma, y : B \vdash \pi_A : A}{\Gamma \vdash \mu[x, y].[\pi_B, \pi_A] : (A \Leftrightarrow B)} \Leftrightarrow\text{-intro}$$

Notons que x est lié dans π_B et y est lié dans π_A uniquement. Pour les règles d'élimination, on doit appliquer un terme de preuve à deux autre simultanément :

$$\Leftrightarrow\text{-elim 1}\ \frac{\Gamma \vdash \pi : A \Leftrightarrow B \qquad \Gamma \vdash \nu_A : A}{\Gamma \vdash \pi\ [\nu_A, \emptyset] : B} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \pi : A \Leftrightarrow B \qquad \Gamma \vdash \nu_B : B}{\Gamma \vdash \pi\ [\emptyset, \nu_B] : A} \Leftrightarrow\text{-elim 2}$$

Enfin, étendons la β-réduction :

$$(\mu[x, y].[\pi_B, \pi_A])\pi\ [\nu_A, \emptyset] \ \triangleright\ \{\nu_A/x\}\pi_B \qquad\qquad (\mu[x, y].[\pi_B, \pi_A])\pi\ [\emptyset, \nu_B] \ \triangleright\ \{\nu_B/y\}\pi_A$$

Noter que dans les règles d'introduction et d'élimination de $\Leftrightarrow$, aucun autre connecteur ne doit apparaître, même si (temporairement et au brouillon) ils peuvent servir.