数 学 模 型
Mathematical Modeling

任课老师：刘利刚

ligangliu@zju.edu.cn

http://www.math.zju.edu.cn/ligangliu/Courses/MathematicalModeling_2005-2006

数学模型导论

数学？

- 数学有没有用？
  - 数学不是没有用，而是不够用
  - 现有的数学工具不能解决所有实际问题
  - 我在专业研究中遇到很多数学问题而受阻
- 怎么用？
  - 解决实际问题
  - 数学模型 ☺

数学模型与数学建模

- **数学模型**（**Mathematical Model**）

  是用数学符号、数学式子、程序、图形等对实际课题本质属性的抽象而又简洁的刻划，它或 能解释某些客观现象，或能预测未来的发展规律，或能为控制某一现象的发展提供某种意义下的最优策略或较好策略。

- **数学建模**（**Mathematical Modeling**）

  应用知识从实际课题中抽象、提炼出数学模型的过程。

数学模型早就知

- 我们从小就接触过数学模型：
  - 应用题
    - “甲乙两地相距750公里，船从甲到乙顺水航行需30小时，从乙到甲逆水航行需50小时，问航速，水速若干？”
  - 物体
    - “从平静湖面的小船上仍一块石头至水中，湖面是上涨还是下降？”
  - 数学竞赛
    - …

数学模型无所不在

- 日常生活
  - 投资
  - 决策
- 各行各业
  - 经济
  - 金融
- 专业研究领域
  - 物理
  - 计算机研究

例1. 手机电话卡的选择

- 已知：入网电话卡每分钟0.4元，每月25元租金；神州行卡每分钟0.6元，不用月租金
- 问：选择哪种卡比较省钱？

例2.打水问题

- 每天晚上5:00 至 5:30 之间开水房的拥塞想必让每一个人都深有感触吧，偏偏这种时候还有一些人喜欢一个人占好几个龙头，不得不让人怒火中烧。对每个人来讲，最好的办法当然是在不违反排队顺序的前提下尽可能早地接触龙头。事实上大家也基本上是这样做的。在高峰时期霸占多个龙头的人就算不遭到语言的谴责也会遭到目光的谴责。

- 假设现在有 2个水龙头，10 个人来打水，每个人拎着两个壶，每打一壶要 1分钟，这是一种很常见的情况。
- 方法 A：经验方法。这样，当有两人等待时，两个人各用一个龙头，为将10个人打满，总共的等待时间是：

  2*(2+4+6+8+10)=60 分钟
- 方法 B：每次分配水龙头时都优先满足最前面的人。这样，当有两人等待时，第一个人先用两个龙头，等他打完了第二个人再用。这种方法下总的等待时间是：

  1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55 分钟
- 结果后一个方法被证明是更有效率的。也就是说，这个看起来有些自私的方案，这个常常被我们谴责的方案，事实上是一个更合理的方案。

- 相同任务量的并行服务队列

例3.银行问题

- 去中国工商银行存取钱对每个人来说都决不是一次愉快的经历。我平均每次去取钱都至少要花上半个小时的时间，这促使我考虑是否有办法在现有窗口的情况下提高整个系统的效率。

- 不同任务量的串行服务队列

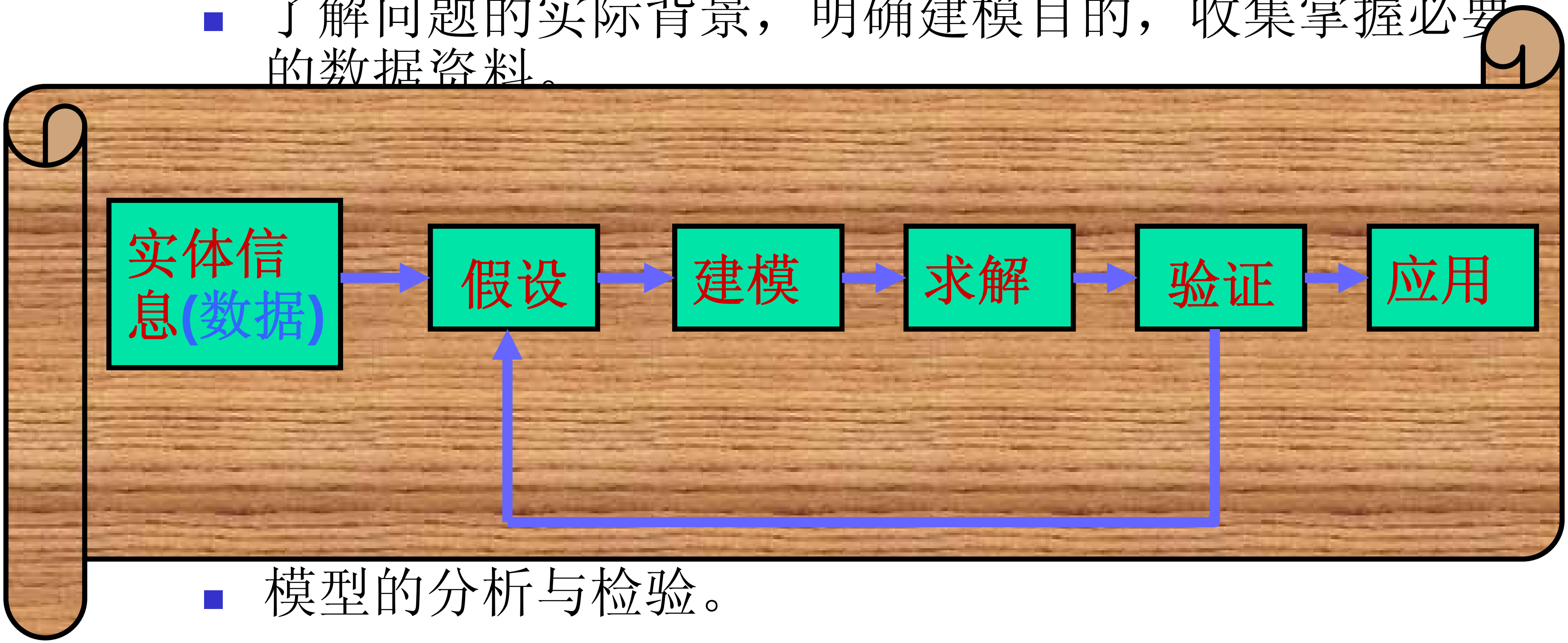
例4.万有引力定律的发现

- 开普勒三大定律
  - 行星轨道是一个椭圆，太阳位于此椭圆的一个焦点上。
  - 行星在单位时间内扫过的面积不变。
  - 行星运行周期的平方正比于椭圆长半轴的三次方，比例系数不随行星而改变（绝对常数）。
- 牛顿根据开普勒三定律和牛顿第二定律，利用微积分方法推导出牛顿第三定律即万有引力定律。

Proof

数学建模的一般步骤

- 了解问题的实际背景，明确建模目的，收集掌握必要的数据资料。



- 模型的分析与检验。

数学模型的分类

分类标准	具体类别
对某个实际问题了解的深入程度	白箱模型、灰箱模型、黑箱模型
模型中变量的特征	连续型模型、离散型模型或确定性模型、随机型模型等
建模中所用的数学方法	初等模型、微分方程模型、差分方程模型、优化模型等
研究课题的实际范畴	人口模型、生 态系统模型 、交通流模型、经 济模型、 基因模型等

能力的培养

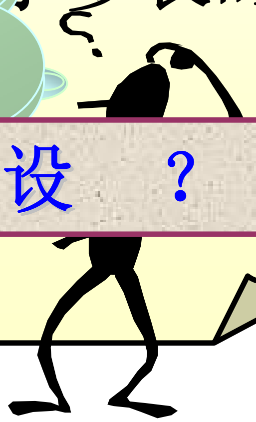
- 能力上的 锻炼
  - 观察能力、分析能力、归纳能力和数据处理能力
- 在尽可能短的时间内查到并学会我想应用的知识的本领
  - Google
  - 图书馆
- 创新的能力

一些简单实例

§ 1.5 一些简单实例

• **例1** 某人平时下班总是按预定时间到达某处，然然后他妻子开车接他回家。有一天，他比平时提早了三十分钟到达该处，于是此人就沿着妻子来接他的方向步行回去并在 … 这一天，他比平时提前了十 … 了多长时间

显然是由于节省了从相遇点到会合点，又从会合点返回相遇点这一段路的缘故，故由相遇点到会合点需开5分钟。而此人提前了三十分钟到



请思考一下，本题解答中隐含了哪些假设 ？

例2　某人第一天由 A地去B地，第二天由B地沿原路返回 A 地。问：在什么条件下，可以保证途中至少存在一地，此人在两天中的同一时间到达该地。

分析　本题多少有点象数学中解的存在性条件及证明，当然，这里的情况要简单得多。

假如我们换一种想法，把第二天的返回改变成另一人在同一天由B去A，问题就化为在什么条件下，两人至少在途中相遇一次，这样结论就很容易得出了：只要任何一人的到达时间晚于另一人的出发时间，两人必会在途中相遇。

（请自己据此给出严格证明）

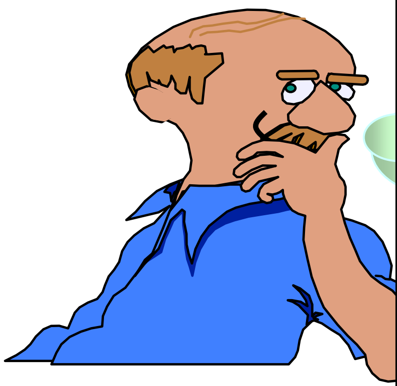
•例

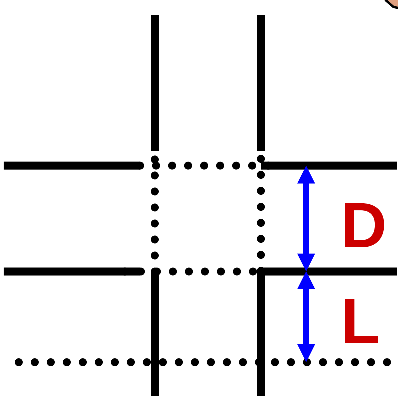
一个过

灯。请

马路的宽度 D是容易测得的，问题的关键在于L的确定。为确定 L，还应当将 L划分为两段：L_1和L_2，其中 L_1是司机在发现黄灯亮及判断应当刹车的反应时间内驶过的路程，L_2为刹车制动后车辆驶过的路程。L_1较容易计算，交通部门对司机的平均反应时间 t_1早有测算，反应时间过长将考不出驾照），而此街道的行驶速度 v 也是交管部门早已定好的，目的是使交通流量最大，可另建模型研究，从而 $L_1=v*t_1$。刹车距离L_2既可用曲线拟合方法得出，也可利用牛顿第二定律计算出来（留作习题）。

黄灯究竟应当亮多久现在已经变得清楚多了。第一步，先计算出 L应多大才能使看见黄灯的司机停得住车。第二步，黄灯亮的时间应当让已过线的车顺利穿过马路，即T 至少应当达到 $(L+D)/v$。





例4 餐馆每天都要洗大量的盘子，为了方便，某餐馆是这样清洗盘子的，先用冷水粗

粗洗一下 …… 太

高，否 …… 干

净。由 …… 也

热水到 ……

析一下 ……

不妨可以提出以下 简化假设：

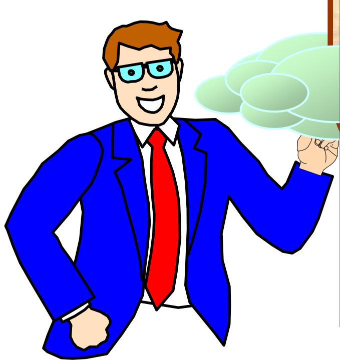
（1）水池、空气吸热不计，只考虑盘子吸热，盘子的大小、材料相同

（2）盘子初始温 ……

完后的温 ……

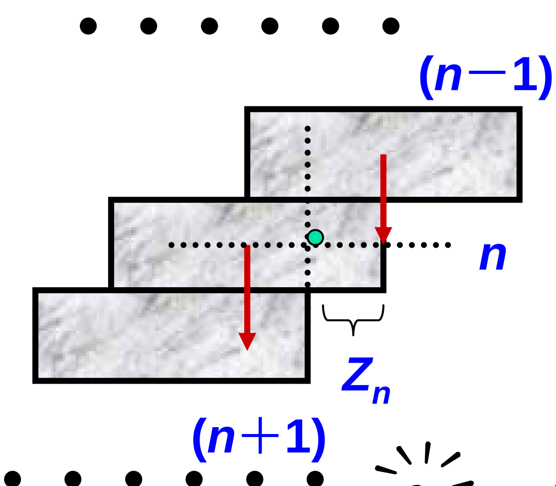
（3）……

根据上述简化假设，利用热量守恒定律，餐馆老板的问题就很容 …… 查 …… 一



可见，假设条件的提出不仅和你研的问题有关，还和你准备利用哪些知识、准备建立什么样的模型以及你准备研究的深入程度有关，即在你提出假设时，你建模的框架已经基本搭好了。

例5 将形状质量相同的砖块一一向右往外叠放，欲尽可能地延伸到远方，问最远可以延伸多大距离。

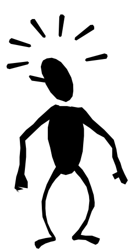


设砖块是均质的，长度与重量均 为1，其重心在中点1/2砖长处，现用**归纳法**推导。

由第 n块砖受到的两个力的力矩相等，有：

$$1/2-Z_n=(n-1)Z_n$$

故$Z_n=1/(2n)$，从而上面 n块砖向右推出的总距离为 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$ ，



故砖块向右可叠至 **任意远** ，这一结果多少有点出人意料。

由于距离不同，设 A到C行驶31分钟，B到C要行驶 30分钟，考察一个时间长度 为10分钟的区间，例如，可以从 A方向来的车驶 离C站时开始，在其后的 9分钟内到达的乘客见到先来的车均为 B开往A的，仅有最 后1分钟到达的乘客才见到 由A来的车先到。由此可见，如果此人 到C站等车的时间是随机的，则他先遇 上B方向来的车的概率为 90% 。

例4 飞机失事时，黑匣子会自动打开，发射出某种射线。为了搞清失事原因，人们必须尽快找回匣子。确定黑匣子的位置，必须确定其所在的方向和距离，试设计一些寻找黑匣子的方法。由于要确定两个参数，至少要用仪器检测两次，除非你事先知道黑匣子发射射线的强度。

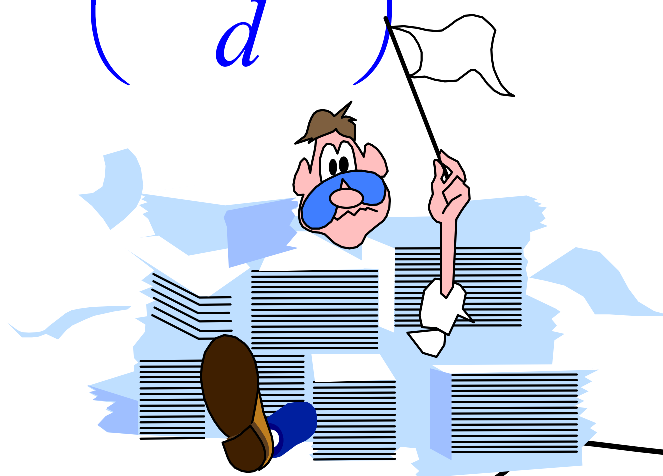
方法一

点光源发出的射线在各点处的照度与其到点光源的 距离的平方成反比，即 $I = k/d^2$

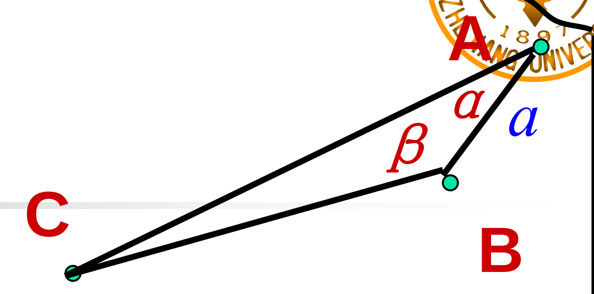
黑匣子所在 方向很容易确定，关键在于确定 距离 。设在同一方向不同位置检测了两次，测得的照度分别为I_1和I_2，两测量点间的距离为 a，则有

$$I_2 / I_1 = \frac{k}{d^2} \Big/ \frac{k}{(d+a)^2} = \left(\frac{d+a}{d}\right)^2$$

$$d = a \Big/ \left(\sqrt{\frac{I_2}{I_1}} - 1\right)$$



方法二



在方法一中，两检测点与黑匣子位于一直线上，这一点比较容易做到，主要缺点是结果对照度测量的精度要求较高，很少的误差会造成结果的很大变化，即敏感性很强，现提出另一方法，在 A 点测得黑匣子方向后，到B点再测方向，AB 距离为a，$\angle BAC=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，利用正弦定理得出 $d=a\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$ 。需要指出的是，当黑匣子位于较远处而 α 又较小时，$\alpha+\beta$ 可能非常接近 π（$\angle ACB$接近于0），而$\sin(\alpha+\beta)$又恰好位于分母上，因而对结果的精确性影响也会很大，为了使结果较好，应使a也相对较大。

Course Goals

- 让同学们真正能
  - 提高发现问题和解决问题的能力
  - 运用知识和寻找知识的能力
  - 学有所用，增强兴趣和信心
- 方法
  - 多思考分析
  - 实践

预备技能

- 数学知识
  - 分析，代数，几何，概论，统计，优化…
- 软件使用
  - Microsoft Word, Visio, LaTeX
  - Matlab, Mathematica, Maple, Lindo, Lingo…
- 编程
  - C/C++
  - GUI Programming

Grading Policies

- General homework (20%)
  - Every class/week
- Large projects (40%)
  - 4-5
- Final exams (40%)

Grading Policies

5+	方法新颖巧妙，非常好
5	模型建立求解合理，书写很好
4	模型建立求解合理，书写规范
3	模型建立求解基本合理，但书写一般
2	模型建立求解有问题，书写一般
1	模型建立不正确，书写糟糕，态度有问题
0	态度有问题，很遗憾 ☹

对你的作业程序的反馈会返回给你。

Requirements(1)

- 模型报告书写
  - 符合规范
  - 文字，图表清晰
  - 数据说明
- 代码提交
  - 文档说明：运行参数，操作等
  - 程序能运行：编译通过
  - 压缩打包
    - 去除不必要的文件，如\debug目录

Requirement(2)

- Assignment submissions
  - No late assignments will be accepted
  - Late assignment follow the following rules
    - 25% deduction for 1-day late
    - 50% deduction for 2-day late
    - Not accepted after being 2-day late
  - Feedbacks on your codes will be returned to you after judging

Requirement(3)

- 独立完成
- 相互帮助
- 团队合作
- 绝不允许抄袭！

上机时间

- 每周二下午9，10节3:30-5:30
- 紫金港中心机房1楼2号机房
- 上机答疑

My FTP

- ftp://10.13.61.167:21
- Username: MM05
- Password: MM05

- Hand in your homework
  - Upload by FTP
  - Send via E-mail

Q&A

简单推导如下:

如图，有椭圆方程：$$r=\frac{p}{1-e\cos\theta}$$

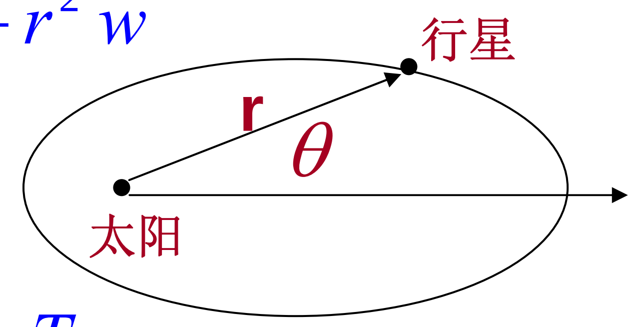
矢径所扫过的面 积A的微分为:

$$dA=\frac{1}{2}r^2d\theta$$

由开普勒第二定 律:

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2w=\text{常数}$$

立即得出:
$$0=\frac{d}{dt}(r^2w)=2r\dot{r}w+r^2\dot{w}$$



即:
$$2\dot{r}w+r\dot{w}=0$$

椭圆面积 $$\pi ab=\int_0^T\frac{dA}{dt}dt=\frac{1}{2}r^2wT$$

由此得出 $$r^2w=\frac{2\pi ab}{T}=\text{常数}$$

我们还需算出行星的加速度，为此需要建立 两种不同的坐标架。第一个是固定的，以太阳为坐标原点，沿长轴方向的单位向量记 为**i**,沿短轴方向的单位向量记为**j**，于是：

$$\mathbf{r} = r\cos\theta\ \mathbf{i} + r\sin\theta\ \mathbf{j}$$

进而有 加速度

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2}{dt^2}(r\cos\theta)\ \mathbf{i} + \frac{d^2}{dt^2}(r\sin\theta)\ \mathbf{j}$$

$$= (\ddot{r} - rw^2)(\cos\theta\ \mathbf{i} + \sin\theta\ \mathbf{j}) + (2\dot{r}w + r\dot{w})(-\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j})$$

以行星为坐标原点建立活动架标，其两个正交的单位向量分别是

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\ \mathbf{i} + \sin\theta\ \mathbf{j}\ ,\ \mathbf{e}_\theta = -$$

由于$2\dot{r}w + r\dot{w} = 0$

因此得出

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - rw^2)\mathbf{e}_r$$

再将椭圆方程 $p = r(1 - e\cos\theta)$

两边微分两次，得 $(\ddot{r} - rw^2)\dfrac{p}{r} + \dfrac{1}{r^3}(r^2 w)^2 = 0$

将前面得到的结果 $r^2 w = \dfrac{2\pi ab}{T}$ 和焦参数 $p = \dfrac{b^2}{a}$

代入，即得 $\ddot{r} - rw^2 = -\dfrac{4\pi^2 a^3}{T^2} \bullet \dfrac{1}{r^2}$

也就是说行星的加速度为

$$\mathbf{a} = -\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \bullet \frac{1}{r^2}\mathbf{e}_r$$

由开普勒第三定律知 a^3 / T^2 为常数。若记 $G = \dfrac{4\pi^2 a^3}{MT^2}$

那么就导出著名的万有引力定律：

$$F = -G\frac{Mm}{r^2}\mathbf{e}_r$$