平衡与稳定性模型

稳定性模型

- 对象仍是动态过程，而建模目的是研究时间充分长以后过程的变化趋势 ——平衡状态是否稳定。

- 不求解微分方程，而是用微分方程稳定性理论研究平衡状态的稳定性。

稳定性模型

1　捕鱼业的持续收获

2　军备竞赛

3　种群的相互竞争

4　种群的相互依存

5　种群的弱肉强食

1　捕鱼业的持续收获

背景

- 再生资源（渔业、林业等）与
  非再生资源（矿业等）
- 再生资源应适度开发——在持续稳产前提下实现最大产量或最佳效益。

问题及分析

- 在捕捞量稳定的条件下，如何控制捕捞使产量最大或效益最佳。
- 如果使捕捞量等于自然增长量，渔场鱼量将保持不变，则捕捞量稳定。

产量模型

$x(t)$ ~ 渔场鱼量

假设

- 无捕捞时鱼的自然增长服从 **Logistic**规律

$$\dot{x}(t) = f(x) = rx(1 - \frac{x}{N})$$

r~固有增长率, ***N***~最大鱼量

- 单位时间捕捞量与渔场鱼量成正比

h*(*x*)=*Ex*, *E~捕捞强度

建模

记 $F(x) = f(x) - h(x)$

捕捞情况下
渔场鱼量满足

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx(1 - \frac{x}{N}) - Ex$$

- 不需要求解***x*(*t*)**, 只需知道***x*(*t*)**稳定的条件

一阶微分方程的平衡点及其稳定性

$\dot{x} = F(x) \quad (1)$　　一阶非线性（自治）方程

$F(x)=0$的根x_0 ~微分方程的平衡点　　$\dot{x}\big|_{x=x_0} = 0 \Rightarrow x \equiv x_0$

设$x(t)$是方程的解，若从x_0某邻域的任一初值出发，都有 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = x_0$，称$x_0$是方程(1)的稳定平衡点

不求$x(t)$, 判断x_0稳定性的方法——直接法

(1)的近似线性方程　　$\dot{x} = F'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$

$$F'(x_0) < 0 \Rightarrow x_0\text{稳定(对(2),(1))}$$

$$F'(x_0) > 0 \Rightarrow x_0\text{不稳定(对(2),(1))}$$

产量模型

$$\dot{x}(t) = F(x) = rx(1-\frac{x}{N}) - Ex$$

$F(x)=0$ ⇒ 平衡点 $x_0 = N(1-\frac{E}{r}),\ \ x_1 = 0$

稳定性判断 $F'(x_0)=E-r,\quad F'(x_1)=r-E$

$E<r \Rightarrow F'(x_0)<0, F'(x_1)>0$ ⇨ x_0稳定, x_1不稳定

$E>r \Rightarrow F'(x_0)>0, F'(x_1)<0$ ⇨ x_0不稳定, x_1稳定

E~捕捞强度 ***r***~固有增长率

$\boldsymbol{x_0}$ **稳定, 可得到稳定产量** $\boldsymbol{x_1}$ **稳定, 渔场干枯**

产量模型

在捕捞量稳定的条件下，
控制捕捞强度使产量最大

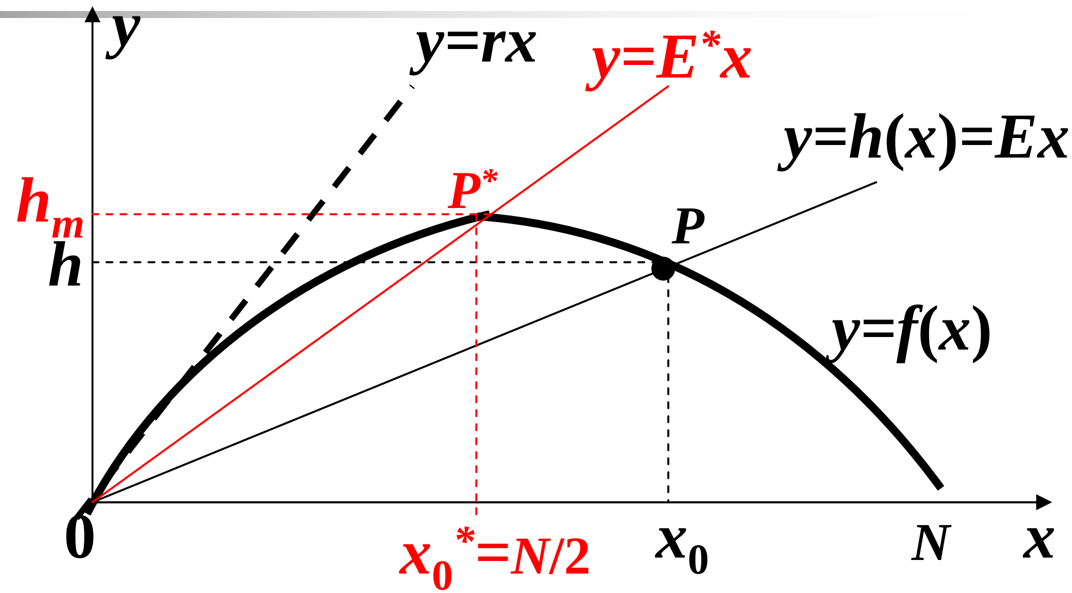
图解法

$$F(x)=f(x)-h(x)$$

$$f(x)=rx\left(1-\frac{x}{N}\right)$$

$$h(x)=Ex$$

$F(x)=0 \Rightarrow$ f 与 h 交点 P



$E<r \Rightarrow x_0$稳定

P的横坐标 x_0~平衡点

P的纵坐标 **h**~产量

产量最大 $P^*(x_0^*=N/2,\ h_m=rN/4)$ $E^*=h_m/x_0^*=r/2$

控制渔场鱼量为最大鱼量的一半

效益模型

在捕捞量稳定的条件下，控制捕捞强度使效益最大.

假设

- 鱼销售价格p
- 单位捕捞强度费用c

收入 $T = ph(x) = pEx$　　　支出 $S = cE$

单位时间利润　$R = T - S = pEx - cE$

稳定平衡点　$x_0 = N(1 - E/r)$

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE\left(1 - \frac{E}{r}\right) - cE$$

求E使$R(E)$最大　$E_R = \frac{r}{2}\left(1 - \frac{c}{pN}\right) < E^* = \frac{r}{2}$

渔场鱼量　$x_R = N\left(1 - \frac{E_R}{r}\right) = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p}$　　$h_R = \frac{rN}{4}\left(1 - \frac{c^2}{p^2N^2}\right)$

捕捞过度

- 封闭式捕捞追求利润 $R(E)$ 最大

$$E_R = \frac{r}{2}(1 - \frac{c}{pN})$$

- 开放式捕捞只求利润 $R(E) > 0$

$$R(E) = T(E) - S(E) = pNE(1 - \frac{E}{r}) - cE \overset{令}{=} 0 \Rightarrow E_s = r(1 - \frac{c}{pN})$$

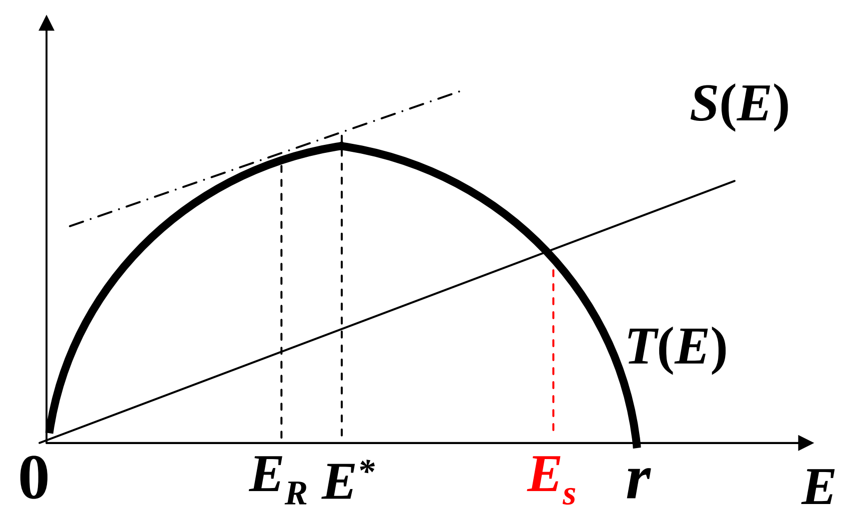
$R(E)=0$ 时的捕捞强度(临界强度) $E_s=2E_R$

临界强度下的渔场鱼量

$$x_s = N(1 - \frac{E_s}{r}) = \frac{c}{p}$$

$$p\uparrow, c\downarrow \Rightarrow E_s\uparrow, x_s\downarrow$$

捕捞过度



Discussion

2　军备竞赛

目的

• 描述双方(国家或国家集团)军备竞赛过程

• 解释(预测)双方军备竞赛的结局

假设

1）由于相互不信任，一方军备越大，另一方军备增加越快；

2）由于经济实力限制，一方军备越大，对自己军备增长的制约越大；

3）由于相互敌视或领土争端，每一方都存在增加军备的潜力。

进一步假设

1）2）的作用为线性；3）的作用为常数

建模

$x(t)$~甲方军备数量，$y(t)$~乙方军备数量

$$\dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g$$

$$\dot{y}(t) = lx - \beta y + h$$

α, β ~ 本方经济实力的制约；

k, l ~ 对方军备数量的刺激；

g, h ~ 本方军备竞赛的潜力。

军备竞赛的结局 ⇨ $t \to \infty$时的$x(t)$，$y(t)$

⇨ 微分方程的平衡点及其稳定性

线性常系数微分方程组 $\begin{cases}\dot{x}(t)=ax+by\\ \dot{y}(t)=cx+dy\end{cases}$ 的平衡点及其稳定性

平衡点$P_0(x_0,y_0)=(0,0)$ ~代数方程 $\begin{cases}ax+by=0\\ cx+dy=0\end{cases}$ 的根

若从P_0某邻域的任一初值出发，都有$\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=x_0$，$\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=y_0$，称$P_0$是微分方程的稳定平衡点

记系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

特征方程 $\det(A-\lambda I)=0$

$$\begin{cases}\lambda^2+p\lambda+q=0\\ p=-(a+d)\\ q=\det A\end{cases}$$

特征根

$$\lambda_{1,2}=(-p\pm\sqrt{p^2-4q})/2$$

线性常系数微分方程组 $\begin{cases}\dot{x}(t)=ax+by\\ \dot{y}(t)=cx+dy\end{cases}$ 的平衡点及其稳定性

平衡点 $P_0(0,0)$ 特征根 $\lambda_{1,2}=(-p\pm\sqrt{p^2-4q})/2$

微分方程一般解形式 $c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}$

$\lambda_{1,2}$为负数或有负实部

$\Updownarrow$

$p>0$ 且 $q>0$ $\Rightarrow$ 平衡点 $P_0(0,0)$稳定

$p<0$ 或 $q<0$ $\Rightarrow$ 平衡点 $P_0(0,0)$不稳定

军备竞赛

模型 $\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases}$

平衡点

$$x_0 = \frac{kh+\beta g}{\alpha\beta - kl}, \qquad y_0 = \frac{lg+\alpha h}{\alpha\beta - kl}$$

稳定性判断

系数矩阵 $A = \begin{bmatrix} -\alpha & k \\ l & -\beta \end{bmatrix}$

$$p = -(-\alpha-\beta) = \alpha+\beta > 0$$

$$q = \det A = \alpha\beta - kl$$

平衡点(x_0, y_0)稳定的条件 $p>0, q>0$

$\Rightarrow$ $\alpha\beta > kl$

模型的定性解释

模型 $\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases}$

平衡点 $x_0 = \dfrac{kh + \beta g}{\alpha\beta - kl}$, $y_0 = \dfrac{lg + \alpha h}{\alpha\beta - kl}$

双方军备稳定(时间充分长后趋向有限值)的条件

$\alpha\beta > kl$

α, β ~ 本方经济实力的制约;

k, l ~ 对方军备数量的刺激;

g, h ~ 本方军备竞赛的潜力。

1) 双方经济制约大于双方军备刺激时，军备竞赛才会稳定，否则军备将无限扩张。

2) 若$g=h=0$, 则 $x_0=y_0=0$, 在 $\alpha\beta > kl$ 下 $x(t), y(t) \to 0$, 即友好邻国通过裁军可达到永久和平。

模型的定性解释

模型 $\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x + ky + g \\ \dot{y}(t) = lx - \beta y + h \end{cases}$

α, β ~ 本方经济实力的制约；

k, l ~ 对方军备数量的刺激；

g, h ~ 本方军备竞赛的潜力。

3）若 **g,h** 不为零，即便双方一时和解，使某时**x(t), y(t)** 很小，但因 $\dot{x} > 0, \dot{y} > 0$，也会重整军备。

4）即使某时一方(由于战败或协议)军备大减, 如 **x(t)=0**，也会因 $\dot{x} = ky + g$ 使该方重整军备，

即存在互不信任($k \neq 0$) 或固有争端($g \neq 0$) 的单方面裁军不会持久。

Discussion

3　种群的相互竞争

- 一个自然环境中有两个种群生存，它们之间的关系：相互竞争；相互依存；弱肉强食。
- 当两个种群为争夺同一食物来源和生存空间相互竞争时，常见的结局是，竞争力弱的灭绝，竞争力强的达到环境容许的最大容量。
- 建立数学模型描述两个种群相互竞争的过程，分析产生这种结局的条件。

模型假设

- 有甲乙两个种群，它们独自生存时数量变化均服从**Logistic**规律;

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1(1-\frac{x_1}{N_1}) \qquad \dot{x}_2(t)=r_2x_2(1-\frac{x_2}{N_2})$$

- 两种群在一起生存时，乙对甲增长的阻滞作用与乙的数量成正比；甲对乙有同样的作用。

模型

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \qquad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1) 的 σ_1 倍。

$\sigma_1>1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙大于甲 ⇨ 乙的竞争力强

模型

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

模型分析

$t\to\infty$时$x_1(t), x_2(t)$的趋向 (平衡点及其稳定性)

(二阶)非线性(自治)方程 $\dot{x}_1(t)=f(x_1,x_2)$, $\dot{x}_2(t)=g(x_1,x_2)$ 的平衡点及其稳定性

平衡点$P_0(x_1^0, x_2^0)$ ~ 代数方程 $f(x_1,x_2)=0$, $g(x_1,x_2)=0$ 的根

若从P_0某邻域的任一初值出发，都有 $\lim_{t\to\infty}x_1(t)=x_1^0$,

$\lim_{t\to\infty}x_2(t)=x_2^0$, 称$P_0$是微分方程的稳定平衡点

判断$P_0(x_1^0,x_2^0)$稳定性的方法——直接法

$$\dot{x}_1(t)=f(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_2(t)=g(x_1,x_2) \quad (1)$$

(1)的近似线性方程

$$\dot{x}_1(t)=f_{x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1-x_1^0)+f_{x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2-x_2^0)$$
$$\dot{x}_2(t)=g_{x_1}(x_1^0,x_2^0)(x_1-x_1^0)+g_{x_2}(x_1^0,x_2^0)(x_2-x_2^0) \quad (2)$$

$$A=\begin{bmatrix} f_{x_1} & f_{x_2} \\ g_{x_1} & g_{x_2} \end{bmatrix}\Bigg|_{P_0}$$

$$\begin{cases} \lambda^2+p\lambda+q=0 \\ p=-(f_{x_1}+g_{x_2})\big|_{P_0} \\ q=\det A \end{cases}$$

$p>0$ 且 $q>0$

平衡点 P_0稳定(对2,1)

$p<0$ 或 $q<0$

平衡点 P_0不稳定(对2,1)

模型

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\begin{cases} f(x_1,x_2)\equiv r_1x_1\left(1-\dfrac{x_1}{N_1}-\sigma_1\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \\ g(x_1,x_2)\equiv r_2x_2\left(1-\sigma_2\dfrac{x_1}{N_1}-\dfrac{x_2}{N_2}\right)=0 \end{cases}$$

平衡点： $P_1(N_1,0),\ P_2(0,N_2),$

$$P_3\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right),P_4(0,0)$$

仅当$\sigma_1,\ \sigma_2<1$或$\sigma_1,\ \sigma_2>1$时，P_3才有意义

平衡点稳定性分析

$$\begin{cases} f(x_1,x_2) \equiv r_1 x_1\left(1-\dfrac{x_1}{N_1}-\sigma_1\dfrac{x_2}{N_2}\right) \\ g(x_1,x_2) \equiv r_2 x_2\left(1-\sigma_2\dfrac{x_1}{N_1}-\dfrac{x_2}{N_2}\right) \end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix} f_{x1} & f_{x2} \\ g_{x1} & g_{x2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_1\left(1-\dfrac{2x_1}{N_1}-\dfrac{\sigma_1 x_2}{N_2}\right) & -\dfrac{r_1\sigma_1 x_1}{N_2} \\ -\dfrac{r_2\sigma_2 x_2}{N_1} & r_2\left(1-\dfrac{\sigma_2 x_1}{N_1}-\dfrac{2x_2}{N_2}\right) \end{bmatrix}$$

$$p=-(f_{x1}+g_{x2})\Big|_{p_i},\quad q=\det A\Big|_{p_i},\quad i=1,2,3,4$$

平衡点 P_i 稳定条件： $p>0$ 且 $q>0$

种群竞争模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$p_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(1-\sigma_2)$	$-r_1r_2(1-\sigma_2)$	$\sigma_2>1$, $\sigma_1<1$
$p_2(0,N_2)$	$-r_1(1-\sigma_1)+r_2$	$-r_1r_2(1-\sigma_1)$	$\sigma_1>1$, $\sigma_2<1$
$p_3\left(\dfrac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\dfrac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\dfrac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\dfrac{r_1r_2(1-\sigma_1)(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1$, $\sigma_2<1$
$p_4(0,0)$	$-(r_1+r_2)$	r_1r_2	不稳定

P_1, P_2 是一个种群存活而另一灭绝的平衡点

P_3 是两种群共存的平衡点

P_1稳定的条件 $\sigma_1<1$?

平衡点稳定性的相轨线分析

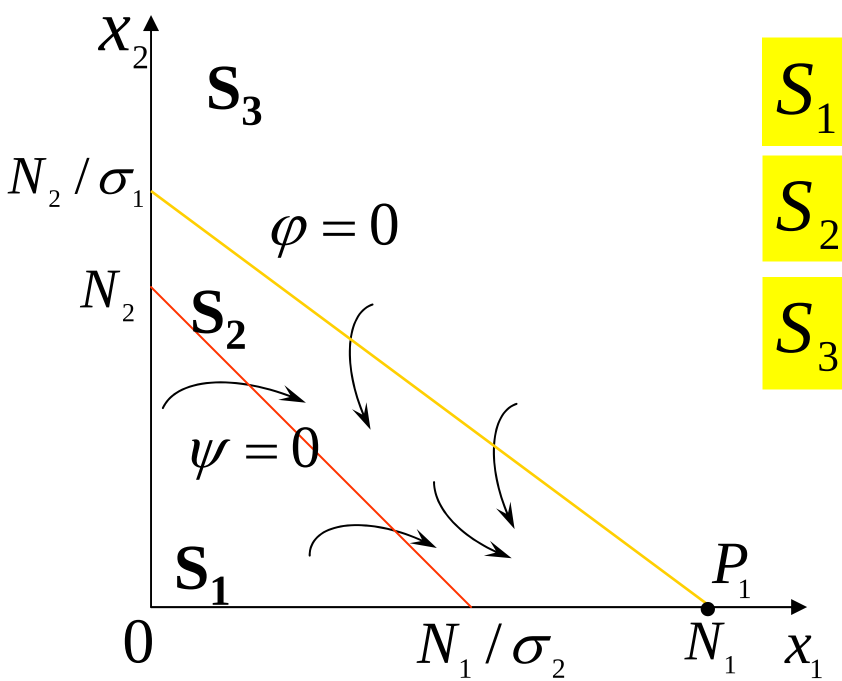
$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$\varphi(x_1, x_2) = 1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}$$

$$\psi(x_1, x_2) = 1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}$$

(1) $\sigma_2 > 1$, $\sigma_1 < 1$



$S_1: \varphi > 0, \psi > 0$

$S_1: \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 > 0$ → $t\uparrow \to x_1, x_2\uparrow$

$S_2: \dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 < 0$ → $t\uparrow \to x_1\uparrow, x_2\downarrow$

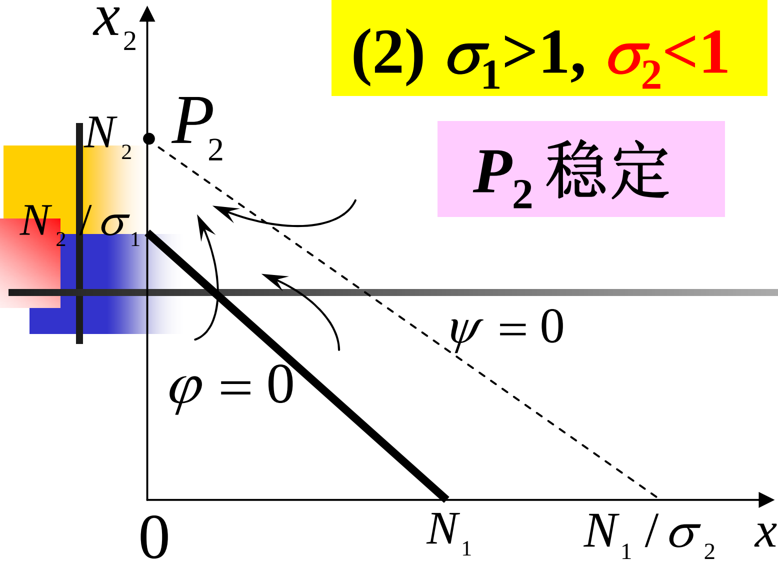
$S_3: \dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 < 0$ → $t\uparrow \to x_1, x_2\downarrow$

从任意点出发(t=0)的相轨线都趋向$P_1(N_1,0)$ ($t\to\infty$)

$P_1(N_1,0)$是稳定平衡点

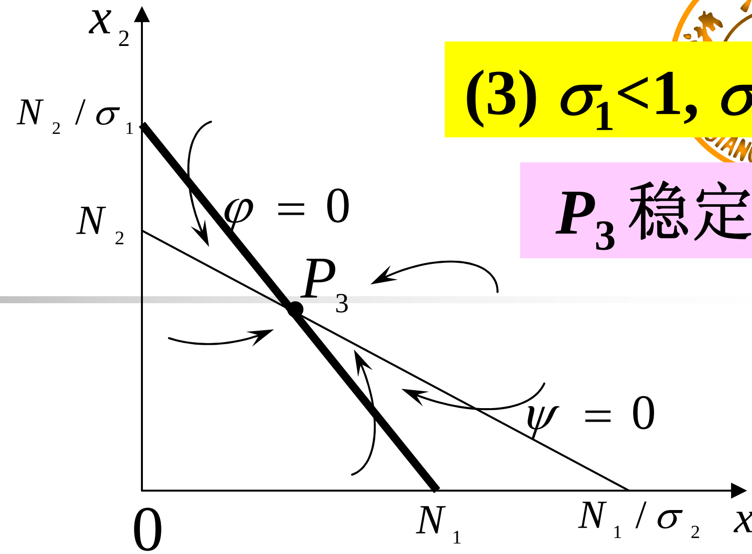
(2) $\sigma_1>1$, $\sigma_2<1$

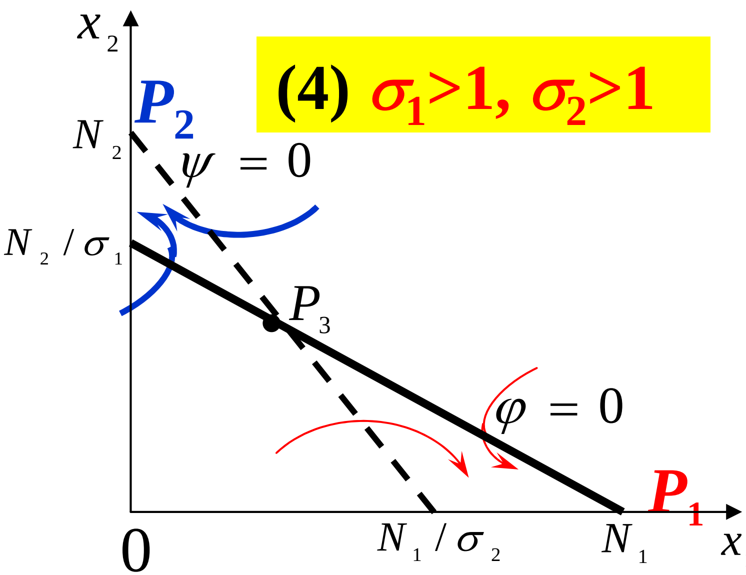
P_2稳定



(3) $\sigma_1<1$, $\sigma_2<1$

P_3稳定





(4) $\sigma_1>1$, $\sigma_2>1$

有相轨线趋向P_1

有相轨线趋向P_2

⇨ P_1, P_2都不(局部)稳定

P_1稳定的条件：直接法$\sigma_2>1$

加上与(4)相区别的 $\sigma_1<1$

⇨ P_1全局稳定

结果解释

- P_1稳定的条件：$\sigma_1<1, \sigma_2>1$

对于消耗甲的资源而言，乙(相对于N_2)是甲(相对于N_1)的σ_1倍。

$\sigma_1<1$ ⇨ 对甲增长的阻滞作用，乙小于甲 ⇒乙的竞争力弱

$\sigma_2>1 \Rightarrow$甲的竞争力强

甲达到最大容量，乙灭绝

- P_2稳定的条件：$\sigma_1>1, \sigma_2<1$

- P_3稳定的条件：$\sigma_1<1, \sigma_2<1$

通常$\sigma_1 \approx 1/\sigma_2$，$P_3$稳定条件不满足

Discussion

4　种群的相互依存

甲乙两种群的相互依存有三种形式

1) 甲可以独自生存，乙不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

2) 甲乙均可以独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

3) 甲乙均不能独自生存；甲乙一起生存时相互提供食物、促进增长。

模型假设

• 甲可以独自生存，数量变化服从**Logistic**规律；甲乙一起生存时乙为甲提供食物、促进增长。

• 乙不能独自生存；甲乙一起生存时甲为乙提供食物、促进增长；乙的增长又受到本身的阻滞作用 (服从**Logistic**规律)。

模型

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2} \right)$$

乙为甲提供食物是甲消耗的σ_1倍

$$\dot{x}_2(t) = r_2 x_2 \left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2} \right)$$

甲为乙提供食物是乙消耗的σ_2倍

种群依存模型的平衡点及稳定性

平衡点	p	q	稳定条件
$P_1(N_1,0)$	$r_1-r_2(\sigma_2-1)$	$-r_1r_2(\sigma_2-1)$	$\sigma_2<1,\sigma_1\sigma_2<1$
$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$	$\frac{r_1(1-\sigma_1)+r_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\frac{r_1r_2(1-\sigma_1)(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}$	$\sigma_1<1,\sigma_2>1,$ $\sigma_1\sigma_2<1$
$P_3(0,0)$	$-r_1+r_2$	$-r_1r_2$	不稳定

P_2是甲乙相互依存而共生的平衡点

平衡点P_2稳定性的相轨线

$$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$$

$$\dot{x}_1(t_1)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)=r_1x_1\varphi(x_1,x_2)$$

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)=r_2x_2\psi(x_1,x_2)$$

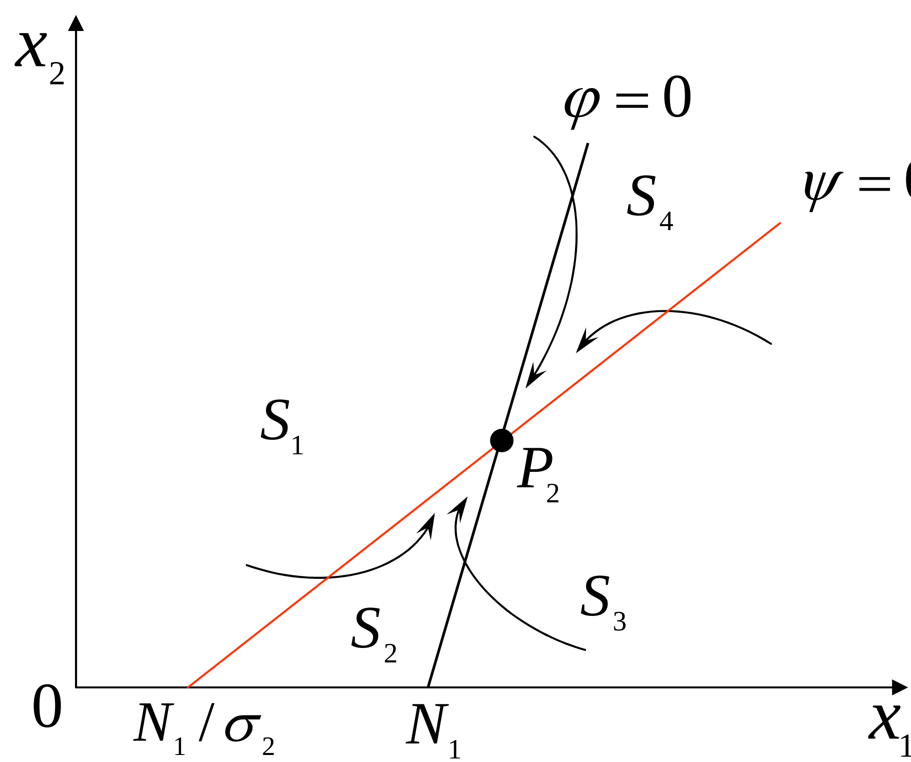
$\sigma_1<1,\ \sigma_2>1,\ \sigma_1\sigma_2<1$

$S_1:\dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2<0;$

$S_2:\dot{x}_1>0,\ \dot{x}_2>0;$

$S_3:\dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2>0;$

$S_4:\dot{x}_1<0,\ \dot{x}_2<0.$



P_2稳定

结果解释

甲可以独自生存

$$\dot{x}_1(t_1)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}+\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right)$$

乙不能独立生存

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

$$P_2\left(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(\sigma_2-1)}{1-\sigma_1\sigma_2}\right)$$

P_2稳定条件：
$\sigma_1<1,\ \sigma_2>1,\ \sigma_1\sigma_2<1$

$\sigma_2>1$ ~ 甲必须为乙提供足够的食物——甲为乙提供的食物是乙消耗的 σ_2 倍

$\sigma_1\sigma_2<1$ ~ $\sigma_2>1$ 前提下P_2存在的必要条件

$\sigma_1<1$ ~ $\sigma_2>1,\ \sigma_1\sigma_2<1$ 的需要，且σ_1必须足够小，才能在$\sigma_2>1$条件下使$\sigma_1\sigma_2<1$ 成立

Discussion

5　种群的弱肉强食 (食饵-捕食者模型)

- 种群甲靠丰富的天然资源生存，种群乙靠捕食甲为生，形成食饵-捕食者系统，如食用鱼和鲨鱼，美洲兔和山猫，害虫和益虫。

- 模型的历史背景——一次世界大战期间地中海渔业的捕捞量下降(食用鱼和鲨鱼同时捕捞)，但是其中鲨鱼的比例却增加，为什么？

食饵-捕食者模型(Volterra)

食饵（甲）数量 $x(t)$, 捕食者（乙）数量 $y(t)$

甲独立生存的增长率 r $\qquad \dot{x} = rx$

乙使甲的增长率减小，减小量与 y 成正比

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x = rx - axy \quad (1)$$

乙独立生存的死亡率 d $\qquad \dot{y} = -dy$

甲使乙的死亡率减小，减小量与 x 成正比

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y = -dy + bxy \quad (2)$$

a ~捕食者掠取食饵能力 $\qquad$ b ~食饵供养捕食者能力

方程(1),(2) 无解析解

Volterra模型的平衡点及其稳定性

$$\dot{x}(t)=(r-ay)x=rx-axy$$

稳定性分析

$$\dot{y}(t)=-(d-bx)y=-dy+bxy$$

$$A=\begin{bmatrix} r-ax & -ax \\ by & -d+bx \end{bmatrix}$$

平衡点 $P(d/b, r/a)$, $P'(0,0)$

$$A|_P=\begin{bmatrix} 0 & -ad/b \\ br/a & 0 \end{bmatrix}$$

$p=0$, $q>0$

P: 临界状态

$$A|_{P'}=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix}$$

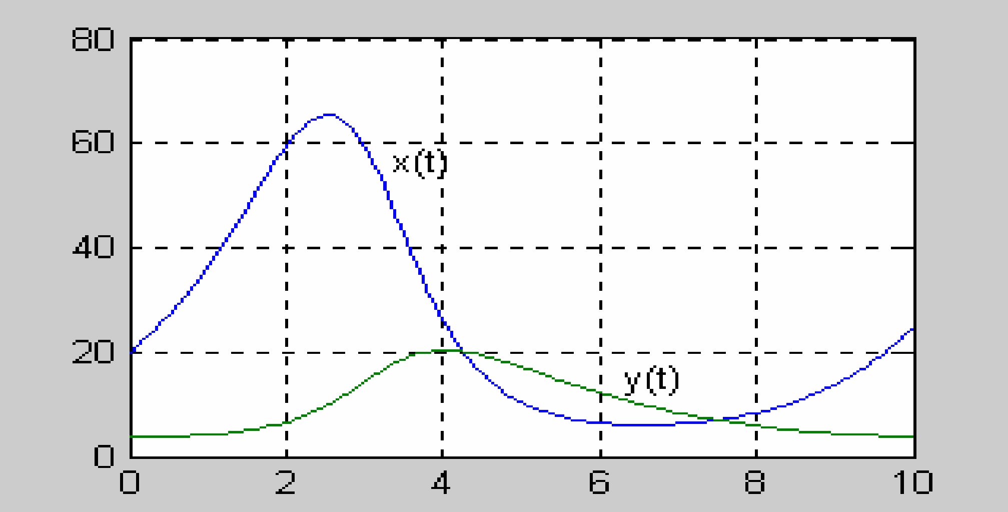
$q<0$

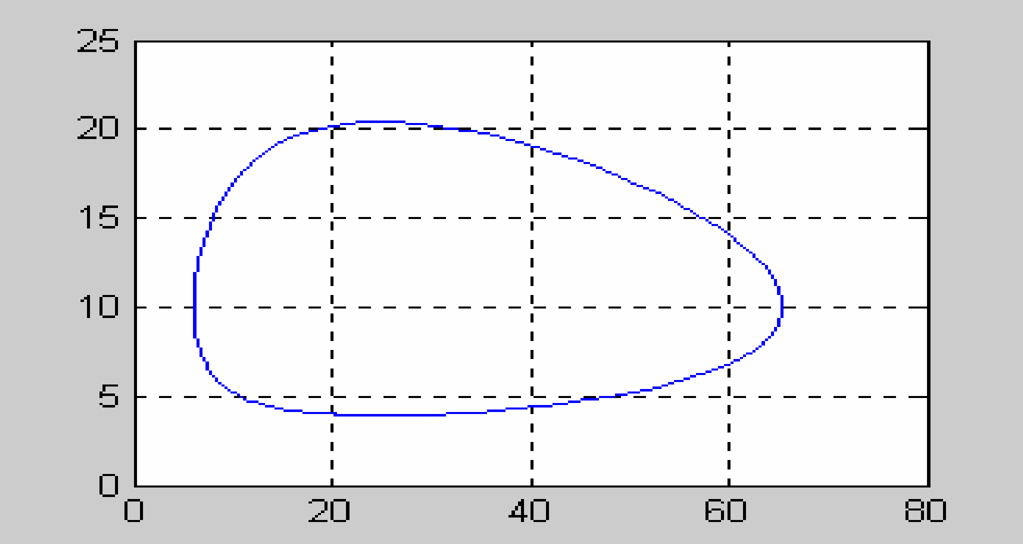
P' 不稳定

P点稳定性不能用近似线性方程分析

用数学软件MATLAB求微分方程数值解

t	*x*(*t*)	*y*(*t*)
0	20.0000	4.0000
0.1000	21.2406	3.9651
0.2000	22.5649	3.9405
0.3000	23.9763	3.9269
…	…	…
5.1000	9.6162	16.7235
5.2000	9.0173	16.2064
…	…	…
9.5000	18.4750	4.0447
9.6000	19.6136	3.9968
9.7000	20.8311	3.9587





x~*y* 平面上的相轨线

食饵-捕食者模型(Volterra)

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x \qquad \dot{y}(t) = -(d - bx)y$$

计算结果（数值，图形）

⇩ 观察，猜测

$x(t), y(t)$是周期函数，相图(x,y)是封闭曲线

$x(t), y(t)$的周期约为9.6

$x_{max} \approx 65.5, \ x_{min} \approx 6, \ y_{max} \approx 20.5, \ y_{min} \approx 3.9$

用数值积分可算出 **$x(t), y(t)$**一周期的平均值：

$x(t)$的平均值约为25，$y(t)$的平均值约为10。

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$
$$\dot{y}(t) = (-d + bx)y$$

消去**dt** $\Rightarrow$ $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x(r-ay)}{y(-d+bx)}$

$$\Rightarrow \quad \frac{-d + bx}{x} dx = \frac{r - ay}{y} dy$$

$$\Rightarrow \quad -d \ln x + bx = r \ln y - ay + c_1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c}$$

取指数

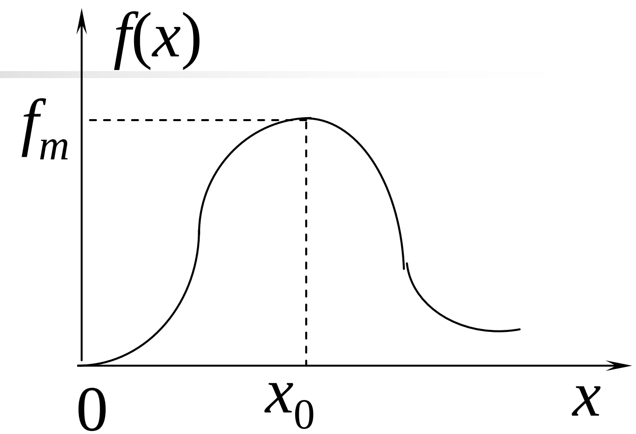
c 由初始条件确定

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

$$(x^d e^{-bx})(y^r e^{-ay}) = c$$

$f(x)$　　$g(y)$

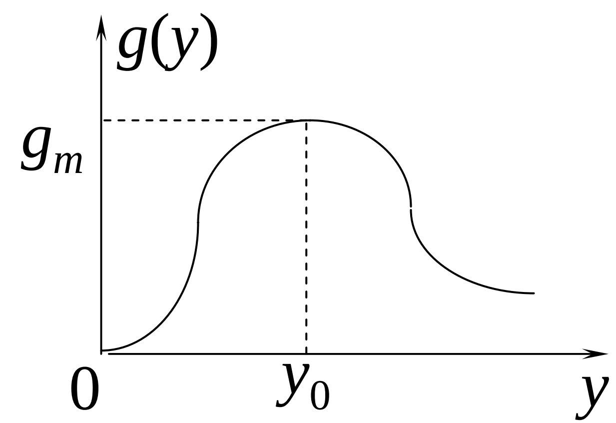
相轨线　$f(x)g(y) = c$



在相平面上讨论相轨线的图形

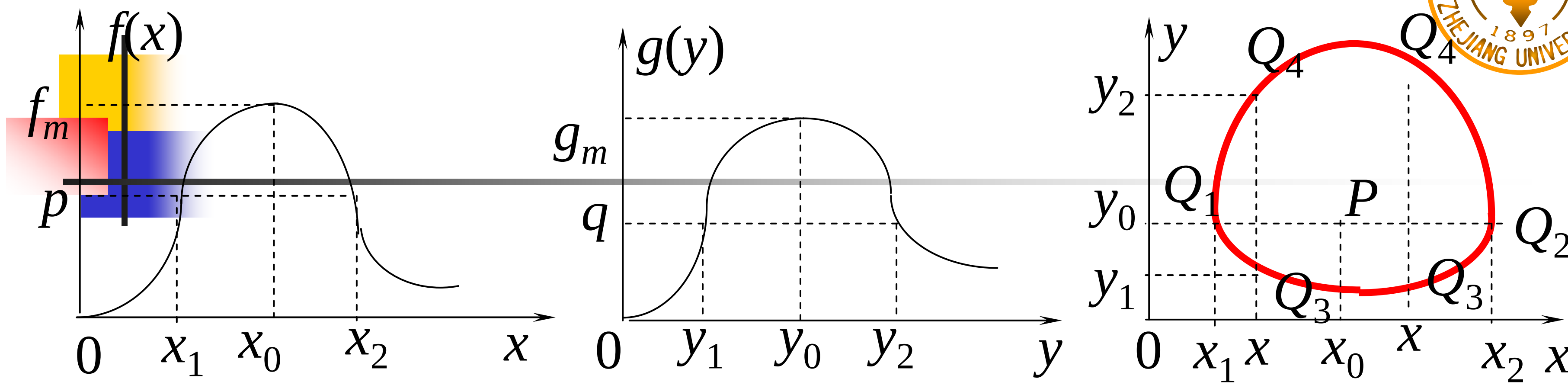
$$f(0) = f(\infty) = 0,\ \ f(x_0) = f_m,\ x_0 = d/b$$

$$g(0) = g(\infty) = 0,\ \ g(y_0) = g_m,\ y_0 = r/a$$



$c > f_m g_m$ 时无相轨线　　以下设 $c \le f_m g_m$

相轨线 $f(x)g(y)=c$



$c=f_m g_m$ ⇨ $x=x_0, y=y_0$ ⇨ 相轨线退化为**P**点 **P~中心**

$c<f_m g_m$ ⇨ 设$c=pg_m$ 令$y=y_0$ ⇨ $g(y)=g_m$ $f(x)=p<f_m$

⇨ 存在$x_1<x_0<x_2$, 使$f(x_1)=f(x_2)=p$ ⇨ **$Q_1(x_1,y_0), Q_2(x_2,y_0)$**

考察$x\in[x_1,x_2]$ $f(x)g(y)=pg_m$ $f(x)>p$ $g(y)=q<g_m$

⇨ 存在$y_1<y_0<y_2$,使$g(y_1)=g(y_2)=q$ ⇨ **$Q_3(x,y_1), Q_4(x,y_2)$**

x是$[x_1,x_2]$内任意点 ⇨ **相轨线是封闭曲线族**

用相轨线分析 $P(d/b, r/a)$ 点稳定性

相轨线是封闭曲线 $\Leftrightarrow$ $x(t), y(t)$是周期函数(周期记 T)

求$x(t), y(t)$ 在一周期的平均值 $\bar{x}, \bar{y}$

$$\dot{y}(t) = (-d + bx)y$$

$$x(t) = \frac{1}{b}\left(\frac{\dot{y}}{y} + d\right)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{b}\left(\frac{\dot{y}}{y} + d\right)dt$$

$$= \frac{1}{T}\left(\frac{\ln y(T) - \ln y(0)}{b} + \frac{dT}{b}\right)$$

$\Rightarrow$ $\bar{x} = d/b$

$\dot{x}(t) = (r - ay)x$ $\Rightarrow$ ······ $\Rightarrow$ $\bar{y} = r/a$

轨线中心 $P(x_0, y_0): x_0 = d/b, y_0 = r/a$ $\Rightarrow$ $\bar{x} = x_0, \bar{y} = y_0$

模型解释

$$\dot{x}(t) = (r - ay)x$$

$$\dot{y}(t) = -(d - bx)y$$

初值 $P_0(x_0', y_0')$

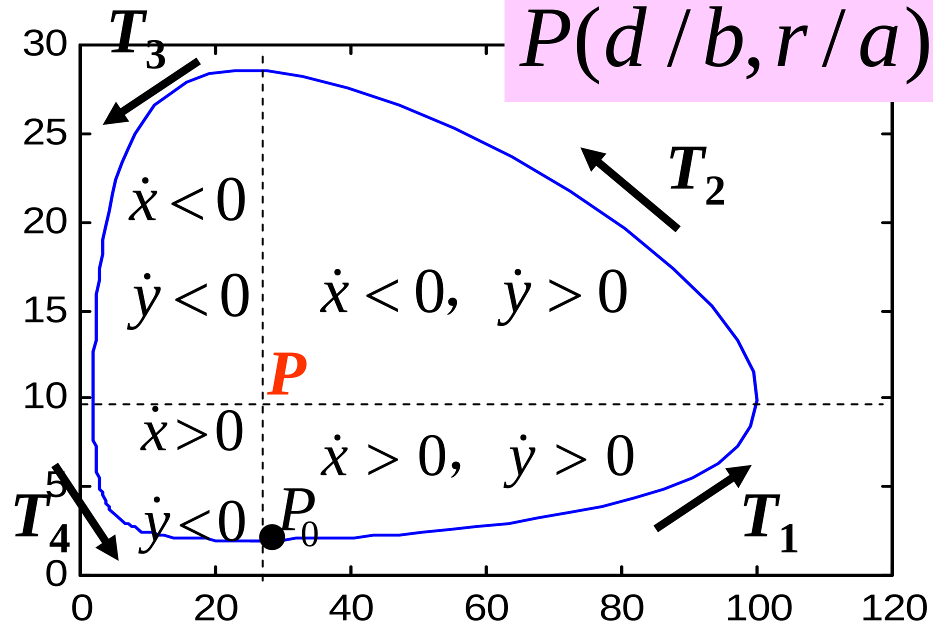
相轨线的方向

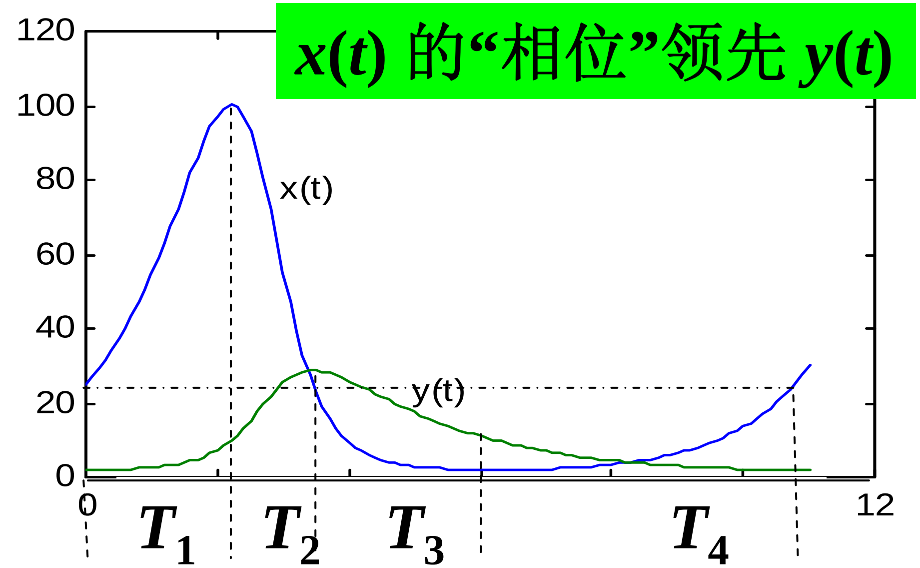
$T_1: x(t)\uparrow\ y(t)\uparrow$

$T_2: x(t)\downarrow\ y(t)\uparrow$

$T_3: x(t)\downarrow\ y(t)\downarrow$

$T_4: x(t)\uparrow\ y(t)\downarrow$



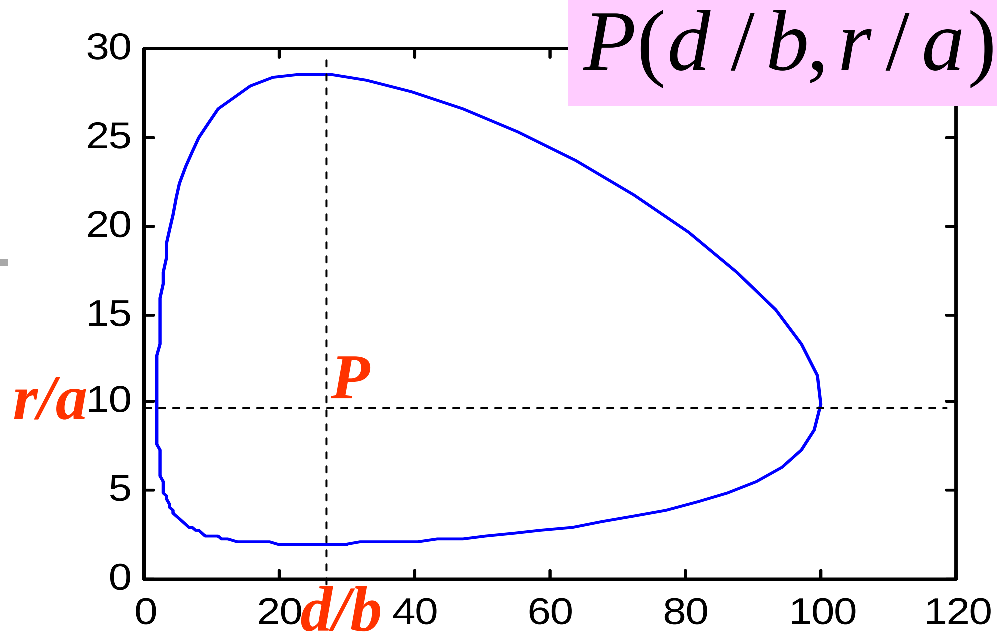


模型解释

捕食者数量 $\bar{y} = \dfrac{r}{a}$

r ~食饵增长率

a ~捕食者掠取食饵能力



捕食者数量与***r***成正比，与***a***成反比

食饵数量 $\bar{x} = \dfrac{d}{b}$

d ~捕食者死亡率

b ~食饵供养捕食者能力

食饵数量与***d***成正比，与***b***成反比

模型解释 一次大战期间地中海渔业的捕捞量下降，但是其中鲨鱼的比例却在增加，为什么？

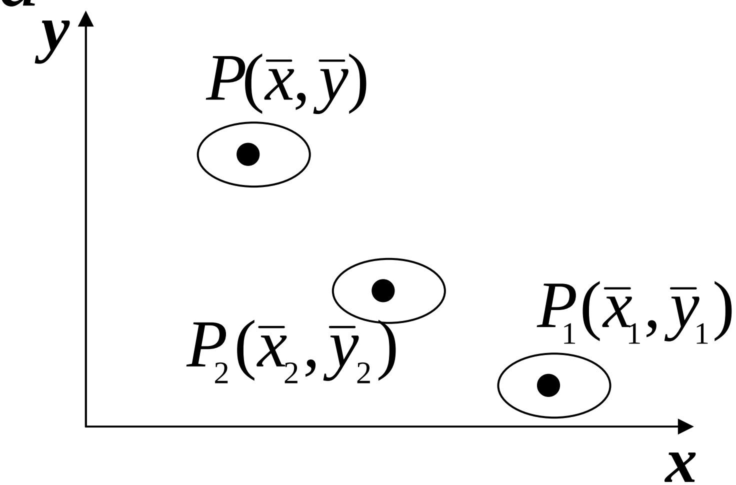
自然环境 $P(\bar{x},\bar{y})$ $\bar{x}=d/b, \bar{y}=r/a$

捕捞 $\boldsymbol{r \to r-\varepsilon_1, d \to d+\varepsilon_1}$

$\Rightarrow$ $\bar{x}_1 > \bar{x}, \ \bar{y}_1 < \bar{y}$ $\quad P \to P_1$

战时捕捞 $\boldsymbol{r \to r-\varepsilon_2, d \to d+\varepsilon_2, \ \varepsilon_2 < \varepsilon_1}$

$\Rightarrow$ $\bar{x}_2 < \bar{x}_1, \ \bar{y}_2 > \bar{y}_1$ $\quad P_1 \to P_2$



食饵(鱼)减少，
捕食者(鲨鱼)增加

$P \to P_1$ 还表明：对害虫(食饵)—益虫(捕食者)系统，使用灭两种虫的杀虫剂，会使害虫增加，益虫减少。

食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

多数食饵—捕食者系统观察不到周期震荡，而是趋向某个平衡状态，即存在稳定平衡点

Volterra模型 $\dot{x}(t)=(r-ay)x \quad \dot{y}(t)=-(d-bx)y$

改写

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}\right)$$

加Logistic项

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1\left(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t)=r_2x_2\left(-1+\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right)$$

有稳定平衡点

食饵-捕食者模型(Volterra)的缺点与改进

- 相轨线是封闭曲线，结构不稳定——一旦离开某一条闭轨线，就进入另一条闭轨线，不恢复原状。

- 自然界存在的周期性平衡生态系统是结构稳定的，即偏离周期轨道后，内部制约使系统恢复原状。

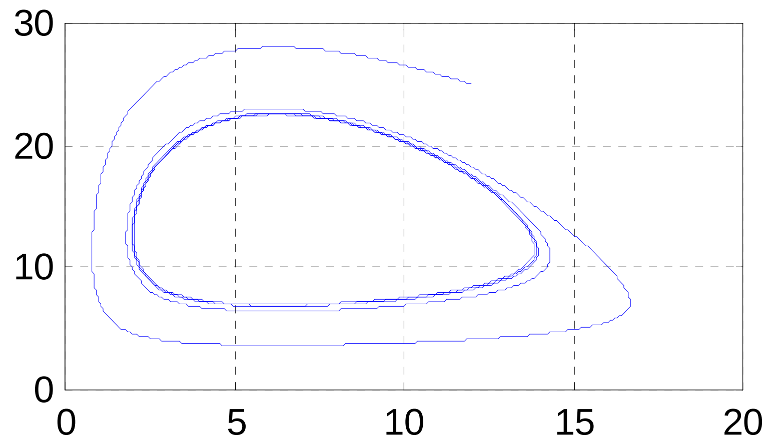
$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{1+wx_1}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{1+wx_1}\right)$$

$r_1=1$, $N_1=20$, $\sigma_1=0.1$,

$w=0.2$, $r_2=0.5$, $\sigma_2=0.18$

相轨线趋向极限环

⇨ **结构稳定**



两种群模型的几种形式

相互竞争

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(1 - \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

相互依存

$$\dot{x}_1(t_1) = r_1 x_1\left(\pm 1 - \frac{x_1}{N_1} + \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(\pm 1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

弱肉强食

$$\dot{x}_1(t) = r_1 x_1\left(1 - \frac{x_1}{N_1} - \sigma_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \quad \dot{x}_2(t) = r_2 x_2\left(-1 + \sigma_2 \frac{x_1}{N_1} - \frac{x_2}{N_2}\right)$$

Discussion