



概率模型



概率模型

1 传送系统的效率

2 报童的诀窍

3 随机存贮策略

4 轧钢中的浪费

5 随机人口模型



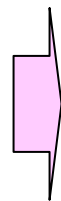
随机模型

确定性因素和随机性因素

随机因素可以忽略

随机因素影响可以简单地以平均值的作用出现

随机因素影响必须考虑



确定性模型

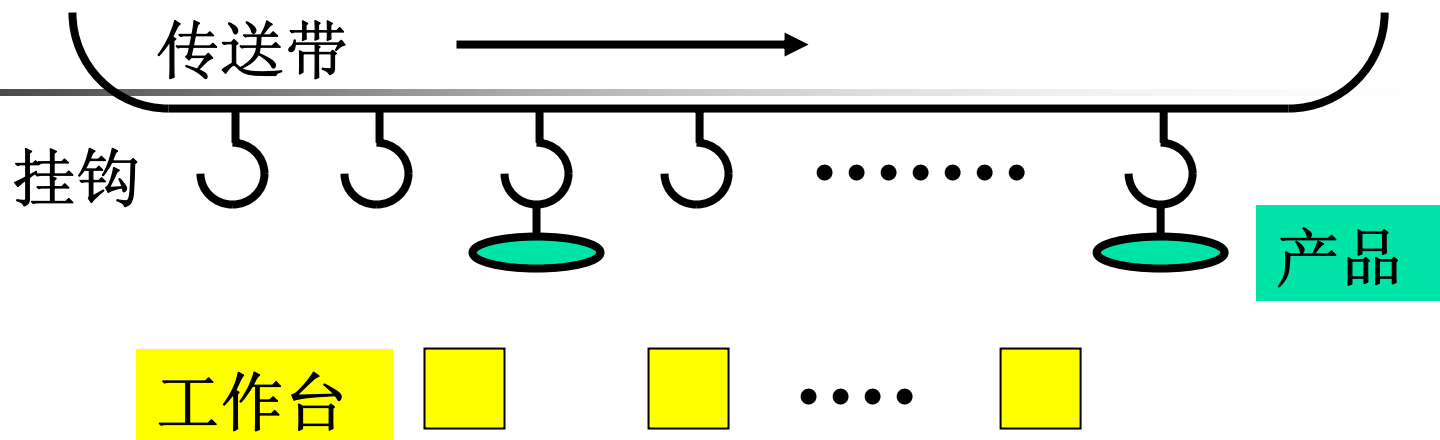


随机性模型



1 传送系统的效率

背景



工人将生产出的产品挂在经过他上方的空钩上运走，若工作台数固定，挂钩数量越多，传送带运走的产品越多。

在生产进入稳态后，给出衡量传送带效率的指标，研究提高**传送带效率**的途径

问题分析



- 进入稳态后为保证生产系统的周期性运转，应假定工人们**生产周期相同**，即每人作完一件产品后，要么恰有空钩经过他的工作台，使他可将产品挂上运走，要么没有空钩经过，迫使他放下这件产品并立即投入下件产品的生产。
- 可以用一个周期内传送带运走的产品数占产品总数的**比例**，作为衡量传送带效率的数量指标。
- 工人们生产周期虽然相同，但稳态下每人生产完一件产品的时刻不会一致，可以认为是随机的，并且在一个周期内**任一时刻的可能性相同**。



模型假设

- 1) n 个工作台均匀排列, n 个工人生产相互独立, 生产周期是常数;
- 2) 生产进入稳态, 每人生产完一件产品的时刻在一个周期内是等可能的;
- 3) 一周期内 m 个均匀排列的挂钩通过每一工作台的上方, 到达第一个工作台的挂钩都是空的;
- 4) 每人在生产完一件产品时都能且只能触到一只挂钩, 若这只挂钩是空的, 则可将产品挂上运走; 若该钩非空, 则这件产品被放下, 退出运送系统。



模型建立

- 定义**传送带效率**为一周期内运走的产品数（记作 s ，待定）与生产总数 n （已知）之比，记作 $D=s/n$
- 为确定 s ，从**工人**考虑还是从**挂钩**考虑，哪个方便？
- 若求出一周期内每只挂钩非空的概率 p ，则 $s=mp$

如何求概率

设每只挂钩为空的概率为 q ，则 $p=1-q$

设每只挂钩不被一工人触到的概率为 r ，则 $q=r^n$

设每只挂钩被一工人触到的概率为 u ，则 $r=1-u$

一周期内有 m 个挂钩通过每一工作台的上方

$$u=1/m \quad \Rightarrow \quad p=1-(1-1/m)^n \quad \Rightarrow \quad D=m[1-(1-1/m)^n]/n$$



模型解释

传送带效率(一周期内运走产品数与生产总数之比)

$$D = \frac{m}{n} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{m} \right)^n \right]$$

若(一周期运行的)挂钩数 m 远大于工作台数 n , 则

$$D \approx \frac{m}{n} \left[1 - \left(1 - \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{2m^2} \right) \right] = 1 - \frac{n-1}{2m}$$

定义 **$E=1-D$** (一周期内未运走产品数与生产总数之比)

当 n 远大于1时, **$E \approx n/2m$** ~ E 与 n 成正比, 与 m 成反比

若 $n=10, m=40$,
 $D \approx 87.5\%$ (89.4%)

提高效率
的途径：

- 增加 m
- 习题1



2 报童的诀窍

报童售报: a (零售价) $> b$ (购进价) $> c$ (退回价)

问题

售出一份赚 $a-b$; 退回一份赔 $b-c$

每天购进多少份可使收入最大?

分析

购进太多 \rightarrow 卖不完退回 \rightarrow 赔钱

购进太少 \rightarrow 不够销售 \rightarrow 赚钱少

存在一个合适的购进量

应根据需求确定购进量

每天需求量是随机的

每天收入是随机的

优化问题的目标函数应是长期的日平均收入

等于每天收入的期望



准备

调查需求量的随机规律——每天需求量为 r 的概率 $f(r)$, $r=0,1,2,\dots$

建模

- 设每天购进 n 份，日平均收入为 $G(n)$

- 已知售出一份赚 $a-b$ ；退回一份赔 $b-c$

$r \leq n \Rightarrow$ 售出 $r \Rightarrow$ 赚 $(a-b)r$

\Rightarrow 退回 $n-r \Rightarrow$ 赔 $(b-c)(n-r)$

$r > n \Rightarrow$ 售出 $n \Rightarrow$ 赚 $(a-b)n$

$$G(n) = \sum_{r=0}^n [(a-b)r - (b-c)(n-r)]f(r) + \sum_{r=n+1}^{\infty} (a-b)n f(r)$$

求 n 使 $G(n)$ 最大



求解

将 r 视为连续变量

$f(r) \Rightarrow p(r)$ (概率密度)

$$G(n) = \int_0^n [(a-b)r - (b-c)(n-r)]p(r)dr + \int_n^\infty (a-b)np(r)dr$$

$$\frac{dG}{dn} = (a-b)np(n) - \int_0^n (b-c)p(r)dr$$

$$- (a-b)np(n) + \int_n^\infty (a-b)p(r)dr$$

$$= -(b-c) \int_0^n p(r)dr + (a-b) \int_n^\infty p(r)dr$$

$$\frac{dG}{dn} = 0$$



$$\frac{\int_0^n p(r)dr}{\int_n^\infty p(r)dr} = \frac{a-b}{b-c}$$



结果解释

$$\frac{\int_0^n p(r) dr}{\int_n^\infty p(r) dr} = \frac{a - b}{b - c}$$

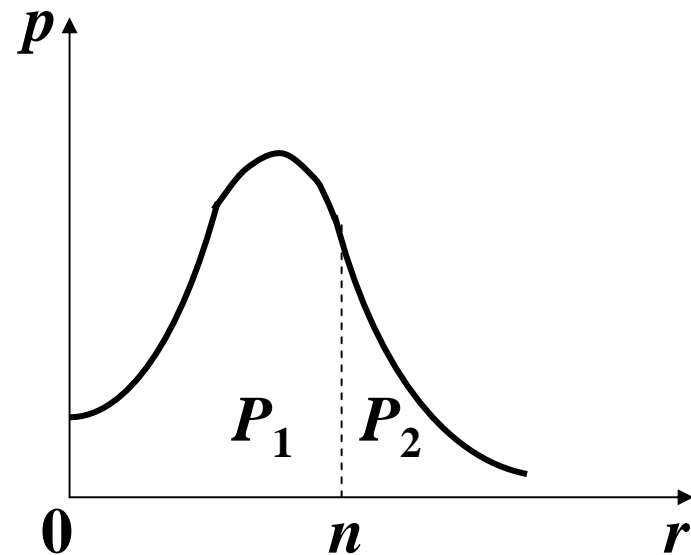
$$\int_0^n p(r) dr = P_1, \int_n^\infty p(r) dr = P_2$$

取 n 使

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a - b}{b - c}$$

$a-b$ ~ 售出一份赚的钱

$b-c$ ~ 退回一份赔的钱



$$(a-b) \uparrow \Rightarrow n \uparrow, \quad (b-c) \uparrow \Rightarrow n \downarrow$$



3 随机存贮策略

问题

以周为时间单位；一周的商品销售量为随机；周末根据库存决定是否订货，供下周销售。

(s, S) 存贮策略

制订下界 s ，上界 S ，当周末库存小于 s 时订货，使下周初的库存达到 S ；否则，不订货。

考虑订货费、存贮费、缺货费、购进费，制订 (s, S) 存贮策略，使(平均意义下)总费用最小



模型假设

- 每次订货费 c_0 , 每件商品购进价 c_1 , 每件商品一周贮存费 c_2 , 每件商品缺货损失费 c_3 ($c_1 < c_3$)
- 每周销售量 r 随机、连续, 概率密度 $p(r)$
- 周末库存量 x , 订货量 u , 周初库存量 $x+u$
- 每周贮存量按 $x+u-r$ 计



建模与求解

(s, S) 存贮策略

$$x \geq s \Rightarrow u = 0 \quad x < s \Rightarrow u > 0, x + u = S$$

确定 (s, S) , 使目标函数——每周总费用的平均值最小

$s \sim$ 订货点, $S \sim$ 订货值

订货费 c_0 , 购进价 c_1 , 贮存费 c_2 , 缺货费 c_3 , 销售量 r

平均
费用

$$J(u) = \begin{cases} c_0 + c_1 u + L(x + u), & u > 0 \\ L(x) & u = 0 \end{cases}$$

$$L(x) = c_2 \int_0^x (x - r) p(r) dr + c_3 \int_x^\infty (r - x) p(r) dr$$

建模与求解

$$J(u) = \begin{cases} c_0 + c_1 u + L(x+u), & u > 0 \\ L(x) & u = 0 \end{cases}$$

1) 设 $x < s$, 求 u 使 $J(u)$ 最小, 确定 S

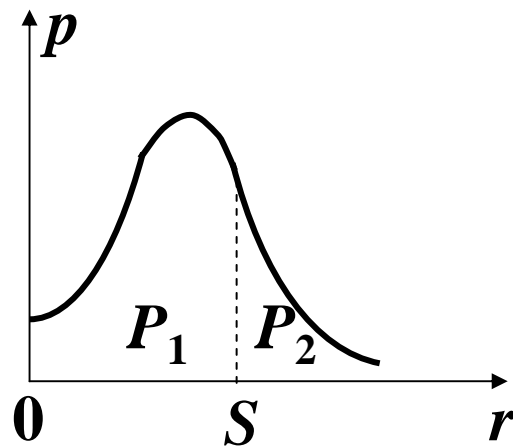
$$-L(x) = c_2 \int_0^x (x-r)p(r)dr + c_3 \int_x^\infty (r-x)p(r)dr$$

$$\frac{dJ}{du} = c_1 + c_2 \int_0^{x+u} p(r)dr - c_3 \int_{x+u}^\infty p(r)dr$$

$$\begin{aligned} x+u &= S \\ \int_0^\infty p(r)dr &= 1 \end{aligned} \Rightarrow (c_1 + c_2) \int_0^S p(r)dr - (c_3 - c_1) \int_S^\infty p(r)dr$$

$$\frac{dJ}{du} = 0 \Rightarrow \frac{\int_0^S p(r)dr}{\int_S^\infty p(r)dr} = \frac{c_3 - c_1}{c_2 + c_1} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$c_3 \uparrow \Rightarrow S \uparrow, \quad c_2 \uparrow \Rightarrow S \downarrow$$



建模与求解

2) 对库存 x ,
确定订货点 s

$$J(u) = \begin{cases} c_0 + c_1 u + L(x + u), & u > 0 \\ L(x) & u = 0 \end{cases}$$

$$L(x) = c_2 \int_0^x (x-r)p(r)dr + c_3 \int_x^\infty (r-x)p(r)dr$$

若订货 u , $u+x=S$, 总费用为 $J_1 = c_0 + c_1(S-x) + L(S)$

若不订货, $u=0$, 总费用为 $J_2 = L(x)$

$$J_2 \leq J_1 \quad \Leftrightarrow \quad L(x) \leq c_0 + c_1(S-x) + L(S)$$

\Downarrow
不订货

$$\Downarrow$$
$$c_1 x + L(x) \leq c_0 + c_1 S + L(S)$$

记 $c_1 x + L(x) = I(x)$

$$\Downarrow$$
$$I(x) \leq c_0 + I(S)$$

订货点 s 是 $I(x) = c_0 + I(S)$ 的最小正根



建模与求解

$I(x) = c_0 + I(S)$ 最小正根的图解法

$$J(u) = \begin{cases} c_0 + c_1 u + L(x + u), & u > 0 \\ L(x) & u = 0 \end{cases}$$

$$I(x) = c_1 x + L(x)$$

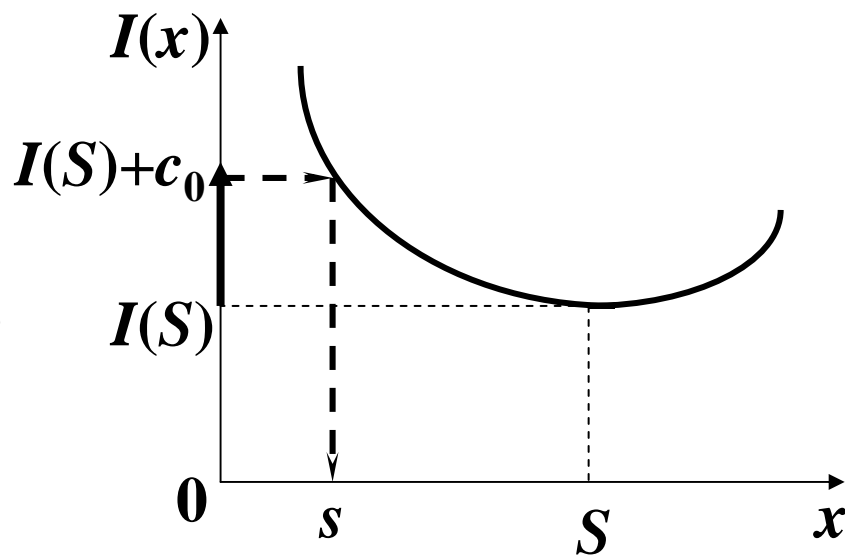
$$L(x) = c_2 \int_0^x (x-r)p(r)dr + c_3 \int_x^\infty (r-x)p(r)dr$$

$J(u)$ 在 $u+x=S$ 处达到最小

$J(u)$ 与 $I(x)$ 相似 \Downarrow

$I(x)$ 在 $x=S$ 处达到最小值 $I(S)$

$I(x)$ 图形 $\Rightarrow I(S)$



$\Rightarrow I(x) = c_0 + I(S)$ 的最小正根 s



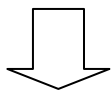
4 轧钢中的浪费

背景

- 轧制钢材 两道工序
- 粗轧(热轧) ~ 形成钢材的雏形
 - 精轧(冷轧) ~ 得到钢材规定的长度

随机因素影响

粗轧

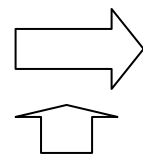


钢材长度正态分布

均值可以调整

方差由设备精度确定

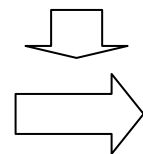
粗轧钢材长度大于规定



切掉多余部分

精轧

粗轧钢材长度小于规定



整根报废

问题： 如何调整粗轧的均值，使精轧的浪费最小

分析

设已知精轧后钢材的规定长度为 l ,
粗轧后钢材长度的均方差为 σ

记粗轧时可以调整的均值为 m , 则粗轧得到的
钢材长度为正态随机变量, 记作 $x \sim N(m, \sigma^2)$

$$P = P(x \geq l) \quad P' = P(x < l)$$

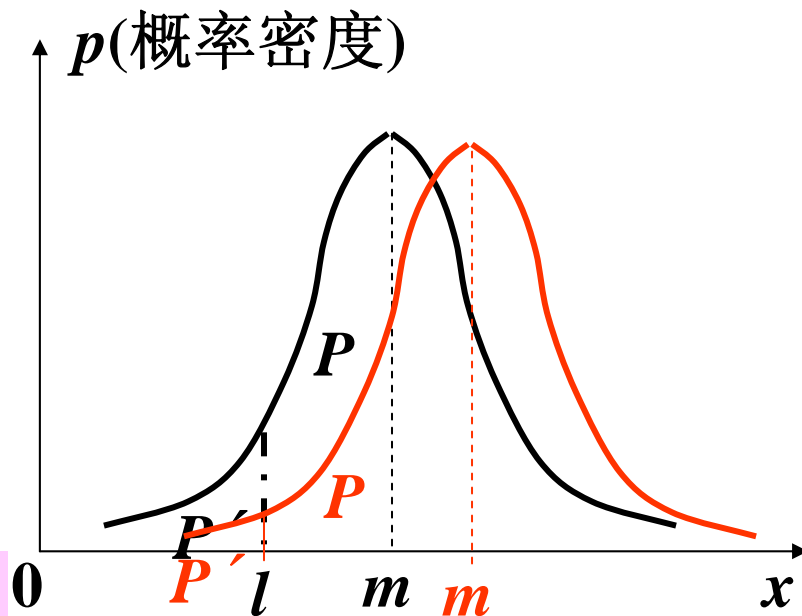
切掉多余部
分的概率

整根报废
的概率

$$m \uparrow \Rightarrow P \uparrow, P' \downarrow$$

$$m \downarrow \Rightarrow P \downarrow, P' \uparrow$$

存在最佳的 m 使总的浪费最小





建模

选择合适的目标函数

总浪费 = 切掉多余部分的浪费 + 整根报废的浪费

$$\begin{aligned}
 W &= \int_l^\infty (x-l)p(x)dx + \int_{-\infty}^l xp(x)dx \\
 &= \int_{-\infty}^\infty xp(x)dx - \int_l^\infty lp(x)dx = m - lP
 \end{aligned}$$

粗轧一根钢材平均浪费长度

粗轧 N 根 \Rightarrow 成品材 PN 根

总长度 mN \Rightarrow 成品材长度 lPN

$$\frac{mN - lPN}{N} = m - lP$$

\Rightarrow 共浪费长度 $mN - lPN$



建模

选择合适的目标函数

粗轧一根钢材平均浪费长度

$$\frac{mN - lPN}{N} = m - lP$$

粗轧 N 根得成品材 PN 根

得到一根成品材平均浪费长度

$$\frac{mN - lPN}{PN} = \frac{m}{P} - l$$

$$\text{记 } J(m) = \frac{m}{P(m)}$$

更合适的目标函数

$$P(m) = \int_l^\infty p(x) dx, \quad p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

优化模型：求 m 使 $J(m)$ 最小（已知 l, σ ）

求解



$$y = \frac{x-m}{\sigma}, \quad \mu = \frac{m}{\sigma}, \quad \lambda = \frac{l}{\sigma}$$

$$J(m) = \frac{m}{P(m)}$$

$$J(\mu) = \frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda - \mu)}$$

$$P(m) = \int_l^\infty p(x) dx$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\Phi(z) = \int_z^\infty \varphi(y) dy$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$z = \lambda - \mu$$

$$J(\mu) = \frac{\sigma\mu}{\Phi(\lambda - \mu)}$$

$$J(z) = \frac{\sigma(\lambda - z)}{\Phi(z)}$$

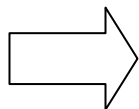
求 z 使 $J(z)$ 最小 (已知 λ)



求解

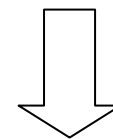
$$\frac{dJ}{dz} = 0$$

$$J(z) = \frac{\sigma(\lambda - z)}{\Phi(z)}$$



$$-\Phi(z) - (\lambda - z)\Phi'(z) = 0$$

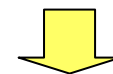
$$\Phi'(z) = -\varphi(z)$$



$$\Phi(z) = \int_z^\infty \varphi(y) dy$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\lambda - z = \Phi(z) / \varphi(z)$$



$$F(z) = \lambda - z$$

$$F(z) = \Phi(z) / \varphi(z)$$



求解

$$F(z) = \lambda - z$$

$F(z) = \Phi(z)/\varphi(z)$ 简表

z	-3.0	-2.5	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5
$F(z)$	227.0	56.79	18.10	7.206	3.477	1.680
z	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
$F(z)$	1.253	0.876	0.656	0.516	0.420	0.355

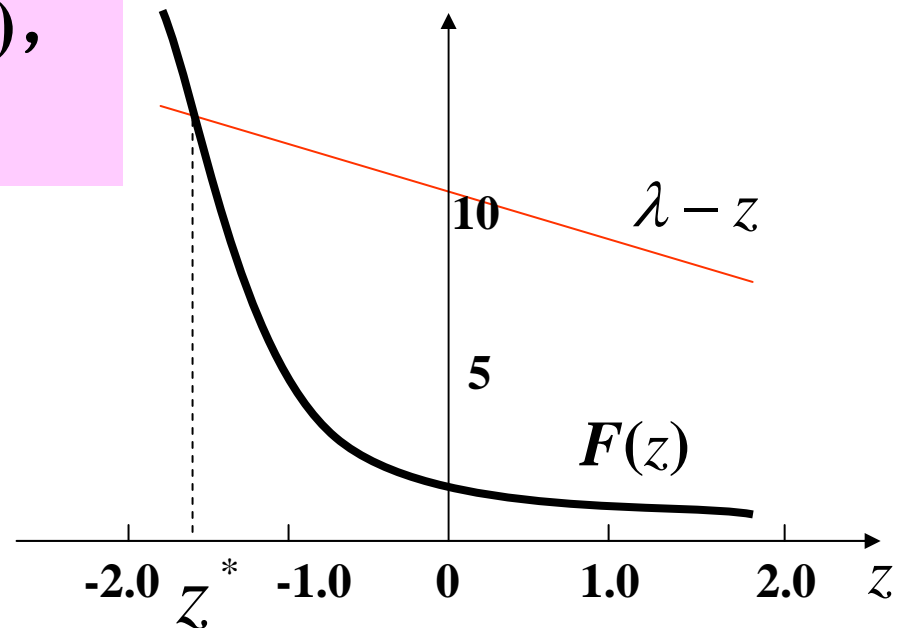
例

设 $l=2$ (米), $\sigma=20$ (厘米),
求 m 使浪费最小。

$$\lambda = l/\sigma = 10 \quad \Rightarrow \quad z^* = -1.78$$

$$\Rightarrow \mu^* = \lambda - z^* = 11.78$$

$$\Rightarrow m^* = \mu^* \sigma = 2.36 \text{ (米)}$$





5 随机人口模型

背景

- 一个人的出生和死亡是随机事件

一个国家或地区

平均生育率
平均死亡率

确定性模型

一个家族或村落

出生概率
死亡概率

随机性模型

对象

$X(t)$ ~ 时刻 t 的人口, 随机变量.

$P_n(t)$ ~ 概率 $P(X(t)=n)$, $n=0,1,2,\dots$

研究 $P_n(t)$ 的变化规律; 得到 $X(t)$ 的期望和方差



模型假设

若 $X(t)=n$, 对 t 到 $t+\Delta t$ 的出生和死亡概率作以下假设

- 1) 出生一人的概率与 Δt 成正比, 记 $b_n \Delta t$;
出生二人及二人以上的概率为 $o(\Delta t)$.
- 2) 死亡一人的概率与 Δt 成正比, 记 $d_n \Delta t$;
死亡二人及二人以上的概率为 $o(\Delta t)$.
- 3) 出生和死亡是相互独立的随机事件。

进一步假设

b_n 与 n 成正比, 记 $b_n = \lambda n$, λ ~出生概率;
 d_n 与 n 成正比, 记 $d_n = \mu n$, μ ~死亡概率。



建模

为得到 $P_n(t) P(X(t)=n)$,的变化规律, 考察 $P_n(t+\Delta t) = P(X(t + \Delta t)=n)$.

事件 $X(t + \Delta t)=n$ 的分解

$X(t)=n-1, \Delta t$ 内出生一人

$X(t)=n+1, \Delta t$ 内死亡一人

$X(t)=n, \Delta t$ 内没有出生和死亡

其它(出生或死亡二人,
出生且死亡一人,)

概率 $P_n(t+\Delta t)$

$P_{n-1}(t), b_{n-1}\Delta t$

$P_{n+1}(t), d_{n+1}\Delta t$

$P_n(t), 1-b_n\Delta t -d_n \Delta t$

$o(\Delta t)$

$$\begin{aligned} P_n(t + \Delta t) = & P_{n-1}(t)b_{n-1}\Delta t + P_{n+1}(t)d_{n+1}\Delta t \\ & + P_n(t)(1 - b_n\Delta t - d_n\Delta t) + o(\Delta t) \end{aligned}$$

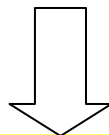
建模

微分方程



$$\frac{dP_n}{dt} = b_{n-1}P_{n-1}(t) + d_{n+1}P_{n+1}(t) - (b_n + d_n)P_n(t)$$

$$b_n = \lambda n, \quad d_n = \mu n$$



$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu)nP_n(t)$$

$$P_n(0) = \begin{cases} 1, & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases} \quad (t=0 \text{ 时已知人口为 } n_0)$$

~一组递推微分方程——求解的困难和不必要

转而考察 $X(t)$ 的期望和方差

基本方程

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda(n-1)P_{n-1}(t) + \mu(n+1)P_{n+1}(t) - (\lambda + \mu)nP_n(t)$$

求解

$X(t)$ 的期望

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{dP_n}{dt}$$

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)P_{n-1}(t) \quad \overset{n-1=k}{=} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k(k+1)P_k(t) \\ &\quad + \mu \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)P_{n+1}(t) \quad \overset{n+1=k}{=} \mu \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)P_k(t) \\ &\quad - (\lambda + \mu) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t) \end{aligned}$$

$$\frac{dE}{dt} = (\lambda - \mu) \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t) = (\lambda - \mu)E(t)$$

求解

$$\frac{dE}{dt} = (\lambda - \mu)E(t) \Rightarrow E(t) = n_0 e^{rt}, \quad r = \lambda - \mu$$

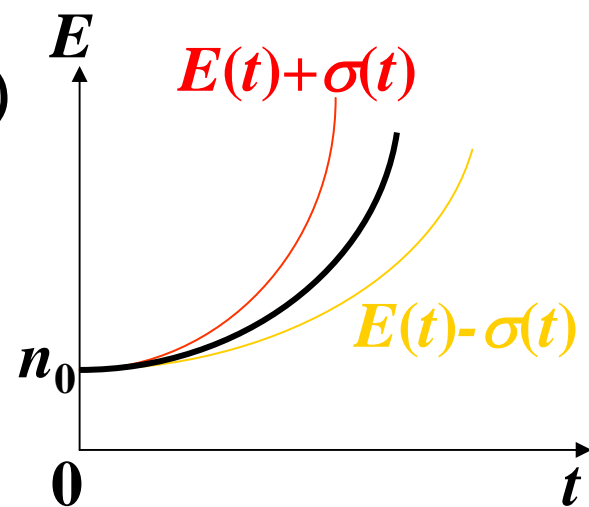
$$E(0) = n_0$$

$r \sim$ 增长概率

比较：确定性指数增长模型 $x(t) = x_0 e^{rt}$ $r \sim$ 平均增长率

$$X(t) \text{ 的方差 } D(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 P_n(t) - E^2(t)$$

$$\Rightarrow D(t) = n_0 \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu} e^{(\lambda - \mu)t} [e^{(\lambda - \mu)t} - 1]$$



$X(t)$ 大致在 $E(t) \pm 2\sigma(t)$ 范围内 ($\sigma(t) \sim$ 均方差)

$$\lambda - \mu = r \uparrow \rightarrow D(t) \uparrow \quad \lambda, \mu \uparrow \rightarrow D(t) \uparrow$$



Discussions
