



# 初等模型(II)

---



# 作业提交要求重申

## ■ 上交的作业

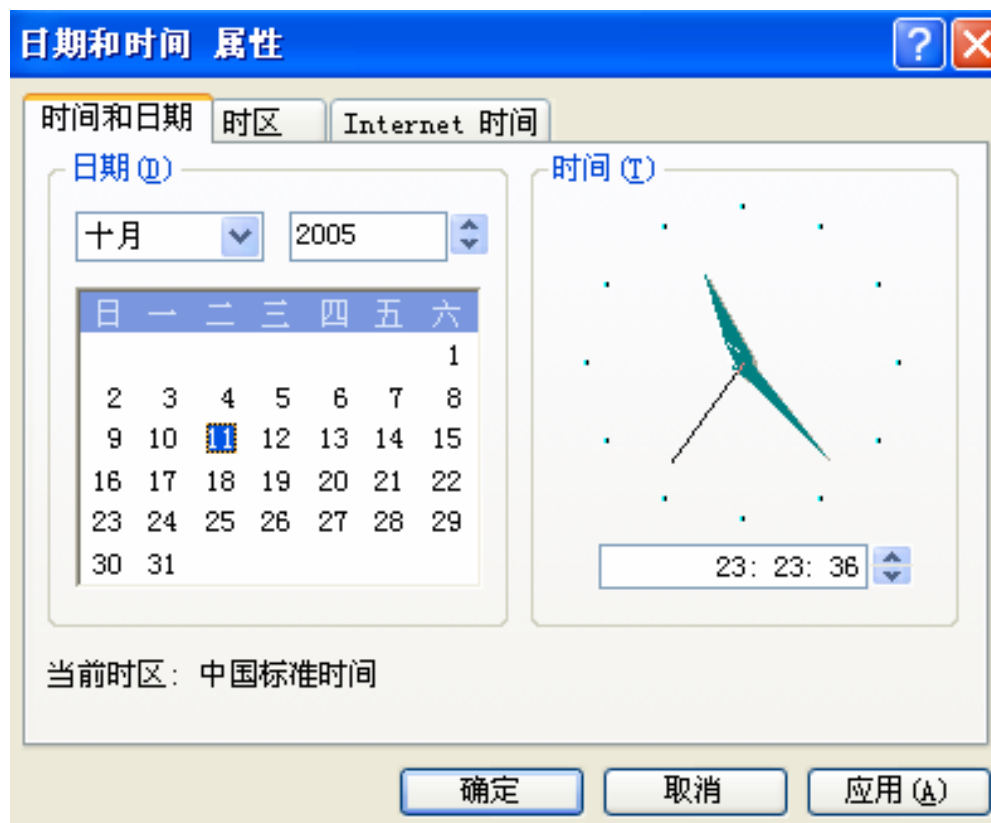
- 程序必须自己编译通过，可运行（若需读数据文件，附上数据文件），并且自己已做测试
- 附相应说明文档
- 压缩打包成一个文件
  - 文件命名规范：“007\_刘利刚\_Homework\_#1.rar”

## ■ 相关文档

- 说明程序的大致结构，功能及数据测试
- 参照课程主页说明

# Announcement

- Tuesday, Oct. 11





# 作业

---

- pp. 65: 2, 5
- 要求
  - 文档
  - FTP上载
- deadline
  - Monday, Oct. 17



# 1. 公平的席位分配

---



# 问题

三个系学生共200名（甲系100，乙系60，丙系40），代表会议共20席，按比例分配，三个系分别为10，6，4席。

现因学生转系，三系人数为103, 63, 34, 问20席如何分配。

若增加为21席，又如何分配。

比例加惯例

| 系别 | 学生人数 | 比例( % ) | 20席的分配 |    | 21席的分配 |    |
|----|------|---------|--------|----|--------|----|
|    |      |         | 比例     | 结果 | 比例     | 结果 |
| 甲  | 103  | 51.5    | 10.3   | 10 | 10.815 | 11 |
| 乙  | 63   | 31.5    | 6.3    | 6  | 6.615  | 7  |
| 丙  | 34   | 17.0    | 3.4    | 4  | 3.570  | 3  |
| 总和 | 200  | 100.0   | 20.0   | 20 | 21.000 | 21 |

对丙系公平吗



# “公平”分配方法

## 衡量公平分配的数量指标

|    | 人数    | 席位    |
|----|-------|-------|
| A方 | $p_1$ | $n_1$ |
| B方 | $p_2$ | $n_2$ |

当  $p_1/n_1 = p_2/n_2$  时，分配公平

若  $p_1/n_1 > p_2/n_2$ ，对 A 不公平

$p_1/n_1 - p_2/n_2 \sim$  对 A 的绝对不公平度

$$p_1=150, n_1=10, p_1/n_1=15$$

$$p_2=100, n_2=10, p_2/n_2=10$$

$$p_1/n_1 - p_2/n_2 = 5$$

虽二者的绝对  
不公平度相同

$$p_1=1050, n_1=10, p_1/n_1=105$$

$$p_2=1000, n_2=10, p_2/n_2=100$$

$$p_1/n_1 - p_2/n_2 = 5$$

但后者对 A 的不公平  
程度已大大降低！



## “公平”分配方法

将绝对度量改为相对度量

若  $p_1/n_1 > p_2/n_2$  , 定义

$$\frac{p_1/n_1 - p_2/n_2}{p_2/n_2} = r_A(n_1, n_2) \sim \text{对A的相对不公平度}$$

类似地定义  $r_B(n_1, n_2)$

公平分配方案应  
使  $r_A, r_B$  尽量小

将一次性的席位分配转化为动态的席位分配, 即

设A, B已分别有  $n_1, n_2$  席, 若增加1席, 问应分给A, 还是B

不妨设分配开始时  $p_1/n_1 > p_2/n_2$  , 即对A不公平





应讨论以下几种情况

初始  $p_1/n_1 > p_2/n_2$

- 1) 若  $p_1/(n_1+1) > p_2/n_2$  , 则这席应给 A
- 2) 若  $p_1/(n_1+1) < p_2/n_2$  , 应计算  $r_B(n_1+1, n_2)$
- 3) 若  $p_1/n_1 > p_2/(n_2+1)$  , 应计算  $r_A(n_1, n_2+1)$

问 :  $p_1/n_1 < p_2/(n_2+1)$  是否会出现? 否!

若  $r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1)$ , 则这席应给 A

若  $r_B(n_1+1, n_2) > r_A(n_1, n_2+1)$ , 则这席应给 B



当  $r_B(n_1+1, n_2) < r_A(n_1, n_2+1)$ , 该席给A

↓  $r_A, r_B$  的定义

$$\frac{p_2^2}{n_2(n_2+1)} < \frac{p_1^2}{n_1(n_1+1)} \quad \begin{array}{l} \text{该席给A} \\ \text{否则, 该席给B} \end{array}$$

定义  $Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}$ ,  $i = 1, 2$ , 该席给  $Q$  值较大的一方

推广到  $m$  方  
分配席位      计算  $Q_i = \frac{p_i^2}{n_i(n_i+1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$

该席给  $Q$  值最大的一方       **$Q$  值方法**



## 三系用 $Q$ 值方法重新分配 21个席位

按人数比例的整数部分已将19席分配完毕

甲系： $p_1=103, n_1=10$

乙系： $p_2=63, n_2=6$

丙系： $p_3=34, n_3=3$

用 $Q$ 值方法分配  
第20席和第21席

第20席  $Q_1 = \frac{103^2}{10 \times 11} = 96.4, Q_2 = \frac{63^2}{6 \times 7} = 94.5, Q_3 = \frac{34^2}{3 \times 4} = 96.3$

$Q_1$ 最大，第20席给甲系

第21席  $Q_1 = \frac{103^2}{11 \times 12} = 80.4, Q_2, Q_3$  同上

$Q_3$ 最大，第21席给丙系

$Q$ 值方法  
分配结果

甲系11席，乙系6席，丙系4席

公平吗？



## 进一步的讨论

$Q$ 值方法比“比例加惯例”方法更公平吗？

### 席位分配的理想化准则

已知： $m$ 方人数分别为  $p_1, p_2, \dots, p_m$ ，记总人数为  $P = p_1 + p_2 + \dots + p_m$ ，待分配的总席位为  $N$ 。

设理想情况下  $m$  方分配的席位分别为  $n_1, n_2, \dots, n_m$   
(自然应有  $n_1 + n_2 + \dots + n_m = N$ )，

$n_i$  应是  $N$  和  $p_1, \dots, p_m$  的函数，即  $n_i = n_i(N, p_1, \dots, p_m)$

记  $q_i = Np_i/P$ ,  $i=1, 2, \dots, m$ ，若  $q_i$  均为整数，显然应  $n_i = q_i$



$q_i = Np_i/P$ 不全为整数时,  $n_i$  应满足的准则:

记  $[q_i]_- = \text{floor}(q_i) \sim$  向  $\leq q_i$  方向取整;

$[q_i]_+ = \text{ceil}(q_i) \sim$  向  $\geq q_i$  方向取整.

1)  $[q_i]_- \leq n_i \leq [q_i]_+ \ (i=1,2, \dots, m)$ , 即  $n_i$  必取  $[q_i]_-$ ,  $[q_i]_+$  之一

2)  $n_i(N, p_1, \dots, p_m) \leq n_i(N+1, p_1, \dots, p_m) \ (i=1,2, \dots, m)$

即当总席位增加时,  $n_i$  不应减少

“比例加惯例”方法满足 1), 但不满足 2)

$Q$ 值方法满足 2), 但不满足 1)。令人遗憾!



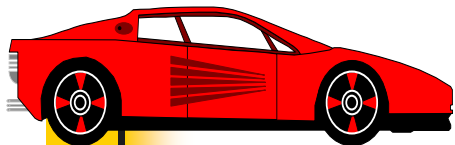
# Discussions

---



## 2. 汽车刹车距离

---



## 背景与问题

### 美国的某些司机培训课程中的驾驶规则：

- 正常驾驶条件下, 车速每增10英里/小时, 后面与前车的距离应增一个车身的长度。
- 实现这个规则的简便办法是 **“2秒准则”**：
- 后车司机从前车经过某一标志开始默数2秒钟后到达同一标志, 而不管车速如何

判断“2秒准则”与“车身”规则是否一样；

建立数学模型, 寻求更好的驾驶规则。





## 常识：刹车距离与车速有关

### 问题分析

10英里/小时( $\approx 16$ 公里/小时)车速下2秒钟行驶  
29英尺( $\approx 9$ 米)  $\gg$ 车身的平均长度15英尺( $=4.6$ 米)  
“2秒准则”与“10英里/小时加一车身”规则不同

### 刹车距离

反应距离

反应时间

车速

司机  
状况

制动系统  
灵活性

常数

制动距离

制动器作用力、车重、车速、道路、气候... ..

最大制动力与车质量成正比，使汽车作匀减速运动。

常数



## 假设与建模

1. 刹车距离  $d$  等于反应距离  $d_1$  与制动距离  $d_2$  之和

$$d = d_1 + d_2$$

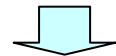
2. 反应距离  $d_1$  与车速  $v$  成正比  
 $t_1$  为反应时间

$$d_1 = t_1 v$$

3. 刹车时使用最大制动力  $F$  ,  
 $F$  做功等于汽车动能的改变;  
且  $F$  与车的质量  $m$  成正比

$$F d_2 = m v^2 / 2$$

$$F \propto m$$



$$d_2 = k v^2$$

$$d = t_1 v + k v^2$$



模型  $d = t_1 v + kv^2$

参数估计

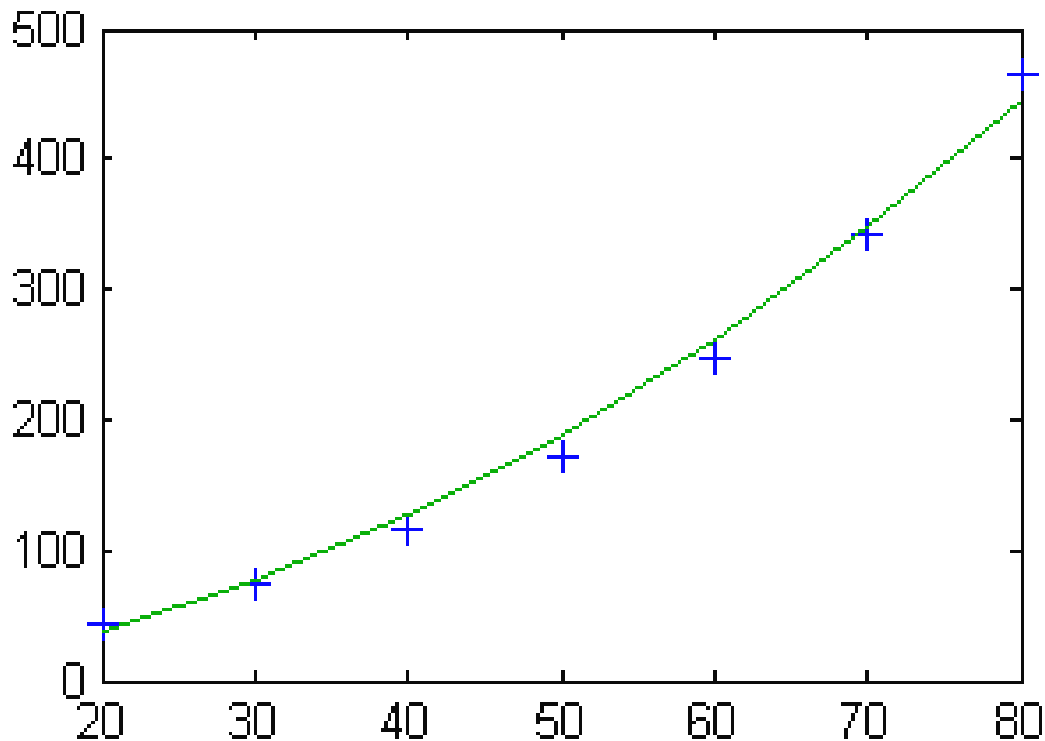
- 反应时间  $t_1$  的经验估计值为0.75秒
- 利用交通部门提供的一组实际数据拟合  $k$

| 车速<br>(英里/小时) (英尺/秒) |       | 实际刹车距离<br>(英尺) | 计算刹车距离<br>(英尺) | 刹车时间<br>(秒) |
|----------------------|-------|----------------|----------------|-------------|
| 20                   | 29.3  | 42 (44)        | 39.0           | 1.5         |
| 30                   | 44.0  | 73.5 (78)      | 76.6           | 1.8         |
| 40                   | 58.7  | 116 (124)      | 126.2          | 2.1         |
| 50                   | 73.3  | 173 (186)      | 187.8          | 2.5         |
| 60                   | 88.0  | 248 (268)      | 261.4          | 3.0         |
| 70                   | 102.7 | 343 (372)      | 347.1          | 3.6         |
| 80                   | 117.3 | 464 (506)      | 444.8          | 4.3         |

最小二乘法  $\Rightarrow k=0.06$   $\Rightarrow$  计算刹车距离、刹车时间

# 模型

$$d = t_1 v + kv^2 = 0.75v + 0.06v^2$$



| 车速<br>(英里/小时) | 刹车时间<br>(秒) |
|---------------|-------------|
| 20            | 1.5         |
| 30            | 1.8         |
| 40            | 2.1         |
| 50            | 2.5         |
| 60            | 3.0         |
| 70            | 3.6         |
| 80            | 4.3         |

“2秒准则”应修正为 “ $t$  秒准则”

| 车速 (英里/小时) | 0~10 | 10~40 | 40~60 | 60~80 |
|------------|------|-------|-------|-------|
| $t$ (秒)    | 1    | 2     | 3     | 4     |



# Discussions

---



### 3. 划艇比赛的成绩

---



问题

对四种赛艇（单人、双人、四人、八人）4次国际大赛冠军的成绩进行比较，发现与桨手数有某种关系。试建立数学模型揭示这种关系。

| 赛艇种类 | 2000米成绩 $t$ (分) |      |      |      |      | 艇长 $l$<br>(米) | 艇宽 $b$<br>(米) | $l/b$ | <u>空艇重<math>w_0</math>(kg)</u><br>桨手数 $n$ |
|------|-----------------|------|------|------|------|---------------|---------------|-------|---|
|      | 1               | 2    | 3    | 4    | 平均   |               |               |       |   |
| 单人   | 7.16            | 7.25 | 7.28 | 7.17 | 7.21 | 7.93          | 0.293         | 27.0  | 16.3                                      |
| 双人   | 6.87            | 6.92 | 6.95 | 6.77 | 6.88 | 9.76          | 0.356         | 27.4  | 13.6                                      |
| 四人   | 6.33            | 6.42 | 6.48 | 6.13 | 6.32 | 11.75         | 0.574         | 21.0  | 18.1                                      |
| 八人   | 5.87            | 5.92 | 5.82 | 5.73 | 5.84 | 18.28         | 0.610         | 30.0  | 14.7                                      |

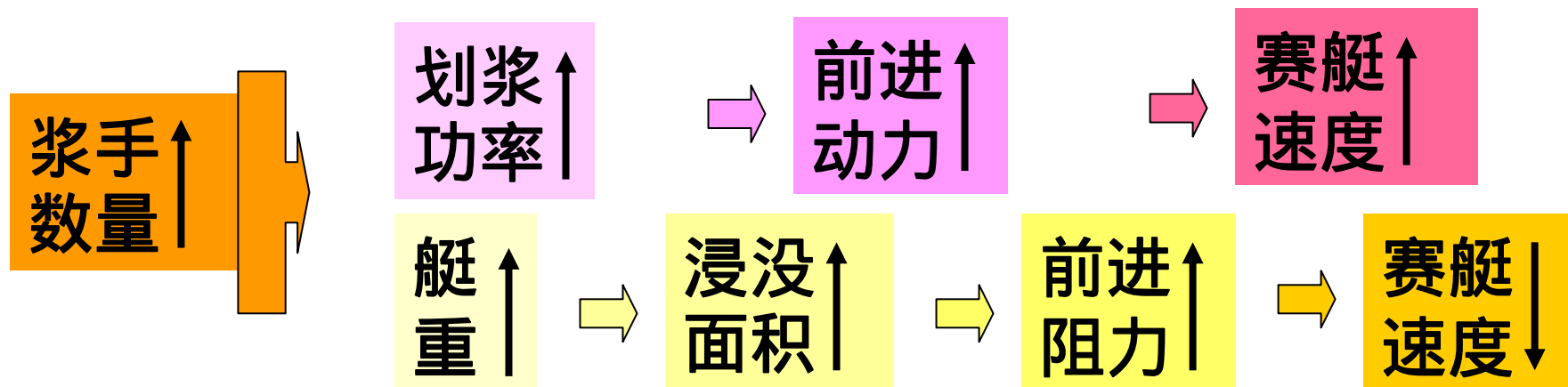
准备

调查赛艇的尺寸和重量  $\Rightarrow l/b, w_0/n$  基本不变

## 问题分析

分析赛艇速度与桨手数量之间的关系  
赛艇速度由前进动力和前进阻力决定

- 前进动力  $\sim$  桨手的划桨功率
- 前进阻力  $\sim$  浸没部分与水的摩擦力



- 对桨手体重、功率、阻力与艇速的关系等作出假定
- 运用合适的物理定律建立模型





# 模型假设

符号：艇速  $v$ ，浸没面积  $s$ ，浸没体积  $A$ ，空艇重  $w_0$ ，  
阻力  $f$ ，桨手数  $n$ ，桨手功率  $p$ ，桨手体重  $w$ ，艇重  $W$

1) 艇形状相同( $l/b$ 为常数),  $w_0$ 与 $n$ 成正比

艇的静态特性

2)  $v$ 是常数，阻力  $f$ 与  $sv^2$ 成正比

艇的动态特性

3)  $w$ 相同， $p$ 不变， $p$ 与 $w$ 成正比

桨手的特征

模型  
建立

$$np \propto fv \quad f \propto sv^2 \quad p \propto w \quad \Rightarrow \quad v \propto (n/s)^{1/3}$$

$$s^{1/2} \propto A^{1/3} \quad A \propto W(=w_0+nw) \propto n \quad \Rightarrow \quad s \propto n^{2/3}$$

$$\Rightarrow v \propto n^{1/9}$$

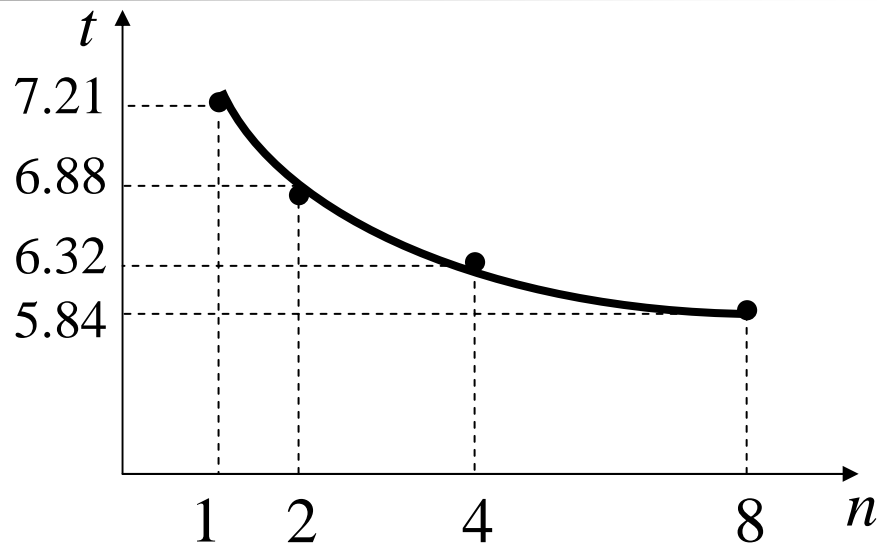
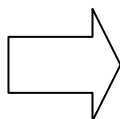
$$\Rightarrow \text{比赛成绩 } t \propto n^{-1/9}$$



## 模型检验

利用4次国际大赛冠军的平均成绩对模型  $t \propto n^{-1/9}$  进行检验

| $n$ | $t$  |
|-----|------|
| 1   | 7.21 |
| 2   | 6.88 |
| 4   | 6.32 |
| 8   | 5.84 |



$$t = an^b$$

$$\Rightarrow \log t = a' + b \log n$$

→  
最小二乘法

$$t = 7.21n^{-0.11}$$

与模型巧合！



# Discussions

---