15 (повышенный уровень, время – 3 мин)

Тема: Основные понятия математической логики.

Что проверяется:

Знание основных понятий и законов математической логики

1.5.1. Высказывания, логические операции, кванторы, истинность высказывания.

1.1.7. Умение вычислять логическое значение сложного высказывания по известным значениям элементарных высказываний.

Про обозначения

К сожалению, обозначения логических операций И, ИЛИ и НЕ, принятые в «серьезной» математической логике ($\wedge, \vee, \neg$), неудобны, интуитивно непонятны и никак не проявляют аналогии с обычной алгеброй. Автор, к своему стыду, до сих пор иногда путает $\wedge$ и $\vee$. Поэтому на его уроках операция «НЕ» обозначается чертой сверху, «И» – знаком умножения (поскольку это все же логическое умножение), а «ИЛИ» – знаком «+» (логическое сложение).

В разных учебниках используют разные обозначения. К счастью, в начале задания ЕГЭ приводится расшифровка закорючек ($\wedge$, $\vee, \neg$), что еще раз подчеркивает проблему. Далее во всех решениях приводятся два варианта записи.

Что нужно знать:

- условные обозначения логических операций

$\neg$**A**,	$\overline{A}$	не А (отрицание, инверсия)
A $\wedge$ **B**,	$A \cdot B$	А и В (логическое умножение, конъюнкция)
A $\vee$ **B**,	$A + B$	А или В (логическое сложение, дизъюнкция)
A $\rightarrow$ **B**		импликация (следование)

- таблицы истинности логических операций «И», «ИЛИ», «НЕ», «импликация» (см. презентацию «Логика»)
- операцию «импликация» можно выразить через «ИЛИ» и «НЕ»:

  A $\rightarrow$ **B** = $\neg$**A** $\vee$ **B** или в других обозначениях **A** $\rightarrow$ **B** = $\overline{A} + B$
- если в выражении нет скобок, сначала выполняются все операции «НЕ», затем – «И», затем – «ИЛИ», и самая последняя – «импликация»
- иногда полезны формулы де Моргана[24]:

$\neg$(**A** $\wedge$ **B**) = $\neg$**A** $\vee$ $\neg$**B**	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$
$\neg$(**A** $\vee$ **B**) = $\neg$**A** $\wedge$ $\neg$**B**	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

- для упрощения выражений можно использовать формулы

  $A + A \cdot B = A$ (т.к. $A + A \cdot B = A \cdot 1 + A \cdot B = A \cdot (1 + B) = A \cdot 1 = A$)

  $A + \overline{A} \cdot B = A + B$ (т.к. $A + \overline{A} \cdot B = (A + \overline{A}) \cdot (A + B) = 1 \cdot (A + B) = A + B$)
- некоторые свойства импликации

$$A \rightarrow (B \cdot C) = (A \rightarrow B) \cdot (A \rightarrow C)$$
$$A \rightarrow (B + C) = (A \rightarrow B) + (A \rightarrow C)$$

Связь логики и теории множеств:

[24] **Огастес (Август) де Морган –** шотландский математик и логик.

- пересечение множеств соответствует умножению логических величин, а объединение – логическому сложению;
- пустое множество $\varnothing$ – это множество, не содержащее ни одного элемента, оно играет роль нуля в теории множеств;
- универсальное множество I – это множество, содержащее все возможные элементы заданного типа (например, все целые числа), оно играет роль логической единицы: для любого множества целых чисел X справедливы равенства $X + I = I$ и $X \cdot I = X$ (для простоты мы используем знаки сложения и умножения вместо знаков пересечения $\cap$ и объединения $\cup$ множеств)
- **дополнение** $\overline{X}$ множества X – это разность между универсальным множеством I и множеством X (например, для целых чисел $\overline{X}$ – все целые числа, не входящие в X)
- пусть требуется выбрать множество A так, чтобы выполнялось равенство $A + X = I$; в этом случае множество A должно включать дополнение $\overline{X}$, то есть $A \supseteq \overline{X}$ (или «по-простому» можно записать $A \geq \overline{X}$), то есть $A_{\min} = \overline{X}$
- пусть требуется выбрать множество A так, чтобы выполнялось равенство $\overline{A} + X = I$, в этом случае множество $\overline{A}$ должно включать дополнение $\overline{X}$, то есть $\overline{A} \supseteq \overline{X}$; отсюда $A \subseteq X$, то есть $A_{\max} = X$

Задачи с поразрядными операциями

Как вычислять выражение с поразрядными операциями

В задачах ЕГЭ до настоящего времени использовалась только поразрядная логическая операция «И» (она обозначается символом &), которая выполняется между соответствующими битами двоичной записи двух целых чисел. Не забывайте, что

Результат поразрядной операции между целыми числами – это целое число!.

Например, найдём результат поразрядной операции $29 \ \& \ 11$:

```
29 = 11101₂
11 = 01011₂
9  = 01001₂
```

Серым фоном отмечены биты, которые в обоих числах равны 1. Только они и будут равны 1 в числе-результате. Таким образом, $29 \ \& \ 11 = 9$.

Теперь найдём результат операции $(29 \ \& \ 11 = 0)$. Не забывайте, что

Результаты операций $(a \ \& \ b = 0)$ и $(a \ \& \ b \neq 0)$ – это логические значения (истина/ложь)!.

Вычислим значение выражения:

$$((x \ \& \ 26 = 0) \vee (x \ \& \ 13 = 0)) \to ((x \ \& \ 78 \neq 0) \to (x \ \& \ A = 0))$$

при $x = 5$, $A = 57$:

$$((5 \ \& \ 26 = 0) \vee (5 \ \& \ 13 = 0)) \to ((5 \ \& \ 78 \neq 0) \to (5 \ \& \ 57 = 0))$$

Вычисляем результаты поразрядного И (это числа!):

$$5 \ \& \ 26 = 0 \qquad 5 \ \& \ 13 = 5$$
$$5 \ \& \ 78 = 4 \qquad 5 \ \& \ 57 = 1$$

Теперь вычисляем логические значения (И – истина, Л – ложь):

$$(5 \ \& \ 26 = 0) = \text{И} \qquad (5 \ \& \ 13 = 0) = \text{Л}$$
$$(5 \ \& \ 78 \neq 0) = \text{И} \qquad (5 \ \& \ 57 = 0) = \text{Л}$$

Наконец, подставляем эти логические значения в заданное выражение:

$$(\text{И} \vee \text{Л}) \to (\text{И} \to \text{Л})$$
$$\text{И} \to \text{Л} = \text{Л}$$

При заданных условиях выражение ложно.

Решение задач с поразрядными операциями

Для решения этих задач удобно применять метод, предложенный *А.В. Здвижковой* (г. Армавир) и обоснованный автором[25]. Введём обозначения

$$Z_K(x) \equiv (x \ \& \ K = 0)$$

Это означает, что если истинно $Z_K(x)$, то это равносильно тому, что истинно $x \ \& \ K = 0$. Для сокращения записи вместо $Z_K(x)$ будем писать просто Z_K.

Пусть в двоичной записи числа K бит с номером i, обозначаемый как k_i, равен 1. Если при этом для некоторого x выполнено условие Z_K, то соответствующий i-й бит в двоичной записи числа x равен нулю, так как должно выполняться условие $x_i \ \& \ k_i = 0$.

Для преобразования выражений полезно следующее свойство:

$$Z_K \cdot Z_M = Z_{K \text{ or } M}$$

где «**or**» означает поразрядную дизъюнкцию между двумя натуральными числами. Для доказательства предположим, что в двоичной записи числа K биты с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_q$ равны 1, а остальные равны 0; а в двоичной записи числа M биты с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_p$ равны 1, а остальные равны 0. Истинность выражения в левой части означает, что все биты числа x, входящие во множества $B_K = \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$ и $B_M = \{j_1, j_2, \ldots, j_p\}$ одновременно равны нулю. Поэтому любая комбинация битов из этих множеств тоже равна нулю. Это справедливо, в том числе, и для множества, которое представляет собой объединение множеств B_K и B_M, то есть, для множества единичных битов числа K **or** M.

Самый важный результат можно сформулировать так:

> Условие $Z_K \to Z_M$ истинно для любых натуральных значений x тогда и только тогда, когда все единичные биты двоичной записи числа M входят во множество единичных битов двоичной записи числа K.

Доказательство. Пусть в двоичной записи числа K биты с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_q$ равны 1, а остальные равны 0. Пусть также Z_K истинно для некоторого x, это значит, что в числе x биты с теми же номерами – нулевые. Если все единичные биты двоичной записи числа M входят во множество $B_K = \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$, то истинно и высказывание Z_M, а следовательно – высказывание $Z_K \to Z_M$ ($1 \to 1 = 1$). Если же хотя бы один бит двоичной записи числа M не входит во множество B_K (пусть это будет бит с номером j), то для тех x, у которых все биты из множества B_K нулевые, а бит j равен 1, выполняется Z_K, но не выполняется Z_M, так что высказывание $Z_K \to Z_M$ ложно.

Для упрощения выражений полезен следующий результат:

> Условие $Z_K \to Z_M \cdot \overline{Z}_N$ при любых натуральных K, M и N ложно для некоторых натуральных значений x.

Идея доказательства состоит в том, чтобы представить импликацию в виде произведения двух импликаций:

$$Z_K \to Z_M \cdot \overline{Z}_N = (Z_K \to Z_M) \cdot (Z_K \to \overline{Z}_N).$$

Вторая импликация в правой части ложна хотя бы для некоторых x, поскольку из того, что некоторые биты числа x равны нулю (выполняется Z_K) совершенно не следует, что какие-то другие

[25] http://kpolyakov.spb.ru/download/bitwise2.pdf

(или те же самые) биты того же числа ненулевые (выполняется $\overline{Z}_N$). Строгое доказательство дано в статье, ссылка на которую приведена в сноске на предыдущей странице.

Метод, предложенный А.В. Здвижковой заключается в следующем:

1) упростить заданное выражение, сведя его к импликации, в которой нет инверсий
2) применить полученные выше результаты для нахождения всех подходящих значений неизвестного числа a, включая минимальное и максимальное значения.

Этот же метод можно применить и в том случае, когда результат поразрядной операции «И» сравнивается не с нулём, а с другими числами. Например, рассмотрим выражение $R = (x \,\&\, 125 \, = \, 5)$. Переведём числа в двоичную систему:

```
          6543210
125 = 1111101₂
  5 =     101₂.
```

Истинность R означает, что

1) биты числа x с номерами 3, 4, 5 и 6 равны 0;
2) биты числа x с номерами 0 и 2 равны 1.

С учётом введённых выше обозначений можно записать эквивалентное условие:

$$R = (x \,\&\, 125 \, = \, 5) \quad \Leftrightarrow \quad Z_{120} \cdot \overline{Z}_4 \cdot \overline{Z}_1 = 1 .$$

Применяя операцию «НЕ» к этому выражению, получаем

$$\overline{R} = (x \,\&\, 125 \, \neq \, 5) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Z_{120} \cdot \overline{Z}_4 \cdot \overline{Z}_1} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Z}_{120} + Z_4 + Z_1 = 1 .$$

В общем виде для чисел *b* и *c*, таких, что множество единичных битов числа *c* входит во множество единичных битов числа *b*, имеем

$$R = (x \,\&\, b \, = c) \quad \Leftrightarrow \quad Z_{b-c} \cdot \overline{Z}_{c_1} \cdot \overline{Z}_{c_2} \ldots \cdot \overline{Z}_{c_q} = 1$$

$$\overline{R} = (x \,\&\, b \, \neq c) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Z}_{b-c} + Z_{c_1} + Z_{c_2} + \ldots + Z_{c_q} = 1 .$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_q$ – степени числа 2, которые соответствуют единичным битам числа *c*. Например, для
c = 5 = 101_2 имеем $c_1 = 2^2 = 4$, $c_2 = 2^0 = 1$.

Пример задания:

Р-35 (**демо-2021**). Обозначим через **`ДЕЛ(n,m)`** утверждение «натуральное число n делится без
остатка на натуральное число m». Для какого наибольшего натурального числа А формула

`¬ДЕЛ(x,A)→(ДЕЛ(x,6)→¬ДЕЛ(x,9))`

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение (теоретическое):

1) для сокращения записи введём обозначения:
   `ДЕЛ(x,A)` = A
   `ДЕЛ(x,6)` = D_6
   `ДЕЛ(x,9)` = D_9
2) перепишем выражение в виде $\overline{A} \to (D_6 \to \overline{D}_9) = 1$
3) используя формулу $A \to B = \overline{A} + B$, раскроем первую импликацию:
   $$A + (D_6 \to \overline{D}_9) = 1$$
4) и вторую:
   $$A + \overline{D}_6 + \overline{D}_9 = 1$$
5) согласно правилу де Моргана $\overline{D}_6 + \overline{D}_9 = \overline{D_6 \cdot D_9}$, так что

$$A + \overline{D_6 \cdot D_9} = 1$$

6) сведём выражение к единственной импликации

$$D_6 \cdot D_9 \to A = 1$$

7) сформулируем правило, которое мы получили: если значение x делится на 6 и делится на 9, то оно делится на A;
8) если значение x делится на 6 и делится на 9, то оно делится на наименьшее общее кратное НОК(6,9)=18, поэтому наибольшее значение *A*, удовлетворяющее условию, равно 18
9) Ответ: 18.

Решение (с помощью программы):

1) для проверки решения (при наличии времени) можно использовать программу; напишем её на языке Python
2) определим логическую функцию **Del** с двумя аргументами, которая проверяет делимость первого аргумента **x** на второй аргумент **D** (если **x** делится на **D**, возвращается **True**)

```
def Del( x, D ):
  return x % D == 0
```

Функция названа **Del** с большой буквы, чтобы её имя отличалось от команды удаления **del**.

3) теперь определим функцию **f(x,A)**, которая вычисляет заданное нам выражение:

```
def f( x, A ):
  return (not Del(x,A)) <= (Del(x,6) <= (not Del(x,9)))
```

здесь импликация заменяется на **<=** (спасибо за идею *А. Сидорову*) с учётом того, что **False** < **True**; проверим правильность такой замены по таблице истинности операции импликация:

A	B	A→B	A<=B
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

4) основная программа проверяет выражение на истинность полным перебором (методом «грубой силы», англ. *brute force*) для возрастающих значений A; предполагаем, что наибольшее A меньше, чем 1000; тогда

```
for A in range(1, 1000):
  if A подходящее:
    print( A )
```

5) что значит «A подходящее»? Это означает, что при всех натуральных **x** выражение **f(x)** истинно; это можно проверить перебором, скажем, для всех **x**, меньших **1000**:

```
for A in range(1,1000):
  OK = True
  for x in range(1,1000):
    if not f(x,A):
      OK = False
      break
  if OK:
    print( A )
```

6) блок, выделенный серым фоном – это проверка очередного значения **A**; сначала логическая переменная **OK** равна **True** (все хорошо); если для какого-то **x** функция **f(x)** вернула значение **False** (ложь), переменной **OK** присваивается значение **False** (это **A** не подходит) и цикл заканчивается досрочно с помощью оператора **break** (остальные значения **x** проверять нет смысла, всё уже понятно)

7) если внутренний цикл отработал и переменная **OK** осталась равной **True**, то **A** подходит и выводится на экран
8) программа выводит
```
1
2
3
6
9
18
```
ответом будет последнее выведенное значение A, равное 18
9) Ответ: 18.

В некоторых случаях диапазона [1;999], который используется при переборе значений A и x, может не хватить для правильного решения задачи. Например, при некотором A программа просто не дойдёт до значения x > 999, при котором нарушится истинность высказывания, и это A будет принято за правильный ответ. Поэтому лучше увеличивать диапазон перебора до 10000-50000, по крайней мере, для переменной x.

10) приведём полную программу:
```
def Del( x, D ):
  return x % D == 0

def f( x, A ):
  return (not Del(x,A)) <= (Del(x,6) <= (not Del(x,9)))

for A in range(1,1000):
  OK = True
  for x in range(1,1000):
    if not f(x,A):
      OK = False
      break
  if OK:
    print( A )
```
Для других задач этого типа достаточно заменить логическое выражение в функции **f(x)**.
11) возможна краткая, но менее понятная форма программы без функций, использующая вперемежку числовые и логические значения и операции с ними (**А. Сидоров**, https://www.youtube.com/watch?v=vdIIelsomkM):
```
for A in range(1,1000):
  OK = 1
  for x in range(1,1000):
    OK *= (x % A != 0) <= ((x % 6 == 0) <= (x % 9 != 0))
  if OK:
    print( A )
```
При умножении ложное значение равносильно нулю, поэтому если хотя бы для одного значения **x** условие не выполняется, переменная **OK** в конце внутреннего цикла будет равна 0.

Решение (с помощью программы, И. Моисеев):

1) напишем понятную форму программы без функций; преобразования, используя формулу $A \to B = \overline{A} + B$, получаем выражение:

ДЕЛ(x,A) V ¬ (ДЕЛ(x,6) V¬ДЕЛ(x,9)

Так как формула должна быть тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x), то необходимо, чтобы выполнилось хоть одно условие в этом выражении.

2) программа проверяет выражение на истинность каждое слагаемое полным перебором для возрастающих значений А; предполагаем, что наибольшее А не превышает 1000, тогда

```
a = [] # массив хранения значений A
for A in range(1,1001):
  countX = 0
  for x in range(1,1001):
    if (x%A == 0) or not(x%6 == 0) or not(x%9 == 0):
      countX += 1
  if countX == 1000:#все числа X перебрали
    a.append(A)
print( max(a) )
```

3) если после отработки внутреннего цикла переменная **countX** стала равна 1000, то это говорит о том, что при всех числах **X** хоть одно из слагаемых будет равно **True**; тогда текущее значение **A** подходит и записывается в массив **a**

4) после работы программы в массиве оказываются значения:

```
1
2
3
6
9
18
```

функция **max(a)** позволяет определить ответ – наибольшее значение А, равное 18

5) Ответ: 18.

Ещё пример задания:

Р-34. (**С.С. Поляков**) *Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение*

$$(5k + 6n > 57) \lor ((k \le A) \land (n < A))$$

истинно для любых целых положительных значений k и n.

Решение:

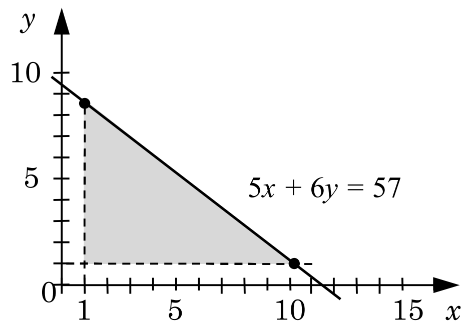
1) особенность этой задачи – «уход» авторов от привычных обозначений переменных, x и y; поскольку мы будем работать с графиками на плоскости, удобнее всё же вернуться к стандартным переменным x и y (понятно, что результат от этого не изменится)

$$(5x + 6y > 57) \lor ((x \le A) \land (y < A))$$

2) первое выражение $(5x + 6y > 57)$ не зависит от выбора A

3) таким образом, нам нужно выбрать значение A так, чтобы условие
$(x < A)$ and $(y \le A)$
выполнялось при всех x и y, для которых ложно $(5x + 6y > 57)$, то есть истинно
$(5x + 6y \le 57)$

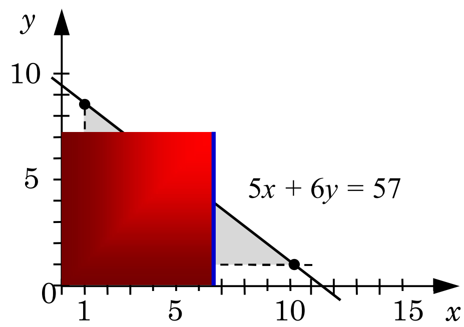
4) Нужно также учесть, что x и y положительны и добавить ещё два ограничения:
$(x \ge 1)$ *and* $(y \ge 1)$, таким образом, получаем треугольник, ограниченный линиями
$(5x + 6y = 57)$ *and* $(x \ge 1)$ *and* $(y \ge 1)$



5) для всех точек этого треугольника с целочисленными координатами должно выполняться условие

$$(x \le A) \wedge (y < A)$$

6) это значит, что треугольник (точнее, все его точки с целочисленными координатами) должен оказаться внутри квадрата со стороной A, причем в силу нестрогого неравенства $(x \le A)$ правая граница квадрата (она выделена жирной синей линией) может совпадать с точками треугольника:



7) находим точку пересечения прямых $5x + 6y = 57$ и $x = 1$: $y \approx 8{,}67$; поскольку нужно выполнить условие $(y < A)$, получаем $A > 8$
8) находим точку пересечения прямых $5x + 6y = 57$ и $y = 1$: $x = 10{,}2$; поскольку нужно выполнить условие $(x \le A)$, получаем $A \ge 10$
9) оба условия нужно выполнить одновременно, поэтому выбираем наиболее жёсткое: $A \ge 10$, что даёт $A_{min} = 10$.
10) Ответ: 10.
11) заметим, что эту простую задачу можно было решать и аналитически, учитывая, что нам достаточно рассматривать не все точки треугольника, а только отрезок прямой $5x + 6y = 57$, ограниченный прямыми $x = 1$ и $y = 1$: если все точки этого отрезка окажутся внутри красного квадрата, то и все остальные точки треугольника тоже будут внутри красного квадрата; поэтому находим максимальную целочисленную координату y на отрезке:

$$5x + 6y = 57 \text{ и } x = 1:\ y \approx 8{,}67 \Rightarrow y_{max} = 8$$

затем – максимальную целочисленную координату x на отрезке:

$$5x + 6y = 57 \text{ и } y = 1:\ x = 10{,}2 \Rightarrow x_{max} = 10$$

и выбираем наименьшее A, при котором $(y_{max} < A)$ и $(x_{max} \le A)$, то есть $A_{min} = 10$

Решение (программа на Python, Г.М. Федченко):

1) программа на Python, полный перебор:

```
def f( k, n, A ):
  return (5*k + 6*n > 57) or (k <= A) and (n < A)

for A in range(1,1000):
  OK = True
  for k in range(1,1000):
```

```
        for n in range(1,1000):
          if not f(k, n, A):
            OK = False
            break
      if OK:
        print( A )
        break
```

2) вариант без функции:

```
for A in range(1,1000):
  OK = 1
  for k in range(1,1000):
    for n in range(1,1000):
      OK *= (5*k + 6*n > 57) or (k <= A) and (n < A)
      if not OK: break
  if OK:
    print( A )
    break
```

3) Ответ: 10.

Ещё пример задания:

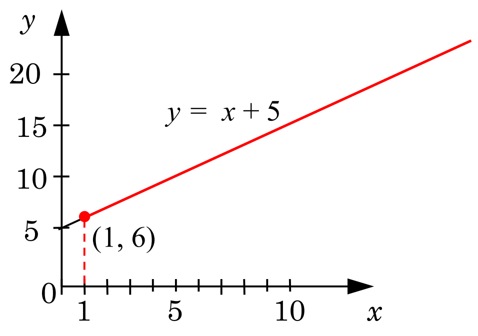
Р-33. (**С.С. Поляков**) *Укажите наибольшее целое значение А, при котором выражение*

$$(y - x \neq 5) \lor (A < 2x^3 + y) \lor (A < y^2 + 16)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Решение:

1) первое выражение $(y - x \neq 5)$ не зависит от выбора A
2) таким образом, нам нужно выбрать значение A так, чтобы условие
   $(A < 2x^3 + y)$ *or* $(A < y^2 + 16)$
   выполнялось при всех x и y, для которых ложно $(y - x \neq 5)$, то есть истинно
   $(y - x = 5)$ или $y = x + 5$
3) нарисуем линию $y = x + 5$. Нужно также учесть, что x и y положительны и добавить ещё два ограничения: $(x \geq 1)$ *and* $(y \geq 1)$.



4) находим точку пересечения прямых $y = x + 5$ и $x = 1$: $(x = 1, y = 6)$;
5) по условию задачи нужно, чтобы для всех точек прямой $y = x + 5$ справа от точки (1, 6) (они выделены красным цветом) было выполнено условие $(A < 2x^3 + y)$ ***or*** $(A < y^2 + 16)$
6) поскольку два условия связаны с помощью операции ИЛИ, достаточно выполнения одного из этих условий
7) рассмотрим условие $(A < 2x^3 + y)$; минимальные значения x и y из всех точек красного луча имеет крайняя точка (1, 6), причём здесь достигается одновременно и минимум x, и минимум y; поэтому получаем $(A < 2x^3 + y) \Rightarrow (A < 2\cdot 1^3 + 6) \Rightarrow (A < 8)$
8) для второго условия $(A < y^2 + 16)$ также рассматриваем самое жёсткое ограничение – в точке (1, 6), где значение y минимально; получаем $(A < 6^2 + 16) \Rightarrow (A < 52)$

9) Поскольку должно выполняться одно из условий $(A < 8)$ or $(A < 52)$, выбираем наименее жёсткое: $(A < 52)$
10) Ответ: 51.

Решение (программа на Python, Г.М. Федченко):

1) программа на Python, полный перебор:
```
def f( x, y, A ):
  return (y - x != 5) or (A < 2*x**3 + y) or (A < y**2 + 16)

for A in range(1,100):
  OK = True
  for k in range(1,1000):
    for n in range(1,1000):
      if not f(k, n, A):
        OK = False
        break
  if OK:
    print( A )
```
2) ещё один вариант с функцией (перебор значений A в порядке убывания):
```
def f( x, y, A ):
  return (y - x != 5) or (A < 2*x**3 + y) or (A < y**2 + 16)

for A in range(100, 0, -1):
  OK = True
  for k in range(1,1000):
    for n in range(1,1000):
      if not f(k, n, A):
        OK = False
        break
  if OK:
    print( A )
    break
```
3) вариант без функции:
```
for A in range(1,100):
  OK = 1
  for x in range(1,1000):
    for y in range(1,1000):
      OK *= (y - x != 5) or (A < 2*x**3 + y) or (A < y**2 +
16)
      if not OK: break
  if OK:
    print( A )
```
4) ещё один вариант без функции:
```
for A in range(100, 0, -1):
  OK = 1
  for x in range(1,1000):
    for y in range(1,1000):
      OK *= (y - x != 5) or (A < 2*x**3 + y) or (A < y**2 +
16)
      if not OK: break
  if OK:
    print( A )
    break
```
5) Ответ: 51.

Ещё пример задания:

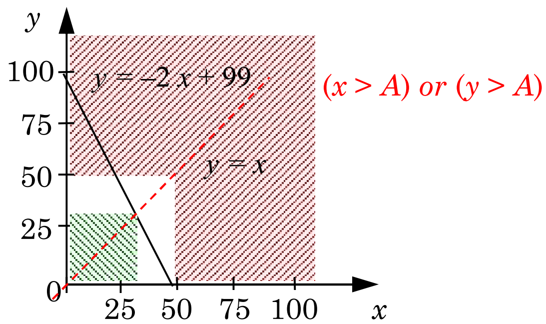
Р-32. *Укажите наибольшее целое значение А, при котором выражение*

$$(y + 2x \neq 99) \lor (y > A) \lor (x > A)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Решение:

1) первое выражение не зависит от выбора A: $(y + 2x \neq 99)$
2) таким образом, нам нужно выбрать значение A так, чтобы условие $(y > A)$ *or* $(x > A)$ выполнялось при всех x и y, для которых ложно $(y + 2x \neq 99)$, то есть истинно $(y + 2x = 99)$ или $y = -2x + 99$
3) нарисуем линию $y = -2x + 99$, а также заштрихуем область $(y > A)$ *or* $(x > A)$ для некоторого значения A, например, для $A = 50$ (конечно, нужно учесть, что x и y положительны и добавить ещё два ограничения: $(x > 0)$ *and* $(y > 0)$):



4) по условию задачи нужно, чтобы все точки отрезка прямой $y = -2x + 99$ в первой четверти плоскости оказались в заштрихованной зоне
5) поэтому все точки образовавшегося белого квадрата, в том числе и его вершина (A, A), должны находиться строго под этим отрезком; такой квадрат, соответствующий максимальному значению A, выделен на рисунке зелёной штриховкой
6) находим координаты вершины зелёного квадрата: находим точку пересечения прямых $y = -2x + 99$ и $y = x$; эта задача сводится к линейному уравнению $x = -2x + 99$ решение которого – $x = 33$
7) значение A должно быть меньше этого x, поэтому максимальное значение $A = 32$
8) Ответ: 32.

Ещё пример задания:

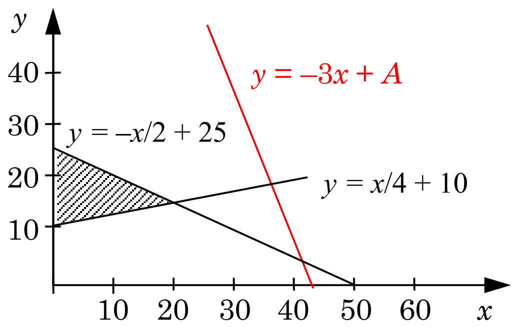
Р-31. *Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение*

$$(y + 3x < A) \lor (2y + x > 50) \lor (4y - x < 40)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Решение:

1) второе и третье выражения не зависят от выбора A: $(2y + x > 50)$ *or* $(4y - x < 40)$
2) таким образом, нам нужно выбрать значение A так, чтобы условие $(y + 3x < A)$ выполнялось при всех x и y, для которых ложно $(2y + x > 50)$ *or* $(4y - x < 40)$, то есть истинно
$(2y + x \leq 50)$ *and* $(4y - x \geq 40)$
3) последние два условия можно переписать в виде
$(y \leq -x/2 + 25)$ *and* $(y \geq x/4 + 10)$
4) поскольку по условию x и y должны быть положительны, добавляем ещё два условия:
$(y \leq -x/2 + 25)$ *and* $(y \geq x/4 + 10)$ *and* $(x > 0)$ *and* $(y > 0)$
5) изобразим схематично на плоскости $x - y$ эту область (она заштрихована):



6) для всех точек этой области должно выполняться условие $y + 3x < A$, равносильное условию
$y < -3x + A$
7) это значит, что вся область должна лежать ниже линии $y = -3x + A$; одна такая подходящая линия показана на рисунке сверху
8) из рисунка видно, что при параллельном переносе вниз, соответствующем изменению A, она коснётся заштрихованной области в правой вершине заштрихованного треугольника
9) найдём эту точку пересечения:
$y = -x/2 + 25 = x/4 + 10 \Rightarrow x = 20, y = 15$
10) поэтому допустимые значение A определяются условием:
$15 < -3\cdot 20 + A \Rightarrow A > 75$
откуда следует, что $A_{\min} = 76$.
11) Ответ: 76.

Примечание: фактически эта задача представляет собой задачу целочисленного **линейного программирования**, на что впервые обратил внимание ***Б.А. Державец***[26].

Решение (программа на Python, Г.М. Федченко):

1) программа на Python, полный перебор:
```
def f( x, y, A ):
  return (y + 3*x < A) or (2*y + x > 50) or (4*y - x < 40)

for A in range(1, 200):
  OK = True
  for x in range(1,1000):
    for y in range(1,1000):
      if not f(x, y, A):
        OK = False
        break
  if OK:
    print( A )
    break
```
2) вариант без функции:
```
for A in range(1, 200):
  OK = 1
  for x in range(1,1000):
    for y in range(1,1000):
      OK *= (y + 3*x < A) or (2*y + x > 50) or (4*y - x < 40)
      if not OK: break
  if OK:
    print( A )
    break
```
3) Ответ: 76.

[26] http://informatics-ege.blogspot.ru/2018/05/simplex-method-and-task-18-advanced_16.html

Ещё пример задания:

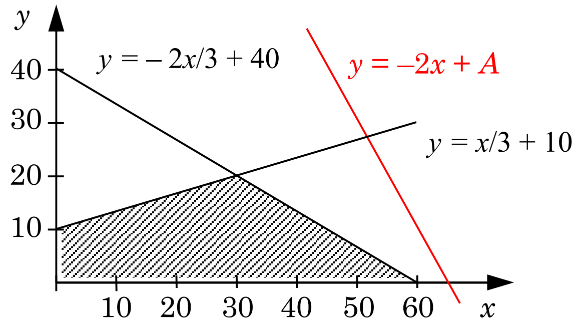
Р-30. *Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение*

$$(y + 2x < A) \lor (3y + 2x > 120) \lor (3y - x > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Решение:

1) второе и третье выражения не зависят от выбора A: $(3y + 2x > 120)$ *or* $(3y - x > 30)$
2) таким образом, нам нужно выбрать значение A так, чтобы условие $(y + 2x < A)$ выполнялось при всех x и y, для которых ложно $(3y + 2x > 120)$ *or* $(3y - x > 30)$, то есть истинно
   $(3y + 2x \le 120)$ *and* $(3y - x \le 30)$
3) последние два условия можно переписать в виде
   $(y \le -2x/3 + 40)$ *and* $(y \le x/3 + 10)$
4) поскольку по условию x и y должны быть положительны, добавляем ещё два условия:
   $(y \le -2x/3 + 40)$ *and* $(y \le x/3 + 10)$ *and* $(x > 0)$ *and* $(y > 0)$
5) изобразим схематично на плоскости $x - y$ эту область (она заштрихована):



6) для всех точек этой области должно выполняться условие $y + 2x < A$, равносильное условию
   $y < -2x + A$
7) это значит, что вся область должна лежать ниже линии $y = -2x + A$; одна такая подходящая линия показана на рисунке сверху
8) поскольку коэффициент наклона этой линии (–2) по модулю больше, чем коэффициент прямой $y = -2x/3 + 40$, при параллельном переносе вниз, соответствующем изменению A, она коснётся заштрихованной области не в вершине , а в угловой точке около оси ОХ
9) таким образом третье условие не влияет на результат, и для всех x > 0 и y > 0, удовлетворяющих условию $3y + 2x \le 120$, нужно обеспечить выполнение условия
   $y < -2x + A$
10) умножим обе части последнего неравенства на 3: $3y < -6x + 3A$
11) теперь, учитывая, что $3y \le -2x + 120$, получаем, что максимальное значение 3y, которое нужно «перекрыть», равно $-2x + 120$
12) поэтому получаем $-2x + 120 < -6x + 3A$ или $3A > 120 + 4x$
13) максимально возможное значение x, удовлетворяющее условию $3y + 2x \le 120$, определяется подстановкой минимального y, равного 1: $3 + 2x \le 120 \Rightarrow 2x \le 117 \Rightarrow x_{max} = 58$
14) поэтому допустимые значение A определяются условием:
    $3A > 120 + 4x_{max} = 120 + 4\cdot 58 = 352$
    откуда следует, что $A > 117,(6)$, то есть $A_{min} = 118$.
15) Ответ: 118.

Ещё пример задания:

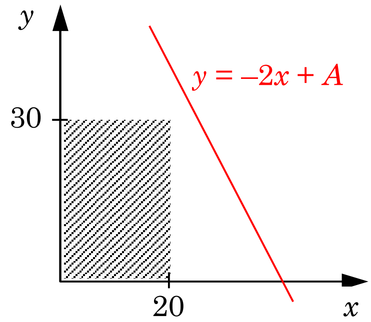
Р-29. *Укажите наименьшее целое значение А, при котором выражение*

$$(y + 2x < A) \lor (x > 20) \lor (y > 30)$$

истинно для любых целых положительных значений x и y.

Решение:

1) второе и третье выражения не зависят от выбора A: $(x > 20)$ *or* $(y > 30)$
2) таким образом, нам нужно выбрать значение A так, чтобы условие $(y + 2x < A)$ выполнялось при всех x и y, для которых ложно $(x > 20)$ *or* $(y > 30)$, то есть истинно $(x \le 20)$ *and* $(y \le 30)$
3) поскольку по условию x и y должны быть положительны, добавляем ещё два условия: $(x \le 20)$ *and* $(y \le 30)$ *and* $(x > 0)$ *and* $(y > 0)$
4) изобразим схематично на плоскости $x – y$ эту область (она заштрихована):



5) для всех точек этой области должно выполняться условие $y + 2x < A$, равносильное условию
$y < -2x + A$
6) это значит, что вся область должна лежать ниже линии $y = -2x + A$; одна такая подходящая линия показана на рисунке сверху
7) очевидно, что минимальное значение A соответствует ситуации, когда при параллельном переносе показанной линии вниз, соответствующем изменению A, она коснётся правого верхнего угла заштрихованного прямоугольника, то есть пройдёт через точку $(x = 20, y = 30)$
8) поэтому допустимые значение A определяются условием:
$30 < -2 \cdot 20 + A$
откуда следует, что $A > 70$, то есть $A_{\min} = 71$.
9) Ответ: 71.

Ещё пример задания:

Р-28. *На числовой прямой даны отрезки A = [70; 90], B = [40; 60] и C = [0; N] и функция*

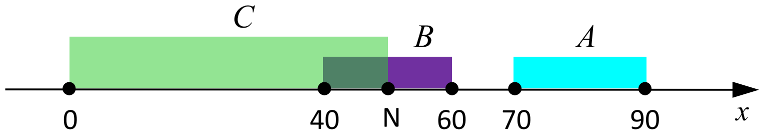
$$F(x) = (\neg (x \in A) \to (x \in B)) \land (\neg (x \in C) \to (x \in A))$$

При каком наименьшем числе N функция $F(x)$ истинна более чем для 30 целых чисел x?

Решение:

1) для сокращения записи введём обозначения
$$\boldsymbol{A} = (x \in A),\ \boldsymbol{B} = (x \in B),\ \boldsymbol{C} = (x \in C).$$
фактически $\boldsymbol{A}(x)$ – это логическая функция, определяющая принадлежность числа x отрезку A
2) запишем функцию в виде:
$F(x) = (\overline{A} \to B)(\overline{C} \to A) = (A + B)(C + A)$
3) используя распределительный закон логики, упрощаем:
$F(x) = A + B \cdot C$

4) это значит, что функция истинна на всём отрезке A (там 21 целое число) и на общей части отрезков *B и C*, где должно быть не менее 31 – 21 = 10 целых чисел
5) нарисуем отрезки на числовой оси:



6) по рисунку видно, что
   а) при $N < 40$ отрезки B и C не имеют общей части
   б) при N ∈ [40; 60] общая части отрезков B и C – это отрезок [40; N], на нём расположены
   N – 40 + 1 целых чисел
   в) при $N > 60$ общая части отрезков B и C совпадает с отрезком B, ему принадлежит 21 целое число
7) таким образом, функция $F(x)$ может быть истинной не более чем для 42 целых чисел
8) если требуется обеспечить её истинность для 31 целого числа, нужно выбрать N из условия
   N – 40 + 1 = 10, откуда N = 49
9) Ответ: 49.

Решение (программа на Python, А.Н. Носкин):

1) Упрощаем выражение: $F(x) = A + B \cdot C$
2) Примем отрезки за множество, тогда все числа отрезков будут элементами соответствующего множества. Сумма количества элементов множества А и количества элементов, которые соответствуют пересечению множеств В и С должна быть более 30.
3) Создадим множества А, В и С:
```
A = {i for i in range(70,91)} #множество A
B = {i for i in range(40,61)} # множество B
C = set() #множество C
```
4) В цикле будем добавлять элементы в множество С, пока сумма элементов А + В*С не достигнет более 30.
```
for N in range(90):
  C.add(N)
```
   Если такое число достигнуто, то выводим ответ:
```
if (len(A)+ len(B&C))>30:
  print(N)
  break
```
5) Приведем полную программу:
```
A = {i for i in range(70,91)} # множество A
B = {i for i in range(40,61)} # множество B
C = set() # множество C
for N in range(90):
  C.add(N)
  if (len(A)+ len(B&C))>30:
    print(N)
    break
```
6) Ответ: 49.

Ещё пример задания:

Р-27. *Известно, что для некоторого отрезка А формула*

$$((x \in A) \to (x^2 \le 64)) \wedge ((x^2 \le 25) \to (x \in A))$$

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при всех вещественных значениях переменной x). Какую наименьшую длину может иметь отрезок А?

Решение:

1) заметим, что здесь два условия объединяются с помощью логической операции «И»:
   $(x \in A) \to (x^2 \le 64)$
   $(x^2 \le 25) \to (x \in A)$
2) рассмотрим первое условие; чтобы импликация была истинна, при истинной левой части (посылке) вторая часть (следствие) тоже должна быть истинна
3) это значит, что если x принадлежит отрезку A, должно выполняться условие $x^2 \le 64$, то есть
   $|x| \le 8$, поэтому отрезок A должен целиком содержаться внутри отрезка [–8; 8]
4) теперь рассмотрим второе условие: если $x^2 \le 25$, то есть если $|x| \le 5$, то такой x должен принадлежать отрезку A
5) это значит, что весь отрезок [–5; 5] должен находиться внутри A, длина этого отрезка – 10.
6) Ответ: 10.

Ещё пример задания:

Р-26 (демо-2018). *Для какого наибольшего целого числа А формула*

$$((x \le 9) \to (x \cdot x \le A)) \wedge ((y \cdot y \le A) \to (y \le 9))$$

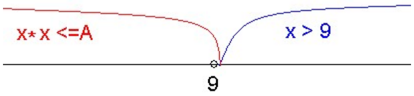
тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любых целых неотрицательных значениях переменных x и y)?

Решение:

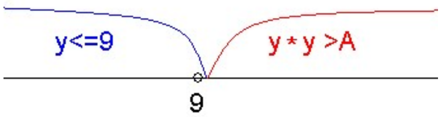
1) заметим, что здесь два условия, которые объединяются с помощью логической операции «И»:
   $(x \le 9) \to (x \cdot x \le A)$
   $(y \cdot y \le A) \to (y \le 9)$
2) необходимо, чтобы оба условия были выполнены одновременно; к счастью, первое зависит только от переменной x, а второе – только от переменной y, поэтому их можно рассматривать отдельно: каждое из них задает некоторое ограничение на значение A
3) рассмотрим первое условие: $(x \le 9) \to (x \cdot x \le A)$. Для того чтобы импликация была истинной, нужно не допустить варианта 1 → 0, то есть при истинной левой части правая часть тоже должна быть истинной.
4) это значит, что для всех $0 \le x \le 9$ мы должны обеспечить $x \cdot x \le A$, то есть выбрать $A \ge x \cdot x$ для все допустимых значений x. Очевидно, что для этого необходимо и достаточно выбрать $A \ge 9 \cdot 9 = 81$. Таким образом, мы определили минимальное допустимое значение $A = 81$.
5) теперь рассмотрим второе условие: $(y \cdot y \le A) \to (y \le 9)$. Чтобы оно было истинно, нужно не допустить варианта 1 → 0. Выбором А мы можем влиять на левую часть, но не на правую. «Угрозу» представляет вариант, когда правая часть ложна, то есть $y > 9$. В этом случае нам нужно сделать левую часть ложной, то есть обеспечить выполнение условия $y \cdot y > A$.
6) для выбора максимального A возьмем минимальное значение y, для которого $y > 9$. Это даёт условие $10 \cdot 10 > A$, откуда следует $A < 100$
7) таким образом, максимально допустимое значение A равно 99.
8) Ответ: 99.

Решение (через отрезки, А.Н. Евтеев, Тульская обл.):

1) Если заменить неравенства буквами, то формула в общем виде будет выглядеть так:
$$(P \to Q) \wedge (R \to S)=1$$
2) Перейдём от импликаций в скобках к логическому сложению, получим:
$$(\neg P + Q) \wedge (\neg R + S)=1$$
3) Поскольку между скобками мы имеем логическое умножение, истинное лишь при истинности обоих сомножителей, можем перейти к системе:
   $\neg P + Q = 1$
   $\neg R + S=1$
4) Вернёмся от букв к исходным неравенствам, учитывая инверсию:
   $(x > 9) + (x \cdot x \le A)=1$
   $(y \cdot y > A) + (y \le 9) =1$
5) Перейдём к числовой прямой. Чтобы формула была истинной, каждая записанная выше сумма должна закрывать всю ось. Для первого выражения это будет выглядеть так:



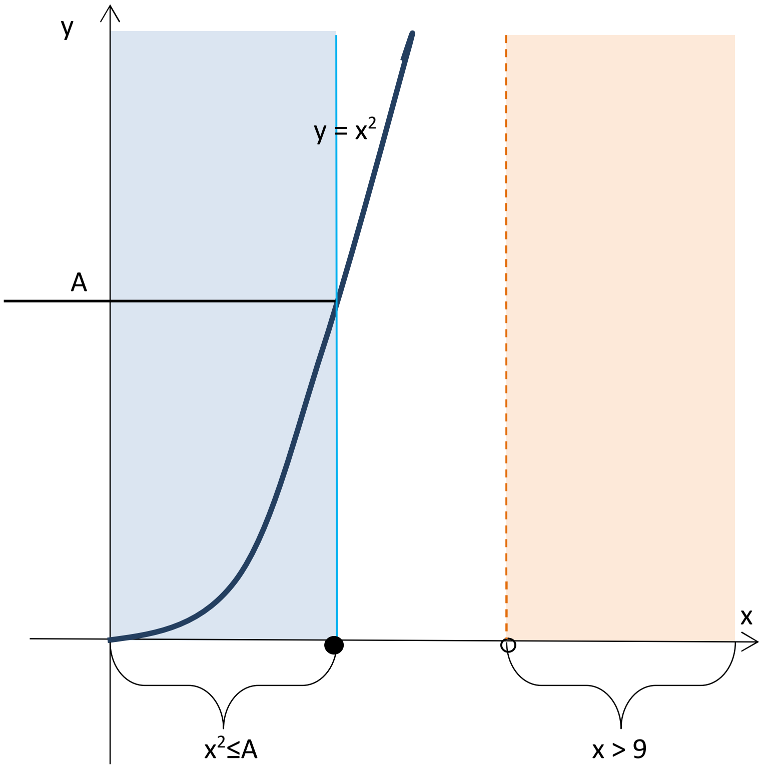
6) Интервал от 10 и далее закрывает неравенство $x > 9$, а интервал от 0 до 9 включительно закрывает неравенство $x \cdot x \le A$. И поскольку x на этом интервале не превышает 9, выражение $x \cdot x \le A$ будет истинным уже при A=81
7) Аналогично для второй суммы:



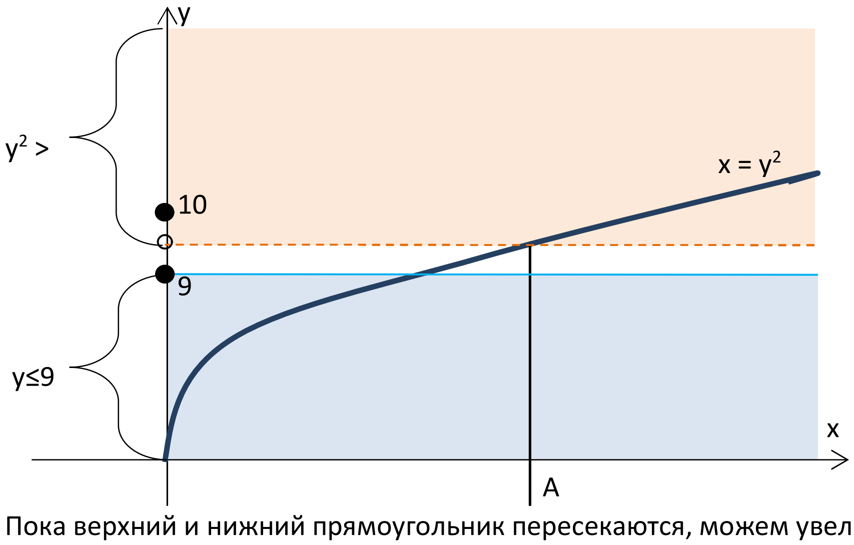
8) Интервал от 0 до 9 включительно закрывает неравенство $y \le 9$, а интервал от 10 и далее закроет неравенство $y \cdot y > A$. И поскольку значения y начнутся здесь с 10, а y·y =100, то выражение гарантированно будет истинным, если А будет меньше 100, то есть, не будет превышать 99.
9) Ответ: 99.

Решение (графическое, О.В. Алимова):

1) Перейдем к системе и избавимся от импликации
$$\begin{cases} (x > 9) + (x \cdot x \le A) = 1 \\ (y \cdot y > A) + (y \le 9) = 1 \end{cases}$$
2) Так как уравнения независимы, то можно рассматривать их отдельно. Согласно условию нас будет интересовать только I четверть.
3) Построим множества, удовлетворяющие первому уравнению.
   a. дизъюнкция – объединение множеств
   b. от *y* в первом уравнении ничего не зависит, то есть, если для какого-то x неравенство выполнилось, то оно будет выполняться для этого x при любом y, следовательно можем рассматривать области плоскости, а не только отрезки/интервалы на оси OX
   c. для точек правой границы левого прямоугольника условие $x^2 \le A$ выполняется
   d. для точек левой границы правого прямоугольника условие $x > 9$ не выполняется



4) При увеличении значения А, ширина левого прямоугольника будет увеличиваться, и при $A = 81$, объединение прямоугольников закроет все значения x. Это наименьшее возможное значение A. При дальнейшем увеличении A, будет расти область пересечения прямоугольников, но все значения x, будут входить в объединение прямоугольников.
5) Рассмотрим второе уравнение. Множества удовлетворяющие этому уравнению будут выглядеть так:



6) Пока верхний и нижний прямоугольник пересекаются, можем увеличивать A.
7) Значение A можно увеличивать и дальше, пока в область объединения прямоугольников не перестанет попадать целое значение y. A это произойдет при $A=100$, для $y=10$ неравенство $y^2 > A$ перестанет выполняться. Наибольшее значение $A=99$.
8) Ответ: 99.
9) **Замечания**. В зависимости от строгости(не строгости) неравенств в исходном уравнении, будут включатся или исключатся точки, лежащие на границе соответствующей области.
   Так значение A для уравнения $(x < 9) \rightarrow (x \cdot x \le A) = 1$ будет 64,

для уравнения $(x < 9) \to (x \cdot x < A) = 1$ будет 65,
а для уравнения $(x \le 9) \to (x \cdot x < A) = 1$ будет 82. Аналогично, во втором уравнении, могут получиться числа 100, 81, 80.

Решение (М.В. Кузнецова):

1) Заметим, что данная формула содержит конъюнкцию двух импликаций. Конъюнкция истинна только, если оба операнда равны 1, т.е. **обе импликации должны быть равны 1**, для этого надо исключить ситуации $1 \to 0$, переведя их к истинным импликациям $1 \to 1$ или $0 \to 0$.
2) Дальнейшие рассуждения оформим в таблице.

Формула[*]	$((x \le 9) \to (A \ge x \cdot x))$		$\wedge$ $((A \ge y \cdot y) \to (y \le 9))$	
Изменяемое выражение[**]	-	+	+	-
Нельзя допустить	1	0	1	0
Надо обеспечить	1	1	0	0
Новые выражения	$x \le 9$, $x \in [0;9]$	$A \ge x \cdot x$	$A < y \cdot y$	$y > 9$, $y \in [10; \infty)$
Выводы	$A \ge 9 \cdot 9$, $A_{min} = 81$		$A < 10 \cdot 10$, $A_{max} = 99$	

Пояснения

[*] *При переписывании формулы в неравенствах с «А» меняем местами левую и правую часть, т.е. «А» пишем слева.*

[**] *Помечаем символом «+» элементы формулы, содержащие «А», изменяя значения которых должны исключить неблагоприятные ситуации.*

3) Ответ: 99.

Решение (программа на Python, А. Носкин):

1) Программа на Python, перебор вариантов:
```
a = [] # список для хранения значений A
for A in range(1,200):
  k = 1 # флаг
  for x in range(1,100):
    for y in range(1,100):
      if (((x<=9)<=(x*x<=A))and((y*y<=A)<=(y<=9)))==False:
        k = 0 # появился X или Y, при котором ЛОЖЬ
        break
  if k == 1: # все числа X и Y перебрали
    a.append( A )
print( max(a) )
```
2) Ответ: 99.

Ещё пример задания:

Р-25. *Введём выражение M & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число a, такое что выражение*

$$(x \,\&\, 125 \ne 1) \vee ((x \,\&\, 34 = 2) \to (x \,\&\, a = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

1) используя результаты теоретической части, перепишем выражение в виде
$\overline{Z}_{124} + Z_1 + (Z_{32} \cdot \overline{Z}_2 \to A) = 1$

где $Z_{124} = (x \,\&\, 124 = 0)$, $Z_1 = (x \,\&\, 1 = 0)$, $Z_2 = (x \,\&\, 2 = 0)$, $\mathbf{A} = (x \,\&\, a = 0)$

2) раскроем импликацию по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:
   $\overline{Z}_{124} + Z_1 + \overline{Z_{32} \cdot \overline{Z}_2} + A = 1$
3) применим закон де Моргана $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$:
   $\overline{Z}_{124} + Z_1 + \overline{Z}_{32} + Z_2 + A = 1$
4) перейдём к импликации, в которой нет выражений с инверсиями (операциями «НЕ»):
   $(\overline{Z}_{124} + \overline{Z}_{32}) + Z_1 + Z_2 + A = 1$
   $(\overline{Z_{124} \cdot Z_{32}}) + Z_1 + Z_2 + A = 1$
   $(Z_{124} \cdot Z_{32}) \to (Z_1 + Z_2 + A) = 1$
5) преобразуем левую часть выражения:
   $Z_{124} \cdot Z_{32} = Z_{124 \text{ or } 32} = Z_{124}$
   так что $Z_{124} \to (Z_1 + Z_2 + A) = 1$
6) используя свойство импликации $A \to (B + C) = (A \to B) + (A \to C)$, получаем
   $Z_{124} \to (Z_1 + Z_2 + A) = (Z_{124} \to Z_1) + (Z_{124} \to Z_2) + (Z_{124} \to A)$
7) представим числа в двоичной системе счисления:
   $124 = 1111100_2$, $1 = 1_2$, $2 = 10_2$
8) поскольку двоичная запись чисел 1 и 2 содержит единичные биты, которых нет в наборе единичных битов числа 124, имеем
   $Z_{124} \to Z_1 = 0,\ Z_{124} \to Z_2 = 0$
   в том смысле, что найдутся такие значения x, при которых эти выражения ложны.
9) тогда для истинности заданного выражения остаётся обеспечить истинность $Z_{124} \to A$ при всех x, а это условие будет выполняться тогда и только тогда, когда все единичные биты двоичной записи числа *a* входят во множество единичных битов числа $124 = 1111100_2$; таким образом, минимальное подходящее положительное значение $a - 2^2 = 4$, а максимальное – 124.
10) Ответ: 4.

Решение (программа на Python, Г.М. Федченко):

1) программа на Python, полный перебор:

```
def f( x, a ):
  return (x & 125 != 1) or ((x & 34 == 2) <= (x & a == 0))

for a in range(1, 1000):
  OK = True
  for x in range(1,1000):
    if not f(x, a):
      OK = False
      break
  if OK:
    print( a )
    break
```

2) вариант без функции:

```
for a in range(1, 1000):
  OK = 1
  for x in range(1,1000):
    OK *= (x & 125 != 1) or ((x & 34 == 2) <= (x & a == 0))
    if not OK: break
  if OK:
    print( a )
    break
```

3) Ответ: 4.

Ещё пример задания:

Р-24. *Введём выражение М & К, обозначающее поразрядную конъюнкцию М и К (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наименьшее натуральное число a, такое что выражение*

$$((x \,\&\, 28 \neq 0) \vee (x \,\&\, 45 \neq 0)) \to ((x \,\&\, 48 = 0) \to (x \,\&\, a \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

1) Введём обозначения:
$Z_{28} = (x \,\&\, 28 = 0)$, $Z_{45} = (x \,\&\, 45 = 0)$, $Z_{48} = (x \,\&\, 48 = 0)$, $\mathbf{A} = (x \,\&\, a = 0)$
2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации:
$$(\overline{Z}_{28} + \overline{Z}_{45}) \to (Z_{48} \to \overline{A}) = \overline{\overline{Z}_{28} + \overline{Z}_{45}} + (Z_{48} \to \overline{A}) = Z_{28} \cdot Z_{45} + \overline{Z}_{48} + \overline{A}$$
3) перейдем к импликации, используя закон де Моргана:
$$Z_{28} \cdot Z_{45} + \overline{Z}_{48} + \overline{A} = \overline{Z_{48} \cdot A} + Z_{28} \cdot Z_{45} = (Z_{48} \cdot A) \to Z_{28} \cdot Z_{45}$$
4) преобразуем выражение в правой части по формуле $Z_K \cdot Z_M = Z_{K \text{ or } M}$, выполнив поразрядную дизъюнкцию (операцию ИЛИ):
```
        28 = 011100
        45 = 101101
  28 or 45 = 111101 = 61
```
получаем $(Z_{48} \cdot A) \to Z_{61}$
5) для того, чтобы выражение $(Z_{48} \cdot A) \to Z_{61}$ было истинно для всех x, нужно, чтобы двоичная запись числа 48 **or** a содержала все единичные биты числа 61. Таким образом, с помощью числа а нужно добавить те единичные биты числа 61, которых «не хватает» в числе 48:
```
  48 = 110000
   a = **11*1
  61 = 111101
```
биты, обозначенные звездочками, могут быть любыми.
6) поскольку нас интересует минимальное значение a, все биты, обозначенные звездочкой, можно принять равными нулю.
7) получается А = $2^3 + 2^2 + 2^0 = 13$
8) Ответ: 13.

Ещё пример задания (М.В. Кузнецова):

Р-23. *Введём выражение М & К, обозначающее поразрядную конъюнкцию М и К (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное число a, такое что выражение*

$$(((x \,\&\, a \neq 0) \wedge (x \,\&\, 12 = 0)) \to ((x \,\&\, a = 0) \wedge (x \,\&\, 21 \neq 0))) \vee ((x \,\&\, 21 = 0) \wedge (x \,\&\, 12 = 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной X)?

Решение:

1) Введём обозначения:
$Z_{12} = (X \,\&\, 12 = 0)$, $Z_{21} = (X \,\&\, 21 = 0)$, $\mathbf{A} = (X \,\&\, a = 0)$
2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации:
$$((\overline{A} \cdot Z_{12}) \to (A \cdot \overline{Z}_{21})) + Z_{21} \cdot Z_{12} = (\overline{\overline{A} \cdot Z_{12}} + A \cdot \overline{Z}_{21}) + Z_{21} \cdot Z_{12} =$$
$$(A + \overline{Z}_{12} + A \cdot \overline{Z}_{21}) + Z_{21} \cdot Z_{12}$$

Выражение в первой скобке упрощаем, используя следствие из распределительного закона $A + A \cdot B = A$

$$A + \overline{Z}_{12} + A \cdot \overline{Z}_{21} = A + \overline{Z}_{12}$$

Полученное выражение также можно упростить, используя ещё одно следствие из распределительного закона $A + \overline{A} \cdot B = A + B$

$$A + \overline{Z}_{12} + Z_{21} \cdot Z_{12} = A + \overline{Z}_{12} + Z_{21}$$

3) перейдем к импликации, избавившись от инверсии:

$$A + \overline{Z}_{12} + Z_{21} = Z_{12} \to (A + Z_{21}) = (Z_{12} \to A) + (Z_{12} \to Z_{21})$$

4) поскольку множество единичных битов числа 21 = 10101_2 не входит во множество единичных битов числа 12 = 1100_2, импликация $Z_{12} \to Z_{21}$ ложна для некоторых x; поэтому нужно обеспечить истинность выражения $Z_{12} \to A$
5) выражение $Z_{12} \to A$ истинно при условии, что множество единичных битов числа a входит во множество единичных битов числа 12, поэтому в двоичной записи числа a ненулевыми могут быть только биты в разрядах 2 и 3
6) поэтому $a_{max} = 2^3 + 2^2 = 12$.
7) Ответ: 12.

Решение (программа на Python, Г.М. Федченко):

1) программа на Python, полный перебор:

```
def f( x, a ):
  return ( ((x & a != 0) and (x & 12 == 0)) <= \
           ((x & a == 0) and (x & 21 != 0)) ) or \
           (x & 21 == 0) and (x & 12 == 0)

for a in range(1, 1000):
  OK = True
  for x in range(1,1000):
    if not f(x, a):
      OK = False
      break
  if OK:
    print( a )
```

2) вариант без функции:

```
for a in range(1, 1000):
  OK = 1
  for x in range(1,1000):
    OK *= ( ((x & a != 0) and (x & 12 == 0)) <= \
            ((x & a == 0) and (x & 21 != 0)) ) or \
            (x & 21 == 0) and (x & 12 == 0)
    if not OK: break
  if OK:
    print( a )
```

3) Ответ: 12.

Ещё пример задания:

Р-22. Введём *выражение M & K, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите* ***наименьшее*** *натуральное число a, такое что выражение*

$$(x \,\&\, 49 \neq 0) \to ((x \,\&\, 33 = 0) \to (x \,\&\, a \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение (1 способ):

1) введём обозначения:
   $Z_{49} = (x \,\&\, 49 = 0)$, $Z_{33} = (x \,\&\, 33 = 0)$, $A = (x \,\&\, a = 0)$
2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации $A \to B = \overline{A} + B$ и закон де Моргана $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B}$:
   $$\overline{Z}_{49} \to (Z_{33} \to \overline{A}) = Z_{49} + (Z_{33} \to \overline{A}) = Z_{49} + \overline{Z}_{33} + \overline{A} = Z_{49} + \overline{Z_{33} \cdot A}$$
3) переходим к импликации, избавляясь от инверсий:
   $Z_{49} + \overline{Z_{33} \cdot A} = (Z_{33} \cdot A) \to Z_{49}$
4) чтобы это выражение было истинным, нужно, чтобы множество единичных битов числа 33 **or** a перекрывало множество единичных битов числа 49; с помощью a можно добавить недостающие биты:
```
33 = 100001
 a = *1****
49 = 110001
```
5) чтобы выбрать минимальное a, биты, обозначенные звездочками, примем равными нулю; получаем число $10000_2 = 16 = 2^4$.
6) Ответ: 16.

Решение (2 способ, Н.Г. Неуймина, г. Екатеринбург):

1) введём обозначения:
   $\mathbf{P} = (X \,\&\, 49 \neq 0)$, $\mathbf{Q} = (X \,\&\, 33 = 0)$, $\mathbf{A} = (X \,\&\, A \neq 0)$
2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации $A \to B = \overline{A} + B$:
   $$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \to \mathbf{A}) = \overline{\mathbf{P}} + (\mathbf{Q} \to \mathbf{A}) = \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A}$$
3) чтобы формула была тождественно истинной для любых X необходимо, чтобы при $\overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}} = 0$ было $\mathbf{A}=1$
4) имеем $\overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = 1$;
5) посмотрим, какими свойствами должен обладать X для того, чтобы было $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = 1$
6) если $\mathbf{Q} = 1$, то есть, $(X \,\&\, 33 = 0)$, имеем
```
номер бита  5 4 3 2 1 0
     X  =  0bcde0
    33  =  100001
X & 33  =  000000
```
   это значит, что биты {5, 0} – нулевые
7) если одновременно $\mathbf{P} = 1$, то есть, $(X \,\&\, 49 \neq 0)$, имеем
```
номер бита  5 4 3 2 1 0
     X  =  0bcde0
    49  =  110001
X & 49  =  0b0000
```
   это значит, что бит 4 в X – обязательно ненулевой
8) из 6 и 7 делаем вывод, что для выполнения условия $\mathbf{A} = (X \,\&\, A \neq 0) = 1$ необходимо, чтобы, по крайней мере, бит 4 числа A был ненулевым (так как биты {3,2,1} в X могут быть нулевые!)
9) поскольку нужно найти наименьшее подходящее A, получаем ответ $2^4 = 16$
10) Ответ: 16.

Решение (3 способ, А.В. Лаздин, НИУ ИТМО):

1) если $X \,\&\, 49 = 0$, то исходное выражение истинно, независимо от значения числа А; значит, значение числа А влияет на решение задачи только при выполнении условия:
   1. $X \,\&49 \neq 0$.
2) тогда исходное выражение может быть представлено в виде:
   $$1 \to ((X \,\&\, 33 = 0) \to (X \,\&\, A \neq 0)) \qquad (2)$$
3) Для того чтобы это выражение было истинным, необходимо, чтобы выражение

$$(X \& 33 = 0) \rightarrow (X \& A \neq 0)$$

было истинным, при этом, если $X \& 33 \neq 0$, то это выражение истинно независимо от значения числа A (импликация из 0 в 1).

4) следовательно, значение числа A влияет на принимаемое исходным выражением значение только при одновременном соблюдении двух условий:
   1. $X \& 49 \neq 0$
   2. $X \& 33 = 0$
5) исходное выражение принимает следующий вид:
   $$1 \rightarrow (1 \rightarrow (X \& A \neq 0)) \qquad (3)$$
6) для того чтобы это выражение приняло значение 1, необходимо, чтобы выполнилось третье условие:
   3. $X \& A \neq 0$.

```
49₁₀  = 110001₂
33₁₀  =100001₂
X       010000
```

7) условия 1 и 2 выполняются, если пятый бит числа X равен 1.
8) значит условие № 3 выполняется, если пятый бит числа A равен 1
9) число A минимально, если младшие разряды этого числа равны 0
10) Ответ: 16.

Решение (4 способ, М.В. Кузнецова):

1) Введём обозначения:
   $\mathbf{P} = (X \& 49 \neq 0)$, $\mathbf{Q} = (X \& 33 \neq 0)$, $\mathbf{A} = (X \& A \neq 0)$
2) Перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации $A \rightarrow B = \overline{A} + B$:
   $$\mathbf{P} \rightarrow (\overline{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{A}) = \overline{\mathbf{P}} + (\overline{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{A}) = \overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} + \mathbf{A}$$
3) Чтобы формула была тождественно истинной для любых X необходимо, чтобы при $\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = 0$ было A=1, т.е $\mathbf{A} = \overline{\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}} = \mathbf{P} \cdot \overline{\mathbf{Q}}$.
4) Значит, А =1 тогда и только тогда, когда $\mathbf{P} = \overline{\mathbf{Q}} = 1$.
5) Запишем двоичное представление чисел 49 и 33, на их основе составим маски возможных значений числа х, таких, что $\mathbf{P} = \overline{\mathbf{Q}} = 1$. В маске «1» - соответствует <u>возможному</u> положению 1, «0» - <u>обязательному</u> положению 0 в двоичной записи числа х.

Номер бита	5	4	3	2	1	0
Вес разряда	32	16	8	4	2	1
Двоичная запись 49	1	1	0	0	0	1
Двоичная запись 33	1	0	0	0	0	1
Маска мин. х, для Р=1 (х & 49 ≠ 0)	1	1	0	0	0	1
Маска мин. х, для $\overline{\mathbf{Q}}$ =1 (х & 33 = 0)	0	1	1	1	1	0
А = (х & 49 ≠ 0) and (х & 33 = 0)	0	1	0	0	0	0

6) Ответ: 16.

Ещё пример задания:

Р-21. Введём *выражение $M \& K$, обозначающее поразрядную конъюнкцию M и K (логическое «И» между соответствующими битами двоичной записи). Определите наибольшее натуральное число a, такое что выражение*

$$(x \& a \neq 0) \rightarrow ((x \& 20 = 0) \rightarrow (x \& 5 \neq 0))$$

тождественно истинно (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

1) введём обозначения:
$Z_{20} = (x \,\&\, 20 = 0)$, $Z_5 = (x \,\&\, 5 = 0)$, $A = (x \,\&\, a = 0)$
2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации $A \to B = \overline{A} + B$ и закон де Моргана $\overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B}$:
$$\overline{A} \to (Z_{20} \to \overline{Z}_5) = A + (Z_{20} \to \overline{Z}_5) = A + \overline{Z}_{20} + \overline{Z}_5 = A + \overline{Z_{20} \cdot Z_5}$$
3) преобразуем это выражение в импликацию, избавившись от инверсии:
$$A + \overline{Z_{20} \cdot Z_5} = (Z_{20} \cdot Z_5) \to A$$
4) заменим $Z_{20} \cdot Z_5$ на $Z_{20 \text{ or } 5}$:
```
        20  =  10100
         5  =  00101
   20 or 5  =  10101  =  21
```
5) таким образом, нужно обеспечить истинность выражения $Z_{21} \to A$ при всех x
6) это возможно только тогда, когда множество единичных битов числа a входит во множество единичных битов числа 21
7) поэтому максимальное $a_{max} = 10101_2 = 21$
8) Ответ: 21.

Решение (2 способ, Н.Г. Неуймина, г. Екатеринбург):

1) введём обозначения:
$\mathbf{P} = (X \,\&\, 20 = 0)$, $\mathbf{Q} = (X \,\&\, 5 = 0)$, $\mathbf{A} = (X \,\&\, A = 0)$
2) перепишем исходное выражение и преобразуем его, используя свойство импликации $A \to B = \overline{A} + B$:
$$\overline{\mathbf{A}} \to (\mathbf{P} \to \overline{\mathbf{Q}}) = \mathbf{A} + (\mathbf{P} \to \overline{\mathbf{Q}}) = \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}}$$
3) чтобы формула была тождественно истинной для любых X необходимо, чтобы при $\overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}} = 0$ было $\mathbf{A}=1$
4) имеем $\overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q}} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = 1$;
5) посмотрим, какими свойствами должен обладать X для того, чтобы было $\mathbf{P} = \mathbf{Q} = 1$
6) если $\mathbf{Q} = 1$, то есть, $(X \,\&\, 5 = 0)$, имеем
```
номер бита  4 3 2 1 0
         X  =  ab0d0
         5  =  00101
     X & 5  =  00000
```
это значит, что биты {2, 0} – нулевые
7) если одновременно $\mathbf{P} = 1$, то есть, $(X \,\&\, 20 = 0)$, имеем
```
номер бита  4 3 2 1 0
         X  =  0b0d0
        20  =  10100
    X & 20  =  00000
```
это значит, что бит 4 в X – обязательно нулевой
8) так как биты {3,1} числа X могут быть ненулевыми, в этих разрядах числа A должны стоять нули, а вот биты {4,2,0} в X – нулевые, поэтому в числе A эти биты могут быть равны 1
9) поскольку нужно найти наибольшее подходящее A, получаем ответ $2^4 + 2^2 + 2^0 = 21$
10) Ответ: 21.

Ещё пример задания:

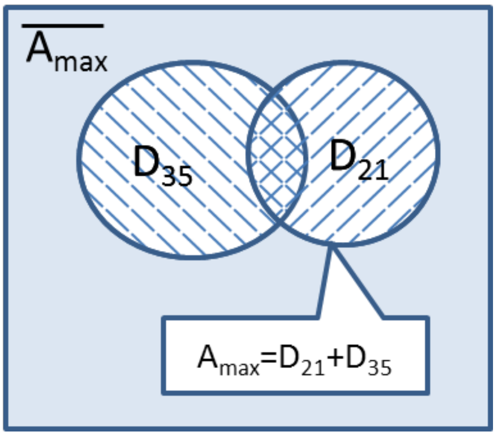
Р-20 (М.В. Кузнецова). *Обозначим через* **ДЕЛ(n, m)** *утверждение «натуральное число* ***n*** *делится без остатка на натуральное число* ***m****». Для какого* ***наименьшего*** *натурального числа А формула*

ДЕЛ(x, A) → (ДЕЛ(x, 21) + ДЕЛ(x, 35))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

1) введём обозначения A = **ДЕЛ(*x*, *A*)**, D_{21} = **ДЕЛ(*x*, 21)** , D_{35} = **ДЕЛ(*x*, 35)**
2) введём множества:
   A –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие A
   $\mathbf{D}_{21}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{21}
   $\mathbf{D}_{35}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{35}
   …
3) Запишем формулу из условия в наших обозначениях
   $A \to (D_{21} + D_{35}) = 1$
4) Раскроем импликацию по правилу $A \to B = \overline{A} + B$:
   $A \to (D_{21} + D_{35}) = \overline{A} + D_{21} + D_{35}$
5) Чтобы формула была тождественно истинной необходимо, чтобы $\overline{A} = 1$ *(т.е.* $A = 0$*),* когда $D_{21} + D_{35} = 0$. Тогда наибольшее множество **A** определяется как
   $\mathbf{A}_{\max} = \mathbf{D}_{21} + \mathbf{D}_{35}$
6) Множество $\mathbf{A}_{\max}$, точно соответствующее выражению с помощью функции **ДЕЛ** получить невозможно.
7) Выполним анализ исходной формулы с помощью кругов Эйлера.



   Чтобы в множество $\overline{\mathbf{A}}$ *входили все числа, не попавшие в объединение* $\mathbf{D}_{21} + \mathbf{D}_{35}$*, достаточно, чтобы множество* **A** *находилось внутри этого объединения, например, совпадая с одним из множеств* $\mathbf{D}_{35}$ *или* $\mathbf{D}_{21}$*, или располагаясь внутри любого из них, что возможно, если использовать делители, кратные 21 или 35.*
8) В задании требуется найти НАИМЕНЬШЕЕ значение, этому условию соответствует 21.
9) Ответ: 21

Ещё пример задания:

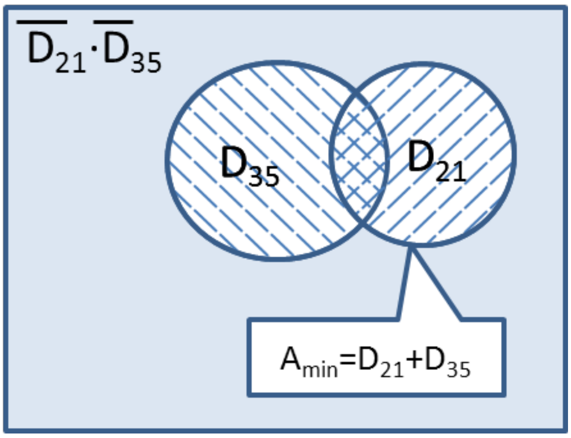
Р-19 (М.В. Кузнецова). *Обозначим через* **ДЕЛ(n, m)** *утверждение «натуральное число* ***n*** *делится без остатка на натуральное число* ***m****». Для какого* ***наибольшего*** *натурального числа А формула*

¬ДЕЛ(x, A) → (¬ДЕЛ(x, 21) ∧¬ ДЕЛ(x, 35))

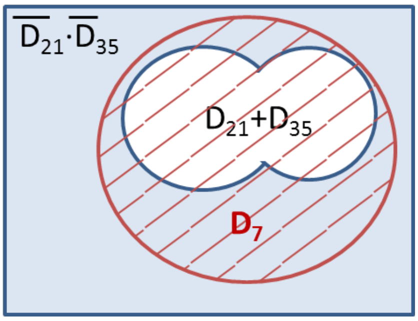
тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

1) введём обозначения A = **ДЕЛ(*x*, *A*)**, D_{21} = **ДЕЛ(*x*, 21)** , D_{35} = **ДЕЛ(*x*, 35) и** D_N = **ДЕЛ(*x*,** N**)**
2) введём множества:
   $\mathbf{A}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие A
   $\mathbf{D_{21}}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{21}
   $\mathbf{D_{35}}$–множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{35}
   ...
3) Запишем формулу из условия в наших обозначениях
   $\overline{A} \to (\overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}}) = 1$
4) Раскроем импликацию по правилу $A \to B = \overline{A} + B$:
   $\overline{A} \to (\overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}}) = A + \overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}}$
5) Чтобы формула была тождественно истинной необходимо, чтобы $A = 1$, когда $\overline{D_{21}} \cdot \overline{D_{35}} = 0$. Тогда множество $\mathbf{A}$ определяется так: $\mathbf{A}_{\min} = \overline{\overline{\mathbf{D}_{21}} \cdot \overline{\mathbf{D}_{35}}} = \mathbf{D}_{21} + \mathbf{D}_{35}$
6) Множество $\mathbf{A}_{\min}$, точно соответствующее выражению с помощью функции **ДЕЛ** получить невозможно.
7) Выполним анализ исходной формулы с помощью кругов Эйлера.



   в множество $\mathbf{A}$ *должны входить все числа, попавшие в объединение* $\mathbf{D}_{21} + \mathbf{D}_{35}$. *Нужно найти множество, в которое входят оба эти множества. Для этого рассмотрим делители чисел 21 и 35.*
8) Число 35 делится на 5 и 7, поэтому: $\mathbf{D}_{35} = \mathbf{D}_5 \cdot \mathbf{D}_7$, *21* делится на 3 и 7, поэтому:
   $\mathbf{D}_{21} = \mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{D}_7$
9) Перепишем и упростим формулу для А:
   $\mathbf{A}_{\min} = \mathbf{D}_{21} + \mathbf{D}_{35} = \mathbf{D}_3 \cdot \mathbf{D}_7 + \mathbf{D}_5 \cdot \mathbf{D}_7 = \mathbf{D}_7 \cdot (\mathbf{D}_3 + \mathbf{D}_5)$
10) Таким образом, каждое из множеств $\mathbf{D_{35}}$ и $\mathbf{D_{21}}$ входит в множество $\mathbf{D_7}$. Объединение $\mathbf{D_{35}}$ + $\mathbf{D_{21}}$ тоже входит в $\mathbf{D_7}$. *Поскольку 7 – наибольший общий делитель чисел 21 и 35, то найдено максимальное значение соответствующее условию задачи.*



11) Ответ: 7.

Ещё пример задания:

Р-18. Пусть P – множество всех 8-битовых цепочек, начинающихся с 1, Q – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 000, а A – некоторое множество произвольных 8-битовых цепочек. Сколько элементов содержит минимальное множество A, при котором для любой 8-битовой цепочки x истинно выражение

$$\neg(x \in A) \to (\neg(x \in P) \vee (x \in Q))$$

Решение:

1) введём обозначения

   $\mathbf{A}: x \in A$, $\quad\mathbf{P}: x \in P$, $\quad\mathbf{Q}: x \in Q$

1) перейдем к более простым обозначениям

$$\overline{\mathbf{A}} \to (\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q})$$

2) раскрываем импликацию по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:

$$\overline{\mathbf{A}} \to (\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}) = \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}$$

3) для выполнения условия $\mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = 1$ при любом x необходимо, чтобы $\mathbf{A} = 1$ для всех x, для которых $\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = 0$, то есть $\mathbf{A}_{\min} = \overline{\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}} = \mathbf{P} \cdot \overline{\mathbf{Q}}$
4) множество $\mathbf{P} \cdot \overline{\mathbf{Q}}$ – это все 8-битовые цепочки, которые начинаются с 1 и оканчиваются НЕ на 000
5) поскольку всего битов 8, структура всех таких цепочек имеет вид **`1****???`**, где **`*`** обозначает любой из двух символов (0 или 1) , а **`???`** – трёхбитное окончание, не совпадающее с 000
6) всего может быть $2^3 = 8$ комбинаций из трёх битов, одно из них, 000, запрещено для окончания, поэтому остаётся еще 7 разрешённых вариантов
7) общее количество подходящих цепочек находим по правилам комбинаторики, перемножив количество вариантов для каждой части цепочки (1 для первого бита, по 2 для следующих четырёх и 7 для трёхбитного окончания) 1 · 2 · 2 · 2 · 2 · 7 = 112
8) Ответ: 112.

Решение (А.Н. Носкин):

1) упростим исходное выражение и получим: **A ∨ ¬P ∨ Q = 1**
2) всё множество всех 8-битовых цепочек расположено на отрезке от 0 до 255
3) минимальное число множества **P** начинающегося с $10000000_2 = 128$, следовательно, все множество **P** занимает часть отрезка от 128 до 255; длина этой части отрезка равна 255 – 128 + 1 = 128.
4) **Q** – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 000, которые имеют вид ****000, где * обозначает любой из двух символов (0 или 1); количество таких чисел в множестве равно $2^4 = 16$, где 4 – число звездочек в числе **Q**
5) из выражения видно, что множество **¬P** закрывает интервал от 0 до 127, следовательно, множество **A** должно перекрыть все числа во множестве **P** (таких чисел 128), которые не перекрывают числа из множества **Q**
6) минимальное множество **A** содержит 128 – 16 = 112 элементов.
7) Ответ: 112.

Решение (программа на Python, А.Н. Носкин):

1) упростим исходное выражение и получим: **A ∨ ¬P ∨ Q = 1**
2) всё множество всех 8-битовых цепочек расположено на отрезке от 0 до 255
3) минимальное число множества **P** начинающегося с $10000000_2 = 128$.
   Создадим это множество **P**:

```
P = {i for i in range(128,256)}
```

4) **Q** – множество всех 8-битовых цепочек, оканчивающихся на 000, которые имеют вид ****000, где * обозначает любой из двух символов (0 или 1); таким образом разность между соседними числами множества равно 8.
   Создадим это множество **Q**:
```
Q = {i for i in range(0,256,8)}
```
5) из выражения видно, что множество **¬P** закрывает интервал от 0 до 127, следовательно, множество **A** должно перекрыть все числа во множестве **P** (таких чисел 128), которые не перекрывают числа из множества **Q** это достигается разностью множеств: **P-Q**
   Тогда А это количество элементов разности множеств.
6) Приведем программу:
```
P = {i for i in range(128,256)} #множество P
Q = {i for i in range(0,256,8)} #множество Q
print(len(P-Q))
```
7) Ответ: 112.

Ещё пример задания:

Р-17. *Обозначим через* **ДЕЛ(n, m)** *утверждение «натуральное число* ***n*** *делится без остатка на натуральное число* ***m****». Для какого* ***наименьшего*** *натурального числа А формула*

ДЕЛ(x, A) → (¬ДЕЛ(x, 21) + ДЕЛ(x, 35))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

1) введём обозначения A = **ДЕЛ(*x*, *A*)**, P = **ДЕЛ(*x*, 21)** и Q = **ДЕЛ(*x*, 35)**
2) введём множества:
   $\mathbf{A}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие A
   $\mathbf{P}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие P
   $\mathbf{Q}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие Q
3) истинным для всех X должно быть выражение
   $A \to (\overline{P} + Q)$
4) упростим это выражение, раскрыв импликацию по правилу $A \to B = \overline{A} + B$:
   $A \to (\overline{P} + Q) = \overline{A} + \overline{P} + Q$
5) из этой формулы видно, что $\overline{A}$ может быть равно 0 (и соответственно, $\mathbf{A}$ может быть равно 1) только там, где $\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = 1$; таким образом, наибольшее возможное множество $\mathbf{A}$ определяется как $\mathbf{A}_{\max} = \overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q}$ – множество всех чисел, которые делятся на 35 плюс множество чисел, которые не делятся на 21;
6) заметим, что в точности такое множество $\mathbf{A}_{\max}$ нельзя получить с помощью функции **ДЕЛ** никаким выбором $\mathbf{A}$;
7) итак, нам нужно множеством $\mathbf{A}$ перекрыть все числа, которые делятся на 35, это можно сделать, например, выбрав в качестве A любой делитель числа 35 = 5 · 7
8) в то же время нам нельзя перекрывать числа, которые не делятся на 35, но делятся на 21 = 3 · 7 (в этих точках $\overline{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} = 0$, и если будет $\mathbf{A} = \mathbf{1}$, то $\overline{A} + \overline{P} + Q = 0$)
9) предположим, что мы выбрали некоторое значение А; тогда выражение $\overline{A}$ ложно в точках $A{\cdot}k$, где k – натуральное число;
10) если число $A{\cdot}k$ делится на 21, то есть $A{\cdot}k = 21{\cdot}m$ при некотором натуральном числе m, то такое число должно (для выполнения условия $\overline{A} + \overline{P} + Q = 1$) делиться на 35;
11) раскладываем 21 на простые сомножители: 21 = 3 · 7; для того, чтобы число
    $A{\cdot}k = 3 \cdot 7 \cdot m$

делилось на 35, в правой части нужно добавить сомножитель 5, это и есть искомое минимальное значение А (вообще говоря, А может быть любым числом, кратным 5)

12) Ответ: 5.

Решение (М.В. Кузнецова):

1) Введём обозначения A = **ДЕЛ(*x*, *A*)**, D_{21} = **ДЕЛ(*x*, 21)** , D_{35} = **ДЕЛ(*x*, 35) и** D_N = **ДЕЛ(*x*,** N**)**
2) Введём множества:
   $\mathbf{A}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие A
   $\mathbf{D}_{21}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{21}
   $\mathbf{D}_{35}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие D_{35}
   ...
3) Запишем формулу из условия в наших обозначениях
   $A \to (\overline{D_{21}} + D_{35}) = 1$
4) Раскроем импликацию по правилу $A \to B = \overline{A} + B$:
   $A \to (\overline{D_{21}} + D_{35}) = \overline{A} + \overline{D_{21}} + D_{35}$
5) Чтобы формула была тождественно истинной необходимо, чтобы $\overline{A} = 1$ *(т.е. A=0),* когда $\overline{D_{21}} + D_{35} = 0$. Тогда наибольшее множество $\mathbf{A}_{\max}$ определяется как
   $\mathbf{A}_{\max} = \overline{\mathbf{D}_{21}} + \mathbf{D}_{35}$
6) Множество $\mathbf{A}_{\max}$, точно соответствующее выражению с помощью функции **ДЕЛ** получить невозможно. Очевидно, что $\mathbf{A}_{\min} = \mathbf{D}_{35}$, т.е. 35 – наибольшее из чисел, соответствующих условию задачи. Меньшим может быть делитель 35, не являющийся делителем 21.
7) Чтобы делитель 35 был решением необходимо, чтобы ни для одного из чисел, кратных ему не выполнилось условие: $\overline{A_{\max}} = D_{21} \cdot \overline{D_{35}} = 1$.
8) Разложим 35 и 21 на простые множители: 35= 5 · 7, 21=3 · 7.
9) 7 – общий делитель, не может быть решением.
10) Проверим 5. Вычислим «опасное» число, принадлежащее множеству $\mathbf{D}_5 \cdot \mathbf{D}_{21}$, это 5·21=105, но 105 : 35 =3 (остаток 0), т.е. $105 \in \mathbf{D}_{35}$ и для него $\mathbf{D}_{21} \cdot \overline{\mathbf{D}_{35}} = 0$, значит 5 соответствует условию задачи.
11) Ответ: 5

Ещё пример задания:

Р-16. *Обозначим через* **ДЕЛ(n, m)** *утверждение «натуральное число **n** делится без остатка на натуральное число **m**». Для какого наибольшего натурального числа А формула*

¬ДЕЛ(x, A) → (ДЕЛ(x, 6) → ¬ДЕЛ(x, 4))

тождественно истинна (то есть принимает значение 1 при любом натуральном значении переменной x)?

Решение:

1) введём обозначения A = **ДЕЛ(*x*, *A*)**, P = **ДЕЛ(*x*,** 6**)** и Q = **ДЕЛ(*x*, *4*)**
2) введём множества:
   $\mathbf{A}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие A
   $\mathbf{P}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие P
   $\mathbf{Q}$ –множество натуральных чисел, для которых выполняется условие Q
3) истинным для всех X должно быть выражение
   $\overline{A} \to (P \to \overline{Q})$
4) упростим это выражение, раскрыв импликацию по правилу $A \to B = \overline{A} + B$:
   $\overline{A} \to (P \to \overline{Q}) = A + (P \to \overline{Q}) = A + \overline{P} + \overline{Q}$

5) из этой формулы видно, что множество $\mathbf{A}$ должно перекрыть множество, которое не перекрыто множеством $\overline{\mathbf{P}}+\overline{\mathbf{Q}}$, то есть перекрыть множество $\overline{\overline{\mathbf{P}}+\overline{\mathbf{Q}}}=\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}$
6) множество $\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}$ – это множество всех чисел, которые делятся одновременно на 4 и 6 (все числа, кратные 4 и 6), то есть, 12, 24, 36 и т.д. (заметим, что 12 – это **наименьшее общее кратное** чисел 4 и 6)
7) для того, чтобы перекрыть эти числа, можно выбрать в качестве $\mathbf{A}$ любой делитель числа 12, то есть, 1, 2, 3, 4, 6 или 12; наибольшее из этих чисел – 12.
8) Ответ: 12.

Ещё пример задания:

Р-15. *На числовой прямой даны два отрезка: P = [5; 30] и Q = [14;23]. Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка A, что формула*

$$((x\in P)\equiv(x\in Q))\to\neg(x\in A)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

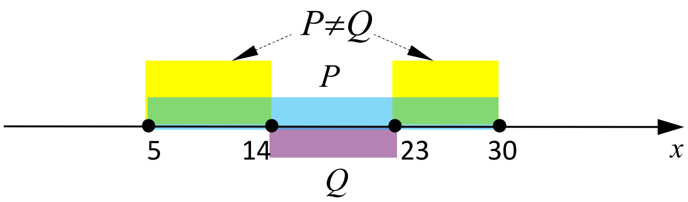
Решение:

1) Для того чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$\mathbf{A}$: $x\in A$, $\quad$ $\mathbf{P}$: $x\in P$, $\quad$ $\mathbf{Q}$: $x\in Q$
2) перейдем к более простым обозначениям

$(\mathbf{P}\equiv\mathbf{Q})\to\overline{\mathbf{A}}$
3) раскрываем импликацию по формуле $A\to B=\overline{A}+B$:

$(\mathbf{P}\equiv\mathbf{Q})\to\overline{\mathbf{A}}=\overline{(\mathbf{P}\equiv\mathbf{Q})}+\overline{\mathbf{A}}=(\mathbf{P}\neq\mathbf{Q})+\overline{\mathbf{A}}$
4) поскольку это выражение должно быть равно 1, то $\overline{\mathbf{A}}$ должно быть истинным (и, следовательно, $\mathbf{A}$ – ложным!) везде, где ложно $\mathbf{P}\neq\mathbf{Q}$;
5) таким образом, $\mathbf{A}$ может быть истинным только там, где истинно $\mathbf{P}\neq\mathbf{Q}$
6) выражение $\mathbf{P}\neq\mathbf{Q}$ истинно на двух интервалах: [5; 14) и (23; 30], которые входят в $\mathbf{P}$ и не входят в $\mathbf{Q}$, на рисунке они обозначены жёлтым цветом:



7) значение $\mathbf{A}$ может быть истинным только внутри этих полуинтервалов, выделенных желтым цветом; но поскольку $\mathbf{A}$ – это отрезок, его наибольшая длина – это длина наибольшего из «жёлтых» полуинтервалов, то есть, 14 – 5 = 9 (длина второго полуинтервала равна 30 – 23 = 7).
8) Ответ: 9.

Ещё пример задания:

Р-14. Элементами множества А являются натуральные числа. Известно, что выражение
$(x\in\{2, 4, 6, 8, 10, 12\})\to(((x\in\{4, 8, 12, 116\})\wedge\neg(x\in \mathrm{A}))\to\neg(x\in\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$
истинно (т. е. принимает значение 1) при любом значении переменной х.
Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества А.

Решение:

1) Заметим, что в задаче, кроме множества A, используются еще два множества:
$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \qquad Q = \{4, 8, 12, 116\}$$
2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами
$$\mathbf{A}: x \in A, \qquad \mathbf{P}: x \in P, \qquad \mathbf{Q}: x \in Q$$
3) перейдем к более простым обозначениям
$$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$$
4) раскрываем обе импликации по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:
$$\mathbf{P} \to (\overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}) = \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}$$
5) теперь используем закон де Моргана $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$:
$$\overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}}$$
6) поскольку это выражение должно быть равно 1, то A должно быть истинным везде, где ложно $\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}$
7) тогда минимальное допустимое множество A – это $A_{\min} = \overline{\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$ (по закону де Моргана)
8) переходим ко множествам
$\mathbf{Q}$ = {4, 8, 12, 116}
$\mathbf{P}$ = {2, 4, 6, 8, 10, 12}
9) тогда $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$ – это все натуральные числа, которые входят одновременно в $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{P}$; они выделены жёлтым цветом: {4, 8, 12}
10) именно эти числа и должны быть «перекрыть» множеством $A_{\min}$, поэтому минимальный состав множества A – это $A_{\min}$ = {4, 8, 12}, сумма этих чисел равна 24
11) Ответ: 24.

Решение (с помощью программы, А.Н. Носкин):

1) на компьютерном ЕГЭ можно написать программу:
```
P = {2, 4, 6, 8, 10, 12} # множество P
Q = {4, 8, 12, 116} # множество Q
A = P & Q # пересечение множеств
print( sum(list(set(A))) )
```
2) Ответ: 24.

Решение (3 способ, А.В. Лаздин, НИУ ИТМО):

1) обозначим множества следующим образом:
$$L = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \qquad M = \{4, 8, 12, 116\}.$$
тогда исходное выражение можно записать в упрощенной форме:
$$(x \in L) \to (((x \in M) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in L)) \qquad (1)$$
2) если x не принадлежит множеству L, то выражение принимает значение 1, независимо от множества A (импликация из 0 всегда равна 1); таким образом, необходимо рассмотреть ситуацию, когда $x \in L$.
3) Условие 1. $x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
В этом случае исходное выражение принимает следующий вид:
$$1 \to (((x \in M) \wedge \neg(x \in A)) \to 0) \qquad (2)$$

это выражение примет значение 0 только в том случае, если

$(((x \in M) \wedge \neg(x \in A)) \to 0)$ будет ложным.

Для этого выражение $((x \in M) \wedge \neg(x \in A))$ должно быть истинным (импликация из 1 в 0).

4) если x **не принадлежит** множеству M, то выражение 2 будет истинным не зависимо от множества A.
5) таким образом множество A влияет на решение задачи только при одновременном соблюдении двух условий:

   1. $x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$
   2. $x \in \{4, 8, 12, 116\}$

   В этом случае исходное выражение принимает следующий вид:

   $$1 \to ((1 \wedge \neg(x \in A)) \to 0) \qquad (3)$$
6) для того чтобы это выражение было истинным, выражение $\neg(x \in A)$ **обязательно** должно быть ложным; для этого выражение $x \in A$ должно быть истинным.
7) значит, одновременно должны быть выполнены три условия:
   1. $x \in \{2, \mathbf{4}, 6, \mathbf{8}, 10, \mathbf{12}\}$
   2. $x \in \{\mathbf{4}, \mathbf{8}, \mathbf{12}, 116\}$
   3. $x \in A$

   для этого множеству A обязательно должны принадлежать числа 4, 8, 12.
8) Ответ: 24.

Пример задания:

Р-13. *На числовой прямой даны два отрезка: P = [37; 60] и Q = [40; 77]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка А, что формула*

$$(x \in P) \to (((x \in Q) \wedge \neg(x \in A)) \to \neg(x \in P))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной х.

Решение:

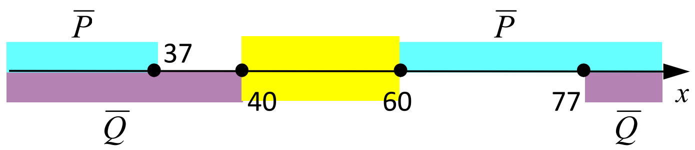
1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

   $\mathbf{A}$: $x \in A$, $\mathbf{P}$: $x \in P$, $\mathbf{Q}$: $x \in Q$
2) перейдем к более простым обозначениям

   $$\mathbf{P} \to (\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}} \to \overline{\mathbf{P}})$$
3) раскрываем обе импликации по формуле $A \to B = \overline{A} + B$:

   $$\mathbf{P} \to (\overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}) = \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{Q} \cdot \overline{\mathbf{A}}} + \overline{\mathbf{P}}$$
4) теперь используем закон де Моргана $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$:

   $$\overline{\mathbf{Q}} + \mathbf{A} + \overline{\mathbf{P}}$$
5) в таком виде выражение уже смотрится совсем не страшно; Сразу видно, что отрезок A должен перекрыть область на числовой оси, которая не входит в область $\overline{\mathbf{Q}} + \overline{\mathbf{P}}$:



6) по рисунку видно, что не перекрыт только отрезок [40;60] (он выделен жёлтым цветом), его длина – 20, это и есть правильный ответ.
7) Ответ: 20.

Ещё пример задания:

Р-12. *На числовой прямой даны два отрезка: P = [10,39] и Q = [23, 58]. Выберите из предложенных вариантов такой отрезок A, что логическое выражение*

$$((x \in P) \wedge (x \in A)) \to ((x \in Q) \wedge (x \in A))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной х.

1) [5, 20] 2) [15, 35] 3) [25, 45] 4) [5, 65]

Решение:

1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

   $\mathbf{A}$: $x \in A$, $\mathbf{P}$: $x \in P$, $\mathbf{Q}$: $x \in Q$
2) перейдем к более простым обозначениям

   $\mathbf{P \cdot A \to Q \cdot A}$
3) раскроем импликацию через операции НЕ и ИЛИ ($A \to B = \overline{A} + B$):

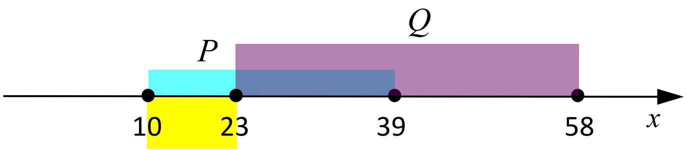
   $P \cdot A \to Q \cdot A = \overline{P \cdot A} + Q \cdot A$
4) раскроем инверсию первого слагаемого по закону де Моргана ($\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$):

   $\overline{P \cdot A} + Q \cdot A = \overline{P} + \overline{A} + Q \cdot A$
5) теперь применим закон поглощения

   $A + \overline{A} \cdot B = (A + \overline{A}) \cdot (A + B) = A + B$

   к последним двум слагаемым:

   $\overline{P} + \overline{A} + Q \cdot A = \overline{P} + \overline{A} + Q$
6) для того, чтобы выражение было истинно при всех x, нужно, чтобы $\overline{A}$ было истинно там, где ложно $\overline{P} + Q$, то есть там, где истинно $\overline{\overline{P} + Q} = P \cdot \overline{Q}$ (жёлтая область на рисунке)



7) таким образом, A должно быть ложно на отрезке [10,23], такое отрезок в предложенном наборе один – это отрезок [25, 45]
8) Ответ: 3.

Ещё пример задания:

Р-11. *На числовой прямой даны два отрезка: P = [10,30] и Q = [25, 55]. Определите наибольшую возможную длину отрезка A, при котором формула*

$$(x \in A) \to ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной х.

1) 10 2) 20 3) 30 4) 45

Решение:

1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

   A: $x \in A$, **P**: $x \in P$, **Q**: $x \in Q$

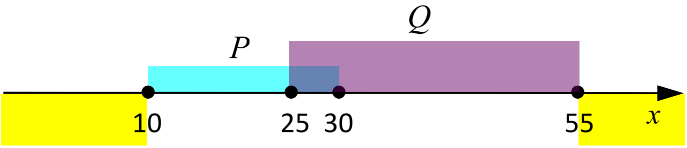
2) перейдем к более простым обозначениям

   $\mathbf{A} \to (\mathbf{P} + \mathbf{Q})$

3) раскроем импликацию через операции НЕ и ИЛИ ($A \to B = \overline{A} + B$):

   $A \to (P+Q) = \overline{A} + P + Q$

4) для того, чтобы выражение было истинно при всех x, нужно, чтобы $\overline{A}$ было истинно там, где ложно $P+Q$ (жёлтая область на рисунке)



5) поэтому максимальный отрезок, где A может быть истинно (и, соответственно, $\overline{A}$ ложно) – это отрезок [10,55], имеющий длину 45

6) Ответ: 4.

Ещё пример задания:

Р-10. *На числовой прямой даны два отрезка: P = [10,20] и Q = [25, 55]. Определите наибольшую возможную длину отрезка A, при котором формула*

$$(x \in A) \to ((x \in P) \vee (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

1) 10 2) 20 3) 30 4) 45

Решение:

1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

   A: $x \in A$, **P**: $x \in P$, **Q**: $x \in Q$

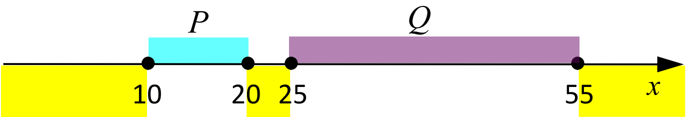
2) перейдем к более простым обозначениям

   $\mathbf{A} \to (\mathbf{P} + \mathbf{Q})$

3) раскроем импликацию через операции НЕ и ИЛИ ($A \to B = \overline{A} + B$):

   $A \to (P+Q) = \overline{A} + P + Q$

4) для того, чтобы выражение было истинно при всех x, нужно, чтобы $\overline{A}$ было истинно там, где ложно $P+Q$ (жёлтая область на рисунке)



5) поскольку области истинности P и Q разделены, максимальный отрезок, где A может быть истинно (и, соответственно, $\overline{A}$ ложно) – это наибольший из отрезков P и Q, то есть отрезок [25,55], имеющий длину 30

6) Ответ: 3.

Ещё пример задания:

Р-09. *На числовой прямой даны два отрезка: P = [14,34] и Q = [24, 44]. Выберите такой отрезок А, что формула*

$$(x \in A) \to ((x \in P) \equiv (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной х. Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

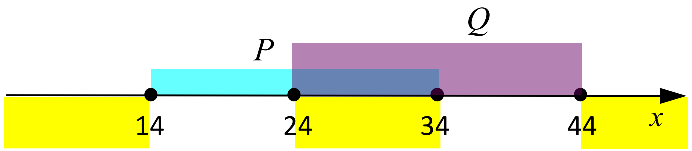
1) [15, 29] 2) [25, 29] 3) [35,39] 4) [49,55]

Решение:

1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

   A: $x \in A$, **P**: $x \in P$, **Q**: $x \in Q$
2) перейдем к более простым обозначениям

   $\mathbf{A} \to (\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q})$
3) выражение $\mathbf{R} = (\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q})$ истинно для всех значений x, при которых **P** и **Q** равны (либо оба ложны, либо оба истинны)
4) нарисуем область истинности выражения $\mathbf{R} = (\mathbf{P} \equiv \mathbf{Q})$ на числовой оси (жёлтые области)



5) импликация $\mathbf{A} \to \mathbf{R}$ истинна за исключением случая, когда **A=1** и **R=0**, поэтому на полуотрезках [14,24[и]34,44], где **R=0**, выражение **A** должно быть обязательно ложно; никаких других ограничений не накладывается
6) из предложенных ответов этому условия соответствуют отрезки [25,29] и [49,55]; по условию из них нужно выбрать самый длинный
7) отрезок [25,29] имеет длину 4, а отрезок [49,55] – длину 6, поэтому выбираем отрезок [49, 55]
8) Ответ: 4.

Ещё пример задания:

Р-08. *На числовой прямой даны два отрезка: P = [20, 50] и Q = [10, 60]. Выберите такой отрезок А, что формула*

$$((x \in P) \to (x \in A)) \wedge ((x \in A) \to (x \in Q))$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной х. Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

1) [5, 40] 2) [15, 54] 3) [30,58] 4) [5, 70]

Решение:

1) в этом выражении две импликации связаны с помощью операции И (конъюнкции), поэтому для истинности всего выражения обе импликации должны быть истинными
2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

   A: $x \in A$, **P**: $x \in P$, **Q**: $x \in Q$
3) перейдем к более простым обозначениям в обоих условиях

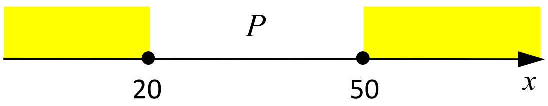
   $(\mathbf{P} \to \mathbf{A}) \wedge (\mathbf{A} \to \mathbf{Q})$

и выразим импликацию через операции ИЛИ и НЕ:

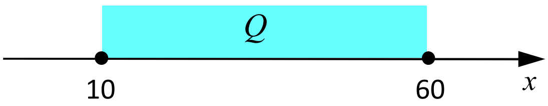
$$Z_1 = P \to A = \overline{P} + A,$$

$$Z_2 = A \to Q = \overline{A} + Q$$

4) выражение $\overline{P} + A$ должно быть истинно на всей числовой оси; обозначим область, которую перекрывает выражение $\overline{P}$ – это две полуоси



5) отсюда следует, что отрезок А должен полностью перекрывать отрезок Р; этому условию удовлетворяют варианты ответов 2 и 4
6) выражение $\overline{A} + Q$ тоже должно быть истинно на всей числовой оси; выражение $\overline{A}$ должно перекрывать все, кроме отрезка, который перекрывает выражение Q:



7) поэтому начало отрезка A должно быть внутри отрезка [10,20], а его конец – внутри отрезка [50,60]
8) этим условиям удовлетворяет только вариант 2.
9) Ответ: 2.

Ещё пример задания:

Р-07. *На числовой прямой даны два отрезка: P = [35, 55] и Q = [45, 65]. Выберите такой отрезок A, что обе приведённые ниже формулы истинны при любом значении переменной x:*

$$(x \in P) \to (x \in A)$$

$$(\neg (x \in A)) \to (\neg(x \in Q))$$

Если таких отрезков несколько, укажите тот, который имеет большую длину.

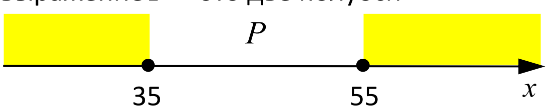
1) [40,50] 2) [30,60] 3) [30,70] 4) [40, 100]

Решение:

1) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

   A: $x \in A$, **P**: $x \in P$, **Q**: $x \in Q$

2) перейдем к более простым обозначениям в первом условии **P** → **A** и выразим импликацию через операции ИЛИ и НЕ: $Z_1 = P \to A = \overline{P} + A$
3) выражение $\overline{P} + A$ должно быть истинно на всей числовой оси; обозначим область, которую перекрывает выражение $\overline{P}$ - это две полуоси



4)

5) отсюда следует, что отрезок А должен полностью перекрывать отрезок Р; этому условию удовлетворяют варианты ответов 2 и 3
6) аналогично разбираем и преобразуем второе выражение

$$Z_2 = \overline{A} \to \overline{Q} = A + \overline{Q}$$

7) и находим, что для того, чтобы обеспечить истинность второго выражения на всей оси отрезок A должен полностью перекрыть отрезок Q; этому условию удовлетворяют варианты ответов 3 и 4
8) объединяя результаты п. 5 и 7, получаем, что условию задачи соответствует только отрезок 3.
9) Ответ: 3.

Ещё пример задания:

Р-06. *На числовой прямой даны два отрезка: P =* [2, 10] *и Q =* [6, 14]*. Выберите такой отрезок A, что формула*

$$((x \in A) \to (x \in P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

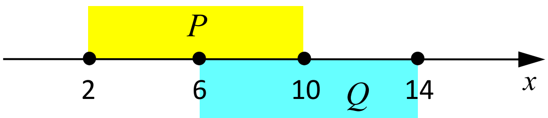
1) [0, 3] 2) [3, 11] 3) [11, 15] 4)[15, 17]

Решение:

1) два условия связаны с помощью операции $\vee$ («ИЛИ»), поэтому должно выполняться хотя бы одно из них
2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

   $\mathbf{A}$: $x \in A$, $\mathbf{P}$: $x \in P$, $\mathbf{Q}$: $x \in Q$
3) тогда получаем, переходя к более простым обозначениям:

   $Z = (\mathbf{A} \to \mathbf{P}) + \mathbf{Q}$
4) представим импликацию $\mathbf{A} \to \mathbf{P}$ через операции «ИЛИ» и «НЕ»: $A \to P = \overline{A} + P$, так что получаем $Z = \overline{A} + P + Q$
5) это значит, что для тождественной истинности выражения Z нужно, чтобы для любого x было выполнено одно из условий: $\overline{A}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$; из всех этих выражений нам **неизвестно только** $\overline{A}$
6) посмотрим, какие интервалы перекрываются условиями $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$:



7) видим, что отрезок [2,14] перекрыт, поэтому выражение $\overline{A}$ должно перекрывать оставшуюся часть; таким образом, $\overline{A}$ должно быть истинно на интервалах $(-\infty,2)$ и $(14,\infty)$ и, соответственно, выражение $\mathbf{A}$ (без инверсии) может быть истинно только внутри отрезка [2,14]
8) из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезов [3,11] (вариант 2) находится целиком внутри отрезка [2,14], это и есть правильный ответ
9) Ответ: 2.

Решение (вариант 2, А.Н. Евтеев):

1) пп. 1-4 такие же, как и в предыдущем способе решения
2) полученное после преобразований выражение $Z = \overline{A} + P + Q$ должно быть истинно при любом x
3) логическая сумма истинна во всех случаях кроме одного: если все слагаемые ложны, следовательно выражение $Z = \overline{A} + P + Q$ ложно только когда $\mathbf{A}$ = 1, $\mathbf{P}$ = 0 и $\mathbf{Q}$ = 0

4) поэтому если область истинности **A** выйдет за пределы отрезка [2,14], где одновременно ложны **P** и **Q**, то $Z = \overline{A} + P + Q$ будет ложно
5) это значит, что **A** может быть истинно только внутри отрезка [2,14]
6) из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезов [3,11] (вариант 2) находится целиком внутри отрезка [2,14], это и есть правильный ответ
7) Ответ: 2.

Решение (таблицы истинности, Е.А. Смирнов):

1) пп. 1-4 такие же, как и в предыдущем способе решения
2) если рассматривать все значения x на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
3) эти точки (2,6,10 и 14) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения $Y = P + Q$

x	P	Q	$Y = P + Q$
x < 2	0	0	0
2 < x < 6	1	0	1
6 < x < 10	1	1	1
10 < x < 14	0	1	1
x > 14	0	0	0

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

4) по условию выражение $Z = \overline{A} + P + Q$ должно быть равно 1 при любых значениях x, то есть, в соответствующем столбце таблицы должны быть все единицы; отсюда можно найти, каким должно быть значение $\overline{A}$ (и соответствующее значение A) для каждого интервала:

x	P	Q	$Y = P + Q$	$\overline{A}$	A	$Z = \overline{A} + P + Q$
x < 2	0	0	0	1	0	1
2 < x < 6	1	0	1	любое	любое	1
6 < x < 10	1	1	1	любое	любое	1
10 < x < 14	0	1	1	любое	любое	1
x > 14	0	0	0	1	0	1

5) таким образом, значение A должно быть равно 0 вне отрезка [2,14]; из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезов [3,11] (вариант 2)
6) Ответ: 2.

Ещё пример задания:

P-05. *На числовой прямой даны два отрезка: P = [2, 20] и Q = [15, 25]. Выберите такой отрезок A, что формула*

$$((x \notin A) \to (x \notin P)) \vee (x \in Q)$$

тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной x.

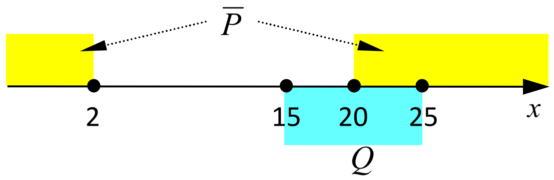
1) [0, 15] 2) [10, 25] 3) [2, 10] 4)[15, 20]

Решение (отрезки на оси):

1) два условия связаны с помощью операции $\vee$ («ИЛИ»), поэтому должно выполняться хотя бы одно из них
2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

   $\mathbf{A}$: $x \in A$, $\mathbf{P}$: $x \in P$, $\mathbf{Q}$: $x \in Q$
3) учтем, что в формуле используется знак $\notin$ («не принадлежит»), поэтому при переходе к более простым обозначениям получаем:

   $Z = (\overline{A} \to \overline{P}) + Q$
4) представим импликацию $\overline{A} \to \overline{P}$ через операции «ИЛИ» и «НЕ»: $\overline{A} \to \overline{P} = A + \overline{P}$, так что получаем $Z = A + \overline{P} + Q$
5) это значит, что для тождественной истинности выражения Z нужно, чтобы для любого x было выполнено одно из условий: A, $\overline{P}$, $\mathbf{Q}$; из всех этих выражений нам **неизвестно только** A
6) посмотрим, какие интервалы перекрываются условиями $\overline{P}$ и $\mathbf{Q}$; область $\overline{P}$ состоит из двух участков числовой оси, которые не входят в отрезок [2,20], а область $\mathbf{Q}$ – это отрезок [15,25]:



7) таким образом, область истинности выражения A должна перекрывать оставшуюся часть – отрезок [2,15]
8) из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезок [0,15] (вариант 1) полностью перекрывает отрезок [2,15], это и есть правильный ответ
9) Ответ: 1.

Решение (таблицы истинности, Е.А. Смирнов):

1) пп. 1-4 такие же, как и в предыдущем способе решения
2) если рассматривать все значения x на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
3) эти точки (2,15,20 и 25) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения $Y = \overline{P} + Q$

x	P	$\overline{P}$	Q	$Y = \overline{P} + Q$
x < 2	0	1	0	1
2 < x < 15	1	0	0	0
15 < x < 20	1	0	1	1
20 < x < 25	0	1	1	1
x > 25	0	1	0	1

   для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение
4) по условию выражение $Z = A + \overline{P} + Q$ должно быть равно 1 при любых значениях x, то есть, в соответствующем столбце таблицы должны быть все единицы; отсюда можно найти, каким должно быть значение A для каждого интервала:

x	P	$\overline{P}$	Q	$Y=\overline{P}+Q$	A	$Z=A+\overline{P}+Q$
x < 2	0	1	0	1	любое	1
2 < x < 15	1	0	0	0	1	1
15 < x < 20	1	0	1	1	любое	1
20 < x < 25	0	1	1	1	любое	1
x > 25	0	1	0	1	любое	1

5) таким образом, область истинности выражения A должна перекрывать отрезок [2,15]
6) из всех отрезков, приведенных в условии, только отрезок [0,15] (вариант 1) полностью перекрывает отрезок [2,15], это и есть правильный ответ
7) Ответ: 1.

Ещё пример задания:

Р-04. *На числовой прямой даны три отрезка: P =* [10, 25], *Q =* [15, 30] *и R=*[25,40]. *Выберите такой отрезок A, что формула*

$$((x \in Q) \to (x \notin R)) \wedge (x \in A) \wedge (x \notin P)$$

*тождественно **ложна**, то есть принимает значение 0 при любом значении переменной х.*

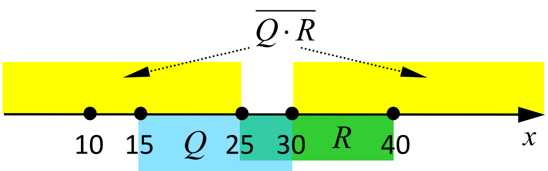
1) [0, 15] 2) [10, 40] 3) [25, 35] 4)[15, 25]

Решение (способ 1):

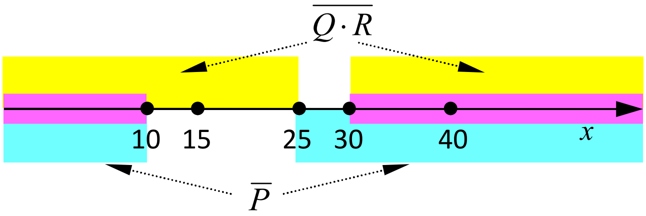
1) три условия связаны с помощью операции $\wedge$ (логическое «И»), поэтому для того, чтобы выражение было тождественно равно нулю, для каждого значения x по крайней мере одно из них должно был ложно
2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

   A: $x \in A$, **P**: $x \in P$, **Q**: $x \in Q$, **R**: $x \in R$
3) учтем, что в формуле дважды используется знак $\notin$ («не принадлежит»), поэтому при переходе к более простым обозначениям получаем:

   $Z = (Q \to \overline{R}) \cdot A \cdot \overline{P}$
4) представим импликацию $Q \to \overline{R}$ через операции «ИЛИ» и «НЕ»: $Q \to \overline{R} = \overline{Q} + \overline{R}$, так что получаем $Z = (\overline{Q} + \overline{R}) \cdot A \cdot \overline{P}$
5) роль сомножителя **A** состоит в том, чтобы обнулить выражение везде, где произведение $(\overline{Q} + \overline{R}) \cdot \overline{P}$ равно 1; поэтому для этих значений x выражение **A** должно быть равно нулю, а для остальных x его значение не играет роли
6) область истинности выражения $\overline{Q} + \overline{R}$ по закону де Моргана совпадает с областью истинности выражения $\overline{Q \cdot R}$, то есть это область вне общей части отрезков Q и R (она показана жёлтым цветом на рисунке):



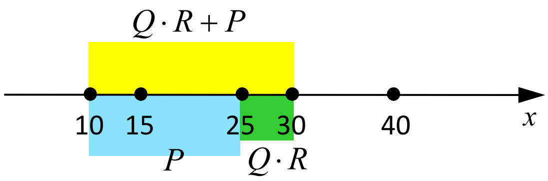
7) теперь умножим это выражение на $\overline{P}$ (ему соответствует область вне отрезка [10,25]), построив область $(\overline{Q} + \overline{R}) \cdot \overline{P}$; эта область, где одновременно истинны $\overline{Q} + \overline{R}$ и $\overline{P}$, выделена фиолетовым цветом:



8) как следует из п. 4, в фиолетовой области на предыдущем рисунке выражение **A** должно быть обязательно равно 0, и только внутри отрезка [10,30] может быть истинно
9) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который целиком помещается внутри отрезка [10,30]
10) этому условию удовлетворяет только отрезок [15,25] (ответ 4)
11) Ответ: 4.

Решение (способ 2, инверсия и преобразование):

1) пп. 1-4 такие же, как и в первом способе
2) выражение Z тождественно ложно тогда и только тогда, когда обратное ему, $\overline{Z}$, тождественно истинно; таким образом, если выполнить инверсию для Z, мы сведём задачу к задаче из демо-варианта ЕГЭ-2013, разобранной выше
3) имеем, используя законы де Моргана:
$$\overline{Z} = \overline{(\overline{Q}+\overline{R})\cdot A\cdot\overline{P}} = \overline{(\overline{Q}+\overline{R})} + \overline{A\cdot\overline{P}} = Q\cdot R+\overline{A}+P$$
4) выражение $Q\cdot R$ истинно на общей части (пересечении) отрезков Q и R, то есть, на отрезке [25,30]
5) добавляя к этому диапазону отрезок P, получим отрезок [10,30], где истинно выражение $Q\cdot R+P$



6) остальную часть числовой оси (при x меньше 10 и x больше 30) должно перекрыть выражение $\overline{A}$, то есть A должно быть ложно вне отрезка [10,30]
7) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который целиком помещается внутри отрезка [10,30]
8) этому условию удовлетворяет только отрезок [15,25] (ответ 4)
9) Ответ: 4.

Решение (таблицы истинности, Е.А. Смирнов):

1) пп. 1-5 такие же, как и в первом способе решения
2) если рассматривать все значения x на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
3) эти точки (10,15,25, 30 и 40) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения
$Y = (\overline{Q}+\overline{R})\cdot\overline{P}$

x	P	$\overline{P}$	Q	$\overline{Q}$	R	$\overline{R}$	$\overline{Q}+\overline{R}$	$Y=(\overline{Q}+\overline{R})\cdot\overline{P}$
x < 10	0	1	0	1	0	1	1	1
10 < x < 15	1	0	0	1	0	1	1	0
15 < x < 25	1	0	1	0	0	1	1	0

25 < x < 30	0	1	1	0	1	0	0	0
30 < x < 40	0	1	0	1	1	0	1	1
x > 40	0	1	0	1	0	1	1	1

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

4) по условию выражение $Z = (\overline{Q} + \overline{R}) \cdot A \cdot \overline{P}$ должно быть равно 0 при любых значениях x, то есть, в соответствующем столбце таблицы должны быть все единицы; отсюда можно найти, каким должно быть значение A для каждого интервала:

x	$Y = (\overline{Q} + \overline{R}) \cdot \overline{P}$	A	$Z = (\overline{Q} + \overline{R}) \cdot A \cdot \overline{P}$
x < 10	1	0	0
10 < x < 15	0	любое	0
15 < x < 25	0	любое	0
25 < x < 30	0	любое	0
30 < x < 40	1	0	0
x > 40	1	0	0

1) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который целиком помещается внутри отрезка [10,30]
2) этому условию удовлетворяет только отрезок [15,25] (ответ 4)
3) Ответ: 4.

Ещё пример задания:

Р-03. *На числовой прямой даны три интервала: P =* (5, 10)*, Q =* [10, 20] *и R =* [25,40]*.*
Выберите такой отрезок A, что выражения

$$(x \in A) \to (x \in P) \quad \textit{и} \quad (x \in Q) \to (x \in R)$$

тождественно ***равны****, то есть принимают одинаковые значения при любом значении переменной* $\boldsymbol{x}$*.*

1) [7, 20] 2) [2, 12] 3) [10,25] 4)[20, 30]

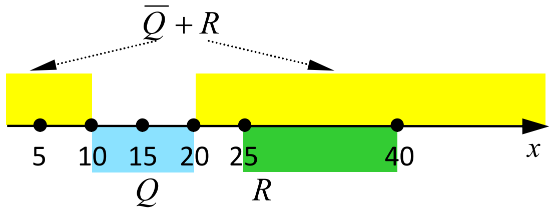
Решение (способ 1, отрезки на числовой прямой):

1) обратите внимание, что интервал P – это открытый интервал; это необходимо для того, чтобы можно было выполнить заданное условие в точках стыковки отрезков
2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

   $\mathbf{A}$: $x \in A$, $\mathbf{P}$: $x \in P$, $\mathbf{Q}$: $x \in Q$, $\mathbf{R}$: $x \in R$
3) перейдём к более простым обозначениям:

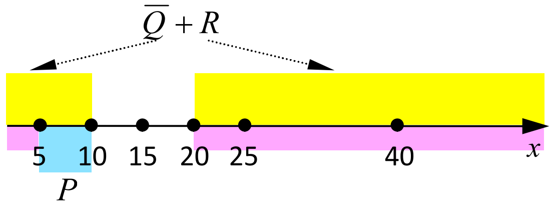
   $Y = A \to P$, $Z = Q \to R$
4) выразим импликации через операции «ИЛИ» и «НЕ»:

   $Y = A \to P = \overline{A} + P$, $Z = Q \to R = \overline{Q} + R$
5) заметим, что неизвестная величина $\mathbf{A}$ входит только в выражение Y
6) общая идея состоит в том, чтобы построить на числовой оси область истинности для полностью известного выражения $Z = \overline{Q} + R$, а затем дополнить отрезок P до этой области; это «дополнение» будет соответствовать области $\overline{A}$
7) построим область $Z = \overline{Q} + R$ – объединение отрезка R и области вне отрезка Q:



обратим внимание, что область $Z=\overline{Q}+R$ (выделена жёлтым цветом) в данном случае совпадает с $\overline{Q}$

8) теперь рассмотрим область P (выделена голубым цветом)



9) чтобы область истинности выражения $Y=\overline{A}+P$ совпала с жёлтой областью, выражение $\overline{A}$ должно «перекрыть» всю фиолетовую область (возможно, заходя в область P)
10) поэтому выражение $\mathbf{A}$ обязательно должно быть истинно на отрезке [10,20]; обязательно должно быть ложно на полуосях $(-\infty,5)$ и $(20,+\infty)$, а на отрезке [5,10] его значение может быть любым (там выполнение требований обеспечивает область P)
11) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок [7,20] (ответ 1)
12) Ответ: 1.

Решение (способ 2, таблицы истинности, Е.А. Смирнов):

1) пп. 1-6 такие же, как и в первом способе решения
2) если рассматривать все значения x на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
3) эти точки (5, 10, 20, 25 и 40) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения $Z=\overline{Q}+R$

x	P	Q	$\overline{Q}$	R	$Z=\overline{Q}+R$
x < 5	0	0	1	0	1
5 < x < 10	1	0	1	0	1
10 < x < 20	0	1	0	0	0
20 < x < 25	0	0	1	0	1
25 < x < 40	0	0	1	1	1
x > 40	0	0	1	0	1

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

4) по условию выражение $Z=\overline{Q}+R$ должно быть равно выражению $Y=\overline{A}+P$ при любых значениях x, отсюда можно найти, каким должно быть значение $\overline{A}$ (и соответствующее значение A) для каждого интервала:

x	$Z=\overline{Q}+R$	$Y=\overline{A}+P$	P	$\overline{A}$	A
x < 5	1	1	0	1	0
5 < x < 10	1	1	1	любое	любое
10 < x < 20	0	0	0	0	1
20 < x < 25	1	1	0	1	0
25 < x < 40	1	1	0	1	0
x > 40	1	1	0	1	0

4) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который перекрывает отрезок [10,20] и, возможно, заходит внутрь отрезка [5,10]
5) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок [7,20] (ответ 1)
6) Ответ: 1.

Ещё пример задания:

P-02. *На числовой прямой даны три интервала: P = (10, 15), Q = [5, 20] и R = [15,25]. Выберите такой отрезок A, что выражения*

$$(x \notin A) \rightarrow (x \in P) \quad и \quad (x \in Q) \rightarrow (x \in R)$$

принимают ***различные*** *значения при любых* ***x***.

1) [7, 20] 2) [2, 15] 3) [5,12] 4)[20, 25]

Решение (способ 1, отрезки на числовой прямой):

1) обратите внимание, что интервал P – это открытый интервал; это необходимо для того, чтобы можно было выполнить заданное условие в точках стыковки отрезков
2) для того, чтобы упростить понимание выражения, обозначим отдельные высказывания буквами

$\mathbf{A}$: $x \in A$, $\mathbf{P}$: $x \in P$, $\mathbf{Q}$: $x \in Q$, $\mathbf{R}$: $x \in R$

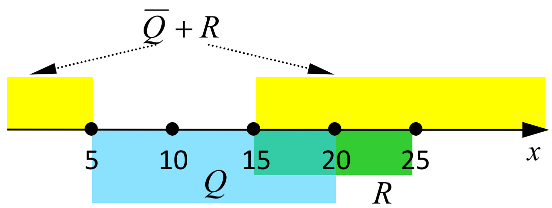
3) перейдём к более простым обозначениям:

$Y = \overline{A} \rightarrow P$, $Z = Q \rightarrow R$

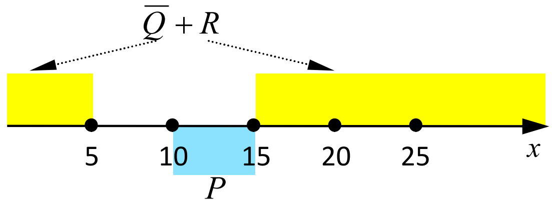
4) выразим импликации через операции «ИЛИ» и «НЕ»:

$Y = \overline{A} \rightarrow P = A + P$, $Z = Q \rightarrow R = \overline{Q} + R$

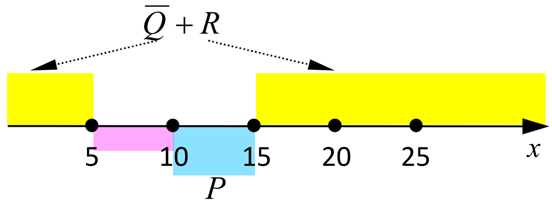
5) заметим, что неизвестная величина **A** входит только в выражение Y
6) общая идея состоит в том, чтобы построить на числовой оси область истинности для полностью известного выражения $Z = \overline{Q} + R$, а затем дополнить отрезок P до «обратной» области, в которой выражение Z ложно; это «дополнение» будет соответствовать области A
7) построим область $Z = \overline{Q} + R$ – объединение отрезка R и области вне отрезка Q:



8) теперь рассмотрим область P (выделена голубым цветом)



9) чтобы выполнить заданное условие (противоположность значений $Y = A + P$ и $Z = \overline{Q} + R$ при любых $\boldsymbol{x}$), область истинности выражения $Y = A + P$ должна совпадать с областью, где выражение Z ложно; для этого выражение A должно «перекрыть» всю фиолетовую область (возможно, заходя в область P), но не должно заходить в «жёлтую» область:



10) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок [5,12] (ответ 3)
11) Ответ: 3.

Решение (способ 2, таблицы истинности, Е.А. Смирнов):

1) пп. 1-6 такие же, как и в первом способе решения
2) если рассматривать все значения $\boldsymbol{x}$ на числовой прямой, то логические значения формул могут измениться только при переходе через граничные точки заданных промежутков
3) эти точки (5, 10, 15, 20 и 25) разбивают числовую прямую на несколько интервалов, для каждого из которых можно определить логическое значение выражения $Z = \overline{Q} + R$

x	P	Q	$\overline{Q}$	R	$Z = \overline{Q} + R$
x < 5	0	0	1	0	
5 < x < 10	0	1	0	0	
10 < x < 15	1	1	0	0	
15 < x < 20	0	1	0	1	
20 < x < 25	0	0	1	1	
x > 25	0	0	1	0	

для упрощения записи не будем рассматривать значения формул на концах отрезков, так как это не влияет на решение

4) по условию выражение $Z = \overline{Q} + R$ должно быть НЕ равно выражению $Y = A + P$ при любых значениях $\boldsymbol{x}$, отсюда можно найти, каким должно быть значение A для каждого интервала:

x	$Z = \overline{Q} + R$	$Y = A + P$	P	A
x < 5	1	0	0	0
5 < x < 10	0	1	0	1
10 < x < 15	0	1	1	любое
15 < x < 20	1	0	0	0
20 < x < 25	1	0	0	0
x > 25	1	0	0	0

7) таким образом, среди ответов нужно найти отрезок, который перекрывает отрезок [5,10] и, возможно, заходит внутрь отрезка [10,15]

8) из предложенных вариантов ответов этим требованиям удовлетворяет только отрезок [5,12] (ответ 3)
9) Ответ: 3.

Ещё пример задания:

Р-01. *Какое из приведённых имен удовлетворяет логическому условию:*
(первая буква согласная → вторая буква согласная) /\ (предпоследняя буква гласная → последняя буква гласная)*?*

1) КРИСТИНА 2) МАКСИМ 3) СТЕПАН 4) МАРИЯ

Решение:

1) два условия связаны с помощью операции /\ («И»), поэтому должны выполняться одновременно
2) импликация ложна, если ее первая часть («посылка») истинна, а вторая («следствие») – ложна
3) первое условие «*первая буква согласная → вторая буква согласная*» ложно тогда, когда первая буква согласная, а вторая – гласная, то есть для ответов 2 и 4
4) второе условие «*предпоследняя буква гласная → последняя буква гласная*» ложно тогда, когда предпоследняя буква гласная, а последняя – согласная, то есть, для ответа 3
5) таким образом, для варианта 1 (КРИСТИНА) оба промежуточных условия и исходное условие в целом истинны
6) ответ: 1.

Ещё пример задания:

Р-00. *Для какого из указанных значений X истинно высказывание* ¬ ((X > 2) → (X > 3)) ?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Решение (вариант 1, прямая подстановка):

1) определим порядок действий: сначала вычисляются результаты отношений в скобках, затем выполняется импликация (поскольку есть «большие» скобки), затем – отрицание (операция «НЕ») для выражения в больших скобках
2) выполняем операции для всех приведенных возможных ответов (1 обозначает истинное условие, 0 – ложное); сначала определяем результаты сравнения в двух внутренних скобках:

X	X > 2	X > 3	(X > 2) → (X > 3)	¬ ((X > 2) → (X > 3))
1	0	0		
2	0	0		
3	1	0		
4	1	1		

3) по таблице истинности операции «импликация» находим третий столбец (значение выражения в больших скобках), применив операцию «импликация» к значениям второго и третьего столбцов (в каждой строке):

X	X > 2	X > 3	(X > 2) → (X > 3)	¬ ((X > 2) → (X > 3))
1	0	0	1	

2	0	0	1	
3	1	0	0	
4	1	1	1	

4) значение выражения равно инверсии третьего столбца (меняем 1 на 0 и наоборот):

X	**X > 2**	**X > 3**	**(X > 2) → (X > 3)**	**¬((X > 2) → (X > 3))**
1	0	0	1	0
2	0	0	1	0
3	1	0	0	1
4	1	1	1	0

5) таким образом, ответ – 3.

Возможные ловушки и проблемы:
- можно «забыть» отрицание (помните, что правильный ответ – всего один!)
- можно перепутать порядок операций (скобки, «НЕ», «И», «ИЛИ», «импликация»)
- нужно помнить таблицу истинности операции «импликация», которую очень любят составители тестов[27]
- этот метод проверяет только заданные числа и не дает общего решения, то есть не определяет все множество значений X, при которых выражение истинно

Решение (вариант 2, упрощение выражения):

1) обозначим простые высказывания буквами:

   A = X > 2, B = X > 3

2) тогда можно записать все выражение в виде

   ¬(A → B) или $\overline{A \rightarrow B}$

3) выразим импликацию через «ИЛИ» и «НЕ» (см. выше):

   ¬(A → B)= ¬(¬A ∨ B) или $\overline{A \rightarrow B} = \overline{\overline{A} + B}$

4) раскрывая по формуле де Моргана операцию «НЕ» для всего выражения, получаем

   ¬(¬A ∨ B)= A ∧ ¬B или $\overline{\overline{A} + B} = A \cdot \overline{B}$

5) таким образом, данное выражение истинно только тогда, когда A истинно (**X > 2**), а B – ложно (**X ≤ 3**), то есть для всех X, таких что **2 < X ≤ 3**
6) из приведенных чисел только 3 удовлетворяет этому условию,
7) таким образом, ответ – 3.

Возможные проблемы:
- нужно помнить законы логики (например, формулы де Моргана)
- при использовании формул де Моргана нужно не забыть заменить «И» на «ИЛИ» и наоборот
- нужно не забыть, что инверсией (отрицанием) для выражения **X > 3** является **X ≤ 3**, а не **X < 3**

Решение (вариант 3, использование свойств импликации):

1) обозначим простые высказывания буквами:

   A = X > 2, B = X > 3

2) тогда исходное выражение можно переписать в виде **¬(A→B)=1** или **A→B=0**

[27] … но которая, к сожалению, почти не нужна на практике. ☺

3) импликация $A \to B$ ложна в одном единственном случае, когда $A = 1$ и $B = 0$; поэтому заданное выражение истинно для всех X, таких что $X > 2$ и $X \leq 3$
4) из приведенных чисел только 3 удовлетворяет этому условию,
5) таким образом, ответ – 3.

Выводы:

1) в данном случае, наверное, проще третий вариант решения, однако он основан на том, что импликация ложна только для одной комбинации исходных данных; не всегда этот прием применим
2) второй и третий варианты позволяют не только проверить заданные значения, но и получить *общее* решение – все множество X, для которых выражение истинно; это более красиво для человека, обладающего математическим складом ума.