MATEMÁTICA

Primitivação e Integração

Fernando F. Gonçalves

2013

Universidade Europeia
LAUREATE INTERNATIONAL UNIVERSITIES

Sumário

CÁLCULO

4. Primitivação

Definições e propriedades básicas.

O presente tópico pode ser motivado pelo problema: "Quais são as funções cuja derivada é $f(x) = 2x$?".

DEFINIÇÃO (Função primitivável). Seja f uma função real definida num intervalo I. Diz-se que f é *primitivável* se existe uma função real diferenciável g definida em I tal que

$$g' = f.$$

Neste caso, dizemos que g é uma *primitiva* de f em I. O processo pelo qual se determinam as primitivas de uma função é designado *primitivação*.

Para a definição acima tenha significado quando o intervalo I não é aberto, temos que tornar claro o significado de g ser diferenciável no extremo do intervalo onde este é fechado. Se, por exemplo, considerarmos o intervalo $I = [a, b)$, definimos a derivada de g no ponto a como $g'(a) = g'(a^+)$. O mesmo é assumido se o intervalo é fechado no extremo superior.

Note també que g é obviamente contínua em I.

Deve ser claro que se g é uma primitiva de f então qualquer função $g + c$, com c uma constante, é também uma primitiva de f, uma vez que

$$(g + c)' = g' + c' = f.$$

Adicionalmente, todas as primitvas de f são escritas como $g + c$. Para mostrar isto, assuma que h é também uma primitiva de f. Então

$$(h - g)' = h' - g' = f - f = 0,$$

o que nos permite concluir que $h - g$ é uma função constante, isto é,

$$h - g = c \Leftrightarrow h = g + c.$$

TEOREMA 4.1. *Seja f uma função real definida num intervalo I, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Se f é primitivável em I então existe uma e uma só primitiva g tal que*

$$g(x_0) = y_0.$$

O problema para o qual o teorema acima garante a existência de uma solução única pode ser escrito

$$y' = f(x) \quad \text{em} \quad I, \qquad y(x_0) = y_0$$

e é chamado *problema de Cauchy* ou *problema de valor inicial* para a *equação diferencial* $y' = f(x)$.
Fixamos agora alguma notação. Se f é uma função primitivável, denotamos a família de primitivas de f por

$$Pf, \qquad Pf(x), \qquad \int f, \qquad \int f\,dx \qquad \text{ou} \qquad \int f(x)\,dx.$$

Se g é uma primitiva de f então escrevemos

$$Pf = g + c, \quad Pf(x) = g(x) + c, \quad \int f = g + c, \quad \int f\,dx = g + c \quad \text{ou} \quad \int f(x)\,dx = g(x) + c,$$

com c uma constante.

Exemplos.

(a) Vamos determinar as primitivas da função real f em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x$ (veja a Figura 4.1(a)). A função $F(x) = x^2$ é uma primitiva de $f(x)$ uma vez que

$$F'(x) = \left(x^2\right)' = 2x.$$

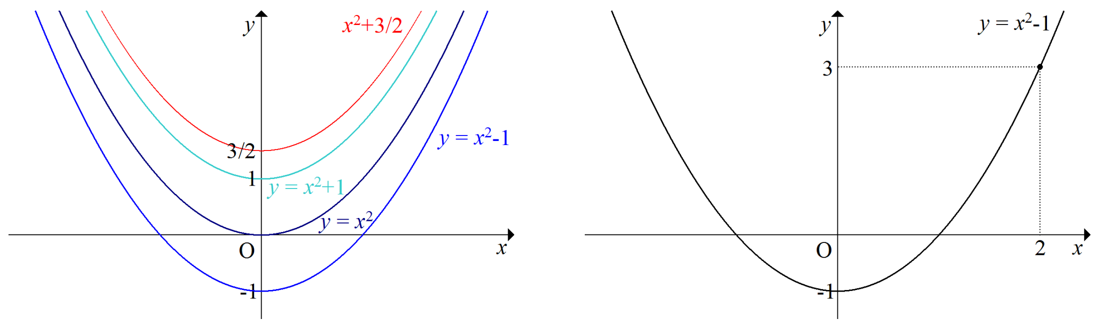
Então

$$Pf(x)\,dx = x^2 + c,$$

com c uma constante real.

(b) Considere o problema de determinar a primitiva $F(x)$ de $f(x) = 2x$ satisfazendo a condição $F(2) = 3$ (veja a Figura 4.1(b)). Temos

$$\begin{cases} F(x) &= x^2 + c \\ F(2) &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) &= x^2 + c \\ 2^2 + c &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F(x) &= x^2 + c \\ c &= -1 \end{cases} \Rightarrow F(x) = x^2 - 1.$$



(a) (b)

Figura 4.1

O teorema seguinte apresenta algumas propriedades de álgebra de primitivas.

TEOREMA 4.2. *Sejam u e v funções primitiváveis num intervalo I e a um número real. Então*

(1) A função au é primitivável em I, e

$$Pau = aPu;$$

(2) A função $u + v$ é primitivável em I, e

$$P(u + v) = Pu + Pv.$$

Por simples inversão das regras de derivação, obtemos as fórmulas de *primitivação imediata* seguintes.

(1) $P0 = c$	(2) $P1 = x + c$	(3) $Pa = ax + c$
(4) $Pu^\alpha u' = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ (\alpha \neq -1)$	(5) $P\dfrac{u'}{u} = \ln\|u\| + c$	(6) $P\,(e^u u') = e^u + c$
(7) $Pa^u u' = \dfrac{a^u}{\ln a} + c \quad (a > 0, a \neq 1)$	(8) $P \operatorname{sen} u\, u' = -\cos u + c$	(9) $P \cos u\, u' = \operatorname{sen} u + c$
(10) $P\dfrac{u'}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c$	(11) $P\dfrac{u'}{\operatorname{sen}^2 u} = -\operatorname{cotg} u + c$	(12) $P\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{arcsen} u + c$
(13) $P\dfrac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}} = \operatorname{arcsen} \dfrac{u}{a} + c \quad (a > 0)$	(14) $P\dfrac{u'}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + c$	(15) $P\dfrac{u'}{a^2+u^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{u}{a} + c \ \ (a > 0)$

Notação: u designa uma função diferenciável, e a, α e c números reais.

Como $\operatorname{arcsen} x = -\arccos x$ e $\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arccotg} x$ para todo o número real x, as fórmulas (12), (13), (14) e (15) podem também ser escritas

$(12')$ $P\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = -\arccos u + c,$

$(13')$ $P\frac{u'}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\arccos \frac{u}{a} + c,$

$(14')$ $P\frac{u'}{1+u^2} = -\operatorname{arccotg} u + c,$

$(15')$ $P\frac{u'}{a^2+u^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{arccotg} \frac{u}{a} + c.$

Exemplos.

(a) $P3 = 3x + c$. (Usando a fórmula (2) e o Teorema 4.2(1)).

(b) $Px^3 = \frac{x^4}{4} + c$. (Usando a fórmula (4)).

(c) Usando a fórmula (4) e o Teorema 4.2(1),

$$P(3x+1)^4 = P(3x+1)^4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}P(3x+1)^4 \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^5}{5} + c = \frac{(3x+1)^5}{15} + c.$$

(d) Usando a fórmula (4) e o Teorema 4.2(1),

$$P\sqrt{3x+1} = \frac{1}{3}P(3x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + c.$$

(e) $P\sin x \cos x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$. (Usando a fórmula (4)).

(f) $P\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}P\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c = \ln\sqrt{1+x^2} + c$. (Usando a fórmula (5) e o Teorema 4.2(1)).

(g) $P\tan x = -P\frac{-\sin x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c$. (Usando a fórmula (5) e o Teorema 4.2(1)).

(h) $Pe^{x^2}x = \frac{1}{2}Pe^{x^2}2x = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$. (Usando a fórmula (6) e o Teorema 4.2(1)).

(i) $P2^x = \frac{2^x}{\ln 2} + c$. (Usando a fórmula (7)).

(j) $P\sin(3x) = \frac{1}{3}P\sin(3x)\cdot 3 = \frac{1}{3}(-\cos(3x)) + c = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c$. (Usando a fórmula (8) e o Teorema 4.2(1)).

(k) $P\frac{e^x}{\cos^2(e^x)} = \tan e^x + c$. (Usando a fórmula (10)).

(l) $P\frac{x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}P\frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + c$. (Usando a fórmula (12) e o Teorema 4.2(1)).

(m) $P\frac{x}{1+x^4} = \frac{1}{2}P\frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan x^2 + c$. (Usando a formula (14) e o Teorema 4.2(1)).

(n) $P\frac{1}{5+x^2} = P\frac{1}{(\sqrt{5})^2+x^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x}{\sqrt{5}} + c$. (Usando a fórmula (25)).

Métodos de primitivação.

Em geral, a primitiva de uma função não pode ser achada usando as fórmulas de primitivação imediata indicadas acima. É o caso, por exemplo, da função $f(x) = xe^x$.
Apresentamos, seguidamente, os chamados *métodos de primitivação*. Começamos com o *método de primitivação por partes*, que é derivado da regra de derivação do produto de duas funções

$$(uv)' = u'v + uv' \Leftrightarrow u'v = (uv)' - uv'.$$

Agora, de primitivarmos ambos os membros da segunda equação acima obtemos

$$Pu'v = uv - Puv'.$$

Note que $Pu'v$ existe se e só se Puv' existir. Note também que o método é útil se a segunda primitiva é mais fácil de determinar que a primeira.

TEOREMA 4.3 (Primitivação por partes). *Se u e v são funções reais diferenciáveis num intervalo I, o produto $u'v$ é primitivável se e só se é primitivável o produto uv'. Neste caso, temos*

$$Pu'v = uv - Puv'.$$

Exemplos.

(a) $P\left(e^x x\right) = e^x x - P\left(e^x \cdot 1\right) = e^x x - e^x + c = e^x(x-1) + c$.

(b) $P\ln x = P(1\cdot\ln x) = x\ln x - P\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = x\ln x - P1 = x\ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$.

(c) Para determinarmos $P\operatorname{sen}^2 x$ primitivamos por partes,

$$\begin{aligned}
P\operatorname{sen}^2 x = P\operatorname{sen} x\cdot\operatorname{sen} x &= -\cos x\cdot\operatorname{sen} x - P - \cos x\cdot\cos x\\
&= -\cos x\cdot\operatorname{sen} x + P\cos^2 x\\
&= -\cos x\cdot\operatorname{sen} x + P1 - \operatorname{sen}^2 x\\
&= -\cos x\cdot\operatorname{sen} x + x - P\operatorname{sen}^2 x.
\end{aligned}$$

Então temos

$$P\operatorname{sen}^2 x = -\cos x \cdot \operatorname{sen} x + x - P\operatorname{sen}^2 x + c \Leftrightarrow 2P\operatorname{sen}^2 x = -\cos x \cdot \operatorname{sen} x + x + c$$
$$\Leftrightarrow P\operatorname{sen}^2 x = \frac{-\cos x \cdot \operatorname{sen} x + x}{2} + c.$$

Como o Teorema 4.3 estabelece a existência da primeira primitiva em $Pu'v = uv - Puv'$ apenas no caso de a segunda existir, temos que, para o problema presente, verificar se as funções $F(x) = \frac{-\cos x \cdot \operatorname{sen} x + x}{2} + c$ são, de facto, primitivas de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$:

$$\left(\frac{-\cos x \cdot \operatorname{sen} x + x}{2} + c\right)' = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x \cdot \cos x + 1}{2} = \frac{2\operatorname{sen}^2 x}{2} = \operatorname{sen}^2 x.$$

Para motivação do *método de primitivação por substituição* ou *por mudança de variável* consideremos o seguinte. Sejam I e J intervalos de números reais e assuma que $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função primitivável e $\varphi : J \to I$ uma bijecção diferenciável. Se g é uma primitiva de f em I, então

$$\psi(t) = (g \circ \varphi)(t) = g(\varphi(t))$$

é diferenciável em J e

$$\psi'(t) = g'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Assim, a família das primitivas de ψ pode ser escrita

$$\psi(t) = Pf(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

e as pretendidas primitivas de f podem ser obtidas de ψ simplesmente desfazendo a mudança de variável

$$Pf(x) = \left[Pf(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

TEOREMA 4.4 (Primitivação por substituição). *Sejam I e J intervalos em $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função primitivável e $\varphi : J \to I$ uma bijecção diferenciável. Então $(f \circ \varphi)\varphi'$ é primitivável e, denotando uma primitiva por ψ, $\psi \circ \varphi^{-1}$ é uma primitiva de f.*

O teorema acima fornece a fórmual anteriormente indicada para a primitivação por substituição

$$Pf(x) = \left[Pf(\varphi(t))\varphi'(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Exemplos.

(a) Pretendemos primitivar a função real $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$ em $\mathbb{R}$. Consideremos a função real diferenciável $\varphi(t) = \ln t$, que aplica bijectivamente $(0, \infty)$ em $\mathbb{R}$. Mudando a variável $x = \varphi(t) = \ln t$ e notando que

$$x' = \varphi'(t) = \frac{1}{t} \qquad \text{e} \qquad t = \varphi^{-1}(x) = e^x,$$

temos

$$Pf(x) = \left[Pf(\varphi(t))\varphi'(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} = \left[Pf(\ln t)\cdot(\ln t)'\right]_{t=e^x} = \left[P\frac{t^3}{t^2+1}\cdot\frac{1}{t}\right]_{t=e^x}$$

$$= \left[P\frac{t^2}{t^2+1}\right]_{t=e^x} = \left[P\frac{t^2+1-1}{t^2+1}\right]_{t=e^x} = \left[P\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\right]_{t=e^x}$$

$$= [t - \operatorname{arctg} t + c]_{t=e^x} = e^x - \operatorname{arctg} e^x + c.$$

(b) As primitivas da função real $f(x) = \frac{\ln x}{x(1+\ln^2 x)}$ em $(0,\infty)$ podem ser determinadas considerando a mudança de variável $x = \varphi(t) = e^t$, uma bijecção de $\mathbb{R}$ em $(0,\infty)$. Temos

$$x' = \varphi'(t) = e^t \qquad \text{e} \qquad t = \varphi^{-1}(x) = \ln x$$

e

$$Pf(x) = \left[Pf(\varphi(t))\varphi'(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} = \left[Pf\left(e^t\right)\cdot\left(e^t\right)'\right]_{t=\ln x} = \left[P\frac{t}{e^t(1+t^2)}\cdot e^t\right]_{t=\ln x}$$

$$= \left[P\frac{t}{1+t^2}\right]_{t=\ln x} = \left[\frac{1}{2}P\frac{2t}{1+t^2}\right]_{t=\ln x} = \left[\frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| + c\right]_{t=\ln x}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|1+\ln^2 x\right| + c = \ln\sqrt{1+\ln^2 x} + c.$$

(c) Para determinarmos as primitivas da função real f em $(0,\infty)$, definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$, consideramos a mudança de variável $x = \varphi(t) = t^2$, uma bijecção diferenciável de $(0,\infty)$ em $(0,\infty)$. Temos

$$x' = \varphi'(t) = 2t \qquad \text{e} \qquad t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt{x}.$$

Assim,

$$Pf(x) = \left[Pf(\varphi(t))\varphi'(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} = \left[Pf\left(t^2\right)\cdot\left(t^2\right)'\right]_{t=\sqrt{x}} = \left[P\frac{1}{t(1+t^2)}\cdot 2t\right]_{t=\sqrt{x}}$$

$$= \left[2P\frac{1}{1+t^2}\right]_{t=\sqrt{x}} = [2\operatorname{arctg} t + c]_{t=\sqrt{x}} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + c.$$

(d) Queremos determinar as primitivas em $(0,\infty)$ da função real f definida por $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. Consideremos a bijecção diferenciável $\varphi : (0,\infty) \to (0,\infty)$ definida por $\varphi(t) = t^6$ e a mudança de variável $x = \varphi(t)$. Temos

$$x' = \varphi'(t) = 6t^5 \qquad \text{e} \qquad t = \varphi^{-1}(x) = \sqrt[6]{x}.$$

Então

$$Pf(x) = \left[Pf(\varphi(t))\varphi'(t)\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} = \left[Pf\left(t^6\right)\cdot\left(t^6\right)'\right]_{t=\sqrt[6]{x}} = \left[P\frac{1}{t^3+t^2}\cdot 6t^5\right]_{t=\sqrt[6]{x}}$$

$$= \left[6P\frac{t^3}{t+1}\right]_{t=\sqrt[6]{x}} = \left[6P\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)\right]_{t=\sqrt[6]{x}}$$

$$= \left[6\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t-\ln|t+1|\right)+c\right]_{t=\sqrt[6]{x}} = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-\ln\left(\sqrt[6]{x}+1\right)^6+c.$$

Fracções simples.

Nos exemplos dados acima para o método de substituição, o problema de primitivação foi reduzido à primitivação de uma função racional, isto é, uma função cuja expressão analítica é o quociente de dois polinómios. De facto, este é um resultado frequentemente obtido com a aplicação do método de substituição. Esta é uma forte razão para se estudar a primitivação de funções racionais. Considere o seguinte:

- Uma expressão racional pode sempre ser escrita como uma soma
$$Q(x)+\frac{N(x)}{D(x)},$$
onde Q, N e D são polinómios, com o grau de N menor que o grau de D (a fracção $\frac{N(x)}{D(x)}$ é designada uma *fracção racional própria*);
- Podemos assumir, sem perda de generalidade, que o coeficiente do termo de maior grau em D é 1 (isto pode ser facilmente obtido factorizando o coeficiente).

Pode ser provado que uma fracção racional própria $\frac{N(x)}{D(x)}$, onde o coeficiente do termo de maior grau em D é 1, pode ser escrita com uma soma de *fracções simples* dos tipos

- $\dfrac{A}{(x-a)^r}$, com $r = 1, 2, \ldots, m$,
- $\dfrac{Bx+C}{((x-p)^2+q^2)^s}$, com $s = 1, 2, \ldots, n$,

onde A, B, C, a, p e q são constantes reais, e m e n números naturais. Os tipos das fracções simples na soma dependem da factorização do polinómio D. O ponto fundamental é que as fracções simples são primitiváveis com facilidade.

Exemplos.

(a) Pretendemos primitivar a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - x}.$$

Como o denominador pode ser decomposto

$$x^3 - x = x(x+1)(x-1),$$

a fracção pode ser escrita como uma soma

$$\frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1}.$$

As constantes A, B e C podem ser determinadas resolvendo-se a equação

$$4x^2 + x + 1 = A(x^2 - 1) + Bx(x-1) + Cx(x+1)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + x + 1 = (A+B+C)x^2 + (-B+C)x - A \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+C & = & 4 \\ -B+C & = & 1 \\ -A & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A & = & -1 \\ B & = & 2 \\ C & = & 3 \end{cases}.$$

Então temos

$$\frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - x} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1},$$

de forma que

$$P\,\frac{4x^2 + x + 1}{x^3 - x} = P\left(-\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-1}\right) = -\ln|x| + 2\ln|x+1| + 3\ln|x-1| + c$$

$$= \ln\left|\frac{(x+1)^2(x-1)^3}{x}\right| + c.$$

(b) Para determinarmos as primitivas da função real de variável real g definida por

$$g(x) = \frac{2x^3 + 5x^2 + 6x + 2}{x(x+1)^3}$$

escrevemos a fracção racional como uma soma

$$\frac{2x^3 + 5x^2 + 6x + 2}{x(x+1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}.$$

Note que, na decomposição acima, o número de termos com denominador $(x+1)^r$ é igual à multiplicidade da raíz -1 do polinómio $x(x+1)^3$. as constantes A, B, C e D são determinadas resolvendo-se

$$2x^3+5x^2+6x+2 = A(x+1)^3 + Bx(x+1)^2 + Cx(x+1) + Dx$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+5x^2+6x+2 = (A+B)x^3 + (3A+2B+C)x^2 + (3A+B+C+D)x + A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B & = & 2 \\ 3A+2B+C & = & 5 \\ 3A+B+C+D & = & 6 \\ A & = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A & = & 2 \\ B & = & 0 \\ C & = & -1 \\ D & = & 1 \end{cases}.$$

Temos entao

$$\frac{2x^3+5x^2+6x+2}{x(x+1)^3} = \frac{2}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}$$

e

$$P\,\frac{2x^3+5x^2+6x+2}{x(x+1)^3} = P\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3}\right) = 2\ln|x| - \frac{(x+1)^{-1}}{-1} + \frac{(x+1)^{-2}}{-2} + c$$

$$= \ln x^2 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x+1)^2} + c.$$

(c) Para determinarmos as primitivas da função real de variável real

$$h(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)}$$

consideramos a decomposição

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Note que o denominador da última das fracções simples é um polinómio irredutível do segundo grau. O numerador correspondente é então de grau até 1. As constantes A, B e C são determinadas da forma usual

$$x+2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow x+2 = (A+B)x^2 + (2A-B+C)x + (A-C) \Leftrightarrow \begin{cases} A+B & = & 0 \\ 2A-B+C & = & 1 \\ A-C & = & 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A & = & \frac{3}{2} \\ B & = & -\frac{3}{2} \\ C & = & -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

A decomposição obtida é

$$\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

e

$$P\,\frac{x+2}{(x-1)(x^2+1)} = P\left(\frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}}{x^2+1}\right) = \frac{3}{2}P\frac{1}{x-1} - \frac{3}{4}P\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{2}P\frac{1}{x^2+1}$$

$$= \frac{3}{2}\ln|x-1| - \frac{3}{4}\ln\left|x^2+1\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c$$

$$= \ln\sqrt[4]{\frac{(x-1)^6}{(x^2+1)^3}} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + c.$$

Exercícios.

(1) Determine a família de primitivas de cada uma das funções reais de variável real seguintes:

a) $f(x) = x^2$;

b) $f(x) = 2x+2$;

c) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$;

d) $f(x) = 2x^2+4x+4$;

e) $f(x) = a$, com a uma constante real;

f) $f(x) = 2x^2+4$;

g) $f(x) = 2x^5+8x^2+x-78$;

h) $f(x) = \frac{1}{x^2}+3x^{\frac{1}{3}}$;

i) $f(x) = \frac{3}{x^4}-\sqrt[4]{x}+x$;

j) $f(x) = 6x^{1/3}-x^{0.4}+\frac{9}{x^2}$;

k) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt{x}$;

l) $f(x) = (x^4+4x+2)(2x+3)$;

m) $f(x) = (2x-1)(3x^2+2)$;

n) $f(x) = (x^3-12x)(3x^2+2x)$;

o) $f(x) = (a+bx^3)^2$, com a e b constantes reais;

p) $f(x) = \sqrt{2ax}$, com a uma constante real;

q) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;

r) $f(x) = \cos 5x \operatorname{sen} 5x$;

s) $f(x) = \operatorname{sen}^5 4x \cos 4x$;

t) $f(x) = 4e^{5x}$;

u) $f(x) = xe^{4x^2}$;

v) $f(x) = (x+5)^2 e^{(x+5)^3}$;

w) $f(x) = \frac{1}{1+x}$; $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$; $f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$;

x) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$; $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$; $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$;

y) $f(x) = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}$; $f(x) = \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}$; $f(x) = \frac{\cos x}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$; $f(x) = \cos x(1+\operatorname{sen} x)^2$;

z) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$; $f(x) = \frac{\ln^5 x}{x}$; $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$; $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

(2) Primitive as funções racionais seguintes:

a) $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)}$;

b) $f(x) = \frac{x}{x+1}$;

c) $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$;

d) $f(x) = \frac{x^2-5x+1}{x^2-5x+8}$;

e) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$;

f) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-1}$;

g) $f(x) = \frac{x}{x^4+4}$;

h) $f(x) = \frac{2x^3}{x^4-1}$.

(3) Primitive por partes as funções:

a) $f(x) = xe^x$; $f(x) = x^2e^x$; $f(x) = x^2e^{3x}$;

b) $f(x) = \ln x$; $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

c) $f(x) = x \operatorname{sen} x$;

d) $f(x) = x \cos 3x$;

e) $f(x) = \frac{x}{e^x}$;

f) $f(x) = \frac{x^2+2x}{x^2-1}$;

g) $f(x) = x^2 \ln x$;

h) $f(x) = x \operatorname{arctg} x$;

i) $f(x) = \operatorname{sen} 2x \cos 3x$;

j) $f(x) = x \operatorname{sen} x \cos x$.

(4) Primitive por substituição as funções seguintes:

a) $f(x) = \frac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$;

b) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}$;

c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}$;

d) $f(x) = \frac{e^{3x}}{1-e^{2x}}$;

e) $f(x) = \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x-2}$;

f) $f(x) = 2 + \sqrt{1-x^2}$;

g) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}$.

(5) Primitive as funções seguintes:

a) $f(x) = (-2x+5)e^{-x}$;

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$;

c) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$;

d) $f(x) = xe^{-x^2}$;

e) $f(x) = x(x^2+1)^{20}$;

f) $f(x) = x \cos x$;

g) $f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x}$;

h) $f(x) = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$;

i) $f(x) = \frac{x^6+1}{x+1}$;

j) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\operatorname{sen} x}$.

5. Integração

Integral definido.

Vamos dar a noção de *integral definido*. Considere o intervalo fechado $[a,b]$, com a e b números reais tais que $a \leq b$, e pontos

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

O conjunto $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ é chamado uma *partição* do intervalo $[a,b]$. Denotemos

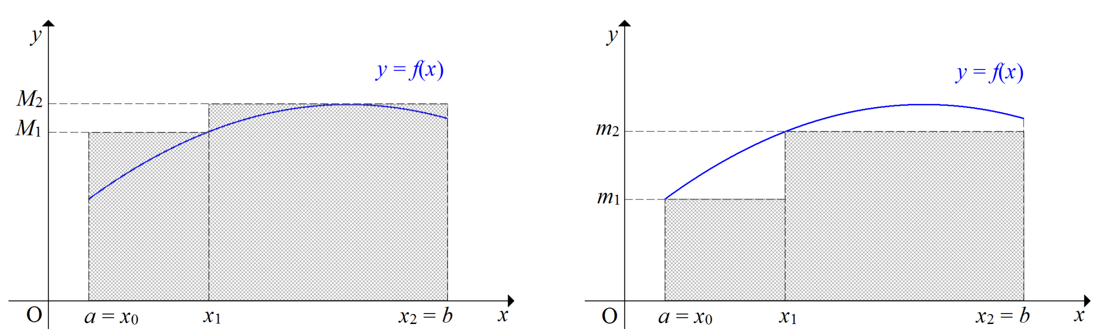
$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Seja f uma função real limitada em $[a,b]$. Para uma dada partição P de $[a,b]$ definimos

$$M_i = \sup f(x), \quad m_i = \inf f(x), \quad \text{com } x_{i-1} \leq x \leq x_i.$$

As *somas de Darboux superior e inferior* (veja a Figura 5.1) são definidas, respectivamente, por

$$U(P,f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad \text{e} \quad L(P,f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i.$$



(a) Soma superior de Darboux.

(b) Soma inferior de Darboux.

Figura 5.1. Somas de Darboux.

Seguidamente, os *integrais superior e inferior de Riemann* são definidos, respectivamente, por

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf U(P,f) \quad \text{e} \quad \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup L(P,f),$$

onde $\inf U(P,f)$ e $\sup U(P,f)$ são determinados no conjunto de todas as partições P de $[a,b]$.
Finalmente, se

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

diz-se que a função f é *integrável à Riemann* (ou simplesmente *integrável*) em $[a,b]$, e denota-se o valor comum dos integrais suprior e inferior por

$$\int_a^b f(x)\,dx \ \text{ ou simplesmente por } \int_a^b f\,dx,$$

o *integral de Riemann* (ou simplesmente o *integral*) de f no intervalo $[a,b]$.
Há alguma terminologia relativa à integração que fixamos agora: o símbolo $\int$ é o *símbolo de integral*; a notação dx é usada para indicar que a integração é feita relativamente à variável x, e x é chamada a *variável de integração*; os números a e b são chamados *extremos inferior e superior do integral*, respectivamente, e $[a,b]$ é desigando o *intervalo de integração*; finalmente, a função $f(x)$ a ser integrada é chamada *função integranda*.
apresentámos a noção de integral de Riemann para funções reais limitadas num intervalo fechado e limitado. Uma questão fundamental é saber-se que tipos de funções são integráveis. Os três teoremas seguintes indicam algumas classes importantes de funções integráveis. No que segue neste capítulo, excepto se afirmarmos explicitamente o contrário, assumimos que as funções integrandas são limitadas no intervalo de integração.

TEOREMA 5.1. *Se a função real f é contínua em $[a,b]$ então é integrável em $[a,b]$.*

TEOREMA 5.2. *Se a função real f tem apenas um númro finito de pontos de descontinuidade em $[a,b]$ então é integrável em $[a,b]$.*

TEOREMA 5.3. *Se a função real f é monótona em $[a,b]$ então é integrável em $[a,b]$.*

Temos assim que são integráveis as funções contínuas, as funções monótonas e, também, as funções que apresentam um número finito de descontinuidades. O teorema seguinte estabelece que é integrável a composição de uma função contínui com uma função integrável.

TEOREMA 5.4. *Seja f uma função real definida num intervalo $[a,b]$. Suponha que*

(1) f é integrável em $[a,b]$;

(2) Existem números m e M tais que $m \leq f \leq M$ para todo o $x \in [a,b]$;

(3) φ é uma função real e contínua em $[m,M]$.

Então a função composta $h(x) = (\varphi \circ f)(x) = \varphi(f(x))$ é integrável em $[a,b]$.

Exemplos. Considere as funções reais de variável real

$$f(x) = 2x^2 - 1, \qquad g(x) = \frac{x-1}{x+1}, \qquad h(x) = \begin{cases} x, & x < \frac{1}{2} \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \qquad i(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \neq \frac{1}{2} \\ 1, & x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Vamos avaliar a integrabilidade das funções acima, e também da função $f \circ h$ no intervalo $[0,1]$.

(a) f e g são funções contínuas em $[0,1]$, logo integráveis em $[0,1]$.

(b) h é uma função monótona crescente me $[0,1]$, logo integrável em $[0,1]$.

(c) i não é monótona em $[0,1]$ mas é contínua excepto para $x = \frac{1}{2}$. É, portanto, integrável em $[0,1]$.

(d) Como h é integrável em $[0,1]$ e f é contínua em $\mathbb{R}$, a função composta $f \circ h$ definida por

$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) = \begin{cases} 2x^2 - 1, & x < \frac{1}{2} \\ 1, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

é integrável em $[0,1]$.

Os teoremas seguintes fornecem algumas propriedade úteis para o cálculo de integrais.

TEOREMA 5.5. *Se $f(x) = M$ em $[a,b]$, com M uma constante, entãp*

$$\int_a^b f\,dx = M(b-a).$$

Em particular, se $f(x) = 0$ em $[a,b]$ então

$$\int_a^b f\,dx = 0.$$

Exemplos.

(a) $\displaystyle\int_2^4 3\,dx = 3 \cdot (4-2) = 6.$

(b) $\displaystyle\int_2^4 1\,dx = 4 - 2 = 2.$

(c) $\displaystyle\int_1^5 0\,dx = 0.$

É claro que se os extremos inferior e superior do integral coincidem,

$$\int_a^a f\,dx = 0,$$

para qualer função f. Também, por convenção,

$$\int_a^b f\,dx = -\int_b^a f\,dx.$$

Exemplo. Vimos que

$$\int_2^4 3\,dx = 3\cdot(4-2) = 6.$$

Então

$$\int_4^2 3\,dx = -\int_2^4 3\,dx = -6.$$

Note que o integral $\int_4^2 3\,dx$ podia ter sido calculado estendendo o Teorema 5.5 ao caso em que os extremos superior e inferior de integração são trocados

$$\int_4^2 3\,dx = 3\cdot(2-4) = -6.$$

TEOREMA 5.6. *Sejam f e g funções integráveis em $[a,b]$. então*

(1) A função $f+g$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f+g\,dx = \int_a^b f\,dx + \int_a^b g\,dx;$$

(2) A função cf, com c uma constante real, é integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b cf\,dx = c\int_a^b f\,dx;$$

(3) Se $f(x)\leq g(x)$ para cada $x\in[a,b]$ então

$$\int_a^b f\,dx \leq \int_a^b g\,dx;$$

(4) A função $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e

$$\left|\int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f|\,dx;$$

(5) Se $a<c<b$, então f é integrável em $[a,c]$ e em $[c,b]$ e

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx + \int_c^b f\,dx;$$

(6) A função fg é integrável em $[a,b]$.

Note que, usando a convenção acima,

$$\int_b^a f\,dx = -\int_a^b f\,dx,$$

(5) do Teorema 5.6 pode ser reescrito, por exemplo,

$$\int_a^b f\,dx = \int_a^c f\,dx - \int_b^c f\,dx.$$

O teorema fundamental do cálculo.

Consideramos agora o integral como função do extremo superior de integração,

$$\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{for } a \leq x \leq b,$$

o *integral indefinido de f com extremo inferior a*. Os resultados seguintes estabelecem a relação emtre integração e derivação. Em particular, definem as condições sob as quais a técnica de primitivação pode ser usada para calcular o valor de um integral.

TEOREMA 5.7. *Seja f uma função real integrável em $[a,b]$. Punhamos*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \textit{para } a \leq x \leq b.$$

Então F é contínua em $[a,b]$. Se, adicionalmente, f é contínua num ponto $x_0 \in [a.b]$ então F é diferenciável em x_0 e

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Note que, do teorema acima, se f é contínua em $[a,b]$ então F é uma primitiva de f em $[a,b]$. Em particular, uma vez que

$$F(a) = \int_a^a f\,dx = 0,$$

F e a primitiva de f que se anula para $x = a$.

TEOREMA 5.8 (Teorema fundamental do cálculo). *Suponhamos que a função real f é integrável em $[a,b]$, e que existe uma função real F diferenciável em $[a,b]$ tal que $F' = f$. Então*

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a).$$

Vamos usar a notação

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Exemplo. Como a função real f definida por $f(x) = x$ é contínua no intervalo $[1, 2]$, para integrar f no intervalo $[1, 2]$ temos apenas que encontrar uma primitiva F de f e calcular a diferença $F(2) - F(1)$:

$$\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

Métodos de integração.

TEOREMA 5.9 (Integração por partes). *Suponhamos que u e v são funções reais diferenciáveis em $[a, b]$ e que u' e v' são funções integráveis em $[a, b]$. Então*

$$\int_a^b u'v\,dx = [uv]_a^b - \int_a^b uv'\,dx.$$

Exemplo. Pretendemos calcular

$$\int_1^2 e^x x\,dx.$$

Fazemos $u' = e^x$ e $v = x$ de forma que $u = e^x$ e $v' = 1$. Note que u' e v' são funções contínuas, portanto integráveis. Integrando por partes obtemos

$$\int_1^2 e^x x\,dx = [e^x x]_1^2 - \int_1^2 e^x \cdot 1\,dx = [e^x x]_1^2 - [e^x]_1^2 = 2e^2 - e - \big(e^2 - e\big) = e^2.$$

Note que, alternativamente, podemos primitivar por partes

$$\int e^x x\,dx = e^x x - \int e^x \cdot 1\,dx = e^x x - e^x + c = e^x(x-1) + c,$$

e, de seguida, calcular o integral definido

$$\int_1^2 e^x x\,dx = [e^x(x-1)]_1^2 = e^2(2-1) - e(1-1) = e^2.$$

TEOREMA 5.10 (Integração por substituição). *Seja f uma função integrável em $[a, b]$ e φ uma função diferenciável estritamente crescente que aplica $[A, B]$ sobre $[a, b]$, tal que φ' é integrável em $[a, b]$. Então*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A^B f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Note que, no teorema acima, $A = \varphi^{-1}(a)$ e $B = \varphi^{-1}(b)$.

Exemplo. Pretendemos determinar

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x(1 + \ln x)}\,dx.$$

Consideramos a função deferenciável estritamente crescente $\varphi(t) = e^t$ que aplica $[0, \ln 2]$ sobre $[1, 2]$, e mudamos de variável $x = \varphi(t) = e^t$ (consequentemente, $t = \varphi^{-1}(x) = \ln x$ e $x' = \varphi'(t) = e^t$). Note que f e φ' são funções contínuas, portanto integráveis. Integrando por substituição,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}\,dx &= \int_0^{\ln 2} \frac{t}{e^t(1+t)} \cdot e^t\,dt = \int_0^{\ln 2} \frac{t}{1+t}\,dt = \int_0^{\ln 2} 1 - \frac{1}{1+t}\,dt \\ &= \int_0^{\ln 2} 1\,dt - \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+t}\,dt = [t]_0^{\ln 2} - [\ln|1+t|]_0^{\ln 2} \\ &= \ln 2 - 0 - (\ln|1+\ln 2| - \ln|1+0|) = \ln 2 - \ln(1+\ln 2) = \ln\frac{2}{1+\ln 2}.\end{aligned}$$

Alternativamente, como $\varphi(t)$ é uma bijecção de $[0, \ln 2]$ em $[1, 2]$, podemos primitivar por substituição

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}\,dx &= \left[\int \frac{t}{e^t(1+t)} \cdot e^t\,dt\right]_{t=\ln x} = \left[\int \frac{t}{1+t}\,dt\right]_{t=\ln x} = \left[\int 1 - \frac{1}{1+t}\,dt\right]_{t=\ln x} \\ &= [t - \ln|1+t| + c]_{t=\ln x} = \ln x - \ln|1+\ln x| + c\end{aligned}$$

e, depois, calcular o integral definido

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}\,dx &= [\ln x - \ln|1+\ln x|]_1^2 = \ln 2 - \ln|1+\ln 2| - (\ln 1 - \ln|1+\ln 1|) \\ &= \ln 2 - \ln(1+\ln 2) = \ln\frac{2}{1+\ln 2}.\end{aligned}$$

Integrais impróprios.

Apresentámos o integral definido

$$\int_a^b f\,dx$$

sob as hipóteses

(1) O intervalo $[a, b]$ é limitado;

(2) A função f é limitada em $[a, b]$.

Vamos estender a noção de integral definido relaxando cada uma das hipótese acima, dando lugar aos chamados *integrais impróprios*.

Integrais impróprios de primeira espécie. Os integrais impróprios de *primeira espécie* são obtidos por relaxamento da hipótese (1) acima.

Seja f uma função real definida em $[a, \infty)$ e suponhamos que f é integrável em cada intervalo limitado $[a, x]$, com $x > a$. Definimos

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

se o limite existe e é finito. Neste caso, dizemos que o integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *converge*. Caso contrário, dizemos que *diverge*.

O caso em que é o extremo inferior do integral que é infinito é definido analogamente:

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\,dt$$

se o limite existe e é finito.

Exemplos.

(a) Para avaliarmos o integral impróprio

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx$$

calculamos

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{-t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\left(-\int_0^x e^{-t}\cdot(-1)dt\right) = -\lim_{x\to\infty}\left[e^{-t}\right]_0^x = -\lim_{x\to\infty}\left(e^{-x}-e^0\right) = -(0-1) = 1.$$

Dado que o limite acima existe e é finito, concluímos que o integral impróprio converge e

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1.$$

(b) Queremos avaliar o integral impróprio

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx.$$

Determinamos

$$\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to\infty}\left[\ln|t|\right]_1^x = \lim_{x\to\infty}\left(\ln|x|-\ln|1|\right) = \infty - 0 = \infty.$$

Como o limite acima não é finito, concluímos que o integral impróprio diverge.

(c) Avaliamos o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx$$

calculando

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^{-1}\frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to-\infty}\int_x^{-1} t^{-2}\,dt = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_x^{-1} = \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{t}\right]_x^{-1} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{-1}-\left(-\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1+0 = 1.$$

Concluímos então que o integral impróprio converge e

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Consideremos agora o caso em que ambos os extremos do integral são infinitos. Seja f uma função real definida em $\mathbb{R}$ e suponhamso que f é integrável em cada intevalo limitado $[x_1, x_2]$, com $x_2 > x_1$. Dizemos que o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

converge se para $a \in \mathbb{R}$ convergem ambos os integrais $\int_a^\infty f(x)\, dx$ e $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$. Neste caso, definimos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_a^{\infty} f(x)\, dx + \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx.$$

O integral impróprio *diverge* se pelo menos um dos integrais $\int_a^\infty f(x)\, dx$ e $\int_{-\infty}^a f(x)\, dx$ divergir.

Exemplo. Pretendemos avaliar o integral impróprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^x\, dx.$$

Uma vez que

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x e^t\, dt = \lim_{x\to\infty} \left[e^t\right]_0^x = \lim_{x\to\infty} \left(e^x - e^0\right) = \infty - 1 = \infty,$$

o integral $\int_0^\infty e^x\, dx$ diverge. Consequentemente, o integral $\int_{-\infty}^\infty e^x\, dx$ também diverge.

Integrais impróprios de segunda espécie. Um integral impróprio diz-se de *segunda espécie* se a função integranda não é limitada num ponto do intervalo $[a, b]$, isto é, por relaxamento da hipótese (2) acima.

Suponhamos que a função real f é integrável em cada intervalo $[x, b]$, com $a < x \leq b$, mas não é limitada em $(a, b]$. Definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\, dt$$

se o limite existe e é finito. Neste caso, dizemos que o integral $\int_a^b f(x)\, dx$ *converge*. Caso contrário, dizemos que *diverge*.

O caso em que a não limitação de f ocorre próximo do extremo superior do integral é definido analogamente:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\, dt$$

se o limite existe e é finito.

Se f é não limitada em $[a, b]$ excepto próximo de um ponto $c \in (a, b)$, dizemos que o integral impróprio

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

converge se convergirem ambos os integrais $\int_a^c f(x)\, dx$ e $\int_c^b f(x)\, dx$. Neste caso, definimos

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

O integral impróprio *diverge* se divergir pelo menos um dos integrais $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$.

Exemplos.

(a) Pretendemos avaliar o integral impróprio

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx.$$

Determinamos

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0^+}[\ln|t|]_x^1 = \lim_{x\to 0^+}(\ln|1| - \ln|x|) = 0-(-\infty) = \infty.$$

Como o limite acima é infinito, concluímos que o integral impróprio diverge.

(b) Para avaliarmos o integral impróprio

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$$

calculamos

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \infty,$$

concluindo que o integral $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ diverge. Consequentemente, o integral $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx$ também diverge.

Os integrais impróprios em que, simultaneamente, a função integranda é ilimitada na proximidade de um ponto do intervalo de integração e o intervalo de integração é ilimitado são por vezes designados de *terceira espécie*. A sua avaliação é feita combinando os procedimentos apresentados para os integrais impróprios de primeira e de segunda espécies.

Aplicação à determinação de áreas.

Uma aplicação interessante da integração respeita a determinação da área de uma região plana.
Suponhamos que f e g são funções reais integráveis em $[a,b]$ e que $g(x) \leq f(x)$ para cada $x \in [a,b]$. Entao a área da região

$$Z = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

é dada por

$$\alpha(Z) = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx.$$

Exemplos.

(a) Pretendemos determinar a área da região limitada pelas curvas $y = x^2+2x+1$, $y = x^2-2$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 2$ (veja a Figura 5.2(a)). A área e dada por

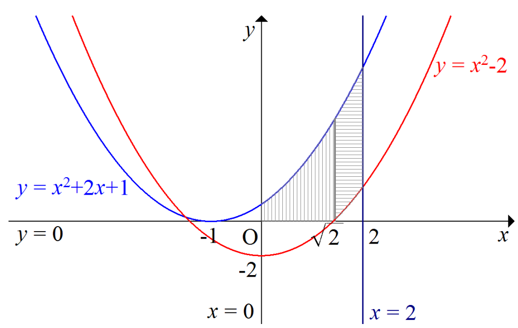
$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{2}} x^2+2x+2-0\,dx+\int_{\sqrt{2}}^2 x^2+2x+2-\left(x^2-2\right)dx &= \int_0^{\sqrt{2}} x^2+2x+2\,dx+\int_{\sqrt{2}}^2 x^2+2x+4\,dx\\ &= \left[\frac{x^3}{3}+x^2+2x\right]_0^{\sqrt{2}}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2+4x\right]_{\sqrt{2}}^2\\ &= \frac{44-6\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

(b) A área da região definida pelas condições

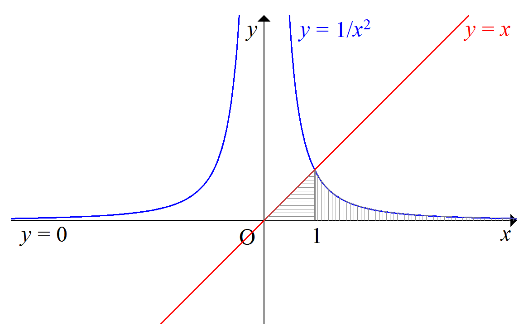
$$\begin{cases} y \le \frac{1}{x^2}\\ y \le x\\ y \ge 0\end{cases}$$

é (veja a Figura 5.2(b))

$$\begin{aligned}\int_0^1 x-0\,dx+\int_1^\infty \frac{1}{x^2}-0\,dx=\int_0^1 x\,dx+\lim_{x\to\infty}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\lim_{x\to\infty}\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_1^x &= \frac{1}{2}-\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)\\ &= \frac{1}{2}-(0-1)=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$



(a)



(b)

Figura 5.2

Exercícios.

(1) Calcule os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_1^2 x^2 - 2x + 3\,dx$; b) $\displaystyle\int_0^8 \sqrt{2x} + \sqrt[3]{x}\,dx$; c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\,dx$;

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^2 x\,dx$; e) $\displaystyle\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^{-3} \frac{1}{\sqrt{25+3x}}\,dx$;

g) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x^4}{3} - 2x^2 + \frac{3}{x^3}\right) dx$; h) $\displaystyle\int_1^3 \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[5]{x}\,dx$; i) $\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x}}{x}\,dx$;

j) $\displaystyle\int_0^1 (x-5)^4\,dx$; k) $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2}x+3\right)^6 dx$; l) $\displaystyle\int_0^2 2x\left(5+6x^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dx$;

m) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2}{(x+2)^2}\,dx$; n) $\displaystyle\int_0^1 \frac{-5x}{(x^2+2)^3}\,dx$; o) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2}{\sqrt[3]{(x+4)^2}}\,dx$;

p) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} x^2 e^{x^3}\,dx$; q) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$; r) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$;

s) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x+3}\,dx$; t) $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{5x}{x^2+4}\,dx$; u) $\displaystyle\int_1^2 (5x+4)^{-1}\,dx$;

v) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+4e^x}\,dx$; w) $\displaystyle\int_2^e \frac{1}{x\ln x}\,dx$; x) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \operatorname{sen} x \cdot 2^{\cos x}\,dx$;

y) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$; z) $\displaystyle\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$.

(2) Calcule os seguintes integrais, usando o método de integração por partes:

a) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx$; b) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^2 e^x\,dx$; c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 x\,dx$;

d) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} (x^2+2x)e^x\,dx$; e) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^x \operatorname{sen} x\,dx$; f) $\displaystyle\int_0^1 x \operatorname{arctg} x\,dx$;

g) $\displaystyle\int_1^2 (x^3+x)\ln x\,dx$; h) $\displaystyle\int_\pi^{2\pi} \cos^2 x\,dx$; i) $\displaystyle\int_{-1}^1 x^7 e^{x^4}\,dx$;

j) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$; k) $\displaystyle\int_1^2 \ln(3x)\,dx$; l) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$;

m) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\cos x\,dx$; n) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 2x \operatorname{sen} x\,dx$; o) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)^3 e^{2x}\,dx$.

(3) Use o método de substituição para calcular os seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x+1)}\,dx;$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\log_3 x}{x(2+\log_3 x)}\,dx;$

c) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx;$ d) $\displaystyle\int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx;$

e) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,dx;$ f) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx;$

g) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\,dx;$ h) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx;$

i) $\displaystyle\int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt[4]{x+1}\right)}\,dx.$

(4) Determine a área da região do plano limitada pela parábola de equação $y=\frac{x^2}{2}$ e aa rectas definidas por $x=1,\ x=3$ e $y=0$.

(5) Determine as áreas das regiões limitadas pelas curvas de equações:

a) $y=x^2+2x+1,\ y=x^2-2,\ x=0,\ y=0$ e $x=2;$

b) $y=x^3+1$ e $y=2x^2+x-1;$

c) $y=2-x^2$ e $y^3=x^2.$

(6) Calcule as áreas dos domínios planos (limitados) definidos por:

a) $0\le y\le 2x,\ x\le 4;$ b) $0<y\le x^2,\ 2\le x\le 4;$

c) $3x\le y<x^2, x>-1;$ d) $y=x^3,\ y=8,\ x=0;$

e) $y=x^2+1,\ y=3x,\ x=0;$ f) $y=e^{5x},\ x=0,\ x=1,\ y=0;$

g) $y=\ln x,\ y=0,\ x=e;$ h) $x^2\le y\le \dfrac{1}{x},\ x\ge 0,\ y\le 2;$

i) $0\le y<\dfrac{1}{x^2},\ 1\le x\le 3;$ j) $0\le y<e^{-x},\ 0\le x\le 2;$

k) $x=y^2-1,\ y\ge 0,\ y=x,\ x=2;$ l) $y=|x|,\ y=0,\ x=-2,\ x=1.$

(7) Estude a convergência de cada um dos integrais impróprios abaixo e determine o valor do integral no caso de convergência:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx;$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx;$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx;$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx;$ e) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}\,dx;$ f) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx.$

Bibliografia

[1] Tom M. Apostol, T. M. (1988): *Cálculo*, vol. 1, Reverté, Espanha.

[2] Simmons, G.F. (1987): *Cálculo com Geometria Analítica*, vol. I., Makron Books, McGraw-Hill, Brasil.

[3] Stewart, J. (2006): *Cálculo*, vol. I, 5ª ed., Pioneira Thomson Learning, Brasil.