

Резонансные процессы в активной среде

Д.А. Румянцев*, Д.М. Шленев** А.А. Ярков***

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия

В работе рассмотрены различные квантовые процессы с учетом резонанса на виртуальном фермионе.

*E-mail: rda@uniyar.ac.ru

**E-mail: ultrasickdoom@gmail.com

***E-mail: a12l@mail.ru

1 Введение

Нейтронные звезды, обладая набором экстремальных характеристик, являются природными физическими лабораториями и одними из самых интересных объектов, известных в науке. Особое внимание ученых привлекают радиопульсары и магнитары, обладающие магнитными полями колоссальной напряженности, к которой очень сложно приблизиться в земных условиях. У магнитного поля имеется характерное значение, называемое критическим, $B_e = m_e^2/e \simeq 4.41 \times 10^{13}$ Гс¹, при приближении к которому становится необходимым учитывать квантовые эффекты при движении в нем частиц. В радиопульсарах с магнитными полями порядка 10^{12} Гс и магнитарах – до 10^{16} Гс [1–3] такие условия выполняются.

Кроме сильных магнитных полей, в магнитосфере как радиопульсаров, так и магнитаров присутствует достаточно горячая и плотная электрон-позитронная плазма [1]. Магнитное поле и плазма составляют две компоненты внешней активной среды, присутствие которой значительно изменяет характеристики протекающих в ней микропроцессов. Во-первых, активная среда может изменять закон дисперсии находящихся в ней частиц, что приводит к изменению кинематики процессов и вследствие чего могут открываться каналы реакций, которые запрещены или сильно подавлены в вакууме. Во-вторых, активная среда влияет на амплитуды процессов, в результате чего они могут приобретать резонансный характер. Именно эта составляющая влияния внешней активной среды рассматривается в данном обзоре. Вследствие резонанса вклад микропроцессов в макроскопические характеристики астрофизических процессов, такие как светимость и скорость изменения количества частиц, может многократно увеличиваться.

В сильном магнитном поле поперечная составляющая импульса фермиона квантуется. В таком случае энергия фермиона определяется так называемым

¹В работе используется естественная система единиц: $\hbar = c = k = 1$, m_e – масса электрона, $e > 0$ – элементарный заряд.

уровнем Ландау n и проекцией импульса вдоль магнитного поля p_z :

$$E_n = \sqrt{m_f^2 + p_z^2 + 2|e_f|Bn}, \quad (1)$$

где e_f и m_f - заряд и масса фермиона. Состояние с $n = 0$, в котором фермион движется вдоль силовой линии магнитного поля, называется основным уровнем Ландау.

Поскольку число параметров, входящих в задачу достаточно велико, можно предложить несколько способов классификации замагниченной плазмы относительно иерархии параметров среды. Упрощенное условие магнитодоминирующей среды является тот факт, что значение магнитного поля во много раз превышает параметры среды $eB \gg \mu^2, T^2, E^2$, где μ - химический потенциал электронов, а T - температура плазмы.

Более строгое соотношение в пределе сильного поля, которое можно найти в работе [4], строится на том, что плотность энергии магнитного поля во много больше плотности энергии электронов позитронного газа:

$$\frac{B^2}{8\pi} \gg \frac{\pi^2(n_{e^-} - n_{e^+})^2}{eB} + \frac{eBT^2}{12}, \quad (2)$$

где n_{e^-} и n_{e^+} - концентрации электронов и позитронов плазмы. Такие условия могут, в частности, реализовываться в моделях вспышечной активности источников мягких повторяющихся гамма-всплесков (SGR) [1, 5], которые, как показывают недавние наблюдения, можно отождествить с магнитарами [6–11].

Ещё одним способом классификации является эффективность заполнения высших уровней Ландау. В последующих главах будет рассматриваться среда с нулевым химическим потенциалом, $\mu = 0$. Такие условия характерны для магнитосфер радиопульсаров и магнитаров. При температурах, $T \ll m$, отношение концентрации основного и первого уровня Ландау:

$$\frac{n_e|_{n=1}}{n_e|_{n=0}} \ll 1.$$

Для параметров среды, $B = 10^{12}$ Гс и $T = 5$ кэВ, характерных для магнитаров

$$\frac{n_e|_{n=1}}{n_e|_{n=0}} \simeq 0.11 ,$$

$$\frac{n_e|_{n=2}}{n_e|_{n=0}} \simeq 0.012 ,$$

откуда следует, что электроны занимают преимущественно основной уровень Ландау. Электроны будут занимать основной уровень Ландау и для температур $T \sim m$, характерных для вспышечной активности, при магнитных полях $B_e \gtrsim 7B_e$.

Даже в магнитарных полях условие 2, при котором магнитное поле является доминирующим параметром, перестает выполняться при высоких значениях плотности плазмы $\rho \geq 10^8$ г/см³. Такая плотность может достигаться в границе между внешней и внутренней корой магнитара. В результате реакции, в которых имеются фермионы в промежуточном состоянии, могут приобретать резонансный характер. Это происходит вследствие того, что начинают возбуждаться высшие уровни Ландау виртуальных фермионов. Они становятся реальными с определенным законом дисперсии, садятся на массовую поверхность. В этом состоянии они являются нестабильными и распадаются за время, обратно пропорциональное вероятности их перехода на низшие уровни Ландау. Эффективность реакции при этом заметно увеличивается, что может иметь наблюдаемые астрофизические следствия.

Резонанс на виртуальном фотоне в сильно замагниченной плазме связан непосредственно с поляризационным оператором фотона в активной среде. Резонанс на фотоне наблюдается аналогичным образом: в активной среде поляризационный оператор фотона имеет реальную часть, которую можно рассматривать как эффективную массу фотона. В кинематической области, в которой квадрат 4-импульса виртуального фотона будет равен реальной части его поляризационного оператора, виртуальный фотон станет реальным и нестабильным.

Настоящая статья организована следующим образом. В Разделе 2 обсуж-

даются различные методы представления решения уравнения Дирака во внешнем магнитном поле. В разделе 3 рассматриваются радиационные поправки в магнитном поле к массовому оператору частиц в промежуточном состоянии и получается выражение для пропагатора. Раздел 4 посвящен различным двухвершинным процессам, в которых может реализовываться резонанс на виртуальном фермионе и/или фотоне. В Разделе 5 описываются сингулярности в фазовых объемах одновршинных процессов и методы их устранения.

2 Представления решений уравнения Дирака во внешнем магнитном поле

В этом разделе обсудим влияние активной среды на волновые функции присутствующих в ней частиц: фермионов и фотонов. В случае фермионов искомые нами волновые функции являются решением уравнения Дирака в присутствии внешнего постоянного однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z :

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu + e_f A_\mu\gamma^\mu - m_f)\Psi_{p,n}^s(X) = 0, \quad (3)$$

где A_μ – 4-вектор потенциала электромагнитного поля, который в калибровке Ландау имеет вид $A^\mu = (0, 0, xB, 0)$, $X^\mu = \{t, x, y, z\}$. Решением этого уравнения является набор собственных функций любого оператора, который коммутирует с гамильтонианом Дирака во внешнем магнитном поле: $H = \gamma_0(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}) + m_f\gamma_0 + e_f A_0$, где $\mathbf{P} = -i\nabla - e_f\mathbf{A}$. Существует несколько представлений решений уравнения Дирака, из них можно выделить два наиболее распространенных подхода, подробное описание которых имеется в работах [12–17]. При первом из них, предложенном Джонсоном и Липпманом [18], решения выбираются как собственные функции оператора обобщенной спиральности, $T_0 = \frac{1}{m_f}(\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{P})$, где $\boldsymbol{\Sigma} = -\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\gamma_5$ – трехмерный оператор спина. При этом две верхние компоненты биспиноров соответствуют состояниям фермиона с проекцией спина на направление магнитного поля, равной $1/2$ и $-1/2$.

Другой подход предложен Соколовым и Терновым [19]. Он состоит в выборе волновых функций как собственных функций ковариантного оператора μ_z , который строится следующим образом:

$$\mu_z = m_f \Sigma_z - i\gamma_0 \gamma_5 [\mathbf{\Sigma} \times \mathbf{P}]_z . \quad (4)$$

Его можно получить непосредственно из введенного в [19] обобщенного оператора спина, являющегося тензором третьего ранга, который можно записать в координатном представлении следующим образом:

$$F_{\mu\nu\lambda} = -\frac{i}{2} (P_\lambda \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} + \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} P_\lambda) , \quad (5)$$

где $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)/2$, и $P_\lambda = i\partial_\lambda - e_f A_\lambda = (i\partial_0 - e_f A_0, -i\nabla - e_f \mathbf{A})$ – оператор обобщенного 4-импульса. Заметим, что в работе [19] ковариантные билинейные формы были построены из матриц Дирака в обкладках биспиноров ψ^\dagger и ψ , тогда как в современной литературе (см., например [20]) билинейные формы строятся из матриц Дирака в обкладках биспиноров $\bar{\psi}$ и ψ . Из пространственных компонент $F_{\mu\nu 0}$ оператора (5) можно построить следующий векторный оператор:

$$\mu_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk0} , \quad (6)$$

где ε_{ijk} – тензор Леви-Чивита. Построенный таким образом объект (6) имеет смысл оператора поляризации [12, 19]. Его можно представить в виде:

$$\boldsymbol{\mu} = m_f \mathbf{\Sigma} + i\gamma_0 \gamma_5 [\mathbf{\Sigma} \times \mathbf{P}] . \quad (7)$$

В нерелятивистском пределе оператор (7), отнесенный к квадрату массы фермиона: $\boldsymbol{\mu}/m_f^2$, переходит в обычный оператор Паули для магнитного момента [21], который имеет явную физическую интерпретацию оператора спина.

Решения уравнения Дирака в представлении Джонсона и Липпмана широко используются в литературе (см., например, [22–27]). Однако эти функции обладают рядом недостатков, которые проявляются при расчете кон-

кретных характеристик процессов с двумя и более вершинами. Так, лоренц-инвариантностью будет обладать только квадрат модуля амплитуды, просуммированный по всем поляризациям фермиона, а не парциальные вклады в него. Более того, как было показано в работах [28, 29], в области резонанса использование функций Джонсона и Липпмана приводит к относительной ошибке в расчетах физических величин порядка $O(B/B_e)$ в древесном приближении и $O[(B/B_e)^2]$ в следующих порядках разложения, что становится существенным при магнитных полях.

С другой стороны, использование функций, предложенных Соколовым и Терновым, правильно описывает сечение процессов вблизи резонанса, а также позволяет найти парциальные вклады в амплитуду каждого поляризационного состояния частиц в отдельности, которые будут иметь лоренц-инвариантную структуру. По этой причине далее в этом разделе приведем подробное их описание.

Уравнение для собственных функций оператора (4) имеет следующий вид:

$$\mu_z \Psi_{p,n}^s(X) = s M_n \Psi_{p,n}^s(X), \quad (8)$$

где квантовое число $s = \pm 1$ определяет поляризационные состояния фермиона в постоянном однородном магнитном поле.

Как уже упоминалось во Введении, состояния фермиона квантуются по энергетическим состояниям, которые называются уровнями Ландау:

$$E_n = \sqrt{p_z^2 + M_n^2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Здесь введено обозначение для эффективной массы фермиона в магнитном поле $M_n = \sqrt{2\beta n + m_f^2}$, где $\beta = |e_f|B$. Каждое состояние является бесконечно вырожденным по p_z и дважды вырожденным по s , кроме состояния $n = 0$, где возможно лишь состояние с $s = -1$. Решения уравнения Дирака (3) могут быть представлены следующим образом:

$$\Psi_{p,n}^s(X) = \frac{e^{-i(E_n X_0 - p_y X_2 - p_z X_3)} U_n^s(\xi)}{\sqrt{4E_n M_n (E_n + M_n)(M_n + m_f) L_y L_z}}, \quad (10)$$

где

$$\xi(X_1) = \sqrt{\beta} \left(X_1 - \eta \frac{p_y}{\beta} \right). \quad (11)$$

Далее, используя обозначение для определения знака заряда фермиона $\eta = e_f/|e_f|$, становится удобным представить биспиноры $U_n^s(\xi)$ в виде отдельной суммы биспиноров соответствующих положительным и отрицательным зарядам $U_{n,\eta}^s(\xi)$:

$$U_n^s(\xi) = \frac{1-\eta}{2} U_{n,-}^s(\xi) + \frac{1+\eta}{2} U_{n,+}^s(\xi), \quad (12)$$

где

$$U_{n,-}^-(\xi) = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2\beta n} p_z V_{n-1}(\xi) \\ (E_n + M_n)(M_n + m_f)V_n(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_{n-1}(\xi) \\ -p_z(M_n + m_f)V_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$U_{n,-}^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_n + M_n)(M_n + m_f)V_{n-1}(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta n} p_z V_n(\xi) \\ p_z(M_n + m_f)V_{n-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$U_{n,+}^-(\xi) = \begin{pmatrix} i\sqrt{2\beta n} p_z V_n(\xi) \\ (E_n + M_n)(M_n + m_f)V_{n-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_n(\xi) \\ -p_z(M_n + m_f)V_{n-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$U_{n,+}^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_n + M_n)(M_n + m_f)V_n(\xi) \\ i\sqrt{2\beta n} p_z V_{n-1}(\xi) \\ p_z(M_n + m_f)V_n(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_{n-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$V_n(\xi)$ – нормированные функции гармонического осциллятора, которые следующим образом выражаются через полиномы Эрмита $H_n(\xi)$ [30]:

$$V_n(\xi) = \frac{\beta^{1/4} e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\xi). \quad (17)$$

Далее эти решения уравнения Дирака (10) будут использованы для получения пропагаторов фермионов в разделе 3.

3 Представление пропагаторов частиц с учетом мнимой части

3.1 Пропагатор фермиона

При рассмотрении любого взаимодействия в квантовой теории поля предполагается, что между начальными и конечными состояниями существует обмен виртуальными частицами. "Виртуальность" частицы означает, что ее энергия и импульс не связаны релятивистским соотношением (9). Промежуточное состояние в формализме собственного времени Фока [31] описывается уравнением Дирака с δ -функцией в правой части:

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu + e_f A_\mu \gamma^\mu - m_f) S(X, X') = \delta(X - X'). \quad (18)$$

Его решение $S(X, X')$ называется пропагатором. В этом разделе мы опишем представление пропагаторов фермионов во внешнем магнитном поле с учетом радиационных поправок к массовому оператору и покажем, как может реализовываться резонанс в квантовых процессах, содержащих фермионы в промежуточном состоянии.

Решения уравнения (18) имеют достаточно громоздкий вид. Поэтому удобно воспользоваться различными приближениями. В относительно сильных полях для частиц, обладающих высоким удельным зарядом, $|e_f|/m_f$, удобно рассматривать пропагатор в виде разложения по уровням Ландау:

$$S(X, X') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} S_n^s(X, X'). \quad (19)$$

Для построения пропагатора можно воспользоваться полевыми операторами:

$$\Psi(X) = \sum_{n,p_y,p_z,s} (a_{n,p}^s \Psi_{n,p,+}^s(X) + b_{n,p}^{\dagger s} \Psi_{n,p,-}^s(X)), \quad (20)$$

где a – оператор уничтожения фермиона, b^\dagger – оператор рождения фермиона, Ψ_+ и Ψ_- соответствуют решениям уравнения Дирака с положительной и отрицательной энергией соответственно. Стандартным образом пропагатор вычисляется как разность хронологически упорядоченного и нормально упорядоченного произведения полевых операторов:

$$S(X, X') = T(\Psi(X)\bar{\Psi}(X')) - \mathcal{N}(\Psi(X)\bar{\Psi}(X')). \quad (21)$$

Подставляя точные решения уравнения Дирака (10) и вводя для удобства новое обозначение:

$$\phi_{p,n}^s(X_1) = \frac{U_n^s[\xi(X_1)]}{\sqrt{2M_n(E_n + M_n)(M_n + m_f)}}, \quad (22)$$

где U_n^s определяется формулой (12), можно представить вклад в разложение пропагатора от уровня Ландау n и поляризационного состояния s следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n^s(X, X') &= \int \frac{dp_0 dp_y dp_z}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \frac{e^{-ip_0(X_0 - X'_0) + ip_y(X_2 - X'_2) + ip_z(X_3 - X'_3)}}{p_0^2 - p_z^2 - M_n^2 - \mathcal{R}_\Sigma^s(p) + i\mathcal{I}_\Sigma^s(p)} \phi_{p,n}^s(X_1) \bar{\phi}_{p,n}^s(X'_1), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mathcal{R}_\Sigma^s(p)$ и $\mathcal{I}_\Sigma^s(p)$ – реальная и мнимая части массового оператора фермиона. Для их получения требуется вычислить радиационные поправки к массе фермиона в замагниченной плазме. Реальная часть массового оператора $\mathcal{R}_\Sigma^s(p)$ определяет изменение закона дисперсии фермиона в присутствии замагниченной плазмы. В слабых магнитных полях, где выполняется $B \ll B_e$, но среду ещё можно рассматривать как поледоминирующую, она определяется

отношением [32]:

$$\Re_{\Sigma}^s(p) = \frac{4\alpha m_f}{3\pi} \varkappa^2 \left[\ln \varkappa^{-1} + C + \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{33}{16} \right], \quad \varkappa \ll 1, \quad (24)$$

где $C = 0.577\dots$ - постоянная Эйлера, динамический параметр \varkappa вводится следующим образом:

$$\varkappa = \frac{1}{m_f B_e} [-(F_{\mu\nu} p_{\nu})^2]^{1/2}. \quad (25)$$

Для случая сильного магнитного поля, $B \gtrsim B_e$, без учета плазмы лидирующий вклад в сдвиг массы фермиона, находящегося на основном уровне Ландау, описывается квадратом логарифмической функции [33]:

$$\Re_{\Sigma}^s(p) = \frac{\alpha}{4\pi} m_f \ln^2(2\beta/m_f^2). \quad (26)$$

Из (24) и (26) следует, что даже для достаточно больших значений магнитного поля вплоть до 10^{16} Гс эта поправка к массе фермиона имеет величину порядка постоянной тонкой структуры α [13, 14] и является несущественной.

Резонанс на виртуальном фермионе будет наблюдаться, когда в знаменателе пропагатора (23) реальная часть обращается в ноль. Тогда виртуальная частица становится реальной, то есть приобретает определенный закон дисперсии (9). Анализ кинематики показывает, что это возможно только тогда, когда виртуальный фермион занимает один из высших уровней Ландау, $n > 0$. Частица при этом является нестабильной, и время ее жизни, в нерезонансной области предполагающееся бесконечно большим, определяется мнимой частью массового оператора, $\mathcal{I}_{\Sigma}^s(p)$, учет которой становится необходимым. Она может быть получена с помощью оптической теоремы и представлена в следующем виде [34, 35]:

$$\Im_{\Sigma}^s(p) = -\frac{1}{2} p_0 \Gamma_n^s, \quad (27)$$

где Γ_n^s - полная ширина поглощения фермиона, находящегося в поляризованном состоянии s и занимающего n -й уровень Ландау. Полная ширина

изменения состояния фермиона может быть выражена через ширину рождения фермиона [36]:

$$\Gamma_n^s = \Gamma_n^{(abs)s} + \Gamma_n^{(cr)s} \simeq \Gamma_n^{(cr)s} \left[1 + e^{(E_n - \mu)/T} \right], \quad (28)$$

где $\Gamma_n^{(abs)s}$ и $\Gamma_n^{(cr)s}$ – ширины поглощения и рождения фермиона соответственно. Введенный таким образом пропагатор с учетом конечной ширины изменения состояния фермиона позволяет корректно рассчитывать сечения квантовых процессов в резонансной области.

3.2 Пропагатор фотона

Пропагатор фотона определяется решением следующего волнового уравнения:

$$(g_{\alpha\rho} \partial_\mu^2 - \partial_\alpha \partial_\rho) G^\rho{}_\beta(x) + \int d^4x' \mathcal{P}_{\alpha\rho}^{(\lambda)}(x - x') G^\rho{}_\beta(x) = g_{\alpha\beta} \delta^4(x),$$

где $\mathcal{P}_{\alpha\beta}^{(\lambda)}(x - x')$ – поляризационный оператор фотона в магнитном поле и плазме, $\delta^4(x) = \delta(t)\delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Решения уравнения (29) удобно представить в виде разложения по собственным векторам и собственным значениям поляризационного оператора $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(q)$.

Поляризационный оператор фотона рассматривался в ряде работ [31, 37–47]. В постоянном магнитном поле поляризационный оператор можно представить в виде разложения по базису из собственных векторов [37]. Они могут быть построены из q_α и безразмерного тензора электромагнитного поля, $\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$, следующим образом:

$$\begin{aligned} b_\mu^{(1)} &= (\varphi q)_\mu, & b_\mu^{(2)} &= (\tilde{\varphi} q)_\mu, \\ b_\mu^{(3)} &= q^2 (\Lambda q)_\mu - q_\mu q_\perp^2, & b_\mu^{(4)} &= q_\mu, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}$, $\Lambda_{\alpha\beta} = (\varphi\varphi)_{\alpha\beta}$, $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\alpha\beta}$, а также векторы $b_\mu^{(\lambda)}$ имеют следующую нормировку:

$$\begin{aligned} (b^{(1)}b^{*(1)}) &= -q_\perp^2, & (b^{(2)}b^{*(2)}) &= -q_\parallel^2, \\ (b^{(3)}b^{*(3)}) &= -q^2 q_\parallel^2, & (b^{(4)}b^{*(4)}) &= q^2. \end{aligned} \quad (30)$$

Плохо выглядит, может перенести в начало? В системе отсчета, где имеется только магнитное поле \mathbf{B} , направленное вдоль третьей оси, 4-векторы с индексами \perp и \parallel относятся к подпространствам Евклида $\{1, 2\}$ и Минковского $\{0, 3\}$ соответственно. Для произвольных векторов p_μ, q_μ имеем:

$$\begin{aligned}(pq)_\perp &= (p\Lambda q) = p_1q_1 + p_2q_2, \\ (pq)_\parallel &= (p\tilde{\Lambda}q) = p_0q_0 - p_3q_3\end{aligned}\tag{31}$$

Собственные векторы и собственные значения поляризационного оператора определяют поляризационные свойства фотонов. При этом физически наблюдаемыми будут три поляризационных состояния фотона, так как моду, соответствующую вектору $b_\mu^{(4)}$, можно устранить с помощью калибровочных преобразований [44].

Нужно структурировать. Строго говоря, поляризационный оператор фотона с учетом плазмы, построенный в виде разложения по векторам (29), уже не будет иметь диагональный вид. Диагональное представление поляризационный оператор примет в базисе собственных векторов $r_\alpha^{(\lambda)}$ в замагниченной плазме с собственными значениями $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ [42–44, 48]:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(q) = \sum_{\lambda=1}^3 \mathcal{P}^{(\lambda)}(q) \frac{r_\alpha^{(\lambda)}(r_\beta^{(\lambda)})^*}{(r^{(\lambda)})^2}, \quad r_\beta^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^3 A_i^{(\lambda)} b_\beta^{(i)}, \tag{32}$$

где $A_i^{(\lambda)}$ – некоторые комплексные коэффициенты.

Нужно разложение с точностью до $1/\beta^2$. Однако в случае, когда магнитное поле является наибольшим параметром задачи $\beta \gg T^2, \omega^2$ (т.н. поледоминирующая среда) и присутствует зарядово-симметричная плазма, $\mu = 0$, собственные векторы $r_\alpha^{(\lambda)}$ и собственные значения $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ оператора поляризации в плазме, состоящей из электронов и позитронов, находящихся на основном уровне Ландау, в однопетлевом приближении примут вид [44]:

$$r_\alpha^{(1)} = -2q_\perp^2 b_\alpha^{(1)} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad r_\alpha^{(3)} = O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \tag{33}$$

$$r_\alpha^{(2)} = b_\alpha^{(2)} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right). \tag{34}$$

$$\mathcal{P}^{(1)}(q) = \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \mathcal{V} - \frac{\alpha}{3\pi} q_\perp^2 + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad (35)$$

$$\mathcal{P}^{(2)}(q) = \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \mathcal{V} + \frac{2\alpha}{\pi} \beta \mathcal{D} + O\left(\frac{1}{\beta}\right). \quad (36)$$

$$\mathcal{P}^{(3)}(q) = O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad (37)$$

где

$$\mathcal{D} = -\mathcal{J}_1(q_\parallel) - H\left(\frac{q_\parallel^2}{4m_e^2}\right), \quad (38)$$

$$\mathcal{J}_1(q_\parallel) = 2q_\parallel^2 m_e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{E} \frac{f_-(p) + f_+(p)}{q_\parallel^4 - 4(pq)_\parallel^2}, \quad (39)$$

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{z}{1-z}} - 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (40)$$

$$H(z) = -\frac{1}{2\sqrt{z(z-1)}} \ln \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z} - \sqrt{z-1}} - 1 + \frac{i\pi}{2\sqrt{z(z-1)}}, \quad z > 1, \quad (41)$$

$f_\pm(p) = [\exp(E/T) - 1]^{-1}$ – функция распределения электронов и позитронов плазмы при $\mu = 0$,

$$\mathcal{V} = \ln(B/B_e) - 1.792 + \frac{3}{2} \int_0^1 dx (1-x^2) \ln \left[1 - \frac{q^2}{4m_e^2} (1-x^2) \right]. \quad (42)$$

Такие условия имеют место в большинстве моделей магнитосфер радиопульсаров и магнитаров [49].

Из выражений (33)–(37) следует, что фотон в пределе сильного магнитного поля, а также зарядово-симметричной плазмы будет описываться такими

же векторами поляризации, как и в магнитном поле без плазмы. С учетом нормировки векторы поляризации будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha}^{(1)}(q) &= \frac{r_{\alpha}^{(1)}}{\sqrt{|(r^{(1)}r^{*(1)})|}} = \frac{(q\varphi)_{\alpha}}{\sqrt{q_{\perp}^2}}, \\ \varepsilon_{\alpha}^{(2)}(q) &= \frac{r_{\alpha}^{(2)}}{\sqrt{|(r^{(2)}r^{*(2)})|}} = \frac{(q\tilde{\varphi})_{\alpha}}{\sqrt{q_{\parallel}^2}}.\end{aligned}\tag{43}$$

Эти поляризационные состояния мы будем называть мода 1 и мода 2 соответственно. В литературе используются разные обозначения для этих мод. Например, в работе [50] это моды \parallel и \perp в чистом магнитном поле, в работе [51] эти состояния соответствуют Х- и О-модам, а в работе [2] – Е- и О-модам. В пределе $\omega \ll m_e$ после надлежащих преобразований (выделение пространственной части вектора $\varepsilon_{\alpha}^{(2)}$ и переход к системе координат, где вектор импульса фотона направлен вдоль оси z) эти моды переходят в векторы поляризации, представленные в работе [52].

Как известно [44], закон дисперсии для фотона моды 1 в пределе сильного магнитного поля мало отличается от закона дисперсии в замагниченном вакууме $q^2 = 0$. С другой стороны, для фотона моды 2 дисперсия будет значительно отличаться от вакуумного закона дисперсии и будет определяться соотношением

$$q^2 - \mathcal{P}^{(2)}(q) = 0.\tag{44}$$

Также следует отметить, что закон дисперсии значительно отличается от вакуумного для моды 1 и 2 в окрестности так называемых циклотронных резонансов:

$$q_{\parallel}^2 = (M_n \pm M_{n'})^2\tag{45}$$

из-за наличия корневых сингулярностей в собственных значениях поляризационного оператора, $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ (за исключением точки $q_{\parallel}^2 = 4m_e^2$ для моды 1). Поэтому в этих областях становится важным учет радиационных поправок к

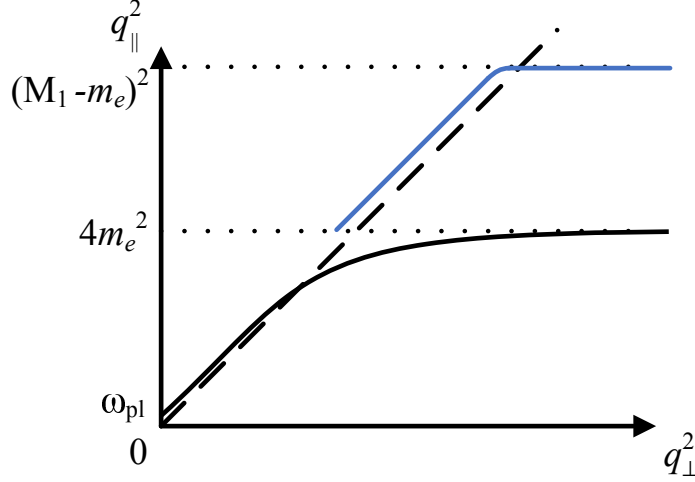


Рис. 1: Закон дисперсии моды 2 в зарядово-симметричной плазме в пределе сильного магнитного поля, $B \gtrsim B_e$, изображен сплошными линиями. Штриховой линией изображен вакуумный закон дисперсии, который практически соответствует дисперсии моды 1. Дисперсионные кривые следует продолжить схожим образом на область $q_{\parallel}^2 > (M_1 - m_e)^2$.

собственным значениям поляризационного оператора в замагниченной плазме. Этот учет приводит к перенормировке волновых функций фотона

$$\varepsilon_{\alpha}^{(\lambda)}(q) \rightarrow \varepsilon_{\alpha}^{(\lambda)} \sqrt{Z_{\lambda}}, \quad Z_{\lambda}^{-1} = 1 - \frac{\partial \mathcal{P}^{(\lambda)}(q)}{\partial \omega^2}. \quad (46)$$

Проведенный анализ позволяет качественно изобразить дисперсию фотона моды 2 (см. рис. 1). Следует отметить, что в плазме существует область с $q^2 > 0$ ниже первого циклотронного резонанса $q_{\parallel}^2 = 4m_e^2$. Это связано с наличием плазменной частоты у электронов и позитронов среды, которую можно определить из дисперсионного уравнения 44:

$$\omega_{pl}^2 - \mathcal{P}^{(2)}(\omega_{pl}, \mathbf{k} \rightarrow 0) = 0. \quad (47)$$

Наличие плазменной частоты приводит к изменению кинематики процессов, например, становится кинематически возможен канал расщепления фотона $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$ в то время, как каналы $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$, $\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$ в плазме подавлены [53]. Для фотона моды 1 значение ω_{pl} также присутствует, но оно пренебрежимо мало.

В результате пропагатор в координатном пространстве можно представить

следующим образом:

$$G_{\mu\nu}(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} G_{\mu\nu}(q) e^{-iqx}, \quad (48)$$

где

$$G_{\mu\nu}(q) = \sum_{\lambda=1}^3 \frac{b_{\mu}^{(\lambda)} b_{\nu}^{(\lambda)}}{(b^{(\lambda)})^2} \cdot \frac{1}{q^2 - \mathcal{P}^{(\lambda)}(q)} \quad (49)$$

– фурье-образ пропагатора. Таким образом, поведение пропагатора фотона определяется аналитическими свойствами поляризационного оператора.

4 Резонансные двухвершинные процессы

4.1 Резонанс на виртуальном фотоне.

4.2 Резонанс на виртуальном электроне (фермионе).

Интерес к изучению комптоновского рассеяния, $\gamma e \rightarrow \gamma e$ в сильном магнитном поле первоначально был вызван неожиданным открытием циклотронных спектральных линий у двойных рентгеновских пульсаров [54–56], которые изначально интерпретировались либо как циклотронное поглощение², либо как циклотронное излучение [54]. Дальнейшее повышение разрешения детекторов по энергии позволило уверенно заключить, что циклотронные особенности связаны именно с поглощением фотона [57]. Под циклотронным резонансом обычно понимается резкое увеличение сечения рассеяния по сравнению с классическим томсоновским сечением, $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/(3m_e^2)$. В одной из первых работ по этой тематике [58] выражение для сечения комптоновского рассеяния было получено для случая магнитного поля без плазмы в нерелятивистском пределе. Для фотона, распространяющегося вдоль магнитного поля в сечении был обнаружен резонансный пик при энергии:

$$\omega_B \simeq \frac{\beta}{m_e}. \quad (50)$$

²Под поглощением подразумеваются элементарные процессы, изменяющие состояние фотона: поглощение фотона электроном, комптоновское рассеяние и др.

В работе [58] также было показано, что сечение рассеяния фотона на электро-
не значительно зависит как от поляризационного состояния фотона, так
и от угла между направлением магнитного поля и импульса начального фо-
тона. В последовавшей за ней статье [59] исследовалось изменение частоты
фотона, кратное циклотронной частоте ω_B (50), в комптоновском процессе. В
следующих работах [60, 61] были получены результаты для полного сечения
рассеяния фотона на электро-не с использованием формализма работы [58].

Новым импульсом к исследованию комптоновского процесса послужило
обнаружение объектов, которые могут быть ассоциированы с магнитарами.
Однако, как было показано в работах [62, 63] при значениях поля $B > 10^{12}$ Гс
учет релятивистских эффектов становится существенным.

В данных работах предполагалось, что начальный и конечные электроны
находятся на основном уровне Ландау, что имеет смысл в пределе сильного
магнитного поля и/или низких температур $T \ll m$ (см. Введение). В этом
пределе резонансный пик (50) смещается в область более низких энергий
фотона, а кроме него возникает бесконечный ряд резонансных пиков, соот-
ветствующих разным уровням Ландау n виртуального электрона. Эти пики
реализуются при энергиях фотона:

$$\omega_n(\theta) = \frac{\sqrt{m^2 + 2\beta n \sin^2 \theta} - m}{\sin^2 \theta}, \quad (51)$$

где θ – угол между импульсом начального фотона и направлением магнит-
ного поля. С другой стороны, в результате комптоновского процесса могут
возбуждаться высшие уровни Ландау конечного электрона, что, в свою оче-
редь, может выступать механизмом рождения фотонов малых энергий для
магнитных полей $B \lesssim B_e$ [64, 65].

В рассмотренных выше работах сечение комптоновского рассеяния стано-
вится бесконечным при энергиях фотона, соответствующих циклотронным
резонансам (51), вследствие предположения о большом времени жизни вир-
туальных частиц. По этой причине их результаты справедливы только для
областей энергий фотона вдали от резонансов, **что также важно для модели-**

рования излучения замагниченной плазмы вблизи поверхности нейтронной звезды [?, ?]. Вблизи циклотронных резонансов для расчета сечения комптоновского рассеяния требуется учесть полную ширину изменения состояния электрона (28). В нерелятивистском пределе [58] присутствует лишь одна резонансная частота (51), и сечение не зависит от поляризационного состояния электрона (спиновое состояние), поэтому ввести полную ширину относительно просто [66]. Однако в сильных магнитных полях $B \gtrsim B_e$ и при высоких энергиях частиц требуется учитывать релятивистские поправки, что приводит к тому, что выражение для сечения становится очень громоздким, поскольку оно имеет бесконечное число резонансов (51), содержащихся в сумме по всем промежуточным виртуальным состояниям.

Изначально для учета конечных резонансных пиков использовались усредненные по спину ширины распада [25]. Как было указано в работе [29], такой подход не является точным, поскольку усреднение по спину некорректно учитывает спиновую зависимость временного распада, что приводит к неверному значению в точке резонанса. Этот недостаток был устранен в работе [51], где представлено сечение рассеяния процесса, $\gamma e \rightarrow \gamma e$, с учетом ширины распада виртуальных промежуточных состояний, в свою очередь зависящие от поляризационного состояния электрона. Однако полное сечение комптоновского рассеяния, полученное таким методом, представляет собой громоздкое выражение, что затрудняет использование его, например, в моделях переноса излучения. Для решения этой задачи было выполнено множество упрощений. Так, в работе [25] была использована аппроксимация сечения рассеяния с учетом резонанса в ультрарелятивистском пределе для случая сильного магнитного поля $B > 0.1B_e$. В точке циклотронного резонанса виртуальный электрон становится реальным, поэтому комптоновское рассеяние становится процессом первого порядка. В работе [23] исследовался вопрос аппроксимации комптоновского сечения с помощью одновершинного процесса поглощения для магнитных полей $B \sim 0.1B_e$. Различие между одновершинным процессом поглощения и комптоновским процессом становится существенным

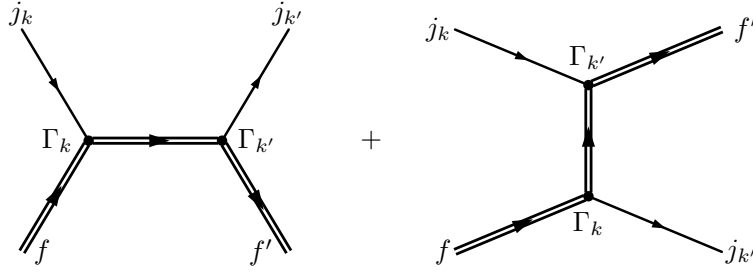


Рис. 2: Диаграммы Фейнмана для реакции $\gamma e \rightarrow \gamma' e'$. Двойные линии означают, что влияние внешнего поля на начальное и конечное состояния фермионов и на фермионный пропагатор учтено точно.

на высших циклотронных резонансах из-за вклада нерезонансного рассеяния. Особенно существенно это при малых углах между импульсом фотона и направлением магнитного поля, поскольку в этом случае резонансы уширяются. Также в сильных магнитных полях аппроксимация одновершинным процессом работает хуже, так как высота резонансов убывает с увеличением его номера.

Иной подход рассмотрен в работе [67], который заключался в том, что резонансный пик предполагается достаточно узким, чтобы заменить знаменатель пропагатора на дельта-функцию. Как было показано в данной работе, предположение узкого резонансного пика позволяет аппроксимировать область резонанса дельта-функцией, что позволяет значительно упростить, например, решение задачи переноса излучения.

Для решения этой задачи рассмотрим эффективный лагранжиан для обширного класса взаимодействий фермиона f с обобщенными токами j [68]:

$$\mathcal{L}(x) = \sum_k g_k [\bar{\psi}_f(x) \Gamma_k \psi_f(x)] J_k(x), \quad (52)$$

В частности лагранжиан электромагнитного взаимодействия может быть представлен в виде:

$$\mathcal{L}(X) = -e [\bar{\psi}_f(X) \gamma^\mu A_\mu^{(\lambda)}(X) \psi_f(X)]; \quad (53)$$

Комптоновский процесс в древесном приближении описывается диаграммами Фейнмана, представленными на рис. 2. Соответствующий S -матричный

элемент, с учетом лагранжиана (53) может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned}
S_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e'}^{s's} &= -e^2 \int d^4X d^4Y A_\mu^{(\lambda)}(X) A_{\mu'}^{(\lambda')}(Y) \left[\bar{\Psi}_{p',\ell'}^{s'}(Y) \gamma_{\mu'} S(Y, X) \gamma_\mu \Psi_{p,\ell}^s(X) \right] + \\
&+ (A_\mu^{(\lambda)}, \gamma_\mu \leftrightarrow A_{\mu'}^{(\lambda')}, \gamma_{\mu'}) .
\end{aligned} \tag{54}$$

Здесь $p^\mu = (E_\ell, \mathbf{p})$ и $p'^\mu = (E_{\ell'}, \mathbf{p}')$ - четырехмерные векторы энергии-импульса начального и конечного фермиона, находящихся на уровнях Ландау ℓ и ℓ' соответственно, $\Psi_{p,\ell}^s(X)$ - волновые функции фермионов в присутствии внешнего магнитного поля (10), s и s' обозначают поляризационные состояния начального и конечного фермиона соответственно, $S(Y, X)$ - пропагатор фермиона во внешнем магнитном поле (23).

Токи $A_\mu^{(\lambda)}(X)$ и $A_{\mu'}^{(\lambda')}(Y)$, в свою очередь, удобно представить в виде плосковолновых решений с амплитудами $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q)$ и $\varepsilon_{\mu'}^{(\lambda')}(q')$:

$$A_\mu^{(\lambda)}(X) = \frac{e^{-i(qX)}}{\sqrt{2q_0V}} \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q), \quad q^\alpha = (q_0, \mathbf{q}), \tag{55}$$

$$A_{\mu'}^{(\lambda')}(Y) = \frac{e^{i(q'Y)}}{\sqrt{2q'_0V}} \varepsilon_{\mu'}^{(\lambda')}(q'), \quad q'^\alpha = (q'_0, \mathbf{q}'), \tag{56}$$

где $V = L_x L_y L_z$ - нормировочный объем.

С учетом этих замечаний, подставим решения (10), фурье-образы токов (55), пропагатор (23) в (54). Проинтегрировав полученный результат по $dX_0 dX_2 dX_3$ и $dY_0 dY_2 dY_3$, представим S -матричный элемент в следующем виде:

$$S_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e}^{s's} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{\sqrt{2q_0V 2q'_0V 2E_\ell L_y L_z 2E_{\ell'} L_y L_z}} \mathcal{M}_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e}^{s's}, \tag{57}$$

где $\delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q') = \delta(P_0 - E_{\ell'} - q'_0) \delta(P_y - p'_y - q'_y) \delta(P_z - p'_z - q'_z)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e_{\ell'}}^{s's} &\simeq ie^2 \varepsilon_{\mu'}^{(\lambda')}(q') \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s''} \int dX_1 dY_1 e^{-iX_1 q_x + iY_1 q'_x} \times \quad (58) \\
&\times \frac{\bar{\phi}_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) \gamma_{\mu'} \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \gamma_\mu \phi_{p,\ell}^s(X_1)}{P_\parallel^2 - M_n^2 + iP_0 \Gamma_n^{s''}/2} + \\
&+ (\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q), \gamma_\mu, P, q \leftrightarrow \varepsilon_{\mu'}^{(\lambda')}(q'), \gamma_{\mu'}, P', -q'),
\end{aligned}$$

$$P_\alpha = (p + q)_\alpha, \quad P'_\alpha = (p - q')_\alpha, \quad \alpha = 0, 2, 3.$$

Обсудим, при каких условиях амплитуда (58) будет иметь резонансный характер. Если выполняется условие $\ell, \ell' \geq n$, то в этом случае у пропагатора фермиона существуют полюс, соответствующий тому, что виртуальная частица становится реальной, то есть выполняется равенство $P_\parallel^2 - M_n^2 = 0$. При условии $\ell, \ell' < n$ полюса, отвечающие за резонансы в пропагаторе, отсутствуют и резонанс на виртуальном фермионе не наблюдается. Кроме того, кинематический анализ показывает, что вблизи первых циклотронных резонансов основной вклад в амплитуду процесса $jf \rightarrow j'f'$ будет давать только первая диаграмма.

Как было показано в работе [69], в случае, когда ширина поглощения электрона Γ_n достаточно мала, то амплитуда комптоновского процесса факторизуется двумя одновршинными процессами. Этот факт даёт возможность значительно упростить вычисление сечения, что приводит, например, к возможности построения аналитического решения уравнения переноса. Кратко опишем этот метод ниже. Действительно, в области резонанса, где выполняется условие $P_0 \Gamma_n^{s''} \ll |P_\parallel^2 - M_n^2|$ соответствующая часть в (58) может быть заменена δ -функцией:

$$\left| \frac{1}{P_\parallel^2 - M_n^2 - iP_0 \Gamma_n^{s''}/2} \right|^2 \simeq \frac{2\pi}{P_0 \Gamma_n^{s''}} \delta(P_\parallel^2 - M_n^2).$$

В таком случае квадрат парциальных амплитуд будет выглядеть следующим

образом

$$|\mathcal{M}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e_{\ell'}}^{s's}|^2 \simeq \sum_{s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{P_0 \Gamma_n^{s''}} \delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) \times \left| \int dX_1 dY_1 \bar{\phi}_{p'\ell'}^{s'}(Y_1) \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \phi_{p\ell}^s(X_1) \right|^2. \quad (59)$$

С учетом (59) квадрат S -матричного элемента процесса $jf \rightarrow j'f'$ факторизуется двумя одновершинными подпроцессами

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e_{\ell'}}^{s's}|^2}{\tau} = \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{2q_0 L_x 2q'_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E'_{\ell'} L_y L_z} \times \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2E_n'')^2 (2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} (2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'') |\mathcal{M}_{e_n \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e_{\ell'}}^{s's''}|^2 |\mathcal{M}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow e_n}^{s''s}|^2. \quad (60)$$

Здесь мы воспользовались свойством δ -функции:

$$\delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) = \frac{1}{2E_n''} \delta(P_0 - E_n''), \quad (61)$$

где $E_n'' = \sqrt{p_z''^2 + M_n^2}$.

Если теперь ввести S -матричный элемент поглощения электрона следующим образом

$$\mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow e_n}^{s''s} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'')}{\sqrt{2q_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E_n'' L_y L_z}} \mathcal{M}_{\gamma e_\ell \rightarrow e_n}^{s''s}, \quad (62)$$

с учетом того, что

$$\left| \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'') \right|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'') \tau L_y L_z, \quad (63)$$

нетрудно видеть, что выражение (60) можно представить в факторизованном виде:

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e_{\ell'}}^{s's}|^2}{\tau} = \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} \frac{|\mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow e_n}^{s''s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e_{\ell'}}^{s's''}|^2}{\tau} \quad (64)$$

Здесь соответствующая амплитуда $\mathcal{M}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow e_n}^{s''s}$ одновершинного процесса записывается следующим образом:

$$\mathcal{M}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow e_n}^{s''s} = \frac{\exp[-iq_x(p_y + p_y'')/(2\beta)]}{\sqrt{M_\ell M_n(M_\ell + m)(M_n + m)}} \left[\frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}} \right]^{n-\ell} \mathcal{T}_V^{s''s}, \quad (65)$$

S -матричный элемент для процесса рождения электрона $\gamma \rightarrow e\gamma$ может быть получен из матричного элемента процесса поглощения фотона следующим образом $S_{e_n \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e_{\ell'}} = S_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow e_n}(q \rightarrow q', E_\ell \rightarrow E_{\ell'})$.

Таким образом, для получения амплитуды комптоновского процесса вблизи резонанса в случае узкого пика, достаточно вычислить величины $\mathcal{T}_V^{s''s}$. Данные величины для вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов были вычислены в работе [69]. Они выражаются через лоренц-коварианты и инварианты в подпространстве $\{0, 3\}$:

$$\mathcal{K}_{1\alpha} = \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} \left\{ M_\ell(\tilde{\Lambda}p'')_\alpha + M_n(\tilde{\Lambda}p)_\alpha \right\}, \quad (66)$$

$$\mathcal{K}_{2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} \left\{ M_\ell(\tilde{\varphi}p'')_\alpha + M_n(\tilde{\varphi}p)_\alpha \right\}, \quad (67)$$

$$\mathcal{K}_3 = \sqrt{2 \left[(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n \right]}, \quad (68)$$

$$\mathcal{K}_4 = -\sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} (p\tilde{\varphi}p''). \quad (69)$$

При вычислениях было использовано соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dZ e^{-Z^2} H_n \left(Z + \frac{q_y + iq_x}{2\sqrt{\beta}} \right) H_\ell \left(Z - \frac{q_y - iq_x}{2\sqrt{\beta}} \right) = \\ = 2^{(n+\ell)/2} \sqrt{n! \ell!} \left[\frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}} \right]^{n-\ell} e^{q_\perp^2/(4\beta)} \mathcal{I}_{n,\ell} \left(\frac{q_\perp^2}{2\beta} \right), \end{aligned}$$

где для $n \geq \ell$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{n,\ell}(x) &= \sqrt{\frac{\ell!}{n!}} e^{-x/2} x^{(n-\ell)/2} L_\ell^{n-\ell}(x), \\ \mathcal{I}_{\ell,n}(x) &= (-1)^{n-\ell} \mathcal{I}_{n,\ell}(x),\end{aligned}\tag{70}$$

и $L_n^k(x)$ – обобщенные полиномы Лагерра [30]. Далее в работе будет использовано обозначение $\mathcal{I}_{n,\ell} \equiv \mathcal{I}_{n,\ell}\left(\frac{q_\perp^2}{2\beta}\right)$ и для определенности рассматриваются электроны, для которых знак заряда $\eta = -1$.

(Ввёл сечение) Для астрофизических приложений удобно использовать коэффициент поглощения – вероятность перехода за счёт тех или иных процессов, который для комптоновского процесса был определен, например, в работе [70]:

$$\begin{aligned}W_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e} &= \frac{\beta}{16(2\pi)^4 \omega_\lambda} \int |\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda'}|^2 \times \\ &\times f_E [1 - f_{E'}] (1 + f_{\omega'}) \delta(\omega_\lambda(\mathbf{k}) + E - \omega_{\lambda'}(\mathbf{k}') - E') \frac{dp_z d^3 k'}{E E' \omega_{\lambda'}},\end{aligned}\tag{71}$$

где $f_E = (1 + \exp[E/T])^{-1}$ – равновесная функция распределения электронов с температурой T и нулевым химическим потенциалом, $f_\omega = (\exp[E/T] - 1)^{-1}$ – равновесная функция распределения фотонов. С помощью коэффициента поглощения можно, например, вычислить длину свободного пробега $\lambda = W_{\gamma e \rightarrow \gamma e}^{-1}$. С дифференциальным сечением рассеяния он связан следующим образом [71]

$$d\sigma_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e} = \frac{dW_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e}}{j},\tag{72}$$

где $j = |(p\tilde{\Lambda}q)|/(E\omega V)$ – плотность потока падающих частиц в продольном по отношению к магнитному полю подпространстве.

В работах [?, 23, 51] исследовался процесс комптоновского рассеяния замагниченной плазме при ненулевых температурах и магнитных полях, характерных для магнитосфер радиопульсаров и магнитаров $10^{12} - 10^{15}$ Гс. В данных работах рассчитано сечение рассеяния при условии, что начальный и конечный электроны находятся на основном уровне Ландау. При расчетах учиты-

вался резонанс на виртуальном электроне с учетом пика конечной ширины, полученной с использованием корректных решений уравнения Дирака (10).

В данных работах сечение вводится сначала без учета функций распределения начальных электронов, а потом оно интегрируется по импульсам с функцией распределения $\bar{f}_{n,s}(p_z)$, которая нормирована следующим образом

$$\sum_{n,s} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \bar{f}_{n,s}(p_z) = 1, \quad (73)$$

откуда

$$\bar{f}_{n,s}(p_z) = \frac{\beta}{(2\pi)^2 n_e} \frac{1}{e^{E_n/T} + 1}, \quad (74)$$

где

$$n_e = \frac{\beta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2 - \delta_{\ell,0}) \int_{-\infty}^{\infty} dp_z f_{-}(E_{\ell}), \quad (75)$$

– концентрация электронов во внешнем магнитном поле. С учетом этого дифференциальное сечение рассеяния, просуммированное по поляризациям конечного фотона

$$d\sigma_{\lambda}^* = \frac{E\omega}{(pq)_{\parallel}} \frac{1}{n_e} dW_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e} \quad (76)$$

Согласно рисунку 1 раздела 3 для рассматриваемых параметров магнитного поля и плазмы, можно считать, что закон дисперсии как моды 1, так и моды 2 мало отличается от вакуумного. В таком случае параллельную магнитному полю компоненту импульса фотона можно положить $k_z = \omega \sin \theta$, где θ – угол между импульсом фотона и направлением магнитного поля. Как уже отмечалось в разделе 3, перенормировка волновых функций фотонов становится существенной вблизи циклотронных резонансов $q_{\parallel}^2 \simeq (M_n + M_{\ell})^2$, однако при значении магнитного поля $B \simeq 10^{12}$ Гс можно считать, что $Z_{1,2} \simeq 1$.

Результаты численного анализа отношения $\sigma_{\lambda}^*/\sigma_T$, представлены на рис. 3–4. Исходя из полученных результатов работы [51], можно с уверенностью сказать, что форма резонансных пиков достаточно сильно зависят от угла начального фотона по отношению к магнитному полю – ширина резонансных

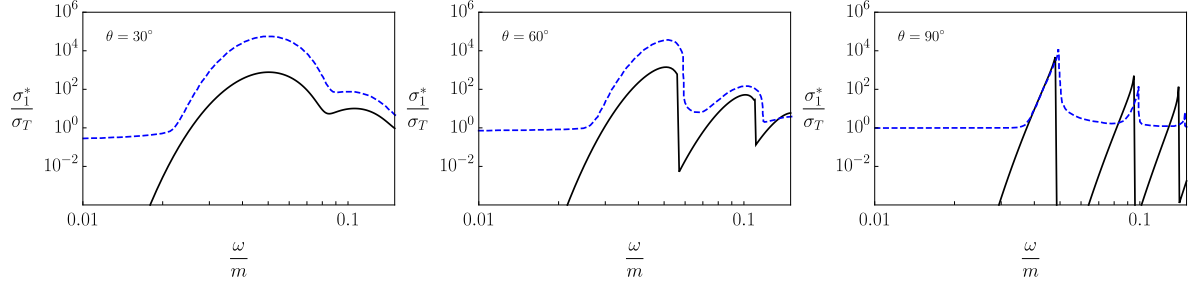


Рис. 3: Сравнение сечения (в единицах σ_T) рассеяния фотона моды 1, $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma$, полученном в работе [51] (пунктирная линия) и δ -функциональном приближении (сплошная линия) для различных углов θ между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля (значения изображены на графиках). $B = 2.2 \times 10^{12}$ Гс, $T = 20$ кэВ, $\mu = 0$. Начальные и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау.

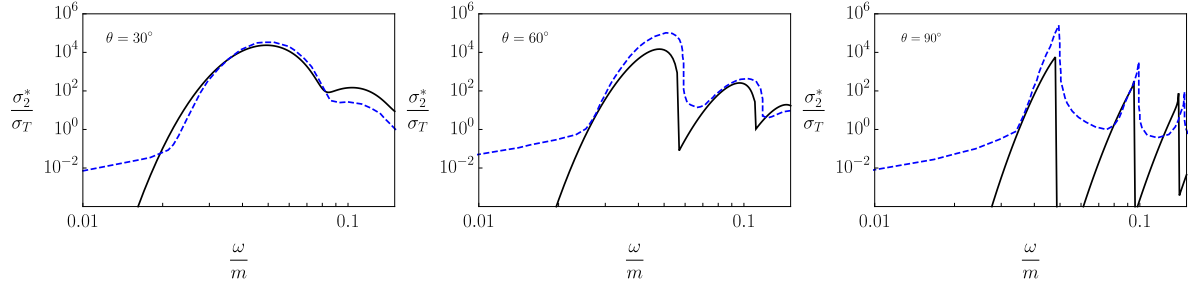


Рис. 4: Сравнение сечения (в единицах σ_T) рассеяния фотона моды 2, $e\gamma^{(2)} \rightarrow e\gamma$, полученном в работе [51] (пунктирная линия) и δ -функциональном приближении (сплошная линия) для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля. $B = 2.2 \times 10^{12}$ Гс, $T = 20$ кэВ, $\mu = 0$. Все начальные и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау.

пиков увеличивается с уменьшением угла θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля. Как видно из графиков, что в большинстве случаев, сечение рассеяния, вычисленное с помощью дельта-функционального приближения, является заниженным.

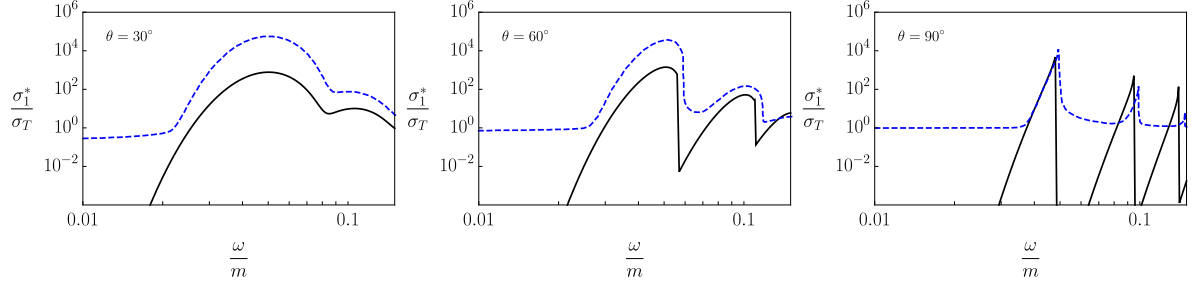


Рис. 5: Сравнение сечения (в единицах σ_T) рассеяния фотона моды 1, $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma$, полученном в работе [51] (пунктирная линия) и δ -функциональном приближении (сплошная линия) для различных углов θ между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля (значения изображены на графиках). Начальные и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау.

Сравнительный анализ с результатами работы [23] показывает, что в области резонанса дельта-функциональное приближение достаточно хорошо описывает резонансный пик. Полученные результаты также хорошо согласуются с работой [72].

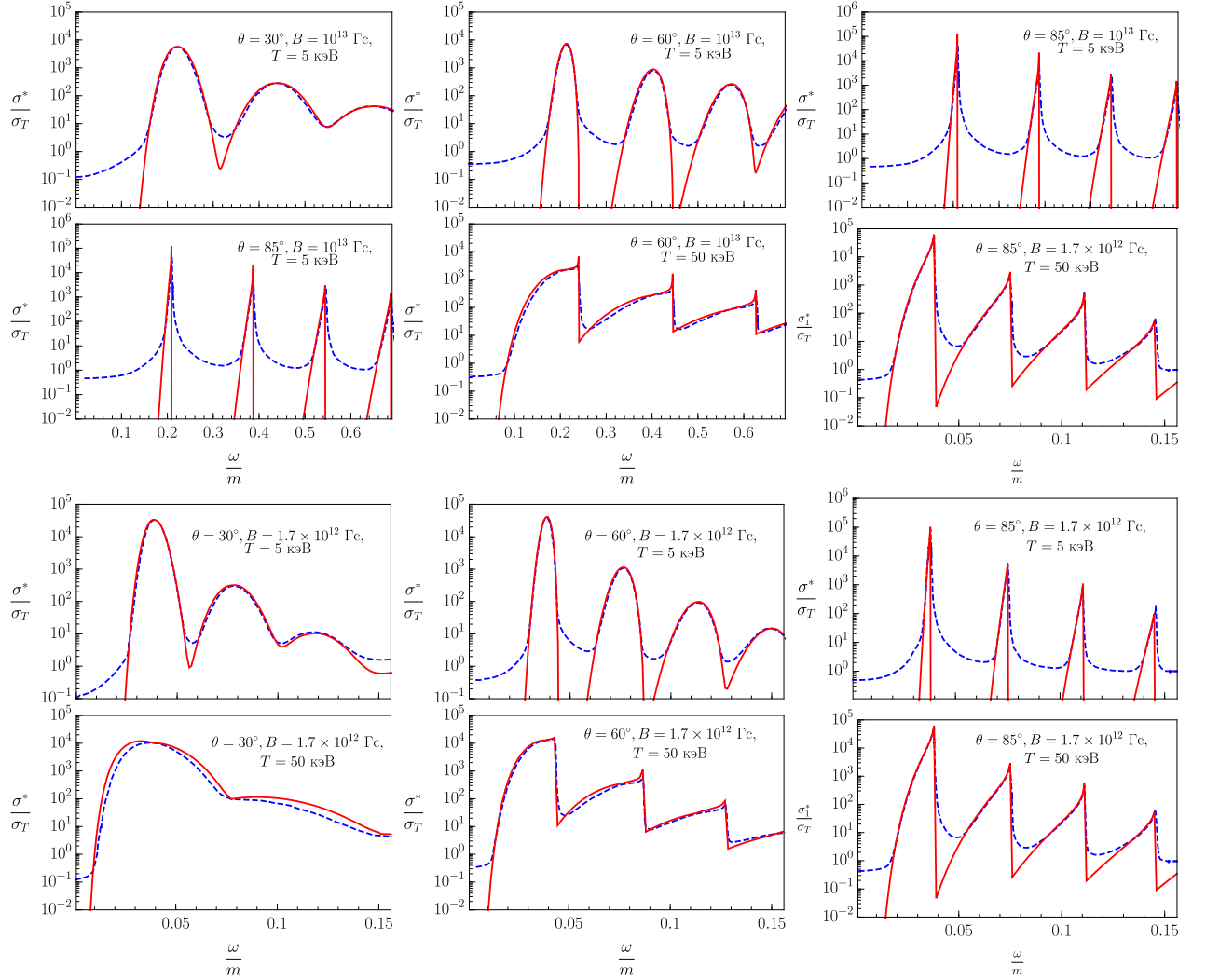


Рис. 6: Сравнение сечения (в единицах σ_T), усредненного по поляризациям начального фотона, $e\gamma^{(2)} \rightarrow e\gamma$, полученном в работе [23] (пунктирная линия) и δ -функциональном приближении (сплошная линия) для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля. Все начальные и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау.

- 4.3 Резонанс на виртуальном электро́не и виртуальном фото́не.
- 5 Сингулярности в фазовых объемах одновершинных процессов и методы их устранения.
- 6 Заключение

Список литературы

- [1] Thompson C., Duncan R. C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - I. Radiative mechanism for outbursts // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1995. Vol. 275. P. 255–300.
- [2] Thompson C., Duncan R. C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars. II. Quiescent neutrino, X-Ray, and Alfven wave emission // Astrophys. J. 1996. Vol. 473. P. 322–342.
- [3] Thompson C., Lyutikov M., Kulkarni S. R. Electrodynamics of magnetars: implications for the persistent x-ray emission and spindown of the soft gamma repeaters and anomalous x-ray pulsars // Astrophys. J. 2002. Vol. 574, no. 1. P. 332–355.
- [4] Кузнецов А. В., Михеев М. В. Взаимодействие нейтрино с сильно замагниченной электрон-позитронной плазмой // ЖЭТФ. 2000. Т. 118, № 4. С. 863–876.
- [5] Бисноватый-Коган Г. С., Чечеткин В. М. Неравновесные оболочки нейтронных звезд, их роль в поддержании рентгеновского излучения и нуклеосинтезе // Усп. физ. наук. 1979. Т. 127, № 2. С. 263–296.
- [6] Kouveliotou C. et al. An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft gamma-ray repeater SGR 1806-20. // Nature. 1998. Vol. 393. P. 235–237.
- [7] Kouveliotou C., Strohmayer T., Hurley K. et al. Discovery of a magnetar associated with the soft gamma repeater SGR 1900+14 // Astrophys. J. 1999. Vol. 510. P. L115–118.
- [8] Gavriil F. P., Kaspi V. M., Woods P. M. Magnetar - like x-ray bursts from an anomalous x-ray pulsar // Nature. 2002. Vol. 419. P. 142–144.

- [9] Ibrahim A. I., Safi-Harb S., Swank J. H. et al. Discovery of cyclotron resonance features in the soft gamma repeater SGR 1806-20 // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 574. P. L51–L55.
- [10] Ibrahim A. I., Swank J. H., Parke W. New evidence for proton cyclotron resonance in a magnetar strength field from SGR 1806-20 // *Astrophys. J.* 2003. Vol. 584. P. L17–L22.
- [11] Olausen S. A., Kaspi V. M. The McGill magnetar catalog // *Astrophys. J. Suppl.* 2014. Vol. 212, no. 1. P. 6.
- [12] Melrose D. B., Parle A. J. Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. I Electron States // *Aust. J. Phys.* 1983. Vol. 36. P. 755–774.
- [13] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. Москва: Наука, 1983. 304 с.
- [14] Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003. 120 p.
- [15] Bhattacharya K., Pal P. B. Inverse beta decay of arbitrarily polarized neutrons in a magnetic field // *Pramana J. Phys.* 2004. Vol. 62. P. 1041–1058.
- [16] Balantsev I. A., Popov Yu. V., Studenikin A. I. On the problem of relativistic particles motion in strong magnetic field and dense matter // *J. Phys.* 2011. Vol. A44. P. 255301 (1–13).
- [17] Kuznetsov A., Mikheev N. Electroweak processes in external active media. 2013. Vol. 252. P. pp 1–271.
- [18] Johnson M. H., Lippmann B. A. Motion in a constant magnetic field // *Physical Review.* 1949. Vol. 76, no. 6. P. 828–832.
- [19] Соколов А. А., Тернов И. М. Синхротронное излучение. М.: Наука, 1966. 228 с.

- [20] Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001. 784 с.
- [21] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Москва: Наука, 1989. 768 с.
- [22] Canuto V. Quantum processes in strong magnetic fields // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1975. Vol. 257, no. 1. P. 108–126.
- [23] Harding A. K., Daugherty J. K. Cyclotron Resonant Scattering and Absorption // Astrophys. J. 1991. Vol. 374. P. 687–699.
- [24] Suh I.-S., Mathews G. J. Weak reaction freeze-out constraints on primordial magnetic fields // Phys. rev. D. 1999. Vol. 59, no. 12. P. 123002.
- [25] Gonthier P. L., Harding A. K., Baring M. G. et al. Compton Scattering in Ultrastrong Magnetic Fields: Numerical and Analytical Behavior in the Relativistic Regime // Astrophys. J. 2000. Vol. 540, no. 2. P. 907–922.
- [26] Jones P. B. Electron-positron bremsstrahlung and pair creation in very high magnetic fields // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2010. Vol. 409, no. 4. P. 1719–1727.
- [27] Melrose D. B. Quantum kinetic theory for unmagnetized and magnetized plasmas // Rev. Mod. Plasma Phys. 2020. Vol. 4, no. 8.
- [28] Graziani C. Strong-Field Cyclotron Scattering. I. Scattering Amplitudes and Natural Line Width // Astrophys. J. 1993. Vol. 412. P. 351–362.
- [29] Gonthier P. L., Baring M. G., Eiles M. T. et al. Compton scattering in strong magnetic fields: Spin-dependent influences at the cyclotron resonance // Phys. Rev. 2014. Vol. D90, no. 4. P. 043014.
- [30] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 1108 с.

- [31] Schwinger J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // Phys. Rev. 1951. — Jun. Vol. 82. P. 664–679.
- [32] Ритус В. И. Радиационные эффекты и их усиление в интенсивном электромагнитном поле // ЖЭТФ. 1969. Т. 57, № 6. С. 2176–2188.
- [33] Jancovici B. Radiative Correction to the Ground-State Energy of an Electron in an Intense Magnetic Field // Phys. Rev. 1969. Vol. 187. P. 2275–2276.
- [34] Борисов А. В., Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Эминов П. А. Фотоны и лептоны во внешних полях при конечных температуре и плотности // УФН. 1997. Т. 167, № 3. С. 241–267.
- [35] Жуковский В. Ч., Мидодашвили П. Г., Эминов П. А. Мнимая часть массового оператора электрона в постоянном поле при конечной температуре и плотности // Журн. эксперим. и теор. физ. 1994. Т. 106, № 4. С. 929–935.
- [36] Weldon H. A. Simple rules for discontinuities in finite temperature Field Theory // Phys. Rev. 1983. Vol. D28. P. 2007–2037.
- [37] Баталин И. А., Шабад А. Е. Функция Грина фотона в постоянном однородном электромагнитном поле общего вида // ЖЭТФ. 1971. Т. 60, № 3. С. 894–900.
- [38] Tsai W. Y. Vacuum polarization in homogeneous magnetic fields // Phys. Rev. 1974. Vol. D10, no. 8. P. 2699–2702.
- [39] Скобелев В. В. Поляризационный оператор фотона в сверхсильном магнитном поле // Изв. вузов. Физика. 1975. № 10. С. 142–143.
- [40] Melrose D. B., Stoneham R. J. Vacuum polarization and photon propagation in a magnetic field // Nuovo Cimento A Serie. 1976. Vol. 32, no. 4. P. 435–447.

- [41] Urrutia L. F. Vacuum polarization in parallel homogeneous electric and magnetic fields // Phys. Rev. D. 1978. — Apr. Vol. 17. P. 1977–1984.
- [42] Перес Рохас У. Поляризационный оператор электрон-позитронного газа в постоянном внешнем магнитном поле // ЖЭТФ. 1979. Т. 76, № 1. С. 3–17.
- [43] Peres Rojas H., Shabad A. E. Absorption and dispersion of electromagnetic eigenwaves of electron-positron plasma in a strong magnetic field // Ann. Phys. (N.Y.). 1982. Vol. 138. P. 1–35.
- [44] Шабад А. Е. Поляризация вакуума и квантового релятивистского газа во внешнем поле // Тр. ФИАН СССР “Поляризационные эффекты во внешних калибровочных полях”. 1988. Т. 192. С. 5–152.
- [45] Schubert C. Vacuum polarisation tensors in constant electromagnetic fields: Part I // Nuclear Physics B. 2000. Vol. 585, no. 1. P. 407–428.
- [46] Hattori K., Itakura K. Vacuum birefringence in strong magnetic fields: (I) Photon polarization tensor with all the Landau levels // Annals of Physics. 2013. Vol. 330. P. 23–54.
- [47] Karbstein F. Photon polarization tensor in a homogeneous magnetic or electric field // Phys. Rev. D. 2013. Vol. 88, no. 8. P. 085033.
- [48] Михеев Н. В., Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Фоторождение нейтрино на электроны в плотной замагниченной среде // ЖЭТФ. 2014. Т. 146, № 2. С. 289–296.
- [49] Beloborodov A. M., Thompson C. Corona of magnetars // Astrophys. J. 2007. Vol. 657, no. 2. P. 967–993.
- [50] Adler S. L. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. // Annals of Physics. 1971. Vol. 67. P. 599–647.

- [51] Mushtukov A. A., Nagirner D. I., Poutanen J. Compton scattering S-matrix and cross section in strong magnetic field // *Phys. Rev.* 2016. Vol. D93, no. 10. P. 105003.
- [52] Potekhin A. Y., Lai D., Chabrier G., Ho W. C. G. Electromagnetic Polarization in Partially Ionized Plasmas with Strong Magnetic Fields and Neutron Star Atmosphere Models // *The Astrophysical Journal*. 2004. — sep. Vol. 612, no. 2. P. 1034.
- [53] Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Влияние сильно замагниченной плазмы на процесс расщепления фотона // *ЖЭТФ*. 2005. Т. 128, № 4. С. 740–751.
- [54] Trümper J., Pietsch W., Reppin C. et al. Evidence for strong cyclotron line emission in the hard X-ray spectrum of Hercules X-1 // *Astrophys. J.* 1978. Vol. 219. P. L105–L110.
- [55] Makishima K., Mihara T., Ishida M., et al. Discovery of a prominent cyclotron absorption feature from the transient X-ray pulsar X0331 + 53 // *Astrophys. J. Lett.* 1990. Vol. 365. P. L59–L62.
- [56] Grove J. E., Strickman M. S., Johnson W. N., et al. The soft gamma-ray spectrum of A0535+26: Detection of an absorption feature at 110 keV by OSSE // *Astrophys. J. Lett.* 1995. Vol. 438. P. L25–L28.
- [57] Mihara T., Makishima K., Ohashi T. et al. New observations of the cyclotron absorption feature in Hercules X-1 // *Nature*. 1990. Vol. 346. P. 250–252.
- [58] Canuto V., Lodenquai J., Ruderman M. Thomson Scattering in a Strong Magnetic Field // *Phys. Rev. D*. 1971. Vol. 3. P. 2303–2308.
- [59] Гнедин Ю. Н., Сюняев Р. А. Рассеяние излучения на тепловых электронах в магнитном поле // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1973. Т. 65, № 1. С. 102.

- [60] Borner G., Mészáros P. Classical calculation of Thomson cross-sections in the presence of a strong magnetic field // Plasma Phys. 1979. Vol. 21, no. 4. P. 357.
- [61] Ventura J. Scattering of light in a strongly magnetized plasma // Phys. Rev. 1979. Vol. D19. P. 1684–1695.
- [62] Herold H. Compton and Thomson scattering in strong magnetic fields // Phys. Rev. 1979. Vol. D19. P. 2868.
- [63] Melrose D. B., Parle A. J. Quantum Electrodynamics in Strong Magnetic Fields III. Electron-photon interactions // Aust. J. Phys. 1983. Vol. 36. P. 799.
- [64] Daugherty J. K., Harding A. K. Compton Scattering in Strong Magnetic Fields // Astrophys. J. 1986. Vol. 309. P. 362.
- [65] Bussard R. W., Alexander S. B., Meszaros P. One- and two-photon Compton scattering in strong magnetic fields // Phys. Rev. D. 1986. Vol. 34. P. 440–451.
- [66] Daugherty J. K., Harding A. K. Comptonization of Thermal Photons by Relativistic Electron Beams // Astrophys. J. 1989. Vol. 336. P. 861.
- [67] Румянцев Д. А., Шленев Д. М., Ярков А. А. Резонансы в комптоноподобных процессах рассеяния во внешней замагниченной среде // ЖЭТФ. 2017. Т. 152, № 3. С. 483–494.
- [68] Kuznetsov A. V., Rumyantsev D. A., Shlenev D. M. Generalized two-point tree-level amplitude $jf \rightarrow j'f'$ in a magnetized medium // Int. J. Mod. Phys. 2015. Vol. A30, no. 11. P. 1550049.
- [69] Румянцев Д. А., Шленев Д. М., Ярков А. А. Резонансы в комптоноподобных процессах рассеяния во внешней замагниченной среде // ЖЭТФ. 2017. Т. 152, № 3. С. 483–494.

- [70] Chistyakov M. V., Romyantsev D. A. Compton effect in strongly magnetized plasma // Int. J. Mod. Phys. 2009. Vol. A24. P. 3995–4008.
- [71] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. Квантовая электродинамика. 4 изд. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2002. Т. 4. 720 с.
- [72] Schwarm F. W., Schönherr G., Falkner S. et al. Cyclotron resonant scattering feature simulations. I. Thermally averaged cyclotron scattering cross sections, mean free photon-path tables, and electron momentum sampling // AA. 2017. Vol. 597. P. A3.