РЕЗОНАНСНОЕ КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ

Д. А. Румянцев [a*], *А. А. Ярков* [a,b**], *Д. М. Шленев* [b***]

[a] *Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова*
150000, Ярославль, Россия

[b] *Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны*
150001, Ярославль, Россия

Рассмотрен резонансный процесс комптоновского рассеяния в сильном магнитном поле. Получена вероятность реакции в зависимости от энергии и углов распространения начальных частиц. Вычислен коэффициент поглощения фотона за счет процесса в пределе сверхсильных магнитных полей. Найдены границы, в которых приближение узкого резонансного пика будет давать достаточно точные результаты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к изучению комптоновского рассеяния $\gamma e \to \gamma e$ в сильном магнитном поле ($B \gtrsim B_e = 4.41 \times 10^{13}$ Гс [1)]) первоначально был вызван неожиданным открытием циклотронных спектральных линий у двойных рентгеновских пульсаров [1–3], которые изначально интерпретировались либо как циклотронное поглощение, либо как циклотронное излучение [1]. Дальнейшее повышение разрешения детекторов по энергии позволило уверенно заключить, что циклотронные особенности связаны именно с резонансным поглощением фотона [4]. При этом под циклотронным резонансом обычно понимается резкое увеличение сечения рассеяния по сравнению с классическим томсоновским сечением $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/(3m^2)$. В одной из первых работ по этой тематике [5] выражение для сечения комптоновского рассеяния в магнитном поле без плазмы было получено в нерелятивистском пределе, и для фотона, распространяющегося вдоль магнитного поля, в сечении был обнаружен резонансный пик при энергии:

$$\omega_B \simeq \frac{\beta}{m}\,, \qquad (1)$$

где введено обозначение $\beta = eB$.

Кроме того, в работе [5] также было показано, что сечение рассеяния фотона на электроне значительно зависит как от поляризационного состояния фотона, так и от угла между направлением импульса начального фотона и направлением магнитного поля. В последовавшей за ней статье [6] исследовалось изменение энергии фотона в комптоновском процессе, кратное циклотронной частоте ω_B. В следующих работах [7, 8] были получены результаты для полного сечения рассеяния фотона на электроне с использованием формализма работы [5]. Тем не менее эти результаты будут справедливыми только для относительно слабого магнитного поля $B < 10^{12}$ Гс. Однако при значениях магнитного поля $B > 10^{12}$ Гс, как было показано в работах [9, 10], учет релятивистских эффектов в сечении комптоновского рассеяния становится существенным.

В представленных выше работах предполагалось, что начальный и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау, что является справедливым для предела сильного магнитного поля и/или низких температур $T \ll m$. В этом случае резонансный пик (1) смещается в область более низких энергий фотона, а кроме него возникает бесконечный ряд резонансных пиков, соответствующих разным уровням Ландау n виртуального электрона. Эти пики реализуются при энергиях фотона:

$$\omega_n(\theta) = \frac{\sqrt{m^2 + 2\beta n \sin^2\theta} - m}{\sin^2\theta}\,, \qquad (2)$$

где θ – угол между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля.

С другой стороны, в результате комптоновского процесса могут возбуждаться высшие уровни Ландау начального электрона, что, в свою очередь, может выступать механизмом рождения фотонов ма-

[*] E-mail: rda@uniyar.ac.ru
[**] E-mail: a121@mail.ru
[***] E-mail: allen_caleb@rambler.ru

[1)] В данной работе используется естественная система единиц: $c = \hbar = k_{\rm B} = 1$, m – масса электрона, $e > 0$ – элементарный заряд.

лых энергий для магнитных полей $B \lesssim B_e$ [11, 12]. В таком случае для произвольных уровней Ландау ℓ начального электрона резонансные пики будут наблюдаться на энергиях [11]:

$$\omega_{n\ell}(\theta) = \frac{\sqrt{M_\ell^2 - \sin^2\theta(M_\ell^2 - M_n^2)} - M_\ell}{\sin^2\theta}\,, \quad (3)$$

где $M_\ell = \sqrt{m^2 + 2\beta\ell}$, $M_n = \sqrt{m^2 + 2\beta n}$ и т.п.

В рассмотренных выше работах сечение комптоновского рассеяния становится бесконечным при энергиях фотона, соответствующих циклотронным резонансам (2) вследствие предположения о большом времени жизни виртуальных частиц. По этой причине их результаты справедливы только для областей энергий фотона вдали от резонансов и могут быть применены, например, для моделирования излучения замагниченной холодной плазмы вблизи поверхности нейтронных звезд [13] или же для относительно слабых магнитных полей $B \lesssim 10^{10}$ Гс [14].

С другой стороны, учет резонансов в комптоновском процессе является необходимым при моделировании спектров излучения сильно замагниченных нейтронных звезд [15–22]. При этом вблизи поверхности нейтронной звезды, где формируется излучение, резонансный обратный комптоновский процесс рассеяния фотонов малых энергий на высокоэнергетических электронах является доминирующим процессом, который приводит к охлаждению плазмы внутренней магнитосферы и образованию высокоэнергетического хвоста в спектре излучения [23–26].

Вблизи циклотронных резонансов для расчета сечения комптоновского рассеяния требуется учесть полную ширину изменения состояния электрона. Как было показано в работе [5], в нерелятивистском пределе присутствует лишь одна резонансная частота, определяемая соотношением (2), и сечение рассеяния не зависит от поляризационного состояния электрона (или его спинового состояния), и можно ввести полную ширину, как это было сделано в работе [27]. Однако в сильных магнитных полях $B \gtrsim B_e$ и при высоких энергиях частиц требуется учитывать релятивистские поправки, что приводит к тому, что выражение для сечения становится очень громоздким, поскольку оно имеет бесконечное число резонансов (см. (3)), содержащихся в сумме по всем промежуточным виртуальным состояниям.

Изначально для учета конечных резонансных пиков использовались усредненные по спину ширины распада промежуточного состояния [28, 29]. Как было указано в работе [30], такой подход не является точным, поскольку усреднение по спину некорректно учитывает спиновую зависимость времени распада виртуального электрона, что приводит к неверному значению сечения комптоновского рассеяния в точке резонанса. Этот недостаток был устранен в работе [31], где представлено сечение рассеяния процесса $\gamma e \to \gamma e$ с учетом ширины распада виртуальных промежуточных состояний, которая зависит от поляризационного состояния электрона. Однако полное сечение комптоновского рассеяния, полученное таким методом, представляет собой громоздкое выражение, что, например, затрудняет его использование в моделях переноса излучения.

В ряде случаев выражение сечения рассеяния можно упростить для получения аналитического решения различных задач. Так, в работе [28] была использована аппроксимация сечения рассеяния с учетом резонанса в ультрарелятивистском пределе для случая относительно сильного магнитного поля $B > 0.1 B_e$. В точке циклотронного резонанса виртуальный электрон становится реальным и распадается на масштабе комптоновского времени, поэтому вероятность комптоновского рассеяния сводится к вероятности одновершинного процесса поглощения фотона электроном $\gamma e \to e$. В работе [32] исследовался вопрос аппроксимации комптоновского сечения с помощью одновершинного процесса поглощения фотона электроном для магнитных полей $B \sim 0.1 B_e$. При этом различие между одновершинным процессом поглощения и комптоновским рассеянием становится существенным на высших циклотронных резонансах из-за нерезонансного вклада. Еще один подход рассмотрен в работе [33], он заключается в том, что пропагатор виртуального электрона можно заменить на дельта-функцию, когда основной вклад в сечение рассеяния будут давать области вблизи резонансов (приближение узкого пика).

В настоящей работе вычисляется вероятность и дифференциальное сечение рассеяние резонансного комптоновского процесса в приближении узкого резонансного пика в сильном магнитном поле с величиной индукции порядка критического значения B_e. Для сверхсильных магнитных полей $B \gg B_e$ вычислена вероятность процесса с учетом конечной ширины изменения состояния электрона.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 вычисляется дифференциальное сечение рассеяния электрона на фотоне при резонансе на виртуальном электроне в приближении узкого резонансного пика. Результаты сравниваются с расчетами, полученными с учетом конечной ширины резонансного пика. В разделе 3 вычислена вероятность резонансного комптоновского рассеяния в пределе сверхсильного магнитного поля.

2. ВЕРОЯТНОСТЬ КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ РЕЗОНАНСЕ НА ВИРТУАЛЬНОМ ЭЛЕКТРОНЕ

Для решения рассматриваемой задачи будем использовать лагранжиан взаимодействия электрона, описываемого волновой функцией $\Psi(X)$, с фотоном в поляризационном состоянии λ, заданным $A_\mu^{(\lambda)}(X)$, имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}(X) \,=\, -e[\bar{\Psi}(X)\gamma^\mu A_\mu^{(\lambda)}(X)\Psi(X)]\,, \tag{4}$$

где $V = L_x L_y L_z$ – нормировочный объем. Волновые функции электрона $\Psi(X)$ в данной работе выбираются как собственные векторы ковариантого оператора μ_z, который строится следующим образом [2]:

$$\mu_z = m\Sigma_z - i\gamma_0\gamma_5\left[\mathbf{\Sigma}\times\mathbf{P}\right]_z\,, \tag{5}$$

где $\mathbf{\Sigma} = -\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\gamma_5$ – трехмерный оператор спина, $\mathbf{P} = -i\nabla + e\mathbf{A}$, $A^\mu = (0,0,xB,0)$ – 4-вектор потенциала электромагнитного поля в калибровке Ландау.

Уравнение для собственных функций оператора (5) имеет следующий вид:

$$\mu_z\Psi^s_{p,n}(X) = sM_n\Psi^s_{p,n}(X)\,, \tag{6}$$

в котором квантовое число $s = \pm 1$ определяет поляризационные состояния электрона в постоянном однородном магнитном поле, а $n = 0, 1, \ldots$ соответствует уровню Ландау. Состояние электрона характеризуется энергией $E_n = \sqrt{p_z^2 + M_n^2}$ и является бесконечно вырожденным по p_z и дважды вырожденным по s, кроме состояния $n = 0$, где возможно лишь состояние с $s = -1$. Собственные функции оператора (5) могут быть представлены следующим образом:

$$\Psi^s_{p,n}(X) = \frac{e^{-\mathrm{i}(E_n X_0 - p_y X_2 - p_z X_3)}\,U_n^s(\xi)}{\sqrt{4E_n M_n(E_n + M_n)(M_n + m)L_y L_z}}\,, \tag{7}$$

где

$$\xi(X_1) = \sqrt{\beta}\left(X_1 + \frac{p_y}{\beta}\right)\,. \tag{8}$$

Биспиноры $U_n^s(\xi)$ имеют следующий вид:

$$U_n^-(\xi) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sqrt{2\beta n}\,p_z V_{n-1}(\xi) \\ (E_n + M_n)(M_n + m)V_n(\xi) \\ -\mathrm{i}\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_{n-1}(\xi) \\ -p_z(M_n + m)V_n(\xi) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$U_n^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_n + M_n)(M_n + m)V_{n-1}(\xi) \\ -\mathrm{i}\sqrt{2\beta n}\,p_z V_n(\xi) \\ p_z(M_n + m)V_{n-1}(\xi) \\ \mathrm{i}\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_n(\xi) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

$V_n(\xi)$ – нормированные функции гармонического осциллятора, которые следующим образом выражаются через полиномы Эрмита $H_n(\xi)$ [35]:

$$V_n(\xi) = \frac{\beta^{1/4}\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\,H_n(\xi)\,. \tag{11}$$

Волновая функция фотона $A_\mu^{(\lambda)}(X)$ используется в виде плосковолновых решений:

$$A_\mu^{(\lambda)}(X) = \frac{e^{-\mathrm{i}(qX)}}{\sqrt{2\omega V}}\,\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q)\,, \tag{12}$$

где $q^\mu = (\omega, \mathbf{q})$ – 4-вектор энергии-импульса и $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q)$ – вектор поляризации фотона. В замагниченном вакууме у фотона есть два возможных поляризационных состояния [3], которые определяются следующими векторами поляризации:

$$\varepsilon_\alpha^{(1)}(q) = \frac{(q\varphi)_\alpha}{\sqrt{q_\perp^2}}, \qquad \varepsilon_\alpha^{(2)}(q) = \frac{(q\tilde{\varphi})_\alpha}{\sqrt{q_\parallel^2}}\,, \tag{13}$$

где $\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B$ – обезразмеренный тензор электромагнитного поля и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}$ – тензор, дуальный к нему.

S-матричный элемент рассеяния фотона поляризации λ на электроне в поляризационном состоянии s, находящемся на уровне Ландау ℓ, с рождением электрона в поляризационном состоянии $s's$ на уровне Ландау ℓ' и фотона поляризации λ', с учетом лагранжиана (4) может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{s's}_{\gamma^{(\lambda)}e\to\gamma^{(\lambda')}e'} = -e^2\int \mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y A_\mu^{(\lambda)}(X)A_{\mu'}^{(\lambda')}(Y)\,\times \\ \times\,\left[\bar{\Psi}^{s'}_{p',\ell'}(Y)\gamma_{\mu'}S(Y,X)\gamma_\mu\Psi^s_{p,\ell}(X)\right] + \\ +\,(A_\mu^{(\lambda)},\gamma_\mu \leftrightarrow A_{\mu'}^{(\lambda')},\gamma_{\mu'})\,.\end{aligned} \tag{14}$$

[2] Подробнее о причинах выбора этого метода, предложенного А.А. Соколовым и И.М. Терновым [34], можно прочитать в нашей предыдущей работе [33].

[3] Подробный анализ дисперсионных свойств фотона в замагниченной среде можно найти в работе [36] и цитированных в ней статьях.

Входящий в него пропагатор $S(X,Y)$ удобно рассматривать в виде разложения по уровням Ландау:

$$S(X,Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s''=\pm 1} S_n^{s''}(X,Y)\,. \qquad (15)$$

Вклад в разложение пропагатора от уровня Ландау n и поляризационного состояния s'' можно представить следующим образом:

$$S_n^{s''}(X,Y) = \int \frac{\mathrm{d}p_0 \mathrm{d}p_y \mathrm{d}p_z}{(2\pi)^3} \times \qquad (16)$$

$$\times \frac{\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\, p_0\,(X_0-Y_0)+\mathrm{i}p_y\,(X_2-Y_2)+\mathrm{i}\,p_z\,(X_3-Y_3)}}{p_0^2 - p_z^2 - M_n^2 + \mathrm{i}\,\mathcal{I}_\Sigma^{s''}(p)} \times$$

$$\times\, \phi_{p,n}^{s''}(X_1) \bar{\phi}_{p,n}^{s''}(X_1')\,,$$

где введено обозначение:

$$\phi_{p,n}^{s}(X_1) = \frac{U_n^{s''}[\xi(X_1)]}{\sqrt{2M_n(E_n+M_n)(M_n+m)}}\,. \qquad (17)$$

$\mathcal{I}_\Sigma^{s''}(p)$ в выражении (16) является мнимой частью массового оператора электрона. Резонанс на виртуальном фермионе будет наблюдаться, когда в знаменателе пропагатора (16) реальная часть обращается в ноль. Тогда виртуальная частица становится реальной, то есть приобретает определенный закон дисперсии. Анализ кинематики показывает, что это возможно только тогда, когда виртуальный фермион занимает один из высших уровней Ландау, $n > 0$. Частица при этом является нестабильной, и время ее жизни, в нерезонансной области предполагающееся бесконечно большим, определяется мнимой частью массового оператора, $\mathcal{I}_\Sigma^{s''}(p)$, учет которой становится необходимым. Она может быть получена с помощью оптической теоремы и представлена в следующем виде [37,38]:

$$\mathcal{I}_\Sigma^{s''}(p) = -\frac{1}{2}\, p_0\, \Gamma_n^{s''}\,, \qquad (18)$$

где $\Gamma_n^{s''}$ – полная ширина изменения состояния электрона за счет процесса рассеяния фотона на электроне, которую можно выразить через ширину поглощения электрона в процессе $e_n \to e_{\ell'}\gamma$ [39]:

$$\Gamma_n^{s''} \simeq \Gamma^{(abs)\,s''}_{e_n \to e_{\ell'}\gamma} \left[1 + \mathrm{e}^{-(E_n''-\mu)/T}\right]\,, \qquad (19)$$

$$\Gamma^{(abs)\,s''}_{e_n \to e_{\ell'}\gamma} = \sum_{\ell'=0}^{n-1} \sum_{s'=\pm 1} \sum_{\lambda'} \int \frac{\mathrm{d}p_y' \mathrm{d}p_z' L_y L_z}{(2\pi)^2} \times \qquad (20)$$

$$\times [1 - f_e(E_{\ell'}')] \frac{\mathrm{d}^3 q' V}{(2\pi)^3}\,(1 + f_\gamma(\omega'))\, \frac{|\mathcal{S}^{s'\,s''}_{e_n \to e_{\ell'}\gamma^{(\lambda')}}|^2}{\tau}\,,$$

где $f_e(E_{\ell'}') = (1 + \exp[E_{\ell'}'/T])^{-1}$ – равновесная функция распределения электронов с температурой T и нулевым химическим потенциалом, $f_\gamma(\omega') = (\exp[\omega'/T] - 1)^{-1}$ – равновесная функция распределения фотонов.

Если в области резонанса выполняется условие $E_n''\Gamma_n^{s''} \ll \left|(p+q)_\parallel^2 - M_n^2\right|$, где $E_n'' = E_n + \omega$ – энергия виртуального электрона, то можно использовать приближение узкого резонансного пика. В приближении узкого резонансного пика квадрат знаменателя пропагатора (16) может быть заменен на δ-функцию:

$$\left|\frac{1}{(p+q)_\parallel^2 - M_n^2 - \mathrm{i}E_n''\Gamma_n^{s''}/2}\right|^2 \simeq \frac{2\pi}{E_n''\Gamma_n^{s''}}\,\delta((p+q)_\parallel^2 - M_n^2). \qquad (21)$$

С учетом этого квадрат S-матричного элемента, определяющий вероятность процесса и необходимый при расчетах вычисляемых величин, таких как сечение рассеяния, может быть представлен в факторизованном виде [33]:

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}^{s\,'s}_{\gamma^{(\lambda)} e_\ell \to \gamma^{(\lambda')} e_{\ell'}}|^2}{\tau} = \qquad (22)$$

$$= \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{\mathrm{d}p_y'' \mathrm{d}p_z''}{(2\pi)^2\, \Gamma_n^{s''}}\, \frac{|\mathcal{S}^{s\,''s}_{\gamma^{(\lambda)} e_\ell \to e_n}|^2}{\tau}\, \frac{|\mathcal{S}^{s\,'s''}_{e_n \to \gamma^{(\lambda')} e_{\ell'}}|^2}{\tau}\,,$$

где

$$\mathcal{S}^{s\,''s}_{\gamma^{(\lambda)} e_\ell \to e_n} = \frac{\mathrm{i}(2\pi)^3 \delta^{(3)}_{0,y,z}(p + q - p\,'')}{\sqrt{2q_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E_n'' L_y L_z}}\, \mathcal{M}^{s''s}_{\gamma^{(\lambda)} e_\ell \to e_n}\,, \qquad (23)$$

$$\mathcal{S}_{e_n \to \gamma^{(\lambda')} e_{\ell'}} = \mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)} e_\ell \to e_n}(q \to q', E_\ell \to E_{\ell'}')$$

– S-матричные элементы подпроцессов: поглощения фотона, $e\gamma \to e$, и рождения фотона, $e \to e\gamma$. Выражения в явном виде для амплитуд одновершинных процессов $\mathcal{M}^{s''s}_{\gamma^{(\lambda)} e_\ell \to e_n}$ и $\mathcal{M}^{s''s}_{e_n \to \gamma^{(\lambda')} e_{\ell'}}$ представлены в работе [33].

Для астрофизических приложений полученных результатов удобно вместо сечения использовать коэффициент поглощения фотона – вероятность перехода фотона в другое состояние за счет тех или иных процессов, который для комптоновского процесса был определен, например, в работе [36]:

$$W_{\gamma e \to \gamma e} = \sum_{\ell,\ell'=0}^{\infty} \int \frac{\mathrm{d}p_y \mathrm{d}p_z L_y L_z}{(2\pi)^2}\, f_e(E_\ell) \times \qquad (24)$$

$$\times \frac{\mathrm{d}p_y' \mathrm{d}p_z' L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_e(E_{\ell'})]\, \frac{\mathrm{d}^3 q' V}{(2\pi)^3}\, [1 + f_\gamma(\omega')] \times$$

$$\times \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}^{s\,'s}_{\gamma^{(\lambda)} e_\ell \to \gamma^{(\lambda')} e_{\ell'}}|^2}{\tau}\,.$$

Просуммировав (24) по поляризационным состояниям конечного электрона и фотона и проведя несложное интегрирование, получим:

$$W_{\gamma^{(1)}e\to\gamma e} = \frac{\alpha\beta}{2\omega}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{\epsilon=\pm1}\times \tag{25}$$
$$\times\frac{f_e(E_\ell^\epsilon)[1-f_e(E_\ell^\epsilon+\omega)]}{\sqrt{(M_n^2-M_\ell^2-q_\parallel^2)^2-4q_\parallel^2M_\ell^2}}\times$$
$$\times\Big\{[2\beta(n+\ell)-q_\parallel^2](\mathcal{I}_{n,\ell-1}^2+\mathcal{I}_{n-1,\ell}^2)-$$
$$-8\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell}\Big\},$$

$$W_{\gamma^{(2)}e\to\gamma e} = \frac{\alpha\beta}{2\omega}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{n=n_0}^{\infty}\sum_{\epsilon=\pm1}\times \tag{26}$$
$$\times\frac{f_e(E_\ell^\epsilon)[1-f_e(E_\ell^\epsilon+\omega)]}{\sqrt{(M_n^2-M_\ell^2-q_\parallel^2)^2-4q_\parallel^2M_\ell^2}}\times$$
$$\times\Big\{\left[\frac{(2\beta(n-\ell))^2}{q_\parallel^2}-2\beta(n+\ell)-4m^2\right]\times$$
$$\times(\mathcal{I}_{n,\ell}^2+\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2)-$$
$$-8\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}\Big\},$$

где

$$E_\ell^\epsilon = \frac{1}{2q_\parallel^2}\Big[\omega\left(M_n^2-M_\ell^2-q_\parallel^2\right)+$$
$$+\epsilon k_z\sqrt{\left(M_n^2-M_\ell^2-q_\parallel^2\right)^2-4q_\parallel^2M_\ell^2}\Big],$$

для $n \geqslant \ell$ [31]

$$\mathcal{I}_{n,\ell}(x) = \sqrt{\frac{\ell!}{n!}}\,\mathrm{e}^{-x/2}x^{(n-\ell)/2}L_\ell^{n-\ell}(x),$$
$$\mathcal{I}_{\ell,n}(x) = (-1)^{n-\ell}\mathcal{I}_{n,\ell}(x), \tag{27}$$

и $L_n^k(x)$ – обобщенные полиномы Лагерра [35]. Отметим, что функции (27) соответствуют функциям $\Lambda_{\ell,n}(x)$ в работах [30, 40] Далее в работе будет использовано обозначение $\mathcal{I}_{n,\ell} \equiv \mathcal{I}_{n,\ell}\left(\frac{q_\perp^2}{2\beta}\right)$.

В (25) и (26) суммирование по n ограничено согласно закону сохранения энергии и импульса следующим образом:

$$n_0 = \ell + \left[\frac{q_\parallel^2+2M_\ell\sqrt{q_\parallel^2}}{2\beta}\right], \tag{28}$$

где $[x]$ – целая часть числа x.

С дифференциальным сечением рассеяния коэффициент поглощения связан следующим образом [41]

$$d\sigma_{\gamma^{(\lambda)}e\to\gamma e} = \frac{dW_{\gamma(\lambda)e\to\gamma e}}{j}, \tag{29}$$

где $j = |(pq)_\parallel|/(E\omega V)$ – плотность потока падающих частиц в продольном по отношению к магнитному полю подпространстве. В работах [31, 32, 42] исследовался процесс комптоновского рассеяния в замагниченной плазме при ненулевых температурах и магнитных полях, характерных для магнитосфер радиопульсаров и магнитаров $10^{12}-10^{15}$ Гс. При этом сечение рассеяния было рассчитано при условии, что начальный и конечный электроны находятся на основном уровне Ландау. При расчетах учитывался резонанс на виртуальном электроне с конечной шириной, полученной с использованием корректных решений уравнения Дирака (7).

В данных работах сечение интегрировалось по импульсам начального электрона в системе покоя плазмы с нормированной функцией распределения $\overline{f}_{n,s}(E_n)$, введенной следующим образом:

$$\sigma_\lambda^* = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{f}_{n,s}(E_n)\mathrm{d}\sigma_{\gamma^{(\lambda)}e\to\gamma e}, \tag{30}$$

где

$$d\sigma_{\gamma^{(\lambda)}e\to\gamma e} = \frac{dW_{\gamma^{(\lambda)}e\to\gamma e}}{j}, \tag{31}$$

$j = |(pq)_\parallel|/(E\omega V)$ – плотность потока падающих частиц в продольном по отношению к магнитному полю подпространстве. Исходя из нормировки функции распределения:

$$\sum_{n,s}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p_z\overline{f}_{n,s}(E_n) = 1, \tag{32}$$

представим ее в виде:

$$\overline{f}_{n,s}(p_z) = \frac{\beta}{(2\pi)^2n_e}\frac{1}{e^{E_n/T}+1}, \tag{33}$$

где

$$n_e = \frac{\beta}{(2\pi)^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2-\delta_{\ell,0})\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p_zf_e(E_\ell) \tag{34}$$

– концентрация электронов во внешнем магнитном поле.

С учетом (30) – (34) дифференциальное сечение рассеяния, просуммированное по поляризациям конечного фотона, может быть выражено через дифференциальный коэффициент поглощения:

$$d\sigma_\lambda^* = \frac{E\omega}{(pq)_\parallel}\frac{1}{n_e}dW_{\gamma^{(\lambda)}e\to\gamma e}. \tag{35}$$

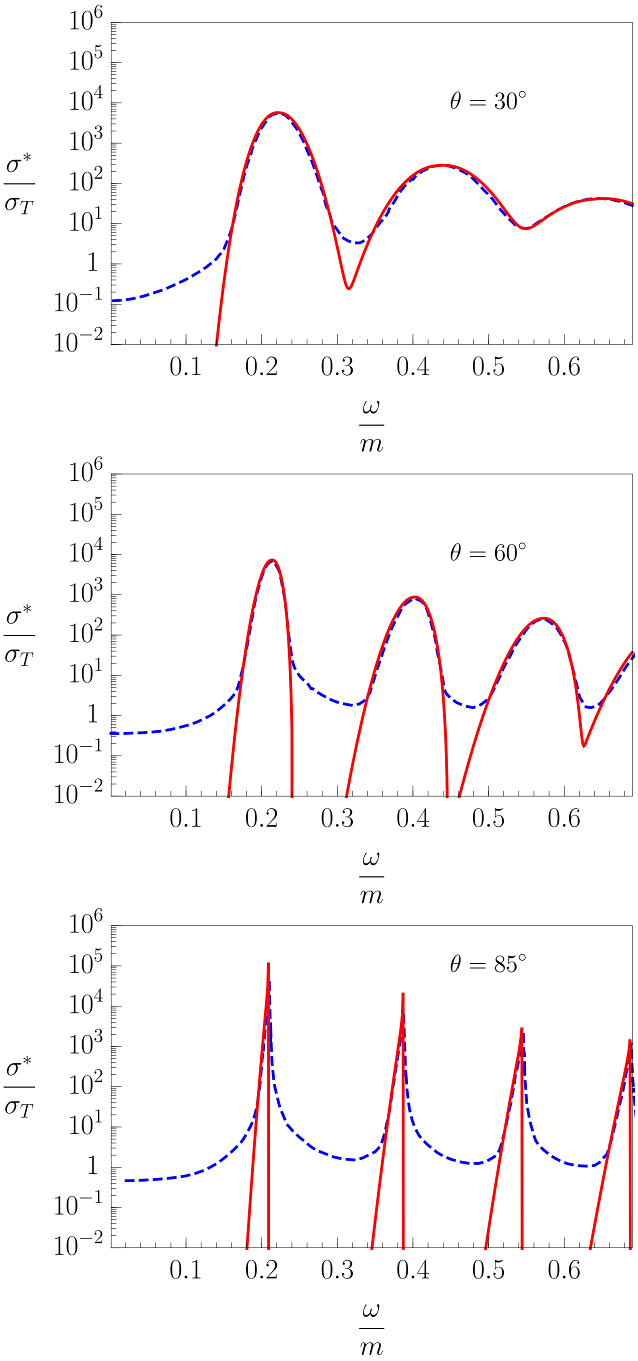

Рис. 1. Зависимость усредненного по поляризациям начального фотона сечения резонансного копмтоновского рассеяния, полученного в в δ-функциональном приближении (сплошная линия) и с учетом конечной ширины изменения состояния электрона [32] (пунктирная линия), от энергии начального фотона для магнитного поля $B = 10^{13}$ Гс и температуры $T = 5$ кэВ для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля.

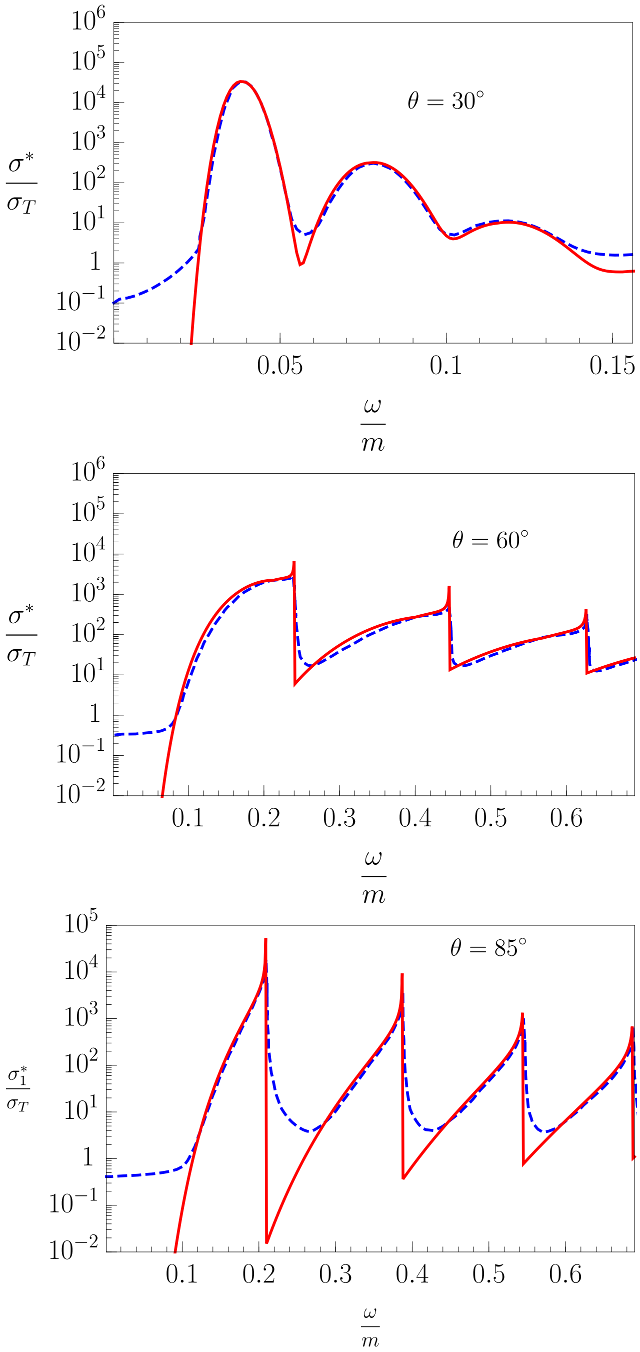

Рис. 2. Зависимость усредненного по поляризациям начального фотона сечения резонансного копмтоновского рассеяния, полученного в в δ-функциональном приближении (сплошная линия) и с учетом конечной ширины изменения состояния электрона [32] (пунктирная линия), от энергии начального фотона для магнитного поля $B = 10^{13}$ Гс и температуры $T = 50$ кэВ для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля.

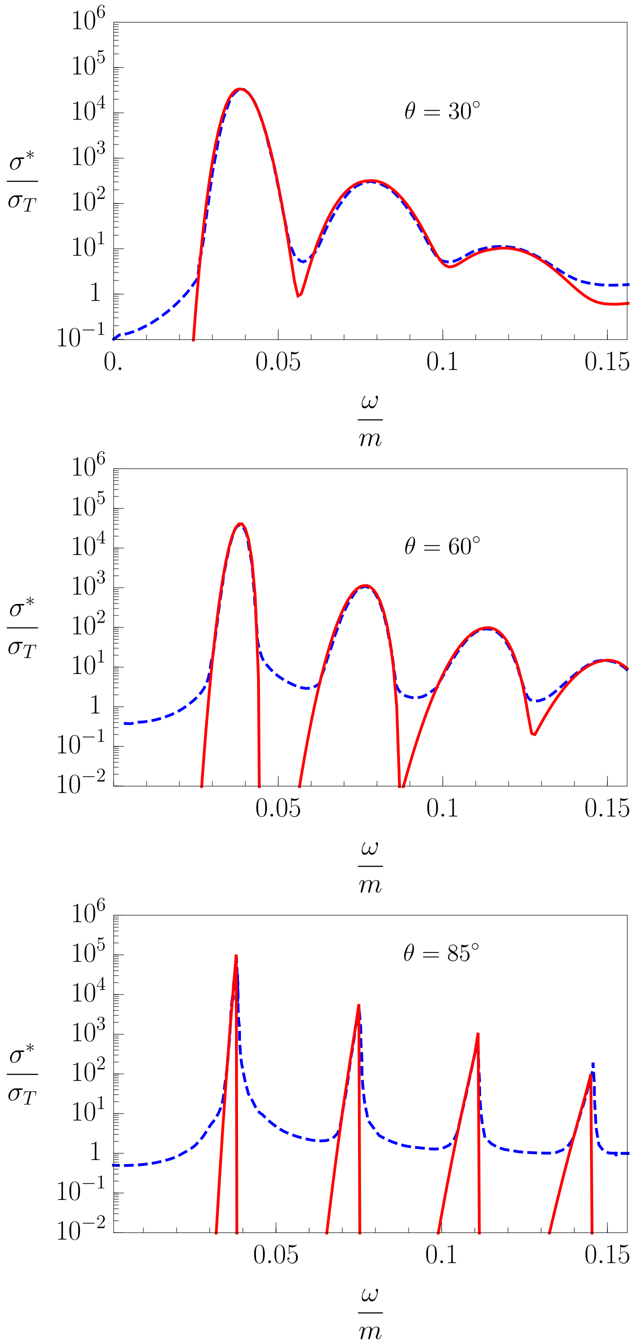

Рис. 3. Зависимость усредненного по поляризациям начального фотона сечения резонансного копмтоновского рассеяния, полученного в в δ-функциональном приближении (сплошная линия) и с учетом конечной ширины изменения состояния электрона [32] (пунктирная линия), от энергии начального фотона для магнитного поля $B = 1.7 \cdot 10^{12}$ Гс и температуры $T = 5$ кэВ для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля.

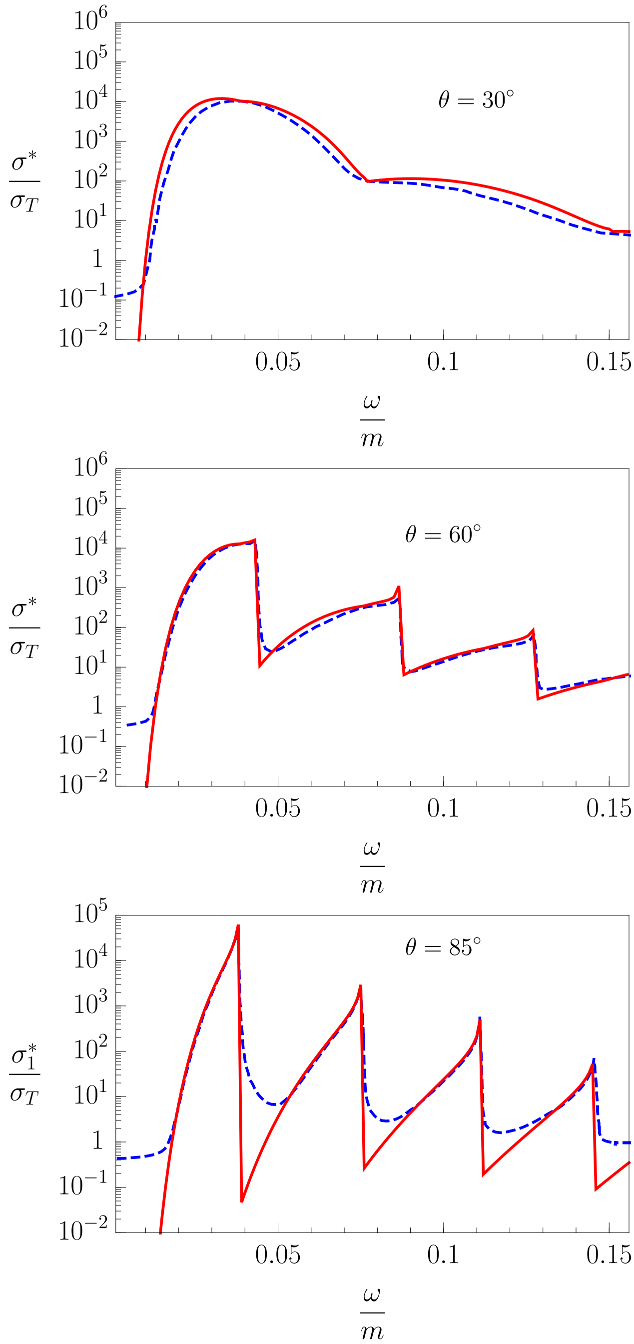

Рис. 4. Зависимость усредненного по поляризациям начального фотона сечения резонансного копмтоновского рассеяния, полученного в в δ-функциональном приближении (сплошная линия) и с учетом конечной ширины изменения состояния электрона [32] (пунктирная линия), от энергии начального фотона для магнитного поля $B = 1.7 \cdot 10^{12}$ Гс и температуры $T = 50$ кэВ для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля.

Сравнительный анализ усредненного по поляризациям начального фотона сечения рассеяния, вычисленного как в приближении узкого резонансного пика, так и с учетом конечной ширины изменения состояния электрона [32, 42], представлен на рисунках 1–4. В относительно недавних работах [31, 42] вычислялись парциальные сечения рассеяния для начального фотона моды 1 и моды 2[4)] с учетом конечной ширины процесса. В то время, как расчеты в дельта-функциональном приближении находятся в хорошем согласии с результатами [32,42] в области резонансных пиков, сечение рассеяния, вычисленное в работе [31], существенно расходится с указанными работами, а также с более ранней статьей того же автора [43]. Таким образом, применение приближения узкого пика (21) правомочно в области полей $B \gtrsim 10^{12}$ Гс, характерной для магнитаров и радиопульсаров. Кроме того, полученные в этом приближении коэффициенты поглощения фотона (25) и (26) представляют собой конечные суммы вместо многомерных интегралов при учете конечной ширины процесса, что является гораздо более удобным в приложениях, например, к решению задачи переноса излучения.

Можно дополнительно учесть, что при температуре $T \simeq 50$ кэВ начинают возбуждаться высшие уровни Ландау начальных электронов, что приводит к существенному увеличению сечения рассеяния. Узкие пики, соответствующие энергиям $\omega_{n\ell} = (M_n - M_\ell)/\sin\theta$, хорошо известны в литературе (см., например, [44–46]), но при этом вносят малый вклад в интегральные величины.

3. РЕЗОНАНСНОЕ КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ В СВЕРХСИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Рассмотрим теперь ситуацию сверхсильного магнитного поля, $B \sim 10^{15} - 10^{16}$ Гс, и высоких температур, $T \sim 1$ МэВ, которые характерны для гигантских вспышек SGR – источников мягких повторяющихся гамма-всплесков (см., например, обзор [47]). Исследование комптоновского процесса в магнитных полях указанного масштаба было проведено, например, в работе [36]. Однако полученные в этом исследовании результаты будут справедливыми только для области энергий фотонов вдали от резонансов. Поэтому представляет самостоятельный интерес вычислить коэффициент поглощения фотона в пределе сильного поля с учетом возможного резонанса на виртуальном электроне с конечной шириной резонансного пика и сравнить с нерезонансным пределом [36] и дельта-функциональным приближением [33]. Поскольку в пределе сильного магнитного поля начальный и конечный электроны будут преимущественно занимать основной уровень Ландау, а виртуальный электрон – первый уровень Ландау, то коэффициент поглощения фотона с учетом конечной ширины резонансного пика примет достаточно простой для вычисления вид. Поскольку в сильном магнитном поле энергии фотона, на которых наблюдается резонанс, выше, чем порог рождения e^+e^- пары $q_\parallel^2 = 4m^2$ для фотона моды 2 , то целесообразно рассмотреть только каналы рассеяния $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(1)}$ и $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(2)}$. Следует отметить, что для фотона моды 1 порог рождения e^+e^- пары $q_\parallel^2 = (M_1+m)^2$ заведомо выше рассматриваемой области резонанса $q_\parallel^2 = (M_1-m)^2$.

[4)] Обозначения векторов поляризации фотонов индексами 1 и 2 соответствуют X и O модам работ [31, 42].

Как показывает численный анализ, в случае сильно замагниченной, горячей, зарядово-симметричной плазмы полная ширина поглощения электрона для первого уровня Ландау Γ_1 мало отличается от соответствующего выражения в сильном магнитном поле и ультрарелятивистских электронов [48]:

$$E_1''\Gamma_1 = \alpha\beta(1 - e^{-1}) \simeq 0.623\alpha\beta\,, \qquad (36)$$

где $E_n'' = E + \omega$ – энергия виртуального электрона.

В пределе сильного поля парциальные коэффициенты поглощения фотона для каналов $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(1)}$ и $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(2)}$ с учетом конечной ширины поглощения электрона в случае, когда начальный фотон распространяется поперек магнитного поля, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{e\gamma^{(1)}\to e\gamma^{(1)}} &= \frac{\beta\alpha^2 m^2}{\pi}\int dQ_0 dk_z' \frac{{k_z'}^2\omega}{(-Q_\parallel^2)^2\varkappa}\exp\left[-\frac{q_\perp^2 + {q'}_\perp^2}{2\beta}\right]\times \qquad (37)\\ &\times\sum_{\sigma=\pm1}\left\{\frac{1}{((p_\sigma+q)_\parallel^2 - M_1^2)^2 + (E_1''\Gamma_1)^2} + \frac{1}{((p_\sigma-q')_\parallel^2 - M_1^2)^2 + (E_1''\Gamma_1)^2} - \right.\\ &- 2\frac{q_\perp^2 q_\perp'^2}{4\beta^2} J_2\left(\frac{\sqrt{q_\perp^2}\sqrt{q_\perp'^2}}{\beta}\right)\times\\ &\left.\times\frac{[(p_\sigma+q)_\parallel^2 - M_1^2][(p_\sigma-q')_\parallel^2 - M_1^2] + (E_1''\Gamma_1)^2}{[((p_\sigma-q')_\parallel^2 - M_1^2)^2 + (E_1''\Gamma_1)^2][((p_\sigma+q)_\parallel^2 - M_1^2)^2 + (E_1''\Gamma_1)^2]}\right\}\times\\ &\times f_e(E_\sigma)\,[1 - f_e(E_\sigma+Q_0)]\,[1 + f_\gamma(\omega')]\,, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&W_{e\gamma^{(1)}\to e\gamma^{(2)}} = \frac{\beta\alpha^2 m^2}{\pi}\int dQ_0 dk'_z \frac{q'^2_\parallel \omega}{(-Q^2_\parallel)^2\varkappa}\exp\left[-\frac{q^2_\perp+q'^2_\perp}{2\beta}\right]\times \\
&\times\sum_{\sigma=\pm1}\frac{Q_0}{\omega}\left\{\frac{1}{((p_\sigma+q)^2_\parallel-M_1^2)^2+(E''_1\Gamma_1)^2}+\frac{Q_0\omega}{q'^2_\parallel}\frac{1}{((p_\sigma-q')^2_\parallel-M_1^2)^2+(E''_1\Gamma_1)^2}-\right. \\
&-2\frac{q^2_\perp q'^2_\perp}{4\beta^2}J_2\left(\frac{\sqrt{q^2_\perp}\sqrt{q'^2_\perp}}{\beta}\right)\times \\
&\times \frac{[(p_\sigma+q)^2_\parallel-M_1^2][(p_\sigma-q')^2_\parallel-M_1^2]+(E''_1\Gamma_1)^2}{[((p_\sigma-q')^2_\parallel-M_1^2)^2+(E''_1\Gamma_1)^2][((p_\sigma+q)^2_\parallel-M_{1'}^2)^2+(E''_1\Gamma_{1'})^2]}\times \\
&\times\left.\frac{Q_0(\omega-Q_0)}{q'^2_\perp}\right\} f_e(E_\sigma)\,[1-f_e(E_\sigma+Q_0)]\,[1+f_\gamma(\omega')]\,,
\end{aligned}
\tag{38}
$$

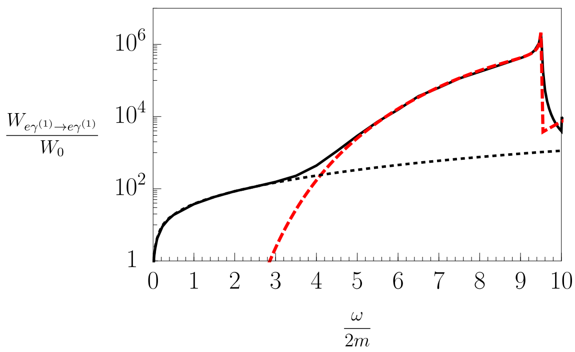

Рис. 5. Зависимость коэффициента поглощения от энергии начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(1)}$ при поле $B = 200B_e$ и температуре T=1 МэВ: сплошная линия – коэффициент поглощения с учетом резонанса; штриховая линия – без учета резонанса; пунктирная линия – дельта-функциональное приближение. Здесь $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25\cdot 10^2$ см$^{-1}$.

где $J_n(x)$ – функция Бесселя целого индекса, $\varkappa = \sqrt{1-4m^2/Q^2_\parallel}$, $E_\sigma = \sqrt{p^2_{z\sigma}+m^2}$, $p_{z\sigma}$ – корни уравнения $Q_0 + E_\sigma - E'_\sigma = 0$:

$$
p_{z\sigma} = -\frac{Q_z}{2} + \sigma Q_0\varkappa\,, \tag{39}
$$

$p^\alpha_{\sigma\parallel} = (E_\sigma, p_{z\sigma})$. Поперечная составляющая импульса конечного фотона определяется из уравнения дисперсии:

$$
q'^2_\parallel = q'^2_\perp + \mathcal{P}^{(\lambda)}(q'). \tag{40}
$$

Имеет смысл провести сравнительный анализ результатов работы [36] с резонансным случаем (37) и (38) для зарядово-симметричной плазмы и поперечного направления распространения импульса фотона по отношению к внешнему магнитному полю для различных значений величины магнитного поля, температуры и энергии начального фотона.

На рис. 5–8 показан коэффициент поглощения $W_{1\to1}$ рассеяния при температуре $T = 1$ МэВ и величине магнитного поля $B = 200B_e$ и $B = 20B_e$ соответственно. Как видно из рис. 5–6, коэффициент поглощения для канала $\gamma^{(1)}e \to \gamma^{(1)}e$ согласуется с соответствующими результатами для предела сильного поля и отсутствия резонанса, полученными в работе [36] вплоть до энергий начального

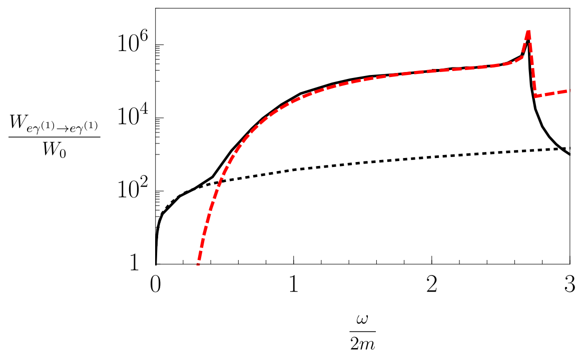

Рис. 6. Зависимость коэффициента поглощения от энергии начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(1)}$ при поле $B = 20B_e$ и температуре T=1 МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 5.

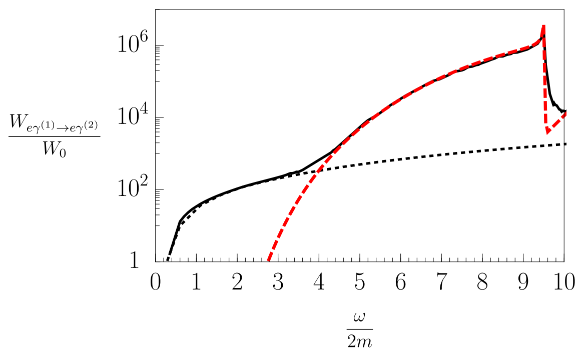

Рис. 7. Зависимость коэффициента поглощения от энергии начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(2)}$ при поле $B = 200B_e$ и температуре T=1 МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 5.

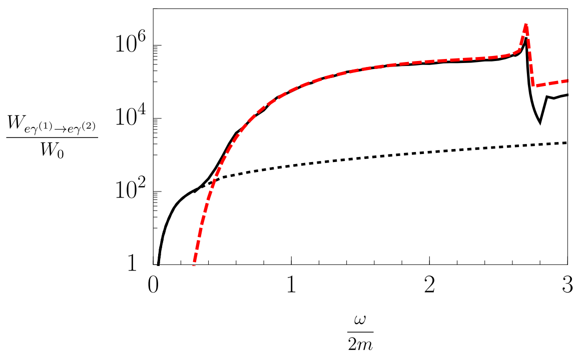

Рис. 8. Зависимость коэффициента поглощения от энергии начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(2)}$ при поле $B = 20B_e$ и температуре T=1 МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 5.

фотона $\omega \simeq 3$ МэВ для поля $B = 200B_e$ с точностью до 5% и $\omega \simeq 0.3$ МэВ для поля $B = 20B_e$ с точностью до 8%. Отсюда вытекает ограничение на применимость результатов работы [36] по энергиям начального фотона. Аналогичная ситуация наблюдается и для канала $\gamma^{(1)}e \to \gamma^{(2)}e$ (см. рис. 7–8), для которого точность соответствия с коэффициентом поглощения в нерезонансном пределе – до 16% для значений магнитных полей $B = 200B_e$ и до 18% для значений магнитных полей $B = 20B_e$ в нерезонансной области. На рис. 6 и 8 наиболее ярко видно завышение коэффициента поглощения даже при относительно малых энергиях начального фотона. Этот факт связан с тем, что в пределе сильного магнитного поля разложение амплитуды комптоновского процесса по обратным степеням поля уже не будет правомочным.

С другой стороны δ-функциональное приближение достаточно хорошо описывает первый резонансный пик. Действительно, для канала $\gamma^{(1)}e \to \gamma^{(1)}e$ точность соответствия коэффициента поглощения в пределе узкого резонансного пика с коэффициентом поглощения, учитывающим конечный резонансный пик составляет до 9% для значения магнитного поля $B = 200B_e$ и до 13% для $B = 20B_e$. Учёт дисперсии фотона моды 2 для канала $\gamma^{(1)}e \to \gamma^{(2)}e$ приводит к более высокому несоответствию – до 15% для $B = 200B_e$ и до 25% для $B = 20B_e$. Следует отметить что при относительно малых температурах $T \lesssim 50$ кэВ и магнитными полями той же величины ($B = 200B_e$ и $B = 20B_e$) δ-аппроксимация работает хуже из-за уменьшения области резонанса. В целом δ-функциональное приближение достаточно хорошо будет описывать лишь первый резонансный пик.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе вычислены коэффициенты поглощения и дифференциальное сечение в реакции комптоновского рассеяния в сильном магнитном поле в приближении узкого резонансного пика. Показано, что такое приближение дает хорошее согласие с расчетами из более ранних работ [32, 42, 43]. Существенные отличия от результатов статьи [31], по всей видимости, связаны с ошибками в последней.

В пределе сильного магнитного поля $B > B_e$ и высоких температур $T = 1$ МэВ вычислен коэффициент поглощения фотона в комптоновском процессе для двух кинематически разрешенных каналов $\gamma^{(1)}e \to \gamma^{(1)}e$ и $\gamma^{(1)}e \to \gamma^{(2)}e$. Полученные численные результаты позволили установить области энергий фотона, при которых применим нерезонансный предел [36]: $\omega \lesssim 3$ МэВ при $B = 200B_e$ и $\omega \lesssim 0.3$ МэВ при $B = 20B_e$. Дельта-функциональное приближение при данных параметрах среды хорошо описывает только первый резонансный пик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Trümper J., Pietsch W., Reppin C., Voges W., Staubert R., Kendziorra E., Astrophys. J. **219**, L105 (1978).
2. Makishima K., Mihara T., Ishida M. et al., Astrophys. J. Lett. **365**, L59 (1990).
3. Grove J. E., Strickman M. S., Johnson W. N. et al., Astrophys. J. Lett. **438**, L25 (1995).
4. Mihara T., Makishima K., Ohashi T., Sakao T., Tashiro M., Nagase F., Tanaka Y., Kitamoto S., Miyamoto S., Deeter J. E., Boynton P. E., Nature **346**, 250 (1990).
5. Canuto V., Lodenquai J., Ruderman M., Phys. Rev. D **3**, 2303 (1971).
6. Гнедин Ю. Н., Сюняев Р. А., ЖЭТФ **65**, 102 (1973).
7. Borner G., Meszaros P., Plasma Phys. **21**, 357 (1979).
8. Ventura J., Phys. Rev. D **19**, 1684 (1979).
9. Herold H., Phys. Rev. D **19**, 2868 (1979).
10. Melrose D. B., Parle A. J., Aust. J. Phys. **36**, 799 (1983).
11. Daugherty J. K., Harding A. K., Astrophys. J. **309**, 362 (1986).

12. Bussard R. W., Alexander S. B., Meszaros P., Phys. Rev. D **34**, 440 (1986).

13. Özel F., Astrophys. J. **563**, 276 (2001).

14. Zavlin V. E., Pavlov G. G., Shibanov Yu. A., A&A **315**, 141 (1996).

15. Alexander S. G., Meszaros P., Astrophys. J. **372**, 565 (1991).

16. Araya R. A., Harding A. K., Astrophys. J. **517**, 334 (1999).

17. Ho W. C. G., Lai D., MNRAS, **327**, 1081 (2001).

18. Lyutikov M., Gavriil F. P., MNRAS, **368**, 690 (2006).

19. Potekhin A. Y., Lai D., Chabrier G., Ho W. C. G., Astrophys. J. **621**, 1034 (2004).

20. Schönherr G., Wilms J., Kretschmar P., Kreykenbohm I., Santangelo A., Rothschild R. E., Coburn W., Staubert R., A&A **472**, 353 (2007).

21. Nishimura O., Astrophys. J. **672**, 1127 (2008).

22. Suleimanov V., Potekhin A. Y., Werner K., A&A **500**, 891 (2009).

23. Fernández R., Thompson C., Astrophys. J. **660**, 615 (2007).

24. Nobili L., Turolla R., Zane S., MNRAS, **389**, 989 (2008).

25. Wadiasingh Z., Baring M. G., Gonthier P. L., Harding A. K., Astrophys. J. **854**, 98 (2018).

26. Beloborodov A. M., Astrophys. J. **762**, 13 (2013).

27. Daugherty J. K., Harding A. K., Astrophys. J. **336**, 861 (1989).

28. Gonthier P. L., Harding A. K., Baring M. G., Costello R. M., Mercer C. L., Astrophys. J. **540**, 1719 (2010).

29. Фомин П. И., Холодов Р. И., ЖЭТФ **117**, 319 (2000).

30. P. L. Gonthier, M. G. Baring et al., Phys. Rev. D **90**, 043014 (2014).

31. Mushtukov A. A., Nagirner D. I., Poutanen J., Phys. Rev. D **93**, 105003 (2016).

32. Harding A. K., Daugherty J. K., Astrophys. J. **374**, 687 (1991).

33. Румянцев Д. А., Шленев Д. М., Ярков А. А., ЖЭТФ **152**, 483 (2017).

34. Sokolov A. A., Ternov I. M., *Synchrotron Radiation*, Pergamon: Oxford (1968).

35. Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит: Москва (1963).

36. Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A., Int. J. Mod. Phys. A **24**, 3995 (2009).

37. Weldon H. A., Phys. Rev. D **26**, 1394 (1982).

38. Жуковский В. Ч., Мидодашвили П. Г., Эминов П. А., ЖЭТФ **106**, 929 (1994).

39. Weldon H. A., Phys. Rev. D **28**, 2007 (1983).

40. Daugherty J. K., Harding A. K., Astrophys. J. **309**, 362 (1986).

41. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П., *Квантовая электродникамика*, Физматлит: Москва (2002).

42. Schwarm F.-W., Schönherr G., Falkner S., Pottschmidt K., Wolff M. T., Becker P. A., Sokolova-Lapa E., Klochkov D., Ferrigno C., Fürst F., Hemphill P. B., Marcu-Cheatham D. M., Dauser T., Wilms J., A&A **597**, A3 (2017).

43. Mushtukov A. A., Suleimanov V. F., Tsygankov .S S., Poutanen J., MNRAS, **447**, 1847 (2015).

44. Pavlov G. G., Bezchastnov V. G., Meszaros P., Alexander S. G., Astrophys. J. **380**, 541 (1991).

45. Клепиков Н. П., ЖЭТФ **26**, 19 (1954).

46. Baier V. N., Katkov V. M., Phys. Rev. D **75**, 073009 (2007).

47. Kaspi V. M., Beloborodov A. M., Annu. Rev. Astron. & Astrophys, **55**, 261 (2017).

48. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V., *Electroweak Processes in External Active Media*, Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg (2013).