Резонансные процессы в активной среде

Д.А. Румянцев[*], Д.М. Шленев[**] А.А. Ярков[***]
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия

В работе рассмотрены различные квантовые процессы с учетом резонанса на виртуальном фермионе.

[*]E-mail: rda@uniyar.ac.ru
[**]E-mail: ultrasickdoom@gmail.com
[***]E-mail: a12l@mail.ru

1 Введение

Нейтронные звёзды, обладая набором экстремальных характеристик, являются природными физическими лабораториями и одними из самых интересных объектов, известных в науке. Особое внимание учёных привлекают радиопульсары и магнитары, обладающие магнитными полями колоссальной напряжённости, к которой очень сложно приблизиться в земных условиях. У магнитного поля имеется характерное значение, называемое критическим, $B_e = m^2/e \simeq 4.41 \times 10^{13}$ Гс [1], при приближении к которому становится необходимым учитывать квантовые эффекты при движении в нём частиц. В радиопульсарах с магнитными полями порядка 10^{12} Гс и магнитарах – до 10^{16} Гс [1–3] такие условия выполняются.

Кроме сильных магнитных полей, в магнитосфере как радиопульсаров, так и магнитаров, присутствует достаточно горячая и плотная электрон-позитронная плазма [1]. Магнитное поле и плазма составляют две компоненты внешней активной среды, присутствие которой значительно изменяет характеристики протекающих в ней микропроцессов. Во-первых, активная среда может изменять закон дисперсии находящихся в ней частиц, что приводит к изменению кинематики процессов и вследствие чего могут открываться реакции и каналы реакций, которые запрещены в вакууме. Во-вторых, активная среда влияет на амплитуды процессов, в результате чего они могут приобретать резонансный характер. Именно эта составляющая влияния внешней активной среды рассматривается в данном обзоре. Вследствие резонанса вклад микропроцессов в макроскопические характеристики астрофизических процессов, такие как светимость и скорость изменения количества частиц, может многократно увеличиваться.

В сильном магнитном поле поперечная составляющая импульса фермиона квантуется. В таком случае энергия фермиона определяется так называемым

[1] В работе используется естественная система единиц: $\hbar = c = k = 1$, m – масса электрона, $e > 0$ – элементарный заряд.

уровнем Ландау n и проекцией импульса вдоль магнитного поля p_z:

$$E_n = \sqrt{m_f^2 + p_z^2 + 2|e_f|Bn}, \tag{1}$$

где e_f и m_f - заряд и масса фермиона. Состояние с $n = 0$, в котором фермион движется вдоль силовой линии магнитного поля, называется основным уровнем Ландау.

Можно выделить несколько ситуаций в иерархии параметров среды: магнитного поля, температуры T, химического потенциала μ и энергии фермионов и фотонов, участвующих в реакциях. Предел сильного поля, когда фермионы будут занимать основной уровень Ландау, осуществляется при выполнении условия [4]:

$$\frac{B^2}{8\pi} \gg \frac{\pi^2(n_{e^-} - n_{e^+})^2}{eB} + \frac{eBT^2}{12}\,, \tag{2}$$

где n_{e^-} и n_{e^+} – концентрации электронов и позитронов плазмы. Такие условия могут, в частности, реализовываться в модели вспышки источников мягких повтоярющихся гамма-всплесков (SGR) $[1, 5]$, которые, как показывают недавние наблюдения, можно отождествить с магнитарами [6–11].

Даже в магнитарных магнитных полях при значениях плотности плазмы $\rho \geqslant 10^8$ г/см^3, которые могут достигаться в границе между внешней и внутренней корой магнитара, условие 2, при котором магнитное поле является доминирующим параметром, перестаёт выполняться. В результате реакции, в которых имеются фермионы в промежуточном состоянии, могут приобретать резонансный характер. Это происходит вследствие того, что начинают возбуждаться высшие уровни Ландау виртуальных фермионов. Они становятся реальными с определённым законом дисперсии, садятся на массовую поверхность. В этом состоянии они являются нестабильными и распадаются за время, обратно пропорциональное вреоятности их перехода на низшие уровни Ландау. Эффективность реакции при этом заметно увеличивается, что может иметь наблюдаемые астрофизические следствия.

Резонанс на фотоне наблюдается аналогичным образом: в активной среде поляризационный оператор фотона имеет реальную часть, которую можно рассматривать как эффективную массу фотона. В кинематической области, в которой квадрат 4-импульса виртуального фотона будет равен реальной части его поляризационного оператора, виртуальный фотон станет реальным и нестабильным.

Настоящая статья организована следующим образом. В Разделе 2 обсуждаются различные методы представления решения уравнения Дирака во внешнем магнитном поле. В разделе 3 рассматриваются радиационные поправки в магнитном поле к массовому оператору частиц в промежуточном состоянии и получается выражение для пропагатора. Раздел 4 посвящён различным двухвершинным процессам, в которых может реализовываться резонанс на виртуальном фермионе и/или фотоне. В Разделе 5 описываются сингулярности в фазовых объемах одновершинных процессов и методы их устранения.

2 Фермионы и фотоны во внешнем магнитном поле

2.1 Представление решений уравнения Дирака во внешнем магнитном поле.

Волновые функции фермионов в присутствии внешнего магнитного поля являются решениями уравнения Дирака:

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu + e_f A_\mu \gamma^\mu - m_f)\Psi^s_{p,n}(X) = 0\,, \tag{3}$$

где A_μ – 4-потенциал электромагнитного поля. В случае присутствия постоянного однородного магнитного поля, которое направлено вдоль оси z, в калибровке Ландау он будет иметь вид: $A^\mu = (0, 0, xB, 0)$. Собственные функции операторов, коммутирующих с гамильтонианом Дирака во внешнем магнитном поле: $H = \gamma_0 (\boldsymbol{\gamma P}) + m_f \gamma_0 + eA_0$, также являются решениями волнового уравнения. Существует два распространенных подхода, подробное описание которых представлено в работах [12–17]). Первым из них является выбор собственных функций оператора обобщённой спиральности, $T_0 = \frac{1}{m_f}(\mathbf{\Sigma}(-\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla} - e_f \mathbf{A}))$, где $\mathbf{\Sigma} = -\gamma_0 \boldsymbol{\gamma} \gamma_5$, авторами которого являются

Джонсон и Липпман [18]. При этом выборе решений уравнения Дирака две верхние компоненты биспиноров соответствуют состояниям фермиона с проекцией спина на направление магнитного поля, равной $1/2$ и $-1/2$.

Другой подход предложен Соколовым и Терновым [19]. Он состоит в выборе волновых функций как собственных функций ковариантного оператора μ_z, который строится следующим образом:

$$\hat{\mu}_z = m_f \Sigma_z - i\gamma_0\gamma_5 \left[\mathbf{\Sigma} \times \mathbf{P}\right]_z \ , \tag{4}$$

где $\mathbf{\Sigma} = \gamma_0\gamma_5\boldsymbol{\gamma}$ – трёхмерный оператор спина, а $\mathbf{P} = -i\mathbf{\Delta} + e_f\mathbf{A}$ – обобщенный оператор спина. Его можно получить непосредственно из введённого в работе [19] обобщённого оператора спина, являющегося тензором третьего ранга, который можно записать в координатном представлении следующим образом:

$$\mathrm{F}_{\mu\nu\lambda} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(P_\lambda\gamma_0\sigma_{\mu\nu} + \gamma_0\sigma_{\mu\nu}P_\lambda\right), \tag{5}$$

где $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)/2$, и $P_\lambda = \mathrm{i}\partial_\lambda - e_f\,A_\lambda = (\mathrm{i}\partial_0 - e_f\,A_0\,, -\mathrm{i}\mathbf{\nabla} - e_f\mathbf{A})$ – оператор обобщённого 4-импульса. Заметим, что в работе [19] ковариантные билинейные формы были построены из матриц Дирака в обкладках биспиноров $\psi^\dagger$ и ψ, тогда как в современной литературе (см., например [20]) билинейные формы строятся из матриц Дирака в обкладках биспиноров $\bar{\psi}$ и ψ. Из пространственных компонент $\mathrm{F}_{\mu\nu0}$ оператора (5) можно построить следующий векторный оператор:

$$\hat{\mu}_i = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,\mathrm{F}_{jk0}\,, \tag{6}$$

где ε_{ijk} – тензор Леви-Чивита. Построенный таким образом объект (6) имеет смысл оператора поляризации [12, 19]. Его можно представить в виде:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = m_f\mathbf{\Sigma} + \mathrm{i}\gamma_0\gamma_5[\mathbf{\Sigma} \times \hat{\boldsymbol{P}}]\,, \tag{7}$$

где $\mathbf{\Sigma} = \gamma_0\gamma_5\boldsymbol{\gamma}$ – трёхмерный оператор спина. В нерелятивистском пределе оператор (7), отнесённый к квадрату массы фермиона: $\hat{\boldsymbol{\mu}}/m_f^2$, переходит в обычный оператор Паули для магнитного момента [?], который имеет явную физическую интерпретацию.

В свою очередь собственные функции оператора $\hat{\mu}_z$ удовлетворяют условию

$$\hat{\mu}_z \Psi^s_{p,n}(X) = s M_n \Psi^s_{p,n}(X)\,, \tag{8}$$

где квантовое число $s = \pm 1$ определяет проекцию спина вдоль магнитного поля. Нетрудно показать, что оператор $\hat{\mu}_z$ коммутирует с Гамильтонианом, поэтому они имеют общие собственные функции, что позволяет разделить решения по спиновым состояниям относительно направления магнитного поля. Кроме того, анализ решения уравнения Дирака

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu + e_f A_\mu \gamma^\mu - m_f)\Psi^s_{p,n}(X) = 0 \tag{9}$$

показывает, что состояния фермиона квантуются по энергетическим состояниям, которые называются уровни Ландау

$$E_n = \sqrt{p_z^2 + M_n^2}\,,\ \ n = 0, 1 \ldots\,, \tag{10}$$

где $M_n = \sqrt{2\beta + m_f}$, $\beta = |e_f|B$. Каждое состояние является бесконечно вырождено по p_z и дважды вырождено по s, кроме состояния $n = 0$, где возможно лишь состояние $s = -1$. Используя калибровку Ландау $A^\mu = (0, 0, xB, 0)$, решения уравнения Дирака 9 могут быть представлены следующим образом

$$\Psi^s_{p,\ell}(X) = \frac{e^{-\mathrm{i}(E_\ell X_0 - p_y X_2 - p_z X_3)}\ U^s_\ell(\xi)}{\sqrt{4E_\ell M_\ell (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) L_y L_z}}\,, \tag{11}$$

где

$$\xi(X_1) = \sqrt{\beta}\left(X_1 - \eta \frac{p_y}{\beta}\right)\,. \tag{12}$$

Далее, используя обозначение для определения знака заряда фермиона $\eta = e_f/|e_f|$, становится удобным представить биспиноры $U^s_\ell(\xi)$ в виде отдельной суммы биспиноров соответствующих положительным и отрицательным зарядам $U^s_{\ell,\eta}(\xi)$:

$$U^s_\ell(\xi) = \frac{1-\eta}{2}\, U^s_{\ell,-}(\xi) + \frac{1+\eta}{2}\, U^s_{\ell,+}(\xi)\,, \tag{13}$$

где

$$U^{-}_{\ell,-}(\xi) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sqrt{2\beta\ell}\,p_z V_{\ell-1}(\xi) \\ (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f)V_\ell(\xi) \\ -\mathrm{i}\sqrt{2\beta\ell}(E_\ell + M_\ell)V_{\ell-1}(\xi) \\ -p_z(M_\ell + m_f)V_\ell(\xi) \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$U^{+}_{\ell,-}(\xi) = \begin{pmatrix} (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f)V_{\ell-1}(\xi) \\ -\mathrm{i}\sqrt{2\beta\ell}\,p_z V_\ell(\xi) \\ p_z(M_\ell + m_f)V_{\ell-1}(\xi) \\ \mathrm{i}\sqrt{2\beta\ell}(E_\ell + M_\ell)V_\ell(\xi) \end{pmatrix}, \tag{15}$$

$$U^{-}_{\ell,+}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{2\beta\ell}\,p_z V_\ell(\xi) \\ (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f)V_{\ell-1}(\xi) \\ \mathrm{i}\sqrt{2\beta\ell}(E_\ell + M_\ell)V_\ell(\xi) \\ -p_z(M_\ell + m_f)V_{\ell-1}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

$$U^{+}_{\ell,+}(\xi) = \begin{pmatrix} (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f)V_\ell(\xi) \\ \mathrm{i}\sqrt{2\beta\ell}\,p_z V_{\ell-1}(\xi) \\ p_z(M_\ell + m_f)V_\ell(\xi) \\ -\mathrm{i}\sqrt{2\beta\ell}(E_\ell + M_\ell)V_{\ell-1}(\xi) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

$V_\ell(\xi)$ – нормированные функции гармонического осциллятора, которые следующим образом выражаются через полиномы Эрмита $H_\ell(\xi)$ [21]:

$$V_\ell(\xi) = \frac{\beta^{1/4}\mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2^\ell \ell! \sqrt{\pi}}}\, H_\ell(\xi)\,. \tag{18}$$

Таким образом, волновые функции, определяемые выражением 11, позволяют корректно описать резонансные явлений в квантовых процессах, которые проявляются в пропагаторах частиц и существенно зависят от спина.

2.2 Поляризационнные и дисперсионные свойства фотонов.

Дальнейшее описание квантовых процессов в активной среде без учета поляризационных и дисперсионных свойств фотона невозможно. В свою очередь эти свойства определяются поляризационным оператором фотона $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$. Как было показано ранее в работе [22], в общем случае в замагниченной плазме фотон будет обладать эллиптической поляризацией и обладать тремя поляризационными состояниями. Однако в случае, когда магнитное поле является наибольшим параметром задачи $\beta \gg T^2, \omega^2, \mu^2$ (т.н. поледоминирующая среда), векторы поляризации фотона будут такими же, как и в чистом магнитном поле [23]:

$$\varepsilon_\mu^{(1)} = \frac{(q\varphi)_\mu}{\sqrt{q_\perp^2}}, \;\; \varepsilon_\mu^{(2)} = \frac{(q\tilde{\varphi})_\mu}{\sqrt{q_{\shortparallel}^2}}. \tag{19}$$

Это заведомо выполняется в зарядово-симметричной плазме с $\mu = 0$, что имеет место в большинстве моделей магнитосфер радиопульсаров и магнитаров [24].

Закон дисперсии для фотона моды 1 в рассматриваемой кинематической области незначительно отличается от вакуумного закона $q^2 = 0$. С другой стороны, закон дисперсии моды 2 (см рис. 1) значительно отличается от вакуумного в окрестности циклотронных резонансов [23],

$$q_{\shortparallel}^2 = (M_n \pm M_{n'})^2 \;, \tag{20}$$

из-за наличия корневых сингулярностей в собственных значениях поляризационного оператора, $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$, для мод $\lambda = 1, 2$ (за исключением точки $q_\|^2 = 4m^2$ для моды 1). Поэтому в этих областях становится важным учет радиационных поправок к собственным значениям поляризационного оператора в замагниченной плазме. Этот учет приводит к перенормировке волновых функций фотона

$$\varepsilon_\alpha^{(\lambda)}(q) \to \varepsilon_\alpha^{(\lambda)}\sqrt{Z_\lambda}, \quad Z_\lambda^{-1} = 1 - \frac{\partial \mathcal{P}^{(\lambda)}(q)}{\partial \omega^2}\,. \tag{21}$$

3 Представление пропагаторов с учетом мнимой части.

Для вычисления различных физических величин в дальнейшем будет использоваться диаграммная техника Фейнмана. Начиная с двухвершинных

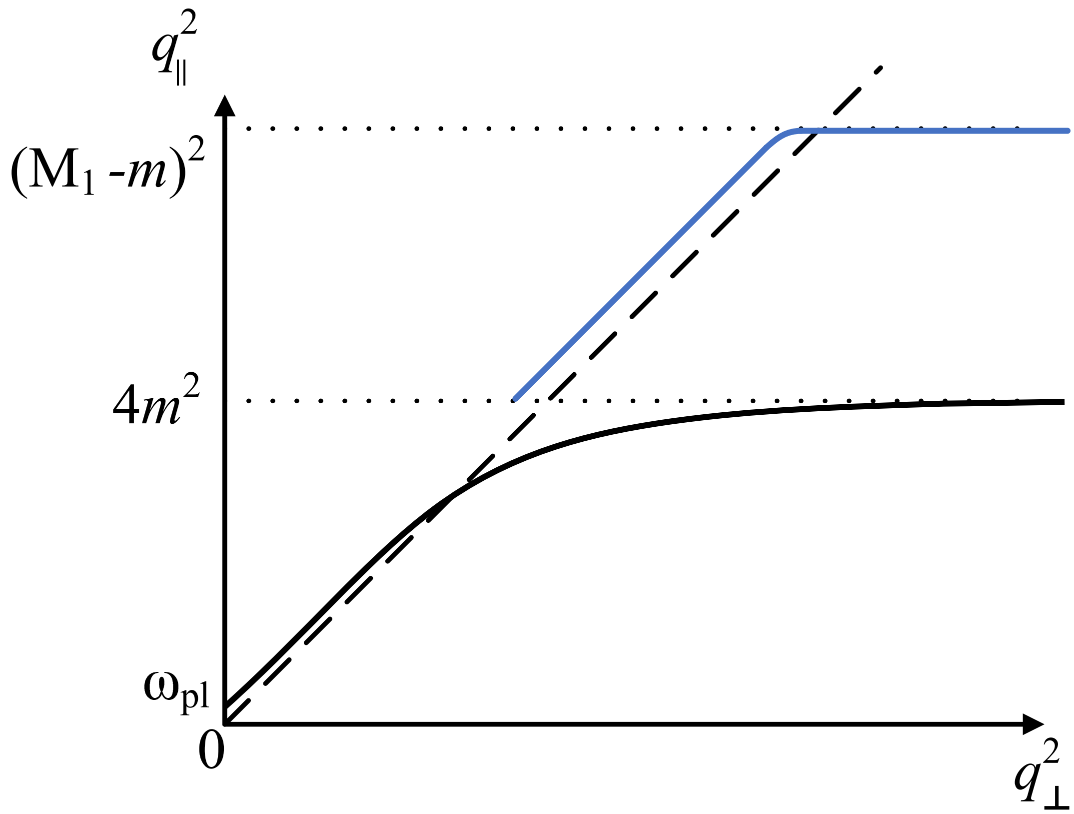

Рис. 1: Закон дисперсии моды 2 в зарядово симметричной плазме при $B \gtrsim B_e$ изображен сплошными линиями. Штриховой линией изображен вакуумный закон дисперсии, который совпадает законом дисперсии фотона моды 1. Дисперсионные кривые следует продолжить схожим образом и на область $q_{\|}^2 > (M_1 - m)^2$

.

процессов в диаграммах будут возникать внутренние фермионные и фотонные линии, которые являются виртуальными частицами и описываются соответствующими пропагаторами. Поэтому представляет интерес дать некоторое описание пропагаторов этих частиц, которые приводят к интересующим нас резонансам.

3.1 Пропагатор фермиона

Есть несколько вариантов представления пропагатора фермиона. Одно из них является точное определение в формализме собственного времени Фока [25]. В этом случае пропагатор фермиона является решением уравнения Дирака с δ-функцией в правой части или так называемой функцией Грина для уравнения Дирака:

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu + e_f A_\mu \gamma^\mu - m_f) S(X, X') = \delta\,(X - X')\ . \tag{22}$$

Выражения для пропагатора являются точными и достаточно громоздкими для последующих вычислений. Поэтому удобно воспользоваться различными разложениями. Предел слабого магнитного поля, например, является актуальным для таких частиц, как W бозоны, так как их критическое поле $B_W = m_W^2/e \simeq 10^{24}$ Гс во много больше магнитных полей, существующих в природе. С другой стороны, существование магнитных полей порядка критического значения для электрона $B \simeq B_e$ является установленным фактом. В таком случае для частиц, обладающих высоким удельным зарядом, удобно рассматривать пропагатор в виде разложения по уровням Ландау:

$$S(X, X') = \sum_{n,s} S_n^s(X, X')\,. \tag{23}$$

Для дальнейшик вычислений удобно будет использовать следующие волновые функции

$$\phi_{p,\ell}^s(X_1) = \frac{U_\ell^s[\xi(X_1)]}{\sqrt{2M_\ell(E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f)}}\,. \tag{24}$$

Используя точные решения уравнения Дирака 11 пропагатор можно представить следующим образом:

$$\hat{S}_n^s(X, X') = \int \frac{\mathrm{d}p_0 \mathrm{d}p_y \mathrm{d}p_z}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(p\,(X-X'))_\parallel + \mathrm{i}p_y\,(X_2 - X_2')}}{p_\parallel^2 - M_n^2 - \mathcal{R}_\Sigma^s(p) + \mathrm{i}\,\mathcal{I}_\Sigma^s(p)}\, \phi_{p,n}^s(X_1) \bar{\phi}_{p,n}^s(X_1')\,, \tag{25}$$

где $\mathcal{R}_\Sigma^s(p)$ и $\mathcal{I}_\Sigma^s(p)$ – реальная и мнимая части массового оператора фермиона. Для их получения требуется вычислить радиационные поправки к массе фермиона в замагниченной плазме. Реальная часть массового оператора $\mathcal{R}_\Sigma^s(p)$ и $\mathcal{I}_\Sigma^s(p)$ определяет изменение закона дисперсии фермиона в присутствии замагниченной плазмы. Для случая сильного магнитного поля $B \gtrsim B_e$ без учета плазмы лидирующий вклад в сдвиг массы фермиона, находящегося на основном уровне Ландау, описывается квадратом логарифмической функцией [26]:

$$\Re^{s}_{\Sigma}(p) = \frac{\alpha}{4\pi} m_f \ln^2(2\beta/m_f^2). \tag{26}$$

Даже для достаточно больших значений магнитного поля эта добавка является несущественной.

3.2 Пропагатор фотона

4 Резонансные двухвершинные процессы

4.1 Резонанс на виртуальном фотоне.

4.2 Резонанс на виртуальном электроне (фермионе).

4.3 Резонанс на виртуальном электроне и виртуальном фотоне.

5 Сингулярности в фазовых объемах одновершинных процессов и методы их устранения.

6 Заключение

Список литературы

[1] Thompson C., Duncan R. C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - I. Radiative mechanism for outbursts // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1995. Vol. 275. P. 255–300.

[2] Thompson C., Duncan R. C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars. II. Quiescent neutrino, X-Ray, and Alfven wave emission // Astrophys. J. 1996. Vol. 473. P. 322–342.

[3] Thompson C., Lyutikov M., Kulkarni S. R. Electrodynamics of magnetars: implications for the persistent x-ray emission and spindown of the soft gamma repeaters and anomalous x-ray pulsars // Astrophys. J. 2002. Vol. 574, no. 1. P. 332–355.

[4] Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Влияние фотон-нейтринных процессов на остывание магнитара // ЖЭТФ. 2008. Т. 134, № 4. С. 627–636.

[5] Бисноватый-Коган Г. С., Чечеткин В. М. Неравновесные оболочки нейтронных звезд, их роль в поддержании рентгеновского излучения и нуклеосинтезе // Усп. физ. наук. 1979. Т. 127, № 2. С. 263–296.

[6] Kouveliotou C. et al. An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft gamma-ray repeater SGR 1806-20. // Nature. 1998. Vol. 393. P. 235–237.

[7] Kouveliotou C., Strohmayer T., Hurley K. et al. Discovery of a magnetar associated with the soft gamma repeater SGR 1900+14 // Astrophys. J. 1999. Vol. 510. P. L115–118.

[8] Gavriil F. P., Kaspi V. M., Woods P. M. Magnetar - like x-ray bursts from an anomalous x-ray pulsar // Nature. 2002. Vol. 419. P. 142–144.

[9] Ibrahim A. I., Safi-Harb S., Swank J. H. et al. Discovery of cyclotron resonance features in the soft gamma repeater SGR 1806-20 // Astrophys. J. 2002. Vol. 574. P. L51–L55.

[10] Ibrahim A. I., Swank J. H., Parke W. New evidence for proton cyclotron resonance in a magnetar strength field from SGR 1806-20 // Astrophys. J. 2003. Vol. 584. P. L17–L22.

[11] Olausen S. A., Kaspi V. M. The McGill magnetar catalog // Astrophys. J. Suppl. 2014. Vol. 212, no. 1. P. 6.

[12] Melrose D. B., Parle A. J. Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. I Electron States // Aust. J. Phys. 1983. Vol. 36. P. 755–774.

[13] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. Москва: Наука, 1983. 304 с.

[14] Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003. 120 p.

[15] Bhattacharya K., Pal P. B. Inverse beta decay of arbitrarily polarized neutrons in a magnetic field // Pramana J. Phys. 2004. Vol. 62. P. 1041–1058.

[16] Balantsev I. A., Popov Yu. V., Studenikin A. I. On the problem of relativistic particles motion in strong magnetic field and dense matter // J. Phys. 2011. Vol. A44. P. 255301 (1–13).

[17] Kuznetsov A., Mikheev N. Electroweak processes in external active media. 2013. Vol. 252. P. pp 1–271.

[18] Johnson M. H., Lippmann B. A. Motion in a constant magnetic field // Physical Review. 1949. Vol. 76, no. 6. P. 828–832.

[19] Соколов А. А., Тернов И. М. Синхротронное излучение. М.: Наука, 1966. 228 с.

[20] Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001. 784 с.

[21] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 1108 с.

[22] Шабад А. Е. Поляризация вакуума и квантового релятивистского газа во внешнем поле // Тр. ФИАН СССР "Поляризационные эффекты во внешних калибровочных полях". 1988. Т. 192. С. 5–152.

[23] Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A. Compton effect in strongly magnetized plasma // Int. J. Mod. Phys. 2009. Vol. A24. P. 3995–4008.

[24] Beloborodov A. M., Thompson C. Corona of magnetars // Astrophys. J. 2007. Vol. 657, no. 2. P. 967–993.

[25] Schwinger J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // Phys. Rev. 1951. — Jun. Vol. 82. P. 664–679.

[26] Jancovici B. Radiative Correction to the Ground-State Energy of an Electron in an Intense Magnetic Field // Phys. Rev. 1969. Vol. 187. P. 2275–2276.