1 Дифференциальное сечение в магнитном поле

Не нарушая общности мы будем рассматривать реакции вида $a + b \to c + d$. Здесь возможны следующие случаи:

1. В начальном и конечном состоянии присутствуют только электрически нейтральные частицы, например нейтрино и фотоны. Примером такого процесса может служить реакция $\gamma\gamma \to \nu\bar{\nu}$. В этом случае дифференциальное сечение такого процесса определяется также как в вакууме (см. например [1]) следующим образом

$$\mathrm{d}\sigma_{\gamma\gamma\to\nu\bar{\nu}} = \frac{\mathrm{d}W_{\gamma\gamma\to\nu\bar{\nu}}}{j}\,, \tag{1}$$

где $j = (q_1 q_2)/(\omega_1\omega_2 V)$ – плотность потока падающих частиц (фотонов) с 4-импульсами $q_{1\alpha} = (\omega_1, \mathbf{k}_1)$ и $q_{2\alpha} = (\omega_2, \mathbf{k}_2)$, $V = L_x L_y L_z$ – нормировочный объем,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_{\gamma\gamma\to\nu\bar{\nu}} &= \frac{|S_{\gamma\gamma\to\nu\bar{\nu}}|^2}{\tau}\,\frac{\mathrm{d}^3p_1\,V}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathrm{d}^3p_2\,V}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{(2\pi)^4\,\delta^4(q_1+q_2-p_1-p_2)}{4\omega_1\omega_2 V}\,|\mathcal{M}_{\gamma\gamma\to\nu\bar{\nu}}|^2\,\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\,\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \end{aligned} \tag{2}$$

– дифференциальная вероятность процесса. Здесь $S_{\gamma\gamma\to\nu\bar{\nu}}$ и $\mathcal{M}_{\gamma\gamma\to\nu\bar{\nu}}$ – S-матричный элемент и амплитуда процесса $\gamma\gamma \to \nu\bar{\nu}$, τ – время взаимодействия, $p_{1\alpha} = (E_1, \mathbf{p}_1)$ и $p_{2\alpha} = (E_2, \mathbf{p}_2)$ – 4-импульсы нейтрино и антинейтрино.

Как видно из (2), в дифференциальном сечении нормировочный объем сокращается и в этом случае мы получаем хорошо определенное выражение для сечения. Следует однако подчеркнуть, что для реакции $\gamma\gamma \to \nu\bar{\nu}$, с точки зрения астрофизических приложений, имеет смысл вычислять не сечение, а, например, нейтринную светимость – количество энергии, уносимое из единицы объема вещества за единицу времени.

2. Реакции, где в начальном и/или конечном состоянии присутствуют только заряженные частицы, например $e^+e^- \to \nu\bar{\nu}$, $e^-e^- \to e^-e^-$ и т.д. Нетрудно видеть, что определение сечения для процессов такого типа согласно (1) уже не будет корректным, поскольку в вероятности вместо нормировочного объема V стоит произведение $L_y L_z$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W_{e^+e^-\to\nu\bar{\nu}} &= \frac{|S_{e^+e^-\to\nu\bar{\nu}}|^2}{\tau}\,\frac{\mathrm{d}^3p_1\,V}{(2\pi)^3}\,\frac{\mathrm{d}^3p_2\,V}{(2\pi)^3} \\ &= \frac{(2\pi)^3\,\delta^3_{0,y,z}(p+p'-p_1-p_2)}{4EE'L_yL_z}\,|\mathcal{M}_{e^+e^-\to\nu\bar{\nu}}|^2\,\frac{\mathrm{d}^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\,\frac{\mathrm{d}^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $E = \sqrt{p_z^2 + m^2 + 2eBn}$ и $E' = \sqrt{p_z'^2 + m^2 + 2eBn'}$ – энергии электрона и позитрона. Следует отметить, что в процессах в магнитном поле с участием заряженных частиц, идущих на древесном уровне, x-компонента импульса не сохраняется (магнитное поле направлено вдоль оси z).

3. Процессы, где в начальном состоянии присутствуют как электрически заряженная частица, так и нейтральная частица, например $\gamma e \to \gamma e$. В этом случае вероятность процесса имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}W_{\gamma e\to\gamma e} &= \frac{|S_{\gamma e\to\gamma e}|^2}{\tau}\,\frac{\mathrm{d}p'_y\mathrm{d}p'_z\,L_yL_z}{(2\pi)^2}\,\frac{\mathrm{d}^3k'\,V}{(2\pi)^3} \\
&= \frac{(2\pi)^3\,\delta^3_{0,y,z}(p+q-p'-q')}{4E\omega V}\,|\mathcal{M}_{\gamma e\to\gamma e}|^2\,\frac{\mathrm{d}p'_y\mathrm{d}p'_z}{(2\pi)^2 2E'}\,\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3\omega'}
\end{aligned} \tag{4}$$

и сечение можно ввести согласно формуле (1), если выбрать плотность потока падающих частиц только в продольном, по отношению к магнитному полю, подпространстве следующим образом $j = (E\omega - p_z k_z)/(E\omega V)$. В формуле (4) $q_\alpha = (\omega, \mathbf{k})$ и $q'_\alpha = (\omega', \mathbf{k}')$ – импульсы начального и конечного фотонов, $E = \sqrt{p_z^2 + m^2 + 2eB\ell}$ и $E' = \sqrt{p_z'^2 + m^2 + 2eB\ell'}$ – энергии начального и конечного электронов.

Тем не менее, с точки зрения астрофизических приложений, чаще всего интерес представляет вычислить, например, длину свободного пробега фотона в равновесном электронном газе (или связанную с ней оптическую толщу) следующим образом $\lambda = W^{-1}_{\gamma e\to\gamma e}$. Здесь

$$\begin{aligned}
&W_{\gamma e\to\gamma e} = \frac{1}{2\omega L_x}\int \frac{\mathrm{d}p_y\mathrm{d}p_z}{(2\pi)^2 2E}\, f_E\, \frac{\mathrm{d}p'_y\mathrm{d}p'_z}{(2\pi)^2 2E'}\,(1-f_{E'})\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3 2\omega'}\,(1+f_{\omega'}) \\
&\times(2\pi)^3\,\delta^3_{0,y,z}(p+q-p'-q')\,|\mathcal{M}_{\gamma e\to\gamma e}|^2 \\
&= \frac{eB}{16(2\pi)^4\omega}\int |\,\mathcal{M}_{\gamma e\to\gamma e}\,|^2 \\
&\times f_E\,(1-f_{E'})\,(1+f_{\omega'})\delta(\omega(\mathbf{k})+E-\omega'(\mathbf{k}')-E')\frac{dp_z\,d^3k^{'}}{EE'\omega'}
\end{aligned} \tag{5}$$

– коэффициент поглощения фотона в комптоновском процессе, $\gamma e \to \gamma e$, записанный в системе, где электронный газ в целом покоится. Здесь $f_E = (1 + \exp[(E-\mu)/T])^{-1}$ – функция распределения электронов с температурой T и химическим потенциалом μ, $f_\omega = (\exp[\omega/T] - 1)^{-1}$ – равновесная функция распределения фотонов. Отметим, что только для нерелятивистского электронного газа мы можем записать $\lambda^{-1} \simeq n_e \sigma_{\gamma e\to\gamma e}$ [2], где n_e – концентрация электронов.

Из приведенных выше примеров следует, что в магнитном поле не удается единым (для всех процессов) образом ввести понятие дифференциального сечения как инвариантной величины относительно преобразований Лоренца вдоль магнитного поля.

Список литературы

[1] Берестецкий, В.Б. Квантовая электродинамика / В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. – М.: Наука, 1989. – 728 с.

[2] D. A. Rumyantsev and M. V. Chistyakov, *Int. J. Mod. Phys. A* **24**, 3995 (2009).