

Резонансные процессы в активной среде

Д.А. Румянцев*, Д.М. Шленев** А.А. Ярков***

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия

В работе рассмотрены различные квантовые процессы с учетом резонанса на виртуальном фермионе.

*E-mail: rda@uniyar.ac.ru

**E-mail: ultrasickdoom@gmail.com

***E-mail: a12l@mail.ru

1 Введение

Нейтронные звезды, обладая набором экстремальных характеристик, являются природными физическими лабораториями и одними из самых интересных объектов, известных в науке. Особое внимание ученых привлекают радиопульсары и магнитары, обладающие магнитными полями колоссальной напряженности, к которой очень сложно приблизиться в земных условиях. У магнитного поля имеется характерное значение, называемое критическим, $B_e = m^2/e \simeq 4.41 \times 10^{13}$ Гс¹, при приближении к которому становится необходимым учитывать квантовые эффекты при движении в нем частиц. В радиопульсарах с магнитными полями порядка 10^{12} Гс и магнитарах – до 10^{16} Гс [1–3] такие условия выполняются.

Кроме сильных магнитных полей, в магнитосфере как радиопульсаров, так и магнитаров присутствует достаточно горячая и плотная электрон-позитронная плазма [1]. Магнитное поле и плазма составляют две компоненты внешней активной среды, присутствие которой значительно изменяет характеристики протекающих в ней микропроцессов. Во-первых, активная среда может изменять закон дисперсии находящихся в ней частиц, что приводит к изменению кинематики процессов и вследствие чего могут открываться реакции и каналы реакций, которые запрещены в вакууме. Во-вторых, активная среда влияет на амплитуды процессов, в результате чего они могут приобретать резонансный характер. Именно эта составляющая влияния внешней активной среды рассматривается в данном обзоре. Вследствие резонанса вклад микропроцессов в макроскопические характеристики астрофизических процессов, такие как светимость и скорость изменения количества частиц, может многократно увеличиваться.

В сильном магнитном поле поперечная составляющая импульса фермиона квантуется. В таком случае энергия фермиона определяется так называемым

¹В работе используется естественная система единиц: $\hbar = c = k = 1$, m_e – масса электрона, $e > 0$ – элементарный заряд.

уровнем Ландау n и проекцией импульса вдоль магнитного поля p_z :

$$E_n = \sqrt{m_f^2 + p_z^2 + 2|e_f|Bn}, \quad (1)$$

где e_f и m_f - заряд и масса фермиона. Состояние с $n = 0$, в котором фермион движется вдоль силовой линии магнитного поля, называется основным уровнем Ландау.

Можно выделить несколько ситуаций в иерархии параметров среды: магнитного поля, температуры T , химического потенциала μ и энергии фермионов и фотонов, участвующих в реакциях. Предел сильного поля, когда фермионы будут занимать основной уровень Ландау, осуществляется при выполнении условия [4]:

$$\frac{B^2}{8\pi} \gg \frac{\pi^2(n_{e-} - n_{e+})^2}{eB} + \frac{eBT^2}{12}, \quad (2)$$

где n_{e-} и n_{e+} - концентрации электронов и позитронов плазмы. Такие условия могут, в частности, реализовываться в модели вспышки источников мягких повторяющихся гамма-всплесков (SGR) [1, 5], которые, как показывают недавние наблюдения, можно отождествить с магнитарами [6–11].

Даже в магнитарных полях условие 2, при котором магнитное поле является доминирующим параметром, перестает выполняться при высоких значениях плотности плазмы $\rho \geq 10^8$ г/см³. Такая плотность может достигаться в границе между внешней и внутренней корой магнитара. В результате реакции, в которых имеются фермионы в промежуточном состоянии, могут приобретать резонансный характер. Это происходит вследствие того, что начинают возбуждаться высшие уровни Ландау виртуальных фермионов. Они становятся реальными с определенным законом дисперсии, садятся на массовую поверхность. В этом состоянии они являются нестабильными и распадаются за время, обратно пропорциональное вероятности их перехода на низшие уровни Ландау. Эффективность реакции при этом заметно увеличивается, что может иметь наблюдаемые астрофизические следствия.

Резонанс на фотоне наблюдается аналогичным образом: в активной среде поляризационный оператор фотона имеет реальную часть, которую можно

рассматривать как эффективную массу фотона. В кинематической области, в которой квадрат 4-импульса виртуального фотона будет равен реальной части его поляризационного оператора, виртуальный фотон станет реальным и нестабильным.

Настоящая статья организована следующим образом. В Разделе 2 обсуждаются различные методы представления решения уравнения Дирака во внешнем магнитном поле. В разделе 3 рассматриваются радиационные поправки в магнитном поле к массовому оператору частиц в промежуточном состоянии и получается выражение для пропагатора. Раздел 4 посвящен различным двухвершинным процессам, в которых может реализовываться резонанс на виртуальном фермионе и/или фотоне. В Разделе 5 описываются сингулярности в фазовых объемах одновершинных процессов и методы их устранения.

2 Представление решений уравнения Дирака во внешнем магнитном поле

В этом разделе обсудим влияние активной среды на волновые функции присутствующих в ней частиц: фермионов и фотонов. В случае фермионов искомые нами волновые функции являются решением уравнения Дирака в присутствии внешнего постоянного однородного магнитного поля? направленного вдоль оси z :

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu + e_f A_\mu\gamma^\mu - m_f)\Psi_{p,n}^s(X) = 0, \quad (3)$$

где A_μ – 4-вектор потенциала электромагнитного поля, который в калибровке Ландау имеет вид $A^\mu = (0, 0, xB, 0)$. Решением этого уравнения является набор собственных функций любого оператора, который коммутирует с гамильтонианом Дирака во внешнем магнитном поле: $H = \gamma_0(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}) + m_f\gamma_0 + e_f A_0$, где $\mathbf{P} = -i\boldsymbol{\Delta} - e_f\mathbf{A}$. Существует два распространенных подхода к выбору этих операторов, подробное описание которых представлено в работах [12–17]. При первом из них, предложенным Джонсоном и Липпманом [18], решения

выбираются как собственные функции оператора обобщенной спиральности, $T_0 = \frac{1}{m_f}(\mathbf{\Sigma}\mathbf{P})$, где $\mathbf{\Sigma} = -\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\gamma_5$ – трехмерный оператор спина. При этом две верхние компоненты биспиноров соответствуют состояниям фермиона с проекцией спина на направление магнитного поля, равной $1/2$ и $-1/2$.

Другой подход предложен Соколовым и Терновым [19]. Он состоит в выборе волновых функций как собственных функций ковариантного оператора μ_z , который строится следующим образом:

$$\hat{\mu}_z = m_f \Sigma_z - i\gamma_0\gamma_5 [\mathbf{\Sigma} \times \mathbf{P}]_z . \quad (4)$$

Его можно получить непосредственно из введенного в работе [19] обобщенного оператора спина, являющегося тензором третьего ранга, который можно записать в координатном представлении следующим образом:

$$F_{\mu\nu\lambda} = -\frac{i}{2} (P_\lambda \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} + \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} P_\lambda) , \quad (5)$$

где $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)/2$, и $P_\lambda = i\partial_\lambda - e_f A_\lambda = (i\partial_0 - e_f A_0, -i\boldsymbol{\nabla} - e_f \mathbf{A})$ – оператор обобщенного 4-импульса. Заметим, что в работе [19] ковариантные билинейные формы были построены из матриц Дирака в обкладках биспиноров ψ^\dagger и ψ , тогда как в современной литературе (см., например [20]) билинейные формы строятся из матриц Дирака в обкладках биспиноров $\bar{\psi}$ и ψ . Из пространственных компонент $F_{\mu\nu 0}$ оператора (5) можно построить следующий векторный оператор:

$$\hat{\mu}_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk0} , \quad (6)$$

где ε_{ijk} – тензор Леви-Чивита. Построенный таким образом объект (6) имеет смысл оператора поляризации [12, 19]. Его можно представить в виде:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = m_f \mathbf{\Sigma} + i\gamma_0\gamma_5 [\mathbf{\Sigma} \times \hat{\mathbf{P}}] . \quad (7)$$

В нерелятивистском пределе оператор (7), отнесенный к квадрату массы фермиона: $\hat{\boldsymbol{\mu}}/m_f^2$, переходит в обычный оператор Паули для магнитного момента [21], который имеет явную физическую интерпретацию.

Решения уравнения Дирака в представлении Джонсона и Липпмана широко используются в литературе (см. например [22–27]). Однако эти функции обладают рядом недостатков, которые проявляются при расчете конкретных характеристик процессов с двумя и более вершинами. Так, эти функции некорректно описывают спиновую зависимость конечной ширины распада промежуточного состояния, что приводит к неверным результатам вблизи резонансов, как было показано в работах [28, 29]. Кроме того, лоренц-инвариантностью будет обладать только квадрат модуля амплитуды, просуммированный по всем поляризациям фермиона, а не парциальные вклады в него.

С другой стороны, использование функций, предложенных Соколовым и Терновым, правильно описывает сечение процессов вблизи резонанса, а также позволяет найти парциальные вклады в амплитуду каждого поляризационного состояния частиц в отдельности, которые будут иметь лоренц-инвариантную структуру. По этой причине далее в этом разделе приведем подробное их описание.

Уравнение для собственных функций оператора 4 имеет следующий вид:

$$\hat{\mu}_z \Psi_{p,n}^s(X) = s M_n \Psi_{p,n}^s(X), \quad (8)$$

где квантовое число $s = \pm 1$ определяет проекцию спина вдоль направления магнитного поля.

Как уже упоминалось во Введении, состояния фермиона квантуются по энергетическим состояниям, которые называются уровнями Ландау:

$$E_n = \sqrt{p_z^2 + M_n^2}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (9)$$

Здесь введены обозначения $M_n = \sqrt{2\beta n + m_f^2}$, $\beta = |e_f|B$. Каждое состояние является бесконечно вырожденным по p_z и дважды вырожденным по s , кроме состояния $n = 0$, где возможно лишь состояние $s = -1$. Решения уравнения Дирака 3 могут быть представлены следующим образом:

$$\Psi_{p,n}^s(X) = \frac{e^{-i(E_n X_0 - p_y X_2 - p_z X_3)} U_n^s(\xi)}{\sqrt{4E_n M_n (E_n + M_n)(M_n + m_f) L_y L_z}}, \quad (10)$$

где

$$\xi(X_1) = \sqrt{\beta} \left(X_1 - \eta \frac{p_y}{\beta} \right). \quad (11)$$

Далее, используя обозначение для определения знака заряда фермиона $\eta = e_f/|e_f|$, становится удобным представить биспиноры $U_n^s(\xi)$ в виде отдельной суммы биспиноров соответствующих положительным и отрицательным зарядам $U_{n,\eta}^s(\xi)$:

$$U_n^s(\xi) = \frac{1-\eta}{2} U_{n,-}^s(\xi) + \frac{1+\eta}{2} U_{n,+}^s(\xi), \quad (12)$$

где

$$U_{n,-}^-(\xi) = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2\beta n} p_z V_{n-1}(\xi) \\ (E_n + M_n)(M_n + m_f)V_n(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_{n-1}(\xi) \\ -p_z(M_n + m_f)V_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$U_{n,-}^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_n + M_n)(M_n + m_f)V_{n-1}(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta n} p_z V_n(\xi) \\ p_z(M_n + m_f)V_{n-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$U_{n,+}^-(\xi) = \begin{pmatrix} i\sqrt{2\beta n} p_z V_n(\xi) \\ (E_n + M_n)(M_n + m_f)V_{n-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_n(\xi) \\ -p_z(M_n + m_f)V_{n-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$U_{n,+}^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_n + M_n)(M_n + m_f)V_n(\xi) \\ i\sqrt{2\beta n} p_z V_{n-1}(\xi) \\ p_z(M_n + m_f)V_n(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_{n-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

$V_n(\xi)$ – нормированные функции гармонического осциллятора, которые следующим образом выражаются через полиномы Эрмита $H_n(\xi)$ [30]:

$$V_n(\xi) = \frac{\beta^{1/4} e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\xi). \quad (17)$$

Далее эти решения уравнения Дирака (10) будут использованы для получения пропагаторов фермионов в разделе 3.

3 Представление пропагаторов с учетом мнимой части

3.1 Пропагатор фермиона

В диаграммной технике Фейнмана, которая широко применяется для расчета различных физических величин, в качестве одного из объектов выступают внутренние линии, соответствующие виртуальным частицам или промежуточным состояниям. "Виртуальность" частицы означает нарушение у этой частицы релятивистского соотношения (9). В этом разделе мы опишем представление пропагаторов фермионов во внешнем магнитном поле с учетом радиационных поправок к массовому оператору и покажем, как может реализовываться резонанс в квантовых процессах, содержащих фермионы в промежуточном состоянии.

Пропагатор в формализме собственного времени Фока [31] находится как решение уравнения Дирака с δ -функцией в правой части, которая также называется функцией Грина для уравнения Дирака:

$$(i\partial_\mu \gamma^\mu + e_f A_\mu \gamma^\mu - m_f) S(X, X') = \delta(X - X'). \quad (18)$$

Пропагатор, который получается из этого уравнения, имеет достаточно громоздкий вид. Поэтому удобно воспользоваться различными приближениями. Например, приближение слабого магнитного поля особенно актуально для W -бозонов, так как критическое поле для этих частиц, равное примерно $m_W^2/e \simeq 10^{24}$ Гс, значительно превышает магнитные поля, существующие в природе. Кроме того, для частиц, обладающих высоким удельным зарядом,

$|e_f|/m_f$, удобно рассматривать пропагатор в виде разложения по уровням Ландау:

$$S(X, X') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} S_n^s(X, X'). \quad (19)$$

Для построения пропагатора можно воспользоваться полевыми операторами:

$$\Psi(X) = \sum_{n,p_y,p_z,s} (a_{n,p}^s \Psi_{n,p,+}^s(X) + b_{n,p}^{\dagger s} \Psi_{n,p,-}^s(X)), \quad (20)$$

где a – оператор уничтожения фермиона, b^\dagger – оператор рождения фермиона, Ψ_+ и Ψ_- соответствуют решениям уравнения Дирака с положительной и отрицательной энергией соответственно. Стандартным образом пропагатор вычисляется как разность хронологически упорядоченного и нормально упорядоченного произведения полевых операторов:

$$S(X, X') = T(\Psi(X)\bar{\Psi}(X')) - \mathcal{N}(\Psi(X)\bar{\Psi}(X')). \quad (21)$$

Подставляя точные решения уравнения Дирака (10) и вводя для удобства новое обозначение:

$$\phi_{p,n}^s(X_1) = \frac{U_n^s[\xi(X_1)]}{\sqrt{2M_n(E_n + M_n)(M_n + m_f)}}, \quad (22)$$

где U_n^s определяется формулой (12), можно представить вклад в разложение пропагатора от уровня Ландау n и поляризационного состояния s следующим образом:

$$S_n^s(X, X') = \int \frac{dp_0 dp_y dp_z}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(p(X-X'))_{\parallel} + ip_y(X_2-X'_2)}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 - \mathcal{R}_{\Sigma}^s(p) + i\mathcal{I}_{\Sigma}^s(p)} \phi_{p,n}^s(X_1) \bar{\phi}_{p,n}^s(X'_1), \quad (23)$$

где $\mathcal{R}_{\Sigma}^s(p)$ и $\mathcal{I}_{\Sigma}^s(p)$ – реальная и мнимая части массового оператора фермиона. Для их получения требуется вычислить радиационные поправки к массе фермиона в замагниченной плазме. Реальная часть массового оператора $\mathcal{R}_{\Sigma}^s(p)$ определяет изменение закона дисперсии фермиона в присутствии замагниченной плазмы. В слабых магнитных полях, $B \ll B_e$, она определяется

отношением [32]:

$$\Re_{\Sigma}^s(p) = \frac{4\alpha m_f}{3\pi} \varkappa^2 \left[\ln \varkappa^{-1} + C + \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{33}{16} \right], \quad \varkappa \ll 1, \quad (24)$$

где $C = 0.577\dots$ - постоянная Эйлера, динамический параметр \varkappa вводится следующим образом:

$$\varkappa = \frac{1}{m_f B_e} [-(F_{\mu\nu} p_{\nu})^2]^{1/2}. \quad (25)$$

Для случая сильного магнитного поля, $B \gtrsim B_e$, без учета плазмы лидирующий вклад в сдвиг массы фермиона, находящегося на основном уровне Ландау, описывается квадратом логарифмической функции [33]:

$$\Re_{\Sigma}^s(p) = \frac{\alpha}{4\pi} m_f \ln^2(2\beta/m_f^2). \quad (26)$$

Из (24) и (26) следует, что даже для достаточно больших значений магнитного поля вплоть до 10^{16} Гс эта поправка к массе фермиона имеет величину порядка постоянной тонкой структуры α [13, 14] и является несущественной.

Резонанс на виртуальном фермионе будет наблюдаться, когда в знаменателе пропагатора (23) реальная часть обращается в ноль. Тогда виртуальная частица становится реальной, то есть приобретает определенный закон дисперсии $p_{\parallel}^2 - M_n^2 = 0$. Анализ кинематики показывает, что это возможно только тогда, когда виртуальный фермион занимает один из высших уровней Ландау, $n > 0$. Частица при этом является нестабильной, и время ее жизни, в нерезонансной области предполагающееся бесконечно большим, определяется мнимой частью массового оператора, $\mathcal{I}_{\Sigma}^s(p)$, учет которой становится необходимым. Она может быть получена с помощью оптической теоремы и представлена в следующем виде [34, 35]:

$$\Im_{\Sigma}^s(p) = -\frac{1}{2} p_0 \Gamma_n^s, \quad (27)$$

где Γ_n^s - полная ширина поглощения фермиона, находящегося в поляризованном состоянии s и занимающего n -й уровень Ландау. Полная ширина

изменения состояния фермиона может быть выражена через ширину рождения фермиона [36]:

$$\Gamma_n^s = \Gamma_n^{(abs)s} + \Gamma_n^{(cr)s} \simeq \Gamma_n^{(cr)s} \left[1 + e^{(E_n'' - \mu)/T} \right], \quad (28)$$

где $\Gamma_n^{(abs)s}$ и $\Gamma_n^{(cr)s}$ – ширины поглощения и рождения фермиона соответственно, E_n'' – энергия виртуального фермиона. Введенный таким образом пропагатор с учетом конечной ширины изменения состояния фермиона позволяет корректно рассчитывать сечения квантовых процессов в резонансной области.

3.2 Пропагатор фотона

Пропагатор фотона удобно представить в виде разложения по собственным векторам и собственным значениям поляризационного оператора $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(q)$. Этот оператор рассматривался в ряде работ [37–40]. В постоянном магнитном поле поляризационный оператор можно представить в виде разложения по базису из собственных векторов [39], построенных из обезразмеренного тензора электромагнитного поля, $\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$, и 4-вектора импульса фотона, q_α :

$$\begin{aligned} b_\mu^{(1)} &= (\varphi q)_\mu, & b_\mu^{(2)} &= (\tilde{\varphi} q)_\mu, \\ b_\mu^{(3)} &= q^2 (\Lambda q)_\mu - q_\mu q_\perp^2, & b_\mu^{(4)} &= q_\mu, \end{aligned} \quad (29)$$

где $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Собственные векторы и собственные значения поляризационного оператора определяют поляризационные свойства фотонов. При этом физически наблюдаемыми будут три поляризационных состояния фотона, так как моду, соответствующую вектору $b_\mu^{(4)}$, можно устранить с помощью калибровочных преобразований [37].

Строго говоря, поляризационный оператор фотона с учетом плазмы, построенный в виде разложения по векторам (29), уже не будет иметь диагональный вид. Диагональное представление поляризационный оператор примет в базисе собственных векторов $r_\alpha^{(\lambda)}$ в замагниченной плазме с собствен-

ными значениями $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ [37, 41–43]:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(q) = \sum_{\lambda=1}^3 \mathcal{P}^{(\lambda)}(q) \frac{r_{\alpha}^{(\lambda)} (r_{\beta}^{(\lambda)})^*}{(r^{(\lambda)})^2}, \quad r_{\beta}^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^3 A_i^{(\lambda)} b_{\beta}^{(i)}, \quad (30)$$

где $A_i^{(\lambda)}$ – некоторые комплексные коэффициенты.

Однако в случае, когда магнитное поле является наибольшим параметром задачи $\beta \gg T^2, \omega^2$ (т.н. поледоминирующая среда) и присутствует зарядово-симметричная плазма, $\mu = 0$, собственные векторы $r_{\alpha}^{(\lambda)}$ и собственные значения $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ оператора поляризации в плазме, состоящей из электронов и позитронов, находящихся на основном уровне Ландау, в однопетлевом приближении примут вид [37]:

$$r_{\alpha}^{(1)} = -2q_{\perp}^2 b_{\alpha}^{(1)} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad r_{\alpha}^{(3)} = O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad (31)$$

$$r_{\alpha}^{(2)} = b_{\alpha}^{(2)} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right). \quad (32)$$

$$\mathcal{P}^{(1)}(q) = \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \mathcal{V} - \frac{\alpha}{3\pi} q_{\perp}^2 + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad (33)$$

$$\mathcal{P}^{(2)}(q) = \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \mathcal{V} + \frac{2\alpha}{\pi} \beta \mathcal{D} + O\left(\frac{1}{\beta}\right). \quad (34)$$

$$\mathcal{P}^{(3)}(q) = O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad (35)$$

где

$$\mathcal{D} = -\mathcal{J}_1(q_{\parallel}) - H\left(\frac{q_{\parallel}^2}{4m_e^2}\right), \quad (36)$$

$$\mathcal{J}_1(q_{\parallel}) = 2q_{\parallel}^2 m_e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{E} \frac{f_{-}(p) + f_{+}(p)}{q_{\parallel}^4 - 4(pq_{\parallel})^2}, \quad (37)$$

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{z}{1-z}} - 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (38)$$

$$H(z) = -\frac{1}{2\sqrt{z(z-1)}} \ln \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z} - \sqrt{z-1}} - 1 + \frac{i\pi}{2\sqrt{z(z-1)}}, \quad z > 1, \quad (39)$$

$f_{\pm}(p) = [\exp[E/T] - 1]^{-1}$ – функция распределения электронов и позитронов плазмы при $\mu = 0$,

$$\mathcal{V} = \ln(B/B_e) - 1.792 + \frac{3}{2} \int_0^1 dx (1-x^2) \ln \left[1 - \frac{q^2}{4m_e^2} (1-x^2) \right]. \quad (40)$$

Такие условия имеют место в большинстве моделей магнитосфер радиопульсаров и магнитаров [44].

Из выражений (31)–(35) следует, что фотон в пределе сильного магнитного поля, а также зарядово-симметричной плазмы будет описываться такими же векторами поляризации, как и в чистом магнитном поле. Представим их в том виде, в котором это было сделано в работе [45]:

$$\varepsilon_{\mu}^{(1)} = \frac{(q\varphi)_{\mu}}{\sqrt{q_{\perp}^2}}, \quad \varepsilon_{\mu}^{(2)} = \frac{(q\tilde{\varphi})_{\mu}}{\sqrt{q_{\parallel}^2}}. \quad (41)$$

Эти поляризационные состояния мы будем называть мода 1 и мода 2 соответственно. В литературе используются разные обозначения для этих мод. Например, в работе [46] это моды \parallel и \perp в чистом магнитном поле, в работе [47] эти состояния соответствуют X- и O-модам, а в работе [2] – E- и O-модам.

Как известно [37], закон дисперсии для фотона моды 1 в пределе сильного магнитного поля мало отличается от закона дисперсии в замагниченном вакууме $q^2 = 0$. С другой стороны, для фотона моды 2 дисперсия будет значительно отличаться от вакуумного закона дисперсии и будет определяется

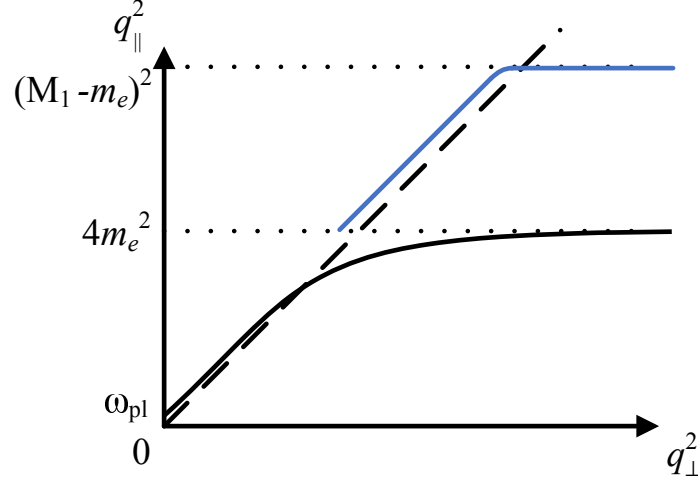


Рис. 1: Закон дисперсии моды 2 в зарядово-симметричной плазме в пределе сильного магнитного поля, $B \gtrsim B_e$, изображен сплошными линиями. Штриховой линией изображен вакуумный закон дисперсии, который практически соответствует дисперсии моды 1. Дисперсионные кривые следует продолжить схожим образом на область $q_{\parallel}^2 > (M_1 - m_e)^2$

соотношением

$$q^2 - \mathcal{P}^{(2)}(q) = 0. \quad (42)$$

Также следует отметить, что закон дисперсии значительно отличается от вакуумного для моды 1 и 2 в окрестности так называемых циклотронных резонансов:

$$q_{\parallel}^2 = (M_n \pm M_{n'})^2 \quad (43)$$

из-за наличия корневых сингулярностей в собственных значениях поляризационного оператора, $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ (за исключением точки $q_{\parallel}^2 = 4m_e^2$ для моды 1). Поэтому в этих областях становится важным учет радиационных поправок к собственным значениям поляризационного оператора в замагниченной плазме. Этот учет приводит к перенормировке волновых функций фотона

$$\varepsilon_{\alpha}^{(\lambda)}(q) \rightarrow \varepsilon_{\alpha}^{(\lambda)} \sqrt{Z_{\lambda}}, \quad Z_{\lambda}^{-1} = 1 - \frac{\partial \mathcal{P}^{(\lambda)}(q)}{\partial \omega^2}. \quad (44)$$

Проведенный анализ позволяет качественно изобразить дисперсию фотона моды 2 (см. рис. 1). Следует отметить, что в плазме существует область с $q^2 > 0$ ниже первого циклотронного резонанса $q_{\parallel}^2 = 4m_e^2$. Это связано с наличием плазменной частоты у электронов и позитронов среды, которую можно

определить из дисперсионного уравнения 42:

$$\omega_{pl}^2 - \mathcal{P}^{(2)}(\omega_{pl}, \mathbf{k} \rightarrow 0) = 0. \quad (45)$$

Наличие плазменной частоты приводит к изменению кинематики процессов, например, становится кинематически возможен канал расщепления фотона $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$ в то время, как каналы $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$, $\gamma_2 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$ в плазме подавлены [48]. Для фотона моды 1 значение ω_{pl} также присутствует, но оно пренебрежимо мало.

Пропагатор в координатном пространстве можно представить следующим образом:

$$G_{\mu\nu}(X) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} G_{\mu\nu}(q) e^{-iqX}, \quad (46)$$

где

$$G_{\mu\nu}(q) = \sum_{\lambda=1}^3 \frac{b_{\mu}^{(\lambda)} b_{\nu}^{(\lambda)}}{(b^{(\lambda)})^2} \cdot \frac{1}{q^2 - \mathcal{P}^{(\lambda)}(q)} \quad (47)$$

– фурье-образ пропагатора, который можно получить из уравнения Дайсона:

$$(q^2 g_{\mu\rho} - q_{\mu} q_{\rho}) D^{\rho}_{\nu}(q) - \mathcal{P}_{\mu\rho}(q) D^{\rho}_{\nu}(q) = g_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2}. \quad (48)$$

Таким образом, поведение пропагатора фотона определяется аналитическими свойствами поляризационного оператора.

4 Резонансные двухвершинные процессы

4.1 Резонанс на виртуальном фотоне.

4.2 Резонанс на виртуальном электро-не (фермионе).

Двухвершинный процесс, в котором имеется внутренняя электронная линия является комптоновский процесс. Этому процессу посвящено огромное количество работ. Здесь отметим наиболее важные из них. Так, комптоновское сечение рассеяния в магнитном поле без плазмы в нерелятивистском пределе было получено в работах [?, 49] для случая, когда начальный и конечный

электроны занимают основной уровень Ландау. Для релятивистского случая комптоновский процесс в магнитном поле рассматривался в работах [?, ?]. Однако полученные выражения для сечения комптоновского процесса являются достаточно сложными для численных расчетов. Поэтому в работе [25] было получено приближенное выражение для сечения в случае, когда электроны движутся вдоль магнитного поля, что важно в приложении к физике радиопульсаров и магнитаров.

Реакция комптоновского процесса в нерелятивистском пределе как в сильном магнитном поле, так и в замагниченной плазме рассматривалась в работе [?]. Однако при значениях магнитного поля $B > 10^{12}$ Гс учет релятивистских эффектов становится существенным, что было отмечено в ряде работ [29, 45, 47, 50].

В результатах, полученных в работах [29, 45, 47, 50], сечение рассеяния становится бесконечным на циклотронных резонансах вследствие предположения о большом времени жизни виртуальных частиц. Поэтому полученные в этих работах результаты будут справедливы только в нерезонансной области энергии фотонов. Для точного вычисления сечения комптоновского рассеяния вблизи циклотронных резонансов требуется ввести полную ширину изменения состояния электрона. В случае томсоновского рассеяния [?], когда присутствует лишь одна резонансная частота и сечение не зависит от спина, ввести полную ширину относительно просто [?]. Однако при рассмотрении комптоновского рассеяния на высоких энергиях сильных магнитных полях, требуется использовать релятивистскую квантовую электродинамику. В результате выражение для сечения становится очень громоздким, поскольку имеется бесконечное число резонансов, содержащихся в сумме по всем промежуточным виртуальным состояниям. Изначально для учета конечных резонансных пиков использовались усредненные по спину ширины распада [25]. Как было указано в работе [29], такой подход не является точным, поскольку усреднение по спину некорректно учитывает спиновую зависимость временного распада, что приводит к неверному значению в точке резонанса. Сечение

рассеяния с правильным учетом ширины распада виртуальных промежуточных состояний, учитывающее зависимость от спина, было представлено в работе [47]. Однако полное сечение комптоновского рассеяния представляет собой громоздкое выражение, что затрудняет использование его, например, в моделях переноса излучения. Для решения этой задачи было выполнено множество упрощений. Так, в работе [25] была использована аппроксимация сечения рассеяния с учетом резонанса в ультрарелятивистском пределе для случая сильного магнитного поля $B > 0.1B_e$. В точке циклотронного резонанса виртуальный электрон становится реальным, поэтому комптоновское рассеяние становится процессом первого порядка. В работе [23] исследовался вопрос аппроксимации комптоновского сечения с помощью одновершинного процесса поглощения для магнитных полей $B \sim 0.1B_e$. Различие между одновершинным процессом поглощения и комптоновским процессом становится существенным на высших циклотронных резонансах из-за вклада нерезонансного рассеяния. Особенно существенно это при малых углах между импульсом фотона и направлением магнитного поля, поскольку в этом случае резонансы уширяются. Также в сильных магнитных полях аппроксимация одновершинным процессом работает хуже, так как высота резонансов убывает с увеличением его номера.

Иной подход к аналитическому рассмотрению комптоновского процесса с учетом резонанса на виртуальном электроде является предположение узкого резонансного пика. Такой метод рассматривался в работе [51]. Как было показано в данной работе, предположение узкого резонансного пика позволяет аппроксимировать область резонанса дельта-функцией, что позволяет упростить, например, решение задачи переноса излучения.

В настоящей главе рассматривается процесс рассеяния фотонов на электронах сильно замагниченной (величина магнитного поля является максимальным параметром, то есть $eB = \beta \gg T^2, \omega^2, E^2$) равновесной плазмы с нулевым химическим потенциалом, $\mu=0$. Предлагается для случая узких резонансных пиков использовать δ -функциональную аппроксимацию.

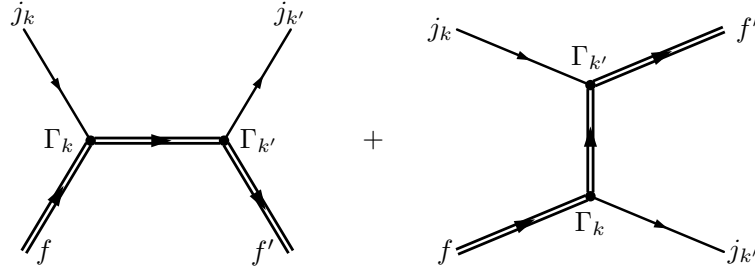


Рис. 2: Диаграммы Фейнмана для реакции $j f \rightarrow j' f'$. Двойные линии означают, что влияние внешнего поля на начальное и конечное состояния фермионов и на фермионный пропагатор учтено точно.

Результаты, полученные в данном разделе были взяты из работы [51]. Обобщенная амплитуда перехода $j f \rightarrow j' f'$. Для этого построим лагранжиан взаимодействия обобщенного тока j с фермионами f :

$$\mathcal{L}(x) = \sum_k g_k [\bar{\psi}_f(x) \Gamma_k \psi_f(x)] J_k(x), \quad (49)$$

где $\psi_f(x)$ – операторы фермионного поля, а индекс $k = S, P, V, A$ соответствует скалярным, псевдоскалярным, векторным и аксиальным вершинам с матрицами Γ_k : $\Gamma_S = 1$, $\Gamma_P = \gamma_5$, $\Gamma_V = \gamma_\alpha$, $\Gamma_A = \gamma_\alpha \gamma_5$, соответствующим операторам обобщенных токов $J_k(x)$ (J_S , J_P , $J_{V\alpha}$ или $J_{A\alpha}$), а также константам взаимодействия g_k .

С использованием лагранжиана (49) можно задать обширный набор взаимодействий. Так как в данной главе будет рассматриваться комптоновский процесс рассеяния фотона на электроны, то необходимо построить лагранжиан электромагнитного взаимодействия, взяв $k = V$, $g_V = -e_f$, $\Gamma_V J_V = \gamma^\mu A_\mu$, A^μ – четырехмерный потенциал квантованного электромагнитного поля:

$$\mathcal{L}(X) = -e_f [\bar{\psi}_f(X) \gamma^\mu A_\mu(X) \psi_f(X)]; \quad (50)$$

Перед тем, как перейти к исследованию комптоновского процесса рассеяния фотона на электронах, рассмотрим задачу для обобщенного процесса рассеяния тока j на некоторых фермионных состояниях, $j f \rightarrow j' f'$. Данный процесс в древесном приближении описывается диаграммами Фейнмана, представленными на рис. 2. Соответствующий S -матричный элемент, с

учетом лагранжиана (49) может быть представлен в виде:

$$S_{k'k}^{s's} = -g_k g_{k'} \int d^4X d^4Y \langle J_k(X) J_{k'}(Y) \rangle \left[\bar{\Psi}_{p',\ell'}^{s'}(Y) \Gamma_{k'} \hat{S}(Y, X) \Gamma_k \Psi_{p,\ell}^s(X) \right] + \\ + (J_k, \Gamma_k \leftrightarrow J_{k'}, \Gamma_{k'}). \quad (51)$$

Здесь $p^\mu = (E_\ell, \mathbf{p})$ и $p'^\mu = (E_{\ell'}, \mathbf{p}')$ - четырехмерные векторы энергии-импульса начального и конечного фермиона, находящихся на произвольных уровнях Ландау ℓ и ℓ' соответственно, $\Psi_{p,\ell}^s(X)$ - волновые функции фермионов в присутствии внешнего магнитного поля, s и s' обозначают поляризационные состояния начального и конечного фермиона соответственно, $\hat{S}(Y, X)$ - пропагатор фермиона во внешнем магнитном поле (см. приложение ??), токи между угловыми скобками обозначают матричный элемент между соответствующими начальным и конечным состояниями и обозначены, как $\langle J_k(X) J_{k'}(Y) \rangle = j_k(X) j_{k'}(Y)$, $X^\mu = (X_0, X_1, X_2, X_3)$, $Y^\mu = (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3)$.

Токи $j_k(X)$ и $j_{k'}(Y)$, в свою очередь, удобно представить в виде плосковолновых решений с амплитудами $j_k(q)$ и $j_{k'}'(q')$:

$$j_k(X) = \frac{e^{-i(qX)}}{\sqrt{2q_0V}} j_k(q), \quad q^\alpha = (q_0, \mathbf{q}), \quad (52)$$

$$j_{k'}(Y) = \frac{e^{i(q'Y)}}{\sqrt{2q'_0V}} j_{k'}'(q'), \quad q'^\alpha = (q'_0, \mathbf{q}'), \quad (53)$$

где $V = L_x L_y L_z$ - нормировочный объем.

С учетом этих замечаний, подставим решения (10), фурье-образы токов (52), пропагатор (23) в (51). Проинтегрировав полученный результат по $dX_0 dX_2 dX_3$ и $dY_0 dY_2 dY_3$, представим S -матричный элемент в следующем виде:

$$\mathcal{S}_{k'k}^{s's} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{\sqrt{2q_0V 2q'_0V 2E_\ell L_y L_z 2E_{\ell'} L_y L_z}} \mathcal{M}_{k'k}^{s's}, \quad (54)$$

где $\delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q') = \delta(P_0 - E_{\ell'} - q'_0) \delta(P_y - p'_y - q'_y) \delta(P_z - p'_z - q'_z)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{k'k}^{s's} &\simeq ig_k g_{k'} j_{k'}'(q') j_k(q) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s''} \int dX_1 dY_1 e^{-iX_1 q_x + iY_1 q'_x} \times \\
&\times \frac{\bar{\phi}_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) \Gamma_{k'} \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \Gamma_k \phi_{p,\ell}^s(X_1)}{P_{\parallel}^2 - M_n^2 + i \Im_{\Sigma}^{s''}(P)} + \\
&+ (j_k(q), \Gamma_k, P, q \leftrightarrow j_{k'}'(q'), \Gamma_{k'}, P', -q'),
\end{aligned} \tag{55}$$

$$P_{\alpha} = (p + q)_{\alpha}, \quad P'_{\alpha} = (p - q')_{\alpha}, \quad \alpha = 0, 2, 3.$$

Обсудим, при каких условиях амплитуда (55) будет иметь резонансный характер. Если выполняется условие $\ell, \ell' > n$, то в этом случае у пропагатора фермиона существуют полюс, соответствующий тому, что виртуальная частица становится реальной, то есть выполняется равенство $P_{\parallel}^2 - M_n^2 = 0$. При условии $\ell, \ell' < n$ полюса, отвечающие за резонансы в пропагаторе, отсутствуют и резонанс на виртуальном фермионе не наблюдается. Если же мнимая часть пропагатора $\Im_{\Sigma}^{s''}(P)$ будет мала везде, кроме точки резонанса, то основной вклад в амплитуду (55) будет давать узкая область резонансного пика. Кроме того, кинематический анализ показывает, что вблизи циклотронных резонансов основной вклад в амплитуду процесса $jf \rightarrow j'f'$ будет давать только первая диаграмма.

Покажем, что в приближении узкого резонансного пика квадрат S -матричного элемента двухвершинного процесса перехода $jf \rightarrow j'f'$ факторизуется произведением квадратов S -матричных элементов одновершинных процессов перехода фермиона из начального состояния в промежуточное и из промежуточного состояния в конечное соответственно. Для этого усредним квадрат S -матричного элемента по поляризационным состояниям начального фермиона и просуммируем по поляризационным состояниям конечного фермиона:

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} = \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{2q_0 L_x 2q'_0 V 2E_{\ell} L_y L_z 2E'_{\ell'} L_y L_z} |\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2, \tag{56}$$

где τ — время взаимодействия,

$$|\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s''=\pm 1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \int dX_1 dY_1 \frac{\bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \phi_{jf}^s(X_1)}{P_{\parallel}^2 - M_n^2 + i \Im_{\Sigma}^{s''}(P)} \right|^2 \quad (57)$$

– квадраты соответствующих парциальных амплитуд. Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) &\equiv g_{k'} \bar{\phi}_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) j_{k'}'(q') \Gamma_{k'} e^{iY_1 q'_x}, \\ \phi_{jf}^s(X_1) &\equiv g_k j_k(q) \Gamma_k \phi_{p,\ell}^s(X_1) e^{-iX_1 q_x}. \end{aligned} \quad (58)$$

Предполагая, что основной вклад в амплитуду будут давать узкие области энергий вблизи резонансов, что с учетом (27) соответствует условию $P_0 \Gamma_n^{s''} \ll |P_{\parallel}^2 - M_n^2|$, мы можем приближенно заменить соответствующую часть выражения (57) δ -функцией:

$$\left| \frac{1}{P_{\parallel}^2 - M_n^2 - i P_0 \Gamma_n^{s''}/2} \right|^2 \simeq \frac{2\pi}{P_0 \Gamma_n^{s''}} \delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2).$$

В таком случае квадрат парциальных амплитуд будет выглядеть следующим образом

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2 &\simeq \sum_{s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{P_0 \Gamma_n^{s''}} \delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) \times \\ &\times \left| \int dX_1 dY_1 \bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \phi_{jf}^s(X_1) \right|^2. \end{aligned} \quad (59)$$

С учетом (59) квадрат S -матричного элемента процесса $jf \rightarrow j'f'$ факторизуется двумя одновершинными подпроцессами

$$\begin{aligned} \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} &= \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{2q_0 L_x 2q'_0 V 2E_{\ell} L_y L_z 2E'_{\ell'} L_y L_z} \times \\ &\times \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2E_n'')^2 (2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} (2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'') |\mathcal{M}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}|^2 |\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}|^2. \end{aligned} \quad (60)$$

Здесь мы воспользовались свойством δ -функции:

$$\delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) = \frac{1}{2E_n''} \delta(P_0 - E_n''), \quad (61)$$

где $E_n'' = \sqrt{p_z''^2 + M_n^2}$.

Если теперь ввести S -матричный элемент перехода некоторого начального состояния jf в фермион с энергией E_n'' , компонентами импульса p_y'', p_z'' и поляризационным состоянием s'' , находящийся на уровне Ландау n , следующим образом

$$\mathcal{S}_{jf \rightarrow (n, s'')}^{s''s} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'')}{\sqrt{2q_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E_n'' L_y L_z}} \mathcal{M}_{jf \rightarrow (n, s'')}^{s''s}, \quad (62)$$

с учетом того, что

$$\left| \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'') \right|^2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'') \tau L_y L_z, \quad (63)$$

нетрудно видеть, что выражение (60) можно представить в факторизованном виде:

$$\sum_{s, s' = \pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} = \sum_{s, s', s'' = \pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} \frac{|\mathcal{S}_{jf \rightarrow (n, s'')}^{s''s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{(n, s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}|^2}{\tau}. \quad (64)$$

Здесь соответствующая амплитуда $\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n, s'')}^{s''s}$ одновершинного процесса записывается следующим образом:

$$\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n, s'')}^{s''s} = \frac{\exp[-iq_x(p_y + p_y'')/(2\beta)]}{\sqrt{M_\ell M_n (M_\ell + m)(M_n + m)}} \left[\frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}} \right]^{n-\ell} \mathcal{T}_k^{s''s}, \quad (65)$$

где $\mathcal{S}_{(n, s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}$ — S -матричный элемент перехода фермиона из состояния с E_n'' , p_y'', p_z'', s'' , n в некоторое конечное состояние $j'f'$, с соответствующей амплитудой $\mathcal{M}_{(n, s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}$, причем $\mathcal{S}_{(n, s'') \rightarrow j'f'}^{s's''} = \mathcal{S}_{jf \rightarrow (n, s'')}^{s''s}(q \rightarrow q', E_\ell \rightarrow E'_\ell)$.

Таким образом, для получения амплитуды обобщенного двuverшинного процесса $jf \rightarrow j'f'$ вблизи резонанса в случае узкого пика, достаточно вычислить величины $\mathcal{T}_k^{s''s}$. Данные величины для вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов представлены в приложении ???. Они выражаются через лоренц-коварианты и инварианты в подпространстве $\{0, 3\}$:

$$\mathcal{K}_{1\alpha} = \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} \left\{ M_\ell (\tilde{\Lambda}p'')_\alpha + M_n (\tilde{\Lambda}p)_\alpha \right\}, \quad (66)$$

$$\mathcal{K}_{2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} \{M_\ell(\tilde{\varphi}p'')_\alpha + M_n(\tilde{\varphi}p)_\alpha\} , \quad (67)$$

$$\mathcal{K}_3 = \sqrt{2 \left[(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n \right]} , \quad (68)$$

$$\mathcal{K}_4 = -\sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} (p\tilde{\varphi}p'') . \quad (69)$$

При вычислениях было использовано соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dZ e^{-Z^2} H_n \left(Z + \frac{q_y + iq_x}{2\sqrt{\beta}} \right) H_\ell \left(Z - \frac{q_y - iq_x}{2\sqrt{\beta}} \right) = \\ = 2^{(n+\ell)/2} \sqrt{n! \ell!} \left[\frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}} \right]^{n-\ell} e^{q_\perp^2/(4\beta)} \mathcal{I}_{n,\ell} \left(\frac{q_\perp^2}{2\beta} \right) , \end{aligned}$$

где для $n \geq \ell$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{n,\ell}(x) &= \sqrt{\frac{\ell!}{n!}} e^{-x/2} x^{(n-\ell)/2} L_\ell^{n-\ell}(x) , \\ \mathcal{I}_{\ell,n}(x) &= (-1)^{n-\ell} \mathcal{I}_{n,\ell}(x) , \end{aligned} \quad (70)$$

и $L_n^k(x)$ – обобщенные полиномы Лагерра [30].

Далее в работе будет использовано обозначение $\mathcal{I}_{n,\ell} \equiv \mathcal{I}_{n,\ell} \left(\frac{q_\perp^2}{2\beta} \right)$ и для определенности рассматриваются электроны, для которых знак заряда $\eta = -1$.

Будем предполагать, что начальный и конечный электроны могут занимать произвольный уровень Ландау ℓ и ℓ' соответственно. При этом виртуальный электрон занимает уровень Ландау n . Определяя коэффициент поглощения согласно работам [45, 52], получим

$$\begin{aligned} W_{\gamma e \rightarrow \gamma e} &= \sum_{\ell, \ell'=0}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_-(E_\ell) \times \\ &\times \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_-(E_{\ell'})] \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \sum_{s, s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)} e \rightarrow \gamma^{(\lambda')} e}^{s' s}|^2}{\tau} . \end{aligned} \quad (71)$$

где $f_-(E_\ell)$ и $f_-(E'_\ell)$ – равновесные функции распределения начальных и конечных электронов соответственно, например, $f_-(E_\ell) = \{\exp[(E_\ell - \mu)/T] + 1\}^{-1}$, T – температура, μ – химический потенциал электронного газа, $f_{\omega'}$ – функция распределения конечных фотонов в системе покоя плазмы, $\mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma^{(\lambda')e}}^{s's}$ – S -матричный элемент процесса $\gamma e \rightarrow \gamma e$. Он может быть получен из (54) заменой $m_f = m$, $g_V = g'_V = e > 0$, $j_\alpha = \varepsilon_\alpha(q)$, $j'_\alpha = \varepsilon_\alpha(q')$. $q^\alpha = (\omega, \mathbf{k})$ и $q'^\alpha = (\omega', \mathbf{k}')$ – 4-векторы начального и конечного фотонов соответственно.

Предполагая, что резонансный пик достаточно узкий, т.е. основной вклад в коэффициент поглощения фотона будут давать области резонансов, с учетом (64), представим (71), в виде:

$$W_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma^{(\lambda')e}} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell, \ell'=0}^{n-1} \sum_{s, s', s''=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_-(E_\ell) \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \times$$

$$\times [1 - f_-(E'_\ell)] \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \frac{dp''_y dp''_z L_y L_z}{(2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} \frac{|\mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow e_n}^{s''s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma^{(\lambda')}}^{s's''}|^2}{\tau},$$

$$\lambda, \lambda' = 1, 2. \quad (72)$$

Здесь связь $\mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow e_n}^{s''s}$ с соответствующей амплитудой определяется формулой (62), в которой нужно заменить jf на $e_\ell \gamma^{(\lambda)}$, (n, s'') на e_n .

С другой стороны, согласно [36], полную ширину изменения состояния электрона $\Gamma_n^{s''}$ можно представить в виде суммы ширин поглощения, $\Gamma_n^{(abs) s''}$, и рождения, $\Gamma_n^{(cr) s''}$, электрона следующим образом:

$$\Gamma_n^{s''} = \Gamma_n^{(abs) s''} + \Gamma_n^{(cr) s''} \simeq \Gamma_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma}^{(abs) s''} \left[1 + e^{-(E_n'' - \mu)/T} \right], \quad (73)$$

где

$$\Gamma_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma}^{(abs) s''} = \sum_{\ell'=0}^{n-1} \sum_{s'=\pm 1} \sum_{\lambda'} \int \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_-(E'_\ell)] \times$$

$$\times \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma^{(\lambda')}}^{s's''}|^2}{\tau} \quad (74)$$

– ширина поглощения электрона в процессе $e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma$.

Подставляя (73) в (72) с учетом (74) и суммируя по поляризациям конечных фотонов, получим

$$W_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{s,s''=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_-(E_\ell) \times \quad (75)$$

$$\times \frac{dp_y'' dp_z'' L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_-(E_n'')] \frac{|\mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)}e_\ell \rightarrow e_n}^{s''s}|^2}{\tau}.$$

Таким образом коэффициент поглощения фотона в комптоновском процессе $e\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e\gamma$, просуммированного по поляризациям конечного фотона, вблизи резонанса совпадает с коэффициентом поглощения фотона в одновершинном процессе поглощения фотона $\gamma e^{(\lambda)} \rightarrow e$.

Интегрируя это выражение с учетом формул (??)–(??) из приложения ??, получим следующие парциальные вклады в коэффициент поглощения фотона, соответствующие двум его поляризационным состояниям:

$$W_{\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma e} = \frac{\alpha\beta}{2\omega} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_-(E_\ell^\epsilon)[1 - f_-(E_\ell^\epsilon + \omega)]}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times \quad (76)$$

$$\times \left\{ [2\beta(n + \ell) - q_\parallel^2](\mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell}^2) - 8\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} \right\},$$

$$W_{\gamma^{(2)}e \rightarrow \gamma e} = \frac{\alpha\beta}{2\omega} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_-(E_\ell^\epsilon)[1 - f_-(E_\ell^\epsilon + \omega)]}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times \quad (77)$$

$$\times \left\{ \left[\frac{(2\beta(n - \ell))^2}{q_\parallel^2} - 2\beta(n + \ell) - 4m^2 \right] (\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2) - \right.$$

$$\left. - 8\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right\},$$

$$E_\ell^\epsilon = \frac{1}{2q_\parallel^2} \left[\omega (M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2) + \epsilon k_z \sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2} \right].$$

В (76) и (77) суммирование по n ограничено согласно закону сохранения энер-

гии и импульса следующим образом:

$$n_0 = \ell + \left[\frac{q_{\parallel}^2 + 2M_{\ell}\sqrt{q_{\parallel}^2}}{2\beta} \right], \quad (78)$$

где $[x]$ – целая часть числа x .

В относительно недавней работе [47] исследовался процесс комптоновского рассеяния в магнитных полях, характерных для магнитосфер радиопульсаров и магнитаров $10^{12} - 10^{15}$ Гс. В данной работе была дан подробный алгоритм вычисления S -матричного элемента, дифференциального сечения комптоновского процесса. Данный алгоритм подходит для произвольного уровня Ландау, хотя для численных результатов предполагалось, что электрон в начальном и конечном состоянии занимает основной уровень Ландау. При расчетах учитывался резонанс на виртуальном электроне с учетом пика конечной ширины, полученной с использованием корректных решений уравнения Дирака [19]. Для астрофизических приложений, например, решения задачи по переносу излучения, полезно найти функцию распределения фотонов. Однако в общем виде это представляет значительные вычислительные трудности. Поэтому вызывает отдельный интерес провести сравнительный анализ полученных нами результатов, которые являются более простыми для вычислений различных физических величин, с соответствующими результатами работы [47]. Исходя из (75) и следуя авторам [47], введем сечение процесса $\gamma e \rightarrow \gamma e$, проинтегрированное по начальным электронам, с функцией распределения $f_{-}(E_{\ell})$ при $\mu = 0$, следующим образом:

$$\sigma_{\lambda}^{*} = \frac{1}{\overline{N}_e} \int \frac{dW_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e}}{j}, \quad (79)$$

где $j = |(p\tilde{\Lambda}q)|/(E\omega V)$ – плотность потока падающих частиц в продольном по отношению к магнитному полю подпространстве,

$$\overline{N}_e = \frac{N_e}{\beta m} = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2 - \delta_{\ell,0}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp_z}{m} f_{-}(E_{\ell}), \quad (80)$$

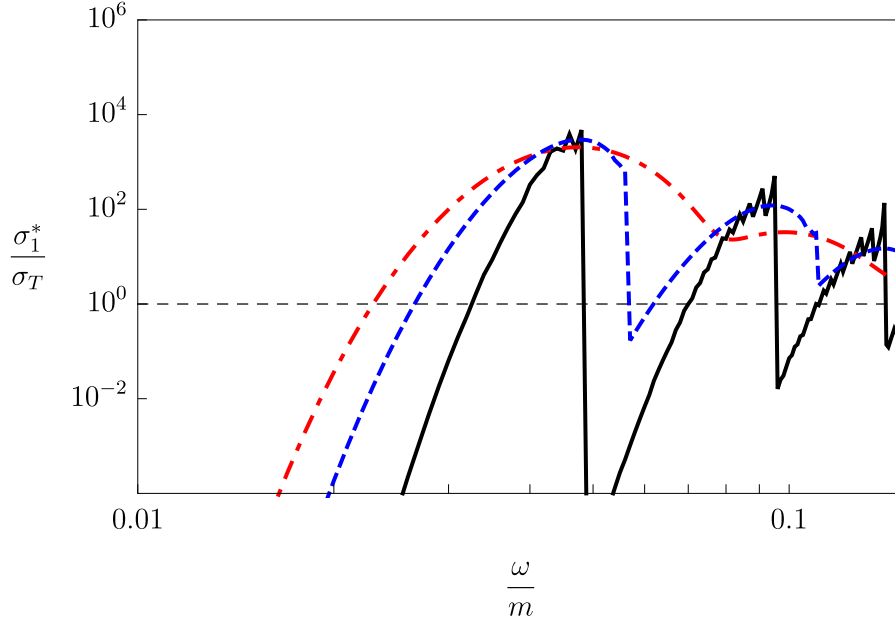


Рис. 3: Сечение (в единицах σ_T) рассеяния фотона моды 1, $\gamma^{(1)}e \rightarrow e$, в сильном магнитном поле $B = 2.2 \times 10^{12}$ Гс, проинтегрированное по начальным электронам с функцией распределения f_{E_e} для фиксированного значения температуры $T = 20$ кэВ и $\mu = 0$, в зависимости от энергии начального фотона (в единицах массы) для различных значений углов между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля: $\theta = 90^\circ$ – сплошная кривая, $\theta = 60^\circ$ – штриховая кривая, $\theta = 30^\circ$ – штрих-пунктирная линия. Горизонтальная пунктирная линия отмечает σ_T .

N_e – концентрация электронов во внешнем магнитном поле. Согласно разделу ?? и рисунку 1 для рассматриваемых параметров магнитного поля и плазмы, можно считать, что закон дисперсии как моды 1, так и моды 2 мало отличается от вакуумного. В таком случае параллельную магнитному полю компоненту импульса фотона можно положить $k_z = \omega \sin \theta$, где θ – угол между импульсом фотона и направлением магнитного поля. Как уже отмечалось в разделе ??, перенормировка волновых функций фотонов становится существенной вблизи циклотронных резонансов $q_\parallel^2 \simeq (M_n + M_\ell)^2$ (см., например, [45]), однако при значении магнитного поля $B \simeq 10^{12}$ Гс $Z_{1,2} \simeq 1$.

Результаты численного анализа отношения $\sigma_\lambda^*/\sigma_T$, где $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/(3m^2)$ – томсоновское сечение, представлены на рис. 3– 8. Как видно из рис. 3, можно с уверенностью сказать, что резонансные пики достаточно сильно зависят от угла начального фотона по отношению к магнитному полю – ширина

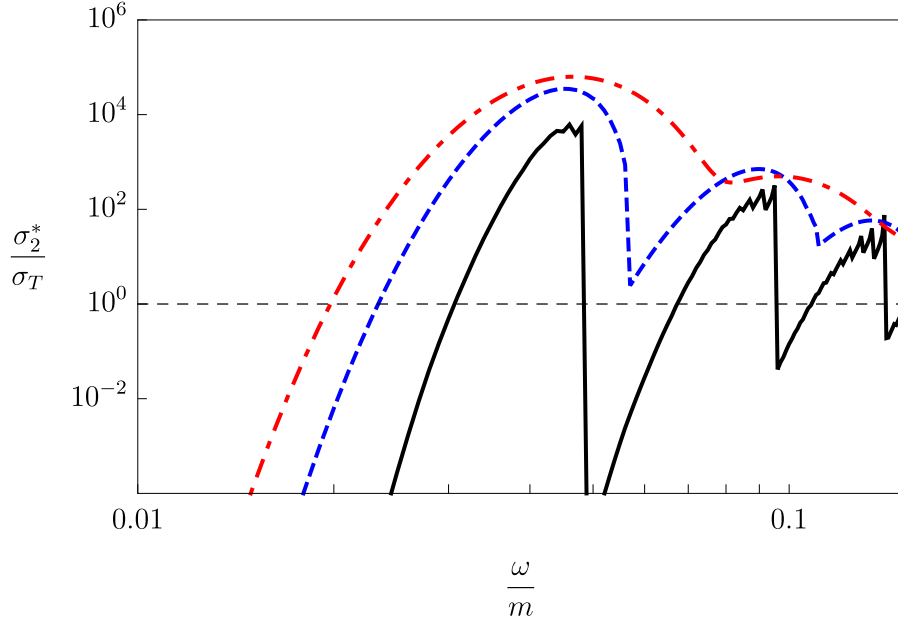


Рис. 4: Сечение (в единицах σ_T) рассеяния фотона моды 2, $\gamma^{(2)}e \rightarrow e$, в сильном магнитном $B = 2.2 \times 10^{12}$ Гс, проинтегрированное по начальным электронам с функцией распределения f_{E_e} для фиксированного значения температуры $T = 20$ кэВ и $\mu = 0$, в зависимости от энергии начального фотона (в единицах массы) для различных значений углов между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля: $\theta = 90^\circ$ – сплошная кривая, $\theta = 60^\circ$ – штриховая кривая, $\theta = 30^\circ$ – штрих-пунктирная линия. Горизонтальная пунктирная линия отмечает σ_T .

резонансных пиков увеличивается с уменьшением угла θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля. На рис. 5 представлен сравнительный анализ сечения, полученного в работе [47] со случаем δ -функционального приближения для различных углов между импульсом фотона и направлением магнитного поля в пределе, когда начальный и конечный электроны занимают основной уровень Ландау. Отсюда можно сделать вывод, что δ -функциональное приближение достаточно хорошо описывает резонансный пик для угла $\theta = 90^\circ$. В то же время из рис. 5 следует, что полученные оценки в окрестности резонансных пиков согласуются с соответствующими результатами работы [47], особенно вблизи первого резонанса.

Однако в работе [47] не учитывалось, что начальный и конечные электроны могут занимать произвольный уровень Ландау. Численный анализ в случае дельта-функциональной аппроксимации с учетом того, что электроны

могут занимать произвольный уровень Ландау, представлен на рис. 6. Как видно из рис. 6, это приводит к завышенным результатам в области резонанса.

Аналогичный анализ выполнен для канала $e\gamma^{(2)} \rightarrow e\gamma$ и представлен на рис. 6–8. Результаты, полученные с помощью δ -функционального приближения оказались заниженными в точке резонанса по сравнению с результатами, полученными с учетом конечной ширины резонансного пика [47]. Разницу в полученных результатах можно обосновать, по-видимому, различными методами численного анализа, поскольку коэффициенты поглощения фотона (76) и (77) для обеих мод имеют узкие максимумы (которые можно частично увидеть на рис. 3 и 4 для $\theta = 90^\circ$), соответствующие значениям энергии фотона $\omega_{n\ell} = (M_n - M_\ell)/\sin \theta$, хорошо известные в литературе (см., например, [?, 53, 54]).

Следовательно, применение приближения (59) правомочно в области полей $B \sim 10^{12}$ Гс, характерных для радиопульсаров (см. Введение). С другой стороны, полученные нами коэффициенты поглощения фотона (76) и (77) определяются только как сумма конечных выражений (за исключением особых точек, указанных ранее), что является гораздо удобными в применении (например, решение задачи переноса излучения), чем полный учет конечной ширины, полученный в работе [47].

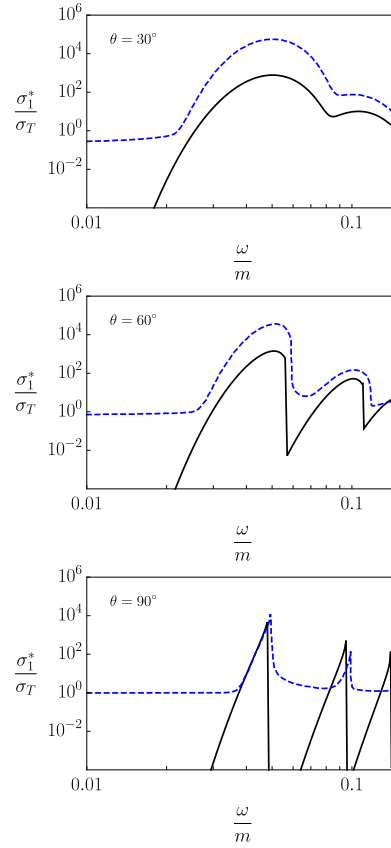


Рис. 5: Сравнение сечения (в единицах σ_T) рассеяния фотона моды 1, $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma$, полученном в работе [47] (пунктирная линия) и δ -функциональном приближении (сплошная линия) для различных углов θ между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля (значения изображены на графиках). $B = 2.2 \times 10^{12}$ Гс, $T = 20$ кэВ, $\mu = 0$. Начальные и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау.

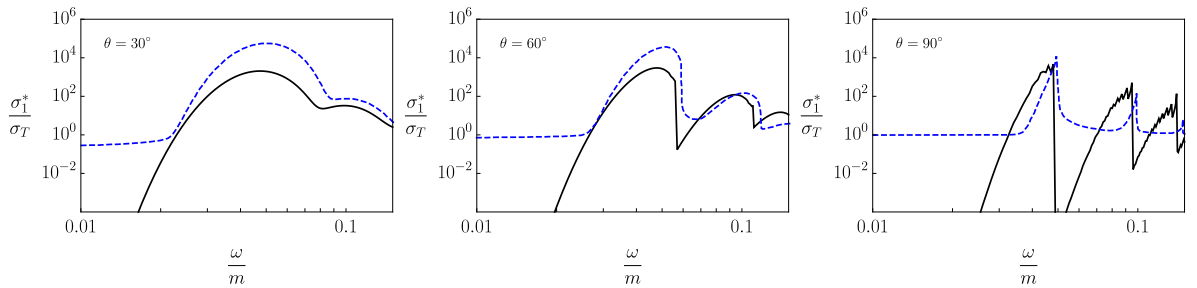


Рис. 6: То же, что и на рис. 5, для канала $\gamma^{(1)}e \rightarrow e\gamma$, но начальный и конечный электроны для случая дельта-функциональной аппроксимации занимают произвольный уровень Ландау.

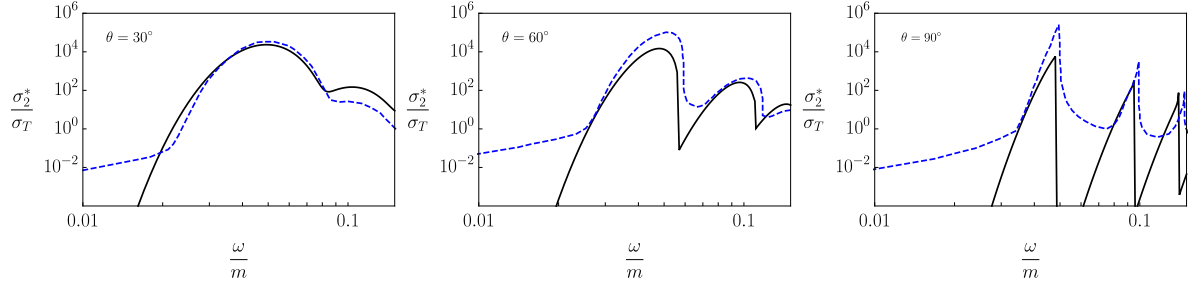


Рис. 7: Сравнение сечения (в единицах σ_T) рассеяния фотона моды 2, $e\gamma^{(2)} \rightarrow e\gamma$, полученном в работе [47] (пунктирная линия) и δ -функциональном приближении (сплошная линия) для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля. $B = 2.2 \times 10^{12}$ Гс, $T = 20$ кэВ, $\mu = 0$. Все начальные и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау..

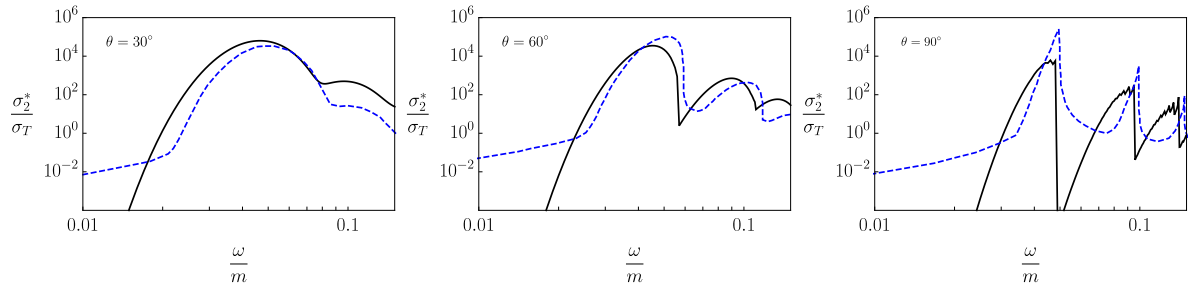


Рис. 8: То же, что и на рис. 7, но все начальные и конечные электроны находятся на произвольном уровне Ландау.

Рассмотрим теперь ситуацию относительно сильного магнитного поля ($B \sim 10^{15} - 10^{16}$ Гс). В этой области полей дельта-функциональная аппроксимация также согласуется (с точностью до 7% в окрестности пика) с численными результатами, учитывающими конечную ширину резонансного пика. Исследование комптоновского процесса в магнитных полях указанного масштаба было проведено, например, в работе [45]. Полученные в этом исследовании результаты справедливы для области энергий фотонов вдали от резонанса. Поэтому на основе полученных результатов [45] представляет самостоятельный интерес вычислить коэффициент поглощения фотона в пределе сильного поля с учетом возможного резонанса на виртуальном электро-не. Как известно, в пределе сильного магнитного поля начальный и конечный электроны будут занимать основной уровень Ландау, а виртуальный – первый уровень Ландау. Это позволяет достаточно просто рассчитать коэффициент поглощения фотона с учетом конечной ширины резонансного пика. Поэтому представляет интерес сравнить коэффициенты поглощения с конечной шириной резонансного пика и дельта-функциональное приближение. С другой стороны, также необходимо учесть еще один эффект, связанный с возможным затуханием фотона. Поскольку в сильном магнитном поле энергии фотона, на которых наблюдается резонанс, выше, чем порог рождения e^+e^- пары для фотона моды 2, то целесообразно рассмотреть только каналы рассеяния $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}$ и $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$ (см. раздел ??). Следует отметить, что для фотона моды 1 порог рождения e^+e^- пары заведомо выше рассматриваемой области резонанса.

Следуя работе [45], удобно будет представить коэффициент поглощения фотона (71) в сильном магнитном поле в следующем виде:

$$W_{\lambda e \rightarrow \lambda' e} = \frac{\beta}{16(2\pi)^4 \omega_\lambda} \int |\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda'}|^2 Z_\lambda Z_{\lambda'} \times \quad (81)$$

$$\times f_E [1 - f_{E'}] (1 + f_{\omega'}) \delta(\omega_\lambda(\mathbf{k}) + E - \omega_{\lambda'}(\mathbf{k}') - E') \frac{dp_z d^3 k'}{E E' \omega_{\lambda'}},$$

где Z_λ - перенормировочные множители (44), а $\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda'}$ - парциальные амплитуды комптоновского процесса, которые в пределе сильного магнитного поля

без учета резонанса имеют вид [45]

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{1\rightarrow 1} &= \frac{8i\pi\alpha m}{\beta} \frac{(q\varphi q')(q\tilde{\varphi}q')}{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\perp}{}^2 (-Q_{\parallel}^2)}}, \\ \mathcal{M}_{1\rightarrow 2} &= \frac{8i\pi\alpha m}{\beta} \frac{(q\Lambda q')(q\tilde{\Lambda}Q)}{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\parallel}{}^2 (-Q_{\parallel}^2)}},\end{aligned}\tag{82}$$

где $Q_{\parallel}^2 = (q - q')_{\parallel}^2 < 0$, $q_{\alpha} = (\omega, \mathbf{k})$ и $q'_{\alpha} = (\omega', \mathbf{k}')$ – 4-импульсы начального и конечного фотонов соответственно.

После подстановки (82) в (81) коэффициенты поглощения фотона для каналов $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}$ и $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$ могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}W_{1\rightarrow 1} &= \frac{\omega\alpha^2 m^2}{2\beta\pi} \int dQ_0 dk'_z \frac{k_z'^2}{(-Q_{\parallel}^2)^2 \varkappa} \theta(-Q_{\parallel}^2) \theta(q_{\parallel}'^2) \times \\ &\times \sum_{p_{z_i}} f(E_0^{\epsilon})(1 - f(E_0^{\epsilon} + \omega))(1 + f_{\omega'}),\end{aligned}\tag{83}$$

$$\begin{aligned}W_{1\rightarrow 2} &= \frac{\alpha^2 m^2}{2\beta\pi\omega} \int dQ_0 dk'_z \left(1 - \frac{\mathcal{P}^{(2)}(q')}{q_{\parallel}'^2}\right) \frac{q_{\parallel}'^2 - \omega\omega'}{(-Q_{\parallel}^2)^2 \varkappa} \theta(-Q_{\parallel}^2) \theta(q_{\parallel}'^2) \times \\ &\times \sum_{p_{z_i}} f_{E_0^{\epsilon}}(1 - f_{E_0^{\epsilon} + \omega})(1 + f_{\omega'}),\end{aligned}\tag{84}$$

где $\theta(x)$ – функция Хевисайда.

Амплитуды $\mathcal{M}_{1\rightarrow 1}$, $\mathcal{M}_{1\rightarrow 2}$ в пределе сильного магнитного поля можно представить в следующем виде [55]:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{1\rightarrow 1} &= \frac{8m\pi\alpha}{\sqrt{(-Q_{\parallel}^2)}} \exp\left[-\frac{q_{\perp}^2 + q'_{\perp}{}^2 - 2i(q\varphi q')}{4\beta}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\perp}{}^2}} \times \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((q\Lambda q') - i(q\varphi q'))^n}{(n-1)!(2\beta)^{n-1}} \frac{(q\tilde{\varphi}q')}{(p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2 + iE_n''\Gamma_n} + \\ &+ (q \leftrightarrow -q'),\end{aligned}\tag{85}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2} = & \frac{8m\pi\alpha}{\sqrt{(-Q_{\parallel}^2)}} \exp \left[-\frac{q_{\perp}^2 + q'_{\perp}{}^2 - 2i(q\varphi q')}{4\beta} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\perp}{}^2}} \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((q\Lambda q') - i(q\varphi q'))^n}{(n-1)!(2\beta)^{n-1}} \frac{(Q\tilde{\Lambda}q')}{(p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2 + iE_n''\Gamma_n} + \\
& + (q \leftrightarrow -q'),
\end{aligned} \tag{86}$$

Как показывает численный анализ, в случае сильно замагниченной горячей зарядово-симметричной плазмы полная ширина поглощения электрона мало отличается от соответствующего выражения в сильном магнитном поле и ультрарелятивистских электронов. Поэтому мы можем выбрать ее в следующей форме [17]:

$$\begin{aligned}
E_n''\Gamma_n = & \alpha e B \sum_{n'=0}^{n-1} \int_0^{(\sqrt{n}-\sqrt{n'})^2} \frac{dx}{\sqrt{(n+n'-x)^2 - 4nn'}} \times \\
& \times \{ (n+n'-x)[\mathcal{I}_{n,n'-1}^2(x) + \mathcal{I}_{n-1,n'}^2(x)] - \\
& - 4\sqrt{nn'}\mathcal{I}_{n,n'}(x)\mathcal{I}_{n-1,n'-1}(x) \}.
\end{aligned} \tag{87}$$

Здесь $E_n'' = E + \omega$ – энергия виртуального электрона.

Коэффициент поглощения фотона с учетом конечной ширины поглощения

электрона может быть получен подстановкой амплитуд (85) и (86) в (81):

$$\begin{aligned}
W_{1 \rightarrow 1} = & \frac{\beta \alpha^2 m^2}{\pi \omega} \int dQ_0 dk'_z \frac{1}{(-Q_{\parallel}^2)^2 \varkappa} \exp \left[-\frac{q_{\perp}^2 + q_{\perp}'^2}{2\beta} \right] \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p_{z_i}} \left\{ \frac{1}{((n-1)!)^2} \left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2\beta} \right)^{2(n-1)} \frac{(qq')_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2 q_{\parallel}'^2}{((p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2} + \right. \\
& + \frac{1}{((n-1)!)^2} \left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2\beta} \right)^{2(n-1)} \frac{(qq')_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2 q_{\parallel}'^2}{((p-q')_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2} - \\
& - 2 \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{((n-1)!)^2} \left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2\beta} \right)^{n-1} J_{n+n'} \left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{\beta} \right) \frac{1}{(n'-1)!} \left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2\beta} \right)^{n'-1} \times \\
& \times \frac{\left([(p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2][(p-q')_{\parallel}^2 - M_{n'}^2] + E_n'' \Gamma_n E_{n'}'' \Gamma_{n'} \right) \cdot \left((qq')_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2 q_{\parallel}'^2 \right)^2}{\left[((p-q')_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2 \right] \left[((p+q)_{\parallel}^2 - M_{n'}^2)^2 + (E_{n'}'' \Gamma_{n'})^2 \right]} \Big\} \times \\
& \times f_E (1 - f_{E'}) (1 + f_{\omega'}),
\end{aligned} \tag{88}$$

$$\begin{aligned}
W_{1 \rightarrow 2} = & \frac{\beta \alpha^2 m^2}{\pi \omega} \int dQ_0 dk'_z \frac{1}{(-Q_{\parallel}^2)^2 \varkappa} \exp \left[-\frac{q_{\perp}^2 + q_{\perp}'^2}{2\beta} \right] \cdot \frac{q_{\perp}'^2}{q_{\perp}'^2} \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p_{z_i}} \left\{ \frac{1}{((n-1)!)^2} \left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2\beta} \right)^{2(n-1)} \frac{1}{((p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2} \times \right. \\
& \times (q_{\parallel}^2 - (qq')_{\parallel})^2 + \frac{1}{((n-1)!)^2} \left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2\beta} \right)^{2(n-1)} \times \\
& \times \frac{1}{((p-q')_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2} (q_{\parallel}'^2 - (qq')_{\parallel})^2 - \\
& - 2 \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{((n-1)!)^2} \left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2\beta} \right)^{n-1} J_{n+n'} \left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{\beta} \right) \frac{1}{(n'-1)!} \left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2\beta} \right)^{n'-1} \times \\
& \times \frac{[(p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2][(p-q')_{\parallel}^2 - M_{n'}^2] + E_n'' \Gamma_n E_{n'}'' \Gamma_{n'}}{[(p-q')_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2][(p+q)_{\parallel}^2 - M_{n'}^2)^2 + (E_{n'}'' \Gamma_{n'})^2]} \times \\
& \times (q_{\parallel}'^2 - (qq')_{\parallel}) \cdot (q_{\parallel}^2 - (qq')_{\parallel}) \left. \right\} \times \\
& \times f_E (1 - f_{E'}) (1 + f_{\omega'}),
\end{aligned} \tag{89}$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя целого индекса, $\varkappa = \sqrt{1 - 4m^2/Q_{\parallel}^2}$, а p_{z_i} – корни уравнения $Q_0 + E_0 - E'_0 = 0$:

$$p_{z_i} = -\frac{Q_z}{2} \pm Q_0 \varkappa. \tag{90}$$

Имеет смысл провести сравнительный анализ результатов работы [45] без учета вклада конечной ширины поглощения электрона с резонансным случаем (88) и (89) для случая зарядово-симметричной плазмы и поперечного направления импульса фотона по отношению к внешнему магнитному полю для различных значений величины магнитного поля, температуры и энергии начального фотона.

На рис. 9–10 показана вероятность рассеяния при температуре $T = 1$ МэВ и величине магнитного поля $B = 200B_e$ и $B = 20B_e$ соответственно. Как видно из рис. 9–10, вероятность рассеяния для канала $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(1)}e$ согласуется

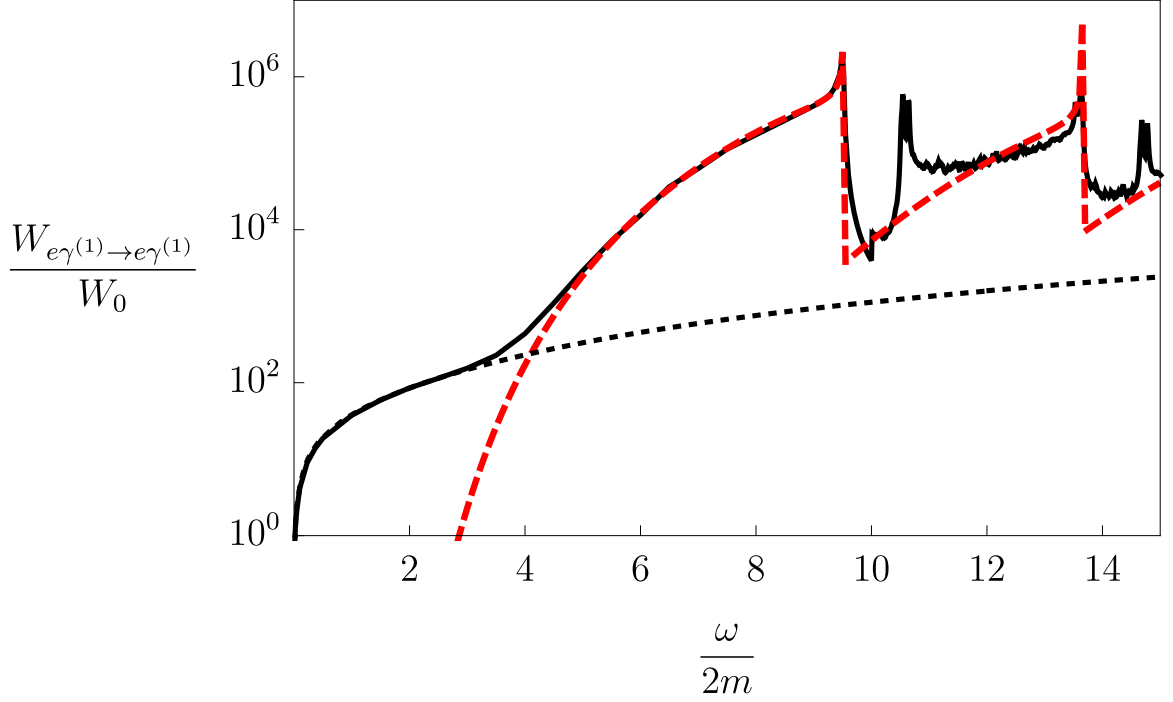


Рис. 9: Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}$ при поле $B = 200B_e$ и температуре $T=1$ МэВ. Сплошной и штриховой линиями изображен график с учетом резонанса и без него соответственно. δ -функциональная аппроксимация показана пунктиром. Здесь $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{ см}^{-1}$.

с соответствующими результатами для предела сильного поля и отсутствия резонанса, полученными в работе [45] вплоть до энергий начального фотона $\omega = 3$ МэВ для поля $B = 200B_e$ и $\omega = 0.3$ МэВ для поля $B = 20B_e$. Поэтому результаты работы [45] нужно ограничить до соответствующих энергий начального фотона. Аналогичная ситуация наблюдается и для канала $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(2)}e$ (см. рис. 11-12). Из рис. 10 и 12 наиболее ярко видно завышение коэффициента поглощения даже при относительно малых энергиях начального фотона. Этот факт связан с тем, что в пределе сильного магнитного поля [45] авторы пренебрегали знаменателем в пропагаторе электрона. Следует отметить что при относительно малых температурах $T \lesssim 50$ кэВ с тем же магнитным полем δ -аппроксимация работает хуже.

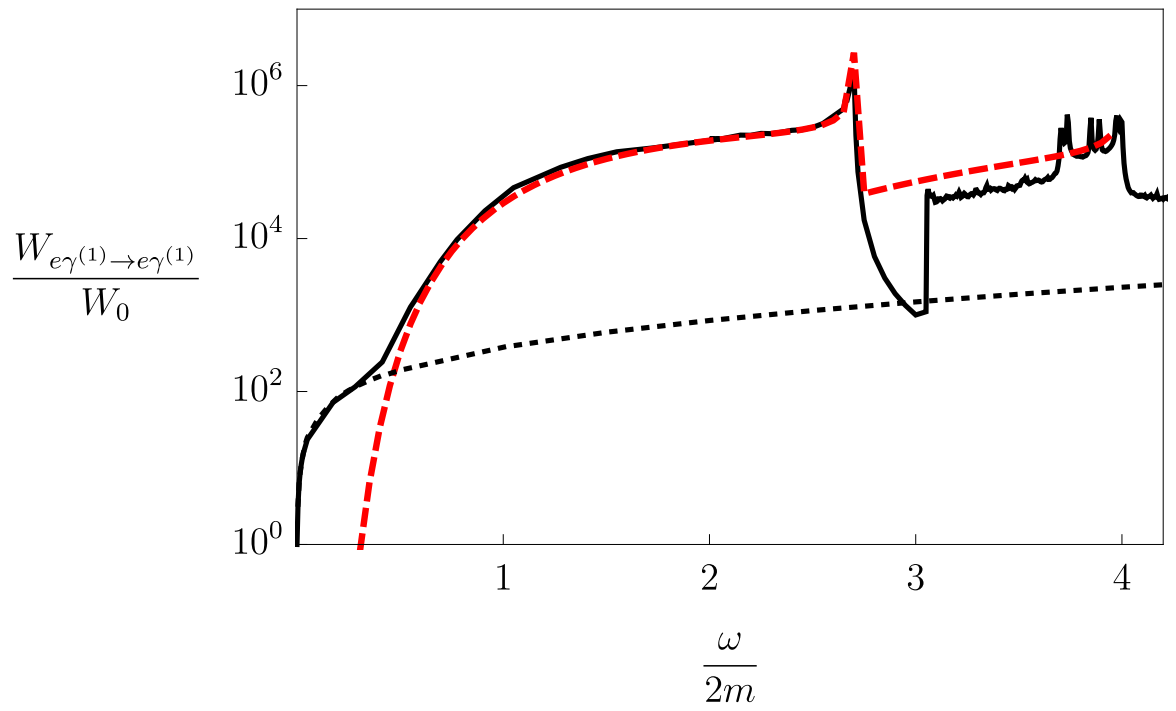


Рис. 10: Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}$ при поле $B = 20B_e$ и температуре $T=1$ МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 9.

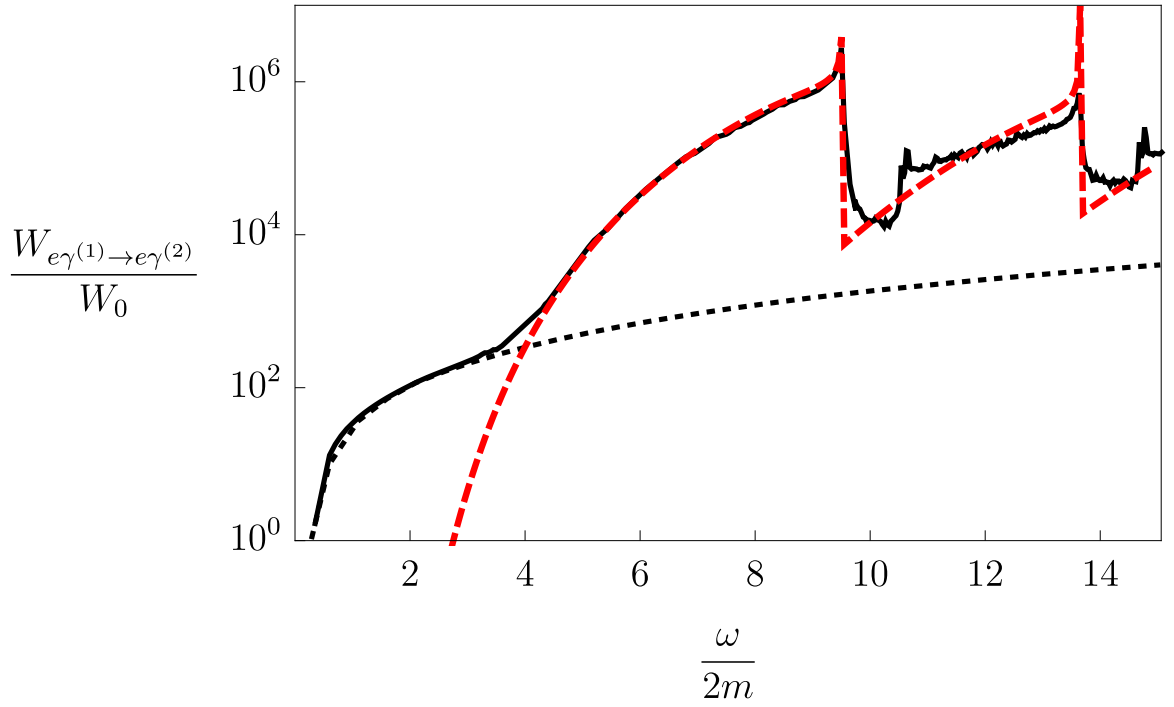


Рис. 11: Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$ при поле $B = 200B_e$ и температуре $T=1$ МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 9.

4.3 Резонанс на виртуальном электроне и виртуальном фотоне.

5 Сингулярности в фазовых объемах одновершинных процессов и методы их устранения.

6 Заключение

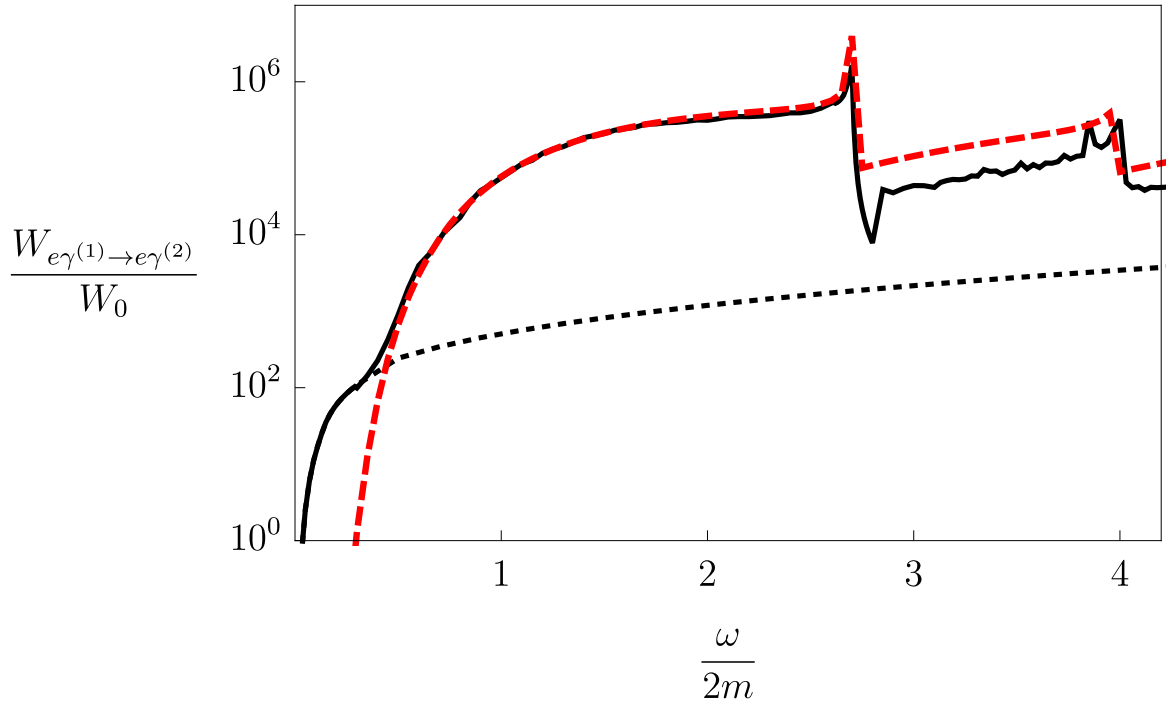


Рис. 12: Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$ при поле $B = 20B_e$ и температуре $T=1$ МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 9.

Список литературы

- [1] Thompson C., Duncan R. C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - I. Radiative mechanism for outbursts // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1995. Vol. 275. P. 255–300.
- [2] Thompson C., Duncan R. C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars. II. Quiescent neutrino, X-Ray, and Alfven wave emission // Astrophys. J. 1996. Vol. 473. P. 322–342.
- [3] Thompson C., Lyutikov M., Kulkarni S. R. Electrodynamics of magnetars: implications for the persistent x-ray emission and spindown of the soft gamma repeaters and anomalous x-ray pulsars // Astrophys. J. 2002. Vol. 574, no. 1. P. 332–355.
- [4] Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Влияние фотон-нейтринных процессов на остывание магнитара // ЖЭТФ. 2008. Т. 134, № 4. С. 627–636.

- [5] Бисноватый-Коган Г. С., Чечеткин В. М. Неравновесные оболочки нейтронных звезд, их роль в поддержании рентгеновского излучения и нуклеосинтезе // Усп. физ. наук. 1979. Т. 127, № 2. С. 263–296.
- [6] Kouveliotou C. et al. An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft gamma-ray repeater SGR 1806-20. // Nature. 1998. Vol. 393. P. 235–237.
- [7] Kouveliotou C., Strohmayer T., Hurley K. et al. Discovery of a magnetar associated with the soft gamma repeater SGR 1900+14 // Astrophys. J. 1999. Vol. 510. P. L115–118.
- [8] Gavriil F. P., Kaspi V. M., Woods P. M. Magnetar - like x-ray bursts from an anomalous x-ray pulsar // Nature. 2002. Vol. 419. P. 142–144.
- [9] Ibrahim A. I., Safi-Harb S., Swank J. H. et al. Discovery of cyclotron resonance features in the soft gamma repeater SGR 1806-20 // Astrophys. J. 2002. Vol. 574. P. L51–L55.
- [10] Ibrahim A. I., Swank J. H., Parke W. New evidence for proton cyclotron resonance in a magnetar strength field from SGR 1806-20 // Astrophys. J. 2003. Vol. 584. P. L17–L22.
- [11] Olausen S. A., Kaspi V. M. The McGill magnetar catalog // Astrophys. J. Suppl. 2014. Vol. 212, no. 1. P. 6.
- [12] Melrose D. B., Parle A. J. Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. I Electron States // Aust. J. Phys. 1983. Vol. 36. P. 755–774.
- [13] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. Москва: Наука, 1983. 304 с.
- [14] Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003. 120 p.
- [15] Bhattacharya K., Pal P. B. Inverse beta decay of arbitrarily polarized neutrons in a magnetic field // Pramana J. Phys. 2004. Vol. 62. P. 1041–1058.

- [16] Balantsev I. A., Popov Yu. V., Studenikin A. I. On the problem of relativistic particles motion in strong magnetic field and dense matter // J. Phys. 2011. Vol. A44. P. 255301 (1–13).
- [17] Kuznetsov A., Mikheev N. Electroweak processes in external active media. 2013. Vol. 252. P. pp 1–271.
- [18] Johnson M. H., Lippmann B. A. Motion in a constant magnetic field // Physical Review. 1949. Vol. 76, no. 6. P. 828–832.
- [19] Соколов А. А., Тернов И. М. Синхротронное излучение. М.: Наука, 1966. 228 с.
- [20] Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001. 784 с.
- [21] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Москва: Наука, 1989. 768 с.
- [22] Canuto V. Quantum processes in strong magnetic fields // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1975. Vol. 257, no. 1. P. 108–126.
- [23] Harding A. K., Daugherty J. K. Cyclotron Resonant Scattering and Absorption // Astrophys. J. 1991. Vol. 374. P. 687–699.
- [24] Suh I.-S., Mathews G. J. Weak reaction freeze-out constraints on primordial magnetic fields // Phys. rev. D. 1999. Vol. 59, no. 12. P. 123002.
- [25] Gonthier P. L., Harding A. K., Baring M. G. et al. Compton Scattering in Ultrastrong Magnetic Fields: Numerical and Analytical Behavior in the Relativistic Regime // Astrophys. J. 2000. Vol. 540, no. 2. P. 907–922.
- [26] Jones P. B. Electron-positron bremsstrahlung and pair creation in very high magnetic fields // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2010. Vol. 409, no. 4. P. 1719–1727.

- [27] Melrose D. B. Quantum kinetic theory for unmagnetized and magnetized plasmas // Rev. Mod. Plasma Phys. 2020. Vol. 4, no. 8.
- [28] Graziani C. Strong-Field Cyclotron Scattering. I. Scattering Amplitudes and Natural Line Width // Astrophys. J. 1993. Vol. 412. P. 351–362.
- [29] Gonthier P. L., Baring M. G., Eiles M. T. et al. Compton scattering in strong magnetic fields: Spin-dependent influences at the cyclotron resonance // Phys. Rev. 2014. Vol. D90, no. 4. P. 043014.
- [30] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 1108 с.
- [31] Schwinger J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // Phys. Rev. 1951. — Jun. Vol. 82. P. 664–679.
- [32] Ритус В. И. Радиационные эффекты и их усиление в интенсивном электромагнитном поле // ЖЭТФ. 1969. Т. 57, № 6. С. 2176–2188.
- [33] Jancovici B. Radiative Correction to the Ground-State Energy of an Electron in an Intense Magnetic Field // Phys. Rev. 1969. Vol. 187. P. 2275–2276.
- [34] Борисов А. В., Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Эминов П. А. Фотоны и лептоны во внешних полях при конечных температуре и плотности // УФН. 1997. Т. 167, № 3. С. 241–267.
- [35] Жуковский В. Ч., Мидодашвили П. Г., Эминов П. А. Мнимая часть массового оператора электрона в постоянном поле при конечной температуре и плотности // Журн. эксперим. и теор. физ. 1994. Т. 106, № 4. С. 929–935.
- [36] Weldon H. A. Simple rules for discontinuities in finite temperature Field Theory // Phys. Rev. 1983. Vol. D28. P. 2007–2037.

- [37] Шабад А. Е. Поляризация вакуума и квантового релятивистского газа во внешнем поле // Тр. ФИАН СССР “Поляризационные эффекты во внешних калибровочных полях”. 1988. Т. 192. С. 5–152.
- [38] Tsai W. Y. Vacuum polarization in homogeneous magnetic fields // Phys. Rev. 1974. Vol. D10, no. 8. P. 2699–2702.
- [39] Баталин И. А., Шабад А. Е. Функция Грина фотона в постоянном однородном электромагнитном поле общего вида // ЖЭТФ. 1971. Т. 60, № 3. С. 894–900.
- [40] Скобелев В. В. Поляризационный оператор фотона в сверхсильном магнитном поле // Изв. вузов. Физика. 1975. № 10. С. 142–143.
- [41] Перес Рохас У. Поляризационный оператор электрон-позитронного газа в постоянном внешнем магнитном поле // ЖЭТФ. 1979. Т. 76, № 1. С. 3–17.
- [42] Peres Rojas H., Shabad A. E. Absorption and dispersion of electromagnetic eigenwaves of electron-positron plasma in a strong magnetic field // Ann. Phys. (N.Y.). 1982. Vol. 138. P. 1–35.
- [43] Михеев Н. В., Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Фоторождение нейтрино на электроны в плотной замагниченной среде // ЖЭТФ. 2014. Т. 146, № 2. С. 289–296.
- [44] Beloborodov A. M., Thompson C. Corona of magnetars // Astrophys. J. 2007. Vol. 657, no. 2. P. 967–993.
- [45] Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A. Compton effect in strongly magnetized plasma // Int. J. Mod. Phys. 2009. Vol. A24. P. 3995–4008.
- [46] Adler S. L. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. // Annals of Physics. 1971. Vol. 67. P. 599–647.

- [47] Mushtukov A. A., Nagirner D. I., Poutanen J. Compton scattering S-matrix and cross section in strong magnetic field // Phys. Rev. 2016. Vol. D93, no. 10. P. 105003.
- [48] Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Влияние сильно замагниченной плазмы на процесс расщепления фотона // ЖЭТФ. 2005. Т. 128, № 4. С. 740–751.
- [49] Herold H. Compton and Thomson scattering in strong magnetic fields // Phys. Rev. 1979. Vol. D19. P. 2868.
- [50] Bulik T., Miller M. C. Spectral effects of the vacuum resonance in soft gamma-ray repeaters // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1997. Vol. 288, no. 3. P. 596–608.
- [51] Румянцев Д. А., Шленев Д. М., Ярков А. А. Резонансы в комптоноподобных процессах рассеяния во внешней замагниченной среде // ЖЭТФ. 2017. Т. 152, № 3. С. 483–494.
- [52] Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A., Stus' N. S. Photon splitting and Compton scattering in strongly magnetized hot plasma // Phys. Rev. 2012. Vol. D86. P. 043007.
- [53] Pavlov G. G., Bezchastnov V. G., Meszaros P., Alexander S. G. Radiative widths and splitting of cyclotron lines in superstrong magnetic fields // Astrophys. J. 1991. Vol. 380. P. 541–549.
- [54] Baier V. N., Katkov V. M. Pair creation by a photon in a strong magnetic field // Phys. Rev. 2007. Vol. D75, no. 7. P. 073009.
- [55] Kuznetsov A. V., Rumyantsev D. A., Shlenev D. M. Generalized two-point tree-level amplitude $jf \rightarrow j'f'$ in a magnetized medium // Int. J. Mod. Phys. 2015. Vol. A30, no. 11. P. 1550049.