

РЕЗОНАНСНОЕ КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ

Д. А. Румянцев ^{a*}, А. А. Ярков ^{a,b**}, Д. М. Шленев ^{b***}^a Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
150000, Ярославль, Россия^b Ярославское высшее военное училище противовоздушной обороны
150001, Ярославль, Россия

Рассмотрен резонансный процесс комптоновского рассеяния в сильном магнитном поле. Получена вероятность реакции в зависимости от энергии и углов распространения начальных частиц. Вычислен коэффициент поглощения фотона за счет процесса в пределе сверхсильных магнитных полей. Найдены границы, в которых приближение узкого резонансного пика будет давать достаточно точные результаты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интерес к изучению комптоновского рассеяния $\gamma e \rightarrow \gamma e$ в сильном магнитном поле ($B \gtrsim B_e = 4.41 \times 10^{13}$ Гс ¹⁾) первоначально был вызван неожиданным открытием циклотронных спектральных линий у двойных рентгеновских пульсаров [1–3], которые изначально интерпретировались либо как циклотронное поглощение, либо как циклотронное излучение [1]. Дальнейшее повышение разрешения детекторов по энергии позволило уверенно заключить, что циклотронные особенности связаны именно с резонансным поглощением фотона [4]. При этом под циклотронным резонансом обычно понимается резкое увеличение сечения рассеяния по сравнению с классическим томсоновским сечением $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/(3m^2)$. В одной из первых работ по этой тематике [5] выражение для сечения комптоновского рассеяния в магнитном поле без плазмы было получено в нерелятивистском пределе, и для фотона, распространяющегося вдоль магнитного поля, в сечении был обнаружен резонансный пик при энергии:

$$\omega_B \simeq \frac{\beta}{m}, \quad (1)$$

где введено обозначение $\beta = eB$.

Кроме того, в работе [5] также было показано, что сечение рассеяния фотона на электроны зна-

чительно зависит как от поляризационного состояния фотона, так и от угла между направлением импульса начального фотона и направлением магнитного поля. В последовавшей за ней статье [6] исследовалось изменение энергии фотона в комптоновском процессе, кратное циклотронной частоте ω_B . В следующих работах [7, 8] были получены результаты для полного сечения рассеяния фотона на электроны с использованием формализма работы [5]. Тем не менее эти результаты будут справедливыми только для относительно слабого магнитного поля $B < 10^{12}$ Гс. Однако при значениях магнитного поля $B > 10^{12}$ Гс, как было показано в работах [9, 10], учет релятивистских эффектов в сечении комптоновского рассеяния становится существенным.

В представленных выше работах предполагалось, что начальный и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау, что является справедливым для предела сильного магнитного поля и/или низких температур $T \ll m$. В этом случае резонансный пик (1) смещается в область более низких энергий фотона, а кроме него возникает бесконечный ряд резонансных пиков, соответствующих разным уровням Ландау n виртуального электрона. Эти пики реализуются при энергиях фотона:

$$\omega_n(\theta) = \frac{\sqrt{m^2 + 2\beta n \sin^2 \theta} - m}{\sin^2 \theta}, \quad (2)$$

где θ – угол между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля.

С другой стороны, в результате комптоновского процесса могут возбуждаться высшие уровни Ландау начального электрона, что, в свою очередь, может выступать механизмом рождения фотонов ма-

* E-mail: rda@uniyar.ac.ru

** E-mail: a121@mail.ru

*** E-mail: allen_caleb@rambler.ru

¹⁾ В данной работе используется естественная система единиц: $c = \hbar = k_B = 1$, m – масса электрона, $e > 0$ – элементарный заряд.

лых энергий для магнитных полей $B \lesssim B_e$ [11, 12]. В таком случае для произвольных уровней Ландау ℓ начального электрона резонансные пики будут наблюдаться на энергиях [11]:

$$\omega_{n\ell}(\theta) = \frac{\sqrt{M_\ell^2 - \sin^2 \theta (M_\ell^2 - M_n^2)} - M_\ell}{\sin^2 \theta}, \quad (3)$$

где $M_\ell = \sqrt{m^2 + 2\beta\ell}$, $M_n = \sqrt{m^2 + 2\beta n}$ и т.п.

В рассмотренных выше работах сечение комптоновского рассеяния становится бесконечным при энергиях фотона, соответствующих циклотронным резонансам (2) вследствие предположения о большом времени жизни виртуальных частиц. По этой причине их результаты справедливы только для областей энергий фотона вдали от резонансов и могут быть применены, например, для моделирования излучения замагниченной холодной плазмы вблизи поверхности нейтронных звезд [13] или же для относительно слабых магнитных полей $B \lesssim 10^{10}$ Гс [14].

С другой стороны, учет резонансов в комптоновском процессе является необходимым при моделировании спектров излучения сильно замагниченных нейтронных звезд [15–22]. При этом вблизи поверхности нейтронной звезды, где формируется излучение, резонансный обратный комптоновский процесс рассеяния фотонов малых энергий на высокоэнергетических электронах является доминирующим процессом, который приводит к охлаждению плазмы внутренней магнитосферы и образованию высокоэнергетического хвоста в спектре излучения [23–26].

Вблизи циклотронных резонансов для расчета сечения комптоновского рассеяния требуется учесть полную ширину изменения состояния электрона. Как было показано в работе [5], в нерелятивистском пределе присутствует лишь одна резонансная частота, определяемая соотношением (2), и сечение рассеяния не зависит от поляризационного состояния электрона (или его спинового состояния), и можно ввести полную ширину, как это было сделано в работе [27]. Однако в сильных магнитных полях $B \gtrsim B_e$ и при высоких энергиях частиц требуется учитывать релятивистские поправки, что приводит к тому, что выражение для сечения становится очень громоздким, поскольку оно имеет бесконечное число резонансов (см. (3)), содержащихся в сумме по всем промежуточным виртуальным состояниям.

Изначально для учета конечных резонансных пиков использовались усредненные по спину ширины распада промежуточного состояния [28, 29]. Как было указано в работе [30], такой подход не является

точным, поскольку усреднение по спину некорректно учитывает спиновую зависимость времени распада виртуального электрона, что приводит к неверному значению сечения комптоновского рассеяния в точке резонанса. Этот недостаток был устранен в работе [31], где представлено сечение рассеяния процесса $\gamma e \rightarrow \gamma e$ с учетом ширины распада виртуальных промежуточных состояний, которая зависит от поляризационного состояния электрона. Однако полное сечение комптоновского рассеяния, полученное таким методом, представляет собой громоздкое выражение, что, например, затрудняет его использование в моделях переноса излучения.

В ряде случаев выражение сечения рассеяния можно упростить для получения аналитического решения различных задач. Так, в работе [28] была использована аппроксимация сечения рассеяния с учетом резонанса в ультрарелятивистском пределе для случая относительно сильного магнитного поля $B > 0.1B_e$. В точке циклотронного резонанса виртуальный электрон становится реальным и распадается на масштабе комптоновского времени, поэтому вероятность комптоновского рассеяния сводится к вероятности одновершинного процесса поглощения фотона электроном $\gamma e \rightarrow e$. В работе [32] исследовался вопрос аппроксимации комптоновского сечения с помощью одновершинного процесса поглощения фотона электроном для магнитных полей $B \sim 0.1B_e$. При этом различие между одновершинным процессом поглощения и комптоновским рассеянием становится существенным на высших циклотронных резонансах из-за нерезонансного вклада. Еще один подход рассмотрен в работе [33], он заключается в том, что пропагатор виртуального электрона можно заменить на дельта-функцию, когда основной вклад в сечение рассеяния будут давать области вблизи резонансов (приближение узкого пика).

В настоящей работе вычисляется вероятность и дифференциальное сечение рассеяния резонансного комптоновского процесса в приближении узкого резонансного пика в сильном магнитном поле с величиной индукции порядка критического значения B_e . Для сверхсильных магнитных полей $B \gg B_e$ вычислена вероятность процесса с учетом конечной ширины изменения состояния электрона.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 вычисляется дифференциальное сечение рассеяния электрона на фотоне при резонансе на виртуальном электроном в приближении узкого резонансного пика. Результаты сравниваются с расчетами, полученными с учетом конечной ширины резо-

нансного пика. В разделе 3 вычислена вероятность резонансного комptonовского рассеяния в пределе сверхсильного магнитного поля.

2. ВЕРОЯТНОСТЬ КОМПТОНОВСКОГО РАССЕЯНИЯ ПРИ РЕЗОНАНСЕ НА ВИРТУАЛЬНОМ ЭЛЕКТРОНЕ

Для решения рассматриваемой задачи будем использовать лагранжиан взаимодействия электрона, описываемого волновой функцией $\Psi(X)$, с фотоном в поляризованном состоянии λ , заданным $A_\mu^{(\lambda)}(X)$, имеет следующий вид:

$$\mathcal{L}(X) = -e[\bar{\Psi}(X)\gamma^\mu A_\mu^{(\lambda)}(X)\Psi(X)], \quad (4)$$

где $V = L_x L_y L_z$ – нормировочный объем. Волновые функции электрона $\Psi(X)$ в данной работе выбираются как собственные векторы ковариантного оператора μ_z , который строится следующим образом ²⁾:

$$\mu_z = m\Sigma_z - i\gamma_0\gamma_5 [\mathbf{\Sigma} \times \mathbf{P}]_z, \quad (5)$$

где $\mathbf{\Sigma} = -\gamma_0\gamma\gamma_5$ – трехмерный оператор спина, $\mathbf{P} = -i\nabla + e\mathbf{A}$, $A^\mu = (0, 0, xB, 0)$ – 4-вектор потенциала электромагнитного поля в калибровке Ландау.

Уравнение для собственных функций оператора (5) имеет следующий вид:

$$\mu_z \Psi_{p,n}^s(X) = sM_n \Psi_{p,n}^s(X), \quad (6)$$

в котором квантовое число $s = \pm 1$ определяет поляризационные состояния электрона в постоянном однородном магнитном поле, а $n = 0, 1, \dots$ соответствует уровню Ландау. Состояние электрона характеризуется энергией $E_n = \sqrt{p_z^2 + M_n^2}$ и является бесконечно вырожденным по p_z и дважды вырожденным по s , кроме состояния $n = 0$, где возможно лишь состояние с $s = -1$. Собственные функции оператора (5) могут быть представлены следующим образом:

$$\Psi_{p,n}^s(X) = \frac{e^{-i(E_n X_0 - p_y X_2 - p_z X_3)} U_n^s(\xi)}{\sqrt{4E_n M_n (E_n + M_n)(M_n + m)L_y L_z}}, \quad (7)$$

где

$$\xi(X_1) = \sqrt{\beta} \left(X_1 + \frac{p_y}{\beta} \right). \quad (8)$$

Биспиноры $U_n^s(\xi)$ имеют следующий вид:

$$U_n^-(\xi) = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2\beta n} p_z V_{n-1}(\xi) \\ (E_n + M_n)(M_n + m)V_n(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_{n-1}(\xi) \\ -p_z(M_n + m)V_n(\xi) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$U_n^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_n + M_n)(M_n + m)V_{n-1}(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta n} p_z V_n(\xi) \\ p_z(M_n + m)V_{n-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta n}(E_n + M_n)V_n(\xi) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

$V_n(\xi)$ – нормированные функции гармонического осциллятора, которые следующим образом выражаются через полиномы Эрмита $H_n(\xi)$ [35]:

$$V_n(\xi) = \frac{\beta^{1/4} e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\xi). \quad (11)$$

Волновая функция фотона $A_\mu^{(\lambda)}(X)$ используется в виде плосковолновых решений:

$$A_\mu^{(\lambda)}(X) = \frac{e^{-i(qX)}}{\sqrt{2\omega V}} \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q), \quad (12)$$

где $q^\mu = (\omega, \mathbf{q})$ – 4-вектор энергии-импульса и $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q)$ – вектор поляризации фотона. В замагниченном вакууме у фотона есть два возможных поляризационных состояния ³⁾, которые определяются следующими векторами поляризации:

$$\varepsilon_\alpha^{(1)}(q) = \frac{(q\varphi)_\alpha}{\sqrt{q_\perp^2}}, \quad \varepsilon_\alpha^{(2)}(q) = \frac{(q\tilde{\varphi})_\alpha}{\sqrt{q_\parallel^2}}, \quad (13)$$

где $\varphi_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}/B$ – безразмерный тензор электромагнитного поля и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}$ – тензор, дуальный к нему.

S -матричный элемент рассеяния фотона поляризации λ на электроне в поляризованном состоянии s , находящемся на уровне Ландау ℓ , с рождением электрона в поляризованном состоянии s' на уровне Ландау ℓ' и фотона поляризации λ' , с учетом лагранжиана (4) может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e'}^{s's} &= -e^2 \int d^4X d^4Y A_\mu^{(\lambda)}(X) A_{\mu'}^{(\lambda')}(Y) \times \\ &\times \left[\bar{\Psi}_{p',\ell'}^{s'}(Y) \gamma_{\mu'} S(Y, X) \gamma_\mu \Psi_{p,\ell}^s(X) \right] + \\ &+ (A_\mu^{(\lambda)}, \gamma_\mu \leftrightarrow A_{\mu'}^{(\lambda')}, \gamma_{\mu'}). \end{aligned} \quad (14)$$

²⁾ Подробнее о причинах выбора этого метода, предложенного А.А. Соколовым и И.М. Терновым [34], можно прочитать в нашей предыдущей работе [33].

³⁾ Подробный анализ дисперсионных свойств фотона в замагниченной среде можно найти в работе [36] и цитированных в ней статьях.

Входящий в него пропагатор $S(X, Y)$ удобно рассматривать в виде разложения по уровням Ландау:

$$S(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s''=\pm 1} S_n^{s''}(X, Y). \quad (15)$$

Вклад в разложение пропагатора от уровня Ландау n и поляризационного состояния s'' можно представить следующим образом:

$$S_n^{s''}(X, Y) = \int \frac{dp_0 dp_y dp_z}{(2\pi)^3} \times \quad (16)$$

$$\times \frac{e^{-i p_0 (X_0 - Y_0) + i p_y (X_2 - Y_2) + i p_z (X_3 - Y_3)}}{p_0^2 - p_z^2 - M_n^2 + i \mathcal{I}_{\Sigma}^{s''}(p)} \times$$

$$\times \phi_{p,n}^{s''}(X_1) \bar{\phi}_{p,n}^{s''}(X_1),$$

где введено обозначение:

$$\phi_{p,n}^s(X_1) = \frac{U_n^{s''}[\xi(X_1)]}{\sqrt{2M_n(E_n + M_n)(M_n + m)}}. \quad (17)$$

$\mathcal{I}_{\Sigma}^{s''}(p)$ в выражении (16) является мнимой частью массового оператора электрона. Резонанс на виртуальном фермионе будет наблюдаться, когда в знаменателе пропагатора (16) реальная часть обращается в ноль. Тогда виртуальная частица становится реальной, то есть приобретает определенный закон дисперсии. Анализ кинематики показывает, что это возможно только тогда, когда виртуальный фермион занимает один из высших уровней Ландау, $n > 0$. Частица при этом является нестабильной, и время ее жизни, в нерезонансной области предполагающееся бесконечно большим, определяется мнимой частью массового оператора, $\mathcal{I}_{\Sigma}^{s''}(p)$, учет которой становится необходимым. Она может быть получена с помощью оптической теоремы и представлена в следующем виде [37, 38]:

$$\mathcal{I}_{\Sigma}^{s''}(p) = -\frac{1}{2} p_0 \Gamma_n^{s''}, \quad (18)$$

где $\Gamma_n^{s''}$ – полная ширина изменения состояния электрона за счет процесса рассеяния фотона на электроны, которую можно выразить через ширину поглощения электрона в процессе $e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma$ [39]:

$$\Gamma_n^{s''} \simeq \Gamma_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma}^{(abs) s''} \left[1 + e^{-(E_n'' - \mu)/T} \right], \quad (19)$$

$$\Gamma_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma}^{(abs) s''} = \sum_{\ell'=0}^{n-1} \sum_{s'=\pm 1} \sum_{\lambda'} \int \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \times \quad (20)$$

$$\times [1 - f_e(E_{\ell'})] \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\gamma}(\omega')) \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma(\lambda')}^{s' s''}|^2}{\tau},$$

где $f_e(E_{\ell'}) = (1 + \exp[E_{\ell'}/T])^{-1}$ – равновесная функция распределения электронов с температурой T и нулевым химическим потенциалом, $f_{\gamma}(\omega') = (\exp[\omega'/T] - 1)^{-1}$ – равновесная функция распределения фотонов.

Если в области резонанса выполняется условие $E_n'' \Gamma_n^{s''} \ll |(p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2|$, где $E_n'' = E_n + \omega$ – энергия виртуального электрона, то можно использовать приближение узкого резонансного пика. В приближении узкого резонансного пика квадрат знаменателя пропагатора (16) может быть заменен на δ -функцию:

$$\left| \frac{1}{(p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2 - i E_n'' \Gamma_n^{s''}/2} \right|^2 \simeq \frac{2\pi}{E_n'' \Gamma_n^{s''}} \delta((p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2). \quad (21)$$

С учетом этого квадрат S -матричного элемента, определяющий вероятность процесса и необходимый при расчетах вычисляемых величин, таких как сечение рассеяния, может быть представлен в факторизованном виде [33]:

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{\gamma(\lambda) e_{\ell} \rightarrow \gamma(\lambda') e_{\ell'}}^{s' s}|^2}{\tau} = \quad (22)$$

$$= \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2\pi)^2} \frac{|\mathcal{S}_{\gamma(\lambda) e_{\ell} \rightarrow e_n}^{s'' s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow \gamma(\lambda') e_{\ell'}}^{s' s''}|^2}{\tau},$$

где

$$\mathcal{S}_{\gamma(\lambda) e_{\ell} \rightarrow e_n}^{s'' s} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(p+q-p'')}{\sqrt{2q_0 V^2 E_{\ell} L_y L_z 2E_n'' L_y L_z}} \mathcal{M}_{\gamma(\lambda) e_{\ell} \rightarrow e_n}^{s'' s}, \quad (23)$$

$$\mathcal{S}_{e_n \rightarrow \gamma(\lambda') e_{\ell'}} = \mathcal{S}_{\gamma(\lambda) e_{\ell} \rightarrow e_n}(q \rightarrow q', E_{\ell} \rightarrow E_{\ell'})$$

– S -матричные элементы подпроцессов: поглощения фотона, $e\gamma \rightarrow e$, и рождения фотона, $e \rightarrow e\gamma$. Выражения в явном виде для амплитуд одновершинных процессов $\mathcal{M}_{\gamma(\lambda) e_{\ell} \rightarrow e_n}^{s' s}$ и $\mathcal{M}_{e_n \rightarrow \gamma(\lambda') e_{\ell'}}^{s' s}$ представлены в работе [33].

Для астрофизических приложений полученных результатов удобно вместо сечения использовать коэффициент поглощения фотона – вероятность перехода фотона в другое состояние за счет тех или иных процессов, который для комптоновского процесса был определен, например, в работе [36]:

$$W_{\gamma e \rightarrow \gamma e} = \sum_{\ell, \ell'=0}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_e(E_{\ell}) \times \quad (24)$$

$$\times \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_e(E_{\ell'})] \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} [1 + f_{\gamma}(\omega')] \times$$

$$\times \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{\gamma(\lambda) e_{\ell} \rightarrow \gamma(\lambda') e_{\ell'}}^{s' s}|^2}{\tau}.$$

Просуммировав (24) по поляризационным состояниям конечного электрона и фотона и проведя несложное интегрирование, получим:

$$W_{\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma e} = \frac{\alpha\beta}{2\omega} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \times \quad (25)$$

$$\times \frac{f_e(E_\ell^\epsilon)[1 - f_e(E_\ell^\epsilon + \omega)]}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times$$

$$\times \left\{ [2\beta(n + \ell) - q_\parallel^2](\mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell}^2) - \right.$$

$$\left. - 8\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} \right\},$$

$$W_{\gamma^{(2)}e \rightarrow \gamma e} = \frac{\alpha\beta}{2\omega} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \times \quad (26)$$

$$\times \frac{f_e(E_\ell^\epsilon)[1 - f_e(E_\ell^\epsilon + \omega)]}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times$$

$$\times \left\{ \left[\frac{(2\beta(n - \ell))^2}{q_\parallel^2} - 2\beta(n + \ell) - 4m^2 \right] \times \right.$$

$$\times (\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2) - \left. - 8\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right\},$$

где

$$E_\ell^\epsilon = \frac{1}{2q_\parallel^2} \left[\omega (M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2) + \right.$$

$$\left. + \epsilon k_z \sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2} \right],$$

для $n \geq \ell$ [31]

$$\mathcal{I}_{n,\ell}(x) = \sqrt{\frac{\ell!}{n!}} e^{-x/2} x^{(n-\ell)/2} L_\ell^{n-\ell}(x), \quad (27)$$

$$\mathcal{I}_{\ell,n}(x) = (-1)^{n-\ell} \mathcal{I}_{n,\ell}(x),$$

и $L_n^k(x)$ – обобщенные полиномы Лагерра [35]. Отметим, что функции (27) соответствуют функциям $\Lambda_{\ell,n}(x)$ в работах [30, 40]. Далее в работе будет использовано обозначение $\mathcal{I}_{n,\ell} \equiv \mathcal{I}_{n,\ell}\left(\frac{q_\parallel^2}{2\beta}\right)$.

В (25) и (26) суммирование по n ограничено согласно закону сохранения энергии и импульса следующим образом:

$$n_0 = \ell + \left\lceil \frac{q_\parallel^2 + 2M_\ell\sqrt{q_\parallel^2}}{2\beta} \right\rceil, \quad (28)$$

где $[x]$ – целая часть числа x .

С дифференциальным сечением рассеяния коэффициент поглощения связан следующим образом [41]

$$d\sigma_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e} = \frac{dW_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e}}{j}, \quad (29)$$

где $j = |(pq)_\parallel|/(E\omega V)$ – плотность потока падающих частиц в продольном по отношению к магнитному полю подпространстве. В работах [31, 32, 42] исследовался процесс комptonовского рассеяния в замагниченной плазме при ненулевых температурах и магнитных полях, характерных для магнитосфер радиопульсаров и магнитаров $10^{12} - 10^{15}$ Гс. При этом сечение рассеяния было рассчитано при условии, что начальный и конечный электроны находятся на основном уровне Ландау. При расчетах учитывался резонанс на виртуальном электроне с конечной шириной, полученной с использованием корректных решений уравнения Дирака (7).

В данных работах сечение интегрировалось по импульсам начального электрона в системе покоя плазмы с нормированной функцией распределения $\bar{f}_{n,s}(E_n)$, введенной следующим образом:

$$\sigma_\lambda^* = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_{n,s}(E_n) d\sigma_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e}, \quad (30)$$

где

$$d\sigma_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e} = \frac{dW_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e}}{j}, \quad (31)$$

$j = |(pq)_\parallel|/(E\omega V)$ – плотность потока падающих частиц в продольном по отношению к магнитному полю подпространстве. Исходя из нормировки функции распределения:

$$\sum_{n,s} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \bar{f}_{n,s}(E_n) = 1, \quad (32)$$

представим ее в виде:

$$\bar{f}_{n,s}(p_z) = \frac{\beta}{(2\pi)^2 n_e} \frac{1}{e^{E_n/T} + 1}, \quad (33)$$

где

$$n_e = \frac{\beta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2 - \delta_{\ell,0}) \int_{-\infty}^{\infty} dp_z f_e(E_\ell) \quad (34)$$

– концентрация электронов во внешнем магнитном поле.

С учетом (30) – (34) дифференциальное сечение рассеяния, просуммированное по поляризациям конечного фотона, может быть выражено через дифференциальный коэффициент поглощения:

$$d\sigma_\lambda^* = \frac{E\omega}{(pq)_\parallel} \frac{1}{n_e} dW_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e}. \quad (35)$$

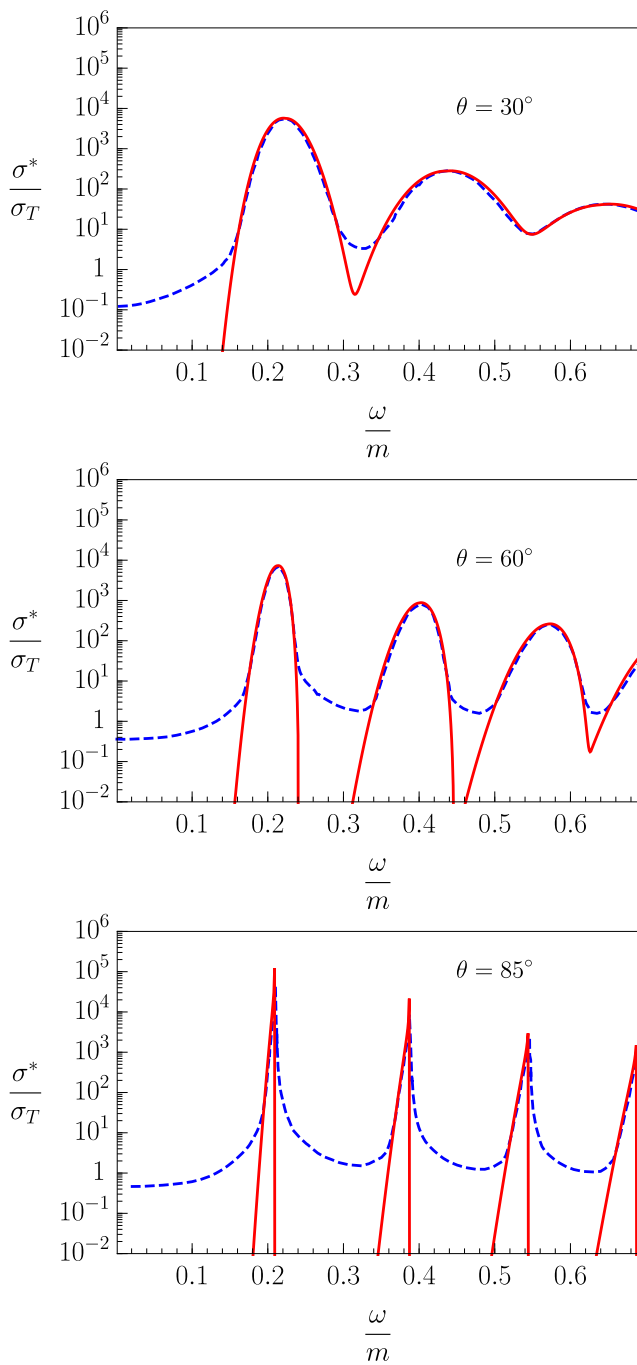


Рис. 1. Зависимость усредненного по поляризациям начального фотона сечения резонансного комптоновского рассеяния, полученного в δ -функциональном приближении (сплошная линия) и с учетом конечной ширины изменения состояния электрона [32] (пунктирная линия), от энергии начального фотона для магнитного поля $B = 10^{13}$ Гс и температуры $T = 5$ кэВ для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля.

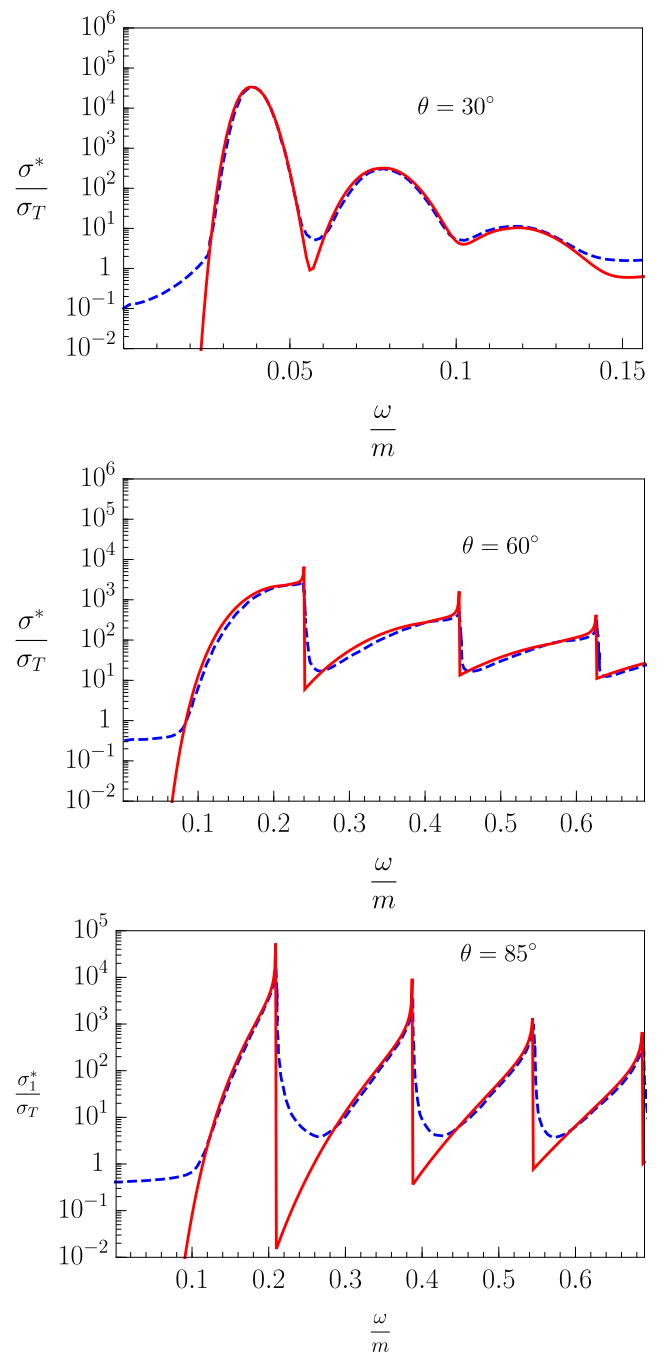


Рис. 2. Зависимость усредненного по поляризациям начального фотона сечения резонансного комптоновского рассеяния, полученного в δ -функциональном приближении (сплошная линия) и с учетом конечной ширины изменения состояния электрона [32] (пунктирная линия), от энергии начального фотона для магнитного поля $B = 10^{13}$ Гс и температуры $T = 50$ кэВ для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля.

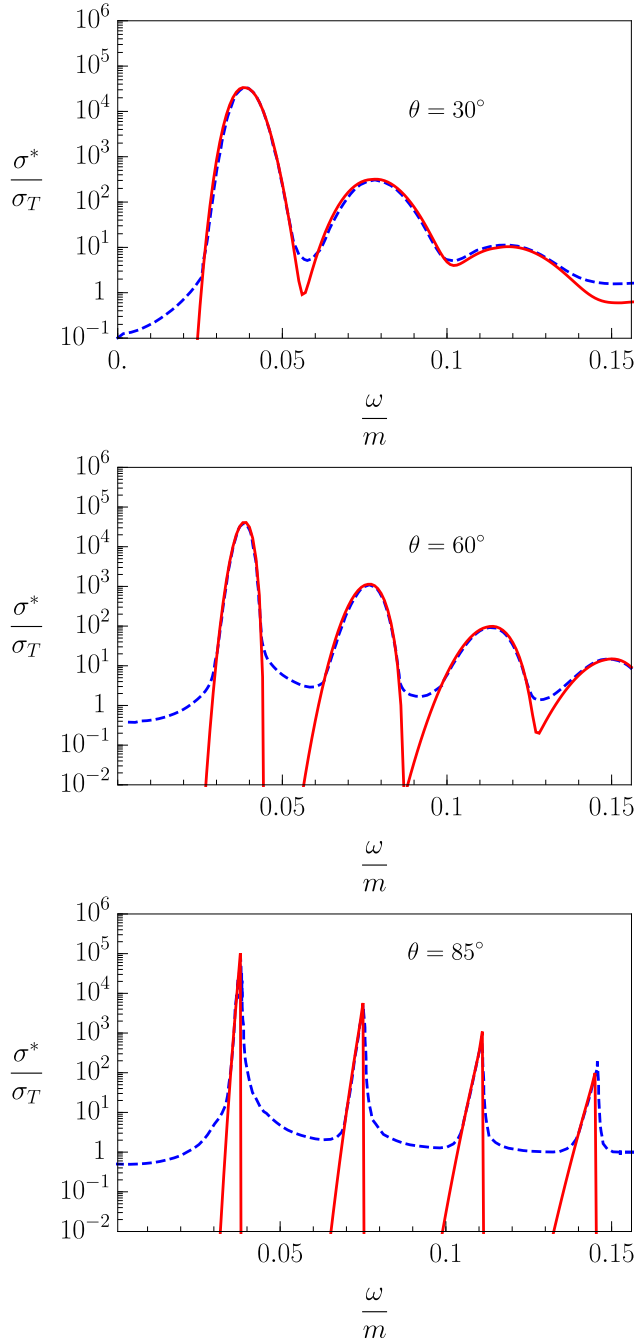


Рис. 3. Зависимость усредненного по поляризациям начального фотона сечения резонансного комптоновского рассеяния, полученного в δ -функциональном приближении (сплошная линия) и с учетом конечной ширины изменения состояния электрона [32] (пунктирная линия), от энергии начального фотона для магнитного поля $B = 1.7 \cdot 10^{12}$ Гс и температуры $T = 5$ кэВ для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля.

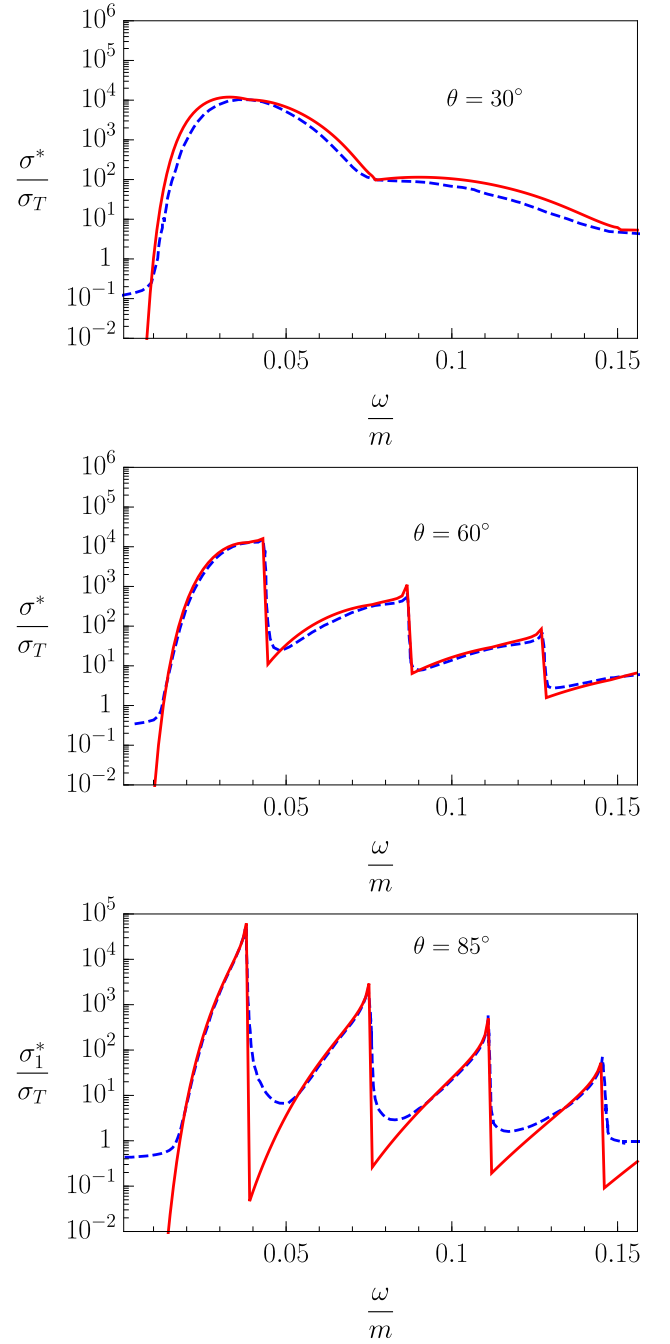


Рис. 4. Зависимость усредненного по поляризациям начального фотона сечения резонансного комптоновского рассеяния, полученного в δ -функциональном приближении (сплошная линия) и с учетом конечной ширины изменения состояния электрона [32] (пунктирная линия), от энергии начального фотона для магнитного поля $B = 1.7 \cdot 10^{12}$ Гс и температуры $T = 50$ кэВ для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля.

Сравнительный анализ усредненного по поляризациям начального фотона сечения рассеяния, вычисленного как в приближении узкого резонансного пика, так и с учетом конечной ширины изменения состояния электрона [32, 42], представлен на рисунках 1–4. В относительно недавних работах [31, 42] вычислялись парциальные сечения рассеяния для начального фотона моды 1 и моды 2 (отметим, что обозначения векторов поляризации фотонов индексами 1 и 2 соответствуют X и O модам работ [31, 42]) с учетом конечной ширины процесса. В то время, как расчеты в дельта-функциональном приближении находятся в хорошем согласии с результатами [32, 42] в области резонансных пиков, сечение рассеяния, вычисленное в работе [31], существенно расходится с указанными работами, а также с более ранней статьей того же автора [43]. Таким образом, применение приближения узкого пика (21) правомочно в области полей $B \gtrsim 10^{12}$ Гс, характерной для магнитаров и радиопульсаров. Кроме того, полученные в этом приближении коэффициенты поглощения фотона (25) и (26) представляют собой конечные суммы вместо многомерных интегралов при учете конечной ширины процесса, что является гораздо более удобным в приложениях, например, к решению задачи переноса излучения.

Можно дополнительно учесть, что при температуре $T \simeq 50$ кэВ начинают возбуждаться высшие уровни Ландау начальных электронов, что приводит к существенному увеличению сечения рассеяния. Узкие пики, соответствующие энергиям $\omega_{n\ell} = (M_n - M_\ell)/\sin\theta$, хорошо известны в литературе (см., например, [44–46]), но при этом вносят малый вклад в интегральные величины.

3. РЕЗОНАНСНОЕ КОМПТОНОВСКОЕ РАССЕЯНИЕ В СВЕРХСИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

Рассмотрим теперь ситуацию сверхсильного магнитного поля, $B \sim 10^{15} - 10^{16}$ Гс, и высоких температур, $T \sim 1$ МэВ, которые характерны для гигантских вспышек SGR – источников мягких повторяющихся гамма-всплесков (см., например, об-

зор [47]). Исследование комптоновского процесса в магнитных полях указанного масштаба было проведено, например, в работе [36]. Однако полученные в этом исследовании результаты будут справедливыми только для области энергий фотонов вдали от резонансов. Поэтому представляет самостоятельный интерес вычислить коэффициент поглощения

фотона в пределе сильного поля с учетом возможного резонанса на виртуальном электроне с конечной шириной резонансного пика и сравнить с нерезонансным пределом [36] и дельта-функциональным приближением [33]. Поскольку в пределе сильного магнитного поля начальный и конечный электроны будут преимущественно занимать основной уровень Ландау, а виртуальный электрон – первый уровень Ландау, то коэффициент поглощения фотона с учетом конечной ширины резонансного пика примет достаточно простой для вычисления вид. Поскольку в сильном магнитном поле энергии фотона, на которых наблюдается резонанс, выше, чем порог рождения e^+e^- пары $q_\parallel^2 = 4m^2$ для фотона моды 2, то целесообразно рассмотреть только каналы рассеяния $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}$ и $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$. Следует отметить, что для фотона моды 1 порог рождения e^+e^- пары $q_\parallel^2 = (M_1 + m)^2$ заведомо выше рассматриваемой области резонанса $q_\parallel^2 = (M_1 - m)^2$.

Как показывает численный анализ, в случае сильно замагниченной, горячей, зарядово-симметричной плазмы полная ширина поглощения электрона для первого уровня Ландау Γ_1 мало отличается от соответствующего выражения в сильном магнитном поле и ультрарелятивистских электронов [48]:

$$E_1''\Gamma_1 = \alpha\beta(1 - e^{-1}) \simeq 0.623\alpha\beta, \quad (36)$$

где $E_n'' = E + \omega$ – энергия виртуального электрона.

В пределе сильного поля парциальные коэффициенты поглощения фотона для каналов $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}$ и $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$ с учетом конечной ширины поглощения электрона в случае, когда начальный фотон распространяется поперек магнитного поля, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} W_{e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}} &= \frac{\beta\alpha^2 m^2}{\pi} \int dQ_0 dk_z' \frac{k_z'^2 \omega}{(-Q_\parallel^2)^2 \varkappa} \exp \left[-\frac{q_\perp^2 + q_\perp'^2}{2\beta} \right] \times \\ &\times \sum_{\sigma=\pm 1} \left\{ \frac{1}{((p_\sigma + q)_\parallel^2 - M_1^2)^2 + (E_1''\Gamma_1)^2} + \frac{1}{((p_\sigma - q')_\parallel^2 - M_1^2)^2 + (E_1''\Gamma_1)^2} - \right. \\ &- 2 \frac{q_\perp^2 q_\perp'^2}{4\beta^2} J_2 \left(\frac{\sqrt{q_\perp^2} \sqrt{q_\perp'^2}}{\beta} \right) \times \\ &\times \frac{[(p_\sigma + q)_\parallel^2 - M_1^2][(p_\sigma - q')_\parallel^2 - M_1^2] + (E_1''\Gamma_1)^2}{[(p_\sigma - q')_\parallel^2 - M_1^2]^2 + (E_1''\Gamma_1)^2 [(p_\sigma + q)_\parallel^2 - M_1^2]^2 + (E_1''\Gamma_1)^2} \Big\} \times \\ &\times f_e(E_\sigma) [1 - f_e(E_\sigma + Q_0)] [1 + f_\gamma(\omega')], \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned}
W_{e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}} &= \frac{\beta\alpha^2 m^2}{\pi} \int dQ_0 dk'_z \frac{q'^2_{\perp} \omega}{(-Q_{\parallel}^2)^2 \kappa} \exp \left[-\frac{q_{\perp}^2 + q'^2_{\perp}}{2\beta} \right] \times \\
&\times \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{Q_0}{\omega} \left\{ \frac{1}{((p_{\sigma} + q)_{\parallel}^2 - M_1^2)^2 + (E_1'' \Gamma_1)^2} + \frac{Q_0 \omega}{q'^2_{\parallel} ((p_{\sigma} - q')_{\parallel}^2 - M_1^2)^2 + (E_1'' \Gamma_1)^2} - \right. \\
&- 2 \frac{q_{\perp}^2 q'^2_{\perp}}{4\beta^2} J_2 \left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2} \sqrt{q'^2_{\perp}}}{\beta} \right) \times \\
&\times \frac{[(p_{\sigma} + q)_{\parallel}^2 - M_1^2][(p_{\sigma} - q')_{\parallel}^2 - M_1^2] + (E_1'' \Gamma_1)^2}{[(p_{\sigma} - q')_{\parallel}^2 - M_1^2]^2 + (E_1'' \Gamma_1)^2 [(p_{\sigma} + q)_{\parallel}^2 - M_1^2]^2 + (E_1'' \Gamma_1)^2} \times \\
&\times \left. \frac{Q_0(\omega - Q_0)}{q'^2_{\perp}} \right\} f_e(E_{\sigma}) [1 - f_e(E_{\sigma} + Q_0)] [1 + f_{\gamma}(\omega')] ,
\end{aligned} \tag{38}$$

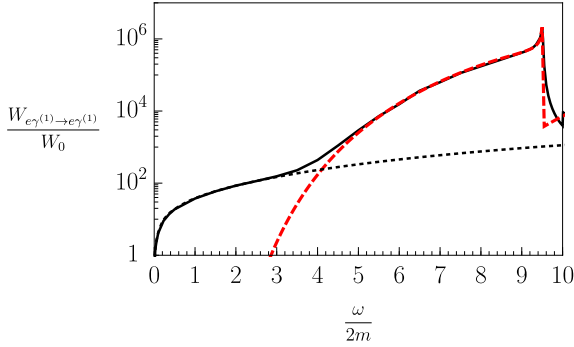


Рис. 5. Зависимость коэффициента поглощения от энергии начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}$ при поле $B = 200B_e$ и температуре $T=1$ МэВ: сплошная линия – коэффициент поглощения с учетом резонанса; штриховая линия – без учета резонанса; пунктирная линия – дельта-функциональное приближение. Здесь $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{ см}^{-1}$.

где $J_n(x)$ – функция Бесселя целого индекса, $\kappa = \sqrt{1 - 4m^2/Q_{\parallel}^2}$, $E_{\sigma} = \sqrt{p_{z\sigma}^2 + m^2}$, $p_{z\sigma}$ – корни уравнения $Q_0 + E_{\sigma} - E'_{\sigma} = 0$:

$$p_{z\sigma} = -\frac{Q_z}{2} + \sigma Q_0 \kappa, \tag{39}$$

$p_{\sigma\parallel}^{\alpha} = (E_{\sigma}, p_{z\sigma})$. Поперечная составляющая импульса конечного фотона определяется из уравнения дисперсии:

$$q'^2_{\parallel} = q'^2_{\perp} + \mathcal{P}^{(\lambda)}(q'). \tag{40}$$

Имеет смысл провести сравнительный анализ результатов работы [36] с резонансным случаем (37) и (38) для зарядово-симметричной плазмы и поперечного направления распространения импульса фотона по отношению к внешнему магнитному полю для различных значений величины магнитного поля, температуры и энергии начального фотона.

На рис. 5–8 показаны коэффициенты поглощения для каналов $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(1)}e$ и $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(2)}e$ при

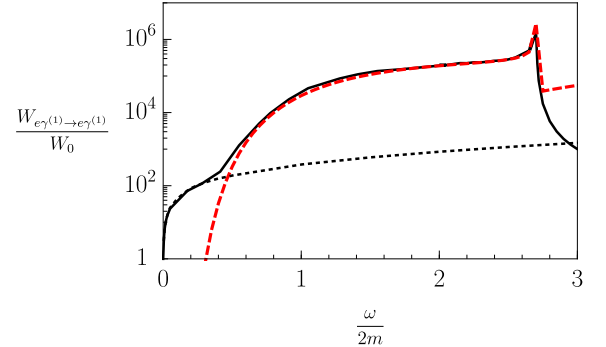


Рис. 6. Зависимость коэффициента поглощения от энергии начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}$ при поле $B = 20B_e$ и температуре $T=1$ МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 5.

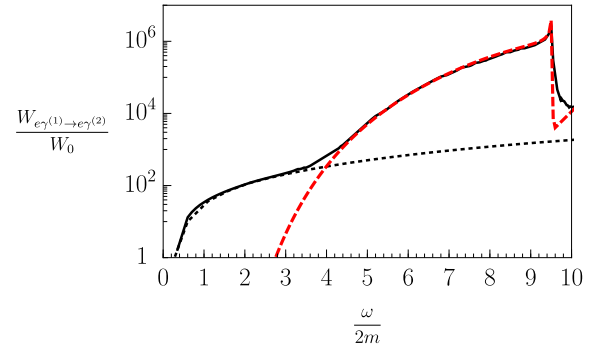


Рис. 7. Зависимость коэффициента поглощения от энергии начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$ при поле $B = 200B_e$ и температуре $T=1$ МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 5.

температуре $T = 1$ МэВ и величине магнитного поля $B = 200B_e$ и $B = 20B_e$ соответственно. Как видно из рис. 5–6, коэффициент поглощения для канала $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(1)}e$ согласуется с погрешностью не более 8% с соответствующими результатами для предела сильного поля и отсутствия резонанса, полученные

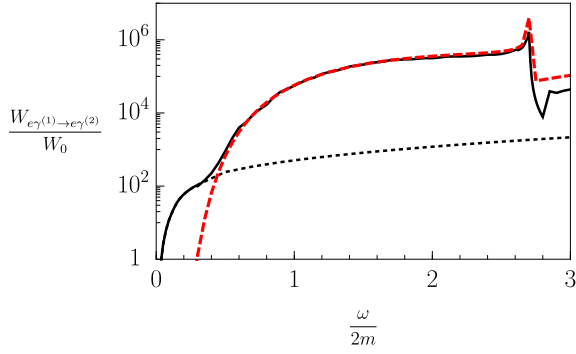


Рис. 8. Зависимость коэффициента поглощения от энергии начального фотона для канала $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$ при поле $B = 20B_e$ и температуре $T=1$ МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 5.

ми в работе [36], вплоть до энергий начального фотона $\omega \simeq 3$ МэВ для поля $B = 200B_e$ и $\omega \simeq 0.3$ МэВ для поля $B = 20B_e$. Отсюда вытекает ограничение на применимость результатов работы [36] по энергиям начального фотона. Аналогичная ситуация наблюдается и для канала $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(2)}e$ (см. рис. 7–8), для которого точность соответствия с коэффициентом поглощения в нерезонансном пределе – до 16% для значений магнитных полей $B = 200B_e$ и до 18% для значений магнитных полей $B = 20B_e$ в нерезонансной области. На рис. 6 и 8 наиболее ярко видно завышение коэффициента поглощения даже при относительно малых энергиях начального фотона. Этот факт связан с тем, что в пределе сильного магнитного поля разложение амплитуды комптоновского процесса по обратным степеням поля уже не будет правомочным.

С другой стороны, δ -функциональное приближение достаточно хорошо описывает первый резонансный пик. Действительно, для канала $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(1)}e$ погрешность в пределе узкого резонансного пика составляет не более 9% для значения магнитного поля $B = 200B_e$ и 13% для $B = 20B_e$. Учет дисперсии фотона моды 2 для канала $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(2)}e$ приводит к более высокому несоответствию – до 15% для $B = 200B_e$ и до 25% для $B = 20B_e$. Следует отметить что при относительно малых температурах $T \lesssim 50$ кэВ и магнитными полями той же величины ($B = 200B_e$ и $B = 20B_e$) δ -аппроксимация работает хуже из-за уменьшения области резонанса. В целом δ -функциональное приближение достаточно хорошо будет описывать лишь первый резонансный пик.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе вычислены коэффициенты поглощения и дифференциальное сечение в реакции комптоновского рассеяния в сильном магнитном поле в приближении узкого резонансного пика. Показано, что такое приближение дает хорошее согласие с расчетами из более ранних работ [32, 42, 43]. Существенные отличия от результатов статьи [31], по всей видимости, связаны с ошибками в последней.

В пределе сильного магнитного поля $B > B_e$ и высоких температур $T = 1$ МэВ вычислен коэффициент поглощения фотона в комптоновском процессе для двух кинематически разрешенных каналов $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(1)}e$ и $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(2)}e$. Полученные численные результаты позволили установить области энергий фотона, при которых применим нерезонансный предел [36]: $\omega \lesssim 3$ МэВ при $B = 200B_e$ и $\omega \lesssim 0.3$ МэВ при $B = 20B_e$. Дельта-функциональное приближение при данных параметрах среды хорошо описывает только первый резонансный пик.

ЛИТЕРАТУРА

1. Trümper J., Pietsch W., Reppin C., Voges W., Staubert R., Kendziorra E., *Astrophys. J.* **219**, L105 (1978).
2. Makishima K., Mihara T., Ishida M. et al., *Astrophys. J. Lett.* **365**, L59 (1990).
3. Grove J. E., Strickman M. S., Johnson W. N. et al., *Astrophys. J. Lett.* **438**, L25 (1995).
4. Mihara T., Makishima K., Ohashi T., Sakao T., Tashiro M., Nagase F., Tanaka Y., Kitamoto S., Miyamoto S., Deeter J. E., Boynton P. E., *Nature* **346**, 250 (1990).
5. Canuto V., Lodenquai J., Ruderman M., *Phys. Rev. D* **3**, 2303 (1971).
6. Гнедин Ю. Н., Сюняев Р. А., *ЖЭТФ* **65**, 102 (1973).
7. Borner G., Meszaros P., *Plasma Phys.* **21**, 357 (1979).
8. Ventura J., *Phys. Rev. D* **19**, 1684 (1979).
9. Herold H., *Phys. Rev. D* **19**, 2868 (1979).
10. Melrose D. B., Parle A. J., *Aust. J. Phys.* **36**, 799 (1983).
11. Daugherty J. K., Harding A. K., *Astrophys. J.* **309**, 362 (1986).

12. Bussard R. W., Alexander S. B., Meszaros P., Phys. Rev. D **34**, 440 (1986).
13. Özel F., Astrophys. J. **563**, 276 (2001).
14. Zavlin V. E., Pavlov G. G., Shibano Yu. A., A&A **315**, 141 (1996).
15. Alexander S. G., Meszaros P., Astrophys. J. **372**, 565 (1991).
16. Araya R. A., Harding A. K., Astrophys. J. **517**, 334 (1999).
17. Ho W. C. G., Lai D., MNRAS, **327**, 1081 (2001).
18. Lyutikov M., Gavril F. P., MNRAS, **368**, 690 (2006).
19. Potekhin A. Y., Lai D., Chabrier G., Ho W. C. G., Astrophys. J. **621**, 1034 (2004).
20. Schönherr G., Wilms J., Kretschmar P., Kreykenbohm I., Santangelo A., Rothschild R. E., Coburn W., Staubert R., A&A **472**, 353 (2007).
21. Nishimura O., Astrophys. J. **672**, 1127 (2008).
22. Suleimanov V., Potekhin A. Y., Werner K., A&A **500**, 891 (2009).
23. Fernández R., Thompson C., Astrophys. J. **660**, 615 (2007).
24. Nobili L., Turolla R., Zane S., MNRAS, **389**, 989 (2008).
25. Wadiasingh Z., Baring M. G., Gonthier P. L., Harding A. K., Astrophys. J. **854**, 98 (2018).
26. Beloborodov A. M., Astrophys. J. **762**, 13 (2013).
27. Daugherty J. K., Harding A. K., Astrophys. J. **336**, 861 (1989).
28. Gonthier P. L., Harding A. K., Baring M. G., Costello R. M., Mercer C. L., Astrophys. J. **540**, 1719 (2010).
29. Фомин П. И., Холодов Р. И., ЖЭТФ **117**, 319 (2000).
30. P. L. Gonthier, M. G. Baring et al., Phys. Rev. D **90**, 043014 (2014).
31. Mushtukov A. A., Nagirner D. I., Poutanen J., Phys. Rev. D **93**, 105003 (2016).
32. Harding A. K., Daugherty J. K., Astrophys. J. **374**, 687 (1991).
33. Румянцев Д. А., Шленев Д. М., Ярков А. А., ЖЭТФ **152**, 483 (2017).
34. Sokolov A. A., Ternov I. M., *Synchrotron Radiation*, Pergamon: Oxford (1968).
35. Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит: Москва (1963).
36. Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A., Int. J. Mod. Phys. A **24**, 3995 (2009).
37. Weldon H. A., Phys. Rev. D **26**, 1394 (1982).
38. Жуковский В. Ч., Мидодашвили П. Г., Эминов П. А., ЖЭТФ **106**, 929 (1994).
39. Weldon H. A., Phys. Rev. D **28**, 2007 (1983).
40. Daugherty J. K., Harding A. K., Astrophys. J. **309**, 362 (1986).
41. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Пятаевский Л. П., *Квантовая электродинамика*, Физматлит: Москва (2002).
42. Schwarm F.-W., Schönherr G., Falkner S., Pottschmidt K., Wolff M. T., Becker P. A., Sokolova-Lapa E., Klockov D., Ferrigno C., Fürst F., Hemphill P. B., Marcu-Cheatham D. M., Dauser T., Wilms J., A&A **597**, A3 (2017).
43. Mushtukov A. A., Suleimanov V. F., Tsygankov S. S., Poutanen J., MNRAS, **447**, 1847 (2015).
44. Pavlov G. G., Bezchastnov V. G., Meszaros P., Alexander S. G., Astrophys. J. **380**, 541 (1991).
45. Клепиков Н. П., ЖЭТФ **26**, 19 (1954).
46. Baier V. N., Katkov V. M., Phys. Rev. D **75**, 073009 (2007).
47. Kaspi V. M., Beloborodov A. M., Annu. Rev. Astron. & Astrophys. **55**, 261 (2017).
48. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V., *Electroweak Processes in External Active Media*, Springer-Verlag: Berlin, Heidelberg (2013).