

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

На правах рукописи

Шленев Денис Михайлович

# КОМПТОНОПОДОБНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПРИСУТСТВИИ ВНЕШНЕЙ АКТИВНОЙ СРЕДЫ

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доц.

Румянцев Дмитрий Александрович

Ярославль – 2019

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Обобщённые комптоноподобные процессы рассеяния в замагниченной среде с учётом возможного резонанса на виртуальном электроном</b> . . . . .	16
1.1. Введение . . . . .	16
1.2. Вычисление амплитуды реакций вида $jf \rightarrow j'f'$ . . . . .	17
1.3. Выражения для амплитуд процессов $jf \rightarrow j'f'$ вне резонанса . . . . .	25
1.3.1. Основной уровень Ландау . . . . .	27
1.3.2. Рассеяние вперёд . . . . .	30
1.4. Выражения для амплитуд реакций $jf \rightarrow j'f'$ в области резонанса . . . . .	36
1.5. Заключение . . . . .	42
<b>Глава 2. Резонансные квантовые процессы в астрофизических условиях</b> . . . . .	43
2.1. Введение . . . . .	43
2.2. Резонансный фотонейтринный процесс . . . . .	45
2.3. Резонансное комптоновское рассеяние . . . . .	48
<b>Глава 3. Процесс расщепления фотона в сильном магнитном поле с учётом влияния позитрония</b> . . . . .	53
3.1. Введение . . . . .	53
3.2. Дисперсия фотона в зарядово несимметричной плотной плазме. . . . .	56
3.3. Дисперсия фотона в сильном магнитном поле с учётом влияния позитрония . . . . .	60
3.4. Вероятность для процесса расщепления фотона в зарядово несимметричной плотной плазме. . . . .	61

3.5. Вероятность для процесса расщепления фотона в сильном маг-	
нитном поле с учётом влияния позитрония . . . . .	65
3.6. Заключение . . . . .	66
Заключение . . . . .	70
Приложение А. Выражения для $\mathcal{R}_{k'k}^{s's}$ . . . . .	72
Приложение Б. Амплитуда расщепления фотона в сильно замаг-	
ниченной плазме . . . . .	111
Список литературы . . . . .	115

## Введение

**Актуальность темы исследования.** В настоящее время является установленным фактом, что наличие магнитного поля в широком классе астрофизических объектов представляет типичную ситуацию для наблюдаемой Вселенной. При этом масштаб индукции магнитного поля может варьироваться в очень широких пределах: от крупномасштабных ( $\sim 100$  килопарсек) межгалактических магнитных полей  $\sim 10^{-21}$  Гс [1], до полей, реализующихся в сценарии ротационного взрыва сверхновой  $\sim 10^{17}$  Гс [2, 3]. При этом, особый интерес представляют объекты с полями масштаба так называемого критического значения  $B_e = m^2/e \simeq 4.41 \times 10^{13}$  Гс. К ним, в частности, относятся изолированные нейтронные звезды, включающие в себя радиопульсары и так называемые магнитары, обладающими магнитными полями с индукцией от  $10^{12}$  Гс (радиопульсары) до  $4 \times 10^{14}$  Гс (магнитары). Недавние наблюдения позволяют, в частности, отождествить некоторые астрофизические объекты, такие как источники мягких повторяющихся гамма-всплесков (SGR) и аномальные рентгеновские пульсары (АХР), с магнитарами [4–9]. Согласно наиболее известной в настоящее время модели [10–12] в окрестности таких объектов возможно существование сильного магнитного поля, достигающего величины  $10^{15} - 10^{16}$  Гс.

Анализ спектров излучения как радиопульсаров, так и магнитаров свидетельствует также о наличии электрон-позитронной плазмы в их магнитосферах с концентрацией порядка значения концентрации Голдрайха-Джулиана [13]:

$$n_{GJ} \simeq 3 \times 10^{13} \text{ см}^{-3} \left( \frac{B}{100 B_e} \right) \left( \frac{10 \text{ сек}}{P} \right), \quad (1)$$

где  $P = 2\pi/\Omega$  - период обращения нейтронной звезды.

Естественно ожидать, что такие экстремальные условия будут оказывать существенное влияние на квантовые процессы, где в конечном или начальном состоянии могут присутствовать как электрически заряженные, так и электрически нейтральные частицы, такие как электроны, фотоны и нейтрино. Воздей-

ствие внешнего поля на такие процессы обусловлено как чувствительностью заряженных фермионов (в первую очередь электронов, как частиц с наибольшим удельным зарядом) к влиянию поля, так и тем фактом, что сильно замагниченная плазма существенно меняет дисперсионные свойства частиц, а значит, и их кинематику [14–19].

Кроме того, присутствие плотной горячей плазмы у нейтронных звёзд может приводить к тому, что магнитное поле перестаёт быть максимальным параметром задачи, или, если точнее, перестаёт выполняться условие [20]:

$$\frac{B^2}{8\pi} \gg \frac{\pi^2(n_{e^-} - n_{e^+})^2}{eB} + \frac{eBT^2}{12}. \quad (2)$$

При значениях плотности плазмы  $\rho \geq 10^8$  г/см<sup>3</sup> начинают возбуждаться высшие уровни Ландау виртуальных фермионов, в результате чего они становятся нестабильными. Это явление приводит к возникновению возможности резонансных переходов, которые способны значительно повлиять на скорость протекания реакций в астрофизических объектах.

Среди квантовых процессов, свойства которых существенно, а иногда принципиально меняются под воздействием замагниченной среды, особый интерес для астрофизики представляют одно-, двух- и трёхвершинные процессы. Это обусловлено тем, что с точки зрения влияния микрофизических процессов на макроскопические характеристики астрофизических объектов (например, скорость потери энергии, число рождаемых частиц, коэффициент диффузии и т.п.) существенными будут лишь те реакции, которые дают лидирующие по константам связи вклады.

Замагниченная среда с не слишком высокими значениями плотности и температуры ( $T \lesssim 2$  МэВ,  $\rho \lesssim 10^{11}$  г/см<sup>3</sup>, такие условия могут существовать во внешней коре нейтронной звезды после двадцати секунд после её рождения [21]) является прозрачной для нейтрино. По этой причине квантовые процессы, содержащие нейтрино в конечном состоянии, играют определяющую роль при остывании нейтронных звёзд на начальной стадии их эволюции [22–25].

Ещё одной актуальной физической задачей является описание вспышечной активности SGR. Согласно общепринятой модели [10, 26], в магнитосфере магнитара вблизи его поверхности формируется относительно долго живущая область, занятая захваченной магнитным полем горячей  $e^+e^-$  плазмой и находящимися в термодинамическом равновесии с ней фотонами (так называемый «trapped fireball»), которая относительно медленно остывает за счёт испускания нейтрино и фотонов. Последние и формируют наблюдаемый спектр мягкого рентгеновского и гамма-излучения (так называемый «long tail» - «длинный хвост»), причём форма этого спектра, по-видимому, определяется зависимостью коэффициента поглощения фотона от энергии и температуры. К основным процессам, дающим лидирующий вклад в коэффициент поглощения фотона в условиях вспышки SGR относятся процессы комптоновского рассеяния ( $\gamma e^\pm \rightarrow \gamma e^\pm$ ), расщепления ( $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ ) и слияния ( $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$ ) фотонов.

**Степень разработанности темы исследования.** Типичный пример двухвершинного процесса с вершинами векторного типа в присутствии замагниченной плазмы - это комптоновское рассеяние, представляющее возможный канал формирования радиационного спектра излучения нейтронной звезды. Он был рассмотрен в ряде работ [27–31]. Однако приведённые в них результаты были получены без учёта дисперсионных свойств фотона в активной среде. Этот недочёт был исправлен в статье [32]. Выражение для амплитуды комптоновского рассеяния для случая, когда начальный и конечный электроны находятся на основном уровне Ландау, было представлено в явном лоренц-инвариантном виде.

Другим примером комптоноподобного процесса с векторной и аксиально-векторной вершинами является переход фотона в пару нейтрино за счёт процесса  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , который был рассмотрен в присутствии замагниченной плазмы в работах [28, 33]. Однако результаты в работе [33] представлены в довольно громоздкой форме, не обладающей явной лоренц-инвариантностью. Кроме того, методика вычислений, предложенная в этой работе, оказывается малопри-

годной для анализа процессов рассеяния фотонов на фермионах с рождением экзотических частиц, таких как аксионы, нейтралино и т.д.

Все существующие модели внутреннего строения нейтронных звёзд дают значения параметров среды (плотности и температуры), при которых замагниченная плазма прозрачна для нейтрино. Поэтому реакции с парой нейтрино-антинейтрино в конечном состоянии играют определяющую роль в нейтринном остывании.

В условиях внешних регионов нейтронной звезды основными каналами производства нейтрино являются следующие процессы: аннигиляция электрон-позитронных пар,  $e\bar{e} \rightarrow \nu\bar{\nu}$ , конверсия фотона в пару нейтрино-антинейтрино,  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ , двухфотонная аннигиляция,  $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  и фотонейтринный процесс,  $e\gamma \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ . Реакция аннигиляции электрон-позитронной пары имеет длительную историю исследования, и ей посвящено большое количество работ [34–42], в которых он рассматривался при различных физических условиях. Петлевой процесс распада фотона на нейтринную пару изучался в двух предельных случаях: сильного магнитного поля без плазмы и в слабо замагниченной плазме (распад плазмона) [18, 33, 43–48]. История исследования двухфотонной аннигиляции насчитывает более 50 лет [36, 49–63]. Начало изучения фотонейтринного процесса датируется началом 60-ых годов XX века [64, 65]. В последующие годы вышел ряд работ, посвящённых этой реакции [20, 35–38, 40, 41, 66–68]. Результаты рассмотрения этих реакций для различных значений температуры и плотности среды были представлены в обзоре [21].

Сравнительный анализ, проведённый в [20], показал, что фотонейтринный процесс вносит основной вклад в нейтринную светимость при малых плотностях плазмы ( $10^6 \lesssim \rho \lesssim 10^8$  г/см<sup>3</sup>), в то время как при плотностях  $10^8 \lesssim \rho \lesssim 10^{10}$  г/см<sup>3</sup> начинает доминировать реакция конверсии фотона. Однако полученные в приведённой работе результаты не учитывали возможность осуществления резонанса на виртуальном электроне и становятся неприменимыми при плотностях, превышающих значение  $\rho_9 = 10^9$  г/см<sup>3</sup>, при которых начинают возбуждаться

высшие уровни Ландау виртуального электрона.

Первые работы, посвящённые комптоновскому рассеянию в магнитном поле, датируются 70-ыми годами прошлого века [27, 69–73], и с тех пор интерес к этому процессу только возрастал.

С другой стороны, резонанс на виртуальном электроне для электродинамического процесса с двумя векторными вершинами,  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , в настоящее время представляет огромный интерес для астрофизических приложений к задаче формирования спектров излучения в магнитосферах нейтронных звезд [74, 75]. В этих работах исследование резонанса в реакции  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  проводилось в случае конечной ширины резонансных пиков, что представляет собой достаточно громоздкую вычислительную задачу.

Другим интересным примером электродинамического процесса является расщепление фотона,  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ . Эта реакция запрещена в вакууме, но становится разрешённой в присутствии внешнего магнитного поля. Процесс расщепления фотона исследовался в течение длительного времени [76–85]. Тем не менее, интерес к нему не угасает из-за астрофизических приложений, ведущих к наблюдаемым результатам. Сюда входят объяснение особенностей гамма-спектров некоторых радиопульсаров [86], особенностей радио-излучения у источников мягких повторяющихся гамма-всплесков и аномальных рентгеновских пульсаров [87–89], объяснение механизмов вспышек источников мягких повторяющихся гамма-всплесков [10, 26]. Детальный обзор литературы был проведён в работе [90]. Следует обратить внимание, что масштаб индукции магнитного поля у этих объектов может быть порядка  $B_e$  или выше [91]. Процесс расщепления фотона в сильно замагниченной плазме был изучен в статье [90]. В ней были получены правила отбора по поляризациям фотонов и парциальные вероятности в разрешённых каналах. С другой стороны, исследование влияния позитрония на дисперсию фотона в сильном магнитном поле было проведено в работе [92] на примере процесса радиационного распада нейтрино,  $\nu \rightarrow \nu\gamma$ . Однако, подобного рассмотрения для процесса расщепления фотона ранее, по



всей видимости, не проводилось.

### **Цели и задачи диссертационной работы:**

1. Вычислить амплитуды обобщённого комптоноподобного процесса в области резонанса  $jf \rightarrow j'f'$  в постоянном однородном магнитном поле и замагниченной плазме, где  $f$  и  $f'$  - начальный и конечный фермионы, находящиеся на произвольных уровнях Ландау,  $j$  и  $j'$  - обобщенные токи скалярного, псевдоскалярного, векторного или аксиального типов для случая возможного резонанса на виртуальном фермионе.
2. Вычислить нейтринную излучательную способность, обусловленную комптоноподобным процессом фоторождения нейтрино,  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , в холодной замагниченной плазме с учетом резонанса на виртуальном электроны, занимающем произвольный уровень Ландау  $n$ .
3. Получить коэффициент поглощения фотона в процессе  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  с учётом резонанса на виртуальном электроны в приближении  $\delta$ -образного пика.
4. Для процесса расщепления фотона  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , в присутствии холодной почти вырожденной плазмы и в сильном магнитном поле с учётом вклада позитрония в дисперсию фотона определить правила отбора по поляризациям фотонов и вычислить соответствующие парциальные вероятности для разрешённых каналов .

### **Научная новизна.**

1. Впервые получены амплитуды процесса  $jf \rightarrow j'f'$  в замагниченной плазме в области резонанса.
2. Впервые получена нейтринная излучательная способность, обусловленная процессом фоторождения нейтрино,  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , в холодной замагниченной плазме с учетом резонанса на виртуальном электроны, занимающем произвольный уровень Ландау  $n$ .

3. Впервые получены коэффициент поглощения фотона в процессе  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  с учётом резонанса на виртуальном электроне в приближении  $\delta$ -образного пика.
4. Впервые получены правила отбора по поляризациям и вероятности в разрешённых каналах для процесса расщепления фотона в холодной почти вырожденной плазме и в сильном магнитном поле с учётом вклада позитрония.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты представляют интерес для дальнейших теоретических исследований в области астрофизики и физики элементарных частиц, когда изучаемые частицы находятся под воздействием внешних экстремальных условий. Также результаты исследования могут быть использованы в образовательных целях как материал для учебной и методической литературы в помощь студентам соответствующих направлений подготовки.

#### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Впервые исследованы возможные резонансные эффекты в древесных двухвершинных амплитудах для переходов  $jf \rightarrow j'f'$  в постоянном однородном магнитном поле и в присутствии замагниченной плазмы, где  $f$  и  $f'$  - начальный и конечный фермионы, находящиеся на произвольных уровнях Ландау,  $j$  и  $j'$  - обобщенные токи скалярного, псевдоскалярного, векторного или аксиального типов. Показано, что в области резонанса амплитуды реакции  $jf \rightarrow j'f'$  однозначно выражаются через амплитуды процессов  $jf \rightarrow \tilde{f}$  и  $\tilde{f} \rightarrow j'f'$ , содержащих промежуточное состояние  $\tilde{f}$ .
2. Впервые вычислена нейтринная излучательная способность, обусловленная процессом  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$  в холодной замагниченной плазме с учетом резонанса на виртуальном электроне, занимающем произвольный уровень Ландау  $n$ . Впервые получен коэффициент поглощения фотона в процессе

резонансного рассеяния  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  в присутствии замагниченной плазмы, результат представлен в простой аналитической форме, удобной для дальнейшего использования при решении задачи переноса излучения. Показано, что использование  $\delta$ -функциональной аппроксимации резонансных пиков в области резонансов хорошо согласуется с соответствующими в литературе результатами, полученными громоздкими численными расчетами.

3. Найдены правила отбора по поляризациям для процесса расщепления фотона  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  в холодной почти вырожденной плазме и в сильном магнитном поле с учётом вклада позитрония. Для разрешённых каналов расщепления фотона вычислены парциальные вероятности процесса с учётом влияния замагниченной холодной плазмы и позитрония в дисперсию и перенормировку волновых функций фотонов. Полученные результаты показывают, что вклады плазмы и позитрония, с одной стороны, существенным образом изменяют правила отбора по поляризациям по сравнению со случаем чистого магнитного поля. В частности, становится возможным новый канал расщепления  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ . С другой стороны, вероятность расщепления по каналам  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$  оказалась подавлена по сравнению со случаем замагниченного вакуума.

Представленные результаты являются оригинальными и новыми.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Основные результаты диссертации докладывались лично автором на следующих российских и международных конференциях и семинарах:

1. Международная сессия-конференция Секции ЯФ ОФН РАН «Физика фундаментальных взаимодействий» (г. Дубна, 2016)
2. XIV Конференция молодых учёных «Фундаментальные и прикладные космические исследования» (г. Москва, 2017)

3. The XXIII International Workshop «High Energy Physics and Quantum Field Theory» (г. Ярославль, 2017)
4. XXth International Seminar on High Energy Physics «Quarks-2018» (г. Валдай, 2018)

Автор докладывал результаты исследований на научных семинарах кафедры теоретической физики ЯрГУ им. П. Г. Демидова.

### **Публикации.**

Всего по теме диссертации опубликовано 7 работ в рецензируемых международных и российских журналах, из них 2 статьи в журналах, рекомендованных ВАК для публикации результатов кандидатских и докторских диссертаций и включенных в индексы цитирования Scopus и Web Of Science, 5 публикаций докладов на научных конференциях.

### **Личный вклад автора.**

1. Автором вычислены амплитуды обобщенного комптоноподобного процесса  $jf \rightarrow j'f'$  в постоянном однородном магнитном поле в резонансном случае.
2. Автором вычислена нейтринная излучательная способность, обусловленная комптоноподобным процессом фоторождения нейтрино,  $\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , в холодной замагниченной плазме с учетом резонанса на виртуальном электро-не, занимающем произвольный уровень Ландау  $n$ .
3. Автором получены коэффициент поглощения фотона в процессе  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  при резонансе на виртуальном электро-не в приближении  $\delta$ -образного пика.
4. Автором определены правила отбора по поляризациям и вычислены вероятности процесса  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  в разрешённых каналах в присутствии холодной почти вырожденной плазмы и в сильном магнитном поле с учётом влияния позитрония.

**Структура и объем диссертации.** Настоящая диссертация посвящена изучению квантовых процессов с учётом резонансных эффектов и влияния внешней активной среды на кинематику и дисперсию частиц. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, двух приложений и списка литературы.

В первой главе вычисляются амплитуды для обобщённого процесса рассеяния  $jf \rightarrow j'f'$ , где  $f$  и  $f'$  - начальный и конечный фермионы, находящиеся на произвольных уровнях Ландау,  $j$  и  $j'$  - обобщённые токи скалярного, псевдоскалярного, векторного или аксиального типов, в постоянном однородном магнитном поле в древоном приближении в резонансном и нерезонансном случаях. Результаты представлены в явном калибровочно- и лоренц-инвариантном виде. Для нерезонансного рассеяния рассмотрены частные случаи сильного магнитного поля, когда все реальные фермионы занимают основной уровень Ландау, и когерентного рассеяния тока  $j$  «вперед» без изменения состояний фермионов. Последний результат позволяет обобщить имеющиеся в литературе выражения для амплитуд перехода  $j \rightarrow f\bar{f} \rightarrow j'$  в магнитном поле на случай произвольно замагниченной плазмы.

Во второй главе вычисляются нейтринная светимость за счёт резонансного процесса  $e\gamma \rightarrow e\nu\bar{\nu}$  в плотной замагниченной среде и коэффициент поглощения фотона в реакции резонансного рассеяния  $e\gamma \rightarrow e\gamma$  в приближении  $\delta$ -образного резонансного пика.

В третьей главе рассмотрен процесс расщепления фотона,  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , в присутствии холодной почти вырожденной плазмы и сильного магнитного поля с учётом влияния позитрония. В ней получены модифицированные правила отбора по поляризациям и парциальные вероятности процесса в каждом разрешённом канале.

В Заключении сформулированы основные результаты диссертации.

В Приложении А приведены факторы  $\mathcal{R}_{k'k}^{s's}$ , входящие в выражения для обобщенных амплитуд процесса  $jf \rightarrow j'f'$  с токами  $j$  и  $j'$  скалярного, псевдо-

скалярного, векторного или аксиального типов.

В Приложении Б описано получение амплитуд процесса расщепления фотона в присутствии замагниченной плазмы.

*Основные обозначения, используемые в диссертации*

Используется 4-метрика с сигнатурой  $(+ - - -)$ , а также естественная система единиц  $\hbar = 1, c = 1, k_B = 1$ .

Элементарный заряд:  $e = |e|$ , заряд фермиона:  $e_f$ . Масса фермиона:  $m_f$ , масса электрона:  $m$ . Постоянная тонкой структуры:  $\alpha$ , константа Ферми:  $G_F$ .

Тензор внешнего поля:  $F_{\alpha\beta}$ , дуальный тензор:  $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$ .

Обезразмеренный тензор магнитного поля:  $\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$ , дуальный обезразмеренный тензор:  $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}$ .

У 4-векторов и тензоров, стоящих внутри круглых скобок, тензорные индексы полагаются свернутыми последовательно, например:

$$(pFFp) = p^\alpha F_{\alpha\beta} F^{\beta\delta} p_\delta; \quad (FFp)_\alpha = F_{\alpha\beta} F^{\beta\delta} p_\delta; \quad (FF) = F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha}.$$

Безразмерные тензоры  $\Lambda_{\alpha\beta} = (\varphi\varphi)_{\alpha\beta}$ ,  $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\alpha\beta}$  связаны соотношением  $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ .

В системе отсчета, где имеется только магнитное поле  $\mathbf{B}$ , направленное вдоль третьей оси, 4-векторы с индексами  $\perp$  и  $\parallel$  относятся к подпространствам Евклида  $\{1, 2\}$  и Минковского  $\{0, 3\}$  соответственно. При этом

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \text{diag}(0, 1, 1, 0), \quad \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 0, 0, -1).$$

Для произвольных векторов  $p_\mu, q_\mu$  имеем:

$$p_\perp^\mu = (0, p_1, p_2, 0), \quad p_\parallel^\mu = (p_0, 0, 0, p_3),$$

$$(pq)_\perp = (p\Lambda q) = p_1q_1 + p_2q_2, \quad (pq)_\parallel = (p\tilde{\Lambda}q) = p_0q_0 - p_3q_3.$$

Остальные обозначения те же, что приняты в книге [93].

## Глава 1

# Обобщённые комптоноподобные процессы рассеяния в замагниченной среде с учётом возможного резонанса на виртуальном электроне

## 1.1. Введение

Как отмечалось во Введении данной диссертации, исследование одно- и двухвершинных процессов во внешней активной среде (электромагнитном поле и/или плазме) имеет довольно длинную историю. Так, в работе [94] были получены наиболее общие выражения для двухвершинных однопетлевых амплитуд вида  $jf \rightarrow j'f'$  в постоянном однородном магнитном поле и скрещенном поле для различных комбинаций вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов.

Представляет интерес получение в древесном приближении двухвершинных амплитуд для рассеяния типа  $jf \rightarrow j'f'$  в постоянном однородном магнитном поле и в присутствии заряженной фермионной плазмы для различных комбинаций вершин, которые были рассмотрены в работе [94], и, в частности, обобщить её результаты на случай замагниченной плазмы, поскольку такая ситуация выглядит наиболее реалистичной в приложении к различным моделям астрофизических объектов. Одно из таких обобщений было сделано в работе [95] для поляризационного оператора фотона в замагниченной электрон-позитронной плазме. Следует отметить, что подобного обобщения для одновершинных процессов, несмотря на непрекращающиеся исследования [18, 96–100], по-видимому, ранее не проводилось. Далее, результаты этих обобщений можно дополнить, если учесть также возможность проявления резонанса на виртуальном фермионе в процессе  $jf \rightarrow j'f'$ . Заметим, что резонанс подобного типа для



электродинамического процесса с двумя векторными вершинами,  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , в настоящее время представляет огромный интерес для астрофизических приложений к задаче формирования спектров излучения в магнитосферах нейтронных звезд [74, 75]. В этих работах исследование резонанса в реакции  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  проводилось в случае конечной ширины резонансных пиков, что представляет собой достаточно громоздкую вычислительную задачу. С другой стороны, использование  $\delta$ -функциональной аппроксимации пиков может не только значительно упростить вычисления, но и позволяет также рассмотреть резонансы в реакциях общего вида  $jf \rightarrow j'f'$ .

Основные результаты этой главы были опубликованы в работах [101–103].

## 1.2. Вычисление амплитуды реакций вида $jf \rightarrow j'f'$

Для анализа обобщённых амплитуд рассеяния  $jf \rightarrow j'f'$  мы будем использовать эффективный локальный лагранжиан взаимодействия токов  $j$  с фермионами  $f$  в следующей форме:

$$\mathcal{L}(x) = \sum_k g_k [\bar{\Psi}_f(x) \Gamma_k \Psi_f(x)] J_k(x), \quad (1.1)$$

где индекс  $k = S, P, V, A$  соответствует матрицам  $\Gamma_k$ ,  $\Gamma_S = 1$ ,  $\Gamma_P = \gamma_5$ ,  $\Gamma_V = \gamma_\alpha$ ,  $\Gamma_A = \gamma_\alpha \gamma_5$ ;  $J_k(x)$  - операторы обобщённых токов ( $J_S$ ,  $J_P$ ,  $J_{V\alpha}$  или  $J_{A\alpha}$ ),  $g_k$  - соответствующие константы взаимодействия и  $\psi_f(x)$  - операторы фермионного поля.

Используя лагранжиан (1.1), можно описать широкий класс взаимодействий. Например, полагая в (1.1)  $k = V$ ,  $g_V = -e_f$ ,  $\Gamma_V j_V = A_\alpha \gamma_\alpha$ , где  $A_\alpha$  - потенциал поля фотонов, получим лагранжиан электромагнитного взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{em}(X) = -e_f [\bar{\Psi}_f(X) \gamma_\alpha A_\alpha(X) \Psi_f(X)], \quad (1.2)$$

при подстановках в (1.1)  $k = V, A$ ,  $g_V = G_F C_V / \sqrt{2}$  и  $g_A = G_F C_A / \sqrt{2}$ , получим

эффективный локальный лагранжиан четырёхфермионного слабого взаимодействия:

$$\mathcal{L}_w(X) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\Psi}_f(X) \gamma_\alpha (C_V + C_A \gamma_5) \Psi_f(X)] J_\alpha, \quad (1.3)$$

где  $J_\alpha = \bar{\nu}(X) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu(X)$  - ток нейтрино,  $C_V = \pm 1/2 + 2 \sin^2 \Theta_W$ ,  $C_A = \pm 1/2$ ,  $\Theta_W$  - угол Вайнберга ( $\sin^2 \Theta_W \simeq 0.231$ ),  $G_F \simeq 1.166 \times 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$  - постоянная Ферми, верхний знак соответствует случаю, когда аромат нейтрино совпадает с ароматом фермиона ( $\nu = \nu_f$ ), нижний - случаю, когда нейтрино и фермион имеют разные ароматы ( $\nu \neq \nu_f$ ).

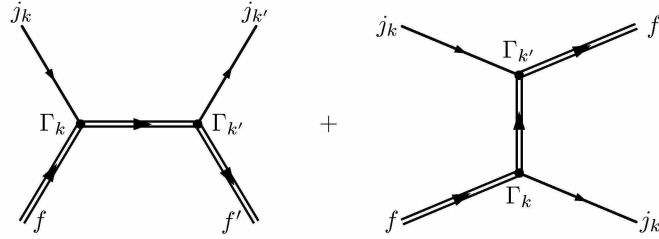


Рис. 1.1. Диаграммы Фейнмана для реакции  $j f \rightarrow j' f'$ . Двойные линии означают, что влияние внешнего поля на начальное и конечное состояния фермионов, а также на фермионный пропагатор, учтено точно.

В общем случае, исходя из лагранжиана (1.1),  $\mathcal{S}$ -матричный элемент процесса  $j f \rightarrow j' f'$ , который в древесном приближении описывается диаграммами Фейнмана, изображёнными на рис. 1.1, может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{k'k}^{s's} &= -g_k g_{k'} \int d^4 X d^4 Y \langle J_k(X) J_{k'}(Y) \rangle \times \\ &\times \left[ \bar{\Psi}_{p',\ell'}^{s'}(Y) \Gamma_{k'} \hat{S}(Y, X) \Gamma_k \Psi_{p,\ell}^s(X) \right] + (J_k, \Gamma_k \leftrightarrow J_{k'}, \Gamma_{k'}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $p^\mu = (E_\ell, \mathbf{p})$  и  $p'^\mu = (E_{\ell'}, \mathbf{p}')$  - четырёхмерные векторы энергии-импульса начального и конечного фермионов, находящихся на уровнях Ландау  $\ell$  и  $\ell'$  соответственно,  $\Psi_{p,\ell}^s(X)$  - волновые функции фермионов в присутствии внешнего магнитного поля,  $\hat{S}(Y, X)$  - пропагатор фермиона в магнитном поле, индексы  $s$  и  $s'$  обозначают поляризационные состояния начального и конечного фер-

мионов соответственно, токи между угловыми скобками обозначают матричный элемент между соответствующими начальным и конечным состояниями,  $\langle J_k(X) J_{k'}(Y) \rangle = j_k(X) j_{k'}(Y)$ ,  $X^\mu = (X_0, X_1, X_2, X_3)$ ,  $Y^\mu = (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3)$ .

Токи  $j_k(X)$  и  $j_{k'}(Y)$ , в свою очередь, могут быть представлены в виде плосковолновых решений с амплитудами  $j_k(q)$  и  $j'_{k'}(q')$  следующим образом:

$$j_k(X) = \frac{e^{-i(qX)}}{\sqrt{2q_0V}} j_k(q), \quad q^\alpha = (q_0, \mathbf{q}), \quad (1.5)$$

$$j_{k'}(Y) = \frac{e^{i(q'Y)}}{\sqrt{2q'_0V}} j'_{k'}(q'), \quad q'^\alpha = (q'_0, \mathbf{q}'), \quad (1.6)$$

где  $V = L_x L_y L_z$  - нормировочный объем.

Существует несколько возможных способов построения волновых функций фермионов в присутствии внешнего магнитного поля из уравнения Дирака. Наиболее часто используются волновые функции в представлении, в котором они были получены Джонсоном и Липпманом [104]. Они применялись в работах авторов (см., например [104–110], а также [18, 19]). В этом представлении решения уравнения Дирака находятся как собственные функции оператора обобщённой спираальности,  $T_0 = \frac{1}{m_f}(\Sigma(-i\nabla - e_f \mathbf{A}))$ . Здесь  $\Sigma = -\gamma_0 \gamma \gamma_5$ . При этом выборе решений уравнения Дирака две верхние компоненты биспиноров соответствуют состояниям фермиона с проекцией спина на направление магнитного поля, равной  $1/2$  и  $-1/2$ .

Однако при расчётах конкретных характеристик процессов с двумя и более вершинами во внешнем магнитном поле, таких как сечение, ширина, коэффициенты поглощения и т.д., этот набор собственных функций оператора Гамильтона является не самым удобным по причине значительных вычислительных сложностей, а именно: модуль амплитуды возводится в квадрат с учетом вклада всех диаграмм, суммирования и усреднения по поляризационным состояниям фермионов, вычисления следов от произведений биспиноров и матриц Дирака. Поэтому более предпочтительным является нахождение парциальных вкладов

в амплитуду каждого поляризационного состояния частиц для каждой амплитуды в отдельности путем произведения биспиноров и матриц Дирака. Однако вычисленные парциальные вклады в амплитуду с применением волновых функций с фиксированным значением проекции спина не обладают лоренц-инвариантной структурой при преобразованиях вдоль магнитного поля. Инвариантом будет только квадрат модуля амплитуды, просуммированный по поляризациям фермионов.

Инвариантность парциальных вкладов в амплитуду, с точностью до одинаковой для всех диаграмм комплексной фазы, достигается использованием другого набора решений уравнения Дирака, являющихся собственными функциями для ковариантного оператора  $\hat{\mu}_z$ . Его можно получить непосредственно из введённого в работе [106] обобщённого оператора спина, являющегося тензором третьего ранга, который можно записать в координатном представлении следующим образом:

$$F_{\mu\nu\lambda} = -\frac{i}{2} (P_\lambda \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} + \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} P_\lambda), \quad (1.7)$$

где  $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)/2$ , и  $P^\lambda = i\partial^\lambda - e_f A^\lambda = (i\partial_0 - e_f A_0, -i\nabla - e_f \mathbf{A})$  - оператор обобщённого 4-импульса с 4-потенциалом внешнего магнитного поля  $A^\lambda$ . Заметим, что в работе [106] ковариантные билинейные формы были построены из матриц Дирака в обкладках биспиноров  $\psi^\dagger$  и  $\psi$ , тогда как в современной литературе (см., например [111]) билинейные формы строятся из матриц Дирака в обкладках биспиноров  $\bar{\psi}$  и  $\psi$ .

При учёте того, что в представлении Шрёдингера уравнение Дирака имеет вид:  $i\partial_0\psi = H\psi$ , где  $H = \gamma_0(\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}) + m_f\gamma_0 - eA_0$  - гамильтониан Дирака, из пространственных компонент  $F_{\mu\nu 0}$  оператора (1.7) можно построить следующий векторный оператор:

$$\hat{\mu}_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk0}, \quad (1.8)$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  - тензор Леви-Чивита. Построенный таким образом объект (1.8) имеет

смысл оператора поляризации [106, 107]. Его можно представить в виде:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = m_f \boldsymbol{\Sigma} + i\gamma_0 \gamma_5 [\boldsymbol{\Sigma} \times \hat{\boldsymbol{P}}], \quad (1.9)$$

где  $\boldsymbol{\Sigma} = \gamma_0 \gamma_5 \boldsymbol{\gamma}$  - трёхмерный оператор спина. В нерелятивистском пределе оператор (1.9), отнесённый к квадрату массы фермиона:  $\hat{\boldsymbol{\mu}}/m_f^2$ , переходит в обычный оператор Паули для магнитного момента [93], который имеет явную физическую интерпретацию.

Нетрудно показать на примере проекции оператора (1.9) на ось  $z$ , что его компоненты коммутируют с гамильтонианом:

$$\begin{aligned} [H, \hat{\mu}_z] &= [\gamma_0 \gamma_i P_i + m_f \gamma_0; m_f \gamma_0 \gamma_5 \gamma_3 + i\gamma_0 \gamma_5 \varepsilon_{3jk} \gamma_0 \gamma_5 \gamma_j P_k] = m_f P_i (\gamma_3 \gamma_5 \gamma_i - \\ &- \gamma_i \gamma_5 \gamma_3) + m_f^2 (\gamma_0 \gamma_0 \gamma_5 \gamma_3 - \gamma_0 \gamma_5 \gamma_3 \gamma_0) + i m_f (-\gamma_0 \gamma_j + \gamma_j \gamma_0) \varepsilon_{3jk} P_k = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Таким образом,  $H$  и  $\hat{\mu}_z$  имеют общие собственные функции. Следовательно, можно построить волновые функции фермионов как собственные функции оператора  $\hat{\mu}_z$  [106, 107]:

$$\hat{\mu}_z = m_f \Sigma_z + i\gamma_0 \gamma_5 [\boldsymbol{\Sigma} \times \boldsymbol{P}]_z, \quad (1.11)$$

где  $\boldsymbol{P} = -i\nabla - e_f \boldsymbol{A}$ .

Они являются решениями уравнения

$$\hat{\mu}_z \Psi_{p,\ell}^s(X) = s M_\ell \Psi_{p,\ell}^s(X), \quad s = \pm 1 \quad (1.12)$$

с собственными значениями  $M_\ell = \sqrt{m_f^2 + 2\beta\ell}$ .

Удобно выбрать систему отсчета, в которой ось  $z$  направлена вдоль индукции магнитного поля, и калибровку Ландау, в которой 4-потенциал имеет вид  $A^\lambda = (0, 0, xB, 0)$ . Далее будут использоваться обозначения  $\beta = |e_f|B$ , а также  $E_\ell = \sqrt{M_\ell^2 + p_z^2}$  для энергии фермиона в магнитном поле и  $\eta = e_f/|e_f|$  для знака заряда фермиона. В таком случае решения уравнения (1.12) принимают вид:

$$\Psi_{p,\ell}^s(X) = \frac{e^{-i(E_\ell X_0 - p_y X_2 - p_z X_3)} U_\ell^s(\xi)}{\sqrt{4E_\ell M_\ell (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) L_y L_z}}, \quad (1.13)$$

Удобно представить биспиноры  $U_\ell^s(\xi)$  в виде разложения по решениям для положительного и отрицательного заряда фермиона следующим образом:

$$U_\ell^s(\xi) = \frac{1-\eta}{2} U_{\ell,-}^s(\xi) + \frac{1+\eta}{2} U_{\ell,+}^s(\xi), \quad (1.14)$$

где

$$U_{\ell,-}^-(\xi) = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_{\ell-1}(\xi) \\ (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_{\ell-1}(\xi) \\ -p_z (M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

$$U_{\ell,-}^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_\ell(\xi) \\ p_z (M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_\ell(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

$$U_{\ell,+}^-(\xi) = \begin{pmatrix} i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_\ell(\xi) \\ (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_\ell(\xi) \\ -p_z (M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

$$U_{\ell,+}^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_{\ell-1}(\xi) \\ p_z (M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_{\ell-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$V_\ell(\xi)$  ( $\ell = 0, 1, 2, \dots$ ) - нормированные функции гармонического осциллятора,

которые следующим образом выражаются через полиномы Эрмита  $H_\ell(\xi)$  [112]:

$$V_\ell(\xi) = \frac{\beta^{1/4} e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2^\ell \ell!} \sqrt{\pi}} H_\ell(\xi), \quad (1.19)$$

$$\xi(X_1) = \sqrt{\beta} \left( X_1 - \eta \frac{p_y}{\beta} \right).$$

Для дальнейших вычислений удобно также ввести волновые функции  $\phi_{p,\ell}^s(X_1)$  (индекс  $p$  обозначает совокупность компонент импульса фермиона,  $p_0, p_y, p_z$ ), связанные с  $U_\ell^s(\xi)$  следующим образом:

$$\phi_{p,\ell}^s(X_1) = \frac{U_\ell^s[\xi(X_1)]}{\sqrt{2M_\ell(E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f)}}. \quad (1.20)$$

Для анализа возможных резонансных эффектов в процессах  $jf \rightarrow j'f'$  мы используем точный пропагатор фермиона в виде суммы по уровням Ландау [19, 113]. Он строится стандартным образом на основе полевых операторов:

$$\Psi(X) = \sum_{n,p_y,p_z,s} (a_{n,p}^s \Psi_{n,p,+}^s(X) + b_{n,p}^{\dagger s} \Psi_{n,p,-}^s(X)), \quad (1.21)$$

где  $a$  - оператор уничтожения фермиона,  $b^\dagger$  - оператор рождения фермиона,  $\Psi_+$  и  $\Psi_-$  соответствуют решениям уравнения Дирака с положительной и отрицательной энергией соответственно. Пропагатор есть разность хронологически упорядоченного и нормально упорядоченного произведения полевых операторов:

$$\hat{S}(X, X') = T(\Psi(X) \bar{\Psi}(X')) - N(\Psi(X) \bar{\Psi}(X')). \quad (1.22)$$

Результат удобно представить в следующем виде:

$$\hat{S}(X, X') = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}_n(X, X'), \quad (1.23)$$

где вклад  $n$ -го уровня Ландау может записан в форме:

$$\hat{S}_n(X, X') = \sum_{s=\pm 1} \hat{S}_n^s(X, X'), \quad (1.24)$$

$$\hat{S}_n^s(X, X') = \int \frac{dp_0 dp_y dp_z}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(p(X-X'))_{\parallel} + ip_y(X_2-X'_2)}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 - \mathcal{R}_{\Sigma}^s(p) + i\mathcal{I}_{\Sigma}^s(p)} \phi_{p,n}^s(X_1) \bar{\phi}_{p,n}^s(X'_1). \quad (1.25)$$

Возникающие в знаменателе пропагатора (1.25) реальная  $\mathcal{R}_{\Sigma}^s(p)$  и мнимая  $\mathcal{I}_{\Sigma}^s(p)$  части собственного значения массового оператора фермиона, соответствующие поляризованному состоянию  $s$ , есть результат вычисления радиационных поправок к массе фермиона в замагниченной плазме. Мнимая часть  $\mathcal{I}_{\Sigma}^s(p)$  может быть получена с помощью оптической теоремы и представлена в следующем виде [114, 115]:

$$\Im_{\Sigma}^s(p) = -\frac{1}{2} p_0 \Gamma_n^s, \quad (1.26)$$

где  $\Gamma_n^s$  – полная ширина поглощения фермиона, находящегося в поляризованном состоянии  $s$  и занимающего  $n$ -й уровень Ландау.

Реальная часть массового оператора  $\mathcal{R}_{\Sigma}^s(p)$  определяет изменение (по сравнению с вакуумным) закона дисперсии фермиона в присутствии замагниченной плазмы. В слабых магнитных полях,  $B \ll B_e$ , она определяется отношением [116]:

$$\Re_{\Sigma}^s(p) = \frac{4\alpha m_f}{3\pi} \kappa^2 \left[ \ln \kappa^{-1} + C + \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{33}{16} \right], \quad \kappa \ll 1, \quad (1.27)$$

где  $C = 0.577\dots$  – постоянная Эйлера, динамический параметр  $\kappa$  вводится следующим образом:

$$\kappa = \frac{1}{m_f B_e} [-(F_{\mu\nu} p_{\nu})^2]^{1/2}. \quad (1.28)$$

В сильных магнитных полях,  $B \gtrsim B_e$ , сдвиг массы фермиона в основном состоянии описывается дважды логарифмической асимптотикой [117]:

$$\Re_{\Sigma}^s(p) = \frac{\alpha}{4\pi} m_f \ln^2(2\beta). \quad (1.29)$$

Из (1.27) и (1.29) следует, что как в слабых, так и в относительно сильных ( $B_e \lesssim B \lesssim 10^{16}$  Гс) магнитных полях поправка к массе фермиона, обусловленная вкладом  $\Re_{\Sigma}^s(p)$ , оказывается несущественной [18, 108].



С учётом этих замечаний, подставляя решения (1.13), фурье-образы токов (1.5), пропагатор (1.23) - (1.25) в (1.4) и интегрируя по  $dX_0 dX_2 dX_3$  и  $dY_0 dY_2 dY_3$ , матричный элемент можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{S}_{k'k}^{s's} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{\sqrt{2q_0 V 2q'_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E_{\ell'} L_y L_z}} \mathcal{M}_{k'k}^{s's}, \quad (1.30)$$

где введены обозначения  $P_\alpha = (p + q)_\alpha$ ,  $P'_\alpha = (p - q')_\alpha$ ,  $\alpha = 0, 2, 3$ ,  $\delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q') = \delta(P_0 - p'_0 - q'_0) \delta(P_y - p'_y - q'_y) \delta(P_z - p'_z - q'_z)$  и амплитуда:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{k'k}^{s's} &\simeq i g_k g_{k'} j'_{k'}(q') j_k(q) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s''=\pm 1} \int dX_1 dY_1 e^{-iX_1 q_x + iY_1 q'_x} \times \\ &\times \frac{\bar{\phi}_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) \Gamma_{k'} \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \Gamma_k \phi_{p,\ell}^s(X_1)}{P_{\parallel}^2 - M_n^2 + i \Im_{\Sigma}^{s''}(P)} + \\ &+ (j_k(q), \Gamma_k, P, q \leftrightarrow j'_{k'}(q'), \Gamma_{k'}, P', -q'). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Анализ амплитуды (1.31) позволяет выделить две возможные ситуации, которые рассмотрены в разделах 1.3 и 1.4.

### 1.3. Выражения для амплитуд процессов $jf \rightarrow j'f'$ вне резонанса

При  $\ell, \ell' \geq n$  реальная часть знаменателя  $P_{\parallel}^2 - M_n^2$  в (1.31) не обращается в ноль, что указывает на невозможность реализации резонанса на виртуальном фермионе. В этом случае, после интегрирования выражения (1.31) по  $dX_1$  и  $dY_1$  и вычисления произведения биспиноров и матриц Дирака, парциальная амплитуда может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{k'k}^{s's} &= \frac{-\exp[-i\theta]}{2\sqrt{M_\ell M_{\ell'}(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f)}} \times \\
&\left\{ \exp\left[\frac{i(q\varphi q')}{2\beta}\right] \left[\frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}}\right]^{-\ell} \left[\frac{q'_y - iq'_x}{\sqrt{q_\perp'^2}}\right]^{-\ell'} \times \right. \\
&\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \right)^n \frac{\mathcal{R}_{k'k}^{(1)s's}}{P_\parallel^2 - m_f^2 - 2\beta n} + \\
&(-1)^{\ell+\ell'} \exp\left[-\frac{i(q\varphi q')}{2\beta}\right] \left[\frac{q'_y + iq'_x}{\sqrt{q_\perp'^2}}\right]^{-\ell} \left[\frac{q_y - iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}}\right]^{-\ell'} \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \right)^n \frac{\mathcal{R}_{kk'}^{(2)s's}}{P_\parallel'^2 - m_f^2 - 2\beta n} \Big\}, \tag{1.32}
\end{aligned}$$

где  $\theta = (q_x - q'_x)(p_y + p'_y)/(2\beta)$  - общая фаза для обеих диаграмм (см. рис. 1.1).

Величины  $\mathcal{R}_{k'k}^{(1,2)s's}$  выражаются через следующие лоренц-коварианты:

$$\mathcal{K}_{1\alpha} = \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} \left\{ M_\ell (\tilde{\Lambda}p'')_\alpha + M_n (\tilde{\Lambda}p)_\alpha \right\}, \tag{1.33}$$

$$\mathcal{K}_{2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} = \{ M_\ell (\tilde{\varphi}p'')_\alpha + M_n (\tilde{\varphi}p)_\alpha \}, \tag{1.34}$$

и лоренц-инварианты в подпространстве 0,3:

$$\mathcal{K}_3 = \sqrt{2 \left[ (p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n \right]}, \tag{1.35}$$

$$\mathcal{K}_4 = -\sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} (p\tilde{\varphi}p''). \tag{1.36}$$

При вычислениях было использовано значение интеграла [112]:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dZ e^{-Z^2} H_n \left( Z + \frac{q_y + iq_x}{2\sqrt{\beta}} \right) H_\ell \left( Z - \frac{q_y - iq_x}{2\sqrt{\beta}} \right) = \\
&= 2^{(n+\ell)/2} \sqrt{n! \ell!} \left[ \frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}} \right]^{n-\ell} e^{q_\perp^2/(4\beta)} \mathcal{I}_{n,\ell} \left( \frac{q_\perp^2}{2\beta} \right), \tag{1.37}
\end{aligned}$$

где для  $n \geq \ell$

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{n,\ell}(x) &= \sqrt{\frac{\ell!}{n!}} e^{-x/2} x^{(n-\ell)/2} L_\ell^{n-\ell}(x), \\ \mathcal{I}_{\ell,n}(x) &= (-1)^{n-\ell} \mathcal{I}_{n,\ell}(x),\end{aligned}\tag{1.38}$$

и  $L_n^k(x)$  - обобщенные полиномы Лагерра [112].

В приложении А представлен полный набор значений  $\mathcal{R}_{k'k}^{(1,2)s's}$  для комбинаций вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов.

### 1.3.1. Основной уровень Ландау

Полученные в предыдущем разделе обобщённые амплитуды рассеяния  $jf \rightarrow j'f'$  для нерезонансного случая могут быть существенно упрощены в пределе сильного поля, когда наибольшим физическим параметром является индукция магнитного поля:  $\sqrt{\beta} \gg \omega, E$ . В этом случае следует положить  $\ell, \ell' = 0, s = s' = -1, M_\ell = M_{\ell'} = m_f$  и

$$\mathcal{I}_{n,0}(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}} e^{-x/2} x^{n/2}, \quad \mathcal{I}_{n-1,0}(x) = \sqrt{\frac{n}{x}} \mathcal{I}_{n,0}(x).\tag{1.39}$$

Вводя обозначение  $\mathcal{R}_{k'k}^{(1,2)--} \equiv (2m_f)^2 R_{k'k}^{(1,2)}$  мы получим следующие выражения для амплитуд (1.33) с вершинами скалярного, псевдоскалярного, векторного или аксиального типов

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{k'k}^{--} &= -\exp[-i\theta] \exp\left[-\frac{q_\perp^2 + q'^2_\perp}{4\beta}\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \times \\ &\times \left\{ \exp\left[\frac{i(q\varphi q')}{2\beta}\right] \left(\frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{2\beta}\right)^n \frac{R_{k'k}^{(1)}}{P_\parallel^2 - m_f^2 - 2\beta n} + \right. \\ &\left. + \exp\left[-\frac{i(q\varphi q')}{2\beta}\right] \left(\frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{2\beta}\right)^n \frac{R_{kk'}^{(2)}}{P_\parallel'^2 - m_f^2 - 2\beta n} \right\},\end{aligned}\tag{1.40}$$

где

$$R_{SS}^{(1)} = g_S g'_S j_S j'_S [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3];\tag{1.41}$$

$$R_{SS}^{(2)} = R_{SS}^{(1)}(q \leftrightarrow -q') ; \quad (1.42)$$

$$R_{PS}^{(1)} = -g_S g_P' j_S j_P' [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] ; \quad (1.43)$$

$$R_{SP}^{(2)} = g_S g_P' j_S j_P' [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] ; \quad (1.44)$$

$$R_{VS}^{(1)} = g_S g_V' j_S \left\{ (P \tilde{\Lambda} j_V') \mathcal{K}_3 + (P \tilde{\varphi} j_V') \mathcal{K}_4 + m_f (\mathcal{K}_1 j_V') - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j_V') - i(q' \varphi j_V')] \mathcal{K}_3 \right\} ; \quad (1.45)$$

$$R_{SV}^{(2)} = g_S g_V' j_S \left\{ (P' \tilde{\Lambda} j_V') \mathcal{K}_3 - (P' \tilde{\varphi} j_V') \mathcal{K}_4 + m_f (\mathcal{K}_1 j_V') + \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j_V') + i(q' \varphi j_V')] \mathcal{K}_3 \right\} ; \quad (1.46)$$

$$R_{AS}^{(1)} = -g_S g_A' j_S \left\{ (P \tilde{\Lambda} j_A') \mathcal{K}_4 + (P \tilde{\varphi} j_A') \mathcal{K}_3 - m_f (\mathcal{K}_2 j_A') - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j_A') - i(q' \varphi j_A')] \mathcal{K}_4 \right\} ; \quad (1.47)$$

$$R_{SA}^{(2)} = -g_S g_A' j_S \left\{ (P' \tilde{\varphi} j_A') \mathcal{K}_3 - (P' \tilde{\Lambda} j_A') \mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_2 j_A') - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j_A') + i(q' \varphi j_A')] \mathcal{K}_4 \right\} ; \quad (1.48)$$

$$R_{PP}^{(1)} = -g_P g_P' j_P j_P' [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] ; \quad (1.49)$$

$$R_{PP}^{(2)} = R_{PP}^{(1)}(q \leftrightarrow -q') ; \quad (1.50)$$

$$R_{VP}^{(1)} = g_P g_V' j_P \left\{ (P \tilde{\Lambda} j_V') \mathcal{K}_4 + (P \tilde{\varphi} j_V') \mathcal{K}_3 + m_f (\mathcal{K}_2 j_V') - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j_V') - i(q' \varphi j_V')] \mathcal{K}_4 \right\} \quad (1.51)$$

$$R_{PV}^{(2)} = -g_P g'_V j_P \left\{ (P' \tilde{\varphi} j'_V) \mathcal{K}_3 - (P' \tilde{\Lambda} j'_V) \mathcal{K}_4 + m_f (\mathcal{K}_2 j'_V) - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j'_V) + i(q' \varphi j'_V)] \mathcal{K}_4 \right\}; \quad (1.52)$$

$$R_{AP}^{(1)} = -g_P g'_A j_P \left\{ (P \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 + (P \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_1 j'_A) - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)] \mathcal{K}_3 \right\}; \quad (1.53)$$

$$R_{PA}^{(2)} = g_P g'_A j_P \left\{ (P' \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 - (P' \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_1 j'_A) + \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} [(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)] \mathcal{K}_3 \right\}; \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} R_{VV}^{(1)} = & g_V g'_V \left\{ (P \tilde{\Lambda} j'_V) (\mathcal{K}_1 j_V) + (P \tilde{\Lambda} j_V) (\mathcal{K}_1 j'_V) - (j_V \tilde{\Lambda} j'_V) (\mathcal{K}_1 P) + \right. \\ & + m_f [(j_V \tilde{\Lambda} j'_V) \mathcal{K}_3 + (j_V \tilde{\varphi} j'_V) \mathcal{K}_4] + \\ & + \frac{2\beta n}{q_\perp^2 q_\perp'^2} [(j_V \Lambda j'_V) - i(j_V \varphi j'_V)] [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] [(q \Lambda q') + i(q \varphi q')] - \\ & \left. - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} (\mathcal{K}_1 j_V) [(q' \Lambda j'_V) - i(q' \varphi j'_V)] - \frac{2\beta n}{q_\perp^2} (\mathcal{K}_1 j'_V) [(q \Lambda j_V) + i(q \varphi j_V)] \right\}; \end{aligned} \quad (1.55)$$

$$R_{VV}^{(2)} = R_{VV}^{(1)}(q \leftrightarrow -q'); \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} R_{AV}^{(1)} = & -g_V g'_A \left\{ (P \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_2 j_V) + (P \tilde{\Lambda} j_V) (\mathcal{K}_2 j'_A) - (j_V \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_2 P) - \right. \\ & - m_f [(j_V \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_4 + (j_V \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_3] + \\ & + \frac{2\beta n}{q_\perp^2 q_\perp'^2} [(j_V \Lambda j'_A) - i(j_V \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] [(q \Lambda q') + i(q \varphi q')] - \\ & \left. - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} (\mathcal{K}_2 j_V) [(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)] - \frac{2\beta n}{q_\perp^2} (\mathcal{K}_2 j'_A) [(q \Lambda j_V) + i(q \varphi j_V)] \right\}; \end{aligned} \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned}
R_{VA}^{(2)} = & -g_V g'_A \left\{ (P' \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_2 j_V) + (P' \tilde{\Lambda} j_V) (\mathcal{K}_2 j'_A) - (j_V \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_2 P') + \right. \\
& + m_f [(j_V \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_4 - (j_V \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_3] + \\
& + \frac{2\beta n}{q_\perp^2 q'^2} [(j_V \Lambda j'_A) + i(j_V \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] [(q \Lambda q') - i(q \varphi q')] + \\
& \left. + \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} (\mathcal{K}_2 j_V) [(q' \Lambda j'_A) + i(q' \varphi j'_A)] + \frac{2\beta n}{q_\perp^2} (\mathcal{K}_2 j'_A) [(q \Lambda j_V) - i(q \varphi j_V)] \right\};
\end{aligned} \tag{1.58}$$

$$\begin{aligned}
R_{AA}^{(1)} = & g_A g'_A \left\{ (P \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_1 j_A) + (P \tilde{\Lambda} j_A) (\mathcal{K}_1 j'_A) - (j_A \tilde{\Lambda} j'_A) (\mathcal{K}_1 P) - \right. \\
& - m_f [(j_A \tilde{\Lambda} j'_A) \mathcal{K}_3 + (j_A \tilde{\varphi} j'_A) \mathcal{K}_4] + \\
& + \frac{2\beta n}{q_\perp^2 q'^2} [(j_A \Lambda j'_A) - i(j_A \varphi j'_A)] [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] [(q \Lambda q') + i(q \varphi q')] - \\
& \left. - \frac{2\beta n}{q_\perp'^2} (\mathcal{K}_1 j_A) [(q' \Lambda j'_A) - i(q' \varphi j'_A)] - \frac{2\beta n}{q_\perp^2} (\mathcal{K}_1 j'_A) [(q \Lambda j_A) + i(q \varphi j_A)] \right\}.
\end{aligned} \tag{1.59}$$

$$R_{AA}^{(2)} = R_{AA}^{(1)}(q \leftrightarrow -q'); \tag{1.60}$$

Отметим, что выражения для  $\mathcal{M}_{VV}^{--}$  и  $\mathcal{M}_{VA}^{--}$  в случае, когда  $\ell' = \ell = n = 0$ , после замены  $m_f = m$ ,  $g_V = e$ ,  $j_\alpha = \varepsilon_\alpha$ ,  $g'_V = G_F C_V / \sqrt{2}$ ,  $g'_A = G_F C_A / \sqrt{2}$ ,  $j'_\alpha = \bar{\nu} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu$ , в точности совпадают с амплитудой фотонейтринного процесса  $e\gamma \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , полученной в работе [118]. Кроме того, легко заметить, что амплитуды, содержащие векторные вершины, имеют явный калибровочно-инвариантный вид.

### 1.3.2. Рассеяние вперёд

В данном разделе диссертации будет рассмотрен частный случай нерезонансного когерентного рассеяния тока  $j$  на реальных фермионах, принадлежащих замагниченной плазме, без изменения их состояния (так называемое рассеяние «вперёд»).

Для выяснения связи между полученной амплитудой (1.31) и амплитудой рассеяния «вперёд» рассмотрим плосковолновое возбуждение поля, соответствующее току  $j$ , распространяющееся с волновым 4-вектором  $q_\alpha = (\omega, \mathbf{k})$  и рассеивающееся на фермионе в точке пространства  $\mathbf{r} = 0$ . При рассеянии падающей волны на ансамбле беспорядочно расположенных фермионов происходит интерференция рассеянных волн, но из-за хаотичного распределения рассеивающих центров сумма интерференционных членов будет равна нулю. Таким образом, полное сечение ансамбля фермионов равняется алгебраической сумме сечений рассеяния каждого фермиона. При рассеянии вперёд, однако, рассеянные волны когерентны падающей волне, что приводит к изменению фазы и рефракции [119, 120].

Следовательно, полагая в (1.31)  $\ell = \ell'$ ,  $s = s'$ ,  $q^\mu = q'^\mu$ ,  $p^\mu = p'^\mu$ ,  $\mathcal{K}_{1\alpha} = 2(p\tilde{\Lambda})_\alpha$ ,  $\mathcal{K}_{2\alpha} = 2(\tilde{\varphi}p)_\alpha$ ,  $\mathcal{K}_3 = 2M_\ell$ ,  $\mathcal{K}_4 = 0$ , мы получим амплитуду  $\mathcal{M}_{k'k}$  рассеяния «вперёд» тока  $j$  на одном фермионе:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{k'k} &\simeq ig_k g_{k'} j'_{k'}(q) j_k(q) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s''=\pm 1} \int dX_1 dY_1 e^{-i(X_1-Y_1)q_x} \times \\ &\times \frac{\bar{\phi}_{p,\ell}^s(Y_1) \Gamma_{k'} \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \Gamma_k \phi_{p,\ell}^s(X_1)}{P_\parallel^2 - M_n^2 + i\mathcal{I}_\Sigma^{s''}(P)} + \\ &+ (j_k(q), \Gamma_k, q \leftrightarrow j'_{k'}(q), \Gamma_{k'}, -q). \end{aligned} \quad (1.61)$$

Суммируя (1.61) по всем состояниям фермионов с учётом функции распределения  $f_f(E_\ell) = [1 + \exp(E_\ell - \mu_f)/T]^{-1}$ , где  $T$  - это температура, а  $\mu_f$  - химический потенциал плазмы, мы приходим к выражению для амплитуды нерезонансного когерентного процесса  $jf \rightarrow j'f'$  в случае присутствия замагниченной плазмы:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{kk'}(\omega, 0) &= -\frac{\beta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell, n=0}^{\infty} \int \frac{dp_z}{E_\ell} f_f(E_\ell) \times \\ &\times \left[ \frac{\mathcal{D}^{(1)}_{kk'}}{(p+q)_\parallel^2 - m_f^2 - 2\beta n} + \frac{\mathcal{D}^{(2)}_{kk'}}{(p+q)_\parallel^2 - m_f^2 - 2\beta n} \right], \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\mathcal{D}_{SS}^{(1)} = g_s g'_s j_s j'_s \left\{ [(q\tilde{\Lambda}p) + 2\beta\ell + 2m_f^2] \times \right. \quad (1.63)$$

$$\times (\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2) - 4\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \Big\};$$

$$\mathcal{D}_{SS}^{(2)} = \mathcal{D}_{SS}^{(1)}(q \rightarrow -q);$$

$$\mathcal{D}_{SP}^{(1)} = \mathcal{D}_{PS}^{(2)} = g_s g'_p j_s j'_p (q\tilde{\varphi}p) [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2]; \quad (1.64)$$

$$\mathcal{D}_{VS}^{(1)} = g_s g'_v j_s m_f \left\{ [2(p\tilde{\Lambda}j') + (q\tilde{\Lambda}j')] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] - \right. \quad (1.65)$$

$$-\sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} [(q\Lambda j') + i(q\varphi j')] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] \mathcal{I}_{n-1,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] -$$

$$-\sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} [(q\Lambda j') + i(q\varphi j')] \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] \Big\};$$

$$\mathcal{D}_{SV}^{(2)} = g_s g'_v j_s m_f + \left\{ [2(p\tilde{\Lambda}j') - (q\tilde{\Lambda}j')] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] + \right. \quad (1.66)$$

$$+\sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + [(q\Lambda j') + i(q\varphi j')] \mathcal{I}_{n-1,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] +$$

$$+\sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + [(q\Lambda j') + i(q\varphi j')] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] \Big\};$$

$$\mathcal{D}_{AS}^{(1)} = g_s g'_a j_s m_f [2(p\tilde{\varphi}j') + (q\tilde{\varphi}j')] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2]; \quad (1.67)$$

$$\mathcal{D}_{SA}^{(2)} = \mathcal{D}_{AS}^{(1)}(q \rightarrow -q);$$

$$\mathcal{D}_{PP}^{(1)} = -g_p g'_p j_p j'_p \left\{ [(q\tilde{\Lambda}p) + 2\beta\ell] \times \right. \quad (1.68)$$

$$\times [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] - 4\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \Big\};$$

$$\mathcal{D}_{PP}^{(2)} = \mathcal{D}_{PP}^{(1)}(q \rightarrow -q);$$



$$\mathcal{D}_{VP}^{(1)} = \mathcal{D}_{PV}^{(2)} = -g_p g'_v j_p m_f (q \tilde{\varphi} j') [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2]; \quad (1.69)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{AP}^{(1)} = & -g_p g'_a j_p m_f \left\{ (q \tilde{\Lambda} j') [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] + \right. \\ & + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} [[(q\Lambda j') + i(q\varphi j')]\mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')]\mathcal{I}_{n-1,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - \\ & \left. - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} [[(q\Lambda j') + i(q\varphi j')]\mathcal{I}_{n,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')]\mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell}] \right\}; \end{aligned} \quad (1.70)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{PA}^{(2)} = & -g_p g'_a j_p m_f \left\{ (q \tilde{\Lambda} j') [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] - \right. \\ & - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} [[(q\Lambda j') - i(q\varphi j')]\mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - [(q\Lambda j') + i(q\varphi j')]\mathcal{I}_{n-1,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - \\ & \left. - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} [[(q\Lambda j') - i(q\varphi j')]\mathcal{I}_{n,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + [(q\Lambda j') + i(q\varphi j')]\mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell}] \right\}; \end{aligned} \quad (1.71)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{VV}^{(1)} = & g_v g'_v \left\{ \left[ (p\tilde{\Lambda}j)(P\tilde{\Lambda}j') + (P\tilde{\Lambda}j)(p\tilde{\Lambda}j') - (j\tilde{\Lambda}j')[2\beta\ell + (p\tilde{\Lambda}q)] \right] \times \right. \quad (1.72) \\
& \times [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] + 4\beta\sqrt{n\ell} (j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j)[(q\Lambda j') + i(q\varphi j')] + (P\tilde{\Lambda}j')[ (q\Lambda j) - i(q\varphi j)] \right] \mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j)[(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] + (P\tilde{\Lambda}j')[ (q\Lambda j) + i(q\varphi j)] \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\Lambda}j)[(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] + (p\tilde{\Lambda}j')[ (q\Lambda j) + i(q\varphi j)] \right] \mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\Lambda}j)[(q\Lambda j') + i(q\varphi j')] + (p\tilde{\Lambda}j')[ (q\Lambda j) - i(q\varphi j)] \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& + [2\beta\ell + (p\tilde{\Lambda}q)] \left[ [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')]\mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 + [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')]\mathcal{I}_{n-1,\ell}^2 \right] + \\
& + \frac{4\beta\sqrt{n\ell}}{q_\perp^2} [(q\Lambda j)(q\Lambda j') - (q\varphi j)(q\varphi j')]\mathcal{I}_{n,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} \}; \\
\mathcal{D}_{VV}^{(2)} = & \mathcal{D}_{VV}^{(1)}(q \rightarrow -q, j \leftrightarrow j');
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{AV}^{(1)} = g_v g'_a \left\{ [(P\tilde{\Lambda}j)(j'\tilde{\varphi}p) + (P\tilde{\Lambda}j')(j\tilde{\varphi}p) - (j\tilde{\Lambda}j')(q\tilde{\varphi}p) - m_f^2 \times \right. \quad (1.73)$$

$$\begin{aligned} & \times (j\tilde{\varphi}j')] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} [(P\tilde{\varphi}j)[(q\Lambda j') + i(q\varphi j')] + \\ & + (P\tilde{\varphi}j')[[(q\Lambda j) - i(q\varphi j)]] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} [(P\tilde{\varphi}j) \times \\ & \times [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] + (P\tilde{\varphi}j')[[(q\Lambda j) + i(q\varphi j)]] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + \\ & + \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} [(p\tilde{\varphi}j)[(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] + (p\tilde{\varphi}j')[[(q\Lambda j) + i(q\varphi j)]] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} [(p\tilde{\varphi}j)[(q\Lambda j') + i(q\varphi j')] + (p\tilde{\varphi}j')[[(q\Lambda j) - i(q\varphi j)]] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \times \\ & \times \mathcal{I}_{n,\ell-1} + (p\tilde{\varphi}q) [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] \mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 - [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] \mathcal{I}_{n-1,\ell}^2 \} ; \end{aligned}$$

$$\mathcal{D}_{VA}^{(2)} = g_v g'_a \left\{ [(P'\tilde{\Lambda}j)(j'\tilde{\varphi}p) + (P'\tilde{\Lambda}j')(j\tilde{\varphi}p) + (j\tilde{\Lambda}j')(q\tilde{\varphi}p) - m_f^2 \times \right. \quad (1.74)$$

$$\begin{aligned} & \times (j\tilde{\varphi}j')] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} [(P'\tilde{\varphi}j)[(q\Lambda j) + i(q\varphi j)] + \\ & + (P'\tilde{\varphi}j)[[(q\Lambda j') - i(q\varphi j')]] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \times \\ & \times [(P'\tilde{\varphi}j)[(q\Lambda j) - i(q\varphi j)] + (P'\tilde{\varphi}j)[[(q\Lambda j') + i(q\varphi j')]] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} [(p\tilde{\varphi}j')[[(q\Lambda j) - i(q\varphi j)]] + (p\tilde{\varphi}j)[[(q\Lambda j') + i(q\varphi j')]] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + \\ & + \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} [(p\tilde{\varphi}j)[[(q\Lambda j) + i(q\varphi j)]] + (p\tilde{\varphi}j)[[(q\Lambda j') - i(q\varphi j')]] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \times \\ & \times \mathcal{I}_{n,\ell-1} - (p\tilde{\varphi}q) [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] \mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 - [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] \mathcal{I}_{n-1,\ell}^2 \} ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{AA}^{(1)} = g_a g'_a & \left\{ [(P\tilde{\Lambda}j)(p\tilde{\Lambda}j') + (p\tilde{\Lambda}j)(P\tilde{\Lambda}j') - (j\tilde{\Lambda}j')(M_\ell^2 + m_e^2 + \right. \\
& + (p\tilde{\Lambda}q))] [\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2] + 4\beta\sqrt{n\ell} (j\tilde{\Lambda}j') \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j)[(q\Lambda j') + i(q\varphi j')] + (P\tilde{\Lambda}j')[[(q\Lambda j) - i(q\varphi j)]] \right] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} \left[ (P\tilde{\Lambda}j)[(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] + (P\tilde{\Lambda}j')[[(q\Lambda j) + i(q\varphi j)]] \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\Lambda}j)[(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] + (p\tilde{\Lambda}j')[[(q\Lambda j) + i(q\varphi j)]] \right] \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta n}{q_\perp^2}} \left[ (p\tilde{\Lambda}j)[(q\Lambda j') + i(q\varphi j')] + (p\tilde{\Lambda}j')[[(q\Lambda j) - i(q\varphi j)]] \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& + (M_\ell^2 + m_e^2 + (p\tilde{\Lambda}q)) \left[ [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] \mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 + [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] \mathcal{I}_{n-1,\ell}^2 \right] + \\
& + \frac{4\beta\sqrt{n\ell}}{q_\perp^2} [(q\Lambda j)(q\Lambda j') - (q\varphi j)(q\varphi j')] \mathcal{I}_{n,\ell-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \Big\}; \\
\mathcal{D}_{AA}^{(2)} = \mathcal{D}_{AA}^{(1)}(q \rightarrow -q, j \leftrightarrow j').
\end{aligned} \tag{1.75}$$

Отметим, что выражения для амплитуд  $\mathcal{M}_{VS}$ ,  $\mathcal{M}_{VP}$ ,  $\mathcal{M}_{VV}$  и  $\mathcal{M}_{AV}$  обладают явной калибровочной инвариантностью.

#### 1.4. Выражения для амплитуд реакций $jf \rightarrow j'f'$ в области резонанса

Если  $\ell, \ell' < n$ , то существуют решения уравнения  $P_\parallel^2 - M_n^2 = 0$ , т.е. виртуальный фермион становится реальным с определенным законом дисперсии, и имеет место резонанс на виртуальном фермионе. Рассмотрим этот случай в приближении узкого пика, которое основано на предположении малости мнимой части массового оператора,  $\mathcal{I}_\Sigma^s(p)$  (1.25), по сравнению с реальной частью

знаменателя пропагатора везде, кроме точки резонанса. Тогда основной вклад в амплитуду (1.31) будут давать области энергий вблизи резонансов. Кроме того, необходимо принять во внимание, что в силу кинематики процесса основной вклад в амплитуду в области резонанса будет давать только первая диаграмма на рис. 1.1.

Покажем, что в приближении узкого резонансного пика квадрат  $\mathcal{S}$  - матричного элемента процесса  $jf \rightarrow j'f'$  факторизуется произведением квадратов  $\mathcal{S}$  - матричных элементов перехода фермиона из начального состояния в промежуточное и из промежуточного состояния в конечное соответственно.

Действительно, с учётом значения квадрата  $\delta$ -функции, следующего из её Фурье-образа:

$$\left[ \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q') \right]^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q') \tau L_y L_z, \quad (1.76)$$

квадрат  $\mathcal{S}$  - матричного элемента (1.30), просуммированный по поляризационным состояниям начального и конечного фермионов, может быть представлен в следующем виде:

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} = \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{2q_0 L_x 2q'_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E'_{\ell'} L_y L_z} |\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2, \quad (1.77)$$

где  $\tau$  - время взаимодействия,

$$|\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s''=\pm 1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \int dX_1 dY_1 \frac{\bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \phi_{jf}^s(X_1)}{P_{\parallel}^2 - M_n^2 + i \Im_{\Sigma}^{s''}(P)} \right|^2 \quad (1.78)$$

- соответствующие парциальные амплитуды. Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) &\equiv g_{k'} \bar{\phi}_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) j_{k'}'(q') \Gamma_{k'} e^{iY_1 q'_x}, \\ \phi_{jf}^s(X_1) &\equiv g_k j_k(q) \Gamma_k \phi_{p,\ell}^s(X_1) e^{-iX_1 q_x}. \end{aligned} \quad (1.79)$$

Ввиду малости  $\Im_{\Sigma}^{s''}(P)$  по сравнению с реальной частью знаменателя пропагатора везде, кроме точки резонанса, можно соответствующую часть уравне-

ния (1.78) заменить  $\delta$ -функцией следующим образом:

$$|\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2 \simeq \sum_{s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{P_0 \Gamma_n^{s''}} \delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) \times \left| \int dX_1 dY_1 \bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \phi_{jf}^s(X_1) \right|^2. \quad (1.80)$$

С учётом (1.80) квадрат  $\mathcal{S}$  - матричного элемента процесса  $jf \rightarrow j'f'$  факторизуется следующим образом:

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} = \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{2q_0 L_x 2q'_0 V 2E_{\ell} L_y L_z 2E'_{\ell} L_y L_z} \times \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2E_n'')^2 (2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} (2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'') |\mathcal{M}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}|^2 |\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}|^2. \quad (1.81)$$

Здесь мы воспользовались свойством  $\delta$  - функции:

$$\delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) = \frac{1}{2E_n''} \delta(P_0 - E_n''), \quad (1.82)$$

где  $E_n'' = \sqrt{p_z''^2 + M_n^2}$ .

Теперь уравнение (1.81) можно представить в виде:

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} = \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} \times \frac{|\mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}|^2}{\tau}, \quad (1.83)$$

где

$$\mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'')}{\sqrt{2q_0 V 2E_{\ell} L_y L_z 2E_n'' L_y L_z}} \mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}, \quad (1.84)$$

-  $\mathcal{S}$ -матричный элемент перехода некоторого начального состояния  $jf$  в фермион с энергией  $E_n''$  и компонентами импульса  $p_y'', p_z''$  и поляризационным состоянием  $s''$ , находящийся на уровне Ландау  $n$ , с соответствующей амплитудой  $\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}$ :

$$\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s} = \frac{\exp[-iq_x(p_y + p_y'')/(2\beta)]}{\sqrt{M_{\ell} M_n (M_{\ell} + m_f)(M_n + m_f)}} \left[ \frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_{\perp}^2}} \right]^{n-\ell} \mathcal{T}_k^{s''s}. \quad (1.85)$$

Здесь  $\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}$  -  $S$ -матричный элемент перехода фермиона из состояния с  $E_n'', p_y'', p_z'', s'', n$  в некоторое конечное состояние  $j'f'$  с соответствующей амплитудой  $\mathcal{M}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}$ , причем  $\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''} = \mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}(q \rightarrow q', E_\ell \rightarrow E_{\ell'})$ .

Ниже приведен полный набор величин  $\mathcal{T}_k^{s''s}$  для  $jf$  взаимодействия вершин скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов. Далее используется следующее обозначение:  $\mathcal{I}_{n,\ell} \equiv \mathcal{I}_{n,\ell}(q_\perp^2/(2\beta))$ .

1. В случае, когда  $j$  является скалярным током ( $k = S$ ), вычисления дают:

$$\mathcal{T}_S^{--} = g_s j_s \mathcal{K}_3[(m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}], \quad (1.86)$$

$$\mathcal{T}_S^{-+} = -ig_s j_s \mathcal{K}_4[\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell}], \quad (1.87)$$

$$\mathcal{T}_S^{+-} = -ig_s j_s \mathcal{K}_4[\sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{I}_{n,\ell}], \quad (1.88)$$

$$\mathcal{T}_S^{++} = g_s j_s \mathcal{K}_3[(m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (1.89)$$

2. В случае, когда  $j$  является псевдоскалярным током ( $k = P$ ), вычисления дают:

$$\mathcal{T}_P^{--} = -g_p j_p \mathcal{K}_4[2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell}], \quad (1.90)$$

$$\mathcal{T}_P^{-+} = -ig_p j_p \mathcal{K}_3[\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell}], \quad (1.91)$$

$$\mathcal{T}_P^{+-} = -ig_p j_p \mathcal{K}_3[\sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{I}_{n,\ell}], \quad (1.92)$$

$$\mathcal{T}_P^{++} = g_p j_p \mathcal{K}_4[(m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (1.93)$$

3. В случае, когда  $j$  является векторным током ( $k = V$ ), вычисления дают:

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_V^{--} = & g_v[2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_1 j_V)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \times \\
& \times (\mathcal{K}_1 j_V)\mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)\mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] , \tag{1.94}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_V^{-+} = & i g_v[\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_2 j_V)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta \ell} \times \\
& \times (m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_V)\mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] , \tag{1.95}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_V^{+-} = & -i g_v[\sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_V)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell) \times \\
& \times (\mathcal{K}_2 j_V)\mathcal{I}_{n,\ell} + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] , \tag{1.96}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_V^{++} = & g_v[2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_1 j_V)\mathcal{I}_{n,\ell} + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_V) \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)\mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] ; \tag{1.97}
\end{aligned}$$

4. В случае, когда  $j$  является аксиально-векторным током ( $k = A$ ), вычисления дают:



$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_A^{--} = & g_a [2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_2 j_A) \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \times \\
& \times (\mathcal{K}_2 j_A) \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell) \mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n) \mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] , \tag{1.98}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_A^{-+} = & i g_a [\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_1 j_A) \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta \ell} \times \\
& \times (m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_A) \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] , \tag{1.99}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_A^{+-} = & -i g_a [\sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_A) \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} \times \\
& \times (m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_1 j_A) \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q + i(j_A \varphi q))}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\
& - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] , \tag{1.100}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_A^{++} = & g_a [(m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_A) \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell n} \times \\
& \times (\mathcal{K}_2 j_A) \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n) \mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell) \mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] . \tag{1.101}
\end{aligned}$$

Отметим, что полученные амплитуды для векторной и аксиально-векторной вершин, после возведения в квадрат и суммирования по поляризационным состояниям фермионов, согласуются с ранее полученными результатами в работах [96, 121, 122].

## 1.5. Заключение

В данной главе были получены выражения для двухвершинных амплитуд для реакций  $jf \rightarrow j'f'$  в присутствии магнитного поля произвольной индукции и заряженной плазмы из фермионов для для всевозможных комбинаций вершин взаимодействия скалярного, псевдоскалярного, векторного, аксиально-векторного типов. Представленные результаты обладают лоренц-инвариантностью относительно преобразований вдоль направления магнитного поля.

Полученный набор амплитуд реакций  $jf \rightarrow j'f'$  можно применить для анализа разнообразных квантовых процессов во внешней активной среде, в том числе с участием экзотических частиц, таких как аксионы и нейтралы. Результаты для основного уровня Ландау описывают частный случай сильного магнитного поля. Амплитуды рассеяния «вперёд» могут быть использованы для получения закона дисперсии для частицы, распространяющейся в среде с известными свойствами [119, 120].

Также были вычислены амплитуды рассеяния  $jf \rightarrow j'f'$  в случае резонанса. Как известно, процессы с возможным резонансом на виртуальном электро-не играют исключительно важную роль в магнитосферах изолированных нейтронных звёзд [123]. Два примера реакций такого рода рассмотрены во второй главе данной диссертации.

## Глава 2

# Резонансные квантовые процессы в астрофизических условиях

## 2.1. Введение

В качестве приложения результатов предыдущей главы, рассмотрим два двухвершинных процесса: фоторождения нейтрино на электроны,  $e\gamma \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ , и комптоновское рассеяние,  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , протекающие в присутствии плотной замагниченной плазмы и в которых возможен резонанс на виртуальном электроны.

Как уже упоминалось во Введении, внешняя кора нейтронных звёзд прозрачна для нейтрино, поэтому реакции с парой нейтрино-антинейтрино в конечном состоянии играют определяющую роль в нейтринном остывании. Как показал анализ, проведённый в работе [20], среди нейтринных процессов доминирующий вклад в нейтринную светимость при малых плотностях плазмы ( $10^6 \lesssim \rho \lesssim 10^8$  г/см<sup>3</sup>), вносит процесс  $e\gamma \rightarrow \nu i\bar{\nu}$ , но уступает реакции конверсии фотона,  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ , при плотностях  $10^8 \lesssim \rho \lesssim 10^{10}$  г/см<sup>3</sup>. Однако в проведённых расчётах не учитывалось возбуждение высших уровней Ландау виртуального электрона в фотонейтринном процессе при плотностях выше значения  $\rho_9 = 10^9$  г/см<sup>3</sup>, которое может значительно увеличить эффективность этой реакции.

Исследование фотонейтринного процесса началось в 60-ых годах прошлого века [64, 65]. Нейтринная светимость, т.е. энергия, уносимая нейтринной парой из единичного объёма за единицу времени, за счёт него была вычислена в работах [35–38, 40, 41, 66]. В частности, в [40, 41] были получены таблицы с большим количеством данных для фотонейтринной излучательной способности и аналитические аппроксимации для них.

В относительно недавних работах [20, 67, 68] были получены формулы для нейтринной светимости для случаев нерелятивистской и релятивистской сильно

замагниченной плазмы с учётом дисперсионных свойств фотона в плазме в отсутствие резонанса.

Интерес к изучению комптоновского рассеяния в сильном магнитном поле первоначально был вызван открытием циклотронных спектральных линий у двойных рентгеновских пульсаров [124–127]. Новым импульсом к исследованию процесса послужило обнаружение объектов, которые могут быть ассоциированы с магнитарами. В рамках классической электродинамики комптоновское рассеяние в сильном магнитном поле было рассмотрено в работах [69, 71?–73]. Нерелятивистский подход позволяет обнаружить резонанс только на основной циклотронной частоте, поскольку ограничен дипольным излучением. Кроме того, он не применим для полей  $B \gtrsim 10^{12}$  Гс, поскольку при них становится существенной отдача электрона [128].

В магнитосферах молодых нейтронных звёзд, где магнитное поле может приближаться к критическому (радиопульсары) или превышать его (магнитары), комптоновское рассеяние должно рассматриваться в релятивистском формализме. В пределе сильного поля ( $B_e \ll B \ll 10^3 B_e$ ) процесс был рассмотрен в работах [29, 129, 130]. Резонансное комптоновское рассеяние сопровождается непрерывным интересом со стороны исследователей [28, 29, 31, 129, 131–137]. Процесс обратного комптоновского рассеяния в сильно замagnetизированных нейтронных звёздах является очень эффективным механизмом создания жёсткого рентгеновского излучения от этих объектов, так как при резонансе сечение рассеяния этой реакции может достигать значений от 100 до  $10^6 \sigma_T$  [29, 31, 75], где  $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/(3m^2)$  - томпсоновское сечение. Сильное влияние учёта релятивистских квантовых эффектов проявило себя в многочисленных резонансах на циклотронных гармониках и значительном отклонении от формулы Клейна-Нишины для сечения рассеяния. В перечисленных работах эффект Комптона рассматривался в области вдали от резонансов либо в окрестности резонансного пика, кроме того, в использованном приближении время жизни промежуточного состояния предполагалось бесконечно большим. Этого оказывается

достаточно для ряда задач, например, для расчёта вклада данного процесса в создание атмосферной или фотосферной структуры магнитара [138–140]. Однако для решения других проблем, таких как резонансное обратное комптоновское рассеяние мягких термальных фотонов на ультрарелятивистских электронах и моделирование остывания магнитаров [135, 141, 142], требуется устранить расходимости, возникающие в знаменателе пропагатора виртуального электрона [74, 75, 129, 143–145]. По этой причине получение относительно простых аналитических выражений для коэффициента поглощения, а также сечения рассеяния резонансного комптоновского рассеяния является актуальной задачей.

Основные результаты данной главы опубликованы в работах [146–148].

## 2.2. Резонансный фотонейтринный процесс

Общее выражение для нейтринной светимости может быть представлено в следующем виде:

$$Q = \frac{1}{V} \int \prod_i d\Gamma_i f_i \prod_f d\Gamma_f (1 \pm f_f) q'_0 \frac{|\mathcal{S}_{if}|^2}{\tau}, \quad (2.1)$$

где  $d\Gamma_i$  ( $d\Gamma_f$ ) - фазовый объём начального и конечного состояния,  $f_i$  ( $f_f$ ) - соответствующие функции распределения, знак  $+$  ( $-$ ) соответствует конечным бозонам (фермионам);  $q'_0 = E_1 + E_2$  - энергия, уносимая нейтринной парой;  $V$  - объём плазмы,  $\tau$  - время взаимодействия.

$\mathcal{S}$ -матричный элемент для процесса  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$  описывается диаграммами, изображёнными на Рис. 2.1 и может быть представлен в следующем виде:

$$\mathcal{S}_{\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(p + q - p' - q')}{L_y L_z \sqrt{2^5 V^3 \omega E_\ell E'_\ell E_1 E_2}} \mathcal{M}_{\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}}, \quad (2.2)$$

Амплитуда  $\mathcal{M}_{\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}}$

может быть получена из формулы (1.31) Главы 1 с помощью подстановок  $\Gamma_{k'} = \gamma_\alpha (C_V + C_A \gamma_5)$ ,  $j'_{k'} = J_\alpha$ ,  $g_{k'} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$ ,  $\Gamma_k = \gamma_\beta$ ,  $j_k = \varepsilon_\beta$ ,  $g_k = e$  и имеет

следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}} = & \frac{i e G_F}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s''=\pm 1} \int dX_1 dY_1 e^{-iX_1 q_x + iY_1 q'_x} \times \\
& \times \frac{\phi_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) \gamma_\alpha J_\alpha (C_V + C_A \gamma_5) \phi_{p+q,n}^{s''}(Y_1) \phi_{p+q,n}^{s''}(X_1) \gamma_\beta \varepsilon_\beta(q) \phi_{p,\ell}^s(X_1)}{(p+q)_\parallel^2 - M_n^2 + i\Im_{\Sigma}^{s''}(p+q)} + \\
& + \frac{i e G_F}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s''=\pm 1} \int dX_1 dY_1 e^{iX_1 q'_x - iY_1 q_x} \times \\
& \times \frac{\phi_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) \gamma_\beta \varepsilon_\beta(q) \phi_{p-q',n}^{s''}(Y_1) \phi_{p-q',n}^{s''}(X_1) \gamma_\alpha J_\alpha (C_V + C_A \gamma_5) \phi_{p,\ell}^s(X_1)}{(p-q')_\parallel^2 - M_n^2 + i\Im_{\Sigma}^{s''}(p-q')}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

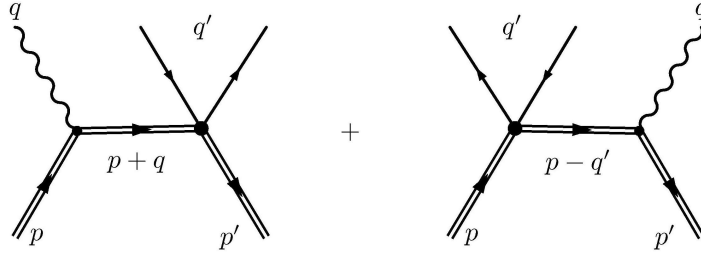


Рис. 2.1. Диаграммы Фейнмана для реакции  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$ . Двойные линии обозначают, что влияние внешнего поля на начальное и конечное состояние и на элеткронный пропагатор учтено точно.

С учётом факторизации квадрата  $\mathcal{S}$ -матричного элемента (1.81) и выражения (1.78) нейтринную светимость (2.1) для резонансного фотонейтринного процесса можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
Q_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \nu \bar{\nu}} = & \frac{1}{L_x} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l,l'=0}^{n-1} \sum_{s,s',s''=\pm 1} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} f_\gamma(\omega) \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^2 2E_\ell} \times \\
& \times f_e(E_\ell) \frac{dp'_y dp'_z}{(2\pi)^2 2E'_{\ell'}} [1 - f_e(E'_{\ell'})] \frac{dp''_y dp''_z}{(2\pi)^2 (2E''_n)^2} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} q'_0 \times \\
& \times (2\pi)^6 \delta_{0,y,z}^{(3)}(p+q-p'') \delta_{0,y,z}^{(3)}(p''-p'-q') |M_{e_\ell \gamma \rightarrow e_n}|^2 |\mathcal{M}_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \nu \bar{\nu}}|^2.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь  $f_e(E_\ell)(f_e(E'_{\ell'}))$  - равновесная функция распределения начальных (конечных) электронов в системе покоя плазмы,  $f_e(E_\ell) = \{\exp[(E_\ell - \mu)/T] + 1\}^{-1}$ ,

$f_\gamma(\omega) = [\exp(\omega/T) - 1]^{-1}$  - равновесная функция распределения начального фотона,  $T$  - температура,  $\mu$  - химический потенциал электронного газа,

Полная ширина изменения состояния электрона может быть выражена через ширину рождения [149]:

$$\Gamma_n^{s''} = \Gamma_n^{(abs)s''} + \Gamma_n^{(cr)s''} \simeq \Gamma_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma}^{(cr)s''} \left[ 1 + e^{(E_n'' - \mu)/T} \right] \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_n^{(cr)s''} &= \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{s''=\pm 1} \frac{1}{2E_n''} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega} f_\gamma(\omega) \times \\ &\times \frac{dp_y dp_z}{2E_\ell} f_e(E_\ell) (2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(p + q - p'') |M_{e_\ell \gamma \rightarrow e_n}|^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в формулу (2.4) и выполняя несложные преобразования, получаем следующее выражение для резонансной нейтринной светимости за счёт процесса  $e\gamma \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ :

$$Q_{\gamma e \rightarrow e\nu\bar{\nu}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell'=0}^{n-1} Q_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \nu \bar{\nu}}, \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} Q_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \nu \bar{\nu}} &= \frac{1}{L_x} \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2\pi)^2 2E_n''} f_e(E_n'') \frac{dp_y' dp_z'}{(2\pi)^2 2E_{\ell'}'} [1 - f_e(E_{\ell'}')] \times \\ &\times \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} q_0' (2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(p'' - p' - q') |\mathcal{M}_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \nu \bar{\nu}}|^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

- это нейтринная светимость за счёт процесса  $e_n \rightarrow e_{\ell'} \nu \bar{\nu}$  [21]. Квадрат амплитуды  $e_n \rightarrow e_{\ell'} \nu \bar{\nu}$  может быть получен с помощью выражений (1.94-1.101) и представлен в следующем виде:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \nu \bar{\nu}}|^2 &= \frac{16}{3} G_F^2 \left( \overline{C_V^2} + \overline{C_A^2} \right) \left\{ [2q'^2(\beta(n + \ell') + m^2) + m^2 q_\perp'^2] \times \right. \\ &\times (\mathcal{I}_{n-1,\ell'}'^2 + \mathcal{I}_{n,\ell'-1}'^2 - \mathcal{I}_{n,\ell'}'^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}'^2) - q'^4 (\mathcal{I}_{n-1,\ell'}'^2 + \mathcal{I}_{n,\ell'-1}'^2) + \\ &+ m^2 q'^2 (\mathcal{I}_{n,\ell'}'^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}'^2) \left. \right\} - G_F^2 \left( \overline{C_V^2} - \overline{C_A^2} \right) m^2 \left\{ (2q_\parallel'^2 - q_\perp'^2) \times \right. \\ &\times (\mathcal{I}_{n-1,\ell'}'^2 + \mathcal{I}_{n,\ell'-1}'^2 - \mathcal{I}_{n,\ell'}'^2 - \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}'^2) + 3q'^2 (\mathcal{I}_{n-1,\ell'}'^2 + \mathcal{I}_{n,\ell'-1}'^2) \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Постоянные  $\overline{C_V^2} = 0.93$  и  $\overline{C_A^2} = 0.75$  - это результат суммирования всех каналов рождения нейтрино типов  $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau$ .

Полученная светимость (2.8) совпадает вплоть до обозначений с результатами работы [21].

### 2.3. Резонансное комптоновское рассеяние

Вычислим теперь коэффициент поглощения фотона в реакции  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , где начальный и конечный электроны могут находиться на уровнях Ландау  $\ell$  и  $\ell'$  соответственно, а виртуальный электрон может занимать уровень  $n$ . Определяя коэффициент поглощения согласно [32, 90], получим:

$$W_{\gamma e \rightarrow \gamma e} = \sum_{\ell, \ell'=0}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_{E_\ell} \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \times \quad (2.10)$$

$$\times [1 - f_e(E_{\ell'})] \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} [1 + f_\gamma(\omega')] \sum_{s, s'} \frac{|\mathcal{S}_{VV}^{s's}|^2}{\tau}.$$

Здесь  $\mathcal{S}_{VV}^{s's}$  -  $\mathcal{S}$ -матричный элемент процесса  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ . Он может быть получен из (1.30) заменой  $m_f = m$ ,  $g_V = e > 0$ ,  $j_{V\alpha} = \varepsilon_\alpha(q)$ ,  $j'_{V\alpha} = \varepsilon_\alpha^*(q')$ .  $q^\alpha = (\omega, \mathbf{k})$  и  $q'^\alpha = (\omega', \mathbf{k}')$  - 4-векторы начального и конечного фотонов соответственно,  $\varepsilon_\alpha(q)$  и  $\varepsilon_\alpha(q')$  - их векторы поляризации. Анализ дисперсионных свойств фотонов в условиях магнитосфер радиопульсаров и магнитаров показывает, что фотон в таких условиях может иметь два поляризационных состояния, определяемых векторами <sup>1</sup>:

$$\varepsilon_\alpha^{(1)}(q) = \frac{(q\varphi)_\alpha}{\sqrt{q_\perp^2}}, \quad \varepsilon_\alpha^{(2)}(q) = \frac{(q\tilde{\varphi})_\alpha}{\sqrt{q_\parallel^2}}. \quad (2.11)$$

Предполагая, что основной вклад в коэффициент поглощения фотона бу-

---

<sup>1</sup> Подробнее о дисперсии фотона в активной среде см. Главу 3 данной диссертации и [32, 75].



дут давать области резонансов, с учетом (1.83), перепишем (2.10) в виде:

$$W_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell, \ell'=0}^{n-1} \sum_{s, s', s''=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_e(E_\ell) \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \times (2.12)$$

$$\times [1 - f_e(E'_{\ell'})] \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} [1 + f_\gamma(\omega')] \frac{dp''_y dp''_z L_y L_z}{(2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} \frac{|\mathcal{S}_{e\ell\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s''s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e\ell'\gamma^{(\lambda')}}^{s's''}|^2}{\tau},$$

где  $\lambda, \lambda' = 1, 2$  и связь  $\mathcal{S}_{e\ell\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s''s}$  с соответствующей амплитудой определяется формулой (1.84), в которой  $jf \rightarrow e\ell\gamma^{(\lambda)}$ ,  $(n, s'') \rightarrow e_n$ .

Аналогично выражению (2.5),  $\Gamma_n^{s''}$  можно представить в виде:

$$\Gamma_n^{s''} \simeq \Gamma_{e_n \rightarrow e\ell'\gamma}^{(abs)s''} \left[ 1 + e^{-(E_n'' - \mu)/T} \right], \quad (2.13)$$

где введена ширина поглощения электрона в процессе  $e_n \rightarrow e\ell'\gamma$

$$\Gamma_{e_n \rightarrow e\ell'\gamma}^{(abs)s''} = \sum_{\ell'=0}^{n-1} \sum_{s'=\pm 1} \sum_{\lambda'} \int \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} (1 - f_{E_{\ell'}}) \times (2.14)$$

$$\times \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} [1 + f_\gamma(\omega')] \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e\ell'\gamma^{(\lambda')}}^{s's''}|^2}{\tau}.$$

Подставляя (2.13) в (2.12) с учётом (2.14) и суммируя по поляризациям конечных фотонов, получим

$$W_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{s, s''=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_e(E_\ell) \times (2.15)$$

$$\times \frac{dp''_y dp''_z L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_e(E_n'')] \frac{|\mathcal{S}_{e\ell\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s''s}|^2}{\tau}.$$

Интегрируя это выражение с учётом формул (1.94)-(1.97) Главы 1, получим следующие парциальные вклады в коэффициент поглощения:

$$W_{\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma e} = \frac{\alpha\beta}{2\omega} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_e(E_\ell^\epsilon) [1 - f_e(E_\ell^\epsilon + \omega)]}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times (2.16)$$

$$\times \left\{ [2\beta(n + \ell) - q_\parallel^2] (\mathcal{I}_{n, \ell-1}^2 + \mathcal{I}_{n-1, \ell}^2) - 8\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{I}_{n, \ell-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell} \right\},$$

$$\begin{aligned}
W_{\gamma^{(2)}e \rightarrow \gamma e} &= \frac{\alpha\beta}{2\omega} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_e(E_\ell^\epsilon)[1 - f_e(E_\ell^\epsilon + \omega)]}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times \\
&\times \left\{ \left[ \frac{(2\beta(n - \ell))^2}{q_\parallel^2} - 2\beta(n + \ell) - 4m^2 \right] (\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2) - 8\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{I}_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right\}, \\
E_\ell^\epsilon &= \frac{1}{2q_\parallel^2} \left[ \omega (M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2) + \epsilon k_z \sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2} \right].
\end{aligned} \tag{2.17}$$

В (2.16) и (2.17) нижний предел суммирования по  $n$  определяется из закона сохранения энергии и импульса следующим образом:

$$n_0 = \ell + \left\lceil \frac{q_\parallel^2 + 2M_\ell \sqrt{q_\parallel^2}}{2\beta} \right\rceil, \tag{2.18}$$

где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .

В недавней работе [75] исследовался процесс комптоновского рассеяния в магнитных полях  $B \sim 10^{12} - 10^{15}$  Гс, характерных для магнитосфер радиопульсаров и магнитаров, без  $\delta$ -функциональной аппроксимации резонансных пиков. Поэтому представляет интерес провести сравнительный анализ полученных нами результатов с соответствующими результатами работы [75]. Исходя из (2.15) и следуя авторам [75], введем сечение процесса  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , проинтегрированное по начальным электронам с функцией распределения  $f_{E_\ell}$  при  $\mu = 0$ , следующим образом

$$\sigma_\lambda^* = \frac{1}{N_e} \int \frac{dW_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e}}{j}, \tag{2.19}$$

где  $j = |(p\tilde{\Lambda}q)|/(\omega V)$  – плотность потока падающих частиц в продольном, по отношению к магнитному полю, подпространстве,

$$N_e = \frac{\beta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2 - \delta_{\ell,0}) \int_{-\infty}^{\infty} dp_z f_{E_\ell} \tag{2.20}$$

- концентрация электронов во внешнем магнитном поле. Кроме того, для параметров поля и плазмы, характерных для магнитосфер радиопульсаров [13], мы можем пренебречь изменением (по сравнению с незамагниченным вакуумом) дисперсионных свойств фотонов, положив  $k_z = \omega \sin \theta$ , где  $\theta$  – угол между

импульсом фотона и направлением магнитного поля. В силу этого, в области энергий фотонов  $\omega \ll t$  перенормировка волновой функции фотона также становится несущественной. Отметим, что данное утверждение заведомо не будет справедливым вблизи циклотронных резонансов, когда  $q_{\parallel}^2 \simeq (M_n + M_{\ell})^2$  (см., например, [32]).

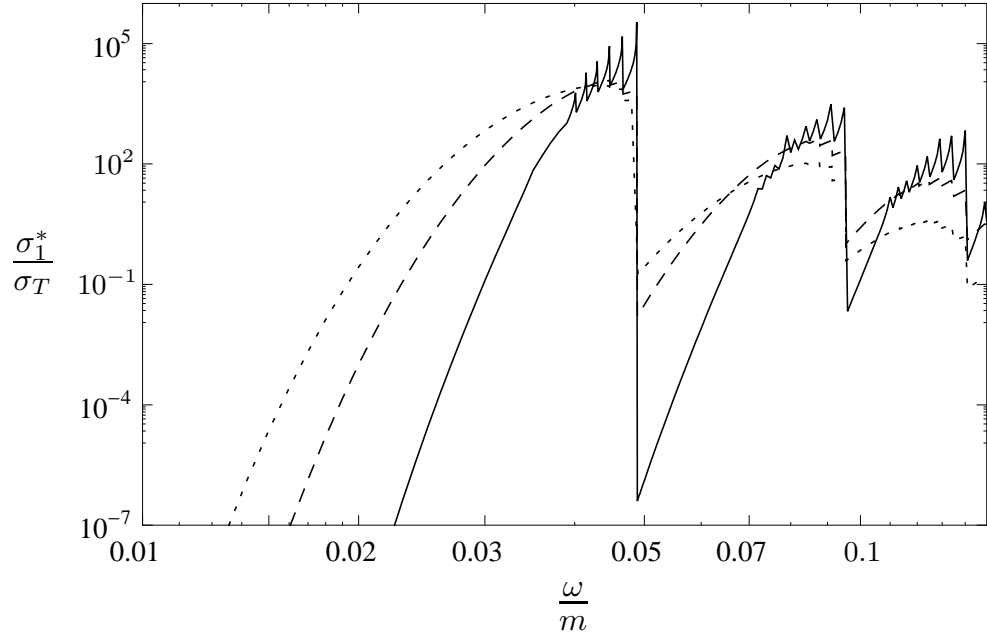


Рис. 2.2. Сечение (в единицах  $\sigma_T$ ) рассеяния фотона моды 1,  $\gamma^{(1)}e \rightarrow e$ , в сильном магнитном поле  $B = 5 \times 10^{12}$  Гс, проинтегрированное по начальным электронам с функцией распределения  $f_{E_e}$  при  $T = 20$  кэВ и  $\mu = 0$ , как функция энергии (в единицах массы электрона) фотона для различных значений углов между импульсом фотона и направлением магнитного поля:  $\theta = 90^\circ$  - сплошная кривая,  $\theta = 60^\circ$  - пунктирная кривая,  $\theta = 30^\circ$  - точечная кривая.

Результаты численного анализа отношения  $\sigma_{\lambda}^*/\sigma_T$ , (напомним, что  $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/(3m^2)$  - томпсоновское сечение) представлены на Рис. (2.2) и (2.3).

Полученные оценки в окрестности резонансных пиков хорошо согласуются с соответствующими результатами работы [75]. Следовательно, применение приближения (1.80) правомочно в области полей  $B \sim 10^{12}$  Гс, характерных для радиопульсаров. С другой стороны, полученные нами коэффициенты поглощения фотона (2.16) и (2.17) имеют относительно простой вид и, следовательно, оказываются гораздо более удобными в применении к решению задачи переноса излучения по сравнению с численно полученными результатами работы [75].

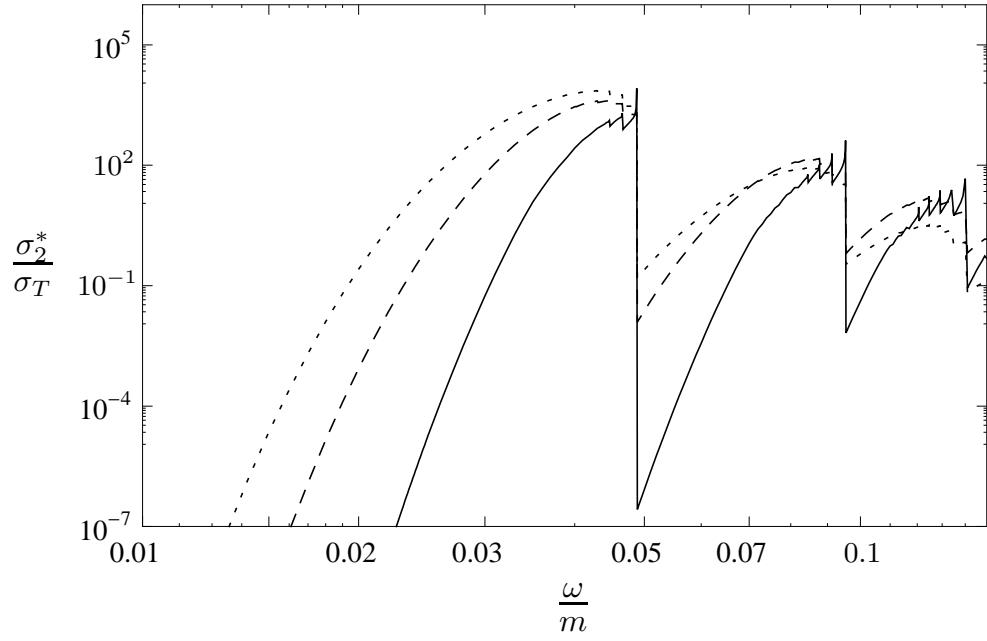


Рис. 2.3. сечение (в единицах  $\sigma_T$ ) рассеяния фотона моды 2,  $\gamma^{(2)}e \rightarrow e$ , в сильном магнитном поле  $B = 5 \times 10^{12}$  Гс, проинтегрированное по начальным электронам с функцией распределения  $f_{E_\ell}$  при  $T = 20$  кэВ и  $\mu = 0$ , как функция энергии (в единицах массы электрона) фотона для различных значений углов между импульсом фотона и направлением магнитного поля:  $\theta = 90^\circ$  - сплошная кривая,  $\theta = 60^\circ$  - пунктирная кривая,  $\theta = 30^\circ$  - точечная кривая.

Отметим (см. Рис. 2.2 и 2.3), а также (2.16) и (2.17)), что коэффициенты поглощения фотона для обеих мод имеют узкие максимумы, соответствующие значениям энергии фотона  $\omega_{n\ell} = (M_n - M_\ell)/\sin \theta$ , хорошо известные в литературе (см., например, [150–152]).

## Глава 3

# Процесс расщепления фотона в сильном магнитном поле с учётом влияния позитрония

## 3.1. Введение

Процесс расщепления фотона,  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , запрещённый в вакууме законом сохранения зарядовой чётности, известным как теорема Фарри, становится разрешённым в присутствии внешнего поля или плазмы, меняющих как амплитуду взаимодействия, так и дисперсионные свойства фотонов. Несмотря на длительную историю исследований интерес к этому процессу не утихает в связи с его возможными астрофизическими приложениями.

Впервые вероятность расщепления фотона в слабом магнитном поле ( $B \ll B_e$ ) и при малых энергиях фотона ( $\omega \ll m_e$ ) была вычислена в работах [76, 77]. В более детальном исследовании [78] получены правила отбора по поляризациям и показано, что в коллинеарном пределе только одна конфигурация фотонов оказалась разрешённой:  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$  (канал  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  не запрещён, но сильно подавлен), и амплитуда процесса при энергии начального фотона меньше порога рождения электрон-позитронной пары ( $\omega \leq 2m$ ) для произвольной напряжённости поля.

Одно из проявлений данного процесса в астрофизике заключается в смягчении спектра излучения от нейтронных звёзд. В частности, предполагается, что с его помощью можно объяснить особенности гамма-спектров некоторых радиопульсаров [86]. В [10, 153] были предложены модели, объясняющие обрезание спектров источников мягких повторяющихся гамма-всплесков действием процесса  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ .

Ещё одним интересным приложением рассматриваемого процесса является объяснение особенностей радио-излучения аномальных рентгеновских пуль-

саров и источников мягких повторяющихся гамма-всплесков. Поскольку у расщепления фотона нет кинематического порога, энергичные фотоны, распространяющиеся под малыми углами по отношению к магнитному полю, могут расщепляться прежде, чем достигнут порога рождения пары. Таким образом процесс может изменять эффективность производства электрон-позитронной плазмы, необходимой для создания наблюдаемого радио-излучения [87–89].

Расщепление фотона также должен учитываться в модели вспышек у источников мягких повторяющихся гамма-всплесков [10, 26]. Рассматриваемый процесс играет роль регулятора температуры внешней фотосферы долго живущей области, занятой захваченной магнитным полем горячей  $e^+e^-$  плазмой и находящимися в термодинамическом равновесии с ней фотонами (так называемый «trapped fireball»).

Во всех рассматриваемых астрофизических приложениях реакция  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  происходит в присутствии плазмы, которая может иметь высокую плотность и температуру. Влияние плазмы на вероятность расщепления фотона проявляется двумя путями. С одной стороны, она модифицирует дисперсионные свойства фотонов, с другой - изменяет амплитуду процесса. Первый фактор был рассмотрен в работах [78, 154]. Было показано, что присутствие холодной и слабо замагниченной плазмы не меняет правила отбора, если плотность плазмы не слишком велика ( $n_e \leq 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ) [78]. В работе [154] была вычислена вероятность процесса с учётом влияния плазмы на дисперсию фотонов, но с использованием амплитуд, полученных в присутствии слабого магнитного поля, но не плазмы. Было показано, что при таком подходе влияние плазмы пренебрежимо мало везде, кроме очень узкого диапазона параметров плазмы и магнитного поля.

Изменение амплитуды расщепления фотона в присутствии магнитного поля и плазмы было рассмотрено в [155, 156] на основе эффективного лагранжиана Эйлера-Гейзенберга с учётом термальных поправок в одно- и двухпетлевых приближениях. Было показано, что в низкотемпературном пределе процесс  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  может конкурировать с другими реакциями поглощения, такими как

эффект Комптона.

Другой подход был рассмотрен в [157]. В этой работе амплитуды и коэффициент поглощения расщепления фотона в пределе сильного поля были вычислены с учётом изменения электронного пропагатора в магнитном поле. Основным результатом был вывод о том, что влияние плазмы является пренебрежимо малым. Тем не менее оценки коэффициента поглощения, полученные там, неточны в высокоэнергетическом пределе, т.к. использованные выражения применимы только для низкоэнергетических приближений. В работах [155–157] не рассматривались эффекты, связанные с влиянием плазмы на дисперсионные свойства фотонов.

Исследование процесса  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  в сильном магнитном поле с учётом того, что дисперсия фотона приводит к значительным отклонениям от коллинеарной кинематики, было проведено в [19]. В сильно замагниченной плазме расщепление фотона с учётом неколлинеарности кинематики и больших радиационных поправок было рассмотрено в [90]. В этой работе были получены модифицированные правила отбора по поляризациям: запрещённый в отсутствие плазмы канал  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  оказался открыт, а вероятности в каналах  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$  подавлены по сравнению со случаем только магнитного поля. Кроме того, в ней было проведено сравнение вероятностей процессов расщепления и слияния фотонов с комптоновским рассеянием и было показано, что расщепление фотона может конкурировать с эффектом Комптона при условии наличия разреженной плазмы ( $T \ll m_e$ ) и в результате может иметь вклад в формирование спектров аномальных рентгеновских пульсаров и источников мягких повторяющихся гамма-всплесков.

Дополнительным фактором помимо плазмы, изменяющим дисперсионные свойства фотона, может быть влияние позитрония. На первый взгляд его вклад в поляризационный оператор фотона должен быть следующего порядка малости по постоянной тонкой структуры  $\alpha \simeq 1/137$ , однако в сильном магнитном поле он приводит к существенному изменению дисперсионных свойств фотона

в окрестности циклотронного резонанса [158], что, в свою очередь, влияет на вероятность самого процесса. В работе [92] было исследовано влияние позитрония на дисперсионные свойства и амплитуды процесса радиационного распада нейтрино,  $\nu \rightarrow \nu\gamma$ , в сильном магнитном поле. Было показано, что учёт эффектов, связанных с позитронием, приводит к значительному увеличению вероятности данного процесса.

Таким образом, анализ процесса расщепления фотона в присутствии замагниченной плазмы и с учётом влияния позитрония представляет собой актуальную задачу.

Основные результаты главы 3 данной диссертации опубликованы в [159, 160].

### 3.2. Дисперсия фотона в зарядово несимметричной плотной плазме.

Распространение излучения в любой активной среде удобно описывать в терминах нормальных мод, то есть на языке собственных функций и собственных значений поляризационного оператора  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ , которые определяют дисперсионные свойства фотона.

Любой тензор может быть представлен в ковариантной форме при разложении по ортогональному базису, который может быть построен с помощью только четырёхмерного вектора энергии-импульса фотона и тензора электромагнитного поля. Этот базис имеет следующий вид [161]:

$$\begin{aligned} b_{\mu}^{(1)} &= (\varphi q)_{\mu}, & b_{\mu}^{(2)} &= (\tilde{\varphi} q)_{\mu}, \\ b_{\mu}^{(3)} &= q^2 (\Lambda q)_{\mu} - q_{\mu} q_{\perp}^2, & b_{\mu}^{(4)} &= q_{\mu}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

являющихся собственными векторами поляризационного оператора в постоянном однородном магнитном поле. При этом  $(b^{(1)}b^{*(1)}) = -q_{\perp}^2$ ,  $(b^{(2)}b^{*(2)}) = -q_{\parallel}^2$ ,  $(b^{(3)}b^{*(3)}) = -q^2 q_{\parallel}^2 q_{\perp}^2$ ,  $(b^{(4)}b^{*(4)}) = q^2$ .



В этом базисе будем иметь следующее разложение  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$  по собственным векторам  $r_{\alpha}^{(\lambda)}$  в замагниченной плазме с соответствующими собственными значениями  $\varkappa^{(\lambda)}$  [68, 95, 162, 163]:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1}^3 \varkappa^{(\lambda)} \frac{r_{\alpha}^{(\lambda)} (r_{\beta}^{(\lambda)})^*}{(r^{(\lambda)})^2}, \quad r_{\beta}^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^3 A_i^{(\lambda)} b_{\beta}^{(i)}, \quad (3.2)$$

где комплексные коэффициенты  $A_i^{(\lambda)}$  определяются следующими выражениями с точностью до  $O(1/\beta^2)$  [68, 95]:

$$A_1^{(1,3)} = \mp \sqrt{q_{\perp}^4 + (6\Delta N \omega)^2 \frac{q_{\perp}^2}{q_{\parallel}^2} - q_{\perp}^2}, \quad (3.3)$$

$$A_2^{(1,3)} = i \frac{\Delta N k_z q_{\perp}^2}{2\beta \mathcal{D}(q_{\parallel}) q_{\parallel}^2} \left[ \pm \sqrt{q_{\perp}^4 + (6\Delta N \omega)^2 \frac{q_{\perp}^2}{q_{\parallel}^2} + q_{\perp}^2} \right],$$

$$A_3^{(1,3)} = -i \frac{6\Delta N \omega}{q_{\parallel}^2}, \quad A_1^{(2)} = -i \frac{\Delta N k_z}{2\beta \mathcal{D}(q_{\parallel})}, \quad A_2^{(2)} = 1, \quad A_3^{(2)} = 0.$$

Здесь

$$\mathcal{D}(q_{\parallel}) = -\mathcal{J}(q_{\parallel}) - H\left(\frac{q_{\parallel}^2}{4m^2}\right), \quad (3.4)$$

$$H(z) = \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{z}{1-z}} - 1, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad (3.5)$$

$$H(z) = -\frac{1}{2\sqrt{z(z-1)}} \ln \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z} - \sqrt{z-1}} - 1 + \frac{i\pi}{2\sqrt{z(z-1)}}, \quad z > 1.$$

В зарядово несимметричной холодной плазме ( $T \ll \mu - m$ ) величина  $\mathcal{J}(q_{\parallel})$  может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(q_{\parallel}) = & -\frac{1}{2\sqrt{z(1-z)}} \left( \operatorname{arctg} \left[ \frac{v_F - v_{\phi} + z v_F (v_{\phi}^2 - 1)}{(v_{\phi}^2 - 1) \sqrt{z(1-z)}} \right] + \right. \\ & \left. + \operatorname{arctg} \left[ \frac{v_F + v_{\phi} + z v_F (v_{\phi}^2 - 1)}{(v_{\phi}^2 - 1) \sqrt{z(1-z)}} \right] \right), \quad 0 \leq z \leq 1, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\mathcal{J}(q_{\parallel}) = -\frac{1}{4\sqrt{z(z-1)}} \left( \ln \left[ \frac{v_F - v_{\phi} + (v_{\phi}^2 - 1)(zv_F - \sqrt{z(z-1)})}{v_F - v_{\phi} + (v_{\phi}^2 - 1)(zv_F + \sqrt{z(z-1)})} \right] + \right. \quad (3.7)$$

$$\left. + \ln \left[ \frac{v_F + v_{\phi} + (v_{\phi}^2 - 1)(zv_F - \sqrt{z(z-1)})}{v_F + v_{\phi} + (v_{\phi}^2 - 1)(zv_F + \sqrt{z(z-1)})} \right] \right) - \frac{i\pi \Theta(v_F|v_{\phi}| - 1)}{2\sqrt{z(z-1)}}, \quad z > 1,$$

$$z = \frac{q_{\parallel}^2}{4m^2}, \quad v_F = \frac{\sqrt{\mu^2 - m^2}}{\mu}, \quad v_{\phi} = \frac{\omega}{q_z}, \quad \Delta N = 2p_F = 2\sqrt{\mu^2 - m^2}, \quad (3.8)$$

$\Theta(x)$  - тета-функция,

В холодной, почти вырожденной, умеренно релятивистской плазме выполняется условие  $\Delta N/(2m) \simeq v_F \ll 1$ . При этом выражения (3.3) приводят к такому же уравнению дисперсии и физическим модам, что и в замагниченном вакууме:

$$\varepsilon_{\alpha}^{(1)}(q) = \frac{(q\varphi)_{\alpha}}{\sqrt{q_{\perp}^2}}, \quad \varepsilon_{\alpha}^{(2)}(q) = \frac{(q\tilde{\varphi})_{\alpha}}{\sqrt{q_{\parallel}^2}}. \quad (3.9)$$

В данном приближении собственные векторы оператора поляризации имеют следующий вид:

$$\varkappa^{(1)} = -\frac{\alpha}{3\pi} q_{\perp}^2 + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right), \quad (3.10)$$

$$\varkappa^{(2)} = \frac{2\alpha}{\pi} \beta \mathcal{D}(q_{\parallel}) + O\left(\frac{1}{\beta}\right), \quad (3.11)$$

$$\varkappa^{(3)} = O\left(\frac{1}{\beta^2}\right). \quad (3.12)$$

Как видно из выражения (3.10), собственное значение поляризационного оператора для фотона моды 1 остаётся с точностью до  $O(1/\beta)$  таким же, как и в замагниченном вакууме. Закон дисперсии для него пренебрежимо мало отличается от вакуумного,  $q^2 = 0$ . С другой стороны, для фотона моды 2 он существенно отличается от случая замагниченной плазмы. В соотношении между  $q_{\parallel}^2$  и  $q_{\perp}^2$  возникает зависимость от угла между направлением магнитного поля и импульса фотона:  $q_{\parallel}^2 = q_{\parallel}^2(q_{\perp}^2, \theta)$ . Закон дисперсии для фотона второй моды в присутствии сильно замагниченной холодной плазмы является решением урав-

нения

$$q^2 - \varkappa^{(2)} = 0 \quad (3.13)$$

и изображён на Рис. 3.1 и 3.2 для различных значений химического потенциала, импульса фотона и угла между ним и направлением магнитного поля.

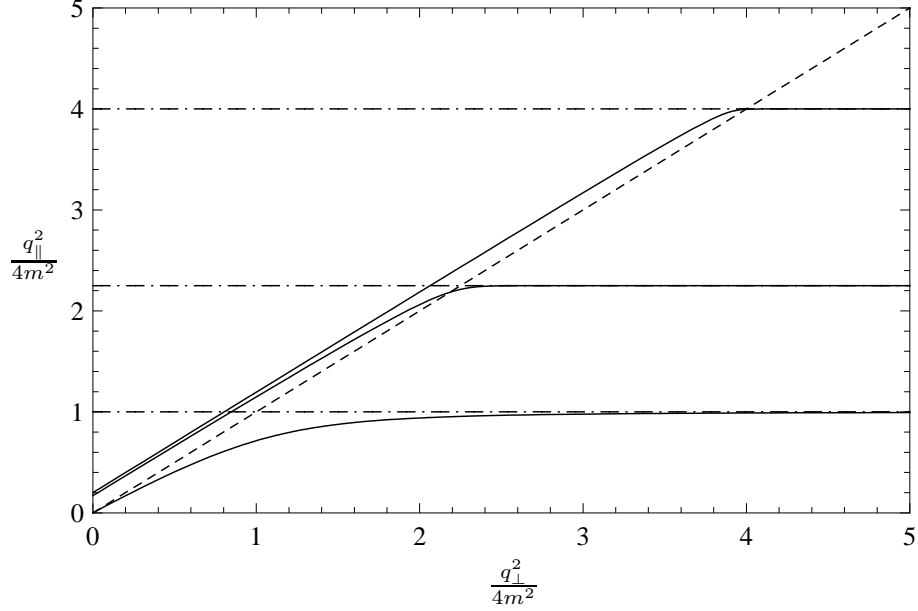


Рис. 3.1. Закон дисперсии фотона 2 моды в сильном магнитном поле ( $B/B_e = 200$ ) и вырожденной ( $T = 0$ ) плазме для значений химического потенциала:  $\mu = 1$  МэВ (верхняя кривая),  $\mu = 0.75$  МэВ (средняя кривая) и  $\mu = 0.5$  МэВ (нижняя кривая). Штриховая линия соответствует вакуумному закону дисперсии,  $q^2 = 0$ . Угол  $\theta$  между направлением магнитного поля и импульсом фотона равен  $\pi/2$

Как видно на Рис. 3.1, порог рождения электрон-позитронной пары смещается со значения  $q_{\parallel}^2$  до:

$$q_{\parallel}^2 = 2 \left( \mu^2 - p_F |k_z| + \mu \sqrt{(p_F - |q_z|)^2 + m^2} \right). \quad (3.14)$$

Из выражений (3.6) и (3.5) следует, что собственное значение поляризационного оператора для фотона 2 моды,  $\varkappa^{(2)}$ , становится большим вблизи порога рождения  $e^+e^-$  пары (см. Рис. 3.1 и 3.2), что указывает на необходимость учёта перенормировки волновой функции:

$$\varepsilon_{\alpha}^{(2)}(q) \rightarrow \varepsilon_{\alpha}^{(2)}(q) \sqrt{Z_2}, \quad Z_2^{-1} = 1 - \frac{\partial \varkappa^{(2)}(q)}{\partial \omega^2}. \quad (3.15)$$

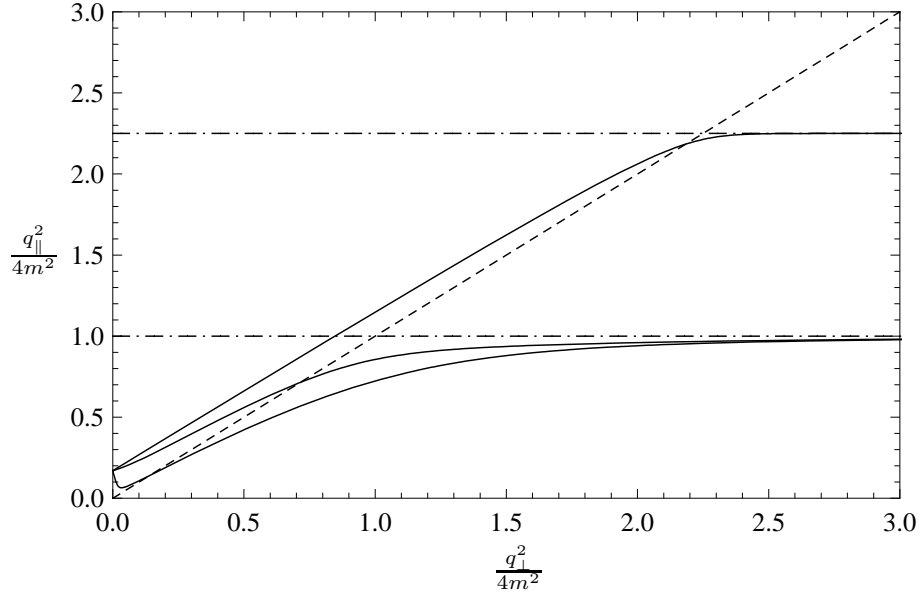


Рис. 3.2. Закон дисперсии фотона 2 моды в сильном магнитном поле ( $B/B_e = 200$ ) и вырожденной ( $T = 0$ ) плазме для  $\mu = 0.75$  МэВ в зависимости от угла  $\theta$  между направлением магнитного поля и импульсом фотона при  $\theta = \pi/2$  (верхняя кривая),  $\theta = \pi/4$  (средняя кривая) и  $\theta = \pi/12$  (нижняя кривая). Штриховая линия соответствует вакуумному закону дисперсии,  $q^2 = 0$ .

### 3.3. Дисперсия фотона в сильном магнитном поле с учётом влияния позитрония

Вклад возбуждённых состояний позитрония в поляризационный оператор фотона подавлен относительно вклада основного состояния фактором порядка  $B/(B_e \alpha^2) \gg 1$  [158]. Рождение позитрония в основном состоянии фотоном моды 1 или однофотонный распад на него кинематически запрещены, таким образом, закон дисперсии для фотона первой моды не изменяется и остаётся практически вакуумным,  $q^2 = 0$ .

Закон дисперсии для фотона моды 2 определяется из уравнения  $q^2 - \Pi^{(2)}$ , где собственное значение поляризационного оператора в сильном магнитном поле и с учётом влияния позитрония имеет следующий вид [92]:

$$\Pi^{(2)} = -\alpha\beta e^{-\rho} \left( \frac{2}{\pi} H(v) + \frac{2\lambda v}{1 - \lambda^2 - v} \right), \quad (3.16)$$

где  $\rho = q_{\perp}^2/2\beta$ ,  $v = q_{\parallel}^2/4m^2$ , функция  $H(z)$  определяется формулой (3.5),

$$\lambda = \frac{\alpha}{2} (\ln(4.5u) - 2.44 \ln(\ln 0.15u)) , \quad (3.17)$$

$$u = \frac{\beta}{\alpha^2} \frac{\exp(E_i(-\rho))}{\rho} \gg 1 ,$$

$E_i$  - интегральная показательная функция:

$$E_i(-\xi) = \int_{-\infty}^{-\xi} \frac{\exp t}{t} dt, \quad (3.18)$$

Поляризационный оператор с учётом влияния связанной электрон-позитронной пары позволяет найти закон дисперсии,  $q_{\parallel}^2(q_{\perp}^2)$ , для фотона второй моды в окрестности циклотронного резонанса,  $q_{\parallel}^2 = 4m^2$ , в которой влияние позитрония велико. Спектральная линия фотона расщепляется на две (сплошные линии на Рис. 3.3). Верхняя из них с ростом  $q_{\parallel}^2$  асимптотически стремится к спектральной линии свободной покоящейся относительно друг друга  $e^+e^-$ -пары (пунктирная кривая), а нижняя приближается к спектральной линии позитрония,  $q_{\parallel}^2/4m^2 = 1 - \lambda^2(q_{\perp}^2)$  (она изображена точками).

Как видно из формулы (3.16), собственное значение поляризационного оператора для фотона второй моды становится большим в окрестности циклотронного резонанса. Поэтому необходимо учитывать перенормировку волновой функции фотона:

$$\varepsilon_{\alpha}^{(2)}(q) \rightarrow \varepsilon_{\alpha}^{(2)}(q) \sqrt{Z_2}, \quad Z_2^{-1} = 1 - \frac{\partial \Pi^{(2)}}{\partial q_{\parallel}^2}. \quad (3.19)$$

### 3.4. Вероятность для процесса расщепления фотона в зарядово несимметричной плотной плазме.

Для различных астрофизических приложений и, в частности, анализа переноса излучения, представляет самостоятельный интерес вычислить коэффициент поглощения фотона в реакции  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ , который можно представить в

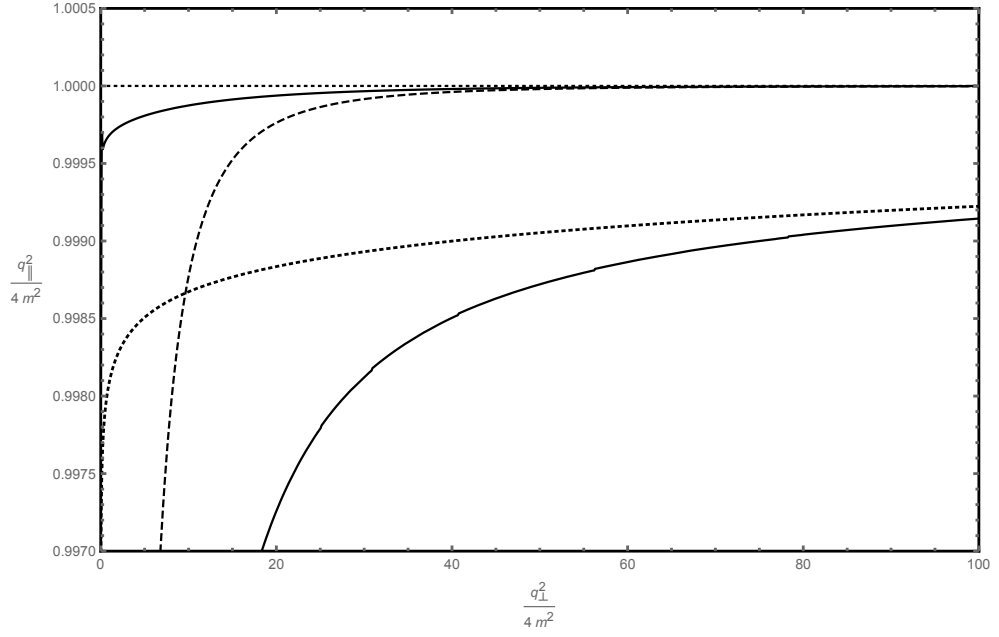


Рис. 3.3. Закон дисперсии для фотона второй моды с учётом вклада связанной  $e^+e^-$ -пары в сильном магнитном поле,  $B = 200B_e$ . Сплошные кривые соответствуют спектральным линиям фотона, пунктирная кривая - спектральная линия свободной покоящейся относительно друг друга  $e^+e^-$ -пары, точечная кривая - спектральная линия позитрония.

виде [164]:

$$W_{\lambda \rightarrow \lambda' \lambda''} = \frac{g_{\lambda' \lambda''}}{32\pi^2 \omega_\lambda} \int |\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda' \lambda''}|^2 Z_\lambda Z_{\lambda'} Z_{\lambda''} [1 + f_\gamma(\omega_{\lambda'})] \times \quad (3.20)$$

$$\times [1 + f_\gamma(\omega_{\lambda'})] \delta(\omega_\lambda(\mathbf{k}) - \omega_{\lambda'}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'') - \omega_{\lambda''}(\mathbf{k}'')) \frac{d^3 k''}{\omega_{\lambda'} \omega_{\lambda''}},$$

где  $\lambda = 1, 2$  обозначает поляризацию начального фотона,  $\lambda', \lambda''$  - поляризацию конечных фотонов.  $q_\alpha = (\omega_\lambda, \mathbf{k})$  - 4-вектор энергии-импульса начального фотона,  $q'_\alpha = (\omega_{\lambda'}, \mathbf{k}')$  и  $q''_\alpha = (\omega_{\lambda''}, \mathbf{k}'')$  - конечных фотонов.  $f_\gamma$  - равновесная функция распределения фотонов.

Для фотона второй моды в присутствии замагниченной плазмы, в отличие от замагниченного вакуума, существует кинематическая область, в которой  $q^2 > 0$  (см. Рис. 3.1 и 3.2), что связано с появлением эффективной массы фотона. Это приводит к модификации правил отбора по поляризациям для процесса расщепления фотона по сравнению со случаем чистого магнитного поля. В области  $q^2 > 0$  открывается новый канал,  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$ , запрещённый в отсутствие

плазмы, а каналы  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$ , открытые в замагниченном вакууме, оказываются запрещёнными.

В пределе холодной плотной плазмы,  $T \ll \mu - m$ , в расщеплении будут участвовать в основном фотоны с энергией  $\omega \sim T$ . При этом канал  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  будет основным.

Парциальная амплитуда рассеяния для канала  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  может быть получена из результатов работ [90, 164] и представлена в виде (см. также Приложение Б):

$$\mathcal{M}_{2 \rightarrow 11} = i4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{(q' \varphi q'')(q' \tilde{\varphi} q'')}{\sqrt{q_{\parallel}^2 q_{\perp}^2 q_{\perp}^{\prime 2} q_{\perp}^{\prime \prime 2}}} \mathcal{D}(q_{\perp}), \quad (3.21)$$

где  $\mathcal{D}(q_{\perp})$  задаётся формулой (3.4).

Если пренебречь влиянием стимулирующего излучения конечных фотонов ( $f_{\gamma}(\omega_{\lambda'}) = f_{\gamma}(\omega_{\lambda''}) = 0$ ), то коэффициент поглощения фотона в сильно замагниченной холодной плазме (3.20) можно представить в виде:

$$W_{2 \rightarrow 11} = \frac{\alpha^3}{8\pi^2} Z_2 \mathcal{D}^2(q_{\parallel}) \frac{q_{\perp}^2}{\omega} \mathcal{F} \left( \sqrt{\frac{q_{\parallel}^2}{q_{\perp}^2}} \right) \Theta(q^2), \quad (3.22)$$

где

$$\mathcal{F}(z) = 2 \ln z - 1 + z^{-2}. \quad (3.23)$$

На рис. 3.4 вероятность поглощения фотона для канала  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ , как функция энергии начального фотона представлена для случая, когда фотон распространяется поперек направления магнитного поля при двух значениях химического потенциала 1 МэВ и 0.75 МэВ.

Зависимость вероятности поглощения фотона по каналу расщепления  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$  от угла между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля при химическом потенциале 0.75 МэВ представлена на рис. 3.5.

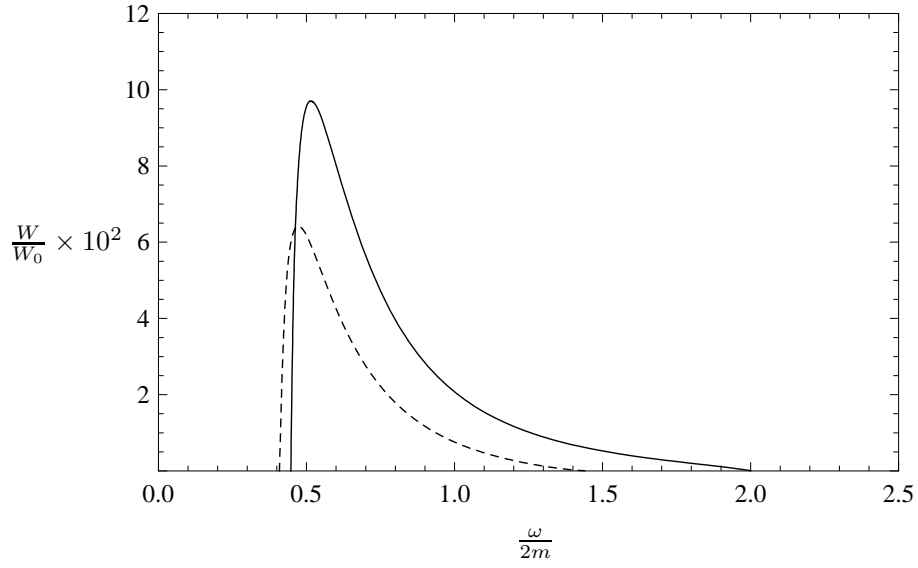


Рис. 3.4. Вероятность расщепления фотона по каналу  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$  в сильном магнитном поле ( $B/B_e = 200$ ) и холодной ( $T = 50$  кэВ) плазме при химическом потенциале 1 МэВ (сплошная линия) и 0.75 МэВ (штриховая линия). Здесь  $\theta = \pi/2$ ,  $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{см}^{-1}$

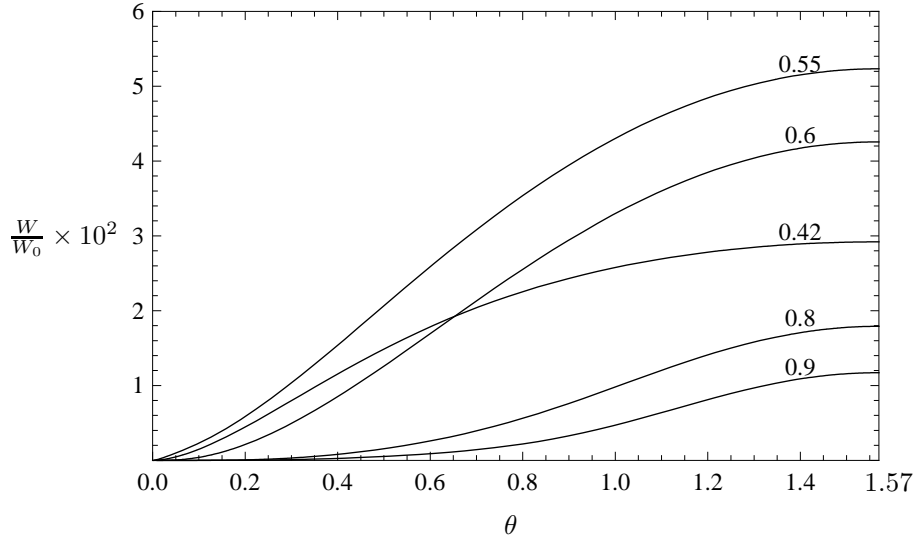


Рис. 3.5. Зависимость вероятности расщепления фотона по каналу  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$  от угла между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля при различных энергиях начального фотона ( $B/B_e = 200$ ,  $T = 50$  кэВ,  $\mu = 0.75$  МэВ). Числа на кривых соответствуют отношению  $\omega/2m$ .  $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{см}^{-1}$



### 3.5. Вероятность для процесса расщепления фотона в сильном магнитном поле с учётом влияния позитрония

Модифицированный с учётом вклада позитрония поляризационный оператор определяет новые правила отбора для процесса  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ . Так, существование кинематической области для верхней ветви дисперсии (см. рис. 3.3), где  $q^2 > 0$ , открывает новый канал реакции,  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ , который полагался закрытым в исследованиях, в которых не учитывалось влияние электрон-позитронной пары. В то же время каналы  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  в этой же области оказываются закрыты.

Для анализа процесса воспользуемся амплитудами расщепления фотона в сильном магнитном поле. Они могут быть представлены в следующем виде [165]:

$$\mathcal{M}_{1 \rightarrow 12} = -i 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(q' \varphi q'')(q' \tilde{\varphi} q'')}{\sqrt{q_{\parallel}^2 q_{\perp}^{\prime 2} q_{\perp}^{\prime\prime 2}}} H\left(\frac{q_{\parallel}^{\prime\prime 2}}{4m^2}\right), \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1 \rightarrow 22} = & -i 4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(q' q'')_{\parallel}}{\sqrt{q_{\parallel}^2 q_{\perp}^{\prime 2} q_{\perp}^{\prime\prime 2}}} \times \\ & \times \left[ (q q'')_{\perp} H\left(\frac{q_{\parallel}^{\prime 2}}{4m^2}\right) + (q q')_{\perp} H\left(\frac{q_{\parallel}^{\prime\prime 2}}{4m^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\mathcal{M}_{2 \rightarrow 11} = \mathcal{M}_{1 \rightarrow 12}(q \leftrightarrow q''). \quad (3.26)$$

Коэффициенты поглощения в разрешённых каналах,  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1\gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2\gamma_2$ , были получены численно из формулы (3.20) для значений индукции магнитного поля  $B = 100B_e$  и  $B = 200B_e$ . На рис. 3.6 - 3.9 они представлены как функции энергии начального фотона.

Коэффициент поглощения в канале  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1\gamma_1$ , который запрещён в чистом магнитном поле без учёта вклада позитрония, вычислен аналитически и может

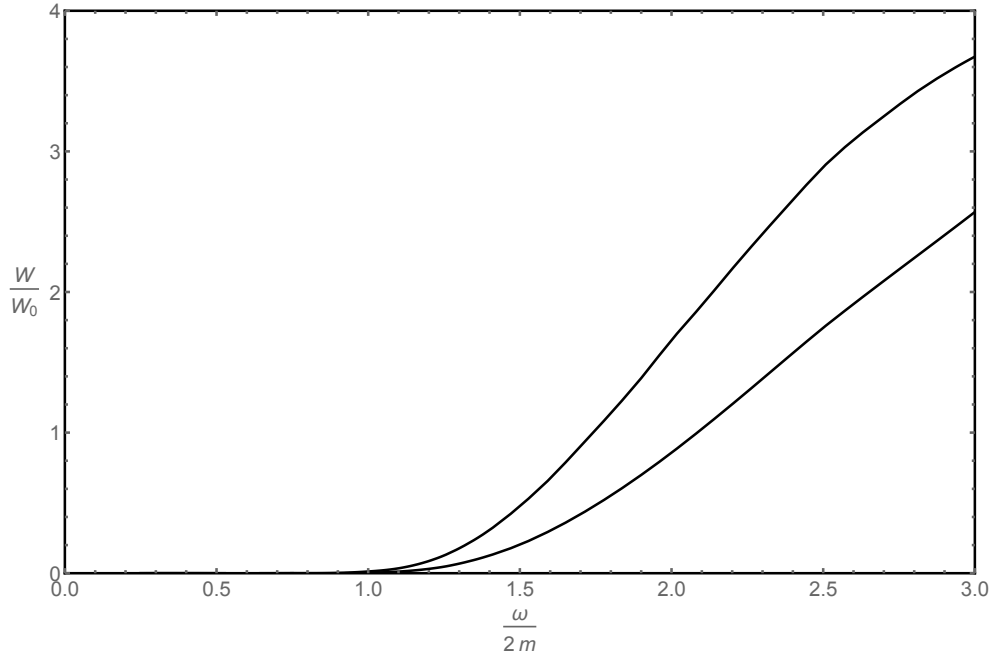


Рис. 3.6. Коэффициент поглощения фотона в канале  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$  для значений магнитного поля  $B/B_e = 100$  (верхняя кривая),  $B/B_e = 200$  (нижняя кривая). Здесь  $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{см}^{-1}$ .

быть представлен в виде:

$$W_{2 \rightarrow 11} = \frac{\alpha^3}{8\pi^2} Z_2 H^2 \left( \frac{q_{\parallel}^2}{4m^2} \right) \frac{q_{\perp}^2}{\omega} \mathcal{F} \left( \sqrt{\frac{q_{\parallel}^2}{q_{\perp}^2}} \right) \Theta(q^2), \quad (3.27)$$

где  $\mathcal{F}(z)$  определяется формулой 3.23.

Коэффициент поглощения в канале  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$  представлен на рис. 3.10 как функция энергии начального фотона для магнитного поля  $B = 200B_e$ .

### 3.6. Заключение

В данной главе вычислены коэффициенты поглощения фотона в реакции  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  с учётом влияния холодной замагниченной плазмы и позитрония. В обоих случаях модификация закона дисперсии фотона приводит к открытию нового канала расщепления фотона  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$ , запрещённого в чистом магнитном поле.

В случае присутствия холодной замагниченной плазмы новый канал расщепления является основным, а вероятность расщепления по каналам  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$  и

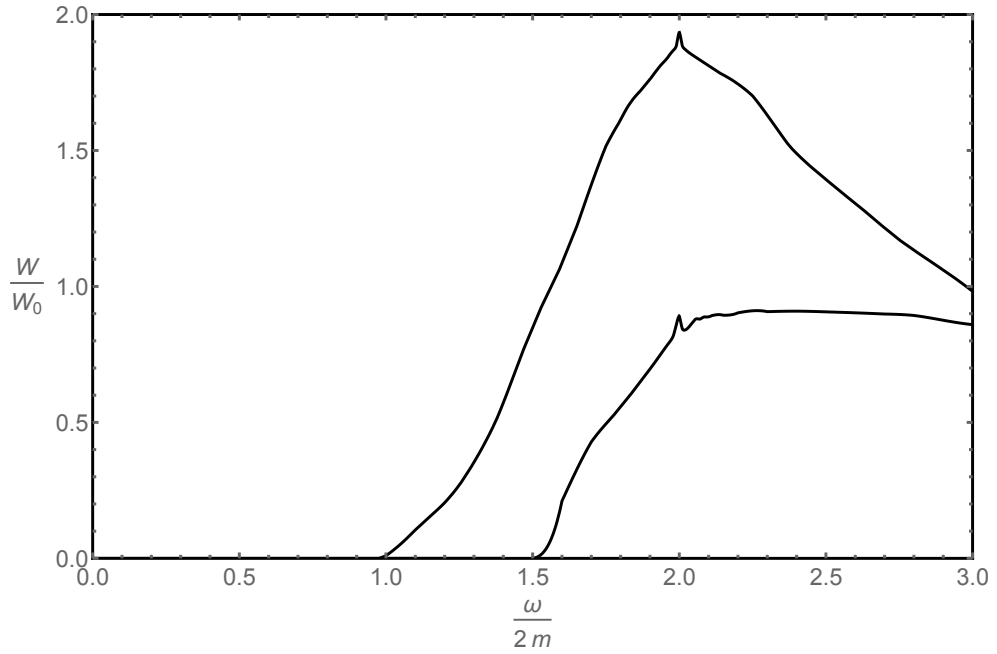


Рис. 3.7. Коэффициент поглощения фотона в канале  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$  для значений магнитного поля  $B/B_e = 100$  (верхняя кривая),  $B/B_e = 200$  (нижняя кривая). Здесь  $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{ см}^{-1}$ .

$\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$ , разрешённым в магнитном поле, оказывается подавлена. Коэффициент поглощения фотона удалось получить в аналитическом виде как функцию энергии и угла между направлением магнитного поля и импульса начального фотона.

Влияние позитрония на процесс  $\gamma \rightarrow \gamma \gamma$  является двояким: с одной стороны, спектральная линия фотона второй моды расщепляется на две, с другой - фазовый объём реакции уменьшается. В результате вероятность расщепления фотона по каналам, известным в присутствии магнитного поля, несколько уменьшается. Одновременно с этим открывается новый канал  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$ , выражение коэффициента поглощения в котором также приведено в аналитической форме.

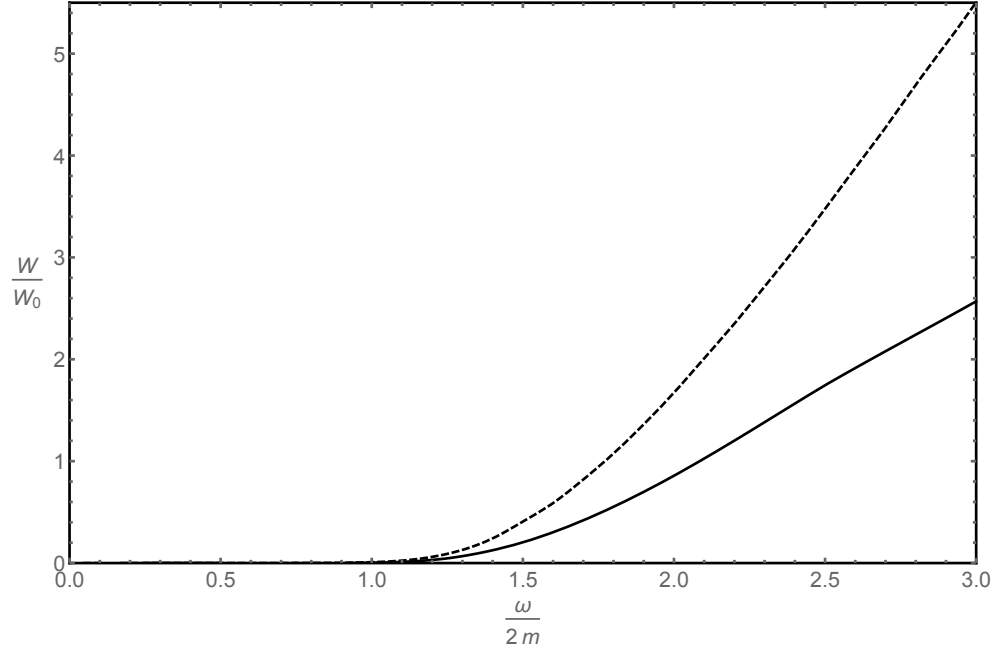


Рис. 3.8. Коэффициент поглощения фотона в канале  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$  в сильном магнитном поле ( $B/B_e = 200$ ). Пунктирная линия соответствует вероятности реакции в замагниченном вакууме без учёта вклада позитрония [165]. Здесь  $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{см}^{-1}$ .

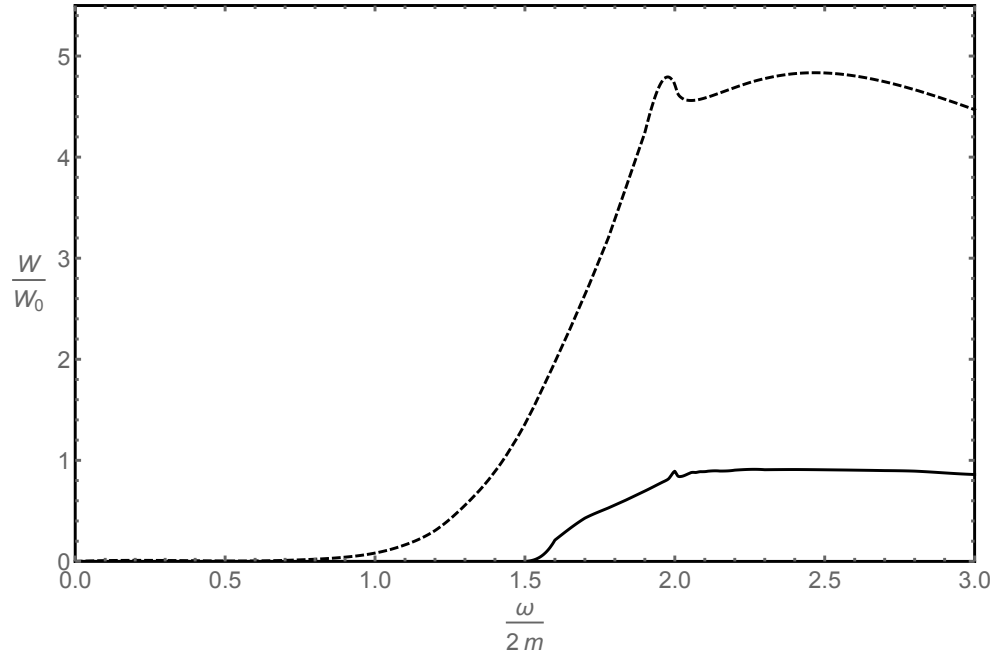


Рис. 3.9. Коэффициент поглощения фотона в канале  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$  в сильном магнитном поле ( $B/B_e = 200$ ). Пунктирная линия соответствует вероятности реакции в замагниченном вакууме без учёта вклада позитрония [165]. Здесь  $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{см}^{-1}$ .

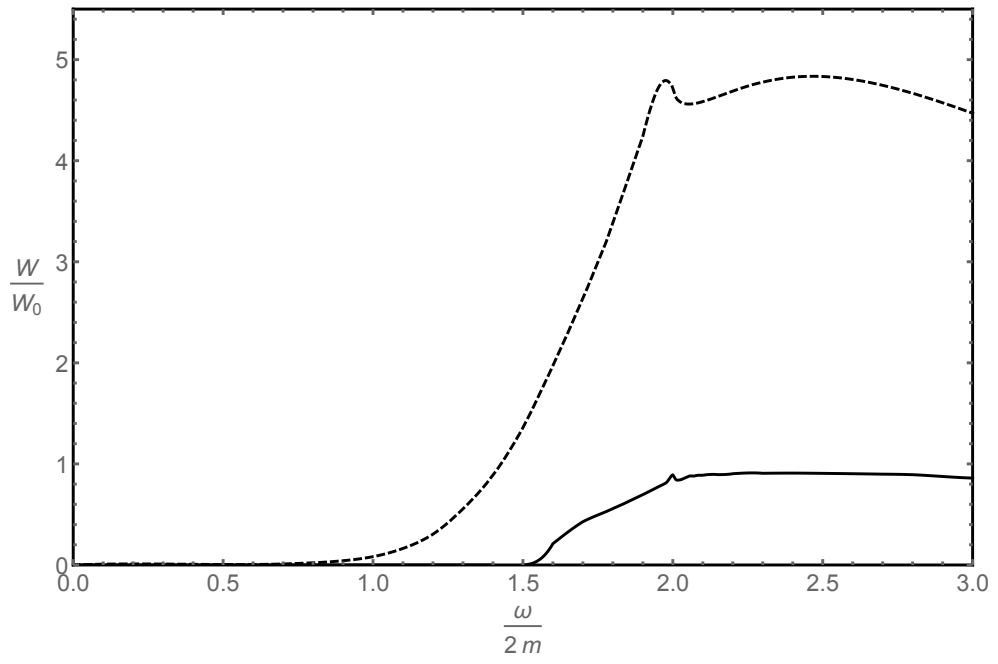


Рис. 3.10. Коэффициент поглощения фотона в канале  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$  в сильном магнитном поле ( $B/B_e = 200$ ).  $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{см}^{-1}$ .

## Заключение

В настоящей диссертации рассмотрены квантовые процессы в присутствии сильного магнитного поля и плазмы с учётом резонансов на виртуальных фермионах.

В диссертации представлены следующие результаты:

1. Впервые исследованы возможные резонансные эффекты в древесных двухвершинных амплитудах для переходов  $jf \rightarrow j'f'$  в постоянном однородном магнитном поле и в присутствии замагниченной плазмы, где  $f$  и  $f'$  - начальный и конечный фермионы, находящиеся на произвольных уровнях Ландау,  $j$  и  $j'$  - обобщенные токи скалярного, псевдоскалярного, векторного или аксиального типов. Показано, что в области резонанса амплитуды реакции  $jf \rightarrow j'f'$  однозначно выражаются через амплитуды процессов  $jf \rightarrow \tilde{f}$  и  $\tilde{f} \rightarrow j'f'$ , содержащих промежуточное состояние  $\tilde{f}$ .
2. Впервые вычислена нейтринная излучательная способность, обусловленная процессом  $\gamma e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$  в холодной замагниченной плазме с учетом резонанса на виртуальном электроне, занимающем произвольный уровень Ландау  $n$ . Впервые получен коэффициент поглощения фотона в процессе резонансного рассеяния  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  в присутствии замагниченной плазмы, результат представлен в простой аналитической форме, удобной для дальнейшего использования при решении задачи переноса излучения. Показано, что использование  $\delta$ -функциональной аппроксимации резонансных пиков в области резонансов хорошо согласуется с соответствующими в литературе результатами, полученными громоздкими численными расчетами.
3. Найдены правила отбора по поляризациям для процесса расщепления фотона  $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$  в холодной почти вырожденной плазме и в сильном магнитном поле с учётом вклада позитрония. Для разрешённых каналов рас-

щепления фотона вычислены парциальные вероятности процесса с учётом влияния замагниченной холодной плазмы и позитрония в дисперсию и перенормировку волновых функций фотонов. Полученные результаты показывают, что вклады плазмы и позитрония, с одной стороны, существенным образом изменяют правила отбора по поляризациям по сравнению со случаем чистого магнитного поля. В частности, становится возможным новый канал расщепления  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$ . С другой стороны, вероятность расщепления по каналам  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$  и  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$  оказалась подавлена по сравнению со случаем замагниченного вакуума.

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [101–103, 146–148, 159, 160].

Автор выражает глубокую признательность научному руководителю - д.ф.-м.н., доценту Дмитрию Александровичу Румянцеву, а также преподавателям кафедры теоретической физики: Александру Васильевичу Кузнецову, Александру Яковлевичу Пархоменко, Михаилу Влаерьевичу Чистякову, Игорю Сергеевичу Огневу. Автор благодарит заведующего кафедрой физики ЯВВУ ПВО - доктора технических наук, профессора Алексея Владимировича Зюзина.

## Приложение А

### Выражения для $\mathcal{R}_{k'k}^{s's}$

В данном приложении приведены величины  $\mathcal{R}_{k'k}^{s's}$ , входящие в выражение (1.33). Они представлены в явном лоренц-инвариантном виде и выражены через конструкции (1.33 - 1.36). Ниже используется следующее обозначение:  $\mathcal{I}_{n,\ell} \equiv \mathcal{I}_{n,\ell}(q_{\perp}^2/(2\beta))$ .

1. В случае, когда  $j$  и  $j'$  являются скалярными токами ( $k, k' = S$ ), результат вычислений имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SS}^{++} = g_s g'_s j_s j'_s & \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\ & \times [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 [\sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \\ & \left. + \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SS}^{+-} = i g_s g'_s j_s j'_s & \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\ & - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 \times \\ & \left. \times [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SS}^{-+} = -i g_s g'_s j_s j'_s & \left\{ \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\ & - \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 \times \\ & \left. \times [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SS}^{--} = g_s g'_s j_s j'_s & \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \right. \\ & \times [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 [\sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \\ & \left. + \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Выражения для  $\mathcal{R}_{k'k}^{s's}$ , соответствующие второй диаграмме на рис. 1.1, получаются заменой  $P_\alpha \rightarrow P'_\alpha$ ,  $\mathcal{I}_{m,n} \leftrightarrow \mathcal{I}'_{m,n}$ .



2. Для случая, когда  $j$  - скалярный ток и  $j'$  - псевдоскалярный ток ( $k = S, k' = P$ ), мы получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PS}^{++} = g_s g_p' j_s j_p' & \left\{ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'}' \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\ & \times [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}' - 2\beta \sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}' \mathcal{I}_{n,\ell} - \\ & \left. - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'}' \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SP}^{++} = -g_s g_p' j_s j_p' & \left\{ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell}' - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\ & \times [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}' - 2\beta \sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell}' - \\ & \left. - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}' ] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PS}^{+-} = i g_s g_p' j_s j_p' & \left\{ \sqrt{2\beta \ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'}' \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\ & + \sqrt{2\beta \ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}' \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 \times \\ & \left. \times [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}' \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \mathcal{I}_{n,\ell'}' \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SP}^{+-} = -i g_s g_p' j_s j_p' & \left\{ \sqrt{2\beta \ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_1 P') - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell}' + \right. \\ & + \sqrt{2\beta \ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P') + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}' - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 \times \\ & \left. \times [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell}' + 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}' ] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PS}^{-+} = & -ig_s g_p' j_s j_p' \left\{ \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'}' \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\ & + \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}' \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 \times \\ & \left. \times [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}' \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'}' \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SP}^{-+} = & ig_s g_p' j_s j_p' \left\{ \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P') + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell}' + \right. \\ & + \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_1 P') - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}' - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 \times \\ & \left. \times [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell}' + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}'] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PS}^{--} = & g_s g_p' j_s j_p' \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'}' \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \right. \\ & \times [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}' \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}' \mathcal{I}_{n,\ell} - \\ & \left. - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'}' \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{SP}^{--} = & -g_s g_p' j_s j_p' \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell}' - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \right. \\ & \times [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}' - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell}' - \\ & \left. - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}'] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

3. Для случая, когда  $j$  - скалярный ток и  $j'$  - векторный ток ( $k = S$ ,  $k' = V$ ), мы получаем:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{VS}^{++} = g_s g'_v j_s \Big\{ & -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - \right. \\
 & \left. -m_f(\mathcal{K}_1j') \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + \right. \\
 & \left. + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j') \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j') \times \\
 & \times \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] + \\
 & + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\
 & \left. - \sqrt{n}(M_\ell + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] \times \\
 & \times \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \Big\};
 \end{aligned} \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}_{SV}^{++} = g_s g'_v j_s \Big\{ & -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - \right. \\
 & \left. -m_f(\mathcal{K}_1j') \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - \right. \\
 & \left. - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j') \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j') \times \\
 & \times \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] + \\
 & + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \right. \\
 & \left. - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] \times \\
 & \times \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \Big\};
 \end{aligned} \tag{A.14}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VS}^{+-} = -ig_s g_v' j_s \Big\{ & \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \Big[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - \\
& - m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \Big[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + \\
& + m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j') \Big[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \Big] - \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \Big[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \Big] - \\
& - 2\beta\sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \Big[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{n} (M_\ell + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \Big] \Big\};
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SV}^{+-} = ig_s g_v' j_s \Big\{ & \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \Big[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + \\
& + m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \Big[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 - \\
& - m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j') \Big[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \Big] + \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \Big[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \Big] + \\
& + 2\beta\sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \Big[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \\
& - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \Big] \Big\};
\end{aligned} \tag{A.16}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VS}^{-+} = & -ig_s g'_v j_s \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + \right. \right. \quad (\text{A.17}) \\
& + m_f(\mathcal{K}_2j') \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - \right. \\
& - m_f(\mathcal{K}_2j') \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j') \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - 2\beta \sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \times \right. \\
& \left. \times \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SV}^{-+} = & ig_s g'_v j_s \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 - \right. \quad (\text{A.18}) \\
& - m_f(\mathcal{K}_2j') \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + \right. \\
& + m_f(\mathcal{K}_2j') \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j') \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] + 2\beta \sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \sqrt{n}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} \right] + \\
& + \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \right. \\
& \left. - 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VS}^- = g_s g'_v j_s \Big\{ & (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + \right. \quad (\text{A.19}) \\
& + m_f(\mathcal{K}_1j') \Big] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j') \right] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j') \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\
& - \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \Big] - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \times \\
& \times \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] \\
& + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{n} (M_\ell + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \Big] \Big\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SV}^- = g_s g'_v j_s \Big\{ & (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + \right. \quad (\text{A.20}) \\
& + m_f(\mathcal{K}_1j') \Big] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j') \right] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j') \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \right. \\
& - \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \Big] - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] + \\
& + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \right. \\
& \left. - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \Big\}.
\end{aligned}$$

4. Для случая, когда  $j$  - скалярный ток и  $j'$  - псевдовекторный ток ( $k = S, k' = A$ ), мы получаем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AS}^{++} = & -g_s g_a' j_s \left\{ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \left[ (P \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 + (P \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 + m_f (\mathcal{K}_2 j') \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 + (P \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 - m_f (\mathcal{K}_2 j') \right] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta \sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j') \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell'} \times \right. \\
& \times (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q' \Lambda j') + i(q' \varphi j')] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{n} (M_\ell + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta \ell'}{q_\perp'^2}} [(q' \Lambda j') - i(q' \varphi j')] \left[ (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta \sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \left. \right] \left. \right\};
\end{aligned}
\tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SA}^{++} = & -g_s g_a' j_s \left\{ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \left[ (P' \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 - (P' \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 + m_f (\mathcal{K}_2 j') \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P' \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 - (P' \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_2 j') \right] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + 2\beta \sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j') \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{\ell'} \times \right. \\
& \times (M_\ell + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] + \sqrt{\frac{2\beta \ell}{q_\perp'^2}} [(q' \Lambda j') + i(q' \varphi j')] \left[ (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - 2\beta \sqrt{\ell' n} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \left. \right] + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) [(q' \Lambda j') - i(q' \varphi j')] \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \right. \\
& - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \left. \right] \left. \right\};
\end{aligned}
\tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AS}^{+-} = & -ig_s g'_a j_s \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + \right. \right. \quad (\text{A.23}) \\
& + m_f(\mathcal{K}_1j') \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - \right. \\
& \left. - m_f(\mathcal{K}_1j') \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j') \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \left. \times \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] + \right. \\
& \left. + 2\beta\sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{n} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times (M_\ell + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SA}^{+-} = & ig_s g'_a j_s \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + \right. \right. \quad (\text{A.24}) \\
& + m_f(\mathcal{K}_1j') \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - \right. \\
& \left. - m_f(\mathcal{K}_1j') \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j') \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] - \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \times \right. \\
& \left. \times \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} - 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} \right] + \right. \\
& \left. + 2\beta\sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n} \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AS}^{-+} = & -ig_s g'_a j_s \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - \right. \right. \quad (\text{A.25}) \\
& -m_f(\mathcal{K}_1j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + \right. \\
& +m_f(\mathcal{K}_1j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j') \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\
& - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - 2\beta\sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \times \right. \\
& \left. \times \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SA}^{-+} = & ig_s g'_a j_s \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - \right. \quad (\text{A.26}) \\
& -m_f(\mathcal{K}_1j') \left. \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + \right. \\
& +m_f(\mathcal{K}_1j') \left. \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j') \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \right. \\
& - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] - 2\beta\sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} \right] + \\
& + \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \times \right. \\
& \left. \times \mathcal{I}'_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AS}^- = & -g_s g'_a j_s \left\{ - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + \right. \right. \\
& + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + \right. \\
& + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j') \times \\
& \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} \Big] + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \left[ (q'\Lambda j') - i(q'\varphi j') \right] \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \right. \\
& \left. \left. + \sqrt{n} (M_\ell + m_f)\mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] \right\}; \tag{A.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{SA}^- = & -g_s g'_a j_s \left\{ - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - \right. \right. \\
& - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - \right. \\
& - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j') \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \Big] - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \times \right. \\
& \left. \times \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \Big] \right\}; \tag{A.28}
\end{aligned}$$

5. Для случая, когда  $j$  и  $j'$  - псевдоскалярные токи ( $k = k' = P$ ), мы получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PP}^{++} = & -g_p g_p' j_p j_p' \left\{ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\ & \times [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta \sqrt{n} \mathcal{K}_3 [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \\ & \left. + \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PP}^{+-} = & -ig_p g_p' j_p j_p' \left\{ \sqrt{2\beta \ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\ & - \sqrt{2\beta \ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} \times \\ & \left. \times \mathcal{K}_4 [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PP}^{-+} = & ig_p g_p' j_p j_p' \left\{ \sqrt{2\beta \ell} (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\ & - \sqrt{2\beta \ell'} (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} \times \\ & \left. \times \mathcal{K}_4 [2\beta \sqrt{\ell \ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PP}^{--} = & -g_p g_p' j_p j_p' \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \times \right. \\ & \times [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta \sqrt{n} \mathcal{K}_3 [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \\ & \left. + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

Выражения для  $\mathcal{R}_{PP}^{s's}$ , соответствующие второй диаграмме на рис. 1.1, получаются заменой  $P_\alpha \rightarrow P'_\alpha$ ,  $\mathcal{I}_{m,n} \leftrightarrow \mathcal{I}'_{m,n}$ .

6. Для случая, когда  $j$  - псевдоскалярный ток и  $j'$  - векторный ток ( $k = P, k' = V$ ), мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VP}^{++} = & g_p g'_v j_p \left\{ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \left[ (P \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 + (P \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 - m_f (\mathcal{K}_2 j') \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 + (P \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 + \right. \\
& + m_f (\mathcal{K}_2 j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta \sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j') \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(q' \Lambda j') + i(q' \varphi j')] \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{n} \times \right. \\
& \times (M_\ell + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \sqrt{\frac{2\beta \ell'}{q_\perp'^2}} [(q' \Lambda j') - i(q' \varphi j')] \times \\
& \times \left. \left[ (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta \sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.33}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PV}^{++} = & -g_p g'_v j_p \left\{ 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \left[ (P' \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 - (P' \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_2 j') \right] \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P' \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 - (P' \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 + \right. \\
& + m_f (\mathcal{K}_2 j') \left. \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + 2\beta \sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j') \left[ \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] + \sqrt{\frac{2\beta \ell}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times [(q' \Lambda j') + i(q' \varphi j')] \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \right. \\
& - 2\beta \sqrt{\ell' n} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \left. \right] + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q' \Lambda j') - i(q' \varphi j')] \times \\
& \times \left. \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \right\};
\end{aligned} \tag{A.34}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VP}^{+-} = & ig_p g'_v j_p \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f \times \right. \right. \quad (\text{A.35}) \\
& \times (\mathcal{K}_1 j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f \times \right. \\
& \times (\mathcal{K}_1 j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1 j') \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + 2\beta\sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \right. \\
& \left. - \sqrt{n} (M_\ell + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PV}^{+-} = & ig_p g'_v j_p \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f \times \right. \quad (\text{A.36}) \\
& \times (\mathcal{K}_1 j') \left. \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f \times \right. \\
& \times (\mathcal{K}_1 j') \left. \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1 j') \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_1 P') - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} - 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} \right] + \\
& + 2\beta\sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1 P') + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \right. \\
& \left. - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VP}^{-+} = & \text{ig}_p g'_v j_p \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f \times \right. \right. \quad (\text{A.37}) \\
& \times (\mathcal{K}_1 j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f \times \right. \\
& \times (\mathcal{K}_1 j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1 j') \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\
& \left. - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - 2\beta\sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j') + \text{i}(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1 P) + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] + \\
& + \frac{(q'\Lambda j') - \text{i}(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_1 P) - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \times \right. \\
& \left. \times \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PV}^{-+} = & \text{ig}_p g'_v j_p \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f \times \right. \quad (\text{A.38}) \\
& \times (\mathcal{K}_1 j') \left. \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - \right. \\
& \left. - m_f(\mathcal{K}_1 j') \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1 j') \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \right. \\
& \left. - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] - 2\beta\sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j') + \text{i}(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1 P') + m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} \right] + \\
& + \frac{(q'\Lambda j') + \text{i}(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1 P') - m_f \mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \times \right. \\
& \left. \times \mathcal{I}'_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{V\bar{P}} = g_p g'_v j_p \Big\{ & - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \Big[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + \quad (\text{A.39}) \\
& + m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \Big[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j') \Big[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \Big] + \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \Big[ (M_\ell + m_f) \times \\
& \times [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} \Big] + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] \Big[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{n} (M_\ell + m_f)\mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \Big] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{P\bar{V}} = -g_p g'_v j_p \Big\{ & - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \Big[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + \quad (\text{A.40}) \\
& + m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \Big[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_2j') \Big] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2j') \Big[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{\ell} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \Big] - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \Big[ \sqrt{\ell'} \times \\
& \times [(\mathcal{K}_2P') - m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \Big] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] \Big[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2P') + m_f\mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \\
& - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \Big] \Big\};
\end{aligned}$$

7. Для случая, когда  $j$  - псевдоскалярный ток и  $j'$  - псевдовекторный ток ( $k = P, k' = A$ ), мы получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{AP}^{++} = & -g_p g'_a j_p \left\{ -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j') \right] \times (A.41) \right. \\ & \times \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f \times \right. \\ & \times (\mathcal{K}_1j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j') \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \times \right. \\ & \times \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j') + \\ & + i(q'\varphi j')] \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{n}(M_\ell + m_f)\mathcal{K}_3 \times \right. \\ & \times \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] \left[ (M_\ell + m_f) \times \right. \\ & \times [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \left. \right] \left. \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{PA}^{++} = & g_p g'_a j_p \left\{ -2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j') \right] \times (A.42) \right. \\ & \times \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f \times \right. \\ & \times (\mathcal{K}_1j') \left. \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j') \left[ \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \times \right. \\ & \times \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \times \\ & \times \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'} \times \right. \\ & \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \left. \right] - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') + \right. \\ & \left. + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \left. \right\}; \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AP}^{+-} = & \text{ig}_p g'_a j_p \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + m_f \times \right. \right. \quad (\text{A.43}) \\
& \times (\mathcal{K}_2 j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - m_f \times \right. \\
& \times (\mathcal{K}_2 j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2 j') \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \left[ (M_\ell + m_f)[(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - 2\beta\sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \right. \\
& \left. + \sqrt{n} (M_\ell + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PA}^{+-} = & \text{ig}_p g'_a j_p \left\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 - m_f \times \right. \quad (\text{A.44}) \\
& \times (\mathcal{K}_2 j') \left. \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + m_f \times \right. \\
& \times (\mathcal{K}_2 j') \left. \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2 j') \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] + \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \left[ (M_{\ell'} + m_f)[(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'} \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \left. \right] + 2\beta\sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \times \right. \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] \left. \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AP}^{-+} = & \text{ig}_p g'_a j_p \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - m_f \times \right. \right. \quad (\text{A.45}) \\
& \times (\mathcal{K}_2 j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + m_f \times \right. \\
& \times (\mathcal{K}_2 j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2 j') \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - 2\beta \sqrt{\ell'} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{n}(M_\ell + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right] - \\
& - \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \left[ (M_\ell + m_f) [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \times \right. \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{n\ell} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \left. \right] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PA}^{-+} = & \text{ig}_p g'_a j_p \left\{ \sqrt{2\beta\ell}(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + m_f \times \right. \quad (\text{A.46}) \\
& \times (\mathcal{K}_2 j') \left. \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \left[ (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 - m_f \times \right. \\
& \times (\mathcal{K}_2 j') \left. \right] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2 j') \left[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} + \right. \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] + 2\beta \sqrt{\ell} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \sqrt{n}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} \right] + \\
& + \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \right. \\
& \left. - 2\beta\sqrt{n\ell'} \mathcal{K}_4 \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \right] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AP}^{--} = & -g_p g'_a j_p \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - \right. \quad (\text{A.47}) \\
& -m_f(\mathcal{K}_1j') \left. \right] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j') \right] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j') \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell} \times \right. \\
& \times (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \left[ (M_\ell + m_f) \times \right. \\
& \times [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \left. \right] + \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] \left[ \sqrt{\ell} [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{n} (M_\ell + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{PA}^{--} = & g_p g'_a j_p \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - \right. \quad (\text{A.48}) \\
& -m_f(\mathcal{K}_1j') \left. \right] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j') \right] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j') \left[ \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\ell} \times \right. \\
& \times (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} \left. \right] - \sqrt{\frac{2\beta}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \times \\
& \times \left[ \sqrt{\ell'} [(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - \sqrt{n} (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} \right] + \\
& + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] \left[ (M_{\ell'} + m_f) [(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \right. \\
& \left. \left. - 2\beta\sqrt{\ell'n} \mathcal{K}_3 \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

8. В случае, когда обе вершины векторного типа ( $k = k' = V$ ), результаты имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VV}^{++} = g_v g'_v & \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \left[ (P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1j') - \right. \right. \\
& - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1P) - m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} + \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1j') - \right. \\
& - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1P) + m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4] [\sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f)[(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')][(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 - \\
& - m_f(\mathcal{K}_1j)] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f)[(q\Lambda j) - i(q\varphi j)] \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j')] \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} \times \\
& \times (M_\ell + m_f)[(q\Lambda j') - i(q\varphi j')][(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 + m_f \times \\
& \times (\mathcal{K}_1j)] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f)[(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)] \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j')] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} + \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_1P) - m_f \times \\
& \times \mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'}[(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j) \times \\
& \times [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j') [(M_\ell + m_f) \times
\end{aligned}
\tag{A.49}$$

$$\begin{aligned}
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\ell} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VV}^{+-} = ig_v g'_v \Big\{ & \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2j') - \quad (A.50) \\
& - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2P) - m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3]] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2P) + \\
& + m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3]] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + \\
& + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3] [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 - \\
& - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j)] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q\Lambda j) - i(q\varphi j)] [(P\tilde{\Lambda}j') \times \\
& \times \mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j')] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j)] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - (M_\ell + m_f) \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j')] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \times \\
& \times \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda j') + i(q\varphi j')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_2 j) \times \\
& \times [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] + 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j') [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] - \\
& - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\
& - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VV}^{-+} = & ig_v g'_v \Big\{ - \sqrt{2\beta\ell} (M_\ell + m'_f) [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2 j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2 j') - (A.51) \\
& - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2 P) + m_f [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3]] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2 j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2 j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2 P) - m_f \times \\
& \times [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3]] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + \\
& + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3] [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 + \\
& + m_f(\mathcal{K}_2 j)] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2 j')] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - (M_\ell + m_f) \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j') - i(q\varphi j')}{\sqrt{q_\perp^2}} [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2 j)] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)] [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j') \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2 j') \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell} + \sqrt{2\beta \ell'} (M_\ell + m_f) [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell-1} - \sqrt{2\beta \ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell} + \\
& + 2\beta \sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j) [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell} - \sqrt{\ell'} (M_\ell + \\
& + m_f) \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1}] - 2\beta \sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j') [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell-1} - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell}] + \\
& + \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell-1} - 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell}] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VV}^{-} = g_v g'_v \Big\{ & (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(P\tilde{\Lambda} j')(\mathcal{K}_1 j) + (P\tilde{\Lambda} j)(\mathcal{K}_1 j') - \\
& - (j\tilde{\Lambda} j')(\mathcal{K}_1 P) + m_f [(j\tilde{\Lambda} j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi} j')\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell} + 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda} j')(\mathcal{K}_1 j) + (P\tilde{\Lambda} j)(\mathcal{K}_1 j') - (j\tilde{\Lambda} j')(\mathcal{K}_1 P) - m_f [(j\tilde{\Lambda} j')\mathcal{K}_3 + \\
& + (j\tilde{\varphi} j')\mathcal{K}_4] \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1} + 2\beta \sqrt{n} [(j\tilde{\Lambda} j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi} j')\mathcal{K}_4] [\sqrt{\ell'} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell-1}] - \sqrt{\frac{2\beta \ell'}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] [(P\tilde{\Lambda} j)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi} j)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1 j)] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n, \ell'-1} \mathcal{I}_{n, \ell} - \sqrt{\frac{2\beta \ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q\Lambda j) - i(q\varphi j)] [(P\tilde{\Lambda} j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi} j') \times \\
& \times \mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1 j')] \mathcal{I}'_{n, \ell'} \mathcal{I}_{n, \ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta \ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] \times
\end{aligned}
\tag{A.52}$$

$$\begin{aligned}
& \times [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j)]\mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}}(M_\ell + m_f) \times \\
& \times [(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)][(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j')]\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} + \\
& + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')][(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3]\frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3]\frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j) [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j') [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell}] + 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell}] \Big\}.
\end{aligned}$$

Выражения для  $\mathcal{R}_{VV}^{s's}$ , соответствующие второй диаграмме на рис. 1.1, получаются заменой  $P_\alpha \rightarrow P'_\alpha$ ,  $q_\alpha \leftrightarrow -q'_\alpha$ ,  $j_\alpha \leftrightarrow j'_\alpha$   $\mathcal{I}_{m,n} \leftrightarrow \mathcal{I}'_{m,n}$ .



9. Для случая, когда  $j$  - векторный ток и  $j'$  - псевдовекторный ток ( $k = V, k' = A$ ), мы получаем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AV}^{++} = g_v g_a' & \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2P) + \right. & (A.53) \\
& + m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3]] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(P\tilde{\Lambda}j') \times \\
& \times (\mathcal{K}_2j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2P) - m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3]] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3] [\sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j)] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f) [(q\Lambda j) - \\
& - i(q\varphi j)] [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j')] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j)] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)] [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j')] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \times \\
& \times \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \times \\
& \times \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j) [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] + \\
& + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j') [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VA}^{++} = g_v g_a' & \Big\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(P'\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2j) + (P'\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2P') - \quad (\text{A.54}) \\
& - m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 - (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3]] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(P'\tilde{\Lambda}j') \times \\
& \times (\mathcal{K}_2j) + (P'\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2P') + m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 - (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3]] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n} [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 - (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3] [\sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1}] + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q\Lambda j) + i(q\varphi j)] \times \\
& \times [(P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j')] \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] [(P'\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 + (P'\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j)] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j) - i(q'\varphi j)] [(P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j')] \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q\Lambda j') + i(q\varphi j')] [(P'\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 + (P'\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 + \\
& + m_f(\mathcal{K}_2j)] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_2P') - \\
& - m_f\mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_2P') +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_{2j'}) [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1}] - \sqrt{2\beta n} \times \\
& \times (\mathcal{K}_{2j}) [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell}] - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell}] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AV}^{+-} = & i g_v g_a' \Big\{ -\sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1j') - \quad (A.55) \\
& -(j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1P) - m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4]] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1P) - m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j') \times \\
& \times \mathcal{K}_4]] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4] [(M_\ell + m_f) \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j)] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times [(q\Lambda j) - i(q\varphi j)] [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j')] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\
& - \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j)] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)}{\sqrt{q'^2}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j')]\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')][(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{2\beta\ell'} \times \\
& \times (M_\ell + m_f)[(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_1j) [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_1j') [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell}] + \\
& + \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell}] \Big\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VA}^{+-} = ig_v g'_a \Big\{ & - \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(P'\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1j) + (P'\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1j') - \\
& - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1P') + m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4]] \mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(P'\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1j) + (P'\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1P') + m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (j\tilde{\varphi}j') \times \\
& \times \mathcal{K}_4]] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4] [(M_\ell + m_f) \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1}] + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} [(P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j')]\mathcal{I}_{n,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell} + \\
& + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')] [(P'\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 + (P'\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j)]\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} +
\end{aligned} \tag{A.56}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j) - i(q'\varphi j)] [(P'\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (P'\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j')] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j') + i(q\varphi j')}{\sqrt{q_\perp^2}} [(P'\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 + \\
& + (P'\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j)]\mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} + \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f)[(j\Lambda j') - \\
& - i(j\varphi j')][(\mathcal{K}_1P') - m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} + \sqrt{2\beta\ell'} \times \\
& \times (M_\ell + m_f)[(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_1P') + m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell} + 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j') [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell} + \\
& + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell-1}] + 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_1j) [\sqrt{\ell'} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} + \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n-1,\ell}] + \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell-1} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1}\mathcal{I}'_{n-1,\ell}] \Big\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AV}^{-+} = ig_v g_a' \Big\{ & - \sqrt{2\beta\ell} (M_\ell + m_f') [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1j') - \\
& - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1P) - m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4]] \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1P) + m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j') \times \\
& \times \mathcal{K}_4]] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4] [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} + \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')][(P\tilde{\Lambda}j) \times \\
& \times \mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j)] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times
\end{aligned} \tag{A.57}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j')]\mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j') - i(q\varphi j')}{\sqrt{q_\perp^2}} [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 + \\
& + m_f(\mathcal{K}_1j)]\mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)][(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + \\
& + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j')] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f)[(j\Lambda j') + \\
& + i(j\varphi j')][(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{2\beta\ell} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f)[(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell} + 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j) [\sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell} + \\
& + \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] + 2\beta\sqrt{n}(\mathcal{K}_1j') \times \\
& \times [\sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'}\mathcal{I}_{n-1,\ell}] - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'}\mathcal{I}_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell}] \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VA}^{-+} = ig_v g'_a \Big\{ & - \sqrt{2\beta\ell}(M_\ell + m'_f)[(P'\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1j) + (P'\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1j') - \\
& - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1P') + m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 - (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4]]\mathcal{I}_{n,\ell'}\mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell'}(M_\ell + m_f) \times
\end{aligned} \tag{A.58}$$

$$\begin{aligned}
& \times [(P' \tilde{\Lambda} j')(\mathcal{K}_1 j) + (P' \tilde{\Lambda} j)(\mathcal{K}_1 j') - (j \tilde{\Lambda} j')(\mathcal{K}_1 P') - m_f [(j \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_3 - (j \tilde{\varphi} j') \times \\
& \times \mathcal{K}_4] \mathcal{I}_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1} - \sqrt{2\beta n} [(j \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_3 - (j \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_4] [2\beta \sqrt{\ell \ell'} \mathcal{I}_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n, \ell} + \\
& + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n, \ell'} \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1}] - \frac{2\beta \sqrt{\ell \ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q \Lambda j) + i(q \varphi j)] [(P' \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_3 - \\
& - (P' \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_4 + m_f (\mathcal{K}_1 j')] \mathcal{I}_{n, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n, \ell} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q' \Lambda j') - i(q' \varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(P' \tilde{\Lambda} j) \mathcal{K}_3 + (P' \tilde{\varphi} j) \mathcal{K}_4 + m_f (\mathcal{K}_1 j)] \mathcal{I}_{n, \ell'} \mathcal{I}'_{n, \ell-1} - \\
& - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q' \Lambda j) - i(q' \varphi j)}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(P' \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_3 - (P' \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_4 - m_f \times \\
& \times (\mathcal{K}_1 j')] \mathcal{I}_{n-1, \ell'} \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1} - \frac{2\beta \sqrt{\ell \ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q \Lambda j') + i(q \varphi j')] [(P' \tilde{\Lambda} j) \mathcal{K}_3 + (P' \tilde{\varphi} j) \mathcal{K}_4 - \\
& - m_f (\mathcal{K}_1 j)] \mathcal{I}_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1, \ell} - \sqrt{2\beta \ell'} (M_\ell + m_f) [(j \Lambda j') - i(j \varphi j')] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_1 P') + m_f \mathcal{K}_3] \frac{(q \Lambda q') + i(q \varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n, \ell-1} - \sqrt{2\beta \ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(j \Lambda j') + i(j \varphi j')] [(\mathcal{K}_1 P') - m_f \mathcal{K}_3] \frac{(q \Lambda q') - i(q \varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell'} \mathcal{I}'_{n-1, \ell} - 2\beta \sqrt{n} \times \\
& \times (\mathcal{K}_1 j') [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q \Lambda j) - i(q \varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell'} \mathcal{I}'_{n, \ell} + \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \frac{(q \Lambda j) + i(q \varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1, \ell-1}] - 2\beta \sqrt{n} (\mathcal{K}_1 j) [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q' \Lambda j') - i(q' \varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n, \ell-1} + \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q' \Lambda j') + i(q' \varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n, \ell'} \mathcal{I}'_{n-1, \ell}] - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_3 [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q \Lambda j) - i(q \varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times \frac{(q' \Lambda j') - i(q' \varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1, \ell'} \mathcal{I}'_{n, \ell-1} + 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \frac{(q \Lambda j) + i(q \varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \times \frac{(q' \Lambda j') + i(q' \varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n, \ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1, \ell}] \Big\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AV}^- = g_v g_a' & \left\{ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2j') - \right. & (A.59) \\
& - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2P) - m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3]] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2P) + m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + \\
& + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3]] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3] \times \\
& \times [\sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f)\mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f)\mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f)[(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')][(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 - \\
& - m_f(\mathcal{K}_2j)] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f)[(q\Lambda j) - i(q\varphi j)] \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j')] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp'^2}} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f)[(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j)] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f)[(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)] [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + \\
& + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j')] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'}[(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp'^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp'^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta n} \times \\
& \times (\mathcal{K}_2j) [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2j') [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] - \\
& - 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\
& - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp'^2}} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] \left. \right\};
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{VA}^- = g_v g_a' \Big\{ & (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(P' \tilde{\Lambda} j')(\mathcal{K}_2 j) + (P' \tilde{\Lambda} j)(\mathcal{K}_2 j') - \quad (\text{A.60}) \\
& - (j \tilde{\Lambda} j')(\mathcal{K}_2 P') + m_f [(j \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 - (j \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3]] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \times \\
& \times [(P' \tilde{\Lambda} j')(\mathcal{K}_2 j) + (P' \tilde{\Lambda} j)(\mathcal{K}_2 j') - (j \tilde{\Lambda} j')(\mathcal{K}_2 P') - m_f [(j \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 - \\
& - (j \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3]] \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + 2\beta \sqrt{n} [(j \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 - (j \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3] \times \\
& \times [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1}] + \\
& + \sqrt{\frac{2\beta \ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f) [(q \Lambda j) + i(q \varphi j)] [(P' \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 - (P' \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 + \\
& + m_f (\mathcal{K}_2 j')] \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta \ell}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q' \Lambda j') - i(q' \varphi j')] \times \\
& \times [(P' \tilde{\Lambda} j) \mathcal{K}_4 + (P' \tilde{\varphi} j) \mathcal{K}_3 + m_f (\mathcal{K}_2 j)] \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta \ell}{q_\perp'^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(q' \Lambda j) - i(q' \varphi j)] [(P' \tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 - (P' \tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 - m_f (\mathcal{K}_2 j')] \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1} + \\
& + \sqrt{\frac{2\beta \ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f) [(q \Lambda j') + i(q \varphi j')] [(P' \tilde{\Lambda} j) \mathcal{K}_4 + (P' \tilde{\varphi} j) \mathcal{K}_3 - m_f (\mathcal{K}_2 j)] \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} - 2\beta \sqrt{\ell \ell'} [(j \Lambda j') - i(j \varphi j')] [(\mathcal{K}_2 P') + m_f \mathcal{K}_4] \times \\
& \times \frac{(q \Lambda q') + i(q \varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(j \Lambda j') + i(j \varphi j')] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_2 P') - m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q \Lambda q') - i(q \varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell} + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2 j') \times \\
& \times [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q \Lambda j) - i(q \varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell} - 2\beta \sqrt{\ell \ell'} \times \\
& \times \frac{(q \Lambda j) + i(q \varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell-1}] - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_2 j) [2\beta \sqrt{\ell \ell'} \frac{(q' \Lambda j') - i(q' \varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q' \Lambda j') + i(q' \varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell}] - \\
& - 2\beta \sqrt{n} \mathcal{K}_4 [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q \Lambda j) - i(q \varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q' \Lambda j') - i(q' \varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell'} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell-1} - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q \Lambda j) + i(q \varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q' \Lambda j') + i(q' \varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}_{n,\ell'-1} \mathcal{I}'_{n-1,\ell}] \Big\}.
\end{aligned}$$

10. Для случая, когда  $j$  и  $j'$  - псевдовекторные токи ( $k = k' = A$ ), мы получаем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AA}^{++} = g_a g_a' & \left\{ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1P) + \right. & (A.61) \\
& + m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4]] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(P\tilde{\Lambda}j') \times \\
& \times (\mathcal{K}_1j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1P) - m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4]] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n}[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4] [\sqrt{\ell}(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{\ell'}(M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j)] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \\
& - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f) [(q\Lambda j) - i(q\varphi j)] [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j')] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp^2}} (M_\ell + m_f) [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 - \\
& - m_f(\mathcal{K}_1j)] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)] [(P\tilde{\Lambda}j') \times \\
& \times \mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f(\mathcal{K}_1j')] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \\
& + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j) [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + (M_\ell + m_f) \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j') \times \\
& \times [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \Big] + 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \right. \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \times \\
& \left. \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \right] \Big\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AA}^{+-} = & ig_a g'_a \Big\{ \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \left[ (P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2j') - \right. & (A.62) \\
& - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2P) + m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3] \Big] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{2\beta\ell} \times \\
& \times \left[ (P(M_{\ell'} + m_f)\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_2j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_2P) - \right. \\
& - m_f[(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3] \Big] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n} \times \\
& \times [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3] \left[ (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \right. \\
& - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \Big] - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j)] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q\Lambda j) - i(q\varphi j)] \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 + m_f(\mathcal{K}_2j')] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp^2}} [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j)] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_3 - m_f(\mathcal{K}_2j')] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\
& - \sqrt{2\beta\ell} (M_{\ell'} + m_f) [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_2P) + m_f\mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_2P) - m_f\mathcal{K}_4] \times \\
& \times \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_2j) \left[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \Big] + 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j') \Big[ \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \Big] - \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 \Big[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} \Big] \Big\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AA}^{-+} = & i g_a g_a' \Big\{ - \sqrt{2\beta\ell} (M_\ell + m_f') \Big[ (P\tilde{\Lambda} j') (\mathcal{K}_2 j) + (P\tilde{\Lambda} j) (\mathcal{K}_2 j') - \quad (A.63) \\
& - (j\tilde{\Lambda} j') (\mathcal{K}_2 P) - m_f [(j\tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3] \Big] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) \Big[ (P\tilde{\Lambda} j') (\mathcal{K}_2 j) + (P\tilde{\Lambda} j) (\mathcal{K}_2 j') - (j\tilde{\Lambda} j') (\mathcal{K}_2 P) + \\
& + m_f [(j\tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3] \Big] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n} \times \\
& \times [(j\tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 + (j\tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3] \Big[ 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f) \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \Big] + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda} j) \mathcal{K}_4 - (P\tilde{\varphi} j) \mathcal{K}_3 - m_f (\mathcal{K}_2 j)] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - (M_\ell + m_f) \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} [(P\tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 - m_f (\mathcal{K}_2 j')] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j') - i(q\varphi j')}{\sqrt{q_\perp^2}} [(P\tilde{\Lambda} j) \mathcal{K}_4 - \\
& - (P\tilde{\varphi} j) \mathcal{K}_3 + m_f (\mathcal{K}_2 j)] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \frac{2\beta\sqrt{\ell\ell'}}{\sqrt{q_\perp'^2}} [(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)] \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda} j') \mathcal{K}_4 + (P\tilde{\varphi} j') \mathcal{K}_3 + m_f (\mathcal{K}_2 j')] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + \sqrt{2\beta\ell'} (M_\ell + m_f) \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_2 P) - m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{2\beta\ell} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_2 P) + m_f \mathcal{K}_4] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + \\
& + 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j) [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \times \\
& \times \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - 2\beta\sqrt{n} (\mathcal{K}_2 j') [\sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] + \\
& + \sqrt{2\beta n} \mathcal{K}_4 [(M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \times \\
& \times \mathcal{I}_{n,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] \Big\} ;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{AA}^{--} = g_a g'_a \Big\{ & (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(P\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1 j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1 j') - \quad (A.64) \\
& - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1 P) - m_f [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4]] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(P\tilde{\Lambda}j') \times \\
& \times (\mathcal{K}_1 j) + (P\tilde{\Lambda}j)(\mathcal{K}_1 j') - (j\tilde{\Lambda}j')(\mathcal{K}_1 P) + m_f [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4]] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{n} [(j\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (j\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4] [\sqrt{\ell'} (M_\ell + m_f) \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} + \\
& + \sqrt{\ell} (M_{\ell'} + m_f) \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')] \times \\
& \times [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_1 j)] \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell} - \sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) \times \\
& \times [(q\Lambda j) - i(q\varphi j)] [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j')\mathcal{K}_4 - m_f (\mathcal{K}_1 j')] \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{\frac{2\beta\ell}{q_\perp^2}} (M_{\ell'} + m_f) [(q\Lambda j') - i(q\varphi j')] [(P\tilde{\Lambda}j)\mathcal{K}_3 - (P\tilde{\varphi}j)\mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j)] \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{\frac{2\beta\ell'}{q_\perp'^2}} (M_\ell + m_f) [(q'\Lambda j) + i(q'\varphi j)] [(P\tilde{\Lambda}j')\mathcal{K}_3 + (P\tilde{\varphi}j') \times \\
& \times \mathcal{K}_4 + m_f(\mathcal{K}_1j')] \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} [(j\Lambda j') + i(j\varphi j')] [(\mathcal{K}_1P) - m_f\mathcal{K}_3] \times \\
& \times \frac{(q\Lambda q') - i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) [(j\Lambda j') - i(j\varphi j')] \times \\
& \times [(\mathcal{K}_1P) + m_f\mathcal{K}_3] \frac{(q\Lambda q') + i(q\varphi q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j) [(M_\ell + m_f) \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell} + 2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \times \\
& \times \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}] + \sqrt{2\beta n} (\mathcal{K}_1j') [2\beta\sqrt{\ell\ell'} \frac{-(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'-1} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\
& - (M_\ell + m_f)(M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] + 2\beta\sqrt{n} \mathcal{K}_3 [\sqrt{\ell} \times \\
& \times (M_{\ell'} + m_f) \frac{(q\Lambda j) - i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') - i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n-1,\ell'} \mathcal{I}_{n,\ell-1} + \sqrt{\ell'} \times \\
& \times (M_\ell + m_f) \frac{(q\Lambda j) + i(q\varphi j)}{\sqrt{q_\perp^2}} \frac{(q'\Lambda j') + i(q'\varphi j')}{\sqrt{q_\perp'^2}} \mathcal{I}'_{n,\ell'-1} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] \Big\}.
\end{aligned}$$

Выражения для  $\mathcal{R}_{AA}^{s's}$ , соответствующие второй диаграмме на рис. 1.1, получаются заменой  $P_\alpha \rightarrow P'_\alpha$ ,  $q_\alpha \leftrightarrow -q'_\alpha$ ,  $j_\alpha \leftrightarrow j'_\alpha$   $\mathcal{I}_{m,n} \leftrightarrow \mathcal{I}'_{m,n}$ .

## Приложение Б

### Амплитуда расщепления фотона в сильно замагниченной плазме

Амплитуда рассматриваемого процесса может быть представлена в виде суммы двух членов

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_B + \mathcal{M}_{pl}, \quad (\text{Б.1})$$

где  $\mathcal{M}_B$  - амплитуда в замагниченном вакууме ( $\mu = T = 0$ ). Она описывается двумя диаграммами Фейнмана, рис. Б.1, и может быть получена из работ [18, 84, 166].

Второй член в (Б.1) описывает вклад плазмы и может трактоваться как рассеяние «вперед» фотона на реальных электронах и позитронах с испусканием двух фотонов. Эти вклады изображаются диаграммами Фейнмана на рис. Б.2, где внутренние двойные линии соответствуют электронному пропагатору в магнитном поле.

Амплитуда может быть представлена в следующем виде [90, 164]:

$$\mathcal{M} = \varepsilon_\mu(q) \varepsilon_\nu^*(q'') \varepsilon_\rho^*(q') \Pi_{\mu\nu\rho}, \quad (\text{Б.2})$$

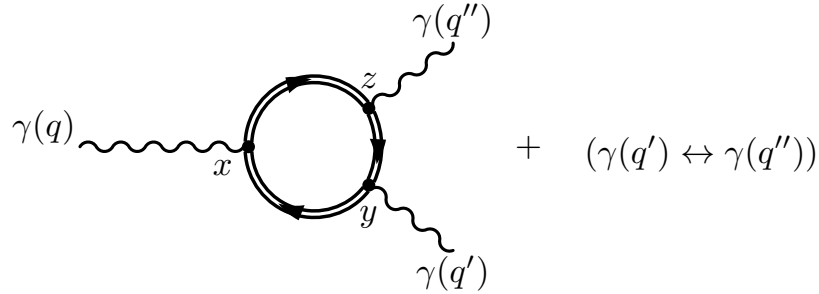


Рис. Б.1. Диаграммы Фейнмана для процесса расщепления фотона в магнитном поле.

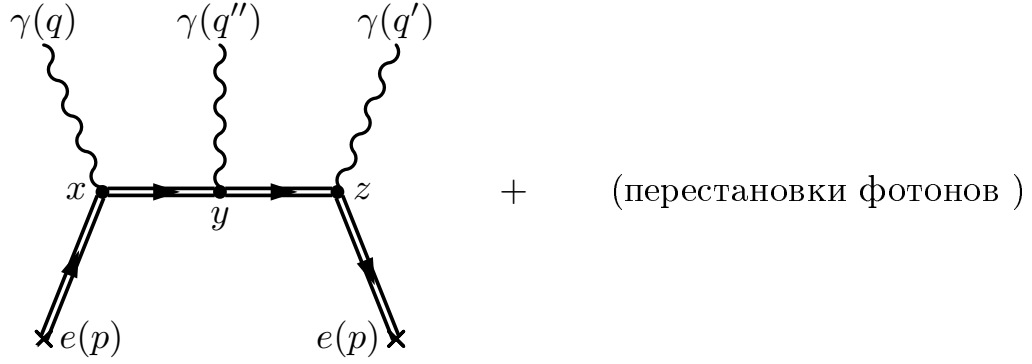


Рис. Б.2. Диаграммы Фейнмана для процесса рассеяния фотона на электронах замагниченной плазмы с излучением двух фотонов. Рассеянию на позитронах будут соответствовать диаграммы с заменой  $p \rightarrow -p$ . Крестики на концах электронных линий означают, что такие частицы принадлежат среде.

где

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\mu\nu\rho} = & \beta \frac{e^3}{4\pi^2} \frac{(\tilde{\varphi}q)_\mu (\tilde{\varphi}q'')_\nu (\tilde{\varphi}q')_\rho}{(q'\tilde{\varphi}q'')} \left[ \mathcal{J}_2^{(-)}(q_\parallel, q'_\parallel) - \mathcal{J}_2^{(-)}(-q'_\parallel, -q_\parallel) - \right. \\
 & - \mathcal{J}_2^{(-)}(-q''_\parallel, q'_\parallel) - (q' \leftrightarrow q'') \left. \right] - \frac{ie^3}{2\pi^2} \{ (q'\varphi q'') [\pi_{\mu\nu\rho} + v_{\mu\nu\rho}] + \\
 & + (q'\mathcal{G}(q''))_\nu \varphi_{\rho\mu} + \frac{1}{2}((q'' - q')\mathcal{G}(q))_\mu \varphi_{\nu\rho} + (q''\mathcal{G}(q'))_\rho \varphi_{\nu\mu} - \\
 & - \mathcal{G}_{\nu\rho}(q'') (q'\varphi)_\mu + \mathcal{G}_{\mu\nu}(q'') (q\varphi)_\rho + \mathcal{G}_{\mu\rho}(q') (q\varphi)_\nu - \mathcal{G}_{\nu\rho}(q') (q''\varphi)_\mu - \\
 & - \mathcal{G}_{\mu\nu}(q) (q''\varphi)_\rho - \mathcal{G}_{\mu\rho}(q) (q'\varphi)_\nu - \frac{i(\tilde{\varphi}q)_\mu (\tilde{\varphi}q'')_\nu (\tilde{\varphi}q')_\rho}{4(q'\tilde{\varphi}q'')} \times \\
 & \times [q'^2_\perp + q''^2_\perp + (q'q'')_\perp] [\mathcal{J}_2^{(-)}(q_\parallel, q'_\parallel) - \mathcal{J}_2^{(-)}(-q'_\parallel, -q_\parallel) - \\
 & - \mathcal{J}_2^{(-)}(-q''_\parallel, q'_\parallel) - (q' \leftrightarrow q'') \left. \right\}. \tag{Б.3}
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\mathcal{G}_{\mu\nu}(q) = \left( \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \frac{q_{\parallel\mu} q_{\parallel\nu}}{q_\parallel^2} \right) \mathcal{G}(q_\parallel), \tag{Б.4}$$

$$\mathcal{G}(q_\parallel) = \left[ H\left(\frac{q_\parallel^2}{4m^2}\right) + \mathcal{J}_1(q_\parallel) \right], \tag{Б.5}$$



$$\mathcal{J}_1(q_{\parallel}) = 2q_{\parallel}^2 m^2 \int \frac{dp_z}{E} \frac{f_-(E) + f_+(E)}{q_{\parallel}^4 - 4(pq)_{\parallel}^2}, \quad (\text{Б.6})$$

$$\mathcal{J}_2^{(\pm)}(q_{\parallel}, q'_{\parallel}) = 2m^2 \int \frac{dp_z}{E} \frac{f_-(E) \pm f_+(E)}{[q_{\parallel}^2 + 2(pq)_{\parallel}][q'_{\parallel}^2 + 2(pq')_{\parallel}]}, \quad (\text{Б.7})$$

где функция  $H(z)$  определяется согласно формуле (3.5) главы 3.

Выражение для  $\pi_{\mu\nu\rho}$  может быть представлено в следующей форме:

$$\begin{aligned} \pi_{\mu\nu\rho} = & \frac{1}{q_{\parallel}^2 q_{\parallel}'^2 q_{\parallel}''^2} \left[ (q' \tilde{\varphi} q'') \{ (\tilde{\varphi} q)_{\mu} (\tilde{\varphi} q'')_{\nu} (\tilde{\varphi} q')_{\rho} \pi_{\perp} + (\tilde{\varphi} q)_{\mu} (\tilde{\Lambda} q'')_{\nu} (\tilde{\Lambda} q')_{\rho} H \right. \\ & - (\tilde{\Lambda} q)_{\mu} (\tilde{\varphi} q'')_{\nu} (\tilde{\Lambda} q')_{\rho} H'' - (\tilde{\Lambda} q)_{\mu} (\tilde{\Lambda} q'')_{\nu} (\tilde{\varphi} q')_{\rho} H' \} \\ & + (q' q'')_{\parallel} (\tilde{\Lambda} q)_{\mu} (\tilde{\varphi} q'')_{\nu} (\tilde{\varphi} q')_{\rho} (H' - H'') \\ & + (q q'')_{\parallel} (\tilde{\varphi} q)_{\mu} (\tilde{\varphi} q'')_{\nu} (\tilde{\Lambda} q')_{\rho} (H - H'') \\ & \left. + (q q')_{\parallel} (\tilde{\varphi} q)_{\mu} (\tilde{\Lambda} q'')_{\nu} (\tilde{\varphi} q')_{\rho} (H' - H) \right], \quad (\text{Б.8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{\perp} = & H + H' + H'' \\ & + 2 \frac{q_{\parallel}^2 q_{\parallel}'^2 q_{\parallel}''^2 - 2m^2 [q_{\parallel}^2 (q' q'')_{\parallel} H - q_{\parallel}'^2 (q q'')_{\parallel} H' - q_{\parallel}''^2 (q q')_{\parallel} H'']} {q_{\parallel}^2 q_{\parallel}'^2 q_{\parallel}''^2 - 4m^2 [q_{\parallel}'^2 q_{\parallel}''^2 - (q' q'')_{\parallel}^2]}, \quad (\text{Б.9}) \end{aligned}$$

где  $H \equiv H(4m^2/q_{\parallel}^2)$ ,  $H' \equiv H(4m^2/q_{\parallel}'^2)$ ,  $H'' \equiv H(4m^2/q_{\parallel}''^2)$ .

Выражение для  $v$  может быть представлено в виде:

$$v_{\mu\nu\rho} = \pi_{\mu\nu\rho} [\pi_{\perp} \rightarrow v_{\perp}, H \rightarrow \mathcal{J}_1(q_{\parallel}), H' \rightarrow \mathcal{J}_1(q'_{\parallel}), H'' \rightarrow \mathcal{J}_1(q''_{\parallel})],$$

$$\begin{aligned} v_{\perp} = & \frac{1}{(q' \tilde{\varphi} q'')^2} \left\{ (q q')_{\parallel} (q q'')_{\parallel} \mathcal{J}_1(q_{\parallel}) - (q q')_{\parallel} (q' q'')_{\parallel} \mathcal{J}_1(q'_{\parallel}) - \right. \\ & - (q q'')_{\parallel} (q' q'')_{\parallel} \mathcal{J}_1(q''_{\parallel}) + \frac{q_{\parallel}^2 q_{\parallel}'^2 q_{\parallel}''^2}{4} \left[ \mathcal{J}_2^{(+)}(q_{\parallel}, q'_{\parallel}) + \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{J}_2^{(+)}(-q'_{\parallel}, -q_{\parallel}) + \mathcal{J}_2^{(+)}(-q''_{\parallel}, q'_{\parallel}) + (q' \leftrightarrow q'') \right] \right\}. \quad (\text{Б.10}) \end{aligned}$$

Парциальные амплитуды для каналов  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2$ ,  $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \gamma_2$  и  $\gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \gamma_1$  в присутствии замагниченной плазмы могут быть получены из (Б.2) подстановкой соответствующих векторов поляризаций:

$$\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda' \lambda''} = \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(q) \varepsilon_{\rho}^{(\lambda')*}(q') \varepsilon_{\nu}^{(\lambda'')*}(q'') \Pi_{\mu\nu\rho}. \quad (\text{Б.11})$$

При этом:

$$\mathcal{M}_{1 \rightarrow 12} = -i4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(q' \varphi q'')(q' \tilde{\varphi} q'')}{[q'^2_{\perp} q''^2_{\parallel} q^2_{\perp}]^{1/2}} \mathcal{G}(q''), \quad (\text{Б.12})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{1 \rightarrow 22} &= -i4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(q' q'')_{\parallel}}{[q'^2_{\parallel} q''^2_{\parallel} q^2_{\perp}]^{1/2}} \\ &\times \left\{ (q q'')_{\perp} \mathcal{G}(q') + (q q')_{\perp} \mathcal{G}(q'') \right\}, \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

$$\mathcal{M}_{2 \rightarrow 11} = \mathcal{M}_{1 \rightarrow 12}(q \leftrightarrow q''), \quad (\text{Б.14})$$

где  $\mathcal{G}(q_{\parallel})$  дается формулой (Б.5).

## Список литературы

1. *Ryu D., Schleicher D. R. G., Treumann R. A. et al.* Magnetic fields in the large-scale structure of the universe // *Space Science Reviews*. 2012. Vol. 166, no. 1-4. P. 1–35.
2. *Бисноватый-Коган Г. С.* Взрыв вращающейся звезды как механизм сверхновой // *Астрон. журн.* 1970. Т. 47. С. 813–816.
3. *Бисноватый-Коган Г. С.* Физические вопросы теории звездной эволюции. Москва: Наука, 1989. 487 с.
4. *Kouveliotou C. et al.* An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft gamma-ray repeater SGR 1806-20. // *Nature*. 1998. Vol. 393. P. 235–237.
5. *Kouveliotou C., Strohmayer T., Hurley K. et al.* Discovery of a magnetar associated with the soft gamma repeater SGR 1900+14 // *Astrophys. J.* 1999. Vol. 510. P. L115–118.
6. *Gavril F. P., Kaspi V. M., Woods P. M.* Magnetar - like x-ray bursts from an anomalous x-ray pulsar // *Nature*. 2002. Vol. 419. P. 142–144.
7. *Ibrahim A. I., Safi-Harb S., Swank J. H. et al.* Discovery of cyclotron resonance features in the soft gamma repeater SGR 1806-20 // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 574. P. L51–L55.
8. *Ibrahim A. I., Swank J. H., Parke W.* New evidence for proton cyclotron resonance in a magnetar strength field from SGR 1806-20 // *Astrophys. J.* 2003. Vol. 584. P. L17–L22.
9. *Olausen S. A., Kaspi V. M.* The McGill magnetar catalog // *Astrophys. J. Suppl.* 2014. Vol. 212, no. 1. P. 6.
10. *Thompson C., Duncan R. C.* The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - I. Radiative mechanism for outbursts // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1995. Vol. 275. P. 255–300.
11. *Thompson C., Duncan R. C.* The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars. II. Quiescent neutrino, X-Ray, and Alfvén wave emission //

- Astrophys. J.* 1996. Vol. 473. P. 322–342.
12. *Thompson C., Lyutikov M., Kulkarni S. R.* Electrodynamics of magnetars: implications for the persistent x-ray emission and spindown of the soft gamma repeaters and anomalous x-ray pulsars // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 574, no. 1. P. 332–355.
  13. *Goldreich P., Julian W. H.* Pulsar electrodynamics // *Astrophys. J.* 1969. Vol. 157. P. 869–880.
  14. *Sokolov A. A., Zhukovskii V. C., Nikitina N. S.* Quantum transitions of relativistic electrons in a superstrong magnetic field // *Physics Letters A.* 1973. Vol. 43. P. 85–86.
  15. *Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В.* Квантовые процессы в сильном внешнем поле. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1989. 192 с.
  16. *Lai D.* Matter in strong magnetic fields // *Reviews of Modern Physics.* 2001. Vol. 73, no. 3. P. 629–662.
  17. *Harding A. K., Lai D.* Physics of strongly magnetized neutron stars // *Rept. Prog. Phys.* 2006. Vol. 69. P. 2631–2724.
  18. *Kuznetsov A. V., Mikheev N. V.* Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003. 120 p.
  19. *Kuznetsov A., Mikheev N.* Electroweak processes in external active media // *Springer Tracts Mod. Phys.* 2013. Vol. 252. 271 p.
  20. *А. Р. Д., Чистяков М. В.* Влияние фотон-нейтринных процессов на остывание магнитара // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 2008. Vol. 134.
  21. *Yakovlev D. G., Kaminker A. D., Gnedin O. Y., Haensel P.* Neutrino emission from neutron stars // *Phys. Rep.* 2001. Vol. 354. P. 1–155.
  22. *Пунаев В. С.* Некоторые процессы рождения нейтринных пар в звездах // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1964. Т. 45, № 2. С. 548–554.
  23. *Борисов А. В., Жуковский В. Ч., Эминов П. А.* Испускание нейтринных пар электроном в сверхсильном магнитном поле // *Известия ВУЗов. Физика.* 1978. № 3. С. 110–114.

24. *Yakovlev D. G., Tschaep R.* Synchrotron neutrino pair radiation in neutron stars // *Astronomische Nachrichten*. 1981. Vol. 302. P. 167–176.
25. *Yakovlev D. G., Tschaep R.* Erratum - Synchrotron neutrino-pair radiation in neutron stars // *Astronomische Nachrichten*. 1982. Vol. 303. P. 218.
26. *Thompson C., Duncan R. C.* The giant flare of 1998 august 27 from SGR 1900+14. II. Radiative mechanism and physical constraints on the source // *Astrophys. J.* 2001. Vol. 561, no. 2. P. 980–1005.
27. *Herold H.* Compton and Thomson scattering in strong magnetic fields // *Phys. Rev.* 1979. Vol. D19, no. 10. P. 2868–2875.
28. *Melrose D. B., Parle A. J.* Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. III Electron-photon interactions // *Aust. J. Phys.* 1983. Vol. 36. P. 799–824.
29. *Daugherty J. K., Harding A. K.* Compton scattering in strong magnetic fields // *Astrophys. J.* 1986. Vol. 309. P. 362–371.
30. *Bulik T., Miller M. C.* Spectral effects of the vacuum resonance in soft gamma-ray repeaters // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1997. Vol. 288, no. 3. P. 596–608.
31. *Gonthier P. L., Harding A. K., Baring M. G. et al.* Compton scattering in ultrastrong magnetic fields: numerical and analytical behavior in the relativistic regime // *Astrophys. J.* 2000. Vol. 540. P. 907–922.
32. *Chistyakov M. V., Romyantsev D. A.* Compton effect in strongly magnetized plasma // *Int. J. Mod. Phys.* 2009. Vol. A24. P. 3995–4008.
33. *Kennett M. P., Melrose D. B.* Neutrino emission via the plasma process in a magnetized plasma // *Phys. Rev.* 1998. Vol. D58. P. 093011 (1–17).
34. *Chiu H.-Y., Morrison P.* Neutrino emission from black-body radiation at high stellar temperatures // *Phys. Rev. Lett.* 1960. Vol. 5. P. 573–575.
35. *Beaudet G., Petrosian V., Salpeter E. E.*
36. *Dicus D.* Stellar energy-loss rates in a convergent theory of a weak and electromagnetic interaction // *Phys. Rev.* 1972. Vol. D6. P. 941–949.
37. *Munakata H., Kohyama Y., Itoh N.* Neutrino energy loss in stellar interiors //

- Astrophys. J.* 1985. Vol. 296. P. 197–203.
38. *Schinder P. J., Schramm D. N., Wiita P. J. et al.* Neutrino emission by the pair, plasma, and photo processes in the Weinberg-Salam model // *Astrophys. J.* 1987. Vol. 313. P. 531–542.
  39. *Блинников С. И., Рудзский М. А.* Излучение аннигиляционных нейтрино в плотном звездном веществе // *Астрон. Ж.* 1989. Vol. 66, no. 4. P. 730–736.
  40. *Itoh N., Adachi T., Nakagawa M. et al.* Neutrino energy loss in stellar interiors. III. Pair, photo-, plasma, and bremsstrahlung processes // *Astrophys. J.* 1989. Vol. 339. P. 354–364.
  41. *Itoh N., Hayashi H., Nishikawa A., Kohyama Y.* Neutrino energy loss in stellar interiors. VII. Pair, photo-, plasma, bremsstrahlung, and recombination neutrino processes // *Astrophys. J. Suppl.* 1996. Vol. 102. P. 411–424.
  42. *Каминкер А. Д., Яковлев Д. Г.* Аннигиляция и синхротронное излучение нейтринных пар электронами и позитронами в нейтронных звездах // *Астрономический Журнал.* 1994. Т. 71, № 6. С. 910–915.
  43. *Гальцов Д. В., Никитина Н. С.* Фотонейтринные процессы в сильном поле // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1972. Т. 62, № 6. С. 2008–2012.
  44. *Скобелев В. В.* О реакциях  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  и  $\nu \rightarrow \gamma\nu$  в сильном магнитном поле // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1976. Т. 71, № 4. С. 1263–1267.
  45. *DeRaad Jr. L. L., Milton K. A., Hari Dass N. D.* Photon decay into neutrinos in a strong magnetic field // *Phys. Rev.* 1976. Vol. D14, no. 12. P. 3326–3334.
  46. *Gvozdev A., Mikheev N., Vassilevskaya L.* Resonance neutrino bremsstrahlung  $\nu \rightarrow \nu\gamma$  in a strong magnetic field // *Phys. Lett.* 1997. Vol. B410, no. 2-4. P. 211–215.
  47. *Скобелев В.* Массивный фотон в сильном магнитном поле: каналы генерации и распада // *Изв. вузов. Физика.* 1997. № 2. С. 35–39.
  48. *Kuznetsov A. V., Mikheev N., Vassilevskaya L. A.* Photon splitting  $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  in an external magnetic field // *Phys. Lett.* 1998. Vol. B427, no. 1,2. P. 105–108.
  49. *Gell-Mann M.* The reaction  $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$  // *Phys. Rev. Lett.* 1961. Vol. 6.

P. 70–71.

50. *Crewther R., Finjord P., J. and Minkowski.* The annihilation process  $\nu\bar{\nu} \rightarrow \gamma\gamma$  with massive neutrino in cosmology // *Nucl. Phys.* 1982. Vol. B207. P. 269–287.
51. *Dodelson S., Feinberg G.* Neutrino - two-photon vertex // *Phys. Rev.* 1991. Vol. D43. P. 913–920.
52. *Levine M.* The process  $\gamma + \gamma \rightarrow \nu + \bar{\nu}$  // *Nuovo Cim.* 1967. Vol. A48. P. 67–71.
53. *Dicus D., Repko W.* Photon neutrino scattering. 1993.
54. *Rosenberg L.* Electromagnetic interactions of neutrinos // *Phys. Rev.*
55. *Cung V., Yoshimura M.* Electromagnetic interaction of neutrinos in gauge theories of weak interactions // *Nuovo Cim.* 1975. Vol. A29. P. 557–564.
56. *Kuznetsov A., Mikheev N.* Compton-like interaction of massive neutrinos with virtual photons // *Phys. Lett.* 1993. Vol. B299. P. 367–369.
57. *Кузнецов А., Мухеев Н.* Амплитуда процесса  $\nu_i\gamma^* \rightarrow \nu_j\gamma^*$  с виртуальными фотонами и тормозное излучение при рассеянии нейтрино в кулоновском поле ядра // *Ядерная физика.* 1993. Т. 56, № 6. С. 108–114.
58. *Liu J.* Low-energy neutrino–two-photon interactions // *Phys. Rev.* 1991. Vol. D44.
59. *Shaisultanov R.* Photon - neutrino interactions in magnetic fields // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80. P. 1586–1587.
60. *Chyi T., Hwang C., Kao W.* Neutrino - photon scattering and its crossed processes in a background magnetic field // *Phys. Lett.* 1999. Vol. B466. P. 274–280.
61. *Chyi T., Hwang C., Kao W.* The weak-field expansion for processes in a homogeneous background magnetic field // *Phys. Rev.* 2000. Vol. D62. P. 105014 (1–13).
62. *Dicus D., Repko W.* Neutrino - photon scattering in a magnetic field. 2000.
63. *Лоскутов Ю., Скобелев В.* Двухфотонное рождение нейтрино в сильном внешнем поле // *Вестн. МГУ: физ., астроном.* 1981. Т. 22, № 4. С. 10–13.
64. *Ritus V. I.* Photoproduction of Neutrinos on Electrons and Neutrino Radiation

- from Stars // *JETP*. 1961. Vol. 41, no. 4. P. 1285–1293.
65. *Chiu H.-Y., Stabler R. C.* Emission of photoneutrinos and pair annihilation neutrinos from stars // *Phys. Rev.* 1961. Vol. 122. P. 1317–1322.
  66. *Скобелев В. В.* Комптоновский механизм генерации нейтрино и аксионов на эффективно-двумерном замагниченном ферми-газе // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 2000. Т. 117, № 6. С. 1059–1066.
  67. *Борисов А. В., Керимов Б. К., Сизин П. Е.* Слабый и электромагнитный механизмы фоторождения нейтринных пар в сильно замагниченном газе // *Ядерная физика*. Vol. 75.
  68. *Мухеев Н. В., Румянцев Д. А., Чистяков М. В.* Фоторождение нейтрино на электроне в плотной замагниченной среде. 2014.
  69. *Canuto V., Lodenguai J., Ruderman M.* Thomson Scattering in a Strong Magnetic Field // *Phys. Rev.* 1971. Vol. D3. P. 2303.
  70. *DeRaad L., Dass N., Milton K.* Compton scattering in external magnetic fields: Spin-zero charged particles // *Phys. Rev.* 1974. Vol. D9. P. 1041.
  71. *Blandford R. D., Scharlemann E. T.* On the Scattering and Absorption of Electromagnetic Radiation within Pulsar Magnetospheres // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1976. Vol. 174.
  72. *Borner G., Meszaros P.* Classical calculation of Thomson cross-sections in the presence of a strong magnetic field // *Plasma Phys.* 1979. Vol. 21, no. 4. P. 357.
  73. *Ventura J.* Scattering of light in a strongly magnetized plasma // *Phys. Rev.* 1979. Vol. D19. P. 1684.
  74. *Gonthier P. L., Baring M. G., Eiles M. T. et al.* Compton scattering in strong magnetic fields: Spin-dependent influences at the cyclotron resonance // *Phys. Rev.* 2014. Vol. D90, no. 4. P. 043014.
  75. *Mushtukov A. A., Nagirner D. I., Poutanen J.* Compton scattering S-matrix and cross section in strong magnetic field // *Phys. Rev.* 2016. Vol. D93, no. 10. P. 105003.



76. *Adler S. L., Bahcall J. N., Callan C. G., Rosenbluth M. N.* Photon splitting in a strong magnetic field // *Physical Review Letters*. 1970. Vol. 25. P. 1061–1065.
77. *Bialynicka-Birula Z., Bialynicka-Birula I.* Nonlinear effects in quantum electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field // *Phys. Rev. D*. 1970. no. 10. P. 2341–2345.
78. *Adler S. L.* Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. // *Annals of Physics*. 1971. Vol. 67. P. 599–647.
79. *Папанян В. О., Рутус В. И.* Поляризация вакуума и расщепление фотонов в интенсивном поле // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1971. Т. 61, № 6. С. 2231–2241.
80. *Stoneham R. J.* Photon splitting in the magnetised vacuum // *J. Phys.* 1979. Vol. A12, no. 11. P. 2187–2203.
81. *Mentzel M., Berg D., Wunner G.* Photon splitting in strong magnetic fields // *Phys. Rev.* 1994. Vol. D50. P. 1125–1139.
82. *Adler S. L., Schubert C.* Photon splitting in a strong magnetic field: recalculation and comparison with previous calculations // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 1695 – 1698.
83. *Baier V. N., Milstein A. I., Shaisultanov R. Z.* Photon splitting in a very strong magnetic field // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Vol. 77. P. 1691 – 1695.
84. *Chistyakov M. V., Kuznetsov A. V., Mikheev N. V.* Photon splitting above the pair creation threshold in a strong magnetic field // *Phys. Lett.* 1998. Vol. B434, no. 1. P. 67–73.
85. *Weise J. I.* Photon splitting in the electromagnetic vacuum // *Phys. Rev.* 2004. Vol. D59. P. 105017 (1–16).
86. *Harding A. K., Baring M. G., Gonthier P. L.* Photon-splitting cascades in gamma-ray pulsars and the spectrum of PSR 1509-58 // *Astrophys. J.* 1997. Vol. 476, no. 1. P. 246–260.
87. *Baring M. G., Harding A. K.* Radio-quiet pulsars with ultrastrong magnetic fields // *Astrophys. J. Lett.* 1998. Vol. 507, no. 1. P. L55–L58.

88. *Malofeev V. M., Malov O. I., Teplykh D. A. et al.* Radio emission from two anomalous X-ray pulsars // *Astronomy Reports*. 2005. Vol. 49, no. 3. P. 242–249.
89. *Istomin Ya. N., Sobyenin D. N.* Electron-positron plasma generation in a magnetar magnetosphere // *Astron. Lett.* 2007. Vol. 33. P. 660–672.
90. *Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A., Stus' N. S.* Photon splitting and Compton scattering in strongly magnetized hot plasma // *Phys. Rev.* 2012. Vol. D86. P. 043007.
91. *Duncan R. C., Thompson C.* Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts // *Astrophys. J.* 1992. Vol. 392, no. 1. P. L9–L13.
92. *Аникин Р. А., Михеев Н. В.* Процесс  $\nu \rightarrow \nu\gamma$  в сильном магнитном поле с учётом вклада позитрония в дисперсию фотона // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 2012.
93. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. Наука: Москва, 1989. 1-767 р.
94. *Боровков М. Ю., Кузнецов А. В., Михеев Н. В.* Однопетлевая амплитуда перехода  $j \rightarrow f\bar{f} \rightarrow j'$  во внешнем электромагнитном поле // *Ядерная физика*. 1999. Т. 62, № 9. С. 1714–1722.
95. *Шабад А. Е.* Поляризация вакуума и квантового релятивистского газа во внешнем поле // *Тр. ФИАН СССР “Поляризационные эффекты во внешних калибровочных полях”*. 1988. Т. 192. С. 5–152.
96. *Latal H. G.* Cyclotron radiation in strong magnetic fields // *Astrophys. J.* 1986. Vol. 309. P. 372–382.
97. *Barbieri R., Mohapatra R. N.* Limits on right-handed interactions from SN 1987A observations // *Phys. Rev.* 1989. Vol. D39. P. 1229.
98. *Erber T., Latal H. G.* Unified radiation formulae for classical and quantum electrodynamics // *European Journal of Physics*. 2003. Vol. 24, no. 1. P. 67–79.
99. *Semionova L., Leahy D., Paez J.* Polarization in cyclotron radiation in strong

- magnetic fields // *Research in Astronomy and Astrophysics*. 2010. Vol. 10, no. 10. P. 1023–1040.
100. Гвоздев А. А., Осокина Е. В. Нейтринные процессы во внешнем магнитном поле в формализме матрицы плотности // *ТМФ*. 2012. Т. 170, № 3. С. 423–447.
  101. Kuznetsov A. V., Rumyantsev D. A., Shlenev D. M. Generalized two-point tree-level amplitude  $jf \rightarrow j'f'$  in a magnetized medium // *Int. J. Mod. Phys.* 2015. Vol. A30, no. 11. P. 1550049.
  102. Кузнецов А. В., Румянцев Д. А., Шленев Д. М. Обобщённая древесная амплитуда рассеяния в замагниченной среде // *Вестник Ярославского государственного университета им. П.Г.Демидова. Серия Естественные и технические науки*. 2015. № 1. С. 16–26.
  103. Кузнецов А. В., Румянцев Д. А., Шленев Д. М. Обобщённая древесная амплитуда рассеяния в замагниченной среде // *Физ. элемент. част. и атом. яд*. 2017. Т. 48, № 6. С. 980–983.
  104. Johnson M. H., Lippmann B. A. Motion in a constant magnetic field // *Physical Review*. 1949. Vol. 76, no. 6. P. 828–832.
  105. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. Москва: Физматгиз, 1959. 656 с.
  106. Соколов А. А., Тернов И. М. Синхротронное излучение. Москва: Наука, 1966. 228 с.
  107. Melrose D. B., Parle A. J. Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. I Electron States // *Aust. J. Phys.* 1983. Vol. 36. P. 755–774.
  108. Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. Москва: Наука, 1983. 304 с.
  109. Bhattacharya K., Pal P. B. Inverse beta decay of arbitrarily polarized neutrons in a magnetic field // *Pramana J. Phys.* 2004. Vol. 62. P. 1041–1058.
  110. Balantsev I. A., Popov Yu. V., Studenikin A. I. On the problem of relativistic particles motion in strong magnetic field and dense matter // *J. Phys.* 2011.

Vol. A44. P. 255301 (1–13).

111. *Пескин М., Шредер Д.* Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001. 784 с.
112. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 1108 с.
113. *Kuznetsov A. V., Okrugin A. A.* The exact electron propagator in a magnetic field as the sum over Landau levels on a basis of the Dirac equation exact solutions // *Int. J. Mod. Phys.* 2011. Vol. 26, no. 16. P. 2725–2733.
114. *Борисов А. В., Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Эминов П. А.* Фотоны и лептоны во внешних полях при конечных температуре и плотности // *УФН.* 1997. Т. 167, № 3. С. 241–267.
115. *Жуковский В. Ч., Мидодашвили П. Г., Эминов П. А.* Мнимая часть массового оператора электрона в постоянном поле при конечной температуре и плотности // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1994. Т. 106, № 4. С. 929–935.
116. *Ритус В. И.* Радиационные эффекты и их усиление в интенсивном электромагнитном поле // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1969. Т. 57, № 6. С. 2176–2188.
117. *Jancovici B.* Radiative Correction to the Ground-State Energy of an Electron in an Intense Magnetic Field // *Phys. Rev.* 1969. Vol. 187. P. 2275.
118. *Румянцев Д. А., Чистяков М. В.* Влияние фотон-нейтринных процессов на остывание магнитара // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 2008. Т. 134, № 4. С. 627–636.
119. *Sakurai J. J.* Advanced Quantum Mechanics. Boston: Addison-Wesley, 1967. 336 p.
120. *Raffelt G. G.* Stars as laboratories for fundamental physics. Chicago: University of Chicago Press, 1996. 664 p.
121. *Kaminker A. D., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. et al.* Neutrino emissivity from  $e^-$  synchrotron and  $e^-e^+$  annihilation processes in a strong magnetic field: General formalism and nonrelativistic limit // *Phys. Rev.* 1992. Vol.

- D46. P. 3256–3264.
122. *Kaminker A. D., Gnedin O. Y., Yakovlev D. G. et al.* Neutrino emissivity from  $e^-e^+$  annihilation in a strong magnetic field: Hot, nondegenerate plasma // *Phys. Rev.* 1992. Vol. D46. P. 4133–4139.
  123. *Beloborodov A. M., Thompson C.* Corona of magnetars // *Astrophys. J.* 2007. Vol. 657, no. 2. P. 967–993.
  124. *Truemper J., Pietsch W., Reppin C. et al.* Evidence for strong cyclotron line emission in the hard X-ray spectrum of Hercules X-1 // *Astrophys. J.* 1978. Vol. 219. P. L105–L110.
  125. *Wheaton W. A., Doty J. P., Primini F. A., et al.* An absorption feature in the spectrum of the pulsed hard X-ray flux from 4U0115 + 63 // *Nature.* 1979. Vol. 282. P. 240–243.
  126. *Makishima K., Mihara T., Ishida M., et al.* Discovery of a prominent cyclotron absorption feature from the transient X-ray pulsar X0331 + 53 // *Astrophys. J. Lett.* 1990. Vol. 365. P. L59–L62.
  127. *Grove J. E., Strickman M. S., Johnson W. N. e. a.*
  128. *Daugherty J. K., Ventura J.* Absorption of radiation by electrons in intense magnetic fields // *Phys. Rev.* 1978. Vol. D18. P. 1053.
  129. *Harding A. K., Daugherty J. K.* Cyclotron resonant scattering and absorption // *Astrophys. J.* 1991. Vol. 374. P. 687–699.
  130. *Kostenko A., Thompson C.* QED Phenomena in an Ultrastrong Magnetic Field. I. Electron-Photon Scattering, Pair Creation and Annihilation // *Astrophys. J.* 2018. Vol. 869. P. 44.
  131. *Bussard R. W., Alexander S. B., Meszaros P.* One- and two-photon Compton scattering in strong magnetic fields // *Phys. Rev.* 1986. Vol. D34. P. 440.
  132. *Ljutikov M., Gavriil F. P.* Resonant cyclotron scattering and Comptonization in neutron star magnetospheres // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2006. Vol. 368. P. 690–706.
  133. *Nobili L., Turolla R., Zane S.* X-ray spectra from magnetar candidates – I.

- Monte Carlo simulations in the non-relativistic regime // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2008. Vol. 386. P. 1527–1542.
134. *Nobili L., Turolla R., Zane S.* X-ray spectra from magnetar candidates – II. Resonant cross-sections for electron–photon scattering in the relativistic regime // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2008. Vol. 389. P. 989–1000.
  135. *Baring M. G., Harding A. K.* Resonant Compton upscattering in anomalous X-ray pulsars // *Astrophys. Space Sci.* 2007. Vol. 308. P. 109–118.
  136. *Fernandez R., Thompson C.* Resonant Cyclotron Scattering in Three Dimensions and the Quiescent Nonthermal X-ray Emission of Magnetars // *Astrophys. J.* 2007. Vol. 660. P. 615.
  137. *Wadiasingh Z., Baring M. G., Gonthier P. L., Harding A. K.* Resonant Inverse Compton Scattering Spectra from Highly Magnetized Neutron Stars // *Astrophys. J.* 2018. Vol. 854.
  138. *Ozel F.* Surface Emission Properties of Strongly Magnetic Neutron Stars // *Astrophys. J.* 2001. Vol. 563. P. 276.
  139. *Ho W. C. G., Lai D.* Atmospheres and spectra of strongly magnetized neutron stars — II. The effect of vacuum polarization // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 2003. Vol. 338. P. 233.
  140. *Suleimanov V., Potekhin A. Y., Werner K.* Models of magnetized neutron star atmospheres: thin atmospheres and partially ionized hydrogen atmospheres with vacuum polarization // *Astron. Astrophys.* 2009. Vol. 500. P. 891–899.
  141. *Baring M. G., Wadiasingh Z., Gonthier P. L.* Cooling Rates for Relativistic Electrons Undergoing Compton Scattering in Strong Magnetic Fields // *Astrophys. J.* 2011. Vol. 733. P. 61.
  142. *Beloborodov M.* On the mechanism of hard X-Ray emission from magnetars // *Astrophys. J.* 2012. Vol. 762. P. 13.
  143. *Wasserman I., Salpeter E.* Resonance radiative transfer for cyclotron line emission with recoil // *Astrophys. J.* 1980. Vol. 241. P. 1107–1121.
  144. *Graziani C.* Strong-field cyclotron scattering. I - Scattering amplitudes and

- natural line width // *Astrophys. J.* 1993. Vol. 412. P. 351–362.
145. *Graziani C., Harding A. K., Sina R.* Elimination of resonant divergences from QED in superstrong magnetic fields // *Phys. Rev.* 1995. Vol. D51. P. 7097–7110.
  146. *Chistyakov M. V., Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. et al.* Neutrino photo-production on electron in dense magnetized medium // Quarks'2014. Proc. of 18-th Int. Sem. <Quarks'2014>, Suzdal, Russia, 2014. Ed. by P. S. Satunin, e.a. Inst. Nucl. Res., Moscow. 2015. P. 322–329.
  147. *Kuznetsov A., Rummyantsev D., Shlener D.* Neutrino photoproduction on the electron in dense magnetized medium // *EPJ Web Conf.* 2017. Vol. 158. P. 05008.
  148. *Румянцев Д. А., Шленев Д. М., Ярков А. А.* Резонансы в комптоноподобных процессах рассеяния во внешней замагниченной среде // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 2017. Т. 152, № 3. С. 483–494.
  149. *Weldon H. A.* Simple rules for discontinuities in finite temperature Field Theory // *Phys. Rev.* 1983. Vol. D28. P. 2007–2037.
  150. *Pavlov G. G., Bezchastnov V. G., Meszaros P., Alexander S. G.* Radiative widths and splitting of cyclotron lines in superstrong magnetic fields // *Astrophys. J.* 1991. Vol. 380. P. 541–549.
  151. *Клепиков Н. П.* Излучение фотонов и электрон-позитронных пар в магнитном поле // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1954. Т. 26, № 1. С. 19–34.
  152. *Baier V. N., Katkov V. M.* Pair creation by a photon in a strong magnetic field // *Phys. Rev.* 2007. Vol. D75, no. 7. P. 073009.
  153. *Baring M. G.* Photon-splitting limits to the hardness of emission in strongly magnetized soft gamma repeaters // *Astrophys. J.* 1995. Vol. 440, no. 2. P. L69–L72.
  154. *Bulik T.* Photon splitting in strongly magnetized plasma // *Acta Astronomica.* 1998. Vol. 48. P. 695–710.
  155. *Elmfors P., Skagerstam B.-S.* Thermally induced photon splitting // *Phys.*

- Lett.* 1998. Vol. B427. P. 197–205.
156. *Gies H.* QED effective action at finite temperature: Two loop dominance // *Phys. Rev.* 2000. Vol. D61. P. 085021 (1–34).
  157. *Martinez Resco J. M., Valle Basagoiti M. A.* Matter induced vertices for photon splitting in a weakly magnetized plasma // *Phys. Rev.* 2001. Vol. D64. P. 016006 (1–14).
  158. *Shabad A. E., Usov V. V.* Photon dispersion in a strong magnetic field with positronium formation: theory // *Astrophys. Space Sci.* Vol. 128. P. 377.
  159. *Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A., Shlenev D. M.* Photon splitting in a strongly magnetized, charge-asymmetric plasma // *EPJ Web Conf.* 2016. Vol. 125. P. 04017 (1–11).
  160. *Anikin R. A., Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A., Shlenev D. M.* Photon splitting in strongly magnetized medium with taking into account positronium influence // *EPJ Web Conf.* 2018. Vol. 191. P. 08011.
  161. *Баталин И. А., Шабад А. Е.* Функция Грина фотона в постоянном однородном электромагнитном поле общего вида // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1971. Т. 60, № 3. С. 894–900.
  162. *Перес Рохас У.* Поляризационный оператор электрон-позитронного газа в постоянном внешнем магнитном поле // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 1979. Т. 76, № 1. С. 3–17.
  163. *Peres Rojas H., Shabad A. E.* Absorption and dispersion of electromagnetic eigenwaves of electron-positron plasma in a strong magnetic field // *Ann. Phys. (N. Y.).* 1982. Vol. 138. P. 1–35.
  164. *Румянцев Д. А., Чистяков М. В.* Влияние сильно замагниченной плазмы на процесс расщепления фотона // *Журн. эксперим. и теор. физ.* 2005. Т. 128, № 4. С. 740–751.
  165. *Chistyakov M. V., Kuznetsov A. V., Mikheev N. V.* Photon splitting above the pair creation threshold in a strong magnetic field // *Phys. Lett. B.* 1998. Vol. 434. P. 67–73.



166. *Кузнецов А. В., Михеев Н. В., Чистяков М. В.* Расщепление фотона на два фотона в сильном магнитном поле // *Ядерная физика*. 1999. Т. 62, № 9. С. 1638–1646.