

Приложение А Решения уравнения Дирака для электрона во внешнем электромагнитном поле

Для вычисления S -матричных элементов, описывающих квантовые процессы во внешних полях, возникает необходимость использовать точные решения уравнения Дирака для электронов и позитронов во внешнем электромагнитном поле. Мы приведем здесь эти решения в двух предельных случаях сильного магнитного и скрещенного полей.

Сильное магнитное поле

Сильным считается такое поле, для которого индукция поля B определяет максимальный энергетический масштаб задачи, а именно $eB \gg E^2, m_e^2$. В этом пределе электроны и позитроны находятся на основном уровне Ландау, $n = 0$. Тогда решения уравнения Дирака для электрона с энергией E и “импульсом” p_2, p_3 , находящегося на основном уровне Ландау, можно представить в форме [127] (магнитное поле направлено вдоль третьей оси, а векторный потенциал выбран в виде $\mathbf{A} = (0, Bx_1, 0)$):

$$\psi_{p\epsilon} = \frac{\beta^{1/4}}{(2\sqrt{\pi}E_p L_2 L_3)^{1/2}} e^{-i\epsilon(E_p x_0 - p_2 x_2 - p_3 x_3)} e^{-\xi_\epsilon^2/2} u_\epsilon(p_\parallel), \quad (\text{A.1})$$

где $\xi_\epsilon = \sqrt{\beta}(x_1 + \epsilon \frac{p_2}{\beta})$, $\beta = eB$, а $\epsilon = \pm 1$ обозначают решения для электрона с положительной и отрицательной энергией, соответственно, $E_p = \sqrt{p_3^2 + m_e^2}$, L_2, L_3 – вспомогательные параметры, определяющие вместе с L_1 нормировочный объем $V = L_1 L_2 L_3$. Биспинорные амплитуды имеют вид

$$u_\epsilon(p_\parallel) = \frac{1}{\sqrt{E_p + \epsilon m_e}} \begin{pmatrix} (E_p + \epsilon m_e)\Psi \\ -p_3 \Psi \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

где $\Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ описывает состояние со спином, направленным против поля.

Позитрону будут соответствовать решения с отрицательной энергией, которые могут быть получены из решения (A.1), (A.2), если положить в них $\epsilon = -1$.

Скращенное поле

Скращенным называется постоянное однородное электромагнитное поле, напряженности $\vec{\mathcal{E}}$ и \vec{B} которого взаимно перпендикулярны и равны по величине. Такое поле описывается 4-потенциалом вида $A^\mu = a^\mu \varphi$, где $\varphi = (kx)$, a^μ и k^μ – постоянные 4-векторы, $(kk) = 0$, $(ak) = 0$. При этом тензор поля равен: $F^{\mu\nu} = k^\mu a^\nu - k^\nu a^\mu$, свертка двух тензоров поля по одному индексу: $(FF)^{\mu\nu} = -k^\mu k^\nu (aa)$.

Решение уравнения Дирака для электрона с 4-импульсом $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ в скращенном поле имеет вид:

$$\begin{aligned} \Psi_p(x) = & \left(1 - \frac{e\hat{k}\hat{a}}{2(kp)}\varphi \right) \frac{u(p)}{\sqrt{2EV}} \times \\ & \times \exp \left[-i \left((px) - \frac{e(ap)}{2(kp)}\varphi^2 - \frac{e^2(aa)}{6(kp)}\varphi^3 \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

где $u(p)$ – биспинорная амплитуда свободного электрона с импульсом p^μ .

Античастице соответствует решение с отрицательной энергией, которое может быть получено из решения (A.3) сменой знака у всех компонент 4-импульса p^μ .

Без потери общности можно выбрать направления осей системы ко-

ординат следующим образом:

$$k^\mu = (k_0, k_0, 0, 0), \quad a^\mu = (0, 0, -a, 0). \quad (\text{A.4})$$

При этом

$$\varphi = (kx) = k_0(t - x), \quad \vec{\mathcal{E}} = (0, \mathcal{E}, 0), \quad \vec{B} = (0, 0, B), \quad \mathcal{E} = B = k_0 a.$$

Полезно ввести также вектор $b^\mu = (0, 0, 0, -a)$, через который дуальный тензор $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ выражается следующим образом: $\tilde{F}^{\mu\nu} = k^\mu b^\nu - k^\nu b^\mu$.

Приложение Б Пропагатор электрона во внешнем электромагнитном поле

Пропагатор электрона в постоянном однородном магнитном поле в формализме собственного времени Фока может быть представлен в виде [123]

$$S(x_1, x_2) = e^{i\Phi(x_1, x_2)} \hat{S}(x_1 - x_2), \quad (\text{B.1})$$

$$\Phi(x_1, x_2) = -e \int_{x_1}^{x_2} d\xi_\mu K^\mu(\xi), \quad (\text{B.2})$$

$$K^\mu = A^\mu(\xi) + \frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\xi - x_2)_\nu, \quad (\text{B.3})$$

где A_μ – 4-потенциал, $F_{\mu\nu}$ – тензор внешнего постоянного однородного магнитного поля. Благодаря свойству $\partial_\mu K_\nu - \partial_\nu K_\mu = 0$ путь интегрирования от x_1 до x_2 в (B.2) произволен. В случае двухвершинной электронной петли в амплитуду войдет сумма фаз, которая равна нулю

$$\Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2, x_1) = 0.$$

В случае n -вершинной электронной петли ($n \geq 3$) суммарная фаза от n пропагаторов в петле трансляционно и калибровочно инвариантна. Действительно, представим 4-потенциал постоянного однородного внешнего поля в произвольной калибровке в виде

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2}x_\nu F^{\nu\mu} + \partial^\mu \chi(x), \quad (\text{Б.4})$$

где $\chi(x)$ – произвольная функция, при этом автоматически $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$. Вычисляя интеграл (Б.2), получаем

$$\Phi(x_1, x_2) = -\frac{e}{2}(x_1 F x_2) - e[\chi(x_2) - \chi(x_1)]. \quad (\text{Б.5})$$

Видно, что при суммировании фаз внутри замкнутой петли слагаемые, содержащие функцию χ , полностью сокращаются. Сумма n фаз выражается через разности координат ¹:

$$\Phi_{tot} = -\frac{e}{2} \sum_{i=1}^n (x_i F x_{i+1}) \Big|_{x_{n+1}=x_1} = -\frac{e}{2} \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{l-1} (Z_k F Z_l), \quad (\text{Б.6})$$

$$Z_i = x_i - x_{i+1}.$$

Для трех- и четырехвершинной петель имеем

$$\Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2, x_3) + \Phi(x_3, x_1) = -\frac{e}{2}(x_1 - x_2)_\mu F^{\mu\nu}(x_2 - x_3)_\nu, \quad (\text{Б.7})$$

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, x_2) + \Phi(x_2, x_3) + \Phi(x_3, x_4) + \Phi(x_4, x_1) = \\ = -\frac{e}{2}(x_1 - x_3)_\mu F^{\mu\nu}(x_2 - x_4)_\nu. \end{aligned} \quad (\text{Б.8})$$

Трансляционно-инвариантная часть пропагатора $\hat{S}(x_1 - x_2)$ имеет несколько представлений. Для наших целей удобно взять ее в виде частичного

¹В формуле (Б.3) статьи [22] выражение для суммарной фазы через Z_i справедливо только при $n = 2, 3$.

разложения в интеграл Фурье:

$$\begin{aligned} \hat{S}(X) = & -\frac{i}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\tau}{\text{th } \tau} \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \left\{ [(p\gamma)_\parallel + m_e] \Pi_- (1 + \text{th } \tau) + \right. \\ & + [(p\gamma)_\parallel + m_e] \Pi_+ (1 - \text{th } \tau) - (X\gamma)_\perp \frac{i\beta}{2 \text{th } \tau} (1 - \text{th}^2 \tau) \left. \right\} \times \\ & \times \exp \left(-\frac{\beta X_\perp^2}{4 \text{th } \tau} - \frac{\tau(m_e^2 - p_\parallel^2)}{\beta} - i(pX)_\parallel \right), \end{aligned} \quad (\text{Б.9})$$

$$d^2 p = dp_0 dp_3, \quad \Pi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_1 \gamma_2), \quad \Pi_\pm^2 = \Pi_\pm, \quad [\Pi_\pm, (a\gamma)_\parallel] = 0.$$

Здесь γ_α – матрицы Дирака в стандартном представлении, 4-векторы с индексами \perp и \parallel относятся к подпространствам Евклида $\{1, 2\}$ и Минковского $\{0, 3\}$ соответственно, когда поле \mathbf{B} направлено вдоль третьей оси. Для произвольных векторов a_α, b_α имеем

$$\begin{aligned} a_{\perp\alpha} &= (0, a_1, a_2, 0), \quad a_{\parallel\alpha} = (a_0, 0, 0, a_3), \\ (ab)_\perp &= (a\Lambda b) = a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad (ab)_\parallel = (a\tilde{\Lambda}b) = a_0 b_0 - a_3 b_3, \end{aligned} \quad (\text{Б.10})$$

где введены матрицы $\Lambda_{\alpha\beta} = (\varphi\varphi)_{\alpha\beta}$, $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\alpha\beta}$, связанные соотношением $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, $\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$ – безразмерный тензор внешнего магнитного поля, $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}$ – дуальный тензор, у 4-векторов и тензоров, стоящих внутри круглых скобок, тензорные индексы полагаются свернутыми последовательно, например: $(a\Lambda b) = a_\alpha \Lambda_{\alpha\beta} b_\beta$. Кроме того, введено обозначение $\beta = eB$.

Асимптотическое выражение пропагатора в сильном магнитном поле может быть получено из (Б.9) путем приближенной оценки интеграла по τ в пределе $\beta/|m_e^2 - p_\parallel^2| \gg 1$. В этом случае основной вклад в интеграл по τ дает область $\tau \sim \beta/|m_e^2 - p_\parallel^2|$, и трансляционно инвариантная часть

пропагатора принимает простой вид:

$$\tilde{S}^F(X) \simeq \frac{i\beta}{2\pi} \exp\left(-\frac{\beta X_\perp^2}{4}\right) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} \frac{(p\gamma)_\parallel + m_e}{p_\parallel^2 - m_e^2} \Pi_- e^{-i(pX)_\parallel}, \quad (\text{Б.11})$$

который впервые был получен в работах [18, 19].

Приложение В Свойства матриц Π_\pm .

В системе координат, где вектор индукции магнитного поля \mathbf{B} направлен вдоль третьей оси, матрицы Π_\pm , входящие в выражение для пропагатора электрона (Б.9), могут быть записаны в следующем виде:

$$\Pi_\pm = \frac{1}{2}[\mathbf{I} \mp \frac{i}{2}(\gamma\varphi\gamma)] = \frac{1}{2}[\mathbf{I} \pm i\gamma_1\gamma_2] = \frac{1}{2}[\mathbf{I} \pm \Sigma_3], \quad (\text{В.1})$$

и являются проекционными операторами, соответствующими электронным состояниям со спином, направленным соответственно вдоль и против направления магнитного поля. Операторы Π_\pm обладают рядом свойств, которые позволяют существенно упростить анализ и вычисление матричных элементов процессов в магнитном поле. Отметим их мультипликативные

$$\Pi_\pm \Pi_\pm = \Pi_\pm, \quad \Pi_\pm \Pi_\mp = 0, \quad (\text{В.2})$$

и коммутационные свойства

$$\Pi_\pm \gamma_{\parallel\mu} = \gamma_{\parallel\mu} \Pi_\pm, \quad \Pi_\pm \gamma_{\perp\mu} = \gamma_{\perp\mu} \Pi_\mp \quad (\text{В.3})$$

$$\Pi_\pm \gamma_5 = \gamma_5 \Pi_\pm. \quad (\text{В.4})$$

Следствием свойств (В.2) и (В.3) являются следующие соотношения

$$\Pi_\pm \gamma_\mu \Pi_\pm = \gamma_{\parallel\mu} \Pi_\pm, \quad \Pi_\mp \gamma_\mu \Pi_\pm = -\gamma_{\perp\mu} \Pi_\pm. \quad (\text{В.5})$$

При вычислениях оказывается полезной следующая формула

$$\Pi_{\pm} \gamma_{\perp \mu} \gamma_{\perp \nu} \Pi_{\pm} = (-\Lambda_{\mu\nu} \pm i\varphi_{\mu\nu}) \Pi_{\pm}, \quad (\text{B.6})$$

которая позволяет свести вычисление следов произведений γ -матриц в матричных элементах только в продольном подпространстве. Ниже приводятся несколько таких следов от четного числа γ -матриц

$$\begin{aligned} \text{Sp}\{\Pi_{\pm}\} &= 2, & \text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \Pi_{\pm}\} &= 2\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}, \\ \text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \gamma_{\parallel\rho} \gamma_{\parallel\sigma} \Pi_{\pm}\} &= 2(\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \tilde{\Lambda}_{\rho\sigma} + \tilde{\Lambda}_{\mu\sigma} \tilde{\Lambda}_{\nu\rho} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho} \tilde{\Lambda}_{\nu\sigma}), & (\text{B.7}) \\ \text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \gamma_5 \Pi_{\pm}\} &= \pm 2\tilde{\varphi}_{\mu\nu}, \\ \text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \gamma_{\parallel\rho} \gamma_{\parallel\sigma} \gamma_5 \Pi_{\pm}\} &= \pm 2(\tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \tilde{\varphi}_{\rho\sigma} + \tilde{\varphi}_{\mu\nu} \tilde{\Lambda}_{\rho\sigma}). \end{aligned}$$

След от нечетного числа γ -матриц, так же, как и в обычном четырехмерном пространстве, равен нулю.

Полезны и другие часто встречающиеся соотношения:

$$\begin{aligned} \text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \dots \Pi_{+}\} &= \text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \dots \Pi_{-}\}, \\ \text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \dots \gamma_5 \Pi_{+}\} &= -\text{Sp}\{\gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \dots \gamma_5 \Pi_{-}\}, \\ (\tilde{\varphi}\gamma)_{\mu} \Pi_{\pm} &= \mp \gamma_{\parallel\mu} \gamma_5 \Pi_{\pm}, \\ \gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \gamma_{\parallel\rho} &= \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} \gamma_{\parallel\rho} + \tilde{\Lambda}_{\nu\rho} \gamma_{\parallel\mu} - \tilde{\Lambda}_{\mu\rho} \gamma_{\parallel\nu}, \\ \gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel}^{\mu} &= 2, & \gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \gamma_{\parallel}^{\mu} &= 0, \\ \gamma_{\parallel\mu} \gamma_{\parallel\nu} \gamma_{\parallel\rho} \gamma_{\parallel}^{\mu} &= 2\gamma_{\parallel\rho} \gamma_{\parallel\nu}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Легко показать, что свертка двух γ_{\parallel} -матриц, между которыми находится любое нечетное число γ_{\parallel} -матриц, обращается в ноль.

Приложение Г Вычисление интегралов по поперечным импульсам.

В этом приложении мы приводим явные выражения для обобщенных гауссовых интегралов скалярного, векторного и тензорного типа по поперечным координатам $Z_{\perp i}$. Такие интегралы возникают во внешнем магнитном поле при вычислении амплитуды \mathcal{M}_n однопетлевого процесса (Глава II) и S - матричного элемента рассеяния фотонов вперед на электронах и позитронах плазмы (Глава III). Вычисление этих интегралов существенно упрощается, если ввести в пространстве $(n - 1)$ измерений векторы Z и Q , определяемые через соответствующие координаты $Z_{\perp i}$ и импульсы $Q_{\perp i}$ следующим образом:

$$Z_{\mu} = \begin{pmatrix} Z_{\perp 1\mu} \\ Z_{\perp 2\mu} \\ \vdots \\ Z_{\perp n-1\mu} \end{pmatrix}, \quad Q_{\mu} = \begin{pmatrix} Q_{\perp 1\mu} \\ Q_{\perp 2\mu} \\ \vdots \\ Q_{\perp n-1\mu} \end{pmatrix}. \quad (\text{Г.1})$$

В терминах векторов Z и Q скалярный гауссов интеграл, возникающий при вычислении амплитуды \mathcal{M}_n записывается в следующем виде:

$$\mathcal{J}_n^{\perp} = \int d^{2n-2} Z e^{-\left(\frac{\beta}{4}(ZRZ) - i(QZ)\right)}. \quad (\text{Г.2})$$

Матрица R может быть представлена в виде кронекеровского произведения $(n - 1 \times n - 1)$ матриц и лоренцевских тензоров второго ранга в поперечном пространстве:

$$R_{\mu\nu} = R_1 \delta_{\mu\nu} + iR_2 \varepsilon_{\mu\nu}, \quad (\text{Г.3})$$

где $\delta_{\mu\nu}$ - символ Кронекера, а $\varepsilon_{\mu\nu}$ - полностью антисимметричный тензор в пространстве $\{1, 2\}$: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$, $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = -1$.

$$R_1 = \begin{pmatrix} c_1 + c_n & c_n & c_n & \dots \\ c_n & c_2 + c_n & c_n & \dots \\ c_n & c_n & c_3 + c_n & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & \dots \\ -1 & -1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

где $c_i = \coth \tau_i$, τ_i - собственные времена.

Интегралы вида

$$J = \int d^n Z e^{-((ZGZ) - i(QZ))}, \quad (\Gamma.4)$$

где G – эрмитова матрица, вычисляются по следующей формуле:

$$J = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det G}} e^{-\frac{1}{4} (QG^{-1}Q)}, \quad (\Gamma.5)$$

которую легко доказать, если заметить, что любая эрмитова матрица может быть приведена к диагональному виду соответствующим ортогональным преобразованием. Тогда интеграл (Г.4) разбивается на произведение обобщенных гауссовых интегралов, которые легко вычисляются. Делая обратное преобразование и замечая, что детерминант матрицы не изменяется при ортогональном преобразовании, получаем результат (Г.5). Таким образом, интегрирование по поперечным координатам в амплитуде \mathcal{M}_n сводится к интегралу:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_n^\perp &= \int d^{2n-2} Z e^{-\left(\frac{\beta}{4} (ZRZ) - i(QZ)\right)} = \\ &= 2 \left(\frac{4\pi}{\beta}\right)^{n-1} \left[\prod_{k=1}^n (c_k + 1) - \prod_{k=1}^n (c_k - 1) \right]^{-1} e^{-\frac{(QR^{-1}Q)}{\beta}}, \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

где R^{-1} - матрица обратная R

$$R_{\mu\nu}^{-1} = \tilde{R}_1 \delta_{\mu\nu} + i\tilde{R}_2 \varepsilon_{\mu\nu}, \quad (\Gamma.7)$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_1 &= \frac{1}{2} [(R_1 + R_2)^{-1} + (R_1 - R_2)^{-1}] , \\ \tilde{R}_2 &= \frac{1}{2} [(R_1 + R_2)^{-1} - (R_1 - R_2)^{-1}] .\end{aligned}$$

В общем случае произвольных значений n и величины магнитного поля выражения для \tilde{R}_1 и \tilde{R}_2 имеют громоздкий вид и неудобны для дальнейшего использования. Мы приведем явный вид этих матриц в двух частных случаях:

а) Случай $n = 3$, при произвольной величине магнитного поля.

$$\tilde{R}_1 = \frac{1}{1 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3} \begin{pmatrix} c_2 + c_3 & -c_3 \\ -c_3 & c_1 + c_3 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}_2 = \frac{1}{1 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

так что интеграл (Г.6) запишется в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_n^\perp &= \frac{(16\pi^2/\beta)}{1 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3} \times \\ &\times \exp \left[-\frac{(c_2 + c_3)Q_1^2 + (c_1 + c_3)Q_2^2 - 2c_3(Q_1 Q_2) - 2i(Q_1 \varepsilon Q_2)}{\beta(1 + c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)} \right].\end{aligned}\tag{Г.8}$$

б) Случай сильного поля при произвольном n .

$$\tilde{R}_1 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}_2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

В этом пределе интеграл (Г.6) окончательно запишется в виде

$$\mathcal{J}_n^\perp = \left(\frac{2\pi}{\beta}\right)^{n-1} e^{-\frac{R_{\perp n}}{2\beta}}, \quad (\text{Г.9})$$

где $R_{\perp n}$ – билинейная комбинация поперечных компонент внешних импульсов, например:

$$R_{\perp 2} = Q_1^2, \quad R_{\perp 3} = Q_1^2 + Q_2^2 - (Q_1 Q_2) - i(Q_1 \varepsilon Q_2),$$

в общем случае, при $n \geq 3$:

$$R_{\perp n} = \sum_{k=1}^{n-1} Q_k^2 - \sum_{k=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{k-1} [(Q_k Q_j) - i(Q_k \varepsilon Q_j)].$$

Интегралы векторного и тензорного типов могут быть теперь получены из (Г.6) дифференцированием по параметру Q_μ

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\mu_1 \dots \mu_m}^\perp &= \int d^{2n-2} Z Z_{\mu_1} \dots Z_{\mu_m} e^{-\left(\frac{\beta}{4}(Z R Z) - i(Q Z)\right)} = \quad (\text{Г.10}) \\ &= (-i)^m \frac{\partial^m \mathcal{J}_n^\perp}{\partial Q_{\mu_1} \dots \partial Q_{\mu_m}}. \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Raffelt G.G. Stars as Laboratories for Fundamental Physics. Chicago: University of Chicago Press, 1996. 664 p.
- [2] Хлопов М.Ю. Основы космомикрoфизики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
- [3] Кладдор-Клайнгротхаус Г.В., Цюбер К. Астрофизика элементарных частиц. М.: Редакция журнала “Успехи физических наук”, 2000. 496 с.
- [4] Kouveliotou C., Strohmayer T., Hurley K. et al. Discovery of a magnetar associated with the Soft Gamma Repeater SGR 1900+14 // Astrophys. J. 1999. V. 510. No. 2. P. L115-L118.
- [5] Hurley K., Cline T., Mazets E. et al. A giant, periodic flare from the soft gamma repeater SGR1900+14 // Nature 1999. V. 397. P. 41-43.
- [6] Kouveliotou C., Dieters S., Strohmayer T. et al. An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft γ -ray repeater SGR1806 - 20 // Nature. 1998. V. 393. P.235-237.
- [7] Kouveliotou C., Strohmayer T., Hurley K. et al. Discovery of a magnetar associated with the soft gamma repeater SGR 1900+14 Astrophys. J. Lett. 1999. V. 510. P. L115-L118.
- [8] Kouveliotou C., Tennant A., Woods P.M. et al. Multiwavelength observations of the soft gamma repeater SGR 1900+14 during its 2001 april activation Astrophys. J. Lett. 2001. V. 558. P. L47-L50.

- [9] Israel G.L., Belloni T., Stella L. et al. Discovery of rapid X-ray oscillations in the tail of the SGR 1806-20 hyperflare. Preprint astro-ph/0505255.
- [10] Бисноватый-Коган Г.С. Взрыв вращающейся звезды как механизм сверхновой // Астрон. журн. 1970. Т. 47. С. 813.
- [11] Duncan R.C., Thompson C. Formation of very strongly magnetized neutron stars: implications for gamma-ray bursts // Astrophys. J. 1992. V. 392. No. 1. P. L9-L13.
- [12] Bocquet P., Bonazzola S., Gourgoulhon E., Novak J. Rotating neutron star models with magnetic field // Astron. Astrophys. 1995. V. 301. No. 9. P. 757-775.
- [13] Cardall C.Y., Prakash M., Lattimer J.M. Effects of strong magnetic fields on neutron star structure // Astrophys. J. 2001. V. 554. No. 1. P. 322-339.
- [14] Vachaspati T. Magnetic fields from cosmological phase transitions // Phys. Lett. 1991. V. B265. No. 3,4. P. 258-261.
- [15] Ambjørn J., Olesen P. Electroweak magnetism, W -condensation and anti-screening // In: Proc. of 4th Hellenic School on Elementary Particle Physics, Corfu, 1992 (preprint hep-ph/9304220).
- [16] Grasso D., Rubinstein H.R. Magnetic fields in the early Universe // Phys. Rep. 2001. V. 348. No. 3. P. 163-266.

- [17] В. И. Ритус, в сб. *Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле*, Труды ФИАН СССР, **111** (Наука, Москва, 1979), с. 5; А. И. Никишов, там же, с. 152.
- [18] Скобелев В.В. Поляризационный оператор фотона в сверхсильном магнитном поле // Изв. вузов. Физика. 1975. № 10. С. 142-143.
- [19] Loskutov Yu.M., Skobelev V.V. Nonlinear electrodynamics in a superstrong magnetic field // Phys. Lett. 1976. V. A56. No. 3. P. 151-152.
- [20] Скобелев В.В. Фотогенерация нейтрино и аксионов на при стимулирующем влиянии сильного магнитного поля // ЖЭТФ. 2001. Т. 120. № 4. С. 786-796.
- [21] Gvozdev A.A., Mikheev N.V., Vassilevskaya L.A. The radiative decay of a massive neutrino in the external electromagnetic fields // Phys. Rev. 1996. V. D54. No. 9. P. 5674-5685.
- [22] Mikheev N.V., Parkhomenko A.Ya., Vassilevskaya L.A. Axion in an external electromagnetic field // Phys. Rev. 1999. V. D60. No. 3. P. 035001 (1-11).
- [23] Байер В.Н., Катков В.М. Рождение пары нейтрино при движении электрона в магнитном поле // ДАН СССР. 1966. Т. 171. № 2. С. 313-316.
- [24] Чобан Э.А., Иванов А.Н. Рождение лептонных пар высокоэнергетическими нейтрино в поле сильной электромагнитной волны // ЖЭТФ. 1969. Т. 56. № 1. С. 194-200.

- [25] Борисов А.В., Жуковский В.Ч., Лысов Б.А. Рождение электрон - позитронной пары нейтрино в магнитном поле // Изв. вузов. Физика. 1983. № 8. С. 30-34.
- [26] Книжников М.Ю., Татаринцев А.В. Рождение электрон - позитронной пары нейтрино в постоянном внешнем поле // Вестн. МГУ. Физ., астрофиз. 1984. Т. 25. № 3. С. 26-30.
- [27] Borisov A.V., Ternov A.I., Zhukovsky V.Ch. Electron-positron pair production by a neutrino in an external electromagnetic field // Phys. Lett. 1993. V. B318. No. 3. P. 489-491.
- [28] Kuznetsov A.V., Mikheev N.V. Neutrino energy and momentum loss through the process $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ in a strong magnetic field // Phys. Lett. 1997. V. B394. No. 1,2. P. 123-126.
- [29] Кузнецов А.В., Михеев Н.В. Нейтринное рождение электрон-позитронных пар в магнитном поле // ЯФ. 1997. Т. 60. № 11. С. 2038-2047.
- [30] Борисов А.В., Заморин Н.Б. Рождение электрон - позитронной пары в распаде массивного нейтрино в постоянном внешнем поле // ЯФ. 1999. Т. 62. № 9. С. 1647-1656.
- [31] Kuznetsov A.V., Mikheev N.V., Rumyantsev D.A. Lepton pair production by high-energy neutrino in an external electromagnetic field // Mod. Phys. Lett. 2000. V. A15. No. 8. P. 573-578.
- [32] Кузнецов А.В., Михеев Н.В., Румянцев Д.А. Нейтринное рождение лептонных пар во внешнем электромагнитном поле // ЯФ. 2002. Т. 65. № 2. С. 303-306.

- [33] Баталин И.А., Шабад А.Е. Функция Грина фотона в постоянном однородном электромагнитном поле общего вида. // ЖЭТФ. 1971. Т. 60. № 3. С. 894-900.
- [34] Tsai W.-Y. Vacuum polarization in homogeneous magnetic fields // Phys. Rev. 1974. V. D10. No. 8. P. 2699-2702.
- [35] Shabad A.E. Photon dispersion in a strong magnetic field // Ann. Phys. (N.Y.). 1975. V. 90. No. 1. P. 166-195.
- [36] Шабад А.Е. Поляризация вакуума и квантового релятивистского газа во внешнем поле // Тр. ФИАН СССР “Поляризационные эффекты во внешних калибровочных полях”. М.: Наука, 1988. Т. 192. С. 5-152.
- [37] Гальцов Д.В., Никитина Н.С. Фотонейтринные процессы в сильном поле // ЖЭТФ. 1972. Т. 62. № 6. С. 2008-2012.
- [38] Скобелев В.В. О реакциях $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ и $\nu \rightarrow \gamma\nu$ в сильном магнитном поле // ЖЭТФ. 1976. Т. 71. № 4. С. 1263-1267.
- [39] DeRaad Jr. L.L., Milton K.A., Hari Dass N.D. Photon decay into neutrinos in a strong magnetic field // Phys. Rev. 1976. V. D14. No. 12. P. 3326-3334.
- [40] Gvozdev A.A., Mikheev N.V., Vassilevskaya L.A. The magnetic catalysis of the radiative decay of a massive neutrino in the standard model with lepton mixing // Phys. Lett. 1992. V. B289. No. 1,2. P. 103-108.

- [41] Василевская Л.А., Гвоздев А.А., Михеев Н.В. Распад массивного нейтрино $\nu_i \rightarrow \nu_j \gamma$ в скрещенном поле // Ядер. физ. 1994. Т. 57. № 1. С. 124-127.
- [42] Скобелев В.В. Распад массивного нейтрино в сильном магнитном поле // ЖЭТФ. 1995. Т. 108. № 1. С. 3-13.
- [43] Zhukovsky V.Ch., Eminov P.A., Grigoruk A.E. Radiative decay of a massive neutrino in the Weinberg - Salam model with mixing in a constant uniform magnetic field // Mod. Phys. Lett. 1996. V. A11. No. 39-40. P. 3119-3126.
- [44] D'Olivo J.C., Nieves J.F., Pal P.B. Cherenkov radiation by massless neutrinos // Phys. Lett. 1996. V. B365. No. 1-4. P. 178-184.
- [45] Ioannisian A.N., Raffelt G.G. Cherenkov radiation by massless neutrinos in a magnetic field // Phys. Rev. 1997. V. D55. No. 11. P. 7038-7043.
- [46] Gvozdev A.A., Mikheev N.V., Vassilevskaya L.A. Resonance neutrino bremsstrahlung $\nu \rightarrow \nu \gamma$ in a strong magnetic field // Phys. Lett. 1997. V. B410. No. 2-4. P. 211-215.
- [47] Kuznetsov A.V., Mikheev N.V., Vassilevskaya L.A. Photon splitting $\gamma \rightarrow \nu \bar{\nu}$ in an external magnetic field // Phys. Lett. 1998. V. B427. No. 1,2. P. 105-108.
- [48] Василевская Л.А., Кузнецов А.В., Михеев Н.В. Индуцированное магнитным полем нейтрино-фотонное $\nu \nu \gamma$ -взаимодействие // ЯФ. 1999. Т. 62. № 4. С. 715-722.

- [49] Gell-Mann M. The reaction $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ // Phys. Rev. Lett. 1961. V. 6. No. 2. P. 70-71.
- [50] Crewther R.J., Finjord J., Minkowski P. The annihilation process $\nu\bar{\nu} \rightarrow \gamma\gamma$ with massive neutrino in cosmology // Nucl. Phys. 1982. V. B207. No. 2. P. 269-287.
- [51] Dodelson S., Feinberg G. Neutrino - two-photon vertex // Phys. Rev. 1991. V. D43. No. 3. P. 913-920.
- [52] Levine M.J. The process $\gamma + \gamma \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ // Nuovo Cim. 1967. V. A48. No. 1. P. 67-71.
- [53] Dicus D.A. Stellar energy-loss rates in a convergent theory of weak and electromagnetic interactions // Phys. Rev. 1972. V. D6. No. 4. P. 941-949.
- [54] Dicus D.A., Repko W.W. Photon neutrino scattering // Phys. Rev. 1993. V. D48. No. 11. P. 5106-5108.
- [55] Rosenberg L. Electromagnetic interactions of neutrinos // Phys. Rev. 1963. V. 129. No. 6. P. 2786-2788.
- [56] Cung V.K., Yoshimura M. Electromagnetic interaction of neutrinos in gauge theories of weak interactions // Nuovo Cim. 1975. V. A29. No. 4. P. 557-564.
- [57] Kuznetsov A.V., Mikheev N.V. Compton-like interaction of massive neutrinos with virtual photons // Phys. Lett. 1993. V. B299. No. 3-4. P. 367-369.

- [58] Кузнецов А.В., Михеев Н.В. Амплитуда процесса $\nu_i \gamma^* \rightarrow \nu_j \gamma^*$ с виртуальными фотонами и тормозное излучение при рассеянии нейтрино в кулоновском поле ядра // ЯФ. 1993. Т. 56. № 6. С. 108-114.
- [59] Liu J. Low-energy neutrino-two-photon interactions // Phys. Rev. 1991. V. D44. No. 9. P. 2879-2891.
- [60] Shaisultanov R. Photon - neutrino interactions in magnetic fields // Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. No. 8. P. 1586-1587.
- [61] Chyi T.K., Hwang C.-W., Kao W.F. et al. Neutrino - photon scattering and its crossed processes in a background magnetic field // Phys. Lett. 1999. V. B466. No. 2-4. P. 274-280.
- [62] Chyi T.K., Hwang C.-W., Kao W.F. et al. The weak-field expansion for processes in a homogeneous background magnetic field // Phys. Rev. 2000. V. D62. No. 10. P. 105014 (1-13).
- [63] Dicus D.A., Repko W.W. Neutrino - photon scattering in a magnetic field // Phys. Lett. 2000. V. B482. No. 1-3. P. 141-144.
- [64] Лоскутов Ю.М., Скобелев В.В. Двухфотонное рождение нейтрино в сильном внешнем поле // Вестн. МГУ: физ., астрофиз. 1981. Т. 22. № 4. С. 10-13.
- [65] Нгуен Ван Хьеу, Шабалин Е.П. О роли процесса $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \nu + \bar{\nu}$ в нейтринном излучении звезд // ЖЭТФ. 1963. Т. 44. № 3. С. 1003-1007.

- [66] Лоскутов Ю.М., Скобелев В.В. Эффективный лагранжиан $A^3(\nu\bar{\nu})$ - взаимодействия и процесс $\gamma\gamma \rightarrow \gamma(\nu\bar{\nu})$ в двумерном приближении квантовой электродинамики // ТМФ. 1987. Т. 70. № 2. С. 303-308.
- [67] Dicus D.A., Repko W.W. Photon - neutrino interactions // Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. No. 4. P. 569-571.
- [68] Harris M., Wang J., Teplitz V.L. Astrophysical effects of $\nu\gamma \rightarrow \nu\gamma\gamma$ and its crossed processes. Preprint astro-ph/9707113.
- [69] Abada A., Matias J., Pittau R. Five-leg photon-neutrino interactions // In: Proc. XXIX ICHEP (Vancouver). Preprint hep-ph/9809418.
- [70] Abada A., Matias J., Pittau R. Inelastic photon-neutrino interactions using an effective Lagrangian // Phys. Rev. 1999. V. D59. No. 1. P. 013008 (1-7).
- [71] Abada A., Matias J., Pittau R. Direct computation of inelastic photon-neutrino processes in the Standard Model // Nucl. Phys. 1999. V. B543. No. 1-2. P. 255-268.
- [72] Abada A., Matias J., Pittau R. Low-energy photon-neutrino inelastic processes beyond the Standard Model // Phys. Lett. 1999. V. B450. No. 1-3. P. 173-181.
- [73] Dicus D.A., Kao C., Repko W.W. $\gamma\nu \rightarrow \gamma\gamma\nu$ and crossed processes at energies below m_W // Phys. Rev. 1999. V. D59. No. 1. P. 013005 (1-6).
- [74] Кузнецов А.В., Михеев Н.В. Фоторождение нейтрино на ядрах в сильном магнитном поле // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 75. № 9. С. 531-534.

- [75] Папанян В.О., Ритус В.И. Трехфотонное взаимодействие в интенсивном поле // Тр. ФИАН СССР “Проблемы квантовой электродинамики интенсивного поля”. М.: Наука, 1986. Т. 168. С. 120-140.
- [76] Adler S.L., Schubert C. Photon splitting in a strong magnetic field: recalculation and comparison with previous calculations // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. No. 9. P. 1695-1698.
- [77] Baier V.N., Milstein A.I., Shaisultanov R.Zh. Photon splitting in a very strong magnetic field // Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. No. 9. P. 1691-1694.
- [78] Байер В.Н., Мильштейн А.И., Шайсултанов Р.Ж. Расщепление фотона в сверхсильном магнитном поле // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 52-62.
- [79] Chistyakov M.V., Kuznetsov A.V., Mikheev N.V. Photon splitting above the pair creation threshold in a strong magnetic field // Phys. Lett. 1998. V. B434. No. 1. P. 67-73.
- [80] Кузнецов А.В., Михеев Н.В., Чистяков М.В. Расщепление фотона на два фотона в сильном магнитном поле // ЯФ. 1999. Т. 62. № 9. С. 1638-1646.
- [81] Baring M.G. Magnetic photon splitting: The S-matrix formulation in the Landau representation // Phys. Rev. 2000. V. D62. P. 016003 (1-16).
- [82] Weise J.I., Baring M.G., Melrose D.B. Photon splitting in strong magnetic fields: S-matrix calculations // Phys. Rev. 1998. V. D57. P. 5526-5538; Erratum // Phys. Rev. 1999. V. D60. P. 099901 (1-2).

- [83] Wilke C., Wunner G. Photon splitting in strong magnetic fields: asymptotic approximation formulas versus accurate numerical results // Phys. Rev. 1997. V. D55. P. 997-1000.
- [84] Weise J.I. Photon splitting in the electromagnetic vacuum // Phys. Rev. 2004. V. D69. P. 105017 (1-16).
- [85] Chistyakov M.V., Kuznetsov A.V., Mikheev N.V. The transitions $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ and $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ in a strong magnetic field // In: Proceedings of the Ringberg Euroconference “New Trends in Neutrino Physics”, Ringberg Castle, Tegernsee, Germany, 1998. Edited by B. Kniehl, G. Raffelt and N. Schmitz. World Scientific Publishing Co., 1999. P. 245-254.
- [86] Chistyakov M.V., Kuznetsov A.V., Mikheev N.V. Photon splitting in a strong magnetic field // In: Proceedings of the 10th International Seminar “Quarks-98”, Suzdal, Russia, 1998. Edited by F.L. Bezrukov et al. Inst. Nucl. Res., Moscow, 1999. V. 1. P. 299-308.
- [87] Melrose D.B. A relativistic quantum theory for processes in collisionless plasmas // Plasma Phys. 1974. V. 16. P. 845-864.
- [88] Де Ля Инсера В., Феррер Э., Шабад А.Е. Однопетлевые вычисления расщепления фотона в релятивистской квантовой плазме методом функций Грина // Тр. ФИАН СССР. М.: Наука, 1986. Т. 169. С. 183-198.
- [89] Adler S.L. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field // Ann. Phys. (N.Y.). 1971. V. 67. No. 2. P. 599-647.
- [90] Bulik T. Photon splitting in strongly magnetized plasma // Acta Astronomica. 1998. V. 48. P. 695-710.

- [91] Elmfors P., Skagerstam B. Thermally induced photon splitting // Phys. Lett. 1998. V. B427. No 1-2. P. 197-205.
- [92] Gies H. QED effective action at finite temperature: Two-loop dominance // Phys. Rev. 2000. V. D61. P. 085021 (1-18).
- [93] Martinez Resco J. M., Valle Basagoiti M. A. Matter-induced vertices for photon splitting in a weakly magnetized plasma // Phys. Rev. 2001. V. D64. P. 016006 (1-6).
- [94] Борисов А.В., Вшивцев А.С., Жуковский В.Ч., Эминов П.А. Фотоны и лептоны во внешних полях при конечных температуре и плотности // УФН. 1997. Т. 167. № 3. С. 241-267.
- [95] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
- [96] Фрадкин Е.С. Метод функций Грина в теории квантованных полей и квантовой статистике // Тр. ФИАН СССР. М.: Наука, 1965. Т. 29. С. 7-138.
- [97] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Статистическая физика, ч.2. М.: Наука, 1978. 448 с.
- [98] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 728 с.
- [99] Имшенник В.С., Надежин Д.К. Сверхновая 1987А в Большом Магеллановом Облаке: наблюдения и теория // УФН. 1988. Т. 156. № 4. С. 561-651.

- [100] Nadyozhin D.K. Five year anniversary of Supernova 1987A in the Large Magellanic Cloud // In: Particles and Cosmology, Proc. Baksan Int. School, ed. by V.A. Matveev et al. Singapore: World Sci., 1992. P. 153-190.
- [101] Боровков М.Ю., Кузнецов А.В., Михеев Н.В. Однопетлевая амплитуда перехода $j \rightarrow f \bar{f} \rightarrow j'$ во внешнем электромагнитном поле // ЯФ. 1999. Т. 62. № 9. С. 1714-1722.
- [102] Кузнецов А.В., Михеев Н.В., Румянцев Д.А. Процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в сильном магнитном поле // ЯФ. 2003. Т. 66. № 2. С. 319-327.
- [103] Кузнецов А.В., Михеев Н.В., Румянцев Д.А. Обобщенная амплитуда n -вершинного однопетлевого процесса в сильном магнитном поле // ЯФ. 2004. Т. 67. № 2. С. 324-331.
- [104] Кузнецов А.В., Михеев Н.В., Румянцев Д.А. Превращение фотонной пары в нейтрино в сильном магнитном поле // Актуальные проблемы физики. Выпуск 3: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Ярославль. Яросл. гос. ун-т. 2001. С.31-36.
- [105] Кузнецов А.В., Михеев Н.В., Румянцев Д.А. Процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в сильно замагниченной электрон-позитронной плазме // Актуальные проблемы физики. Выпуск 4: Сборник научных трудов молодых ученых, аспирантов и студентов. Ярославль. Яросл. гос. ун-т. 2003. С.28-34.
- [106] Кузнецов А.В., Михеев Н.В., Румянцев Д.А. Обобщенная амплитуда n -вершинного однопетлевого процесса в сильном магнитном

поле // Исследования по теории элементарных частиц и твердого тела. Выпуск 4: Сборник трудов, посвященный 30-летию кафедры теоретической физики ЯрГУ. Ярославль. Яросл. гос. ун-т. 2003. С.47-54.

- [107] Kuznetsov A.V., Mikheev N.V., Rumyantsev D.A. General amplitude of the n -vertex one-loop process in a strong magnetic field. // In: Proceedings of the 12th International Seminar “Quarks’2002”, edited by V.A. Matveev, V.A. Rubakov, S.M. Sibiryakov and A.N. Tavkhelidze. Moscow: Institute for Nuclear Research of Russian Academy of Sciences, 2004, P. 192-201.
- [108] Понтекорво Б.М. Универсальное взаимодействие Ферми и астрофизика // ЖЭТФ. 1959. Т. 36. № 5. С. 1615-1616.
- [109] Ландау Л.Д. О моменте системы из двух фотонов // ДАН СССР. 1948. Т. 60. С. 207.
- [110] Yang C.N. Selection rules for the dematerialization of a particle into two photons // Phys. Rev. 1950. V. 77. No. 2. P. 242-245.
- [111] Bég M.A.B., Budny R.V., Mohapatra R.N., Sirlin A. Manifest left-right symmetry and its experimental consequences // Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. No. 22. P. 1252-1255.
- [112] Eidelman S., Hayes K.G., Olive K.A. et al. (*Particle Data Group*). Review of Particle Physics // Phys. Lett. 2004. V. B592. No. 1-4. P. 1-1109.
- [113] Barbieri R., Mohapatra R.N. Limits on right-handed interactions from SN 1987A observations // Phys. Rev. 1989. V. D39. No. 4. P. 1229-1232.

- [114] Chistyakov M.V., Mikheev N.V. Photon - neutrino interactions in strong magnetic field // Mod. Phys. Lett. 2002. V. A17. No. 39. P. 2553-2562.
- [115] Gies H., Shaisultanov R.Zh. Axial vector current in an electromagnetic field and low-energy neutrino-photon interactions. // Phys. Rev. 2000. V. D62. No. 7. P. 073003.
- [116] Harding A.C., Baring M.G., Gonthier P.L. Photon splitting cascades in gamma-ray pulsars and the spectrum of PSR1509-58 // Astrophys. J. 1997. V.476. P.246-260.
- [117] Baring M.G., Harding A.C. Radio-quiet pulsars with ultrastrong magnetic fields // Astrophys. J. Lett. 1998. V.507. P.L55-L58.
- [118] Bialynicka-Birula Z., Bialynicki-Birula I. Nonlinear effects in quantum electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field // Phys. Rev. 1970. V. D2. No. 10. P. 2341-2345.
- [119] Папанян В.О., Ритус В.И. Поляризация вакуума и расщепление фотонов в интенсивном поле // ЖЭТФ. 1971. Т. 61. № 6. С. 2231-2241.
- [120] Румянцев Д.А., Чистяков М.В. Расщепление фотона в сильно замагниченной плазме // Лептоны: Юбилейный сборник статей, посвященный 80-летию Э.М. Липманова. Ярославль. Яросл. гос. ун-т. 2004. С.171-179.
- [121] Kuznetsov A.V., Mikheev N.V. Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003.

- [122] Mikheev N.V., Parkhomenko A.Ya., Vassilevskaya L.A. Magnetic-field influence on radiative axion decay into photons of the same polarization // ЯФ. 2000. Т. 63 № 6. С. 1122-1125.
- [123] Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization // Phys. Rev. 1951. V. 82. No. 5. P. 664-679.
- [124] Tsai W., Erber T. The propagation of photons in homogeneous magnetic fields: index of refraction. // Phys.Rev. 1975. V. D12. P. 1132-1137.
- [125] Melrose D.B., Stoneham R.J. Vacuum polarization and photon propagation in a magnetic field. // Nuovo Cim. 1976. V. A32. P.435-447.
- [126] Светозарова Г.И. Цытович В.Н. О пространственной дисперсии релятивистской плазмы в магнитном поле // Изв. вузов. Радиофизика. 1962. Т.5. № 4. С. 658-670.
- [127] Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981. 432 с.