Резонансные процессы в активной среде

Д.А. Румянцев*, Д.М. Шленев** А.А. Ярков***
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Россия

В работе рассмотрены различные квантовые процессы с учетом резонанса на виртуальном фермионе.

*E-mail: rda@uniyar.ac.ru
**E-mail: ultrasickdoom@gmail.com
***E-mail: a12l@mail.ru

1 Введение

Нейтронные звезды, обладая набором экстремальных характеристик, являются природными физическими лабораториями и одними из самых интересных объектов, известных в науке. Особое внимание ученых привлекают радиопульсары и магнитары, обладающие магнитными полями колоссальной напряженности, к которой очень сложно приблизиться в земных условиях. У магнитного поля имеется характерное значение, называемое критическим, $B_e = m^2/e \simeq 4.41 \times 10^{13}$ Гс [1], при приближении к которому становится необходимым учитывать квантовые эффекты при движении в нем частиц. В радиопульсарах с магнитными полями порядка 10^{12} Гс и магнитарах – до 10^{16} Гс [1–3] такие условия выполняются.

Кроме сильных магнитных полей, в магнитосфере как радиопульсаров, так и магнитаров присутствует достаточно горячая и плотная электрон-позитронная плазма [1]. Магнитное поле и плазма составляют две компоненты внешней активной среды, присутствие которой значительно изменяет характеристики протекающих в ней микропроцессов. Во-первых, активная среда может изменять закон дисперсии находящихся в ней частиц, что приводит к изменению кинематики процессов и вследствие чего могут открываться реакции и каналы реакций, которые запрещены в вакууме. Во-вторых, активная среда влияет на амплитуды процессов, в результате чего они могут приобретать резонансный характер. Именно эта составляющая влияния внешней активной среды рассматривается в данном обзоре. Вследствие резонанса вклад микропроцессов в макроскопические характеристики астрофизических процессов, такие как светимость и скорость изменения количества частиц, может многократно увеличиваться.

В сильном магнитном поле поперечная составляющая импульса фермиона квантуется. В таком случае энергия фермиона определяется так называемым

[1] В работе используется естественная система единиц: $\hbar = c = k = 1$, m_e – масса электрона, $e > 0$ – элементарный заряд.

уровнем Ландау n и проекцией импульса вдоль магнитного поля p_z:

$$E_n = \sqrt{m_f^2 + p_z^2 + 2|e_f|Bn}, \tag{1}$$

где e_f и m_f - заряд и масса фермиона. Состояние с $n = 0$, в котором фермион движется вдоль силовой линии магнитного поля, называется основным уровнем Ландау.

Можно выделить несколько ситуаций в иерархии параметров среды: магнитного поля, температуры T, химического потенциала μ и энергии фермионов и фотонов, участвующих в реакциях. Предел сильного поля, когда фермионы будут занимать основной уровень Ландау, осуществляется при выполнении условия [4]:

$$\frac{B^2}{8\pi} \gg \frac{\pi^2(n_{e^-} - n_{e^+})^2}{eB} + \frac{eBT^2}{12}\,, \tag{2}$$

где n_{e^-} и n_{e^+} – концентрации электронов и позитронов плазмы. Такие условия могут, в частности, реализовываться в модели вспышки источников мягких повтоярющихся гамма-всплесков (SGR) [1, 5], которые, как показывают недавние наблюдения, можно отождествить с магнитарами [6–11].

Даже в магнитарных полях условие 2, при котором магнитное поле является доминирующим параметром, перестает выполняться при высоких значениях плотности плазмы $\rho \geqslant 10^8$ г/см^3. Такая плотность может достигаться в границе между внешней и внутренней корой магнитара. В результате реакции, в которых имеются фермионы в промежуточном состоянии, могут приобретать резонансный характер. Это происходит вследствие того, что начинают возбуждаться высшие уровни Ландау виртуальных фермионов. Они становятся реальными с определенным законом дисперсии, садятся на массовую поверхность. В этом состоянии они являются нестабильными и распадаются за время, обратно пропорциональное вреоятности их перехода на низшие уровни Ландау. Эффективность реакции при этом заметно увеличивается, что может иметь наблюдаемые астрофизические следствия.

Резонанс на фотоне наблюдается аналогичным образом: в активной среде поляризационный оператор фотона имеет реальную часть, которую можно рассматривать как эффективную массу фотона. В кинематической области, в которой квадрат 4-импульса виртуального фотона будет равен реальной части его поляризационного оператора, виртуальный фотон станет реальным и нестабильным.

Настоящая статья организована следующим образом. В Разделе 2 обсуждаются различные методы представления решения уравнения Дирака во внешнем магнитном поле. В разделе 3 рассматриваются радиационные поправки в магнитном поле к массовому оператору частиц в промежуточном состоянии и получается выражение для пропагатора. Раздел 4 посвящен различным двухвершинным процессам, в которых может реализовываться резонанс на виртуальном фермионе и/или фотоне. В Разделе 5 описываются сингулярности в фазовых объемах одновершинных процессов и методы их устранения.

2 Представление решений уравнения Дирака во внешнем магнитном поле

В этом разделе обсудим влияние активной среды на волновые функции присутстствующих в ней частиц: фермионов и фотонов. В случае фермионов искомые нами волновые функции являются решением уравнения Дирака в присутствии внешнего постоянного однородного магнитного поля? направленного вдоль оси z:

$$(i\partial_\mu\gamma^\mu + e_f A_\mu\gamma^\mu - m_f)\Psi^s_{p,n}(X) = 0\,, \tag{3}$$

где A_μ – 4-вектор потенциала электромагнитного поля, который в калибровке Ландау имеет вид $A^\mu = (0, 0, xB, 0)$. Решением этого уравнения является набор собственных функций любого оператора, который коммутирует с гамильтонианом Дирака во внешнем магнитном поле: $H = \gamma_0\,(\boldsymbol{\gamma P}) + m_f\,\gamma_0 + e_f A_0$, где $\mathbf{P} = -i\boldsymbol{\Delta} - e_f\mathbf{A}$. Существует два распространенных подхода к выбору этих операторов, подробное описание которых представлено в работах [12–17]. При первом из них, предложенным Джонсоном и Липпманом [18], решения выбираются как собственные функции оператора обобщенной спиральности, $T_0 = \frac{1}{m_f}(\mathbf{\Sigma P})$, где $\mathbf{\Sigma} = -\gamma_0\boldsymbol{\gamma}\gamma_5$ – трехмерный оператор спина. При этом две верхние компоненты биспиноров соответствуют состояниям фермиона с проекцией спина на направление магнитного поля, равной $1/2$ и $-1/2$.

Другой подход предложен Соколовым и Терновым [19]. Он состоит в выборе волновых функций как собственных функций ковариантного оператора μ_z, который строится следующим образом:

$$\hat{\mu}_z = m_f \Sigma_z - i\gamma_0\gamma_5 \left[\mathbf{\Sigma} \times \mathbf{P}\right]_z \, . \tag{4}$$

Его можно получить непосредственно из введенного в работе [19] обобщенного оператора спина, являющегося тензором третьего ранга, который можно записать в координатном представлении следующим образом:

$$\mathrm{F}_{\mu\nu\lambda} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\left(P_\lambda\gamma_0\sigma_{\mu\nu} + \gamma_0\sigma_{\mu\nu}P_\lambda\right), \tag{5}$$

где $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu)/2$, и $P_\lambda = \mathrm{i}\partial_\lambda - e_f\,A_\lambda = (\mathrm{i}\partial_0 - e_f\,A_0\,, -\mathrm{i}\boldsymbol{\nabla} - e_f\mathbf{A})$ – оператор обобщенного 4-импульса. Заметим, что в работе [19] ковариантные билинейные формы были построены из матриц Дирака в обкладках биспиноров $\psi^\dagger$ и ψ, тогда как в современной литературе (см., например [20]) билинейные формы строятся из матриц Дирака в обкладках биспиноров $\bar{\psi}$ и ψ. Из пространственных компонент $\mathrm{F}_{\mu\nu 0}$ оператора (5) можно построить следующий векторный оператор:

$$\hat{\mu}_i = -\frac{1}{2}\,\varepsilon_{ijk}\,\mathrm{F}_{jk0}\,, \tag{6}$$

где ε_{ijk} – тензор Леви-Чивита. Построенный таким образом объект (6) имеет смысл оператора поляризации [12, 19]. Его можно представить в виде:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = m_f\mathbf{\Sigma} + \mathrm{i}\gamma_0\gamma_5[\mathbf{\Sigma} \times \hat{\boldsymbol{P}}]\,. \tag{7}$$

В нерелятивистском пределе оператор (7), отнесенный к квадрату массы фермиона: $\hat{\boldsymbol{\mu}}/m_f^2$, переходит в обычный оператор Паули для магнитного момента [21], который имеет явную физическую интерпретацию.

Решения уравнения Дирака в представлении Джонсона и Липпмана широко используются в литературе (см. например [22–27]). Однако эти функции обладают рядом недостатков, которые проявляются при расчете конкретных характеристик процессов с двумя и более вершинами. Так, эти функции некорректно описывают спиновую зависимость конечной ширины распада промежуточного состояния, что приводит к неверным результатам вблизи резонансов, как было показано в работах [28, 29]. Кроме того, лоренц-инвариантностью будет обладать только квадрат модуля амплитуды, просуммированный по всем поляризациям фермиона, а не парциальные вклады в него.

С другой стороны, использование функций, предложенных Соколовом и Терновым, правильно описывает сечение процессов вблизи резонанса, а также позволяет найти парциальные вклады в амплитуду каждого поляризационного состояния частиц в отдельности, которые будут иметь лоренц-инвариантную структуру. По этой причине далее в этом разделе приведем подробное их описание.

Уравнение для собственных функций оператора 4 имеет следующий вид:

$$\hat{\mu}_z \Psi^s_{p,n}(X) = s M_n \Psi^s_{p,n}(X)\,, \tag{8}$$

где квантовое число $s = \pm 1$ определяет проекцию спина вдоль направления магнитного поля.

Как уже упоминалось во Введении, состояния фермиона квантуются по энергетическим состояниям, которые называются уровнями Ландау:

$$E_n = \sqrt{p_z^2 + M_n^2}\,, \;\; n = 0, 1 \ldots . \tag{9}$$

Здесь введены обозначения $M_n = \sqrt{2\beta n + m_f^2}$, $\beta = |e_f|B$. Каждое состояние является бесконечно вырожденным по p_z и дважды вырожденным по s, кроме состояния $n = 0$, где возможно лишь состояние $s = -1$. Решения уравнения Дирака 3 могут быть представлены следующим образом:

$$\Psi^s_{p,n}(X) = \frac{e^{-\mathrm{i}(E_n X_0 - p_y X_2 - p_z X_3)}\; U^s_n(\xi)}{\sqrt{4E_n M_n (E_n + M_n)(M_n + m_f) L_y L_z}}\,, \tag{10}$$

где

$$\xi(X_1) = \sqrt{\beta}\left(X_1 - \eta\frac{p_y}{\beta}\right) . \qquad (11)$$

Далее, используя обозначение для определения знака заряда фермиона $\eta = e_f/|e_f|$, становится удобным представить биспиноры $U_n^s(\xi)$ в виде отдельной суммы биспиноров соответствующих положительным и отрицательным зарядам $U_{n,\eta}^s(\xi)$:

$$U_n^s(\xi) = \frac{1-\eta}{2}\,U_{n,-}^s(\xi) + \frac{1+\eta}{2}\,U_{n,+}^s(\xi)\,, \qquad (12)$$

где

$$U_{n,-}^{-}(\xi) = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\sqrt{2\beta n}\,p_z V_{n-1}(\xi) \\ (E_n+M_n)(M_n+m_f)V_n(\xi) \\ -\mathrm{i}\sqrt{2\beta n}(E_n+M_n)V_{n-1}(\xi) \\ -p_z(M_n+m_f)V_n(\xi) \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

$$U_{n,-}^{+}(\xi) = \begin{pmatrix} (E_n+M_n)(M_n+m_f)V_{n-1}(\xi) \\ -\mathrm{i}\sqrt{2\beta n}\,p_z V_n(\xi) \\ p_z(M_n+m_f)V_{n-1}(\xi) \\ \mathrm{i}\sqrt{2\beta n}(E_n+M_n)V_n(\xi) \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

$$U_{n,+}^{-}(\xi) = \begin{pmatrix} \mathrm{i}\sqrt{2\beta n}\,p_z V_n(\xi) \\ (E_n+M_n)(M_n+m_f)V_{n-1}(\xi) \\ \mathrm{i}\sqrt{2\beta n}(E_n+M_n)V_n(\xi) \\ -p_z(M_n+m_f)V_{n-1}(\xi) \end{pmatrix}, \qquad (15)$$

$$U_{n,+}^{+}(\xi) = \begin{pmatrix} (E_n+M_n)(M_n+m_f)V_n(\xi) \\ \mathrm{i}\sqrt{2\beta n}\,p_z V_{n-1}(\xi) \\ p_z(M_n+m_f)V_n(\xi) \\ -\mathrm{i}\sqrt{2\beta n}(E_n+M_n)V_{n-1}(\xi) \end{pmatrix}, \qquad (16)$$

$V_n(\xi)$ – нормированные функции гармонического осциллятора, которые следующим образом выражаются через полиномы Эрмита $H_n(\xi)$ [30]:

$$V_n(\xi) = \frac{\beta^{1/4} \mathrm{e}^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\xi) \,. \tag{17}$$

Далее эти решения уравнения Дирака (10) будут использованы для получения пропагаторов фермионов в разделе 3.

3 Представление пропагаторов с учетом мнимой части

3.1 Пропагатор фермиона

В диаграммной технике Фейнмана, которая широко применяется для расчета различных физических величин, в качестве одного из объектов выступают внутренние линии, соответствующие виртуальным частицам или промежуточным состояниям. "Виртуальность"частицы означает нарушение у этой частицы релятивистского соотношения (9). В этом разделе мы опишем представление пропагаторов фермионов во внешнем магнитном поле с учетом радиационных поправок к массовому оператору и покажем, как может реализовываться резонанс в квантовых процессах, содержащих фермионы в промежуточном состоянии.

Пропагатор в формализме собственного времени Фока [31] находится как решение уравнения Дирака с δ-функцией в правой части, которая также называется функцией Грина для уравнения Дирака:

$$(\mathrm{i}\partial_\mu \gamma^\mu + e_f A_\mu \gamma^\mu - m_f) S(X, X') = \delta\left(X - X'\right) \,. \tag{18}$$

Пропагатор, который получается из этого уравнения, имеет достаточно громоздкий вид. Поэтому удобно воспользоваться различными приближениями. Например, приближение слабого магнитного поля особенно актуально для W-бозонов, так как критическое поле для этих частиц, равное примерно $m_W^2/e \simeq 10^{24}$ Гс, значительно превышает магнитные поля, существующие в природе. Кроме того, для частиц, обладающих высоким удельным зарядом,

$|e_f|/m_f$, удобно рассматривать пропагатор в виде разложения по уровням Ландау:

$$S(X, X') = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=\pm 1} S_n^s(X, X') \,. \tag{19}$$

Для построения пропагатора можно воспользоваться полевыми операторами:

$$\Psi(X) = \sum_{n, p_y, p_z, s} \left(a_{n,p}^s \Psi_{n,p,+}^s(X) + b_{n,p}^{\dagger s} \Psi_{n,p,-}^s(X) \right), \tag{20}$$

где a – оператор уничтожения фермиона, $b^\dagger$ – оператор рождения фермиона, Ψ_+ и Ψ_- соответствуют решениям уравнения Дирака с положительной и отрицательной энергией соответственно. Стандартным образом пропагатор вычисляется как разность хронологически упорядоченного и нормально упорядоченного произведения полевых операторов:

$$S(X, X') = T(\Psi(X)\bar{\Psi}(X')) - \mathcal{N}(\Psi(X)\bar{\Psi}(X')) \,. \tag{21}$$

Подставляя точные решения уравнения Дирака (10) и вводя для удобства новое обозначение:

$$\phi_{p,n}^s(X_1) = \frac{U_n^s[\xi(X_1)]}{\sqrt{2M_n(E_n + M_n)(M_n + m_f)}} \,, \tag{22}$$

где U_n^s определяется формулой (12), можно представить вклад в разложение пропагатора от уровня Ландау n и поляризационного состояния s следующим образом:

$$S_n^s(X, X') = \int \frac{\mathrm{d}p_0 \mathrm{d}p_y \mathrm{d}p_z}{(2\pi)^3} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,(p\,(X-X'))_\parallel + \mathrm{i} p_y\,(X_2 - X_2')}}{p_\parallel^2 - M_n^2 - \mathcal{R}_\Sigma^s(p) + \mathrm{i}\,\mathcal{I}_\Sigma^s(p)}\, \phi_{p,n}^s(X_1)\bar{\phi}_{p,n}^s(X_1') \,, \tag{23}$$

где $\mathcal{R}_\Sigma^s(p)$ и $\mathcal{I}_\Sigma^s(p)$ – реальная и мнимая части массового оператора фермиона. Для их получения требуется вычислить радиационные поправки к массе фермиона в замагниченной плазме. Реальная часть массового оператора $\mathcal{R}_\Sigma^s(p)$ определяет изменение закона дисперсии фермиона в присутствии замагниченной плазмы. В слабых магнитных полях, $B \ll B_e$, она определяется отношением [32]:

$$\Re_{\Sigma}^{s}(p) = \frac{4\alpha m_f}{3\pi} \varkappa^2 \left[\ln \varkappa^{-1} + C + \frac{1}{2}\ln 3 - \frac{33}{16} \right], \quad \varkappa \ll 1, \tag{24}$$

где $C = 0.577...$ - постоянная Эйлера, динамический параметр $\varkappa$ вводится следующим образом:

$$\varkappa = \frac{1}{m_f B_e} [-(F_{\mu\nu} p_\nu)^2]^{1/2}. \tag{25}$$

Для случая сильного магнитного поля, $B \gtrsim B_e$, без учета плазмы лидирующий вклад в сдвиг массы фермиона, находящегося на основном уровне Ландау, описывается квадратом логарифмической функции [33]:

$$\Re_{\Sigma}^{s}(p) = \frac{\alpha}{4\pi} m_f \ln^2(2\beta/m_f^2). \tag{26}$$

Из (24) и (26) следует, что даже для достаточно больших значений магнитного поля вплоть до 10^{16} Гс эта поправка к массе фермиона имеет величину порядка постоянной тонкой структуры α [13, 14] и является несущественной.

Резонанс на виртуальном фермионе будет наблюдаться, когда в знаменателе пропагатора (23) реальная часть обращается в ноль. Тогда виртуальная частица становится реальной, то есть приобретает определенный закон дисперсии $p_{\|}^2 - M_n^2 = 0$. Анализ кинематики показывает, что это возможно только тогда, когда виртуальный фермион занимает один из высших уровней Ландау, $n > 0$. Частица при этом является нестабильной, и время ее жизни, в нерезонансной области предполагающееся бесконечно большим, определяется мнимой частью массового оператора, $\mathcal{I}_{\Sigma}^{s}(p)$, учет которой становится необходимым. Она может быть получена с помощью оптической теоремы и представлена в следующем виде [34, 35]:

$$\Im_{\Sigma}^{s}(p) = -\frac{1}{2}\, p_0\, \Gamma_n^s\,, \tag{27}$$

где Γ_n^s – полная ширина поглощения фермиона, находящегося в поляризационном состоянии s и занимающего n-й уровень Ландау. Полная ширина изменения состояния фермиона может быть выражена через ширину рождения фермиона [36]:

$$\Gamma_n^s = \Gamma_n^{(abs)\,s} + \Gamma_n^{(cr)\,s} \simeq \Gamma_n^{(cr)\,s} \left[1 + \mathrm{e}^{(E_n'' - \mu)/T}\right] \,, \tag{28}$$

где $\Gamma_n^{(abs)\,s}$ и $\Gamma_n^{(cr)\,s}$ – ширины поглощения и рождения фермиона соответственно, E_n'' – энергия виртуального фермиона. Введенный таким образом пропагатор с учетом конечной ширины изменения состояния фермиона позволяет корректно рассчитывать сечения квантовых процессов в резонансной области.

3.2 Пропагатор фотона

Пропагатор фотона удобно представить в виде разложения по собственным векторам и собственным значениям поляризационного оператора $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(q)$. Этот оператор рассматривался в ряде работ [37–40]. В постоянном магнитном поле поляризационный оператор можно представить в виде разложения по базису из собственных векторов [39], построенных из обезразмеренного тензора электромагнитного поля, $\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$, и 4-вектора импульса фотона, q_α:

$$\begin{gathered} b_\mu^{(1)} = (\varphi q)_\mu, \qquad b_\mu^{(2)} = (\tilde{\varphi} q)_\mu, \\ b_\mu^{(3)} = q^2\,(\Lambda q)_\mu - q_\mu\, q_\perp^2, \qquad b_\mu^{(4)} = q_\mu, \end{gathered} \tag{29}$$

где $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Собственные векторы и собственные значения поляризационного оператора определяют поляризационные свойства фотонов. При этом физически наблюдаемыми будут три поляризационных состояния фотона, так как моду, соответствующую вектору $b_\mu^{(4)}$, можно устранить с помощью калибровочных преобразований [37].

Строго говоря, поляризационный оператор фотона с учетом плазмы, построенный в виде разложения по векторам (29), уже не будет иметь диагональный вид. Диагональное представление поляризационный оператор примет в базисе собственных векторов $r_\alpha^{(\lambda)}$ в замагниченной плазме с собственными значениями $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ [37, 41–43]:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(q) = \sum_{\lambda=1}^{3} \mathcal{P}^{(\lambda)}(q)\, \frac{r_\alpha^{(\lambda)} (r_\beta^{(\lambda)})^*}{(r^{(\lambda)})^2}\,, \quad r_\beta^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{3} A_i^{(\lambda)}\, b_\beta^{(i)}\,, \tag{30}$$

где $A_i^{(\lambda)}$ – некоторые комплексные коэффициенты.

Однако в случае, когда магнитное поле является наибольшим параметром задачи $\beta \gg T^2, \omega^2$ (т.н. поледоминирующая среда) и присутствует зарядово-симметричная плазма, $\mu = 0$, собственные векторы $r_\alpha^{(\lambda)}$ и собственные значения $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ оператора поляризации в плазме, состоящей из электронов и позитронов, находящихся на основном уровне Ландау, в однопетлевом приближении примут вид [37]:

$$r_\alpha^{(1)} = -2q_\perp^2\, b_\alpha^{(1)} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\,, \quad r_\alpha^{(3)} = O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\,, \tag{31}$$

$$r_\alpha^{(2)} = b_\alpha^{(2)} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\,. \tag{32}$$

$$\mathcal{P}^{(1)}(q) = \frac{\alpha}{3\pi}\, q^2\, \mathcal{V} - \frac{\alpha}{3\pi}\, q_\perp^2 + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\,, \tag{33}$$

$$\mathcal{P}^{(2)}(q) = \frac{\alpha}{3\pi}\, q^2\, \mathcal{V} + \frac{2\alpha}{\pi}\, \beta\, \mathcal{D} + O\left(\frac{1}{\beta}\right)\,. \tag{34}$$

$$\mathcal{P}^{(3)}(q) = O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\,, \tag{35}$$

где

$$\mathcal{D} = -\mathcal{J}_1(q_\parallel) - H\left(\frac{q_\parallel^2}{4m_e^2}\right)\,, \tag{36}$$

$$\mathcal{J}_1(q_\parallel) = 2q_\parallel^2\, m_e^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p_z}{E}\, \frac{f_-(p) + f_+(p)}{q_\parallel^4 - 4(pq)_\parallel^2}\,, \tag{37}$$

$$H(z) \;=\; \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{z}{1-z}} - 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1, \tag{38}$$

$$H(z) \;=\; -\frac{1}{2\sqrt{z(z-1)}}\ln\frac{\sqrt{z}+\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}-\sqrt{z-1}} - 1 + \tag{39}$$

$$+\;\frac{i\pi}{2\sqrt{z(z-1)}}, \quad z > 1,$$

$f_{\pm}(p) = [\exp[E/T] - 1]^{-1}$ – функция распределения электронов и позитронов плазмы при $\mu = 0$,

$$\mathcal{V} = \ln{(B/B_e)} - 1.792 + \frac{3}{2}\int\limits_0^1 \mathrm{d}x\,(1-x^2)\,\ln\left[1 - \frac{q^2}{4m_e^2}\,(1-x^2)\right]. \tag{40}$$

Такие условия имеют место в большинстве моделей магнитосфер радиопульсаров и магнитаров [44].

Из выражений (31)–(35) следует, что фотон в пределе сильного магнитного поля, а также зарядово-симметричной плазмы будет описываться такими же векторами поляризации, как и в чистом магнитном поле. Представим их в том виде, в котором это было сделано в работе [45]:

$$\varepsilon_\mu^{(1)} = \frac{(q\varphi)_\mu}{\sqrt{q_\perp^2}},\;\; \varepsilon_\mu^{(2)} = \frac{(q\tilde{\varphi})_\mu}{\sqrt{q_{\shortparallel}^2}}. \tag{41}$$

Эти поляризационные состояния мы будем называть мода 1 и мода 2 соответственно. В литературе используются разные обозначения для этих мод. Например, в работе [46] это моды $\|$ и $\perp$ в чистом магнитном поле, в работе [47] эти состояния соответствуют X- и O-модам, а в работе [2] – E- и O-модам.

Как известно [37], закон дисперсии для фотона моды 1 в пределе сильного магнитного поля мало отличается от закона дисперсии в замагниченном вакууме $q^2 = 0$. С другой стороны, для фотона моды 2 дисперсия будет значительно отличаться от вакуумного закона дисперсии и будет определяется

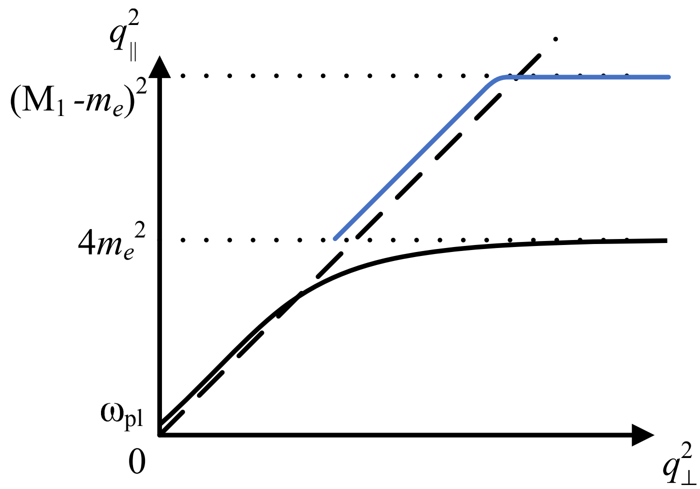

Рис. 1: Закон дисперсии моды 2 в зарядово-симметричной плазме в пределе сильного магнитного поля, $B \gtrsim B_e$, изображен сплошными линиями. Штриховой линией изображен вакуумный закон дисперсии, который практически соответствует дисперсии моды 1. Дисперсионные кривые следует продолжить схожим образом на область $q_{\shortparallel}^2 > (M_1 - m_e)^2$

.

соотношением

$$q^2 - \mathcal{P}^{(2)}(q) = 0\,. \tag{42}$$

Также следует отметить, что закон дисперсии значительно отличается от вакуумного для моды 1 и 2 в окрестности так называемых циклотронных резонансов:

$$q_{\shortparallel}^2 = (M_n \pm M_{n'})^2 \tag{43}$$

из-за наличия корневых сингулярностей в собственных значениях поляризационного оператора, $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ (за исключением точки $q_{\parallel}^2 = 4m_e^2$ для моды 1). Поэтому в этих областях становится важным учет радиационных поправок к собственным значениям поляризационного оператора в замагниченной плазме. Этот учет приводит к перенормировке волновых функций фотона

$$\varepsilon_\alpha^{(\lambda)}(q) \to \varepsilon_\alpha^{(\lambda)}\sqrt{Z_\lambda}, \quad Z_\lambda^{-1} = 1 - \frac{\partial \mathcal{P}^{(\lambda)}(q)}{\partial \omega^2}\,. \tag{44}$$

Проведенный анализ позволяет качественно изобразить дисперсию фотона моды 2 (см. рис. 1). Следует отметить, что в плазме существует область с $q^2 > 0$ ниже первого циклотронного резонанса $q_{\shortparallel}^2 = 4m_e^2$. Это связано с наличием плазменной частоты у электронов и позитронов среды, которую можно определить из дисперсионного уравнения 42:

$$\omega_{pl}^2 - \mathcal{P}^{(2)}(\omega_{pl}, \mathbf{k} \to 0) = 0. \tag{45}$$

Наличие плазменной частоты приводит к изменению кинематики процессов, например, становится кинематически возможен канал расщепления фотона $\gamma_2 \to \gamma_1\gamma_1$ в то время, как каналы $\gamma_1 \to \gamma_1\gamma_2$, $\gamma_2 \to \gamma_2\gamma_2$ в плазме подавлены [48]. Для фотона моды 1 значение ω_{pl} также присутствует, но оно пренебрежимо мало.

Пропагатор в координатном пространстве можно представить следующим образом:

$$G_{\mu\nu}(X) = \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} G_{\mu\nu}(q) e^{-\mathrm{i}qX}\,, \tag{46}$$

где

$$G_{\mu\nu}(q) = \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{b_\mu^{(\lambda)} b_\nu^{(\lambda)}}{(b^{(\lambda)})^2} \cdot \frac{1}{q^2 - \mathcal{P}^{(\lambda)}(q)} \tag{47}$$

– фурье-образ пропагатора, который можно получить из уравнения Дайсона:

$$(q^2 g_{\mu\rho} - q_\mu q_\nu) D^\rho{}_\nu(q) - \mathcal{P}_{\mu\rho}(q) D^\rho{}_\nu(q) = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\,. \tag{48}$$

Таким образом, поведение пропагатора фотона определяется аналитическими свойствами поляризационного оператора.

4 Резонансные двухвершинные процессы

4.1 Резонанс на виртуальном фотоне.

4.2 Резонанс на виртуальном электроне (фермионе).

Одним из важных двухвершинных процессов, в котором имеется внутренняя электронная линия, является комптоновский процесс. Этому процессу посвящено огромное количество работ. Здесь отметим наиболее важные из них. Так, сечение комптоновского рассеяния в магнитном поле без плазмы в нерелятивистском пределе было получено в работах [49,50] для случая, когда начальный и конечный электроны занимают основной уровень Ландау. Для релятивистского случая комптоновский процесс в магнитном поле рассматривался в работах [51, 52]. Однако полученные выражения для сечения комптоновского процесса являются достаточно сложными для численных расчетов. Поэтому в работе [25] было получено приближенное выражение для сечения в случае, когда электроны движутся вдоль магнитного поля, что важно в приложении к физике радиопульсаров и магнитаров.

Реакция комптоновского процесса в нерелятивистском пределе как в сильном магнитном поле, так и в замагниченной плазме рассматривалась в работе [53]. Однако при значениях магнитного поля $B > 10^{12}$ Гс учет релятивистских эффектов становится существенным, что было отмечено в ряде работ [29, 45, 47, 54].

В результатах, полученных в работах [29, 45, 47, 54], сечение рассеяния становится бесконечным на циклотронных резонансах вследствие предположения о большом времени жизни виртуальных частиц. Поэтому полученные в этих работах результаты будут справедливы только в нерезонансной области энергии фотонов. Для точного вычисления сечения комптоновского рассеяния вблизи циклотронных резонансов требуется ввести полную ширину изменения состояния электрона. В случае томсоновского рассеяния [53], когда присутствует лишь одна резонансная частота и сечение не зависит от спина, ввести полную ширину относительно просто [**?**]. Однако при рассмотрении комптоновского рассеяния на высоких энергиях сильных магнитных полях, требуется использовать релятивистсткую квантовую электродинамику. В результате выражение для сечения становится очень громоздким, поскольку имеется бесконечное число резонансов, содержащихся в сумме по всем промежуточным виртуальным состояниям. Изначально для учета конечных резонансных пиков использовались усредненные по спину ширины распада [25]. Как было указано в работе [29], такой подход не является точным, поскольку усреднение по спину некорректно учитывает спиновую зависимость временного распада, что приводит к неверному значению в точке резонанса. Сечение рассеяния с правильным учетом ширины распада виртуальных промежуточных состояний, учитывающее зависимость от спина, было представлено в работе [47]. Однако полное сечение комптоновского рассеяния представляет собой громозкое выражение, что затрудняет использование его, например, в моделях переноса излучения. Для решения этой задачи было выполнено множество упрощений. Так, в работе [25] была использована аппроксимация сечения рассеяния с учетом резонанса в ультрарелятивистском пределе для случая сильного магнитного поля $B > 0.1B_e$. В точке циклотронного резонанса виртуальный электрон становится реальным, поэтому комптоновское рассеяние становится процессом первого порядка. В работе [23] исследовался вопрос аппроксимации комптоновского сечения с помощью одновершинного процесса поглощения для магнитных полей $B \sim 0.1B_e$. Различие между одновершинным процессом поглощения и комптоновским процессом становится существенным на высших циклотронных резонансах из-за вклада нерезонансного рассеяния. Особенно существенно это при малых углах между импульсом фотона и направлением магнитного поля, поскольку в этом случае резонансы уширяются. Также в сильных магнитных полях аппроксимация одновершинным процессом работает хуже, так как высота резонансов убывает с увеличением его номера.

Иной подход к аналитическому рассмотрению комптоновского процесса с учетом резонанса на виртуальном электроне является предположение узкого резонансного пика. Такой метод рассматривался в работе [55]. Как было показано в данной работе, предположение узкого резонансного пика позволяет аппроксимировать область резонанса дельта-функцией, что позволяет упростить, например, решение задачи переноса излучения.

В этом разделе рассмотрим процесс рассеяния фотонов на электронах сильно замагниченной (величина магнитного поля является максимальным параметром, то есть $\beta \gg T^2, \omega^2, E^2$) равновесной плазмы с нулевым химическим потенциалом, μ=0.

Эффективный лагранжиан взаимодействия фермиона f с обобщенными

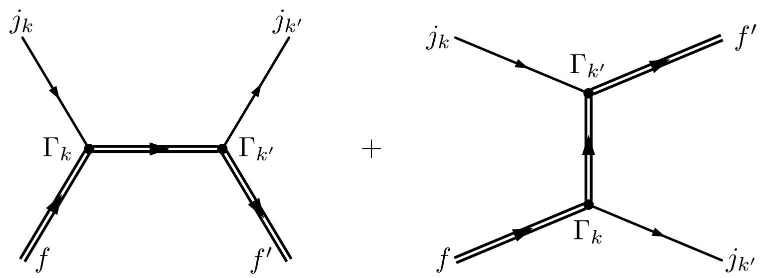

Рис. 2: Диаграммы Фейнмана для реакции $jf \to j'f'$. Двойные линии означают, что влияние внешнего поля на начальное и конечное состояния фермионов и на фермионный пропагатор учтено точно.

токами j можно найти в работе [56]. Этот лагранжиан задает обширный класс взаимодействий. Так как в данном разделе будет рассматриваться комптоновский процесс рассеяния фотона на электроне, то необходимо построить лагранжиан электромагнитного взаимодействия:

$$\mathcal{L}(X) \;=\; -e[\bar{\psi}_f(X)\gamma^\mu A_\mu^{(\lambda)}(X)\psi_f(X)]\,; \tag{49}$$

Комптоновский процесс в древесном приближении описывается диаграммами Фейнмана, представленными на рис. 2. Соответствующий S-матричный элемент, с учетом лагранжиана (49) может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} S^{s's}_{\gamma^{(\lambda)}e\to\gamma^{(\lambda')}e'} \;&=\; -e^2\int \mathrm{d}^4X\mathrm{d}^4Y A_\mu^{(\lambda)}(X)A_{\mu'}^{(\lambda')}(Y)\,\left[\bar{\Psi}^{s'}_{p',\ell'}(Y)\gamma_{\mu'}S(Y,X)\gamma_\mu\Psi^s_{p,\ell}(X)\right] + \\ &+\;\; (A_\mu^{(\lambda)},\gamma_\mu \leftrightarrow A_{\mu'}^{(\lambda')},\gamma_{\mu'})\,. \end{aligned} \tag{50}$$

Здесь $p^\mu = (E_\ell, \mathbf{p})$ и $p'^\mu = (E'_{\ell'}, \mathbf{p}')$ - четырехмерные векторы энергии-импульса начального и конечного фермиона, находящихся на произвольных уровнях Ландау ℓ и ℓ' соответственно, $\Psi^s_{p,\ell}(X)$ - волновые функции фермионов в присутствии внешнего магнитного поля 10, s и s' обозначают поляризационные состояния начального и конечного фермиона соответственно, $S(Y,X)$ – пропагатор фермиона во внешнем магнитном поле 23.

Токи $A_\mu^{(\lambda)}(X)$ и $A_{\mu'}^{(\lambda')}(Y)$, в свою очередь, удобно представить в виде плосковолновых решений с амплитудами $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q)$ и $\varepsilon_{\mu'}^{(\lambda')}(q')$:

$$A_\mu^{(\lambda)}(X) = \frac{e^{-\mathrm{i}(qX)}}{\sqrt{2q_0V}}\,\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(q)\,, \quad q^\alpha = (q_0, \boldsymbol{q})\,, \tag{51}$$

$$A_{\mu'}^{(\lambda')}(Y) = \frac{e^{\mathrm{i}(q'Y)}}{\sqrt{2q_0'V}}\,\varepsilon_{\mu'}^{(\lambda')}(q')\,, \quad q'^{\alpha} = (q_0', \boldsymbol{q}')\,, \tag{52}$$

где $V = L_x L_y L_z$ – нормировочный объем.

С учетом этих замечаний, подставим решения (10), фурье-образы токов (51), пропагатор (23) в (50). Проинтегрировав полученный результат по $\mathrm{d}X_0\mathrm{d}X_2\mathrm{d}X_3$ и $\mathrm{d}Y_0\mathrm{d}Y_2\mathrm{d}Y_3$, представим S-матричный элемент в следующем виде:

$$\mathcal{S}^{s's}_{\gamma^{(\lambda)}e\to\gamma^{(\lambda')}e'} = \frac{\mathrm{i}(2\pi)^3\delta^{(3)}_{0,y,z}(P-p'-q')}{\sqrt{2q_0V2q_0'V2E_\ell L_yL_z2E'_{\ell'}L_yL_z}}\,\mathcal{M}^{s's}_{\gamma^{(\lambda)}e\to\gamma^{(\lambda')}e'}\,, \tag{53}$$

где $\delta^{(3)}_{0,y,z}(P-p'-q') = \delta(P_0-E'_{\ell'}-q_0')\delta(P_y-p_y'-q_y')\delta(P_z-p_z'-q_z')$,

$$\mathcal{M}^{s's}_{\gamma^{(\lambda)}e\to\gamma^{(\lambda')}e'} \simeq \mathrm{i}e^2\varepsilon_{\mu'}^{(\lambda')}(q')\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(q)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s''}\int \mathrm{d}X_1\mathrm{d}Y_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}X_1q_x+\mathrm{i}Y_1q_x'}\times \tag{54}$$

$$\times\frac{\bar{\phi}^{s'}_{p',\ell'}(Y_1)\gamma_{\mu'}\phi^{s''}_{P,n}(Y_1)\bar{\phi}^{s''}_{P,n}(X_1)\gamma_{\mu}\phi^{s}_{p,\ell}(X_1)}{P_{\parallel}^2-M_n^2+\mathrm{i}\,\Im^{s''}_{\Sigma}(P)}+$$

$$+(\varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}(q),\gamma_\mu,P,q\leftrightarrow\varepsilon_{\mu'}^{(\lambda')}(q'),\gamma_{\mu'},P',-q')\,,$$

$P_\alpha = (p+q)_\alpha$, $P'_\alpha = (p-q')_\alpha$, $\alpha = 0,2,3$.

Обсудим, при каких условиях амплитуда (54) будет иметь резонансный характер. Если выполняется условие $\ell,\ell' \geqslant n$, то в этом случае у пропагатора фермиона существуют полюс, соответствующий тому, что виртуальная частица становится реальной, то есть выполняется равенство $P_{\parallel}^2 - M_n^2 = 0$. При условии $\ell,\ell' < n$ полюса, отвечающие за резонансы в пропагаторе, отсутствуют и резонанс на виртуальном фермионе не наблюдается. Кроме того, кинематический анализ показывает, что вблизи первых циклотронных резонансов основной вклад в амплитуду процесса $jf\to j'f'$ будет давать только первая диаграмма.

В относительно недавней работе [47] исследовался процесс комптоновского рассеяния в магнитных полях, характерных для магнитосфер радиопульсаров и магнитаров $10^{12} - 10^{15}$ Гс. В данной работе был представлен S-матричный элемент и рассчитано сечение рассеяния при условии, что начальный и конечный электроны находятся на основном уровне Ландау. При расчетах учитывался резонанс на виртуальном электроне с учетом пика конечной ширины, полученной с использованием корректных решений уравнения Дирака (10).

Следуя авторам [47], введем сечение процесса $\gamma e \to \gamma e$, просуммированное по поляризациям конечного фотона, а также проинтегрированное по начальным электронам, с функцией распределения $f_-(E_\ell)$ при $\mu = 0$, следующим образом:

$$\sigma^*_\lambda = \frac{1}{\overline{N_e}} \int \frac{\mathrm{d}W_{\gamma^{(\lambda)} e \to \gamma e}}{j} \,, \tag{55}$$

где $j = |(p\tilde{\Lambda}q)|/(E\omega V)$ – плотность потока падающих частиц в продольном по отношению к магнитному полю подпространстве,

$$\overline{N_e} = \frac{N_e}{\beta m} = \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2 - \delta_{\ell,0}) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}p_z}{m} f_-(E_\ell) \,, \tag{56}$$

N_e – концентрация электронов во внешнем магнитном поле. Согласно рисунку 1 раздела 3 для рассматриваемых параметров магнитного поля и плазмы, можно считать, что закон дисперсии как моды 1, так и моды 2 мало отличается от вакуумного. В таком случае параллельную магнитному полю компоненту импульса фотона можно положить $k_z = \omega \sin\theta$, где θ – угол между импульсом фотона и направлением магнитного поля. Как уже отмечалось в разделе 3, перенормировка волновых функций фотонов становится существенной вблизи циклотронных резонансов $q_\parallel^2 \simeq (M_n + M_\ell)^2$, однако при значении магнитного поля $B \simeq 10^{12}$ Гс можно считать, что $Z_{1,2} \simeq 1$.

Результаты численного анализа отношения $\sigma^*_\lambda/\sigma_T$, где $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/(3m^2)$ – томсоновское сечение, представлены на рис. 3– 4. Исходя из полученных результатов, можно с уверенностью сказать, что резонансные пики достаточно

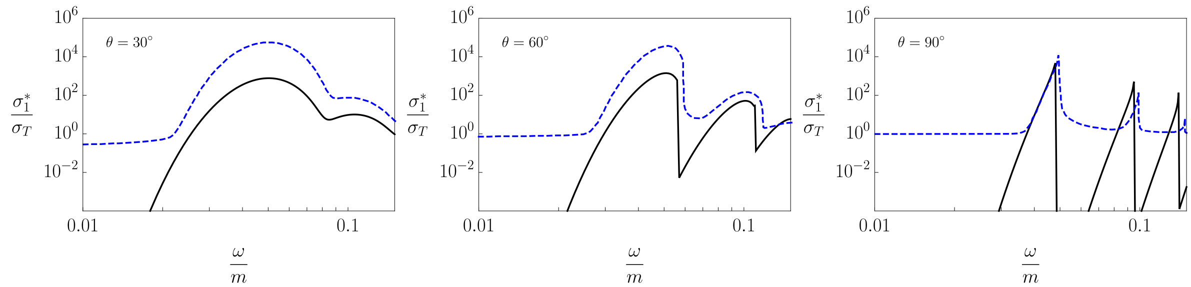

Рис. 3: Сравнение сечения (в единицах σ_T) рассеяния фотона моды 1, $e\gamma^{(1)} \to e\gamma$, полученном в работе [47] (пунктирная линия) и δ-функциональном приближении (сплошная линия) для различных углов θ между импульсом начального фотона и направлением магнитного поля (значения изображены на графиках). $B = 2.2 \times 10^{12}$ Гс, $T = 20$ кэВ, $\mu = 0$. Начальные и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау.

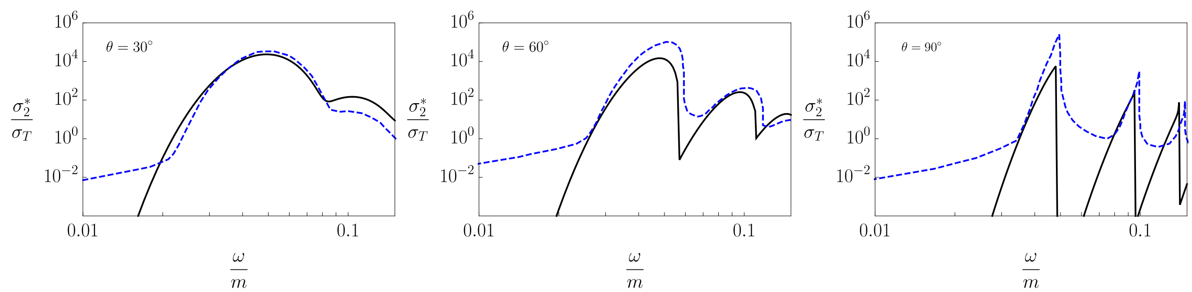

Рис. 4: Сравнение сечения (в единицах σ_T) рассеяния фотона моды 2, $e\gamma^{(2)} \to e\gamma$, полученном в работе [47] (пунктирная линия) и δ-функциональном приближении (сплошная линия) для различных углов θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля. $B = 2.2 \times 10^{12}$ Гс, $T = 20$ кэВ, $\mu = 0$. Все начальные и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау.

сильно зависят от угла начального фотона по отношению к магнитному полю – ширина резонансных пиков увеличивается с уменьшением угла θ между импульсом фотона и направлением магнитного поля.

Аналогичный анализ выполнен для канала $e\gamma^{(2)} \to e\gamma$ и представлен на рис. 3–4.

Рассмотрим теперь ситуацию относительно сильного магнитного поля ($B \sim 10^{15} - 10^{16}$ Гс). В этой области полей дельта-функциональная аппроксимация также согласуется (с точностью до 7% в окрестности пика) с численными результатами, учитывающими конечную ширину резонансного пика. Исследование комптоновского процесса в магнитных полях указанного масштаба было проведено, например, в работе [45]. Полученные в этом исследовании результаты справедливы для области энергий фотонов вдали от резонанса. Поэтому на основе полученных результатов [45] представляет самостоятельный интерес вычислить коэффициент поглощения фотона в пределе сильного поля с учетом возможного резонанса на виртуальном электроне. Как известно, в пределе сильного магнитного поля начальный и конечный электроны будут занимать основной уровень Ландау, а виртуальный – первый уровень Ландау. Это позволяет достаточно просто рассчитать коэффициент поглощения фотона с учетом конечной ширины резонансного пика. Поэтому представляет интерес сравнить коэффициенты поглощения с конечной шириной резонансного пика и дельта-функциональное приближение. С другой стороны, также необходимо учесть еще один эффект, связанный с возможным затуханием фотона. Поскольку в сильном магнитном поле энергии фотона, на которых наблюдается резонанс, выше, чем порог рождения e^+e^- пары для фотона моды 2, то целесообразно рассмотреть только каналы рассеяния $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(1)}$ и $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(2)}$ (см. раздел **??**). Следует отметить, что для фотона моды 1 порог рождения e^+e^- пары заведомо выше рассматриваемой области резонанса.

Следуя работе [45], удобно будет представить коэффициент поглощения фотона (**??**) в сильном магнитном поле в следующем виде:

$$W_{\lambda e \to \lambda' e} = \frac{\beta}{16(2\pi)^4 \omega_\lambda} \int \mid \mathcal{M}_{\lambda \to \lambda'} \mid^2 Z_\lambda Z_{\lambda'} \times \tag{57}$$

$$\times f_E \left[1 - f_{E'}\right] (1 + f_{\omega'}) \delta(\omega_\lambda(\mathbf{k}) + E - \omega_{\lambda'}(\mathbf{k}') - E') \frac{dp_z \, d^3k'}{EE'\omega_{\lambda'}},$$

где Z_λ - перенормировочные множители (44), а $\mathcal{M}_{\lambda \to \lambda'}$ - парциальные амплитуды комптоновского процесса, которые в пределе сильного магнитного поля без учета резонанса имеют вид [45]

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1\to 1} &= \frac{8i\pi\alpha m}{\beta}\frac{(q\varphi q')(q\tilde{\varphi}q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2(-Q_\parallel^2)}}\,,\\
\mathcal{M}_{1\to 2} &= \frac{8i\pi\alpha m}{\beta}\frac{(q\Lambda q')(q\tilde{\Lambda}Q)}{\sqrt{q_\perp^2 q_{\shortparallel}'^2(-Q_{\shortparallel}^2)}}\,,
\end{aligned} \tag{58}$$

где $Q_{\shortparallel}^2 = (q-q')_{\shortparallel}^2 < 0$, $q_\alpha = (\omega, \mathbf{k})$ и $q'_\alpha = (\omega', \mathbf{k}')$ – 4-импульсы начального и конечного фотонов соответственно.

После подстановки (58) в (57) коэффициенты поглощения фотона для каналов $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(1)}$ и $e\gamma^{(1)} \to e\gamma^{(2)}$ могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned}
W_{1\to 1} = \frac{\omega\alpha^2 m^2}{2\beta\pi}\int dQ_0 dk'_z \frac{{k'_z}^2}{(-Q_\parallel^2)^2\varkappa}\theta(-Q_\parallel^2)\theta({q'}_\parallel^2)\times\\
\times\sum_{p_{z_i}} f(E_0^\epsilon)(1-f(E_0^\epsilon+\omega))(1+f_{\omega'})\,,
\end{aligned} \tag{59}$$

$$\begin{aligned}
W_{1\to 2} = \frac{\alpha^2 m^2}{2\beta\pi\omega}\int dQ_0 dk'_z \left(1-\frac{\mathcal{P}^{(2)}(q')}{q_{\shortparallel}'^2}\right)\frac{q_{\shortparallel}'^2-\omega\omega'}{(-Q_\parallel^2)^2\varkappa}\theta(-Q_\parallel^2)\theta({q'}_\parallel^2)\times\\
\times\sum_{p_{z_i}} f_{E_0^\epsilon}(1-f_{E_0^\epsilon+\omega})(1+f_{\omega'})\,,
\end{aligned} \tag{60}$$

где $\theta(x)$ - функция Хевисайда.

Амплитуды $\mathcal{M}_{1\to 1}, \mathcal{M}_{1\to 2}$ в пределе сильного магнитного поля можно представить в следующем виде [57]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1\to 1} =& \frac{8m\pi\alpha}{\sqrt{(-Q_\parallel^2)}}\exp\left[-\frac{q_\perp^2+q_\perp'^2-2i(q\varphi q')}{4\beta}\right]\cdot\frac{1}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2}}\times\\
&\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{((q\Lambda q')-i(q\varphi q'))^n}{(n-1)!(2\beta)^{n-1}}\frac{(q\tilde{\varphi}q')}{(p+q)_\parallel^2-M_n^2+iE_n''\Gamma_n}+\\
&+(q\leftrightarrow -q')\,,
\end{aligned} \tag{61}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1\to 2} =& \frac{8m\pi\alpha}{\sqrt{(-Q_{\parallel}^2)}} \exp\left[-\frac{q_{\perp}^2 + q_{\perp}'^2 - 2i(q\varphi q')}{4\beta}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\parallel}'^2}} \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((q\Lambda q') - i(q\varphi q'))^n}{(n-1)!(2\beta)^{n-1}} \frac{(Q\tilde{\Lambda} q')}{(p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2 + iE_n''\Gamma_n} + \\
& + (q \leftrightarrow -q') \, ,
\end{aligned}
\tag{62}
$$

Как показывает численный анализ, в случае сильно замагниченной горячей зарядово-симметричной плазмы полная ширина поглощения электрона мало отличается от соответствующего выражения в сильном магнитном поле и ультрарелятивистских электронов. Поэтому мы можем выбрать ее в следующей форме [17]:

$$
\begin{aligned}
E_n''\Gamma_n =& \alpha e B \sum_{n'=0}^{n-1} \int_0^{(\sqrt{n}-\sqrt{n'})^2} \frac{dx}{\sqrt{(n+n'-x)^2 - 4nn'}} \times \\
& \times \{(n+n'-x)[\mathcal{I}_{n,n'-1}^2(x) + \mathcal{I}_{n-1,n'}^2(x)] - \\
& - 4\sqrt{nn'}\mathcal{I}_{n,n'}(x)\mathcal{I}_{n-1,n'-1}(x)\} \, .
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Здесь $E_n'' = E + \omega$ – энергия виртуального электрона.

Коэффициент поглощения фотона с учетом конечной ширины поглощения электрона может быть получен подстановкой амплитуд (61) и (62) в (57):

$$
\begin{aligned}
W_{1\to 1} = {} & \frac{\beta\alpha^2 m^2}{\pi\omega}\int dQ_0 dk'_z \frac{1}{(-Q_\parallel^2)^2\varkappa}\exp\left[-\frac{q_\perp^2+q'^2_\perp}{2\beta}\right]\times \\
& \times\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p_{z_i}}\Bigg\{\frac{1}{((n-1)!)^2}\left(\frac{\sqrt{q_\perp^2 q'^2_\perp}}{2\beta}\right)^{2(n-1)}\frac{(qq')_\parallel^2-q_\parallel^2 q'^2_\parallel}{((p+q)_\parallel^2-M_n^2)^2+(E''_n\Gamma_n)^2}+ \\
& +\frac{1}{((n-1)!)^2}\left(\frac{\sqrt{q_\perp^2 q'^2_\perp}}{2\beta}\right)^{2(n-1)}\frac{(qq')_\parallel^2-q_\parallel^2 q'^2_\parallel}{((p-q')_\parallel^2-M_n^2)^2+(E''_n\Gamma_n)^2}- \\
& -2\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{((n-1)!)}\left(\frac{\sqrt{q_\perp^2 q'^2_\perp}}{2\beta}\right)^{n-1} J_{n+n'}\left(\frac{\sqrt{q_\perp^2 q'^2_\perp}}{\beta}\right)\frac{1}{(n'-1)!}\left(\frac{\sqrt{q_\perp^2 q'^2_\perp}}{2\beta}\right)^{n'-1}\times \\
& \times\frac{\Big([(p+q)_\parallel^2-M_n^2][(p-q')_\parallel^2-M_{n'}^2]+E''_n\Gamma_n E''_{n'}\Gamma_{n'}\Big)\cdot\Big((qq')_\parallel^2-q_\parallel^2 q'^2_\parallel\Big)^2}{[((p-q')_\parallel^2-M_n^2)^2+(E''_n\Gamma_n)^2][((p+q)_\parallel^2-M_{n'}^2)^2+(E''_n\Gamma_{n'})^2]}\Bigg\}\times \\
& \times f_E(1-f_{E'})(1+f_{\omega'})\,,
\end{aligned}
\tag{64}
$$

$$
\begin{aligned}
W_{1\to 2} = {} & \frac{\beta\alpha^2 m^2}{\pi\omega}\int dQ_0 dk'_z \frac{1}{(-Q_{\parallel}^2)^2\varkappa}\exp\left[-\frac{q_{\perp}^2+q'^2_{\perp}}{2\beta}\right]\cdot\frac{q'^2_{\perp}}{q'^2_{\parallel}}\times \\
& \times\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p_{z_i}}\left\{\frac{1}{((n-1)!)^2}\left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q'^2_{\perp}}}{2\beta}\right)^{2(n-1)}\frac{1}{((p+q)_{\parallel}^2-M_n^2)^2+(E''_n\Gamma_n)^2}\times\right. \\
& \times(q_{||}^2-(qq')_{||})^2+\frac{1}{((n-1)!)^2}\left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q'^2_{\perp}}}{2\beta}\right)^{2(n-1)}\times \\
& \times\frac{1}{((p-q')_{\parallel}^2-M_n^2)^2+(E''_n\Gamma_n)^2}(q'^2_{||}-(qq')_{||})^2- \\
& -2\sum_{n'=1}^{\infty}\frac{1}{((n-1)!)}\left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q'^2_{\perp}}}{2\beta}\right)^{n-1}J_{n+n'}\left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q'^2_{\perp}}}{\beta}\right)\frac{1}{(n'-1)!}\left(\frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q'^2_{\perp}}}{2\beta}\right)^{n'-1}\times \\
& \times\frac{[(p+q)_{\parallel}^2-M_n^2][(p-q')_{\parallel}^2-M_{n'}^2]+E''_n\Gamma_n E''_{n'}\Gamma_{n'}}{[((p-q')_{\parallel}^2-M_n^2)^2+(E''_n\Gamma_n)^2][((p+q)_{\parallel}^2-M_{n'}^2)^2+(E''_n\Gamma_{n'})^2]}\times \\
& \left.\times(q'^2_{||}-(qq')_{||})\cdot(q_{||}^2-(qq')_{||})\right\}\times \\
& \times f_E(1-f_{E'})(1+f_{\omega'}),
\end{aligned}
\tag{65}
$$

где $J_n(x)$ – функция Бесселя целого индекса, $\varkappa=\sqrt{1-4m^2/Q_{\parallel}^2}$, а p_{z_i} – корни уравнения $Q_0+E_0-E'_0=0$:

$$
p_{z_i}=-\frac{Q_z}{2}\pm Q_0\varkappa\,. \tag{66}
$$

Имеет смысл провести сравнительный анализ результатов работы [45] без учета вклада конечной ширины поглощения электрона с резонансным случаем (64) и (65) для случая зарядово-симметричной плазмы и поперечного направления импульса фотона по отношению к внешнему магнитному полю для различных значений величины магнитного поля, температуры и энергии начального фотона.

На рис. 5–6 показана вероятность рассеяния при температуре $T=1$ МэВ и величине магнитного поля $B=200B_e$ и $B=20B_e$ соответственно. Как видно из рис. 5-6, вероятность рассеяния для канала $\gamma^{(1)}e\to\gamma^{(1)}e$ согласуется

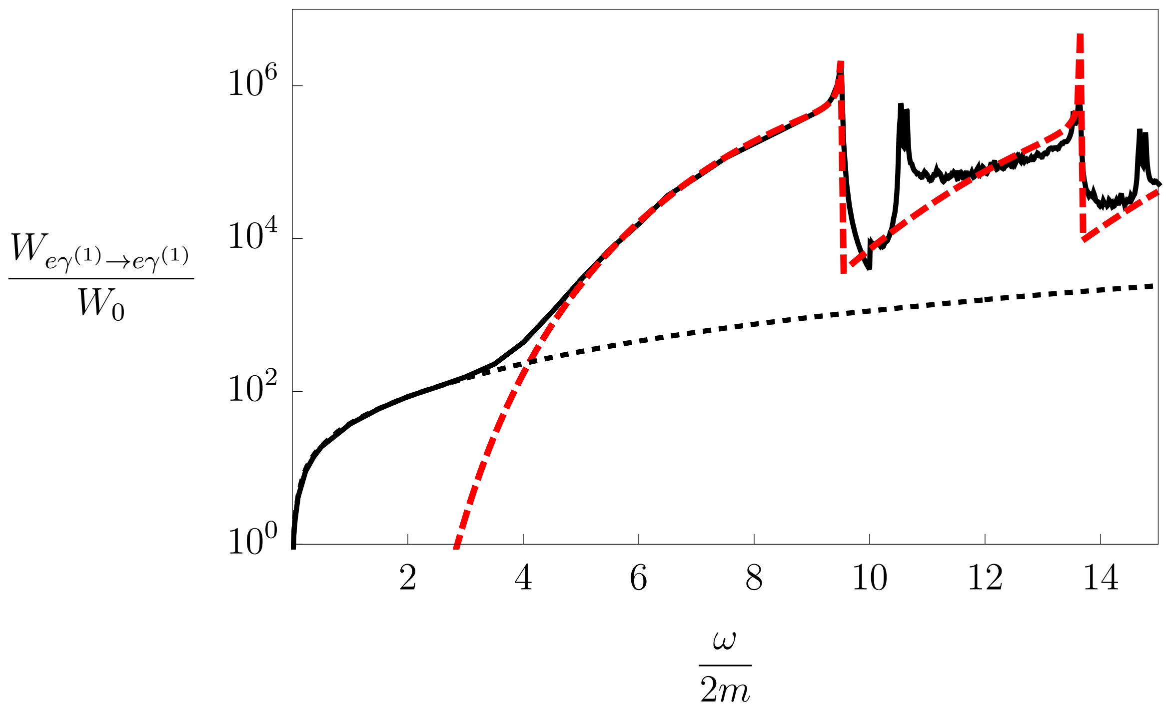

Рис. 5: Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала $e\gamma^(1) \to e\gamma^(1)$ при поле $B = 200B_e$ и температуре T=1 МэВ. Сплошной и штриховой линией изображен график с учетом резонанса и без него соответственно. δ-функциональная аппроксимация показана пунктиром. Здесь $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2$ см$^{-1}$.

с соответствующими результатами для предела сильного поля и отсутствия резонанса, полученными в работе [45] вплоть до энергий начального фотона $\omega = 3$ МэВ для поля $B = 200B_e$ и $\omega = 0.3$ МэВ для поля $B = 20B_e$. Поэтому результаты работы [45] нужно ограничить до соответствующих энергий начального фотона. Аналогичная ситуация наблюдается и для канала $\gamma^{(1)}e \to \gamma^{(2)}e$ (см. рис. 7-8). Из рис. 6 и 8 наиболее ярко видно завышение коэффициента поглощения даже при относительно малых энергиях начального фотона. Этот факт связан с тем, что в пределе сильного магнитного поля [45] авторы пренебрегали знаменателем в пропагаторе электрона. Следует отметить что при относительно малых температурах $T \lesssim 50$ кэВ с тем же магнитным полем δ-аппроксимация работает хуже.

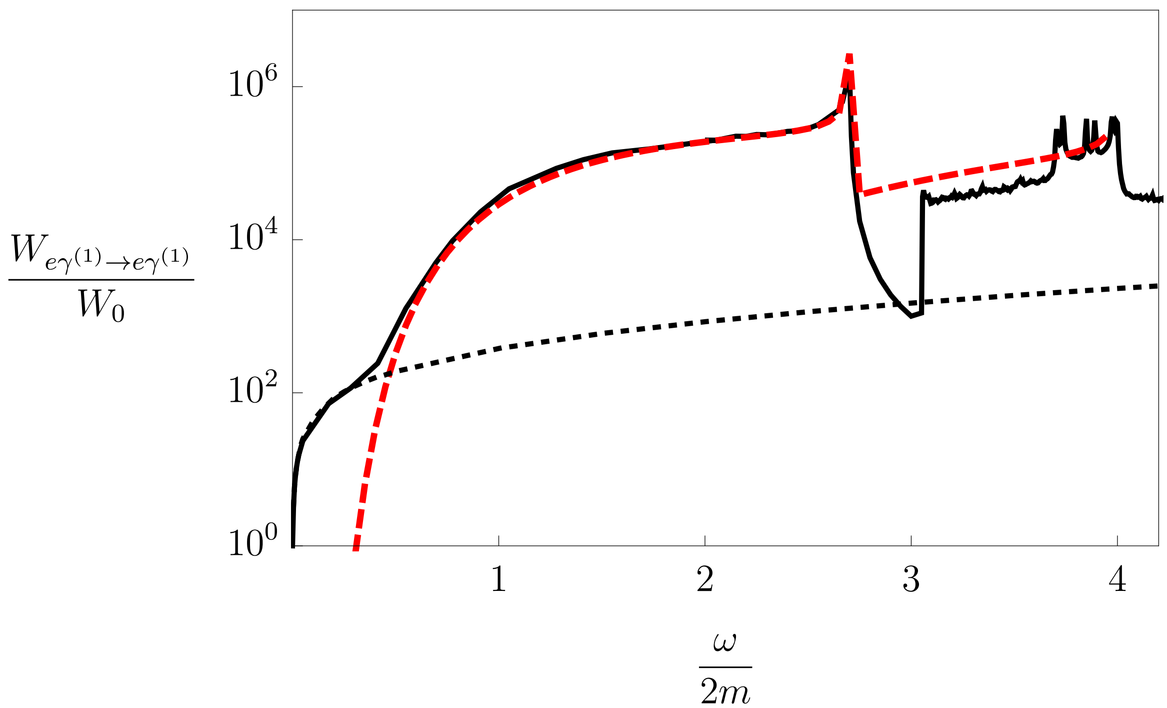

Рис. 6: Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала $e\gamma^(1) \to e\gamma^(1)$ при поле $B = 20B_e$ и температуре T=1 МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 5.

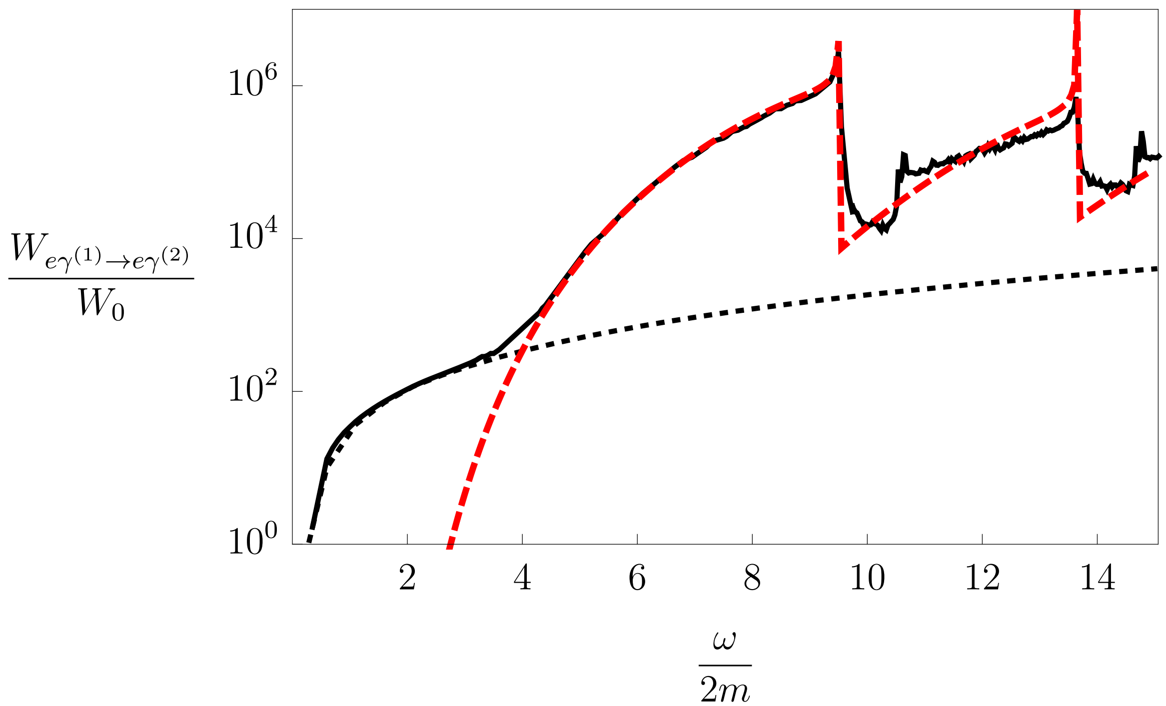

Рис. 7: Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала $e\gamma^(1) \to e\gamma^(2)$ при поле $B = 200B_e$ и температуре T=1 МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 5.

4.3 Резонанс на виртуальном электроне и виртуальном фотоне.

5 Сингулярности в фазовых объемах одновершинных процессов и методы их устранения.

6 Заключение

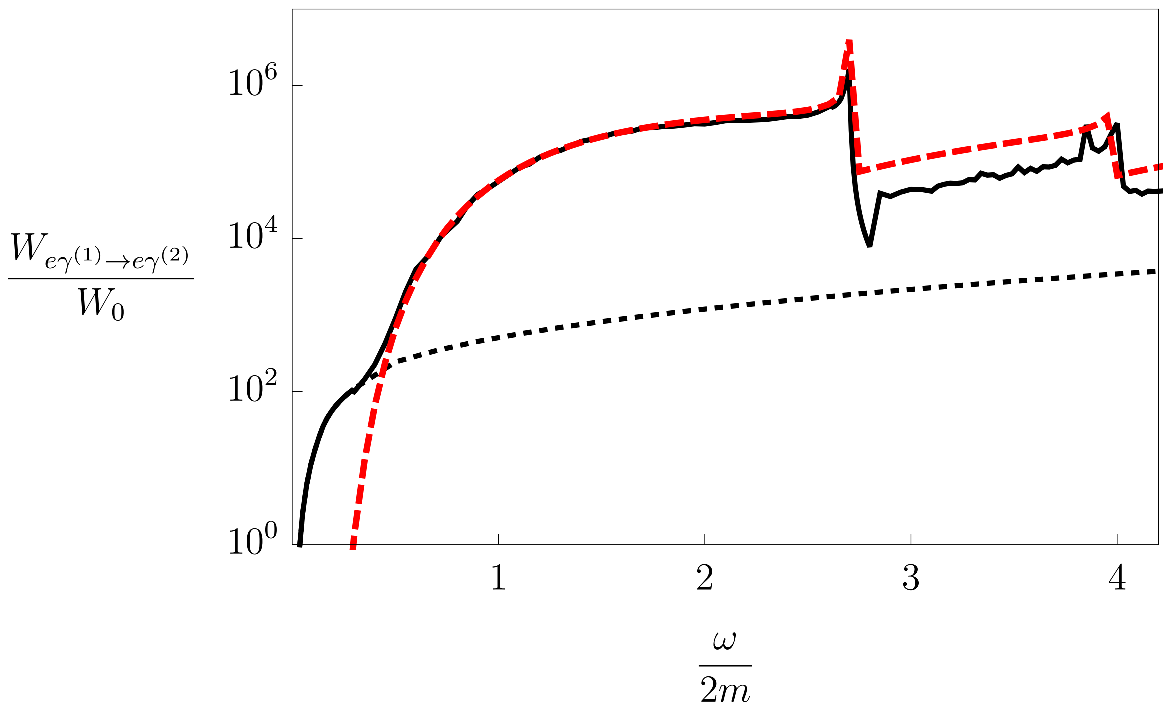

Рис. 8: Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала $e\gamma^(1) \to e\gamma^(2)$ при поле $B = 20B_e$ и температуре T=1 МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 5.

Список литературы

[1] Thompson C., Duncan R. C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - I. Radiative mechanism for outbursts // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 1995. Vol. 275. P. 255–300.

[2] Thompson C., Duncan R. C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars. II. Quiescent neutrino, X-Ray, and Alfven wave emission // Astrophys. J. 1996. Vol. 473. P. 322–342.

[3] Thompson C., Lyutikov M., Kulkarni S. R. Electrodynamics of magnetars: implications for the persistent x-ray emission and spindown of the soft gamma repeaters and anomalous x-ray pulsars // Astrophys. J. 2002. Vol. 574, no. 1. P. 332–355.

[4] Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Влияние фотон-нейтринных процессов на остывание магнитара // ЖЭТФ. 2008. Т. 134, № 4. С. 627–636.

[5] Бисноватый-Коган Г. С., Чечеткин В. М. Неравновесные оболочки нейтронных звезд, их роль в поддержании рентгеновского излучения и нуклеосинтезе // Усп. физ. наук. 1979. Т. 127, № 2. С. 263–296.

[6] Kouveliotou C. et al. An X-ray pulsar with a superstrong magnetic field in the soft gamma-ray repeater SGR 1806-20. // Nature. 1998. Vol. 393. P. 235–237.

[7] Kouveliotou C., Strohmayer T., Hurley K. et al. Discovery of a magnetar associated with the soft gamma repeater SGR 1900+14 // Astrophys. J. 1999. Vol. 510. P. L115–118.

[8] Gavriil F. P., Kaspi V. M., Woods P. M. Magnetar - like x-ray bursts from an anomalous x-ray pulsar // Nature. 2002. Vol. 419. P. 142–144.

[9] Ibrahim A. I., Safi-Harb S., Swank J. H. et al. Discovery of cyclotron resonance features in the soft gamma repeater SGR 1806-20 // Astrophys. J. 2002. Vol. 574. P. L51–L55.

[10] Ibrahim A. I., Swank J. H., Parke W. New evidence for proton cyclotron resonance in a magnetar strength field from SGR 1806-20 // Astrophys. J. 2003. Vol. 584. P. L17–L22.

[11] Olausen S. A., Kaspi V. M. The McGill magnetar catalog // Astrophys. J. Suppl. 2014. Vol. 212, no. 1. P. 6.

[12] Melrose D. B., Parle A. J. Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. I Electron States // Aust. J. Phys. 1983. Vol. 36. P. 755–774.

[13] Соколов А. А., Тернов И. М. Релятивистский электрон. Москва: Наука, 1983. 304 с.

[14] Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003. 120 p.

[15] Bhattacharya K., Pal P. B. Inverse beta decay of arbitrarily polarized neutrons in a magnetic field // Pramana J. Phys. 2004. Vol. 62. P. 1041–1058.

[16] Balantsev I. A., Popov Yu. V., Studenikin A. I. On the problem of relativistic particles motion in strong magnetic field and dense matter // J. Phys. 2011. Vol. A44. P. 255301 (1–13).

[17] Kuznetsov A., Mikheev N. Electroweak processes in external active media. 2013. Vol. 252. P. pp 1–271.

[18] Johnson M. H., Lippmann B. A. Motion in a constant magnetic field // Physical Review. 1949. Vol. 76, no. 6. P. 828–832.

[19] Соколов А. А., Тернов И. М. Синхротронное излучение. М.: Наука, 1966. 228 с.

[20] Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001. 784 с.

[21] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Нерелятивисткая теория. Москва: Наука, 1989. 768 с.

[22] Canuto V. Quantum processes in strong magnetic fields // Ann. N. Y. Acad. Sci. 1975. Vol. 257, no. 1. P. 108–126.

[23] Harding A. K., Daugherty J. K. Cyclotron Resonant Scattering and Absorption // Astrophys. J. 1991. Vol. 374. P. 687–699.

[24] Suh I.-S., Mathews G. J. Weak reaction freeze-out constraints on primordial magnetic fields // Phys. rev. D. 1999. Vol. 59, no. 12. P. 123002.

[25] Gonthier P. L., Harding A. K., Baring M. G. et al. Compton Scattering in Ultrastrong Magnetic Fields: Numerical and Analytical Behavior in the Relativistic Regime // Astrophys. J. 2000. Vol. 540, no. 2. P. 907–922.

[26] Jones P. B. Electron-positron bremsstrahlung and pair creation in very high magnetic fields // Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 2010. Vol. 409, no. 4. P. 1719–1727.

[27] Melrose D. B. Quantum kinetic theory for unmagnetized and magnetized plasmas // Rev. Mod. Plasma Phys. 2020. Vol. 4, no. 8.

[28] Graziani C. Strong-Field Cyclotron Scattering. I. Scattering Amplitudes and Natural Line Width // Astrophys. J. 1993. Vol. 412. P. 351–362.

[29] Gonthier P. L., Baring M. G., Eiles M. T. et al. Compton scattering in strong magnetic fields: Spin-dependent influences at the cyclotron resonance // Phys. Rev. 2014. Vol. D90, no. 4. P. 043014.

[30] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 1108 с.

[31] Schwinger J. On Gauge Invariance and Vacuum Polarization // Phys. Rev. 1951. — Jun. Vol. 82. P. 664–679.

[32] Ритус В. И. Радиационные эффекты и их усиление в интенсивном электромагнитном поле // ЖЭТФ. 1969. Т. 57, № 6. С. 2176–2188.

[33] Jancovici B. Radiative Correction to the Ground-State Energy of an Electron in an Intense Magnetic Field // Phys. Rev. 1969. Vol. 187. P. 2275–2276.

[34] Борисов А. В., Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Эминов П. А. Фотоны и лептоны во внешних полях при конечных температуре и плотности // УФН. 1997. Т. 167, № 3. С. 241–267.

[35] Жуковский В. Ч., Мидодашвили П. Г., Эминов П. А. Мнимая часть массового оператора электрона в постоянном поле при конечной температуре и плотности // Журн. эксперим. и теор. физ. 1994. Т. 106, № 4. С. 929–935.

[36] Weldon H. A. Simple rules for discontinuities in finite temperature Field Theory // Phys. Rev. 1983. Vol. D28. P. 2007–2037.

[37] Шабад А. Е. Поляризация вакуума и квантового релятивистского газа во внешнем поле // Тр. ФИАН СССР “Поляризационные эффекты во внешних калибровочных полях”. 1988. Т. 192. С. 5–152.

[38] Tsai W. Y. Vacuum polarization in homogeneous magnetic fields // Phys. Rev. 1974. Vol. D10, no. 8. P. 2699–2702.

[39] Баталин И. А., Шабад А. Е. Функция Грина фотона в постоянном однородном электромагнитном поле общего вида // ЖЭТФ. 1971. Т. 60, № 3. С. 894–900.

[40] Скобелев В. В. Поляризационный оператор фотона в сверхсильном магнитном поле // Изв. вузов. Физика. 1975. № 10. С. 142–143.

[41] Перес Рохас У. Поляризационный оператор электрон-позитронного газа в постоянном внешнем магнитном поле // ЖЭТФ. 1979. Т. 76, № 1. С. 3–17.

[42] Peres Rojas H., Shabad A. E. Absorption and dispersion of electromagnetic eigenwaves of electron-positron plasma in a strong magnetic field // Ann. Phys. (N.Y.). 1982. Vol. 138. P. 1–35.

[43] Михеев Н. В., Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Фоторождение нейтрино на электроне в плотной замагниченной среде // ЖЭТФ. 2014. Т. 146, № 2. С. 289–296.

[44] Beloborodov A. M., Thompson C. Corona of magnetars // Astrophys. J. 2007. Vol. 657, no. 2. P. 967–993.

[45] Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A. Compton effect in strongly magnetized plasma // Int. J. Mod. Phys. 2009. Vol. A24. P. 3995–4008.

[46] Adler S. L. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. // Annals of Physics. 1971. Vol. 67. P. 599–647.

[47] Mushtukov A. A., Nagirner D. I., Poutanen J. Compton scattering S-matrix and cross section in strong magnetic field // Phys. Rev. 2016. Vol. D93, no. 10. P. 105003.

[48] Румянцев Д. А., Чистяков М. В. Влияние сильно замагниченной плазмы на процесс расщепления фотона // ЖЭТФ. 2005. Т. 128, № 4. С. 740–751.

[49] Herold H. Compton and Thomson scattering in strong magnetic fields // Phys. Rev. 1979. Vol. D19. P. 2868.

[50] Melrose D. B., Parle A. J. Quantum Electrodynamics in Strong Magnetic Fields III. Electron-photon interactions // Aust. J. Phys. 1983. Vol. 36. P. 799.

[51] Daugherty J. K., Harding A. K. Compton Scattering in Strong Magnetic Fields // Astrophys. J. 1986. Vol. 309. P. 362.

[52] Bussard R. W., Alexander S. B., Meszaros P. One- and two-photon Compton scattering in strong magnetic fields // Phys. Rev. D. 1986. Vol. 34. P. 440–451.

[53] Canuto V., Lodenquai J., Ruderman M. Thomson Scattering in a Strong Magnetic Field // Phys. Rev. D. 1971. Vol. 3. P. 2303–2308.

[54] Bulik T., Miller M. C. Spectral effects of the vacuum resonance in soft gamma-ray repeaters // Mon. Not. R. Astron. Soc. 1997. Vol. 288, no. 3. P. 596–608.

[55] Румянцев Д. А., Шленев Д. М., Ярков А. А. Резонансы в комптоноподобных процессах рассеяния во внешней замагниченной среде // ЖЭТФ. 2017. Т. 152, № 3. С. 483–494.

[56] Kuznetsov A. V., Rumyantsev D. A., Shlenev D. M. Generalized two-point tree-level amplitude $jf \to j'f'$ in a magnetized medium // Int. J. Mod. Phys. 2015. Vol. A30, no. 11. P. 1550049.

[57] Kuznetsov A. V., Rumyantsev D. A., Shlenev D. M. Generalized two-point tree-level amplitude $jf \to j'f'$ in a magnetized medium // Int. J. Mod. Phys. 2015. Vol. A30, no. 11. P. 1550049.