

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»

На правах рукописи

Ярков Алексей Анатольевич

# РЕЗОНАНСЫ В КОМПТОНОПОДОБНЫХ ПРОЦЕССАХ РАССЕЯНИЯ ВО ВНЕШНЕЙ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор физ.-мат. наук

Румянцев Дмитрий Александрович

Ярославль – 2023

# Оглавление

Введение . . . . .	3
Глава 1. Обобщённые комптоноподобные процессы рассеяния в замагниченной среде с учётом возможного резонанса на виртуальном электро- не . . . . .	12
1.1. Введение . . . . .	12
1.2. Амплитуды реакций вида $jf \rightarrow j'f'$ вблизи резонанса . . . . .	13
1.3. Распространение фотона в замагниченной плазме . . . . .	22
1.4. Реакция резонансного комптоновского рассеяния . . . . .	24
1.5. Заключение . . . . .	37
Глава 2. Резонансные квантовые процессы во внешней активной среде . . . . .	39
2.1. Введение . . . . .	39
2.2. Распространение фотона в замагниченной среде . . . . .	40
2.3. Численный анализ . . . . .	44
2.4. Заключение . . . . .	45
Глава 3. Решение кинетического уравнения с учетом резонанс- ного комптоновского рассеяния. . . . .	46
Приложение А. Точный пропагатор фермиона в магнитном поле	51
Приложение Б. Результаты для $\mathcal{T}_k^{s''s}$ . . . . .	53
Список литературы . . . . .	56

## Введение

**Актуальность темы исследования.** В последние десятилетия одной из наиболее бурно развивающихся физических наук является астрофизика элементарных частиц, лежащая на стыке физики элементарных частиц, астрофизики и космологии. Существенным стимулом её развития стало понимание важной роли квантовых процессов в динамике астрофизических объектов. Экстремальные значения физических параметров – температуры, плотности, интенсивности магнитного поля, компонентного состава, – возникающие при взрыве сверхновой и в аккреционном диске керровской чёрной дыры, позволяют характеризовать эти объекты как уникальные естественные лаборатории для изучения физических свойств плазмы при условиях, которые до настоящего времени не могли быть реализованы в наземных экспериментах. В последние годы появились две дополнительные возможности для проведения физических исследований сверхсильных магнитных полей: во-первых, это эксперименты на коллайдерах при нецентральных соударениях тяжёлых ионов, и во-вторых, это поле электромагнитной волны, полученное сложением полей от системы лазерных установок с экстремально высокой интенсивностью излучения. В связи с этим наблюдается устойчивый интерес к исследованиям взаимодействий элементарных частиц во внешней активной среде.

Одним из таких взаимодействий является активно обсуждаемая в настоящее время в литературе комптоновское рассеяние, которое играет ключевую роль в формировании спектра сильно замагниченных нейтронных звёзд [1]. Этот процесс рассматривался неоднократно, см., например, обзоры [2, 3]. В частности, в работе [2] выражение для амплитуды комптоновского рассеяния для случая, когда начальный и конечный электроны находятся на основном уровне Ландау, было представлено в явном лоренц-инвариантном виде.

Кроме того, в таких условиях представляет интерес рассмотреть процесс затухания фотона за счет реакций поглощения фотона электроном (позитро-

ном),  $\gamma e^{\pm} \rightarrow e^{\pm}$ , но и рождения  $e^+e^-$  - пар,  $\gamma \rightarrow e^+e^-$ , которые являются важными в астрофизике замагниченных нейтронных звёзд [4, 5]. Следует отметить, что выражение для ширины распада в пределе сильно замагниченной плазмы содержит особенности корневого типа в точках циклотронных резонансов. Как подчеркивается в [6], этот факт указывает на невозможность интерпретации заданной ширины распада, рассчитанной по теории возмущений вблизи циклотронных резонансов, как коэффициента затухания. В этом случае основным для определения коэффициента затухания является зависимость волновой функции фотона от времени в присутствии магнитного поля и плазмы.

В качестве полезных для астрофизических приложений является построение функции распределения в сильном магнитном поле с учетом резонанса комптоновского процесса. В частности, в статье [7] исследовался множественный комптоновский процесс в сильном магнитном поле с помощью моделирования Монте Карло, где в качестве результата было показано, что функция распределения фотонов с доплеровским ядром циклотронного резонанса существенно отличается от законченного распределения.

**Степень разработанности темы исследования.** Двухвершинные процессы в активной внешней среде (в электромагнитном поле и/или плазме) исследуются в течение длительного времени. Наиболее общие выражения для амплитуды двухвершинного петлевого процесса  $j \rightarrow f\bar{f} \rightarrow j'$  в постоянном однородном магнитном поле и в скрещенном поле были получены ранее в статье [8], где были рассмотрены всевозможные комбинации скалярного, псевдоскалярного, векторного и аксиально-векторного типов взаимодействий обобщённых токов  $j$  и  $j'$  с фермионами.

Одним из примеров двувершинного процесса в древесном приближении является комптоновское рассеяние как возможный канал формирования радиационного спектра излучения нейтронной звезды. Этот процесс был рассмотрен в ряде работ (см. [9–14]). Однако в данных работах не учитывались дисперсионные свойства фотонов в активной среде. В работе [2] это упущение было

восполнено.

Резонанс на виртуальном фермионе для электродинамического процесса с двумя векторными вершинами,  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , в настоящее время играют ключевую роль при формировании спектров излучения в магнитосферах нейтронных звезд [15, 16]. В этих работах исследование резонанса в реакции  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  проводилось с учетом конечной ширины резонансных пиков, что представляет собой довольно громоздкую вычислительную задачу. С другой стороны, использование  $\delta$ -функциональной аппроксимации пиков позволяет как и упростить вычисления, так и позволяет рассмотреть резонансы в реакциях общего вида  $jf \rightarrow j'f'$ .

Также в сильно замагниченной горячей и плотной электрон-позитронной плазме представляет интерес рассмотреть процесс затухания фотона за счет процесса поглощения фотона электроном (позитроном),  $\gamma e^\pm \rightarrow e^\pm$  и рождения  $e^+e^-$  - пар,  $\gamma \rightarrow e^+e^-$ . Обычно в астрофизике используют выражение для коэффициента поглощения содержащие корневые сингулярности (например [17]). Однако, как показывает анализ, вычисление коэффициента поглощения с учетом неэкспоненциального характера затухания приводит к конечному выражению для коэффициента поглощения фотона в окрестности резонансов.

Решение уравнения переноса является одной из важных задач в астрофизике. Подобная задача рассматривалась в работе [16], в которой приводится уравнение переноса для дальнейшего точного решения. Решение методом Монте-Карло приведено в работе [7]. С другой стороны, представляет интерес аналитически получить решение кинетического уравнения для нахождения функции распределения фотонов двух возможных поляризаций в равновесной электрон-позитронной плазме в относительно сильном магнитном поле с учетом резонанса на виртуальном электроне.

### **Цели и задачи диссертационной работы:**

1. Вычислить коэффициент поглощения фотона в процессе  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  с учётом

резонанса на виртуальном электроде в приближении  $\delta$ -образного пика и сравнить полученные результаты с нерезонансным случаем и с ситуацией резонансного пика конечной ширины.

2. Исследовать процесс затухания электромагнитной волны в сильно замагниченной плазме с учетом процессов поглощения фотона электроном (позитроном)  $\gamma e^{\pm} \rightarrow e^{\pm}$ , и  $e^+e^-$  рождение пары  $\gamma \rightarrow e^+e^-$ .
3. Получить решение кинетического уравнения для функции распределения фотона в замагниченной нерелятивистской плазме в процессе рассеяния  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ .

### **Научная новизна.**

1. Впервые получен коэффициент поглощения фотона в комптоновском процессе в сильно замагниченной зарядово-симметричной плазме для кинематически разрешённых каналов в области резонанса как с учетом конечной ширины резонансного пика, так и с использованием дельта-функциональной аппроксимации. Показано, что дельта-образная аппроксимация резонансного пика хорошо описывает коэффициент поглощения фотона, значительно упрощая дальнейшее решение задачи переноса излучения.
2. Исследован процесс распространения электромагнитной волны в сильно замагниченной, зарядово-симметричной плазме. Впервые показано, что аналогично случаю чистого магнитного поля, процесс затухания фотона в замагниченной плазме имеет неэкспоненциальный характер. Показано, что вычисление коэффициента поглощения с учетом неэкспоненциального характера затухания приводит к конечному выражению для коэффициента поглощения фотона в окрестности циклотронных резонансов.
3. Впервые получено решение кинетического уравнения для нахождения функции распределения фотонов двух возможных поляризаций в равновесной

нерелятивистской электрон-позитронной плазме и в относительно сильном магнитном поле с учетом резонанса на виртуальном электро-не.

**Теоретическая и практическая значимость.** Результаты представляют интерес для дальнейших теоретических исследований в области астрофизики и физики элементарных частиц, когда изучаемые частицы находятся под воздействием внешних экстремальных условий. Также результаты исследования могут быть использованы в образовательных целях как материал для учебной и методической литературы в помощь студентам соответствующих направлений подготовки.

**Методология и методы исследования.** При проведении исследований использовались известные методы квантовой теории поля и теоретические разработки физики элементарных частиц, развитые как для вакуума, так и для внешней активной среды.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Впервые получен коэффициент поглощения фотона в комптоновском процессе  $e\gamma \rightarrow e'\gamma'$  в замагниченной зарядово-симметричной плазме для кинематически разрешённых каналов  $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$  и  $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$  в области резонанса с использованием дельта-функциональной аппроксимации. Показано, что в случае высоких температур ( $T \sim 1$  МэВ), дельта-образная аппроксимация резонансного пика хорошо описывает коэффициент поглощения фотона, значительно упрощая дальнейшее решение задачи переноса излучения.
2. Исследован процесс распространения электромагнитной волны в сильно замагниченной, зарядово-симметричной плазме. Впервые показано, что аналогично случаю чистого магнитного поля, процесс затухания фотона в замагниченной плазме имеет неэкспоненциальный характер. Показано, что вычисление коэффициента поглощения с учетом неэкспоненциального

характера затухания приводит к конечному выражению для коэффициента поглощения фотона в окрестности резонансов.

3. Впервые получено решение кинетического уравнения для нахождения функции распределения фотонов двух возможных поляризаций в равновесной  $e^+e^-$  плазме в относительно сильном магнитном поле в приближении холодной плазмы и с учетом резонанса на виртуальном электроне. Получено квадратурное решение для функции распределения двух возможных поляризаций фотонов.

Представленные результаты являются оригинальными и новыми.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Основные результаты диссертации докладывались лично автором на следующих российских и международных конференциях и семинарах:

1. "Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра" (г. Москва 2018).
2. "Астрофизика высоких энергий сегодня и завтра" (г. Москва 2019).
3. "5th International Conference on Particle Physics and Astrophysics" (г. Москва 2020)
4. "Молодежная конференция по теоретической и экспериментальной физике" (г. Москва 2020)
5. The "International Conference on Quantum Field Theory, High-Energy Physics, and Cosmology" at BLTP, (г. Дубна 2022)
6. "6th international conference on particle physics and astrophysics" (г. Москва 2022)

**Публикации.** Всего по теме диссертации опубликовано N работ:



1. Румянцев Д. А., Шленев Д. М., Ярков А. А. Резонансы в комптоноподобных процессах рассеяния во внешней замагниченной среде // ЖЭТФ. 2017. Т. 152, № 3. С. 483–494.
2. Effect of a strongly magnetized plasma on the resonant photon scattering process Chistyakov, M.V., Rumuyantsev, D.A., Yarkov, A.A. Journal of Physics: Conference Series, 2020, 1690(1), 012015
3. Photon damping in a strongly magnetized plasma Chistyakov, M.V., Rumuyantsev, D.A., Yarkov, A.A. Journal of Physics: Conference Series, 2020, 1690(1), 012008
4. Ярков А.А., Румянцев Д.А., М.В. Чистяков Ядерная физика и инжиниринг 2022, **10** (В печати).

#### **Личный вклад автора.**

1. Автором вычислен коэффициент поглощения фотона в процессе  $\gamma e \rightarrow \gamma e$  при резонансе на виртуальном электроне в приближении  $\delta$ -образного пика.
2. Автором исследован процесс распространения электромагнитной волны в сильно замагниченной, зарядово-симметричной плазме. Показано, что процесс затухания фотона в замагниченной плазме имеет неэкспоненциальный характер и коэффициент поглощения фотона существенно меньше по сравнению с известными в литературе результатами.
3. Автором получено решение кинетического уравнения для нахождения функции распределения фотонов двух возможных поляризаций в равновесной  $e^+e^-$  плазме в относительно сильном магнитном поле в приближении холодной плазмы и с учётом резонанса на виртуальном электроне.

**Структура и объем диссертации.** Настоящая диссертация посвящена изучению квантовых процессов с учётом резонансных эффектов и влияния

внешней активной среды на кинематику и дисперсию частиц. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, ??? приложений и списка литературы.

В Заключении сформулированы основные результаты диссертации.

В Приложении А приведены величины  $\mathcal{R}_{k'k}^{s's}$ , входящие в выражения для обобщенных амплитуд процесса  $jf \rightarrow j'f'$  с токами  $j$  и  $j'$  скалярного, псевдоскалярного, векторного или аксиального типов.

*Основные обозначения, используемые в диссертации*

Используется 4-метрика с сигнатурой  $(+ - - -)$ , а также естественная система единиц  $\hbar = 1, c = 1, k_B = 1$ .

Элементарный заряд:  $e = |e|$ , заряд фермиона:  $e_f$ . Масса фермиона:  $m_f$ , масса электрона:  $m$ . Постоянная тонкой структуры:  $\alpha$ , константа Ферми:  $G_F$ .

Тензор внешнего поля:  $F_{\alpha\beta}$ , дуальный тензор:  $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\mu\nu}$ .

Обезразмеренный тензор внешнего магнитного поля:  $\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$ , дуальный обезразмеренный тензор:  $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varphi^{\mu\nu}$ .

У 4-векторов и тензоров, стоящих внутри круглых скобок, тензорные индексы полагаются свернутыми последовательно, например:

$$(pFFp) = p^\alpha F_{\alpha\beta} F^{\beta\delta} p_\delta; \quad (FFp)_\alpha = F_{\alpha\beta} F^{\beta\delta} p_\delta; \quad (FF) = F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha}.$$

Безразмерные тензоры  $\Lambda_{\alpha\beta} = (\varphi\varphi)_{\alpha\beta}$ ,  $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\alpha\beta}$  связаны соотношением  $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$ .

В системе отсчета, где имеется только магнитное поле  $\mathbf{B}$ , направленное вдоль третьей оси, 4-векторы с индексами  $\perp$  и  $\parallel$  относятся к подпространствам Евклида  $\{1, 2\}$  и Минковского  $\{0, 3\}$  соответственно. При этом

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \text{diag}(0, 1, 1, 0), \quad \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 0, 0, -1).$$

Для произвольных векторов  $p_\mu, q_\mu$  имеем:

$$p_\perp^\mu = (0, p_1, p_2, 0), \quad p_\parallel^\mu = (p_0, 0, 0, p_3),$$

$$(pq)_\perp = (p\Lambda q) = p_1q_1 + p_2q_2, \quad (pq)_\parallel = (p\tilde{\Lambda}q) = p_0q_0 - p_3q_3.$$

Используется стандартное представление матриц Дирака [18], при этом матрица  $\gamma_5$  определяется следующим образом:

$$\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3.$$

Остальные обозначения те же, что приняты в книге [18].

## Глава 1

# Обобщённые комптоноподобные процессы рассеяния в замагниченной среде с учётом возможного резонанса на виртуальном электроне

## 1.1. Введение

Как уже было отмечено во введении, комптоновское рассеяние играет ключевую роль в формировании спектра сильно замагниченных звёзд. Этот процесс рассматривался

Естественно ожидать, что такие экстремальные условия будут оказывать существенное влияние на квантовые процессы, где в конечном или начальном состоянии могут присутствовать как электрически заряженные, так и электрически нейтральные частицы, например, электроны и фотоны. Одним из ярких представителей реакций такого типа является процесс комптоновского рассеяния фотонов на электронах (позитронах) замагниченной среды,  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ . Его исследование ведет свое начало с 30-х годов XX века и не прекращается по настоящее время (см., например, [9, 10, 12]). Следует отметить, что во всех указанных работах вычисления проводились без учета влияния на дисперсионные свойства фотонов. В относительно недавних работах [19, 20] исследовался предел сильно замагниченной зарядово симметричной и вырожденной плазмы. Было показано, что учет дисперсии и перенормировки волновых функций фотонов приводит к существенной модификации коэффициентов поглощения фотонов. Однако, в [19, 20] не рассматривалась ситуация, когда реакция рассеяния будет идти с учетом резонанса на виртуальном электроне. В последнее время в литературе активно обсуждается эффект резонанса в комптоновском процессе в приложении к физике радиопульсаров [4, 15, 16, 21, 22].

В настоящей работе мы рассматриваем процесс рассеяния фотонов на электронах в сильно замагниченной плазме с учетом резонанса на виртуальном электроне.

## 1.2. Амплитуды реакций вида $jf \rightarrow j'f'$ вблизи резонанса

Для анализа обобщенной амплитуды перехода  $jf \rightarrow j'f'$  будет использоваться эффективный локальный лагранжиан взаимодействия обобщенного тока  $j$  с фермионами  $f$  в следующей форме

$$\mathcal{L}(x) = \sum_k g_k [\bar{\psi}_f(x) \Gamma_k \psi_f(x)] J_k(x), \quad (1.1)$$

где индекс  $k = S, P, V, A$  соответствует матрицам  $\Gamma_k$ :  $\Gamma_S = 1$ ,  $\Gamma_P = \gamma_5$ ,  $\Gamma_V = \gamma_\alpha$ ,  $\Gamma_A = \gamma_\alpha \gamma_5$ ;  $J_k(x)$  – операторы обобщенных токов ( $J_S$ ,  $J_P$ ,  $J_{V\alpha}$  или  $J_{A\alpha}$ ),  $g_k$  – соответствующие константы взаимодействия и  $\psi_f(x)$  – операторы фермионного поля.

Используя лагранжиан (1.1) можно описать большой класс взаимодействий, например:

а) лагранжиан электромагнитного взаимодействия, когда  $k = V$ ,  $g_V = -e_f$ ,  $\Gamma_V J_V = \gamma^\mu A_\mu$ ,  $A^\mu$  – четырехмерный потенциал квантованного электромагнитного поля:

$$\mathcal{L}(X) = -e_f [\bar{\psi}_f(X) \gamma^\mu A_\mu(X) \psi_f(X)]; \quad (1.2)$$

б) лагранжиан фермион-аксионного взаимодействия, когда  $k = A$ ,  $g_A = C_f/(2f_a)$ ,  $\Gamma_A J_A = \gamma^\mu \gamma_5 \partial_\mu a(X)$ ,  $a(X)$  – квантованное поле легкой псевдоскалярной частицы – аксиона,  $f_a$  – масштаб нарушения симметрии Печчеи и Куинн [23],  $C_f$  – модельно зависимый фактор порядка единицы [24]:

$$\mathcal{L}(X) = \frac{C_f}{2f_a} [\bar{\psi}_f(X) \gamma^\mu \gamma_5 \psi_f(X)] \partial_\mu a(X); \quad (1.3)$$

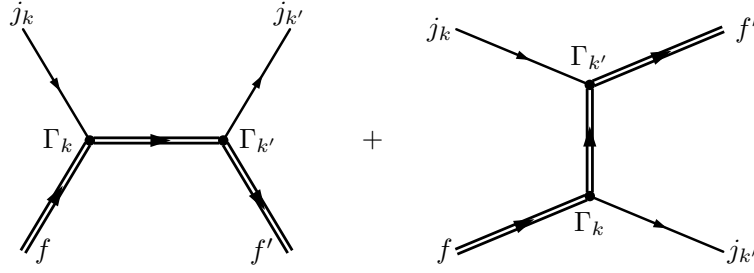


Рис. 1.1. Диаграммы Фейнмана для реакции  $j f \rightarrow j' f'$ . Двойные линии означают, что влияние внешнего поля на начальное и конечное состояния фермионов и на фермионный пропагатор учтено точно.

в) эффективный лагранжиан четырехфермионного слабого взаимодействия, когда  $k = V, A$ ,  $g_V = G_F C_V / \sqrt{2}$ ,  $g_A = G_F C_A / \sqrt{2}$  [25]:

$$\mathcal{L}(X) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\psi}_f(X) \gamma_\alpha (C_V + C_A \gamma_5) \psi_f(X)] J_\alpha(X), \quad (1.4)$$

где  $C_V = \pm 1/2 + 2 \sin^2 \theta_W$ ,  $C_A = \pm 1/2$ ,  $G_F \simeq 1.166 \times 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$  – постоянная Ферми,  $\theta_W$  – угол Вайнберга ( $\sin^2 \theta_W \simeq 0.231$ ); верхний знак соответствует электронному нейтрину ( $\nu = \nu_e$ ), когда в реакции происходит обмен  $W$ – и  $Z$ –бозонами; нижний знак соответствует  $\mu$  и  $\tau$  нейтрину ( $\nu = \nu_\mu, \nu_\tau$ ), когда присутствует лишь обмен  $Z$ –бозоном;  $J_\alpha(X) = \bar{\nu}(X) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu(X)$  – ток левых нейтрино. Отметим, что эффективный лагранжиан (1.4) написан в предположении относительно малых передач импульса по сравнению с массой  $W$  – бозона,  $|q'^2| \ll m_W^2$ , с учетом дополнительного ограничения на величину внешнего магнитного поля  $eB \ll m_W^2$  [26].

В общем случае, исходя из лагранжиана (1.1),  $S$ -матричный элемент процесса  $j f \rightarrow j' f'$ , который в древесном приближении описывается диаграммами Фейнмана, изображенными на рис. 1.1, может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} S_{k'k}^{s's} &= -g_k g_{k'} \int d^4 X d^4 Y \langle J_k(X) J_{k'}(Y) \rangle \left[ \bar{\Psi}_{p',\ell'}^{s'}(Y) \Gamma_{k'} \hat{S}(Y, X) \Gamma_k \Psi_{p,\ell}^s(X) \right] + \\ &+ (J_k, \Gamma_k \leftrightarrow J_{k'}, \Gamma_{k'}). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $p^\mu = (E_\ell, \mathbf{p})$  и  $p'^\mu = (E_{\ell'}, \mathbf{p}')$  – четырехмерные векторы энергии-импульса начального и конечного фермиона, находящихся на уровнях Ландау  $\ell$  и  $\ell'$

соответственно,  $\Psi_{p,\ell}^s(X)$  - волновые функции фермионов в присутствии внешнего магнитного поля,  $s$  и  $s'$  обозначают поляризационные состояния начального и конечного фермиона соответственно,  $\hat{S}(Y, X)$  - пропагатор фермиона во внешнем магнитном поле (см. приложение A), токи между угловыми скобками обозначают матричный элемент между соответствующими начальным и конечным состояниями,  $\langle J_k(X) J_{k'}(Y) \rangle = j_k(X) j_{k'}(Y)$ ,  $X^\mu = (X_0, X_1, X_2, X_3)$ ,  $Y^\mu = (Y_0, Y_1, Y_2, Y_3)$ .

Токи  $j_k(X)$  и  $j_{k'}(Y)$ , в свою очередь, могут быть представлены в виде плосковолновых решений с амплитудами  $j_k(q)$  и  $j_{k'}'(q')$  следующим образом:

$$j_k(X) = \frac{e^{-i(qX)}}{\sqrt{2q_0V}} j_k(q), \quad q^\alpha = (q_0, \mathbf{q}), \quad (1.6)$$

$$j_{k'}(Y) = \frac{e^{i(q'Y)}}{\sqrt{2q'_0V}} j_{k'}'(q'), \quad q'^\alpha = (q'_0, \mathbf{q}'), \quad (1.7)$$

где  $V = L_x L_y L_z$  - нормировочный объем.

Существует несколько возможных способов построения волновых функций фермионов в присутствии внешнего магнитного поля из уравнения Дирака (см., например [27–33], а также [26, 34]). В большинстве случаев эти решения представлены в виде, когда две верхние компоненты биспиноров соответствуют состояниям фермиона с проекцией спина на направление магнитного поля, равной  $1/2$  и  $-1/2$ .

Однако при расчете конкретных характеристик (сечения, ширины, коэффициенты поглощения и т.д.) процессов с двумя и более вершинами во внешнем магнитном поле стандартным методом, включающим возведение в квадрат амплитуды с учетом вклада всех диаграмм, суммирование и усреднение по поляризационным состояниям фермионов, вычисление следов от произведений биспиноров и матриц Дирака, представляет значительные вычислительные сложности. Поэтому оказывается удобным найти парциальные вклады в амплитуду от различных поляризационных состояний фермионов для каждой диаграммы

в отдельности непосредственным перемножением биспиноров и матриц Дирака. Если при этом использовать волновые функции фермионов с фиксированной проекцией спина, вычисленные парциальные вклады в амплитуду не будут обладать лоренц-инвариантной структурой при преобразованиях вдоль магнитного поля. Инвариантом будет только квадрат модуля амплитуды, просуммированный по поляризациям фермионов.

По этой причине оказывается целесообразным использовать решения уравнения Дирака, являющиеся собственными функциями для ковариантного оператора  $\hat{\mu}_z$ . Его можно получить непосредственно из введенного в работе [29] обобщенного оператора спина, являющегося тензором третьего ранга, который можно записать в координатном представлении следующим образом:

$$F_{\mu\nu\lambda} = -\frac{i}{2} (P_\lambda \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} + \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} P_\lambda), \quad (1.8)$$

где  $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)/2$ , и  $P^\lambda = i\partial^\lambda - e_f A^\lambda = (i\partial_0 - e_f A_0, -i\nabla - e_f \mathbf{A})$  – оператор обобщенного 4-импульса с 4-потенциалом внешнего магнитного поля  $A^\lambda$ . Заметим, что в работе [29] ковариантные билинейные формы были построены из матриц Дирака в обкладках биспиноров  $\psi^\dagger$  и  $\psi$ , тогда как в современной литературе [35] билинейные формы строятся из матриц Дирака в обкладках биспиноров  $\bar{\psi}$  и  $\psi$ .

При учете того, что в представлении Шредингера уравнение Дирака имеет вид:  $i\partial_0\psi = H\psi$ , где  $H = \gamma_0 (\boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}) + m_f \gamma_0 - eA_0$  – гамильтониан Дирака, из компоненты  $F_{\mu\nu 0}$  оператора (1.8) можно построить следующий векторный оператор:

$$\hat{\mu}_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk0}, \quad (1.9)$$

где  $\varepsilon_{ijk}$  – тензор Леви-Чивита. Построенный таким образом объект (1.9) имеет смысл оператора поляризации [29, 30]. Его можно представить в виде:

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = m_f \boldsymbol{\Sigma} + i\gamma_0 \gamma_5 [\boldsymbol{\Sigma} \times \hat{\mathbf{P}}], \quad (1.10)$$



где  $\Sigma = \gamma_0 \gamma_5 \boldsymbol{\gamma}$  –трехмерный оператор спина.

Нетрудно показать, что компоненты оператора (1.10) коммутируют с гамильтонианом, т.е.  $H$  и  $\mu_z$  имеют общие собственные функции. В нерелятивистском пределе оператор (1.10), будучи приведенным к виду  $\hat{\boldsymbol{\mu}}/m_f^2$ , переходит в обычный оператор Паули для магнитного момента, который имеет явную физическую интерпретацию.

Следовательно, можно построить волновые функции фермионов как собственные функции оператора  $\hat{\mu}_z$  [29, 30]

$$\hat{\mu}_z = m_f \Sigma_z + i\gamma_0 \gamma_5 [\boldsymbol{\Sigma} \times \mathbf{P}]_z, \quad (1.11)$$

где  $\mathbf{P} = -i\nabla - e_f \mathbf{A}$ .

Такие решения дают возможность построить парциальные амплитуды, которые, с точностью до одинаковой для обеих диаграмм комплексной фазы, будут обладать явной Лоренц-инвариантностью.

Будем работать в системе отсчета, где магнитное поле направлено вдоль оси  $z$  с использованием калибровки Ландау, в которой 4-потенциал имеет вид  $A^\lambda = (0, 0, xB, 0)$ . Удобно ввести следующие обозначения:  $\beta = |e_f|B$  и  $\eta = e_f/|e_f|$ , определяющее знак заряда фермиона. В этом случае собственные функции оператора  $\hat{\mu}_z$  имеют вид:

$$\Psi_{p,\ell}^s(X) = \frac{e^{-i(E_\ell X_0 - p_y X_2 - p_z X_3)} U_\ell^s(\xi)}{\sqrt{4E_\ell M_\ell (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) L_y L_z}}, \quad (1.12)$$

где  $\ell = 0, 1, 2, \dots$  – квантовое число, характеризующее уровни Ландау,  $p \equiv p_0, p_y, p_z$  – совокупность компонент импульса фермиона,

$$E_\ell = \sqrt{M_\ell^2 + p_z^2}, \quad M_\ell = \sqrt{m_f^2 + 2\beta\ell}, \quad (1.13)$$

и являются решениями уравнения

$$\hat{\mu}_z \Psi_{p,\ell}^s(X) = s M_\ell \Psi_{p,\ell}^s(X), \quad s = \pm 1. \quad (1.14)$$

Удобно представить биспиноры  $U_\ell^s(\xi)$  в виде разложения по решениям для положительного и отрицательного заряда фермиона,  $U_{\ell,\eta}^s(\xi)$ :

$$U_\ell^s(\xi) = \frac{1-\eta}{2} U_{\ell,-}^s(\xi) + \frac{1+\eta}{2} U_{\ell,+}^s(\xi), \quad (1.15)$$

где

$$U_{\ell,-}^-(\xi) = \begin{pmatrix} -i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_{\ell-1}(\xi) \\ (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_{\ell-1}(\xi) \\ -p_z (M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

$$U_{\ell,-}^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_\ell(\xi) \\ p_z (M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_\ell(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.17)$$

$$U_{\ell,+}^-(\xi) = \begin{pmatrix} i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_\ell(\xi) \\ (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_\ell(\xi) \\ -p_z (M_\ell + m_f) V_{\ell-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.18)$$

$$U_{\ell,+}^+(\xi) = \begin{pmatrix} (E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ i\sqrt{2\beta\ell} p_z V_{\ell-1}(\xi) \\ p_z (M_\ell + m_f) V_\ell(\xi) \\ -i\sqrt{2\beta\ell} (E_\ell + M_\ell) V_{\ell-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

$V_\ell(\xi)$  – нормированные функции гармонического осциллятора, которые следующим образом выражаются через полиномы Эрмита  $H_\ell(\xi)$  [36]:

$$V_\ell(\xi) = \frac{\beta^{1/4} e^{-\xi^2/2}}{\sqrt{2^\ell \ell!} \sqrt{\pi}} H_\ell(\xi), \quad \xi = \sqrt{\beta} \left( X_1 - \eta \frac{p_y}{\beta} \right). \quad (1.20)$$

Для дальнейших вычислений удобно также, ввести волновые функции  $\phi_{p,\ell}^s(X_1)$ , связанные с  $U_\ell^s(\xi)$  следующим образом:

$$\phi_{p,\ell}^s(X_1) = \frac{U_\ell^s[\xi(X_1)]}{\sqrt{2M_\ell(E_\ell + M_\ell)(M_\ell + m_f)}}. \quad (1.21)$$

С учетом этих замечаний, подставляя решения (1.12), фурье-образы токов (1.6), пропагатор (A.3) – (A.5) в (1.5) и интегрируя по  $dX_0 dX_2 dX_3$  и  $dY_0 dY_2 dY_3$ , представим матричный элемент в следующем виде:

$$\mathcal{S}_{k'k}^{s's} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{\sqrt{2q_0 V 2q'_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E_{\ell'} L_y L_z}} \mathcal{M}_{k'k}^{s's}, \quad (1.22)$$

где  $\delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q') = \delta(P_0 - E_{\ell'} - q'_0) \delta(P_y - p'_y - q'_y) \delta(P_z - p'_z - q'_z)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{k'k}^{s's} \simeq & i g_k g_{k'} j'_{k'}(q') j_k(q) \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s''} \int dX_1 dY_1 e^{-iX_1 q_x + iY_1 q'_x} \times \\ & \times \frac{\bar{\phi}_{p',\ell'}^{s's}(Y_1) \Gamma_{k'} \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \Gamma_k \phi_{p,\ell}^s(X_1)}{P_{\parallel}^2 - M_n^2 + i \Im_{\Sigma}^{s''}(P)} + \\ & + (j_k(q), \Gamma_k, P, q \leftrightarrow j'_{k'}(q'), \Gamma_{k'}, P', -q'), \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$P_\alpha = (p + q)_\alpha, P'_\alpha = (p - q')_\alpha, \alpha = 0, 2, 3.$$

Анализ амплитуды (1.23) позволяет выделить две возможные ситуации.

i) Если  $\ell, \ell' < n$ , существуют решения уравнения  $P_{\parallel}^2 - M_n^2 = 0$ , т.е. виртуальный фермион становится реальным с определенным законом дисперсии и имеет место резонанс на виртуальном фермионе. При этом, в случае малости  $\Im_{\Sigma}^{s''}(P)$  по сравнению с реальной частью везде, кроме точки резонанса, основной вклад в амплитуду (1.23), в случае узкого резонансного пика, будет давать только первая диаграмма на рис. 1.1. Данная ситуация будет рассмотрена в разделе ?? главы ??.

ii) При  $\ell, \ell' \geq n$  реальная часть знаменателя  $P_{\parallel}^2 - M_n^2$  в (1.23) не обращается в ноль, что говорит о невозможности реализации резонанса на виртуальном фермионе.

Покажем, что в приближении узкого резонансного пика квадрат  $S$  - матричного элемента процесса перехода  $jf \rightarrow j'f'$  фермиона факторизуется произведением квадратов  $S$  - матричных элементов перехода фермиона из начального состояния в промежуточное и из промежуточного состояния в конечное соответственно.

Действительно, квадрат  $S$  - матричного элемента, усредненный по поляризационным состояниям начального фермиона и просуммированный по поляризационным состояниям конечного фермиона, может быть представлен в следующем виде:

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} = \sum_{s,s'=\pm 1} \frac{(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{2q_0 L_x 2q'_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E'_{\ell'} L_y L_z} |\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2, \quad (1.24)$$

где  $\tau$  – время взаимодействия,

$$|\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{s''=\pm 1} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \int dX_1 dY_1 \frac{\bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \phi_{jf}^s(X_1)}{P_{\parallel}^2 - M_n^2 + i \Im_{\Sigma}^{s''}(P)} \right|^2 \quad (1.25)$$

– квадраты соответствующих парциальных амплитуд. Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) &\equiv g_{k'} \bar{\phi}_{p',\ell'}^{s'}(Y_1) j_{k'}'(q') \Gamma_{k'} e^{iY_1 q'_x}, \\ \phi_{jf}^s(X_1) &\equiv g_k j_k(q) \Gamma_k \phi_{p,\ell}^s(X_1) e^{-iX_1 q_x}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Предполагая, что основной вклад в амплитуду будут давать области энергий вблизи резонансов, с учетом (A.6), мы можем приближенно заменить соответствующую часть выражения (1.25)  $\delta$ -функцией:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{k'k}^{s's}|^2 &\simeq \sum_{s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{P_0 \Gamma_n^{s''}} \delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) \times \\ &\times \left| \int dX_1 dY_1 \bar{\phi}_{j'f'}^{s'}(Y_1) \phi_{P,n}^{s''}(Y_1) \bar{\phi}_{P,n}^{s''}(X_1) \phi_{jf}^s(X_1) \right|^2. \end{aligned} \quad (1.27)$$

С учетом (1.27) квадрат  $S$  - матричного элемента процесса  $jf \rightarrow j'f'$

факторизуется следующим образом

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} = \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p' - q')}{2q_0 L_x 2q'_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E'_{\ell'} L_y L_z} \times \quad (1.28)$$

$$\times \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2E''_n)^2 (2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} (2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'') |\mathcal{M}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}|^2 |\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}|^2.$$

Здесь мы воспользовались свойством  $\delta$  - функции:

$$\delta(P_{\parallel}^2 - M_n^2) = \frac{1}{2E''_n} \delta(P_0 - E''_n), \quad (1.29)$$

где  $E''_n = \sqrt{p_z''^2 + M_n^2}$ .

Нетрудно видеть, что теперь уравнение (1.28) можно представить в виде:

$$\sum_{s,s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{k'k}^{s's}|^2}{\tau} = \sum_{s,s',s''=\pm 1} \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{dp_y'' dp_z''}{(2\pi)^2 \Gamma_n^{s''}} \times \frac{|\mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}|^2}{\tau}, \quad (1.30)$$

где

$$\mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s} = \frac{i(2\pi)^3 \delta_{0,y,z}^{(3)}(P - p'')}{\sqrt{2q_0 V 2E_\ell L_y L_z 2E''_n L_y L_z}} \mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s} \quad (1.31)$$

–  $S$ -матричный элемент перехода некоторого начального состояния  $jf$  в фермион с энергией  $E''_n$ , компонентами импульса  $p_y'', p_z''$  и поляризационным состоянием  $s''$ , находящийся на уровне Ландау  $n$ , с соответствующей амплитудой  $\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}$ :

$$\mathcal{M}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s} = \frac{\exp[-iq_x(p_y + p_y'')/(2\beta)]}{\sqrt{M_\ell M_n (M_\ell + m)(M_n + m)}} \left[ \frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}} \right]^{n-\ell} \mathcal{T}_k^{s''s}, \quad (1.32)$$

$\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}$  –  $S$ -матричный элемент перехода фермиона из состояния с  $E''_n$ ,  $p_y''$ ,  $p_z''$ ,  $s''$ ,  $n$  в некоторое конечное состояние  $j'f'$ , с соответствующей амплитудой  $\mathcal{M}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''}$ , причем  $\mathcal{S}_{(n,s'') \rightarrow j'f'}^{s's''} = \mathcal{S}_{jf \rightarrow (n,s'')}^{s''s}(q \rightarrow q', E_\ell \rightarrow E'_{\ell'})$ .

Таким образом, основная часть задачи состоит в вычислении величин  $\mathcal{T}_k^{s''s}$ , которые выражаются через лоренц-коварианты и инварианты (1.33) – (1.36) в подпространстве  $\{0, 3\}$  и представлены в приложении Б.

$$\mathcal{K}_{1\alpha} = \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} \left\{ M_\ell (\tilde{\Lambda}p'')_\alpha + M_n (\tilde{\Lambda}p)_\alpha \right\}, \quad (1.33)$$

$$\mathcal{K}_{2\alpha} = \sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} = \{ M_\ell (\tilde{\varphi}p'')_\alpha + M_n (\tilde{\varphi}p)_\alpha \}, \quad (1.34)$$

$$\mathcal{K}_3 = \sqrt{2 \left[ (p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n \right]}, \quad (1.35)$$

$$\mathcal{K}_4 = -\sqrt{\frac{2}{(p\tilde{\Lambda}p'') + M_\ell M_n}} (p\tilde{\varphi}p''). \quad (1.36)$$

При вычислениях было использовано значение интеграла [36]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int dZ e^{-Z^2} H_n \left( Z + \frac{q_y + iq_x}{2\sqrt{\beta}} \right) H_\ell \left( Z - \frac{q_y - iq_x}{2\sqrt{\beta}} \right) = \\ & = 2^{(n+\ell)/2} \sqrt{n! \ell!} \left[ \frac{q_y + iq_x}{\sqrt{q_\perp^2}} \right]^{n-\ell} e^{q_\perp^2/(4\beta)} \mathcal{I}_{n,\ell} \left( \frac{q_\perp^2}{2\beta} \right), \end{aligned} \quad (1.37)$$

где для  $n \geq \ell$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{n,\ell}(x) &= \sqrt{\frac{\ell!}{n!}} e^{-x/2} x^{(n-\ell)/2} L_\ell^{n-\ell}(x), \\ \mathcal{I}_{\ell,n}(x) &= (-1)^{n-\ell} \mathcal{I}_{n,\ell}(x), \end{aligned} \quad (1.38)$$

и  $L_n^k(x)$  – обобщенные полиномы Лагерра [36].

### 1.3. Распространение фотона в замагниченной плазме

Дальнейшее описание квантовых процессов в активной среде невозможно без учета поляризационных и дисперсионных свойств фотона. Дисперсионные свойства фотонов описывается дисперсионным уравнением

$$q^2 - \mathcal{P}^{(\lambda)}(q) = 0, \quad (\lambda = 1, 2, 3). \quad (1.39)$$

Анализ уравнения дисперсии (1.39) показывает, что в случае, когда магнитное поле является наибольшим параметром задачи  $B \ll T^2, \omega^2, m^2$ , векторы поляризации фотона будут такими же, как и в чистом магнитном поле<sup>1</sup> [34]

$$\varepsilon_{\mu}^{(1)} = \frac{(q\varphi)_{\mu}}{\sqrt{q_{\perp}^2}}, \quad \varepsilon_{\mu}^{(2)} = \frac{(q\tilde{\varphi})_{\mu}}{\sqrt{q_{\parallel}^2}}.$$

В результате кинематически разрешены 4 парциальных канала рассеяния  $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(1)}e$ ,  $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(2)}e$ ,  $\gamma^{(2)}e \rightarrow \gamma^{(1)}e$  и  $\gamma^{(2)}e \rightarrow \gamma^{(2)}e$ .

Решение дисперсионного уравнения для фотона первой моды в рассматриваемой кинематической области представляет собой прямую, незначительно отклоняющуюся от вакуумной прямой  $q^2 = 0$ . С другой стороны, закон дисперсии моды 2 значительно отличается от вакуумного, особенно в окрестности циклотронных резонансов (рис. 1.2)

$$q_{\parallel}^2 = \left( \sqrt{m_e^2 + 2neB} + \sqrt{m_e^2 + 2n'eB} \right)^2, \quad (1.40)$$

где функции  $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$  имеют корневые сингулярности. Поэтому в этой области необходимо учитывать перенормировку волновых функций фотонов

$$\varepsilon_{\alpha}^{(\lambda)}(q) \rightarrow \varepsilon_{\alpha}^{(\lambda)} \sqrt{Z_{\lambda}}, \quad Z_{\lambda}^{-1} = 1 - \frac{\partial \mathcal{P}^{(\lambda)}(q)}{\partial \omega^2}. \quad (1.41)$$

С другой стороны фотон в плазме нестабилен. Например, фотон моды два может эффективно распадаться на  $e^+e^-$ -пару при масштабах энергии  $q_{\parallel}^2 \gtrsim 4m^2$ . В противоположность ему, фотон моды 2 распадается на  $e^+e^-$  - пару в области  $q_{\perp}^2 \gtrsim (m + \sqrt{2eB + m^2})^2$ , что заведомо больше области, при котором мы будем наблюдать первый резонанс на виртуальном электроде,  $q_{\parallel}^2 \gtrsim (\sqrt{m^2 + 2eB} - m)$ . Поэтому в пределе сильного поля целесообразно рассматривать лишь 2 канала рассеяния  $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(1)}e$  и  $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(2)}e$ . Более подробно затухание фотона рассмотрено во второй главе.

---

<sup>1</sup> Символы 1 и 2 соответствуют  $\parallel$  и  $\perp$  в чистом магнитном поле в работе [37] X - и O - модам в работе [? ], и E - и O - модам в замагниченной плазме в работе [38]

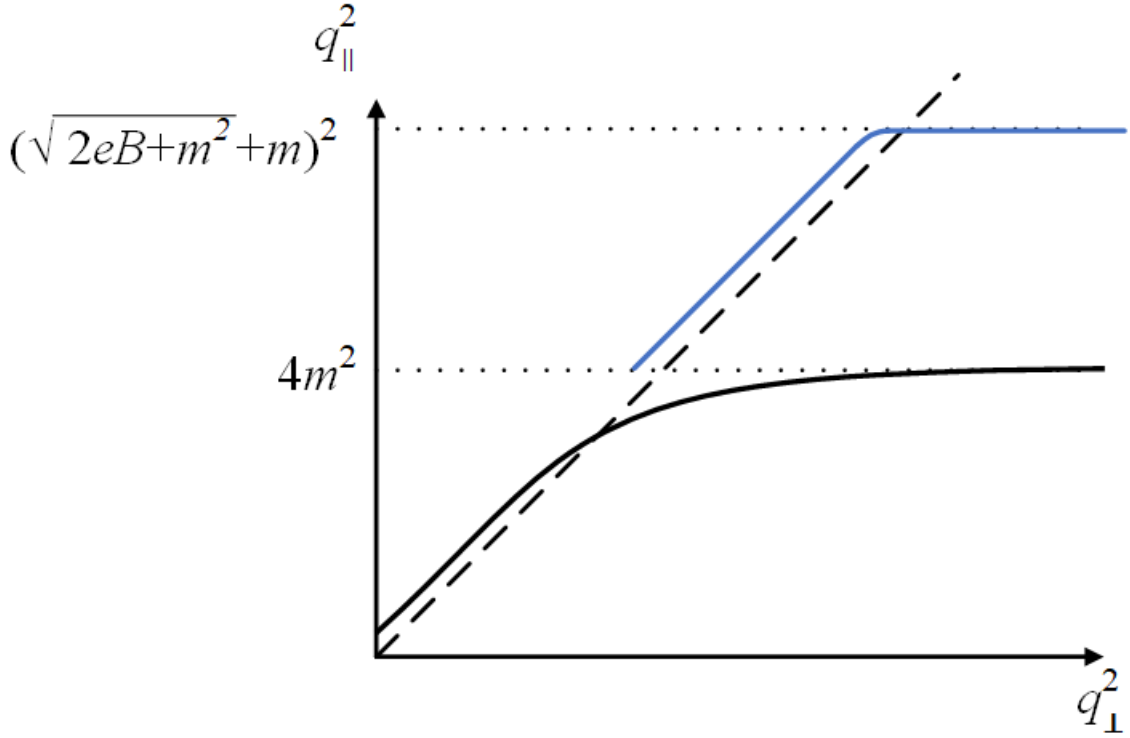


Рис. 1.2. Схематичное представление закона дисперсии моды 2 в зарядово симметричной плазме.

## 1.4. Реакция резонансного комптоновского рассеяния

В качестве первого приложения полученных результатов рассмотрим процесс рассеяния фотона на электронах замагниченной среды,  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , для энергий начального фотона, близких к области резонанса. Мы будем вычислять коэффициент поглощения фотона в реакции  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , где начальный и конечный электроны могут находиться на уровнях Ландау  $\ell$  и  $\ell'$  соответственно, а виртуальный электрон может занимать уровень  $n$ . Определяя его формулой (1.52) главы ??, получим

$$W_{\gamma e \rightarrow \gamma e} = \sum_{\ell, \ell'=0}^{\infty} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_{-}(E_{\ell}) \times \quad (1.42)$$

$$\times \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_{-}(E'_{\ell'})] \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \sum_{s, s'=\pm 1} \frac{|\mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)} e \rightarrow \gamma^{(\lambda')} e}^{s' s}|^2}{\tau}.$$

Напомним, что  $f_{-}(E_{\ell})$  и  $f_{-}(E'_{\ell'})$  – равновесные функции распределения начальных и конечных электронов соответственно,  $f_{-}(E_{\ell}) = \{\exp[(E_{\ell} - \mu)/T] + 1\}^{-1}$ ,



$T$  – температура,  $\mu$  – химический потенциал электронного газа,  $f_{\omega'}$  – функция распределения конечных фотонов в системе покоя плазмы,  $\mathcal{S}_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e}^{s's}$  – матричный элемент процесса  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ . Он может быть получен из (1.22) заменой  $m_f = m$ ,  $g_V = g'_V = e > 0$ ,  $j_\alpha = \varepsilon_\alpha(q)$ ,  $j'_\alpha = \varepsilon_\alpha(q')$ .  $q^\alpha = (\omega, \mathbf{k})$  и  $q'^\alpha = (\omega', \mathbf{k}')$  – 4-векторы начального и конечного фотонов соответственно.

Предполагая, что основной вклад в коэффициент поглощения фотона будут давать области резонансов, с учетом (1.30), перепишем (1.42) в виде:

$$W_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma^{(\lambda')}e} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell, \ell'=0}^{n-1} \sum_{s, s', s''=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_-(E_\ell) \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \times \\ \times [1 - f_-(E'_{\ell'})] \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \frac{dp''_y dp''_z L_y L_z}{(2\pi)^2} \frac{|\mathcal{S}_{e_\ell \gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s''s}|^2}{\tau} \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma^{(\lambda')}}^{s's''}|^2}{\tau}, \\ \lambda, \lambda' = 1, 2. \quad (1.43)$$

Здесь связь  $\mathcal{S}_{e_\ell \gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s''s}$  с соответствующей амплитудой определяется формулой (1.31), в которой нужно заменить  $jf \rightarrow e_\ell \gamma^{(\lambda)}$ ,  $(n, s'') \rightarrow e_n$ .

С другой стороны, согласно [39] полную ширину изменения состояния электрона  $\Gamma_n^{s''}$  можно представить в виде суммы ширин поглощения,  $\Gamma_n^{(abs)s''}$ , и рождения,  $\Gamma_n^{(cr)s''}$ , электрона следующим образом:

$$\Gamma_n^{s''} = \Gamma_n^{(abs)s''} + \Gamma_n^{(cr)s''} \simeq \Gamma_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma}^{(abs)s''} \left[ 1 + e^{-(E_n'' - \mu)/T} \right], \quad (1.44)$$

где

$$\Gamma_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma}^{(abs)s''} = \sum_{\ell'=0}^{n-1} \sum_{s'=\pm 1} \sum_{\lambda'} \int \frac{dp'_y dp'_z L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_-(E'_{\ell'})] \times \\ \times \frac{d^3 q' V}{(2\pi)^3} (1 + f_{\omega'}) \frac{|\mathcal{S}_{e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma^{(\lambda')}}^{s's''}|^2}{\tau} \quad (1.45)$$

– ширина поглощения электрона в процессе  $e_n \rightarrow e_{\ell'} \gamma$ .

Подставляя (1.44) в (1.43) с учетом (1.45) и суммируя по поляризациям

конечных фотонов, получим

$$W_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e} \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{s,s''=\pm 1} \int \frac{dp_y dp_z L_y L_z}{(2\pi)^2} f_-(E_\ell) \times \quad (1.46)$$

$$\times \frac{dp_y'' dp_z'' L_y L_z}{(2\pi)^2} [1 - f_-(E_n'')] \frac{|\mathcal{S}_{e\ell\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e_n}^{s''s}|^2}{\tau}.$$

Интегрируя это выражение с учетом формул (Б.9)–(Б.12) из приложения Б, получим следующие парциальные вклады в коэффициент поглощения фотона:

$$W_{\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma e} = \frac{\alpha\beta}{2\omega} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_-(E_\ell^\epsilon)[1 - f_-(E_\ell^\epsilon + \omega)]}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times \quad (1.47)$$

$$\times \left\{ [2\beta(n + \ell) - q_\parallel^2](\mathcal{I}_{n,\ell-1}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell}^2) - 8\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell-1}\mathcal{I}_{n-1,\ell} \right\},$$

$$W_{\gamma^{(2)}e \rightarrow \gamma e} = \frac{\alpha\beta}{2\omega} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_-(E_\ell^\epsilon)[1 - f_-(E_\ell^\epsilon + \omega)]}{\sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2}} \times \quad (1.48)$$

$$\times \left\{ \left[ \frac{(2\beta(n - \ell))^2}{q_\parallel^2} - 2\beta(n + \ell) - 4m^2 \right] (\mathcal{I}_{n,\ell}^2 + \mathcal{I}_{n-1,\ell-1}^2) - \right.$$

$$\left. - 8\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} \right\},$$

$$E_\ell^\epsilon = \frac{1}{2q_\parallel^2} \left[ \omega (M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2) + \epsilon k_z \sqrt{(M_n^2 - M_\ell^2 - q_\parallel^2)^2 - 4q_\parallel^2 M_\ell^2} \right].$$

В (2.11) и (2.12) нижний предел суммирования по  $n$  определяется из закона сохранения энергии и импульса следующим образом:

$$n_0 = \ell + \left\lceil \frac{q_\parallel^2 + 2M_\ell\sqrt{q_\parallel^2}}{2\beta} \right\rceil, \quad (1.49)$$

где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ .

В недавней работе [40] исследовался процесс комптоновского рассеяния в магнитных полях, характерных для магнитосфер радиопульсаров и магнитаров

$(10^{12} - 10^{15})$  Гс с учетом конечной ширины резонансных пиков. Поэтому представляет интерес провести сравнительный анализ полученных нами результатов с соответствующими результатами работы [40]. Исходя из (1.46) и следуя авторам [40], введем сечение процесса  $\gamma e \rightarrow \gamma e$ , проинтегрированное по начальным электронам, с функцией распределения  $f_{E_\ell}$  при  $\mu = 0$ , следующим образом

$$\sigma_\lambda^* = \frac{1}{N_e} \int \frac{dW_{\gamma^{(\lambda)}e \rightarrow \gamma e}}{j}, \quad (1.50)$$

где  $j = |(p\tilde{\Lambda}q)|/(E\omega V)$  – плотность потока падающих частиц в продольном по отношению к магнитному полю подпространстве,

$$N_e = \frac{\beta}{(2\pi)^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2 - \delta_{\ell,0}) \int_{-\infty}^{\infty} dp_z f_-(E_\ell) \quad (1.51)$$

– концентрация электронов во внешнем магнитном поле. Кроме того, для параметров поля и плазмы, характерных для магнитосфер радиопульсаров [41], мы можем пренебречь изменением (по сравнению с вакуумом) дисперсионных свойств фотонов, положив  $k_z = \omega \sin \theta$ , где  $\theta$  – угол между импульсом фотона и направлением магнитного поля. В силу этого, в области энергий фотонов  $\omega \ll m$  перенормировка волновой функции фотона также становится несущественной. Отметим, что данное утверждение заведомо не будет справедливым вблизи циклотронных резонансов, когда  $q_\parallel^2 \simeq (M_n + M_\ell)^2$  (см., например, [2]).

Результаты численного анализа отношения  $\sigma_\lambda^*/\sigma_T$ , где  $\sigma_T = 8\pi\alpha^2/(3m^2)$  – томсоновское сечение, представлены на рис. 1.3 и 1.8. Как видно из рис. 1.3 можно подтвердить, что резонансные пики достаточно сильно зависят от угла начального фотона по отношению к магнитному полю – ширина резонансных пиков увеличивается с уменьшением угла рассеяния. На рис. 1.4 представлен сравнительный анализ работы [40] для различного угла между импульсом фотона и направлением магнитного поля в пределе, когда начальный и конечный электроны занимают основной уровень Ландау. Рассматривая рис. 1.4 можно сделать вывод, что полученные оценки в окрестности резонансных пиков хоро-

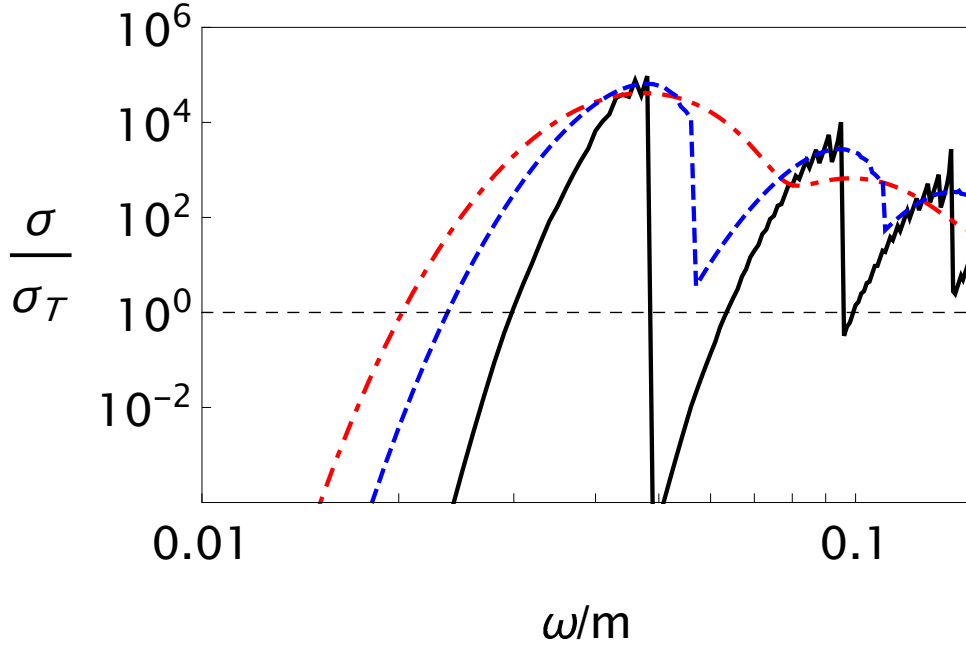


Рис. 1.3. Сечение (в единицах  $\sigma_T$ ) рассеяния фотона моды 1,  $\gamma^{(1)}e \rightarrow e$ , в сильном магнитном поле  $B = 5 \times 10^{12}$  Гс, проинтегрированное по начальным электронам с функцией распределения  $f_{E_e}$  при  $T = 20$  кэВ и  $\mu = 0$ , как функция энергии (в единицах массы электрона) фотона для различных значений углов между импульсом фотона и направлением магнитного поля:  $\theta = 90^\circ$  – сплошная кривая,  $\theta = 60^\circ$  – штриховая кривая,  $\theta = 30^\circ$  – штрих-пунктирная линия. Горизонтальная пунктирная линия отмечает  $\sigma_T$ .

по согласуются с соответствующими результатами работы [40] особенно вблизи первого резонанса.

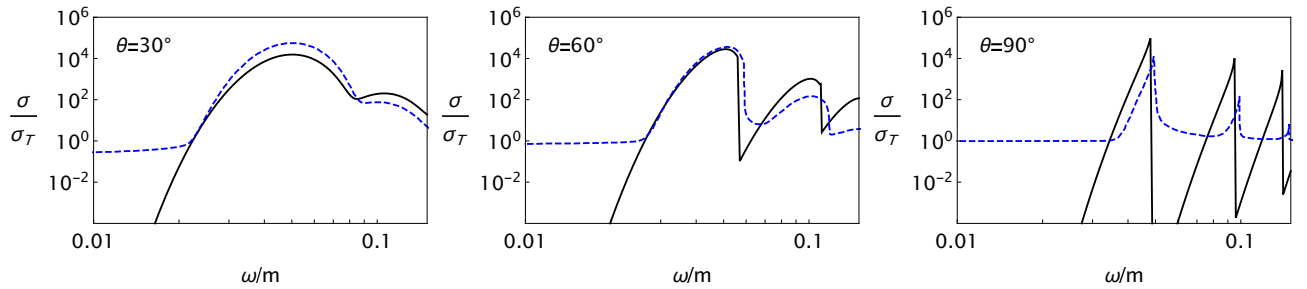


Рис. 1.4. Сравнение сечения (в единицах  $\sigma_T$ ) рассеяния фотона моды 2,  $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma$ , полученном в работе [40] (красная линия) и  $\delta$ -функциональном приближении (черная линия) для различных углов импульса начального фотона  $\theta$ .  $B = 2.2 \times 10^{12}$  Гс,  $T = 20$  кэВ,  $\mu = 0$ . Все начальные и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау.

Однако в работе [40] не учитывалось, что начальный и конечные электроны могут занимать произвольный уровень Ландау. Численный расчёт в случае дельта-функциональной аппроксимации с учётом того, что электроны могут за-

нимать произвольный уровень Ландау, представлены на рис. 1.5. Как видно из рис. 1.5, это приводит к завышенным результатам.

Аналогичный анализ для канала  $e\gamma^{(2)} \rightarrow e\gamma$  представлен на рис. 1.5–1.8

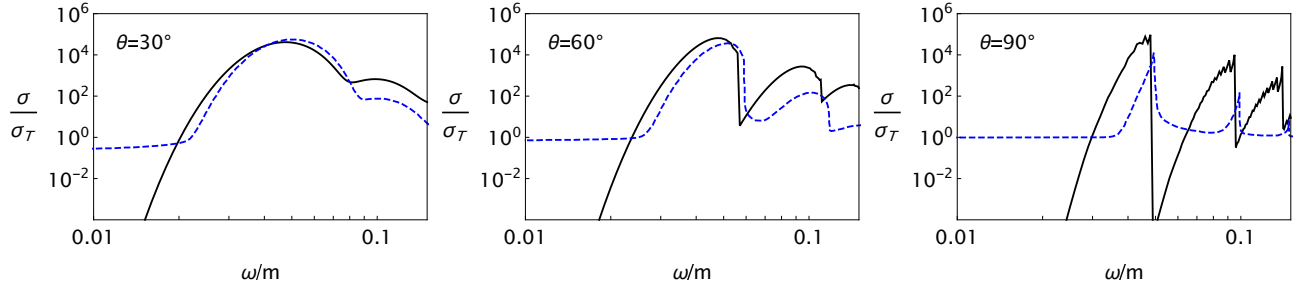


Рис. 1.5. То же, что и на рис. 1.5, для канала  $\gamma^{(1)}e \rightarrow e$ , но начальный и конечный электроны для случая дельта-функциональной аппроксимации занимают произвольный уровень Ландау.

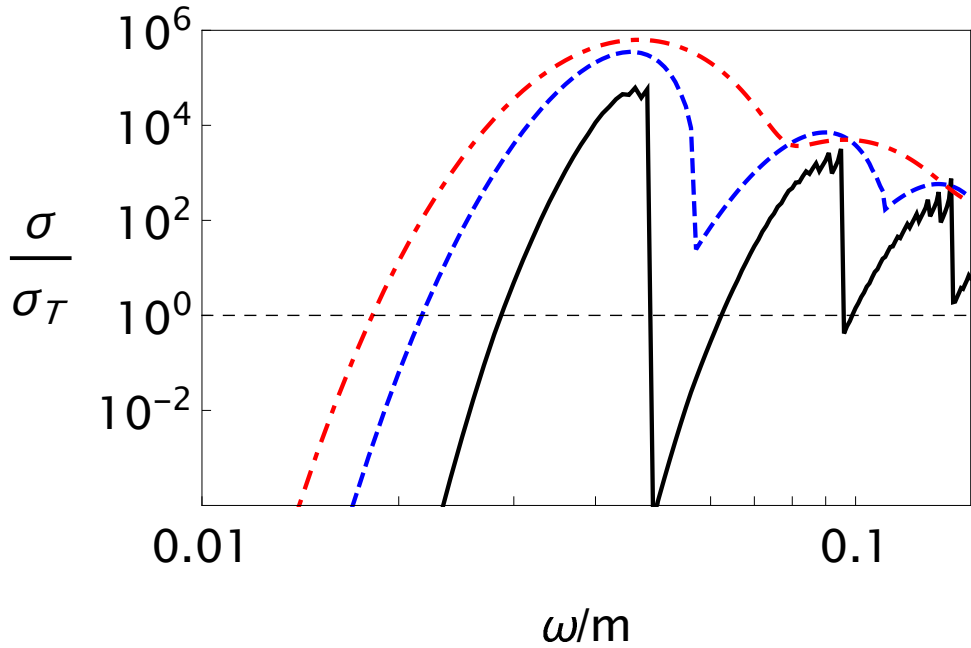


Рис. 1.6. То же, что и на рис. 1.3, для канала  $\gamma^{(2)}e \rightarrow e$ .

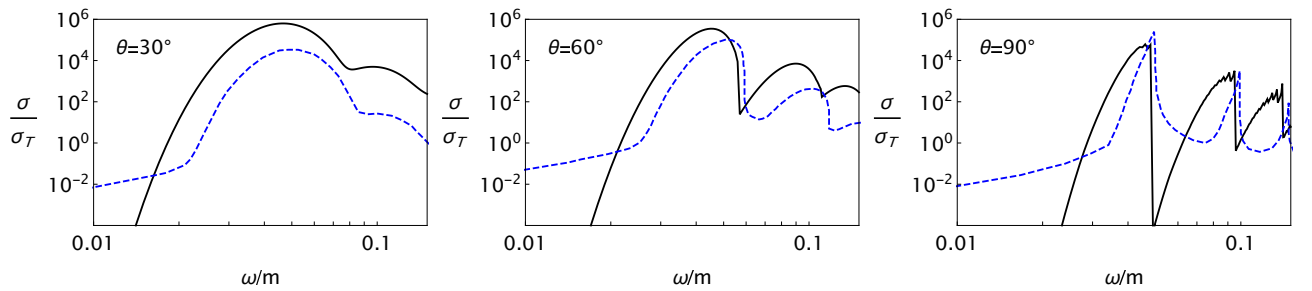


Рис. 1.7. То же, что и на рис. 1.5, для канала  $\gamma^{(2)}e \rightarrow e$ .

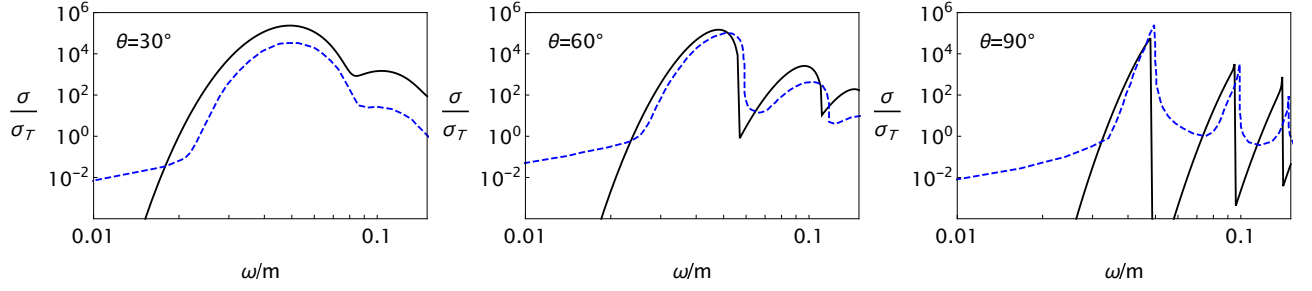


Рис. 1.8. То же, что и на рис. 1.4, для канала  $\gamma^{(2)}e \rightarrow e$ , но все начальные и конечные электроны находятся на основном уровне Ландау.

Следовательно, применение приближения (1.27) правомочно в области полей  $B \sim 10^{12}$  Гс, характерных для радиопульсаров. С другой стороны, полученные нами коэффициенты поглощения фотона (2.11) и (2.12) имеют относительно простой вид, и, следовательно, оказываются гораздо более удобными в применении к решению задачи переноса излучения по сравнению с численно полученными результатами работы [40]. Отметим (см. рис. 1.6 и 1.3, а также (2.11) и (2.12)), что коэффициенты поглощения фотона для обеих мод имеют узкие максимумы, соответствующие значениям энергии фотона  $\omega_{nl} = (M_n - M_\ell)/\sin \theta$ , хорошо известные в литературе (см., например, [42–44]).

С другой стороны, для относительно сильных магнитных полей в области  $B \sim 10^{15} - 10^{16}$  дельта-аппроксимация также согласуется (с точностью до 7% в окрестности пика) с численными результатами, учитывающие конечную ширину резонансного пика. Исследование комптоновского процесса в магнитных полях указанного масштаба было проведено, например, в работе [19]. Полученные в этом исследовании результаты справедливы для области энергий фотонов вдали от резонанса. Поэтому на основе полученных результатов [19] представляет самостоятельный интерес вычислить коэффициент поглощения фотона в пределе сильного поля с учётом возможного резонанса на виртуальном электроном уровне. Как известно, в пределе сильного магнитного поля начальный и конечный электроны будут занимать основной уровень Ландау, а виртуальный первый уровень Ландау. Это позволяет достаточно просто рассчитать коэффициент поглощения фотона с учётом конечной ширины резонансного пика. По-

этому представляет интерес сравнить коэффициенты поглощения с конечной шириной резонансного пика и дельта-функциональное приближение. С другой стороны, также необходимо учесть возможное затухание фотона. Поскольку в сильном магнитном поле энергии фотона, на которых наблюдается резонанс, выше, чем порог рождения  $e^+e^-$  пары для фотона моды 2, то целесообразно рассмотреть только каналы рассеяния  $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}$  и  $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$ . Следует отметить, что для фотона моды 1 порог рождения  $e^+e^-$  пары заведомо выше рассматриваемой области резонанса. Также необходимо учитывать перенормировку волновой функции фотона.

Следуя работе [19], удобно будет представить коэффициент поглощения фотона (1.42) в сильном магнитном поле в следующем виде:

$$W_{\lambda e \rightarrow \lambda' e} = \frac{eB}{16(2\pi)^4 \omega_\lambda} \int |\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda'}|^2 Z_\lambda Z_{\lambda'} \times \quad (1.52)$$

$$\times f_E [1 - f_{E'}] (1 + f_{\omega'}) \delta(\omega_\lambda(\mathbf{k}) + E - \omega_{\lambda'}(\mathbf{k}') - E') \frac{dp_z d^3 k'}{EE' \omega_{\lambda'}},$$

где  $Z_\lambda$  - перенормировочные множители (1.41), а  $\mathcal{M}_{\lambda \rightarrow \lambda'}$  - парциальные амплитуды комптоновского процесса, которые в пределе сильного магнитного поля без учета резонанса имеют вид [19]

$$\mathcal{M}_{1 \rightarrow 1} = \frac{8i\pi\alpha m}{eB} \frac{(q\varphi q')(q\tilde{\varphi}q')}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2 (-Q_\parallel^2)}}, \quad (1.53)$$

$$\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2} = \frac{8i\pi\alpha m}{eB} \frac{(q\Lambda q')(q\tilde{\Lambda}Q)}{\sqrt{q_\perp^2 q_\perp'^2 (-Q_\parallel^2)}}.$$

Подставляя (1.53) в (1.52), коэффициенты поглощения фотона для каналов  $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}$  и  $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$  могут быть представлены следующим образом

$$W_{1 \rightarrow 1} = \frac{\omega \alpha^2 m^2}{2eB\pi} \int dQ_0 dk'_z \frac{k_z'^2}{(-Q_\parallel^2)^2 \kappa} \theta(-Q_\parallel^2) \theta(q_\parallel'^2) \times \quad (1.54)$$

$$\times \sum_{p_{z_i}} f(E_0^\epsilon) (1 - f(E_0^\epsilon + \omega)) (1 + f_{\omega'}),$$

$$\begin{aligned}
W_{1 \rightarrow 2} = & \frac{\alpha^2 m^2}{2eB\pi\omega} \int dQ_0 dk'_z \left( 1 - \frac{\mathcal{P}^{(2)}(q')}{q'^2_{\parallel}} \right) \frac{q'^2_{\parallel} - \omega\omega'}{(-Q_{\parallel}^2)^2 \mathcal{K}} \theta(-Q_{\parallel}^2) \theta(q'^2_{\parallel}) \times \\
& \times \sum_{p_{z_i}} f_{E_0^\epsilon} (1 - f_{E_0^\epsilon + \omega}) (1 + f_{\omega'}) .
\end{aligned} \tag{1.55}$$

где  $Q_{\parallel}^2 = (q - q')_{\parallel}^2 < 0$ ,  $q_{\alpha} = (\omega, \mathbf{k})$  и  $q'_{\alpha} = (\omega', \mathbf{k}')$  – 4-импульсы начального и конечного фотонов соответственно,  $\theta(x)$  – функция Хевисайда.

Амплитуды  $\mathcal{M}_{1 \rightarrow 1}$ ,  $\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2}$  в пределе сильного магнитного поля можно представить в следующем виде [3]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1 \rightarrow 1} = & \frac{8m\pi\alpha}{\sqrt{(-Q_{\parallel}^2)}} \exp \left[ -\frac{q_{\perp}^2 + q'_{\perp}^2 - 2i(q\varphi q')}{4eB} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\perp}^2}} \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((q\Lambda q') - i(q\varphi q'))^n}{(n-1)!(2eB)^{n-1}} \frac{(q\tilde{\varphi} q')}{(p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2 + iE_n''\Gamma_n} + \\
& + (q \leftrightarrow -q') ,
\end{aligned} \tag{1.56}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1 \rightarrow 2} = & \frac{8m\pi\alpha}{\sqrt{(-Q_{\parallel}^2)}} \exp \left[ -\frac{q_{\perp}^2 + q'_{\perp}^2 - 2i(q\varphi q')}{4eB} \right] \cdot \frac{1}{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\parallel}^2}} \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((q\Lambda q') - i(q\varphi q'))^n}{(n-1)!(2eB)^{n-1}} \frac{(Q\tilde{\Lambda} q')}{(p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2 + iE_n''\Gamma_n} + \\
& + (q \leftrightarrow -q') ,
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Как показывает численный анализ, в случае сильно замагниченной, горячей, зарядово-симметричной плазмы полная ширина поглощения электрона мало отличается от соответствующего выражения в сильном магнитном поле и ультрарелятивистских электронов. Поэтому мы можем выбрать её в следующей форме [34]:

$$\begin{aligned}
E_n''\Gamma_n = & \alpha eB \sum_{n'=0}^{n-1} \int_0^{(\sqrt{n}-\sqrt{n'})^2} \frac{dx}{\sqrt{(n+n'-x)^2 - 4nn'}} \times \\
& \times \{ (n+n'-x) [\mathcal{I}_{n,n'-1}^2(x) + \mathcal{I}_{n-1,n'}^2(x)] - \\
& - 4\sqrt{nn'} \mathcal{I}_{n,n'}(x) \mathcal{I}_{n-1,n'-1}(x) \} .
\end{aligned} \tag{1.58}$$

Здесь  $E_n'' = E + \omega$  – энергия виртуального электрона.



Коэффициент поглощения фотона с учётом конечной ширины поглощения электрона в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
W_{1 \rightarrow 1} = & \frac{eB\alpha^2 m^2}{\pi\omega} \int dQ_0 dk'_z \frac{1}{(-Q_{\parallel}^2)^2 \mathfrak{K}} \exp \left[ -\frac{q_{\perp}^2 + q_{\perp}'^2}{2eB} \right] \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p_{z_i}} \left\{ \frac{1}{((n-1)!)^2} \left( \frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2eB} \right)^{2(n-1)} \frac{(qq')_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2 q_{\parallel}'^2}{((p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2} + \right. \\
& + \frac{1}{((n-1)!)^2} \left( \frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2eB} \right)^{2(n-1)} \frac{(qq')_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2 q_{\parallel}'^2}{((p-q')_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2} - \\
& - 2 \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{((n-1)!)^2} \left( \frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2eB} \right)^{n-1} J_{n+n'} \left( \frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{eB} \right) \frac{1}{(n'-1)!} \left( \frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q_{\perp}'^2}}{2eB} \right)^{n'-1} \times \\
& \times \frac{\left( [(p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2][(p-q')_{\parallel}^2 - M_{n'}^2] + E_n'' \Gamma_n E_{n'}'' \Gamma_{n'} \right) \cdot \left( (qq')_{\parallel}^2 - q_{\parallel}^2 q_{\parallel}'^2 \right)^2}{\left[ ((p-q')_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2 \right] \left[ ((p+q)_{\parallel}^2 - M_{n'}^2)^2 + (E_{n'}'' \Gamma_{n'})^2 \right]} \Big\} \times \\
& \times f_E (1 - f_{E'}) (1 + f_{\omega}),
\end{aligned} \tag{1.59}$$

$$\begin{aligned}
W_{1 \rightarrow 2} = & \frac{eB\alpha^2 m^2}{\pi\omega} \int dQ_0 dk'_z \frac{1}{(-Q_{\parallel}^2)^2 \varkappa} \exp \left[ -\frac{q_{\perp}^2 + q'_{\perp}^2}{2eB} \right] \cdot \frac{q'_{\perp}^2}{q_{\parallel}^2} \times \\
& \times \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p_{z_i}} \left\{ \frac{1}{((n-1)!)^2} \left( \frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\perp}^2}}{2eB} \right)^{2(n-1)} \frac{1}{((p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2} \times \right. \\
& \times (q_{\parallel}^2 - (qq')_{\parallel})^2 + \frac{1}{((n-1)!)^2} \left( \frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\perp}^2}}{2eB} \right)^{2(n-1)} \times \\
& \times \frac{1}{((p-q')_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2} (q'_{\parallel}^2 - (qq')_{\parallel})^2 - \\
& - 2 \sum_{n'=1}^{\infty} \frac{1}{((n-1)!)^2} \left( \frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\perp}^2}}{2eB} \right)^{n-1} J_{n+n'} \left( \frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\perp}^2}}{eB} \right) \frac{1}{(n'-1)!} \left( \frac{\sqrt{q_{\perp}^2 q'_{\perp}^2}}{2eB} \right)^{n'-1} \times \\
& \times \frac{[(p+q)_{\parallel}^2 - M_n^2][(p-q')_{\parallel}^2 - M_{n'}^2] + E_n'' \Gamma_n E_{n'}'' \Gamma_{n'}}{[((p-q')_{\parallel}^2 - M_n^2)^2 + (E_n'' \Gamma_n)^2][((p+q)_{\parallel}^2 - M_{n'}^2)^2 + (E_{n'}'' \Gamma_{n'})^2]} \times \\
& \times (q'_{\parallel}^2 - (qq')_{\parallel}) \cdot (q_{\parallel}^2 - (qq')_{\parallel}) \left. \right\} \times \\
& \times f_E(1 - f_{E'})(1 + f_{\omega'}) ,
\end{aligned} \tag{1.60}$$

где  $J_n(x)$  – функция Бесселя целого индекса,  $\varkappa = \sqrt{1 - 4m^2/Q_{\parallel}^2}$ , а где  $p_{z_i}$  корни уравнения

$$Q_0 + \sqrt{p_{z_i}^2 + m^2} - \sqrt{(p_{z_i} + k_z - k'_z)^2 + m^2} = 0 . \tag{1.61}$$

$$Q_{\parallel}^2 = (q - q')_{\parallel}^2 < 0, \quad q_{\alpha} = (\omega, \mathbf{k}) \text{ и } q'_{\alpha} = (\omega', \mathbf{k}')$$

Имеет смысл провести сравнительный анализ результатов работы [19] без учёта вклада конечной ширины поглощения электрона с резонансным случаем (1.59) и (1.60) для случая зарядово-симметричной плазмы и поперечного направления импульса фотона по отношению к внешнему магнитному полю для различных значений величины магнитного поля, температуры и энергии начального фотона. Результаты вычислений представлены на рис. 1.9-1.11. На рис. 1.9 - 1.12 показана вероятность рассеяния при температуре  $T = 1$  МэВ (рис.1.9) и величине магнитного поля  $B = 200B_e$  и  $B = 20B_e$ . Как видно из рис. 1.9-1.10 вероятность рассеяния для канала  $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(1)}e$  согласуется с со-

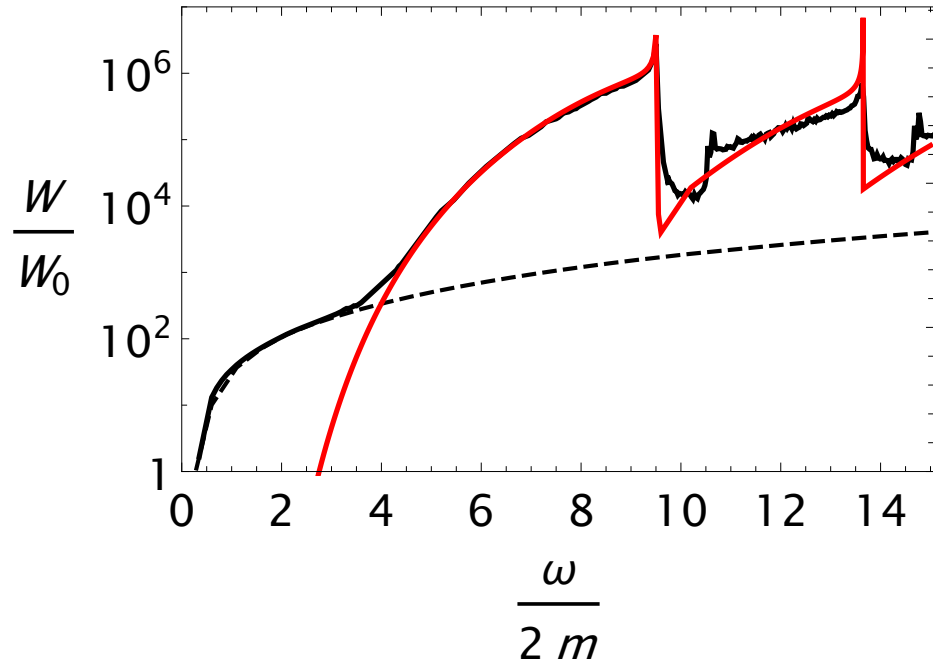


Рис. 1.9. Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала ( $1 \rightarrow 1$  для рисунка слева,  $1 \rightarrow 2$  для рисунка справа ) при поле  $B = 200B_e$  и температуре  $T=1$  МэВ. Сплошной и штриховой линией изображён график с учётом резонанса и без него соответственно.  $\delta$ -функциональная аппроксимация показана точками. Здесь  $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m \simeq 3.25 \cdot 10^2 \text{ см}^{-1}$ .

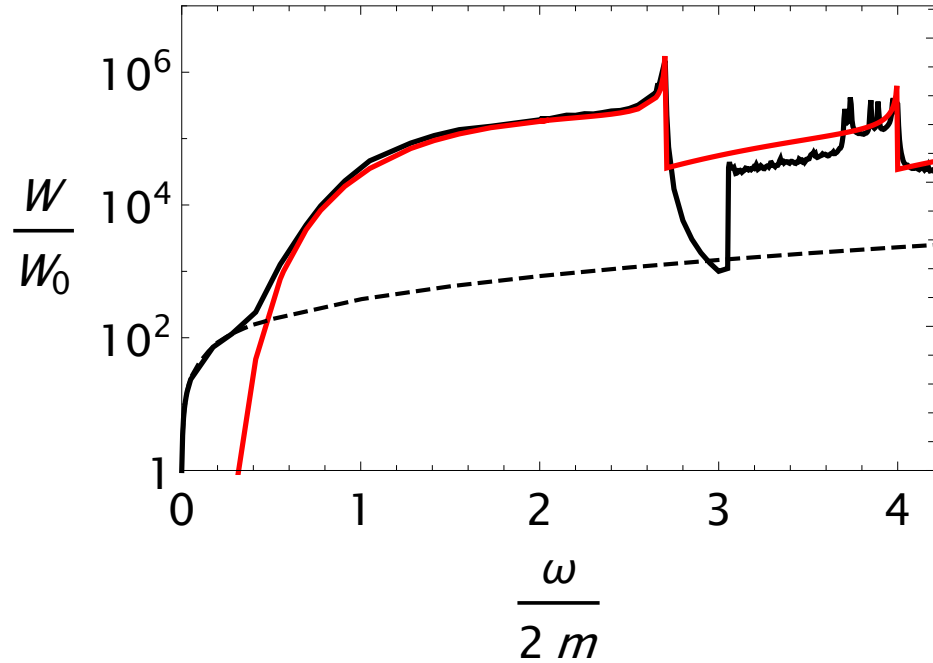


Рис. 1.10. Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала ( $1 \rightarrow 1$  для рисунка слева,  $1 \rightarrow 2$  для рисунка справа ) при поле  $B = 20B_e$  и температуре  $T=1$  МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 1.9

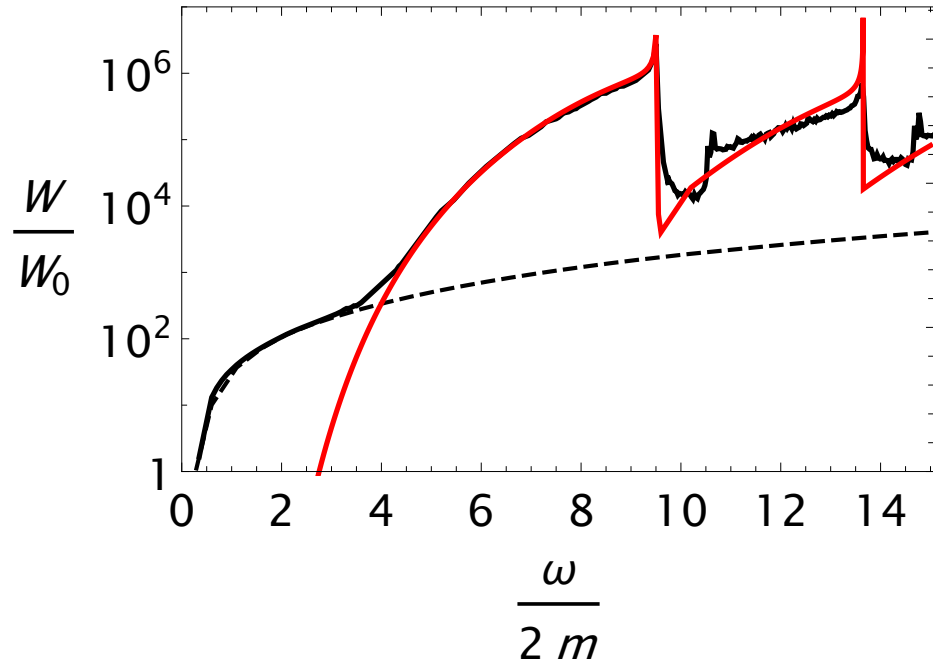


Рис. 1.11. Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала ( $1 \rightarrow 1$  для рисунка слева,  $1 \rightarrow 2$  для рисунка справа ) при поле  $B = 200B_e$  и температуре  $T=1$  МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 1.9

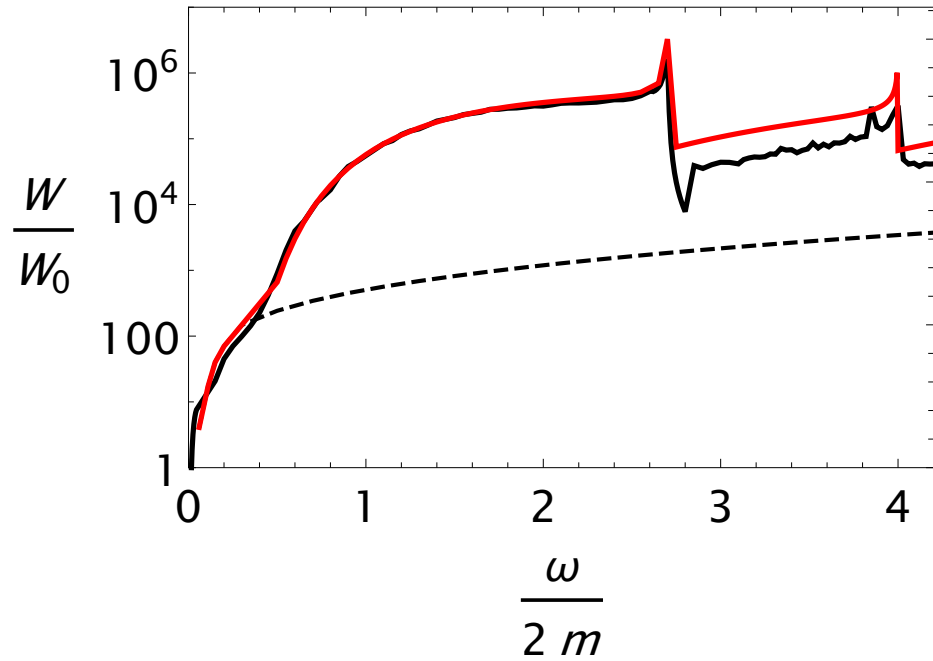


Рис. 1.12. Зависимость коэффициента поглощения от частоты начального фотона для канала ( $1 \rightarrow 1$  для рисунка слева,  $1 \rightarrow 2$  для рисунка справа ) при поле  $B = 20B_e$  и температуре  $T=1$  МэВ. Обозначение для линий то же, что и для рис. 1.9

ответствующими результатами для предела сильного поля и отсутствия резонанса, полученными в работе [19] вплоть до энергий начального фотона  $\omega = 3$

МэВ для поля  $B = 200B_e$  и  $\omega = 0.3$  МэВ для поля  $B = 20B_e$ . Поэтому результаты работы [19] нужно ограничить до соответствующих энергии начального фотона. Аналогичная ситуация наблюдается и для канала  $\gamma^{(1)}e \rightarrow \gamma^{(2)}e$  (см. рис. 1.11-1.12). Из 1.11-1.12 наиболее ярко видно завышение коэффициента поглощения при малых энергиях начального фотона. Этот факт связан с тем, что в пределе сильного магнитного поля пренебрегали знаменателем в пропагаторе электрона. Следует отметить что при относительно малых температур с тем же магнитным полем  $\delta$ -аппроксимация работает хуже.

Для астрофизических приложений используются различные интегральные величины. Одной из таких величин, которая играет ключевую роль в переносе излучения это так называемое Росселандово среднее [45], которое обезразмерно на  $W_0$

$$\langle k \rangle = \frac{\int_0^\infty \frac{\partial B_\omega}{\partial T} (W_{e\gamma \rightarrow e'\gamma'}(\omega)/W_0)^{-1} d\omega}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\omega}{\partial T} d\omega}, \quad (1.62)$$

где

$$B_\omega = \frac{\omega^3/2\pi}{\exp[\omega/T] - 1} \quad (1.63)$$

Для сравнения вычислим Росселандово 1.62 для случая конечной ширины резонансного пика  $\langle k_\Gamma \rangle$  и для коэффициента поглощения, вычисленного в результате объединения нерезонансного случая (1.54 и 1.55) для области малой энергий фотона ( $\omega < 5m_e$  для магнитного поля  $B = 200B_e$  и  $\omega < 0.5m_e$  для магнитного поля  $B = 20B_e$ ) и дельта-функционального приближения для остальной области  $\langle k_\delta \rangle$ . Полученные результаты представлены в таблице

## 1.5. Заключение

Рассмотрен комптоновский процесс как с учетом конечной ширины поглощения электрона, так и в случае узкого резонансного пика.

В качестве приложения полученных результатов, рассмотрено комптоновское рассеяние  $e\gamma \rightarrow e\gamma$  в присутствии замагниченной плазмы. В частном случае зарядово-симметричной плазмы вычислено сечение рассеяния для каналов

Для канала $1 \rightarrow 1$			Для канала $1 \rightarrow 2$		
	$\langle k_\delta \rangle$	$\langle k_\Gamma \rangle$		$\langle k_\delta \rangle$	$\langle k_\Gamma \rangle$
$B = 200B_e$	$1.5 \times 10^{-3}$	$1.3 \times 10^{-3}$	$B = 200B_e$	$4.3 \times 10^{-3}$	$3.6 \times 10^{-3}$
$B = 20B_e$	$18 \times 10^{-6}$	$14 \times 10^{-6}$	$B = 200B_e$	$4.3 \times 10^{-3}$	$3.6 \times 10^{-3}$

Таблица 1.1. Вычисленные Росселандовы средние для случая конечной ширины резонансного пика  $\langle k_\Gamma \rangle$  и для случая объединения нерезонансного случая и приближения дельта-образного пика  $\langle k_\delta \rangle$ .

$e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma$  и  $e\gamma^{(2)} \rightarrow e\gamma$  с дельта-функциональной аппроксимацией резонансных пиков. Проведён численный анализ коэффициентов поглощения в комптоновском процессе с учетом конечной ширины поглощения электрона, без учёта резонанса и с  $\delta$ -функциональным приближением для двух масштабов магнитных полей ( $B \lesssim B_e$  и  $B \lesssim 200B_e$ ).

Показано, что  $\delta$ -аппроксимация резонансных пиков в области резонанса ( $T = 20$  кэВ,  $B = 2.2 \cdot 10^{12}$  Гс) согласуется с соответствующими результатами работы (Mushtukov, 2016 Phys.Rev.D).

С другой стороны было показано, что  $\delta$ -аппроксимация хорошо описывает область резонанса и в пределе сильного магнитного поля ( $T = 1$  МэВ,  $B = 20B_e$  и  $B = 200B_e$ ) для каналов рассеяния  $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(1)}$  и  $e\gamma^{(1)} \rightarrow e\gamma^{(2)}$ .

## Глава 2

# Резонансные квантовые процессы во внешней активной среде

## 2.1. Введение

При рассмотрении множества физических явлений возникает проблема распространения электромагнитных полей в активной среде возникает. При этом особый интерес представляют объекты с полями масштаба так называемого критического значения  $B_e = m^2/e \approx 4.41 \cdot 10^{13}$  Гс (Используются естественная система единиц, где  $c = \hbar = k_B = 1$ ,  $m$  – масса электрона,  $e > 0$  – элементарный заряд). Недавние наблюдения позволяют, в частности, отождествить некоторые астрофизические объекты, такие как источники мягких повторяющихся гамма-всплесков (SGR) и аномальные рентгеновские пульсары (AXP), с магнитарами [46].

Согласно наиболее известной в настоящее время модели (см., например, [47]) в окрестности таких объектов возможно существование сильного магнитного поля, достигающего величины  $10^{15} - 10^{16}$  Гс. Кроме того, анализ спектра излучения некоторых из этих объектов указывает на присутствие в их окрестности относительно горячей и плотной электрон-позитронной плазмы [48] с температурой  $T \sim 1$  МэВ.

Именно в таких условиях представляет интерес рассмотреть процесс затухания фотона за счет процесса поглощения фотона электроном (позитроном),  $\gamma e^\pm \rightarrow e^\pm$ , но и рождения  $e^+e^-$  - пар,  $\gamma \rightarrow e^+e^-$ , которые являются важными в астрофизике замагниченных нейтронных звёзд. Следует отметить, что выражение для ширины распада в пределе сильно замагниченной плазмы содержит особенности корневого типа в точках циклотронных резонансов. Как подчеркивается в ??, этот факт указывает на невозможность интерпретации заданной

ширины распада, рассчитанной по теории возмущений вблизи циклотронных резонансов, как коэффициента затухания. В этом случае основным для определения коэффициента затухания является зависимость волновой функции фотона от времени в присутствии магнитного поля и плазмы.

В данной работе рассматривается распад фотона как результат процессов  $\gamma e^\pm \rightarrow e^\pm$  и  $\gamma \rightarrow e^+ e^-$  в сильно замагниченной плазме,  $eB \gg T^2$  при температуре  $T \sim 1$  МэВ и химическом потенциале,  $\mu = 0$ . Мы используем метод, применяемый в теории поля при конечных температурах и в физике плазмы [7]. Он состоит в нахождении запаздывающего решения уравнения электромагнитного поля при наличии внешнего источника с учетом поляризации вакуума в замагниченной плазме.

## 2.2. Распространение фотона в замагниченной среде

Для описания эволюции электромагнитной волны  $\mathcal{A}_\alpha(x)$ ,  $x_\mu = (t, \mathbf{x})$ , во времени воспользуемся методикой, подробно изложенной в [49]. Рассмотрим линейный отклик системы ( $\mathcal{A}_\alpha(x)$  и поляризованный в магнитном поле вакуум) на внешний источник, который адиабатически включается при  $t = -\infty$  и в момент времени  $t = 0$  выключается. При  $t > 0$  электромагнитная волна будет эволюционировать самостоятельно. Таким образом источник необходим для создания начального состояния. Для этого функцию источника следует выбрать в виде:

$$\mathcal{J}_\alpha(x) = j_\alpha e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{\varepsilon t} \theta(-t), \quad \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (2.1)$$

Здесь  $j_\alpha = (0, \mathbf{j})$ ,  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$  – закон сохранения тока. Также для простоты рассмотрим эволюцию монохроматической волны.

Зависимость  $\mathcal{A}_\alpha(x)$  от времени определяется уравнением

$$(g_{\alpha\beta} \partial_\mu^2 - \partial_\alpha \partial_\beta) \mathcal{A}_\beta(x) + \int d^4 x' \mathcal{P}_{\alpha\beta}(x - x') \mathcal{A}_\beta(x') = \mathcal{J}_\alpha(x), \quad (2.2)$$



где  $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(x-x')$  - поляризационный оператор фотона в магнитном поле и плазме.  $q^\mu = (q_0, \mathbf{k})$  это 4-вектор импульса фотона.

В замагниченной плазме, в общем случае, фотон будет обладать эллиптической поляризацией и иметь 3 поляризационных состояния. Однако в пределе  $B \gtrsim B_e$  и зарядово симметричной плазмы ( $\mu = 0$ ) векторы поляризации будут такими же, как и в чистом магнитном поле [2]:

$$\varepsilon_\alpha^{(1)}(q) = \frac{(q\varphi)_\alpha}{\sqrt{q_\perp^2}}, \quad \varepsilon_\alpha^{(2)}(q) = \frac{(q\tilde{\varphi})_\alpha}{\sqrt{q_\parallel^2}} \quad (2.3)$$

Однако следует подчеркнуть, что это совпадение является приблизительным с точностью до  $O(1/eB)$  и  $O(\alpha^2)$ .

Здесь четырехвекторы с индексами  $\perp$  и  $\parallel$  принадлежат евклидову  $\{1, 2\}$ -подпространству и  $\{0, 3\}$ -подпространству Минковского соответственно в системе отсчета, где магнитная поле направлено вдоль третьей оси;  $(ab)_\perp = (a\varphi\varphi b) = a_\alpha\varphi_\alpha^\rho\varphi_{\rho\beta}b_\beta$ ,  $(ab)_\parallel = (a\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}b) = a_\alpha\tilde{\varphi}_\alpha^\rho\tilde{\varphi}_{\rho\beta}b_\beta$ . Тензоры  $\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$  и  $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\varphi_{\mu\nu}$  - безразмерный и дуальный тензор поля соответственно.

Решение уравнения (2.2) для фотонов мод  $\lambda = 1, 2$  можно представить в виде:

$$\mathcal{A}_\alpha^\lambda(x) = V_\alpha^{(\lambda)}(0, \mathbf{x}) \operatorname{Re} F^{(\lambda)}(t), \quad (2.4)$$

где

$$V_\alpha^{(\lambda)}(0, \mathbf{x}) = 2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \varepsilon_\alpha^{(\lambda)}(\varepsilon^{(\lambda)}j). \quad (2.5)$$

Функция  $F^{(\lambda)}(t)$  может быть представлена в форме двух слагаемых

$$F(t) = F_{pole}(t) + F_{cut}(t), \quad (2.6)$$

первое из которых определяется вычетом в точке  $q_0 = \omega$ , являющейся решением уравнения дисперсии  $q^2 - \mathcal{P}^{(\lambda)}(q) = 0$ , в кинематической области, где собственное значение поляризационного оператора фотона,  $\mathcal{P}^{(\lambda)}(q)$ , вещественно.

Второе слагаемое определяет зависимость электромагнитного поля от времени в области выше порога рождения электрон-позитронной пары и имеет вид фурье-интеграла:

$$F_{cut}^{(\lambda)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} F_{cut}^{(\lambda)}(q_0) e^{-iq_0 t}, \quad (2.7)$$

$$F_{cut}^{(\lambda)}(q_0) = \frac{2 \theta(q_0 - 2m_e) I^{(\lambda)}}{q_0 ([q_0^2 - \mathbf{k}^2 - R^{(\lambda)}]^2 + [I^{(\lambda)}]^2)}, \quad (2.8)$$

где  $R \equiv Re\mathcal{P}^{(\lambda)}(q_0)$  – реальная,  $I \equiv -Im\mathcal{P}^{(\lambda)}(q_0 + i\varepsilon)$  – мнимая части поляризованного оператора фотона в замагниченной плазме. Мнимая часть может быть получена из коэффициента поглощения фотона

$$W_{abs}^{(\lambda)} = W_{\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e^+ e^-} + W_{\gamma^{(\lambda)} e^{\pm} \rightarrow e^{\pm}}. \quad (2.9)$$

С учетом процессов излучения фотонов, (2.9) может быть представлена в следующей форме (см., например, [39, 50, 51]):

$$Im\mathcal{P}^{(\lambda)} = -2q_0[1 - \exp(-q_0/T)]W_{abs}^{(\lambda)}. \quad (2.10)$$

Выражения для  $W_{\gamma^{(\lambda)} e^{\pm} \rightarrow e^{\pm}}$  для  $\lambda = 1, 2$  могут быть получены из работы [49] и представлены в следующей форме

$$W_{\gamma^{(1)} e^{\pm} \rightarrow e^{\pm}} = \frac{\alpha e B}{2q_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_{E_{\ell}^{\epsilon}}(1 - f_{E_{\ell}^{\epsilon}+q_0})}{\sqrt{(M_n^2 - M_{\ell}^2 - q_{\parallel}^2)^2 - 4q_{\parallel}^2 M_{\ell}^2}} \times \quad (2.11)$$

$$\times \left\{ [2eB(n + \ell) - q_{\parallel}^2](I_{n,\ell-1}^2 + I_{n-1,\ell}^2) - 8eB\sqrt{\ell n} I_{n,\ell-1} I_{n-1,\ell} \right\},$$

$$W_{\gamma^{(2)} e^{\pm} \rightarrow e^{\pm}} = \frac{\alpha e B}{2q_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{f_{E_{\ell}^{\epsilon}}(1 - f_{E_{\ell}^{\epsilon}+q_0})}{\sqrt{(M_n^2 - M_{\ell}^2 - q_{\parallel}^2)^2 - 4q_{\parallel}^2 M_{\ell}^2}} \times \quad (2.12)$$

$$\times \left\{ \left[ \frac{(2eB(n - \ell))^2}{q_{\parallel}^2} - 2eB(n + \ell) - 4m^2 \right] (I_{n,\ell}^2 + I_{n-1,\ell-1}^2) - 8eB\sqrt{\ell n} I_{n,\ell} I_{n-1,\ell-1} \right\},$$

$$E_{\ell}^{\epsilon} = \frac{1}{2q_{\parallel}^2} \left[ q_0 (M_n^2 - M_{\ell}^2 - q_{\parallel}^2) + \epsilon k_z \sqrt{(M_n^2 - M_{\ell}^2 - q_{\parallel}^2)^2 - 4q_{\parallel}^2 M_{\ell}^2} \right],$$

где  $M_\ell = \sqrt{m^2 + 2eB\ell}$ ,  $f_{E_\ell} = \{\exp[E_\ell/T] + 1\}^{-1}$ ,  $I_{n,\ell} \equiv I_{n,\ell}(q_\perp^2/(2eB))$ ,

$$\begin{aligned} I_{n,\ell}(x) &= \sqrt{\frac{\ell!}{n!}} e^{-x/2} x^{(n-\ell)/2} L_\ell^{n-\ell}(x), \\ I_{\ell,n}(x) &= (-1)^{n-\ell} I_{n,\ell}(x), \quad n \geq \ell, \end{aligned} \quad (2.13)$$

and  $L_n^k(x)$  – обобщенные полиномы Лагерра,

$$n_0 = \ell + \left\lfloor \frac{q_\parallel^2 + 2M_\ell \sqrt{q_\parallel^2}}{2eB} \right\rfloor, \quad (2.14)$$

$[x]$  – целая часть от  $x$ .

Значения  $W_{\gamma^{(\lambda)} \rightarrow e^+e^-}$  могут быть получены из (2.11) и (2.12) с использованием перекрестной симметрии.

Реальная часть поляризационного оператора может быть восстановлена по его мнимой части с помощью дисперсионного соотношения с одним вычитанием:

$$\mathcal{P}^{(\lambda)}(t) = \int_0^\infty \frac{\text{Im}(\mathcal{P}^{(\lambda)}(t')) dt'}{t' - t - i0} - \mathcal{P}^{(\lambda)}(0), \quad t = q_0^2. \quad (2.15)$$

Выражения (2.7)-(2.9) с учетом (2.15) решают задачу о нахождении временной зависимости волновой функции фотона в присутствии сильно замагниченной плазмы.

Строго говоря, вследствие порогового поведения Фурье-образа  $F_{cut}(q_0)$  характер временного затухания функции  $F_{cut}(t)$ , а значит и волновой функции  $\mathcal{A}_\mu(t)$ , отличается от экспоненциального. Однако, на протяжении некоторого характерного отрезка времени ( $\sim [W_{abs}^{(\lambda)}]^{-1}$ ), зависимость волновой функции можно приближенно описать как экспоненциально затухающие гармонические колебания

$$\mathcal{A}_\mu^{(\lambda)}(t) \sim e^{-\gamma_{\text{eff}}^{(\lambda)} t/2} \cos(\omega_{\text{eff}} t + \phi_0). \quad (2.16)$$

Здесь  $\omega_{\text{eff}}$  и  $\gamma_{\text{eff}}^{(\lambda)}$  – эффективная частота и коэффициент поглощения фотона моды  $\lambda$  соответственно, которые должны быть найдены с использованием (2.7)-(2.9) для каждого значения импульса  $\mathbf{k}$ , что определяет эффективный закон дисперсии фотона в области его неустойчивости.

### 2.3. Численный анализ

Важную роль в астрофизических приложениях играет величина  $\gamma_{\text{eff}}$  определяющая интенсивность поглощения  $\gamma$ -квантов в магнитном поле за счет процессов  $\gamma \rightarrow e^+e^-$  и  $\gamma e^\pm \rightarrow e^\pm$ . Обычно в астрофизике используют выражение для коэффициента поглощения содержащее корневые сингулярности (см. например [17]). Наш анализ показывает, (см. рис. 1 и рис. 2) что вычисление коэффициента поглощения с учетом неэкспоненциального характера затухания приводит к конечному выражению для коэффициента поглощения фотона в окрестности резонансов  $q_0^2 = (\sqrt{m^2 + 2eB} \pm m)^2$ .

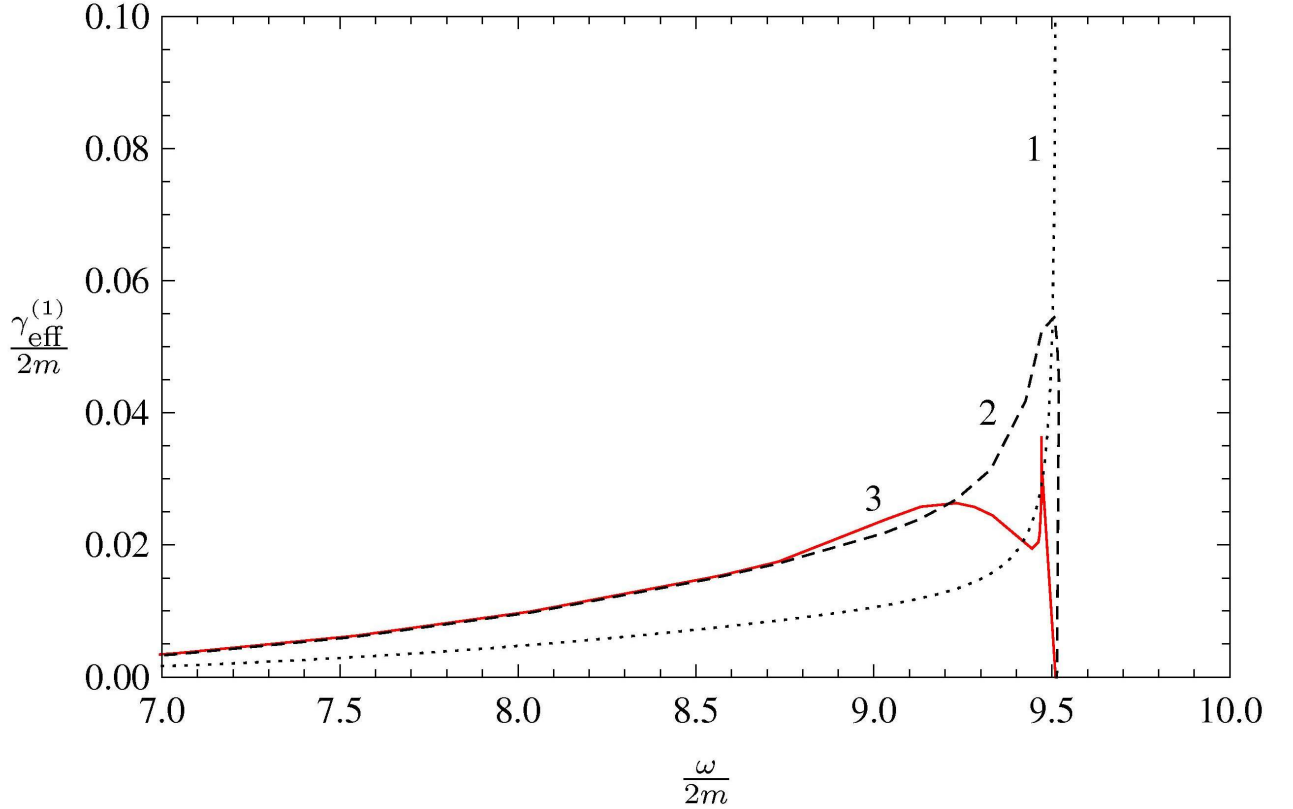


Рис. 2.1. Зависимость ширины распада фотона моды 1 от частоты в припороговых областях при  $B = 200B_e$ ,  $T = 1$  МэВ и  $\mu = 0$ . Линия 1 - коэффициент поглощения фотона  $W_{abs}^{(1)}$ , вычисленный в приближении дерева и содержащий корневые особенности; line 2 - ширина распада, полученная из комплексного решения дисперсионного уравнения на втором римановом листе [6]; линия 3 соответствует затуханию ширины  $\gamma_{\text{eff}}^{(1)}$ , вычисленному на основе приближения (2.16)

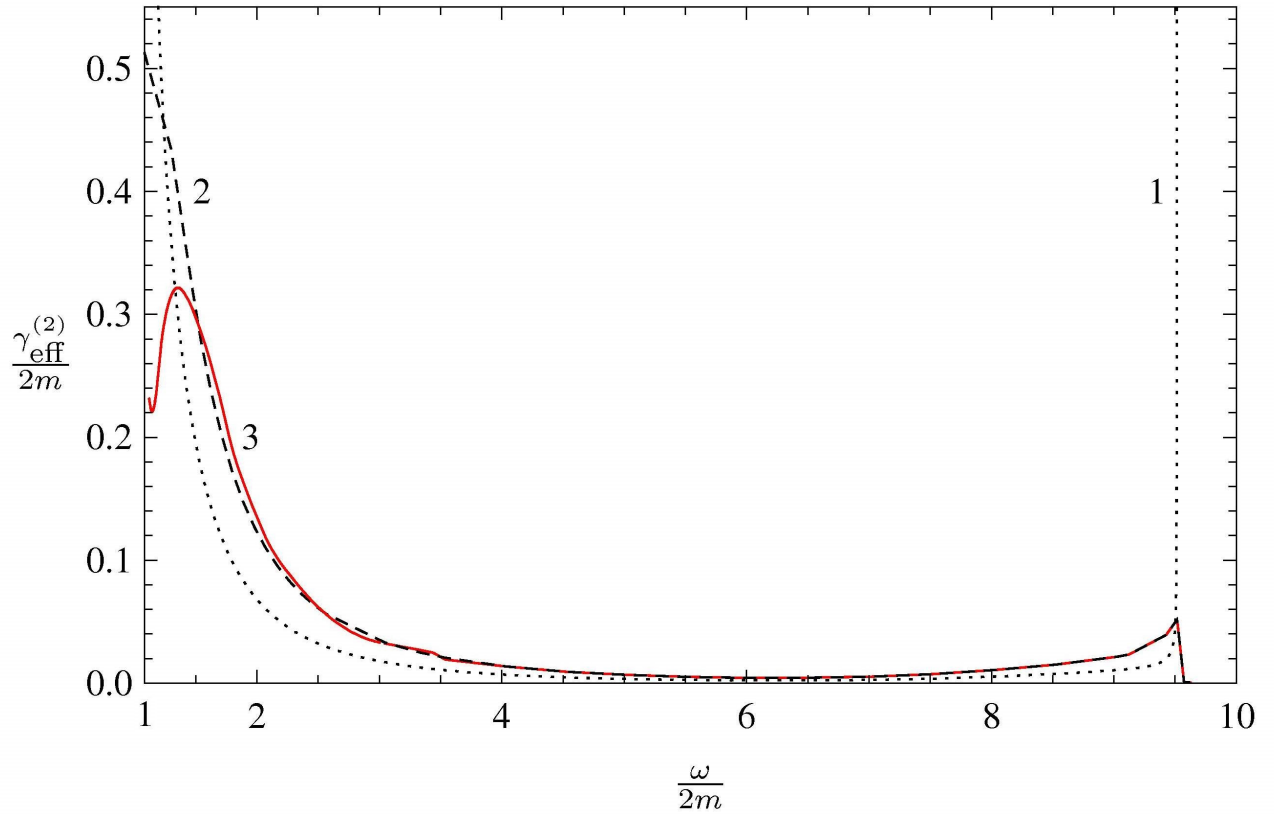


Рис. 2.2. Зависимость ширины распада фотона моды 2 от частоты в припороговых областях в припороговых областях для тех же параметров и обозначений, что и на рис. 2.1

## 2.4. Заключение

Исследован процесс распространения электромагнитной волны в сильно замагниченной, зарядово-симметричной плазме. Учитывая изменение дисперсионных свойств фотона в магнитном поле и плазме установлено, что аналогично случаю чистого магнитного поля, процесс затухания фотона в замагниченной плазме имеет неэкспоненциальный характер.

Показано, что коэффициент поглощения фотона существенно меньше по сравнению с известными в литературе результатами.

## Глава 3

# Решение кинетического уравнения с учетом резонансного комптоновского рассеяния.

## Введение

Одним из применений полученных результатов является решение уравнения переноса излучения в магнитосфере нейтронных звёзд. Подобная задача рассматривалась в работе [16], где приводится уравнение переноса для дальнейшего точного решения. В работе [7] эта задача была решена методом Монте-Карло и получены спектры для различных значений температуры и углов между направлением магнитного поля и импульсом фотона.

С другой стороны, есть уникальная возможность аналитически получить решение кинетического уравнения в окрестности резонанса для нахождения функции распределения фотонов двух возможных поляризаций в равновесной электрон-позитронной плазме в относительно сильном магнитном поле с учетом резонанса на виртуальном электроне.

## Решение кинетического уравнения вблизи резонанса

Рассмотрим цилиндрическую колонку с осью, направленной вдоль магнитного поля (магнитное поле  $B$  направлено вдоль оси  $z$ ), содержащую равновесную  $e^+e^-$  плазму при температуре  $T = \text{const} \ll m$  и сильного магнитного поля  $B \lesssim B_e$ , через которую проходит стационарный поток фотонов. Будем предполагать, что поток фотонов описывается неравновесной функцией распределения. При этом основной вклад в концентрацию электронов и позитронов будет давать нулевой уровень Ландау. В таком случае кинетическое уравнение будет

иметь вид:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{n}, \nabla_r f_\omega^{(\lambda)}(z, x)) = & \sum_{\lambda'=1}^2 \int dW_{\lambda \rightarrow \lambda'} \{ f_{E'}(1 - f_E) f_{\omega'}^{(\lambda)}(z, x)^{(\lambda')} (z, x) (1 + f_\omega^{(\lambda)}(z, x)) - \\
 & - f_E(1 - f_{E'}) f_\omega^{(\lambda)}(1 + f_{\omega'}(z, x)^{\lambda'}) \}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь  $x = \cos \theta$ ,  $x' = \cos \theta'$  ( $\theta, \theta'$  – угол между направлением магнитного поля и импульсами начального и конечного фотонов),  $\lambda, \lambda' = 1, 2$  поляризационные состояния фотонов,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, направленный вдоль импульса начального фотона,  $f_\omega^{(\lambda)}(z, x)$  и  $f_{\omega'}^{(\lambda')}(z, x')$  – функции распределения начального и конечного фотонов с энергиями  $\omega$  и  $\omega'$  соответственно,  $dW_{\lambda \rightarrow \lambda'}$  – коэффициент поглощения фотона, который может быть получен из результатов работ [51, 52],  $f_E = 1/[\exp(E/T) + 1]$  и  $f_{E'} = 1/[\exp(E'/T) + 1]$  – равновесные функции распределения начального и конечного электронов,  $E, E'$  – энергии начального и конечного электронов с нулевым химическим потенциалом, что характерно для магнитосфер нейтронных звёзд.

Поскольку рассматривается нерелятивистская плазма с температурой  $T \ll m$ , то энергии начального и конечного фотона будут близкими друг к другу. Раскладывая правую часть уравнения (3.1) по величине  $\Delta\omega = \omega - \omega' \ll \omega$ , где

$$\begin{aligned}
 \omega' = & \frac{1}{1 - x'^2} \left( m + \omega(1 - xx') - \right. \\
 & \left. - \sqrt{(m + \omega(1 - xx'))^2 - 2eB(1 - x'^2)} \right) \simeq \omega_{\text{res}} \simeq eB/m,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

мы можем воспользоваться методикой, развитой в работах [53, 54]:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f^{(\lambda)}(z, x)}{\partial z} &= \frac{1}{x} \sum_{\lambda'=1}^2 \int_{-1}^1 dx' \varphi_{\omega}^{\lambda\lambda'}(x, x') (f^{(\lambda')}(z, x') - f^{(\lambda)}(z, x)) + \\
&- \frac{\Delta\omega}{T} \frac{1}{x} \sum_{\lambda'=1}^2 \int_{-1}^1 dx' \varphi_{\omega}^{\lambda\lambda'}(x, x') \left[ T \frac{\partial f_{\omega}^{(\lambda')}(z, x')}{\partial \omega} + f_{\omega}^{(\lambda')}(z, x') \right] + \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 \omega}{T^2} \frac{1}{x} \sum_{\lambda'=1}^2 \int_{-1}^1 dx' \varphi_{\omega}^{\lambda\lambda'}(x, x') \left[ T^2 \frac{\partial^2 f_{\omega}^{(\lambda')}(z, x')}{\partial \omega^2} + \right. \\
&\left. + 2T \frac{\partial f_{\omega}^{(\lambda')}(z, x')}{\partial \omega^2} + f_{\omega}^{(\lambda')}(z, x') \right].
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Рассматривая задачу вблизи резонанса  $\omega = \omega_{\text{res}} \simeq eB/m$ , функции  $\varphi_{\omega}^{\lambda\lambda'}(x, x')$  могут быть получены из результата работы [52]

$$\begin{aligned}
\varphi_{\omega}^{11}(x, x') &\simeq \rho \left( \frac{\beta^2}{m^2} \frac{1}{\Delta^-} + \frac{[\omega - eB/m]^2}{\Delta^+} \right), \\
\varphi_{\omega}^{12}(x, x') &\simeq \rho \omega^2 \left( \frac{x^2}{\Delta^-} + \frac{\omega - eB/m}{2m^2 \Delta^+} \right), \\
\varphi_{\omega}^{22}(x, x') &\simeq \rho \frac{\omega^4}{4m^2} \left( \frac{4m^4 x^2 x'^2}{(eB)^2 \Delta^-} + \frac{1}{\Delta^+} \right), \\
\varphi_{\omega}^{21}(x, x') &\simeq \rho \omega^2 \left( \frac{x^2}{\Delta^-} + \frac{\omega - eB/m}{2m \Delta^+} \right),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$\rho = \frac{n_e}{8\pi} e^4 \left( \frac{\sqrt{m^2 + eB} + m}{\sqrt{m^2 + eB}} \right) \simeq \frac{n_e}{2\pi}, \tag{3.5}$$

$n_e$  – концентрация электронов,

$$\Delta^{\pm} = (\omega^2(1 - x^2) + 2\omega m - 2\beta)^2 + \left( \frac{E_n'' \Gamma^{\pm}}{2} \right)^2 \simeq \left( \frac{E_n'' \Gamma^{\pm}}{2} \right)^2, \tag{3.6}$$

где  $\Gamma^{\pm}$  – полная ширина поглощения электрона для двух возможных поляризационных состояний [26].

Решение уравнения (3.3) формально можно представить следующим образом



$$f_{\omega}^{(\lambda)}(z, x) = f_{0\omega} e^{-\chi_{\omega}^{(\lambda)}(x) \cdot z} + \frac{1}{x} \int_0^z dz' \int_{-1}^1 dx' e^{-\chi_{\omega}^{(\lambda)}(x) \cdot (z-z')} \times$$

$$\times \varphi_{\omega}^{\lambda\lambda'}(x, x') F_{\omega}^{(\lambda')}(z', x'), \quad (3.7)$$

где  $f_{0\omega} = [\exp(\omega/T) - 1]^{-1}$  – равновесная функция распределения фотонов, а

$$F_{\omega}^{(\lambda')}(z', x') = f_{\omega}^{(\lambda')}(z', x') - \frac{\Delta\omega}{T} \left[ T \frac{\partial f_{\omega}^{(\lambda')}(z', x')}{\partial \omega} + f_{\omega}^{(\lambda')}(z', x') \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 \omega}{T^2} \left[ T^2 \frac{\partial^2 f_{\omega}^{(\lambda')}(z', x')}{\partial \omega^2} + 2T \frac{\partial f_{\omega}^{(\lambda')}(z', x')}{\partial \omega^2} + f_{\omega}^{(\lambda')}(z', x') \right], \quad (3.8)$$

$$\chi_{\omega}^{(\lambda)}(x) \equiv \frac{1}{x} \int_{-1}^1 dx' \{ \varphi_{\omega}^{\lambda 1}(x, x') + \varphi_{\omega}^{\lambda 2}(x, x') \}. \quad (3.9)$$

Далее раскладываем функцию распределения фотонов по полиномам Лежандра  $\mathcal{P}_{\ell}(x)$  относительно переменной  $x$ :

$$f_{\omega}^{(\lambda)}(z, x) = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{\ell}^{(\lambda)}(z, \omega) \mathcal{P}_{\ell}(x), \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.7) с учетом (3.8) и применяя к полученному выражению преобразование Лапласа относительно переменной  $z$ , получим систему дифференциальных уравнений второго порядка относительно переменной  $\omega$

$$\frac{2}{2\ell+1} \bar{A}_{\ell}^{(\lambda)}(s, \omega) = \int_{-1}^1 \frac{f_{0\omega}^{(\lambda)}}{s + \chi_{\omega}^{(\lambda)}(x)} \mathcal{P}_{\ell}(x) dx +$$

$$+ \sum_{\ell'=0}^{\infty} \frac{1}{x} \int_{-1}^1 dx' \int_{-1}^1 dx \frac{P_{\ell}(x) P_{\ell'}(x')}{s + \chi_{\omega}^{(\lambda)}(x)} \varphi_{\omega}^{\lambda\lambda'}(x, x') \bar{\mathcal{F}}_{\ell'}^{(\lambda')}(s, \omega), \quad (3.11)$$

где

$$\bar{\mathcal{F}}_{\ell'}^{(\lambda')}(s, \omega) = \bar{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s, \omega) - \frac{\Delta\omega}{T} \left[ T \frac{\partial \bar{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s, \omega)}{\partial \omega} + \bar{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s, \omega) \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\Delta^2 \omega}{T^2} \left[ T^2 \frac{\partial^2 \bar{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s, \omega)}{\partial \omega^2} + 2T \frac{\partial \bar{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s, \omega)}{\partial \omega^2} + \bar{A}_{\ell'}^{(\lambda')}(s, \omega) \right], \quad (3.12)$$

$$\overline{A}_{\ell'}^{(\lambda)}(s, \omega) = \int_0^{\infty} A_{\ell'}^{(\lambda)}(z, \omega) e^{-sz} dz, \quad (3.13)$$

Система уравнений (3.11) с учетом (3.12) решает задачу о нахождении функции распределения фотонов. После применения обратного преобразования Лапласа, окончательная функция распределения фотонов поляризации  $\lambda$  можно представить в следующем виде

$$f_{\omega}^{(\lambda)}(z, x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\ell=0}^{\infty} P_{\ell}(x) \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds \cdot e^{sz} \overline{A}_{\ell}^{(\lambda)}(s, x, \omega), \quad (3.14)$$

где интеграл берется в комплексной плоскости по прямой  $\text{Re } s = \sigma$

## Заключение

Рассмотрено решение кинетического уравнения для нахождения функции распределения фотонов двух возможных поляризаций в равновесной нерелятивистской  $e^+e^-$  плазме в относительно сильном магнитном поле с учётом резонанса на виртуальном электроне. Используя преобразование Лапласа и разложение функции распределения по полиномам Лежандра задача сведена к системе дифференциальных уравнений на коэффициенты этого разложения. Решение представлено в виде интеграла в комплексной плоскости.

## Приложение А

### Точный пропагатор фермиона в магнитном поле

Для анализа возможных резонансных эффектов в процессах  $jf \rightarrow j'f'$  мы используем точный пропагатор фермиона в виде суммы по уровням Ландау [34, 55]. Он строится стандартным образом на основе полевых операторов:

$$\Psi(X) = \sum_{n,p_y,p_z,s} (a_{n,p}^s \Psi_{n,p,+}^s(X) + b_{n,p}^{\dagger s} \Psi_{n,p,-}^s(X)), \quad (\text{A.1})$$

где  $a$  - оператор уничтожения фермиона,  $b^\dagger$  - оператор рождения фермиона,  $\Psi_+$  и  $\Psi_-$  соответствуют решениям уравнения Дирака с положительной и отрицательной энергией соответственно. Пропагатор есть разность хронологически упорядоченного и нормально упорядоченного произведения полевых операторов:

$$\hat{S}(X, X') = T(\Psi(X)\bar{\Psi}(X')) - N(\Psi(X)\bar{\Psi}(X')). \quad (\text{A.2})$$

Результат удобно представить в следующем виде:

$$\hat{S}(X, X') = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{S}_n(X, X'), \quad (\text{A.3})$$

где вклад  $n$ -го уровня Ландау может записан в форме:

$$\hat{S}_n(X, X') = \sum_{s=\pm 1} \hat{S}_n^s(X, X'), \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{S}_n^s(X, X') = \int \frac{dp_0 dp_y dp_z}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i(p(X-X'))_{\parallel} + ip_y(X_2-X'_2)}}{p_{\parallel}^2 - M_n^2 - \mathcal{R}_{\Sigma}^s(p) + i\mathcal{I}_{\Sigma}^s(p)} \phi_{p,n}^s(X_1) \bar{\phi}_{p,n}^s(X'_1). \quad (\text{A.5})$$

Возникающие в знаменателе пропагатора (A.5) реальная  $\mathcal{R}_{\Sigma}^s(p)$  и мнимая  $\mathcal{I}_{\Sigma}^s(p)$  части собственного значения массового оператора фермиона, соответствующие поляризации состоянию  $s$ , есть результат вычисления радиационных поправок к массе фермиона в замагниченной плазме. Мнимая часть  $\mathcal{I}_{\Sigma}^s(p)$

может быть получена с помощью оптической теоремы и представлена в следующем виде [56, 57]:

$$\Im_{\Sigma}^s(p) = -\frac{1}{2} p_0 \Gamma_n^s, \quad (\text{A.6})$$

где  $\Gamma_n^s$  – полная ширина поглощения фермиона, находящегося в поляризованном состоянии  $s$  и занимающего  $n$ -й уровень Ландау.

Реальная часть массового оператора  $\Re_{\Sigma}^s(p)$  определяет изменение (по сравнению с вакуумным) закона дисперсии фермиона в присутствии замагниченной плазмы. В слабых магнитных полях,  $B \ll B_e$ , она определяется отношением [? ]:

$$\Re_{\Sigma}^s(p) = \frac{4\alpha m_f}{3\pi} \varkappa^2 \left[ \ln \varkappa^{-1} + C + \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{33}{16} \right], \quad \varkappa \ll 1, \quad (\text{A.7})$$

где  $C = 0.577\dots$  - постоянная Эйлера, динамический параметр  $\varkappa$  вводится следующим образом:

$$\varkappa = \frac{1}{m_f B_e} [-(F_{\mu\nu} p_{\nu})^2]^{1/2}. \quad (\text{A.8})$$

В сильных магнитных полях,  $B \gtrsim B_e$ , сдвиг массы фермиона в основном состоянии описывается дважды логарифмической асимптотикой [58]:

$$\Re_{\Sigma}^s(p) = \frac{\alpha}{4\pi} m_f \ln^2(2\beta). \quad (\text{A.9})$$

Из (A.7) и (A.9) следует, что как в слабых, так и в относительно сильных ( $B \lesssim 10^{16}$  Гс) магнитных полях поправка к массе фермиона, обусловленная вкладом  $\Re_{\Sigma}^s(p)$ , оказывается несущественной [26, 31].

## Приложение Б

### Результаты для $\mathcal{T}_k^{s''s}$

Аналогично приложению ??, факторы  $\mathcal{T}_k^{s''s}$ , входящие в (1.32), приведены для случая отрицательного заряда фермиона,  $\eta = -1$ , и могут быть получены с использованием волновых функций (1.12). Используется следующее обозначение:  $\mathcal{I}_{n,\ell} \equiv \mathcal{I}_{n,\ell}(q_\perp^2/(2\beta))$ .

1. В случае, когда  $j$  является скалярными током ( $k = S$ ), вычисления дают

$$\mathcal{T}_S^{--} = g_S j_S \mathcal{K}_3[(m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell} - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1}]; \quad (\text{Б.1})$$

$$\mathcal{T}_S^{-+} = -ig_S j_S \mathcal{K}_4[\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (\text{Б.2})$$

$$\mathcal{T}_S^{+-} = -ig_S j_S \mathcal{K}_4[\sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (\text{Б.3})$$

$$\mathcal{T}_S^{++} = g_S j_S \mathcal{K}_3[(m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell}]. \quad (\text{Б.4})$$

2. В случае, когда  $j$  является псевдоскалярными током ( $k = P$ ), получим

$$\mathcal{T}_P^{--} = g_P j_P \mathcal{K}_4[2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (\text{Б.5})$$

$$\mathcal{T}_P^{-+} = ig_P j_P \mathcal{K}_3[\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (\text{Б.6})$$

$$\mathcal{T}_P^{+-} = ig_P j_P \mathcal{K}_3[\sqrt{2\beta\ell}(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{I}_{n,\ell}]; \quad (\text{Б.7})$$

$$\mathcal{T}_P^{++} = -g_P j_P \mathcal{K}_4[(m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{I}_{n,\ell}]. \quad (\text{Б.8})$$

3. В случае, когда  $j$  является векторным током ( $k = V$ ), будем иметь

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{--} = & g_V [2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_1 j_V) \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_V) \mathcal{I}_{n,\ell} - \\ & - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell) \mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n) \mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] ; \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{-+} = & i g_V [\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_2 j_V) \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_V) \mathcal{I}_{n,\ell} + \\ & + 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] ; \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{+-} = & -i g_V [\sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_V) \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_2 j_V) \mathcal{I}_{n,\ell} + \\ & + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n) \mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - 2\beta\sqrt{\ell n} \mathcal{K}_4 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] ; \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_V^{++} = & g_V [2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_1 j_V) \mathcal{I}_{n,\ell} + (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_V) \mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - \\ & - \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n) \mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) - i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell) \mathcal{K}_3 \frac{(j_V \Lambda q) + i(j_V \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] . \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

4. В случае, когда  $j$  является псевдовекторным током ( $k = A$ ), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{--} = & -g_A[2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_2 j_A)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_A)\mathcal{I}_{n,\ell} + \\ & + \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)\mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] ; \end{aligned} \quad (\text{Б.13})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{-+} = & i g_A[\sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_1 j_A)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_A)\mathcal{I}_{n,\ell} - \\ & - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] ; \end{aligned} \quad (\text{Б.14})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{+-} = & -i g_A[\sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)(\mathcal{K}_1 j_A)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} + \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)(\mathcal{K}_1 j_A)\mathcal{I}_{n,\ell} - \\ & - 2\beta\sqrt{\ell n}\mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q + i(j_A \varphi q))}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1} - \\ & - (m_f + M_\ell)(m_f + M_n)\mathcal{K}_3 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell}] ; \end{aligned} \quad (\text{Б.15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^{++} = & -g_A[(m_f + M_\ell)(m_f + M_n)(\mathcal{K}_2 j_A)\mathcal{I}_{n-1,\ell-1} - 2\beta\sqrt{\ell n}(\mathcal{K}_2 j_A)\mathcal{I}_{n,\ell} + \\ & + \sqrt{2\beta \ell}(m_f + M_n)\mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) - i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n-1,\ell} - \\ & - \sqrt{2\beta n}(m_f + M_\ell)\mathcal{K}_4 \frac{(j_A \Lambda q) + i(j_A \varphi q)}{\sqrt{q_\perp^2}} \mathcal{I}_{n,\ell-1}] . \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

Отметим, что полученные амплитуды для векторной и аксиально-векторной вершин, после возведения в квадрат и суммирования по поляризационным состояниям фермионов, согласуются с ранее полученными результатами в работах [59–61].

## Список литературы

1. *Suleimanov V., Werner K.* Importance of Compton scattering for radiation spectra of isolated neutron stars with weak magnetic fields // *Astron. Astrophys.* 2007. P. 661–668.
2. *Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A.* Compton effect in strongly magnetized plasma // *Int. J. Mod. Phys.* 2009. Vol. A24. P. 3995–4008.
3. *Kuznetsov A. V., Rumyantsev D. A., Shlenev D. M.* Generalized two-point tree-level amplitude  $jf \rightarrow j'f'$  in a magnetized medium // *Int. J. Mod. Phys.* 2015. Vol. A30, no. 11. P. 1550049.
4. *Kostenko A., Thompson C.* QED Phenomena in an Ultrastrong Magnetic Field. I. Electron-Photon Scattering, Pair Creation, and Annihilation // *Astrophys. J.* 2018. Vol. 869, no. 1. P. 44 (1–19).
5. *Philippov A., Timokhin A., Spitkovsky A.* Origin of Pulsar Radio Emission // *Physical Review Letters*. 2020. Vol. 124, no. 24. P. 245101.
6. *Shabad A. E.* Polarization of Vacuum and quantum relativistic gas in an external field // *Tr. Fiz. Inst. Akad. Nauk SSSR*. 1988. Vol. 192. P. 5–152.
7. *Mushtukov A., Markozov I., Suleimanov V. et al.* Statistical features of multiple Compton scattering in a strong magnetic field // *Phys. Rev. D*. 2022. Vol. 105. P. 103027.
8. *Боровков М. Ю., Кузнецов А. В., Михеев Н. В.* Однопетлевая амплитуда перехода  $j \rightarrow f\bar{f} \rightarrow j'$  во внешнем электромагнитном поле // *Ядерная физика*. 1999. Т. 62, № 9. С. 1714–1722.
9. *Herold H.* Compton and Thomson scattering in strong magnetic fields // *Phys. Rev.* 1979. Vol. D19, no. 10. P. 2868–2875.
10. *Melrose D. B., Parle A. J.* Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. I Electron States // *Aust. J. Phys.* 1983. Vol. 36. P. 755–774.
11. *Daugherty J. K., Harding A. K.* Compton scattering in strong magnetic fields // *Astrophys. J.* 1986. Vol. 309. P. 362–371.



12. *Gonthier P. L., Harding A. K., Baring M. G. et al.* Compton scattering in ultrastrong magnetic fields: numerical and analytical behavior in the relativistic regime // *Astrophys. J.* 2000. Vol. 540. P. 907–922.
13. *Miller M. C.* Constraints on hydrostatic models of soft gamma-ray repeaters // *Astrophys. J. Lett.* 1995. Vol. 448.
14. *Bulik T., Miller M. C.* Spectral effects of the vacuum resonance in soft gamma-ray repeaters // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1997. Vol. 288, no. 3. P. 596–608.
15. *Gonthier P. L., Baring M. G., Eiles M. T. et al.* Compton scattering in strong magnetic fields: Spin-dependent influences at the cyclotron resonance // *Phys. Rev.* 2014. Vol. D90, no. 4. P. 043014.
16. *Mushtukov A. A., Nagirner D. I., Poutanen J.* Compton scattering S-matrix and cross section in strong magnetic field // *Phys. Rev.* 2016. Vol. D93, no. 10. P. 105003.
17. *Harding A. C., Baring M. G., Gonthier P. L.* Photon Splitting Cascades in Gamma-Ray Pulsars and the Spectrum of PSR1509-58 // *Astrophys. J.* 1997. Vol. 476. P. 246.
18. *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Квантовая электродинамика. Москва: Наука, 1989. 728 с.
19. *Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A.* Compton effect in strongly magnetized plasma // *Int. J. Mod. Phys.* 2009. Vol. A24. P. 3995–4008.
20. *Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A., Stus' N. S.* Photon splitting and Compton scattering in strongly magnetized hot plasma // *Phys. Rev.* 2012. Vol. D86. P. 043007.
21. *Rumyantsev D. A., Shlenev D., Yarkov A.* Resonances in Compton-Like scattering processes in an external magnetized medium // *JETP.* 2017. Vol. 125. P. 410–419.
22. *Wadiasingh Z., Baring M. G., Gonthier P. L., Harding A. K.* Resonant Inverse Compton Scattering Spectra from Highly-magnetized Neutron Stars // *Astrophys. J.* 2018. Vol. 854, no. 2. P. 98.

23. *Peccei R. D., Quinn H. R.* Constraints imposed by CP conservation in the presence of instantons // *Phys. Rev.* 1977. Vol. D16. P. 1791–1797.
24. *Raffelt G. G.* Stars as laboratories for fundamental physics. Chicago: University of Chicago Press, 1996. 664 p.
25. *Окунь Л.* Лептоны и кварки. Москва: Наука, 1990. 346 с.
26. *Kuznetsov A. V., Mikheev N. V.* Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003. 120 p.
27. *Johnson M. H., Lippmann B. A.* Motion in a constant magnetic field // *Physical Review.* 1949. Vol. 76, no. 6. P. 828–832.
28. *Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б.* Квантовая электродинамика. Москва: Физматгиз, 1959. 656 с.
29. *Соколов А. А., Тернов И. М.* Синхротронное излучение. Москва: Наука, 1966. 228 с.
30. *Melrose D. B., Parle A. J.* Quantum electrodynamics in strong magnetic fields. I Electron States // *Aust. J. Phys.* 1983. Vol. 36. P. 755–774.
31. *Соколов А. А., Тернов И. М.* Релятивистский электрон. Москва: Наука, 1983. 304 с.
32. *Bhattacharya K., Pal P. B.* Inverse beta decay of arbitrarily polarized neutrons in a magnetic field // *Pramana J. Phys.* 2004. Vol. 62. P. 1041–1058.
33. *Balantsev I. A., Popov Yu. V., Studenikin A. I.* On the problem of relativistic particles motion in strong magnetic field and dense matter // *J. Phys.* 2011. Vol. A44. P. 255301 (1–13).
34. *Kuznetsov A., Mikheev N.* Electroweak processes in external active media. 2013. Vol. 252. P. pp 1–271.
35. *Пескин М., Шредер Д.* Введение в квантовую теорию поля. Ижевск: РХД, 2001. 784 с.
36. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 1108 с.
37. *Adler S. L.* Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field. //

- Annals of Physics*. 1971. Vol. 67. P. 599–647.
38. *Thompson C., Duncan R. C.* The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - I. Radiative mechanism for outbursts // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 1995. Vol. 275. P. 255–300.
  39. *Weldon H. A.* Simple rules for discontinuities in finite temperature Field Theory // *Phys. Rev.* 1983. Vol. D28. P. 2007–2037.
  40. *Mushtukov A. A., Nagirner D. I., Poutanen J.* Compton scattering S-matrix and cross section in strong magnetic field // *Phys. Rev.* 2016. Vol. D93, no. 10. P. 105003.
  41. *Goldreich P., Julian W. H.* Pulsar electrodynamics // *Astrophys. J.* 1969. Vol. 157. P. 869–880.
  42. *Pavlov G. G., Bezchastnov V. G., Meszaros P., Alexander S. G.* Radiative widths and splitting of cyclotron lines in superstrong magnetic fields // *Astrophys. J.* 1991. Vol. 380. P. 541–549.
  43. *Клепиков Н. П.* Излучение фотонов и электрон-позитронных пар в магнитном поле // *ЖЭТФ*. 1954. Т. 26, № 1. С. 19–34.
  44. *Baier V. N., Katkov V. M.* Pair creation by a photon in a strong magnetic field // *Phys. Rev.* 2007. Vol. D75, no. 7. P. 073009.
  45. *Poutanen J.* Rosseland and Flux Mean Opacities for Compton Scattering // *Astrophys. J.* 2017. Vol. 835,119, no. 2.
  46. *Olausen S. A., Kaspi V. M.* The McGill magnetar catalog // *Astrophys. J. Suppl.* 2014. Vol. 212, no. 1. P. 6.
  47. *Thompson C., Lyutikov M., Kulkarni S. R.* Electrodynamics of magnetars: implications for the persistent x-ray emission and spindown of the soft gamma repeaters and anomalous x-ray pulsars // *Astrophys. J.* 2002. Vol. 574, no. 1. P. 332–355.
  48. *Duncan R. C., Thompson C.* Formation of very strongly magnetized neutron stars - Implications for gamma-ray bursts // *Astrophys. J.* 1992. Vol. 392, no. 1. P. L9–L13.

49. *Михеев Н. В., Чистяков М.* Затухание фотона в результате рождения электрон-позитронной пары в сильном магнитном поле // *Письма в журн. эксперим. и теор. физ.* 2001. Т. 73, № 12. С. 726–730.
50. *Шабад А. Е.* Поляризация вакуума и квантового релятивистского газа во внешнем поле // *Тр. ФИАН СССР “Поляризационные эффекты во внешних калибровочных полях”*. 1988. Т. 192. С. 5–152.
51. *Румянцев Д. А., Шленев Д. М., Ярков А. А.* Резонансы в комптоноподобных процессах рассеяния во внешней замагниченной среде // *ЖЭТФ*. 2017. Т. 152, № 3. С. 483–494.
52. *Chistyakov M. V., Rumyantsev D. A., Yarkov A. A.* Effect of a strongly magnetized plasma on the resonant photon scattering process // *J. Phys.: Conf. Ser.* Vol. 1690. IOP Publishing, 2020. P. 012015.
53. *A.S. K.* The Establishment of Thermal Equilibrium between Quanta and Electrons // *JETP*. 1957. Vol. 4, no. 5. P. 876–885.
54. *Ю.Э. Л.* Комптонизация в сверхсильном магнитном поле. I // *Астрофизика*. 1988. Т. 28, № 1.
55. *Kuznetsov A. V., Okrugin A. A.* The exact electron propagator in a magnetic field as the sum over Landau levels on a basis of the Dirac equation exact solutions // *Int. J. Mod. Phys.* 2011. Vol. A26. P. 2725–2733.
56. *Борисов А. В., Вшивцев А. С., Жуковский В. Ч., Эминов П. А.* Фотоны и лептоны во внешних полях при конечных температуре и плотности // *УФН*. 1997. Т. 167, № 3. С. 241–267.
57. *Жуковский В. Ч., Мидодашвили П. Г., Эминов П. А.* Мнимая часть массового оператора электрона в постоянном поле при конечной температуре и плотности // *ЖЭТФ*. 1994. Т. 106, № 4. С. 929–935.
58. *Jancovici B.* Radiative Correction to the Ground-State Energy of an Electron in an Intense Magnetic Field // *Phys. Rev.* 1969. Vol. 187. P. 2275–2276.
59. *Latal H. G.* Cyclotron radiation in strong magnetic fields // *Astrophys. J.* 1986. Vol. 309. P. 372–382.

60. *Kaminker A. D., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. et al.* Neutrino emissivity from  $e^-$  synchrotron and  $e^-e^+$  annihilation processes in a strong magnetic field: General formalism and nonrelativistic limit // *Phys. Rev.* 1992. P. 3256–3264.
61. *Kaminker A. D., Gnedin O. Y., Yakovlev D. G. et al.* Neutrino emissivity from  $e^-e^+$  annihilation in a strong magnetic field: Hot, nondegenerate plasma // *Phys. Rev.* 1992. P. 4133–4139.