

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Научно-образовательный центр
“Квантовые процессы в астрофизической среде”

А. В. Кузнецов, Н. В. Михеев

Электрослабые процессы
во внешней активной среде

Ярославль 2010

УДК 52: 539.12

ББК В 315

К89

Рецензенты:

Отдел теоретической физики Государственного научного центра РФ
“Институт физики высоких энергий”, г. Протвино Московской обл.;
д-р физ.-мат. наук В. Б. Семикоз

Кузнецов, А. В. Электрослабые процессы во внешней активной
К89 среде: монография / А. В. Кузнецов, Н. В. Михеев; Яросл. гос. ун-т
им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2010. – 336 с.

ISBN 978-5-8397-0785-6

Содержание монографии относится к актуальному научному направлению, находящемуся на стыке квантовой теории поля, физики элементарных частиц, физики плазмы, физики сверхсильных магнитных полей и астрофизики. Представлено систематическое изложение методов расчетов электрослабых процессов, как древесных, так и петлевых, во внешней активной среде – сверхсильном электромагнитном поле и горячей плотной плазме.

Книга может быть полезна студентам и аспирантам, специализирующимся в области теоретической физики и изучившим основы квантовой теории поля и стандартной модели электрослабых взаимодействий, а также специалистам в области квантовой теории поля и физики элементарных частиц, интересующимся проблемами физики квантовых явлений во внешней активной среде.

Работа выполнена в рамках реализации аналитической ведомственной целевой программы Министерства образования и науки РФ “Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010 годы)” (проект № 2.1.1/510) и Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (Госконтракт № П2323).

Рис. 54. Табл. 2. Библиогр.: 318 назв.

УДК 52: 539.12

ББК В 315

ISBN 978-5-8397-0785-6

© Ярославский
государственный
университет, 2010

*Посвящается
светлой памяти
Карена Аветовича
Тер-Мартirosяна*

Оглавление

Предисловие	9
Введение	11
Обозначения	26
1 Точные решения волновых уравнений во внешнем поле	28
1.1. Решение уравнения Дирака во внешнем магнитном поле . . .	28
1.2. Решение для основного уровня Ландау	30
1.3. Скрещенное поле	31
2 Пропагаторы заряженных частиц в активной среде	32
2.1. Пропагаторы заряженных частиц в магнитном поле	34
2.1.1. Пропагаторы в формализме собственного времени Фока	34
2.1.2. Замечание о неинвариантной фазе	36
2.1.3. Пропагаторы в разложении по слабому полю	37
2.1.4. Пропагаторы в разложении по уровням Ландау	38
2.1.5. Пропагатор электрона в сильном поле	44
2.2. Пропагаторы заряженных частиц в скрещенном поле	45
2.3. Вывод пропагатора электрона в магнитном поле из решений уравнения Дирака	46
3 Дисперсия частиц во внешней активной среде	52
3.1. Дисперсия в среде: основные определения	52
3.2. Поляризационный оператор фотона во внешнем магнитном поле	55
3.3. Обобщённая двухточечная петлевая амплитуда $j \rightarrow f \bar{f} \rightarrow j'$ во внешнем электромагнитном поле	61
3.3.1. Магнитное поле	61
3.3.2. Скрещенное поле	66
3.4. Поляризационный оператор фотона в плазме	69
3.5. Массовый оператор электрона в сильном магнитном поле . . .	75

3.5.1.	Дважды логарифмическая асимптотика	75
3.5.2.	Однологарифмическая асимптотика массового оператора	79
3.5.3.	Вклад высших уровней Ландау	79
3.5.4.	Многопетлевой вклад в массовый оператор электрона .	81
3.6.	Собственно-энергетический оператор нейтрино в плазме . . .	82
3.6.1.	Определение оператора $\Sigma(p)$ в замагниченной плазме .	83
3.6.2.	Дополнительная энергия нейтрино в горячей плотной плазме	85
3.6.3.	О “радиационном распаде” нейтрино в плазме	90
3.6.4.	О слабом вкладе в дисперсию электрона в плазме . . .	96
3.7.	Собственно-энергетический оператор нейтрино во внешнем магнитном поле	100
3.7.1.	Определение оператора $\Sigma(p)$ в магнитном поле	100
3.7.2.	Вклад низших уровней Ландау в оператор $\Sigma(p)$	105
3.7.3.	Вычисление оператора $\Sigma(p)$ в “слабом” поле	110
3.7.4.	Случай умеренно сильного поля	114
3.7.5.	Оператор нейтрино $\Sigma(p)$ в скрещенном поле	120
3.7.6.	Магнитный момент нейтрино	123
3.8.	Собственно-энергетический оператор нейтрино в замагниченной плазме	124
3.8.1.	Рассеяние нейтрино на замагниченной плазме	125
3.8.2.	Матрица плотности плазменного электрона с фиксированным номером уровня Ландау	128
3.8.3.	Дополнительная энергия нейтрино в замагниченной плазме	131
3.8.4.	Дополнительная энергия нейтрино в предельных случаях	134
3.8.5.	Магнитный момент нейтрино в замагниченной плазме .	136
3.9.	Дисперсионные свойства электрона в аксионной среде	143
4	Электромагнитные взаимодействия	
	во внешней активной среде	148
4.1.	Распад фотона на e^-e^+ пару в сильном магнитном поле	148
4.1.1.	Прямой расчёт на основе решений уравнения Дирака .	148
4.1.2.	Расчёт на основе мнимой части петлевой диаграммы .	152
4.2.	Процесс $\gamma \rightarrow e^-e^+$ в скрещенном поле	153
4.2.1.	Прямой расчёт на основе решений уравнения Дирака .	153
4.2.2.	Расчёт на основе мнимой части петлевой диаграммы .	158

4.3.	Затухание фотона в результате рождения e^-e^+ пары в сильном магнитном поле	159
4.4.	Процесс расщепления фотона $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в сильном магнитном поле	168
4.4.1.	Исторический экскурс	168
4.4.2.	Кинематика расщепления фотона $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$	169
4.4.3.	Амплитуда процесса $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в сильном магнитном поле	171
4.4.4.	Вероятность расщепления фотона	173
4.5.	Электромагнитное взаимодействие дираковского нейтрино, обладающего магнитным моментом	179
4.5.1.	Магнитный момент дираковского нейтрино – астрофизические проявления	179
4.5.2.	Взаимодействие нейтрино с астрофизической средой . .	182
4.5.3.	Вероятность рождения правых нейтрино	184
4.5.4.	Вклады компонент плазмы в процессы рассеяния нейтрино	188
4.5.5.	Ограничения на магнитный момент нейтрино	191
5	Нейтрино-электронные взаимодействия	
	во внешней активной среде	198
5.1.	Процесс $\nu_e \rightarrow e^-W^+$ в сильном магнитном поле	198
5.2.	Процесс $\nu \rightarrow \nu e^-e^+$ в сильном магнитном поле	203
5.2.1.	Лагранжиан взаимодействия	203
5.2.2.	Расчёт дифференциальной вероятности на основе решений уравнения Дирака	204
5.2.3.	Вычисление вероятности распада $\nu \rightarrow \nu e^-e^+$ на основе мнимой части петлевой диаграммы	206
5.2.4.	Полная вероятность процесса	208
5.3.	Процесс $\nu \rightarrow \nu e^-e^+$ в скрещенном поле	210
5.3.1.	Исторический экскурс	210
5.3.2.	Расчёт дифференциальной вероятности на основе решений уравнения Дирака	212
5.3.3.	Полная вероятность процесса	218
5.4.	Возможные астрофизические проявления процесса $\nu \rightarrow \nu e^-e^+$ во внешнем магнитном поле	222
5.4.1.	Средняя потеря энергии и импульса нейтрино	222
5.4.2.	Условие применимости результата, полученного в поле, в присутствии плазмы	223
5.4.3.	Возможные астрофизические следствия	226

5.5. Нейтрино в сильно замагниченной электрон-позитронной плазме	227
5.5.1. Что мы понимаем под сильно замагниченной $e^- e^+$ -плазмой	228
5.5.2. Нейтрино-электронные процессы в сильно замагниченной плазме. Кинематический анализ	229
5.5.3. Вероятность процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$	232
5.5.4. Полная вероятность взаимодействия нейтрино с замагниченной электрон-позитронной плазмой	237
5.5.5. Средние потери энергии и импульса нейтрино	240
5.5.6. Интегральное действие нейтрино на замагниченную плазму	243
5.5.7. Нейтрино-электронные процессы с учётом вклада возбуждённых уровней Ландау	249
6 Нейтрино-фотонные взаимодействия во внешней активной среде	255
6.1. Взаимодействие $\nu\nu\gamma$ во внешней активной среде	255
6.1.1. Эффективный лагранжиан $\nu\nu\gamma$ -взаимодействия	255
6.1.2. Излучение фотона безмассовым нейтрино $\nu \rightarrow \nu\gamma$. . .	259
6.1.3. Нейтринный распад фотона $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$	263
6.2. Комптоноподобное взаимодействие нейтрино с фотонами . . .	268
6.2.1. Амплитуда процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в вакууме	268
6.2.2. Рассеяние нейтрино в кулоновском поле ядра	275
6.2.3. Влияние внешнего поля на процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$	277
6.2.4. Амплитуда и сечение процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в модели с нарушенной лево-правой симметрией	280
6.2.5. Проявления процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в астрофизике	282
6.3. Фоторождение нейтрино на ядрах в сильном магнитном поле	284
7 Процессы с участием слабо взаимодействующих псевдоскалярных частиц во внешней активной среде	291
Заключение	303
Литература	305
Предметный указатель	333

Предисловие

Обычно бывает нелегко определить основные даты создания новой науки – дату рождения, когда была сформулирована первая отчетливая идея, и период наступления зрелости, когда наука проявила себя как отдельная состоявшаяся дисциплина. Для *астрофизики элементарных частиц*, науки, которая очень интенсивно развивается в течение последних двух десятилетий, дату рождения скорее всего следует отнести к началу 1930-х годов. Именно тогда, после открытия нейтрона Дж. Чадвиком в 1932 году, концепция нейтронной звезды была сформулирована Л. Д. Ландау и независимо У. Бааде и Ф. Цвики. Начало периода наступления зрелости этой науки можно более или менее уверенно отнести к 1987 году, когда впервые были зарегистрированы внегалактические нейтрино от взрыва сверхновой SN1987A в Большом Магеллановом Облаке, галактике-спутнике Млечного Пути. В качестве даты завершения периода возмужания можно предложить 2001 год, когда в уникальном эксперименте на тяжеловодном детекторе Нейтринной обсерватории в Садбери (Канада) была разрешена загадка солнечных нейтрино.

За это время создано несколько книг, помогающих изучить основы данной науки, прежде всего это: Г. Г. Раффельт “Звёзды как лаборатории для фундаментальной физики” (Чикаго, 1996. – на англ. языке) и Г. В. Клапдор-Клайнгротхаус, К. Цюбер “Астрофизика элементарных частиц” (М., 2000. – рус. перевод). Однако новые факты и идеи появляются так быстро, что специалистам необходимо следить не только за журнальными статьями, но и за электронными препринтами, чтобы быть в курсе последних достижений.

Одно из направлений этой новой науки, с одной стороны, довольно трудное, а с другой – недостаточно отражённое в книгах или обзорах, имеет дело со взаимодействиями элементарных частиц в экстремальных условиях внутризвёздного вещества – в горячей плотной плазме и сильных электромагнитных полях. Данное научное направление, называемое “*Квантовая теория поля во внешней активной среде*”, было заложено в 1970-х годах и продолжает интенсивно развиваться.

Определённой вехой этого развития мы считаем нашу монографию: A. V. Kuznetsov, N. V. Mikheev “Electroweak processes in external electromagnetic fields” (Springer-Verlag, New York, 2003), где было представлено систематическое изложение методов расчётов квантовых процессов, как древесных, так и петлевых, во внешних электромагнитных полях.

Целью данной монографии является дальнейшее развитие методов расчётов электрослабых процессов во внешней активной среде. Сюда включены новые результаты исследований квантовых процессов в сверхсильном электромагнитном поле без учёта влияния плазмы. Рассмотрены также условия горячей плотной плазмы без влияния поля. По-видимому, наиболее интересными являются результаты, полученные с учётом совместного влияния как сильного магнитного поля, так и горячей плотной плазмы.

Монография может быть полезна студентам и аспирантам, специализирующимся по теоретической физике и изучившим основы квантовой теории поля и стандартной модели электрослабых взаимодействий, а также специалистам в области квантовой теории поля и физики элементарных частиц, интересующимся проблемами физики квантовых явлений во внешней активной среде.

При подготовке монографии авторами обращалось внимание на качество технической подготовки текста, и особенно математических формул, что обеспечено использованием издательской системы \LaTeX .

Большая часть результатов, представленных в данной монографии, была нами получена в соавторстве с нашими коллегами, аспирантами и студентами на кафедре теоретической физики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова. Мы благодарим Л. А. Василевскую, А. А. Гвоздева, Е. Н. Нарынскую, И. С. Огнева, А. А. Округина, Д. А. Румянцеву и М. В. Чистякова за сотрудничество и полезные обсуждения, а также выражаем признательность Г. Г. Раффельту (Институт физики Макса Планка, Мюнхен), в соавторстве с которым были получены важные результаты, касающиеся собственно-энергетического оператора нейтрино в магнитном поле. Авторы благодарны М. И. Высоцкому, Л. Б. Окуню, В. А. Рубакову и В. Б. Семикозу за плодотворные обсуждения. С тёплым чувством хочется упомянуть многочисленные живые дискуссии с Кареном Аветовичем Тер-Мартиросяном, энергичная поддержка которого в 90-е годы оказалась решающей для нашей научной группы.

Ярославль, ноябрь 2010

А. В. Кузнецов, Н. В. Михеев

Введение

В последние десятилетия одной из наиболее бурно развивающихся физических наук является космомикрoфизика, или астрофизика элементарных частиц, лежащая на стыке физики элементарных частиц, астрофизики и космологии [1–3]. Существенным стимулом её развития стало понимание важной роли квантовых процессов в динамике астрофизических объектов, а также в ранней Вселенной. В свою очередь, экстремальные физические условия – наличие горячей плотной плазмы и сильных электромагнитных полей – существующие внутри таких объектов, должны оказывать заметное влияние на протекание квантовых процессов, открывая или значительно усиливая реакции, кинематически запрещённые или сильно подавленные в вакууме. В связи с этим наблюдается устойчивый интерес к исследованиям взаимодействий элементарных частиц во внешней активной среде.

Это направление исследований имеет прямое отношение, по меньшей мере, к трём из перечисленных В. Л. Гинзбургом в 1999 году [4] проблем, особенно важных и интересных в физике и астрофизике:

- поведение вещества в сверхсильных магнитных полях;
- нейтронные звёзды и пульсары, сверхновые звёзды;
- нейтринная физика и астрономия, нейтринные осцилляции.

Как известно, в естественном виде материя на Земле редко существует в плазменном состоянии либо находится в нём весьма непродолжительное время. Однако, в противоположность этому, подавляющая часть барионного вещества Вселенной в целом представляет из себя именно плазму в том или ином виде. Теоретическое и экспериментальное исследование данного состояния материи имеет достаточно долгую историю и до сих пор остаётся актуальным. В настоящее время одним из приоритетных направлений исследований является изучение плазмы, находящейся в экстремальных состояниях. Такие состояния, как правило, возникают либо при высокой температуре

или плотности, либо в сверхсильных внешних полях. Плазма, находящаяся в этих условиях, зачастую обладает совершенно новыми и необычными свойствами, изучение которых необходимо для описания как поведения самой плазмы, так и объектов, в которых она присутствует. Соответствующие условия для возникновения такой плазмы могли возникать на первых этапах эволюции Вселенной, когда она была очень горячей. Похожая ситуация может также реализоваться в мощных звёздных катаклизмах и внутри компактных астрофизических объектов, обладающих очень высокой плотностью. Экстремальные значения физических параметров – температуры, плотности, интенсивности магнитного поля, компонентного состава, – возникающие при взрывах сверхновых [5, 6], позволяют характеризовать эти объекты как уникальные естественные лаборатории для изучения физических свойств плазмы при условиях, которые в настоящее время не могут быть реализованы в наземных экспериментах [7–9].

Тесная взаимосвязь закономерностей микромира и макромира, реализующаяся при коллапсе ядра сверхновой, где одновременно “работают” законы общей теории относительности, физики атомного ядра и элементарных частиц, позволяет не только анализировать физические свойства плазмы в этих уникальных условиях, но и исследовать влияние горячей плотной плазмы на квантовые процессы, определять фундаментальные характеристики частиц на основе астрофизических данных и, наконец, изучать влияние физики микромира на астродинамику [1, 2].

Различают два основных типа сверхновых, где горячая плотная плазма является основной компонентой вещества. Признак *сверхновых типа I* – отсутствие в их спектрах линий водорода. *Сверхновые типа II* – звёзды, у которых линии водорода наблюдаются. Каждый из типов делится на подтипы (a, b, c, ...). Сверхновые типа Ia имеют наиболее универсальные характеристики, и сходство в поведении наводит на мысль, что в их основе лежит один и тот же механизм. В настоящее время считается, что сверхновые типа Ia являются термоядерными взрывами белых карликов в рамках бинарных систем [10, 11]. Компактная звезда за счёт аккреции вещества своего компаньона, лежащего на главной последовательности, увеличивает свою массу до критического значения и затем взрывается. Стандартность свойств SNIa позволяет их использовать для определения расстояний до материнских галактик. При этом употребляется термин “стандартная космологическая свеча”.

Изучение плазмы при экстремальных значениях физических параметров, которые реализуются при взрыве сверхновой, является одним из ярких примеров взаимодействия, казалось бы, далёких друг от друга разделов фи-

зической науки. Дело в том, что на короткое время такая плазма может быть получена в столкновениях элементарных частиц и ядер на ускорителях.

В текущем десятилетии наиболее существенный прогресс был достигнут именно в экспериментальном изучении плазмы. В первую очередь это связано с открытием в ЦЕРНе нового состояния вещества, названного кварк-глюонной плазмой, которое было получено при столкновении тяжёлых ядер [12]. В настоящее время оно продолжает активно исследоваться на ускорителе тяжёлых ионов RHIC [13], а также планируется его изучение на Большом адронном коллайдере (LHC) [14]. Известно, что кварки, в силу особенности сильного взаимодействия, связаны в бесцветные объекты – адроны – и не могут наблюдаться в свободном состоянии. Это явление получило название конфайнмента кварков и достаточно хорошо изучено. Однако при больших энергиях столкновения может образовываться плазма, в которой кварки и глюоны являются несвязанными, то есть происходит их деконфайнмент. Длительность кварк-глюонной стадии составляет лишь малую долю от всего времени эволюции системы сталкивающихся частиц, тем не менее её влияние оказывается весьма существенным и может наблюдаться по повышенному выходу странных мезонов, уменьшению выхода тяжёлых J/ψ -мезонов, увеличению выхода фотонов и лептон-антилептонных пар большой энергии [15]. Следует отметить, что, несмотря на то что свойства кварк-глюонной плазмы существенно отличаются от всех известных ранее состояний вещества, она оказывается во многом похожа на обычную электромагнитную плазму [16].

Исследуя свойства кварк-глюонной плазмы, важно понимать условия, в которых это состояние может реализоваться. Предполагается, что с увеличением плотности энергии ядерное вещество должно претерпеть два фазовых перехода – деконфайнмент цвета и восстановление киральной симметрии. Причём эти два перехода могут происходить одновременно. На температурной шкале деконфайнмент цвета должен происходить при температурах выше критической и предшествовать восстановлению киральной симметрии [15]. По современным расчётам значение критической температуры при нулевой барионной плотности составляет $T_c \simeq 170$ МэВ. Однако эта температура не остаётся постоянной, а монотонно убывает с ростом плотности барионного вещества. Плотность, соответствующая барионному химическому потенциалу $\mu \sim 600$ МэВ, отвечает нулевой критической температуре [17]. Таким образом, переход к кварк-глюонной плазме возможен не только при больших температурах, но и больших плотностях. Отметим, что второй случай является наиболее важным для астрофизических приложений, так как, по всей видимости, температура $T \sim 200$ МэВ не реализуется в извест-

ных астрофизических объектах и могла существовать во Вселенной лишь в первые 10^{-5} с после Большого взрыва. Тем не менее даже столь непродолжительная фаза могла оказать существенное влияние на последующую эволюцию Вселенной и иметь наблюдательные проявления [18]. Другой возможностью существования кварк-глюонной плазмы является холодное, но очень плотное вещество компактных астрофизических объектов, таких как нейтронные звёзды. Отметим, что, несмотря на то что строение нейтронных звёзд считается достаточно хорошо изученным, точное уравнение состояния вещества в их внутреннем ядре до сих пор остаётся неизвестным. При большой массе нейтронной звезды вещество этой области существенно отличается от идеального газа нуклонов. В частности, предполагается существование там таких экзотических состояний, как нейтронная и протонная сверхтекучесть и конденсат различных элементарных частиц [19]. В настоящее время дискутируется вопрос о возможности существования во внутреннем ядре массивных нейтронных звёзд вещества в состоянии кварк-глюонной плазмы и присутствия там цветовой сверхпроводимости [20]. Отметим, что наличие таких экзотических состояний вещества может существенно повлиять на наблюдательные характеристики и скорость остывания на ранних стадиях эволюции этих звёзд. Возможно, что наличие кварк-глюонного конденсата во внутреннем ядре позволит объяснить аномальные свойства отдельных классов нейтронных звёзд, получивших названия мягких рентгеновских повторителей (SGR – soft gamma repeaters) и аномальных рентгеновских пульсаров (AXP – anomalous X-ray pulsars).

Отдельной страницей в физике горячей плотной плазмы является исследование её влияния на протекание квантовых процессов, которые в условиях некоторых астрофизических объектов – сверхновых, молодых нейтронных звёзд – оказывают решающее воздействие на их макроскопические характеристики. Влияние плазмы на квантовые процессы имеет двоякий характер. С одной стороны, под её воздействием могут модифицироваться матричные элементы, что означает изменение динамики процессов. С другой стороны, плазма изменяет дисперсионные свойства частиц, то есть кинематику процессов. В результате могут открываться или значительно усиливаться реакции, кинематически запрещённые или сильно подавленные в вакууме. Среди наиболее известных процессов здесь можно указать распад фотона на пару нейтрино–антинейтрино, $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$. Этот процесс, запрещённый в вакууме, становится возможным вследствие того, что дисперсионные свойства фотона модифицируются плазмой и он приобретает эффективную массу. В результате распад $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ становится кинематически разрешённым и может происходить в звёздах [21,22]. Фактически этот так называемый плазменный

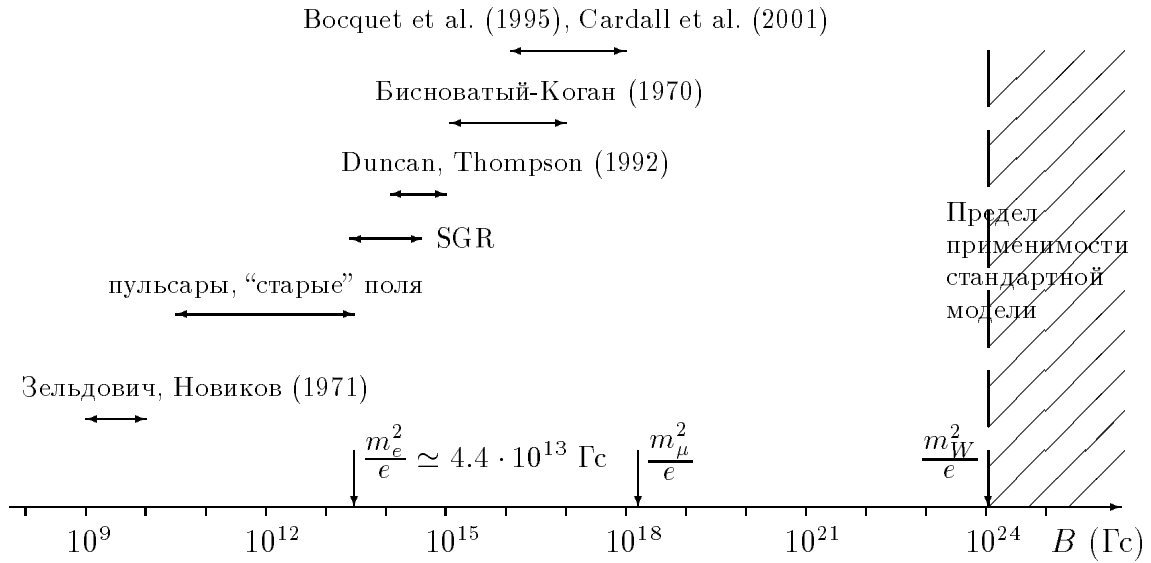


Рис. 1. Эволюция представлений о величине сильного магнитного поля в астрофизике

процесс является основным механизмом излучения нейтрино звёздами в широком диапазоне температур и плотностей, включая, например, физические условия внутри белых карликов и красных гигантов.

Наряду с горячей плотной плазмой значимое влияние на квантовые процессы может оказывать другая компонента активной астрофизической среды – сильное магнитное поле. Однако указанное влияние поля является существенным только в случае его достаточно большой интенсивности. Существует естественный масштаб величины магнитного поля, так называемое *критическое значение* $B_e = m_e^2/e \simeq 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс. Имеются аргументы в пользу того, что поля указанного и даже большего масштаба могут существовать в астрофизических объектах. Наибольший интерес представляют два класса звёзд, которые, по-видимому, являются остатками взрывов сверхновых. Это уже упомянутые повторные источники мягких гамма-всплесков (SGR) [23, 24] и аномальные рентгеновские пульсары (AXP) [25, 26], которые интерпретируются как магнитары [27] – нейтронные звёзды с магнитными полями величиной $\sim 10^{14} - 10^{15}$ Гс. Обсуждаются модели астрофизических процессов и объектов с магнитными полями, достигающими $10^{16} - 10^{18}$ Гс, как тороидального [28–32], так и полоидального типа [27, 33, 34].

Интересно проследить эволюцию взглядов на понятие “сильное магнитное поле” в астрофизике (см рис. 1). Если около сорока лет назад магнитные поля с напряжённостью $10^9 - 10^{11}$ Гс рассматривались как “очень сильные” [35], то сейчас принято считать, что поля $\sim 10^{12} - 10^{13}$ Гс, наблюдаемые на поверхности пульсаров, есть так называемые “старые” магнитные поля [36],

так что в момент катаклизма, в котором родилась нейтронная звезда, поля могли быть существенно больше.

В условиях ранней Вселенной в интервале между этапами фазового перехода КХД ($\sim 10^{-5}$ с) и нуклеосинтеза ($\sim 10^{-2} - 10^2$ с) в принципе могли бы возникать сильные, так называемые “первичные” магнитные поля с напряжённостью порядка 10^{23} Гс [37] и даже более ($\sim 10^{33}$ Гс [38]), эволюция которых в ходе расширения Вселенной могла бы обусловить существование на современной стадии когерентных *крупномасштабных* (~ 100 килопарсек) магнитных полей с напряжённостью $\sim 10^{-21}$ Гс. Эти поля, в свою очередь, могли бы быть усилены за счёт галактического динамо-механизма до наблюдаемых значений *галактических* магнитных полей $\sim 10^{-6}$ Гс. Возможные причины возникновения сильных первичных магнитных полей и динамика их эволюции в расширяющейся Вселенной являются предметом интенсивного исследования в настоящее время (см., например, обзор [39] и цитированные там работы).

Отметим, что, в отличие от магнитного, для электрического поля соответствующее критическое значение m_e^2/e является предельным, так как генерация в макроскопической области пространства электрического поля порядка критического приведёт к интенсивному рождению электрон-позитронных пар из вакуума, что эквивалентно короткому замыканию “машины”, генерирующей электрическое поле. Магнитное поле, в силу устойчивости вакуума, может превышать критическое значение B_e . Более того, магнитное поле играет стабилизирующую роль, если оно направлено перпендикулярно электрическому. В такой конфигурации электрическое поле \mathcal{E} может превышать критическое значение B_e . В инвариантной форме условие стабильности вакуума можно записать в виде

$$F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = 2(B^2 - \mathcal{E}^2) \geq 0.$$

До некоторого времени в астрофизических расчётах процессов типа взрывов сверхновых решались в сущности одномерные задачи, а в анализе влияния активной среды на квантовые процессы присутствовал только вклад плазмы. Однако имеются серьёзные аргументы в пользу того, что физика сверхновых значительно сложнее. В частности, необходим учёт вращения оболочки, а также возможного наличия сильного магнитного поля, причем эти два феномена оказываются связаны между собой. Действительно, если величина магнитного поля, развиваемого при коллапсе ядра сверхновой, может достигать критического значения $\sim 10^{13}$ Гс, то наличие вращения может приводить к возникновению *тороидального* магнитного по-

ля с увеличением интенсивности поля на дополнительный фактор $10^3 - 10^4$ [28, 29].

При таких астрофизических явлениях, как звёздный коллапс, отсутствие сильных магнитных полей представляется скорее экзотическим, чем типичным случаем. Действительно, уместно обсудить следующий ряд вопросов.

1. Что может считаться более экзотическим объектом: звезда, обладающая магнитным полем, или звезда без него? Насколько мы знаем астродинамику, звезда без магнитного поля должна скорее считаться экзотическим, чем типичным объектом. Точно так же для предсверхновой может считаться естественным наличие первичного магнитного поля. Как известно, первичное магнитное поле на уровне 100 Гс в процессе коллапса приведёт за счёт сохранения магнитного потока к генерации поля с интенсивностью $10^{12} - 10^{13}$ Гс.
2. Что может рассматриваться как более типичный случай: звезда, обладающая вращением, или звезда без вращения? По-видимому, звезда без вращения выглядит более экзотическим объектом.
3. Какой вид коллапса выглядит более экзотическим: сжатие без градиента или с градиентом угловой скорости? Поскольку скорости на периферии сжимающегося астрофизического объекта могут достигать релятивистского масштаба, сжатие с дифференциальным вращением, то есть с градиентом угловой скорости, выглядит более вероятным.

Все перечисленные моменты необходимы для реализации сценария *ротационного взрыва сверхновой* Г. С. Бисноватого-Когана [28, 29]. Основной деталью данного сценария является то, что исходно *полоидальные* магнитные силовые линии поля с напряжённостью $10^{12} - 10^{13}$ Гс, благодаря градиенту угловой скорости, закручиваются и уплотняются, образуя практически *тороидальное поле* с интенсивностью $\sim 10^{15} - 10^{17}$ Гс.

Подчеркнём, что такое поле действительно является весьма плотной средой с массовой плотностью

$$\rho = \frac{B^2}{8\pi} \simeq 0.4 \cdot 10^{10} \frac{\text{г}}{\text{см}^3} \left(\frac{B}{10^{16} \text{Гс}} \right)^2, \quad (1)$$

которая сопоставима с характерной массовой плотностью оболочки взрывающейся сверхновой, $10^{10} - 10^{12}$ г/см³. Таким образом, при детальном исследовании таких астрофизических процессов, как коллапс сверхновых, учёт

влияния комплексной активной среды, включающей как плазму, так и магнитное поле, является насущной необходимостью.

Отметим, что при решении ряда принципиальных задач о взаимодействии частиц с электромагнитным полем большое значение приобрел метод, в котором влияние внешнего поля учитывается не посредством теории возмущений, а на основе точных решений уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле. В квантовой релятивистской теории число случаев, когда уравнение Дирака решается в аналитическом виде, невелико: задача о движении электрона в кулоновском поле (атом водорода), в однородном магнитном поле, в поле плоской электромагнитной волны и в некоторых случаях комбинации однородных электрического и магнитного полей. Расчёт конкретных физических явлений предполагает использование диаграммной техники Фейнмана со следующим обобщением: в начальном и конечном состояниях заряженный фермион находится во внешнем поле и описывается решением уравнения Дирака в этом поле, внутренние линии заряженных фермионов соответствуют пропагаторам, построенным на основе этих решений. Данный метод полезен тем, что с его помощью можно анализировать процессы в полях большой напряжённости, когда учёт влияния поля по теории возмущений уже невозможен. В силу устойчивости вакуума в сверхсильном магнитном поле можно рассматривать процессы в полях с напряжённостью, значительно превышающей критическое значение B_e .

Описанный выше метод оказался эффективным при исследовании ряда процессов, идущих в сильных электромагнитных полях и имеющих прикладное значение, таких как β -распад в поле интенсивного лазерного излучения, квантовые эффекты при прохождении ультрарелятивистских заряженных частиц через монокристаллы и другие.

Среди различных электрослабых процессов особый интерес представляют нейтрино-электронные и нейтрино-фотонные процессы во внешней активной среде, поскольку физика нейтрино играет определяющую роль в таких астрофизических катаклизмах, как взрывы сверхновых и слияния нейтронных звёзд, а также в ранней Вселенной. В свою очередь, исследование нейтринных процессов в экстремальных физических условиях является интересным с концептуальной точки зрения, поскольку затрагивает фундаментальные проблемы квантовой теории поля.

При анализе конкретных нейтринных процессов в магнитном поле важны соотношения между тремя основными физическими параметрами. Один из них – это величина eB , характеризующая интенсивность поля, другой – масштаб энергий E начальной частицы или частиц, третий – масса заряженного фермиона. В нейтрино-электронных процессах это, очевидно мас-

са электрона. Нейтрино-фотонные процессы идут через фермионную петлю, где в принципе присутствуют все фундаментальные заряженные фермионы. Однако основную роль здесь также играет электрон как частица с максимальным удельным зарядом e/m_e , наиболее чувствительная к воздействию внешнего поля. В большинстве случаев нас будут интересовать магнитные поля, превышающие критическое значение $B_e = m_e^2/e$. В упомянутых астрофизических катаклизмах средние температуры составляют несколько МэВ, так что оправданным является приближение $E \gg m_e$. В связи со сказанным величина m_e будет считаться наименьшим физическим параметром.

При этом целесообразно рассматривать два предельных случая, в которых расчёты квантовых процессов во внешнем поле значительно упрощаются.

- *Предел относительно слабого поля*

Так называют предельный случай, когда энергия частицы является максимальным физическим параметром, $E^2 \gg eB$. Это условие можно переписать в релятивистски инвариантной форме. Отметим, что релятивистская инвариантность понимается здесь в узком смысле, т. е. относительно лоренц-преобразований вдоль поля (если мы говорим о присутствии только магнитного поля без электрического). Наличие двух ковариантов – тензора поля $F_{\mu\nu}$ и 4-импульса частицы $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ – позволяет, наряду с полевым инвариантом

$$e^2 F_{\mu\nu} F^{\nu\mu} \equiv e^2 (FF) = -2e^2 B^2, \quad (2)$$

построить динамический инвариант

$$e^2 p_\mu F^{\mu\nu} F_{\nu\rho} p^\rho \equiv e^2 (pFFp) = e^2 B^2 E^2 \sin^2 \theta, \quad (3)$$

где θ – угол между импульсом частицы \mathbf{p} и направлением поля \mathbf{B} . Инвариант (3) чаще всего используется в безразмерном виде:

$$\chi^2 = \frac{e^2 (pFFp)}{m_e^6}. \quad (4)$$

Таким образом, условие “слабости” поля принимает вид

$$[e^2 (FF)]^{3/2} \ll e^2 (pFFp). \quad (5)$$

Легко видеть, что условие (5) автоматически выполняется в случае *скрещенного поля*, в котором полевой инвариант строго равен нулю,

$(FF) = 0$. Это позволяет производить вычисления в пределе (5), используя приближение скрещенного поля. Отметим, что этот предел обладает достаточной общностью. Действительно, если при движении релятивистской частицы в относительно слабом магнитном поле $B < B_e$ динамический параметр χ достаточно велик, то в системе покоя этой частицы поле может оказаться заметно выше критического и будет очень близко к скрещенному полю. Даже в сильном магнитном поле $B \gg B_e$, но при условии, что $\chi \gg B/B_e$, результат, полученный в скрещенном поле, будет правильно описывать лидирующий вклад в вероятность процесса в чисто магнитном поле. Таким образом, расчёт в скрещенном поле представляет самостоятельный интерес. Техника вычислений в скрещенном поле была детально разработана А. И. Никишовым и В. И. Ритусом (см., например, [40]).

- *Предел сильного поля*

В этом пределе интенсивность поля B является максимальным физическим параметром, $eB \gg E^2$, или в инвариантной форме

$$[e^2(FF)]^{3/2} \gg e^2(pFFp). \quad (6)$$

В этом случае электроны находятся только на основном уровне Ландау. Поскольку для таких электронов движение в поперечном к полю направлении становится ненаблюдаемым, это также упрощает вычисления. Значительный вклад в развитие техники вычислений в сильном поле сделан В. В. Скобелевым и Ю. М. Лоскутовым, построившими так называемую “двумерную электродинамику” [41, 42] (см. также, например, [43] и цитированные там работы). Участниками нашего научного коллектива была развита ковариантная техника вычислений, позволяющая единообразно исследовать как случай сильного поля, так и более общий, когда условие (6) не выполняется (см., например, [44, 45]).

По-видимому, первыми исследованиями нейтрино-электронных процессов во внешнем электромагнитном поле были работы, посвящённые “синхротронному” излучению нейтринных пар $e \rightarrow e\nu\bar{\nu}$ [46] и нейтринному рождению электрон-позитронных пар $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ [47]. Анализ проводился в ситуации относительно слабого магнитного поля, когда энергия начальной частицы является доминирующим параметром, $E^2 \gg eB$, что, как уже отмечалось, соответствует приближению скрещенного поля. Позднее указанные процессы исследовались в том же приближении в работах [40, 48–55].

В статьях [51, 52] процесс $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ исследовался также при произвольных значениях магнитного поля и, в частности, в пределе сильного поля $eB \gg E_\nu^2$, когда электрон и позитрон могут рождаться только в состояниях, соответствующих основному уровню Ландау.

Одной из причин повышенного интереса к нейтринным процессам в экстремальных астрофизических условиях является их возможная связь с давней проблемой больших наблюдаемых *собственных скоростей пульсаров* [56, 57]. Среди возможных причин асимметричного взрыва сверхновой, при котором рождающийся пульсар мог бы приобретать начальный толчок (kick-velocity), обсуждается ряд сценариев, где интегральная асимметрия потока вылетающих нейтрино обусловлена их P -нечётным взаимодействием с веществом звезды, имеющей сильное магнитное поле [58–62]. Именно такое взаимодействие нейтрино с замагниченной плазмой приводит к асимметрии в дисперсии нейтрино, что в конечном итоге обуславливает начальный толчок пульсара.

Следует отметить, что условия, когда рассмотрение нейтрино-электронных процессов в сильном магнитном поле без учёта плазмы физически оправдано, могут реализоваться, например, при слиянии нейтронных звезд. Однако существует еще один вид астрофизических катаклизмов – взрывы сверхновых, где также могут развиваться сильные магнитные поля, но существует и плотная плазма. Например, в центре коллапсирующей звезды, где рождается большое число нейтрино, плотность достигает значений ядерной плотности и вещество оказывается непрозрачным для нейтрино. Основной причиной непрозрачности считается процесс упругого рассеяния нейтрино на нуклонах. Вклад нейтрино-электронного рассеяния, $\nu e^- \rightarrow \nu e^-$, заметно меньше и поэтому не учитывался в ранних попытках моделирования звездного коллапса (см., например, [63] и цитированные там работы). Однако, как показал анализ [64, 65], нейтрино-электронное рассеяние может вносить существенный вклад в энергетический баланс ядра коллапсирующей звезды.

Различные каналы нейтрино-электронного взаимодействия – аннигиляция $e^- e^+ \rightarrow \nu \bar{\nu}$, “синхротронное излучение” нейтринной пары $e^- \rightarrow e^- \nu \bar{\nu}$ [66, 67], рассеяние $\nu e^- \rightarrow \nu e^-$ [68] (более полный список работ можно найти в обзоре [69]) – исследовались в условиях как невырожденной, так и вырожденной электронной плазмы с учётом влияния относительно слабого магнитного поля. Нейтрино-электронные процессы в сильном магнитном поле и плазме анализировались в работах [70–76].

Среди квантовых процессов, свойства которых существенно, а иногда принципиально меняются под воздействием сильного внешнего магнитного поля, особый интерес представляют петлевые процессы, где в конечном и

начальном состояниях присутствуют только электрически нейтральные частицы, такие как нейтрино и фотоны. Воздействие внешнего поля на эти процессы обусловлено, во-первых, чувствительностью заряженных виртуальных фермионов к влиянию поля, при этом, как уже отмечалось, основную роль здесь играет электрон – частица с максимальным удельным зарядом e/m_e . Во-вторых, сильное магнитное поле существенно меняет дисперсионные свойства фотонов, а значит, и их кинематику.

Исследование двухвершинных петлевых процессов, к которым относятся поляризационный оператор фотона во внешнем поле, распады $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$, $\nu \rightarrow \nu\gamma$ и т. д., имеет длительную историю. Поляризационный оператор фотона во внешнем магнитном поле исследовался в начале 70-х годов в работах [41, 77–79] (см. также [80]). Фотон-нейтринные процессы $\nu \rightarrow \nu\gamma$, $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ изучались в случаях как сильных, так и относительно слабых полей, а также в общем случае в работах [44, 81–93].

Одним из наиболее интенсивно обсуждаемых трёхвершинных процессов является превращение фотонной пары в пару нейтрино-антинейтрино, $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$. История исследований этого процесса насчитывает уже более 40 лет [94–111]. Согласно теореме Гелл-Манна [94], в случае безмассовых нейтрино, реальных фотонов, и в локальном пределе слабого взаимодействия через векторные и аксиальные заряженные токи амплитуда процесса строго равна нулю. При любом отклонении от условий теоремы Гелл-Манна возникает ненулевая амплитуда: в случае массивных нейтрино [95, 96], при учёте нелокальности слабого взаимодействия через W - бозон [97–99], если один из фотонов [100] или оба фотона [101–103] находятся вне массовой поверхности. Ещё одно отклонение от теоремы Гелл-Манна, при котором процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ также возможен, реализуется, когда в эффективном лагранжиане нейтрино-лептонного взаимодействия нейтрино меняет киральность. При записи лагранжиана в форме нейтральных токов к этому приводит связь скалярных и псевдоскалярных токов. Наконец, воздействие внешнего магнитного поля также может катализировать данный процесс, если величина поля имеет масштаб критического значения $B_e = m_e^2/e$ [109–111].

Как в вакууме, так и в сильном магнитном поле у процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ имеется конкурирующий канал с дополнительным фотоном, $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}\gamma$, несмотря на лишний фактор α [43, 112–121]. Дело в том, что в вакууме, в случае стандартного нейтрино-электронного взаимодействия, трёхфотонный процесс не имеет такого сильного подавления, как двухфотонный. В сильном магнитном поле трёхфотонный процесс имеет дополнительное усиление. В работе [43], в частности, утверждалось, что процесс фоторождения нейтринной пары на ядре $\gamma + Ze \rightarrow Ze + \gamma + \nu + \bar{\nu}$, содержащий амплиту-

ду $\gamma\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$, под катализирующим влиянием поля может конкурировать с URCA - процессами. Однако, как показал анализ процесса с учётом дисперсии фотона в сильном поле [121], оценка вклада фоторождения нейтринной пары в работе [43] оказалась значительно завышена.

Ещё один трёхвершинный петлевой процесс, в течение многих лет находящийся в поле внимания теоретиков, – расщепление фотона на два фотона в магнитном поле, $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$, который в вакууме запрещен кинематически. Этому процессу посвящен обзор [122], где можно найти подробный список ранних статей; среди относительно недавних работ укажем [123–128]. В работах [127, 128] была продемонстрирована важность учёта дисперсионных свойств фотона в сильном магнитном поле, существенно изменяющих кинематику процесса и, как следствие, соотношение вероятностей различных поляризационных каналов.

Как уже отмечалось, исследования нейтринных и электромагнитных процессов в сильном магнитном поле представляют интерес не только в свете возможных применений в астрофизике и космологии ранней Вселенной, где возможны такие экстремальные физические условия. Эти исследования являются интересными также и с концептуальной точки зрения, поскольку затрагивают фундаментальные проблемы квантовой теории поля, в частности с точки зрения выяснения границ применимости теории возмущений.

Исследование асимптотических свойств диаграмм и операторов квантовой электродинамики в сверхсильных магнитных полях ведутся разными авторами достаточно давно. Так, история вычисления массового оператора электрона в сильном магнитном поле насчитывает уже более 50 лет (см., например, [129–135]), и, по-видимому, точка в данном вопросе еще не поставлена. Важность получения точного выражения для массового оператора электрона во внешнем поле проявилась, в частности, при исследовании возможности динамической генерации массы электрона в рамках квантовой электродинамики в магнитном поле. Это направление интенсивно развивается в литературе (см., например, [136–146]). Предполагается, что сценарий динамической генерации массы фермионов мог иметь место на стадии электрослабого фазового перехода в ранней Вселенной.

Принято считать, что в астрофизических процессах, имеющих характер катаклизма (взрыв сверхновой, слияние нейтронных звезд), определяющую роль играют нейтринные процессы. Следует заметить, что существенное значение при описании указанных катаклизмов могут также иметь исследования процессов с участием не только нейтрино, но и других слабо взаимодействующих частиц. В качестве таких частиц могли бы выступать лёгкие и даже строго безмассовые голдстоуновские и псевдоголдстоуновские

бозоны, возникающие при нарушении глобальной симметрии на некотором энергетическом масштабе.

Настоящая монография посвящена исследованию электрослабых процессов во внешней активной среде – горячей плотной плазме и сильном внешнем магнитном поле.

В главе 1 приведены точные решения волновых уравнений во внешнем электромагнитном поле, необходимые для дальнейшего анализа. Глава 2 содержит сводку формул для точных пропагаторов заряженных частиц во внешней активной среде, а также их приближённый вид в различных предельных случаях.

В главе 3 исследуется модификация внешней активной средой дисперсионных свойств частиц, участвующих в электрослабых процессах, – фотонов, электронов и нейтрино, а также экзотический эффект модификации дисперсионных свойств электрона в аксионной среде.

Глава 4 посвящена исследованию электромагнитных процессов во внешней активной среде. В методических целях приведён детальный анализ процесса распада фотона на электрон-позитронную пару в сильном магнитном поле и в приближении скрещенного поля. Исследовано затухание электромагнитной волны в присутствии сильного магнитного поля в кинематической области близкой к порогу рождения электрон-позитронной пары. Показано, что в данной области неэкспоненциальный характер затухания электромагнитного поля усилен. Обнаружено, что эффективная ширина распада фотона $\gamma \rightarrow e^+e^-$ существенно меньше по сравнению с известными в литературе результатами. Исследован процесс расщепления фотона $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в сильном магнитном поле как ниже, так и выше порога рождения электрон-позитронной пары с учётом неколлинеарности кинематики, обусловленной воздействием сильного магнитного поля на дисперсию фотонов. Показано, что существенный вклад в вероятность расщепления реального фотона дает конфигурация поляризаций фотона, запрещённая в коллинеарном пределе. Исследовано электромагнитное взаимодействие дираковского нейтрино, обладающего магнитным моментом, с внешней активной средой, произведён анализ возможных астрофизических следствий такого взаимодействия. На основе данных по радиальным распределениям и временной эволюции физических параметров из нескольких реалистичных моделей ядра сверхновой получено ограничение сверху на магнитный момент дираковского нейтрино.

В главе 5 исследовано нейтринное рождение электрон-позитронных пар во внешнем электромагнитном поле для случаев как сильных, так и относительно слабых полей. Получены оценки для доли энергии, теряемой нейтрино на рождение пар, и для асимметрии вылета нейтрино по отноше-

нию к магнитному полю звезды, обусловленной несохранением P -четности в нейтрино-электронном взаимодействии. Показано, что данная асимметрия могла бы быть источником возникновения больших собственных скоростей пульсаров. Исследован полный набор нейтрино-электронных процессов в сильно замагниченной плазме, включая экзотические процессы нейтринного излучения и поглощения электрон-позитронной пары $\nu \leftrightarrow \nu e^- e^+$. Вычислены потери энергии и импульса нейтрино при распространении сквозь замагниченную плазму в разнообразных физических ситуациях, при различных соотношениях между энергией нейтрино, напряжённостью поля, плотностью и температурой плазмы, которые важны при детальном описании эволюции астрофизических объектов.

В главе 6 изучается широкий набор нейтрино-фотонных процессов во внешней активной среде. Исследована эффективная вершина $\nu\nu\gamma$ -взаимодействия в различных аспектах: построен эффективный лагранжиан $\nu\nu\gamma$ -взаимодействия, исследованы процессы излучения фотона безмассовым нейтрино $\nu \rightarrow \nu\gamma$ и распада фотона на нейтринную пару в чистом магнитном поле и в замагниченной плазме, найдены оценки для вклада последнего процесса в нейтринную светимость плазмы в условиях взрыва сверхновой. Исследован однопетлевой комптоноподобный нейтрино-фотонный процесс $\nu\gamma \rightarrow \nu\gamma$. Приведен результат вычисления наиболее общей амплитуды процесса в стандартной модели электрослабого взаимодействия, охватывающий случаи виртуальных и реальных фотонов, массивных и безмассовых нейтрино, а также с учётом возможного смешивания в лептонном секторе. В рамках лево-право-симметричного расширения стандартной модели электрослабых взаимодействий исследован фотон-нейтринный процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в сильном магнитном поле. Анализируются его возможные астрофизические проявления. Получена конкурирующая с трёхвершинной четырёхвершинная амплитуда процесса взаимодействия трёх фотонов и нейтринной пары в сильном магнитном поле $\gamma\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$, исследован процесс фоторождения нейтринной пары на ядре $\gamma + Ze \rightarrow Ze + \gamma + \nu + \bar{\nu}$ в сильном магнитном поле. Показано, что с учётом дисперсии фотона в сильном поле катализирующее влияние последнего на данный процесс значительно уменьшается.

В главе 7 анализируются процессы с участием слабо взаимодействующих псевдоскалярных частиц во внешней активной среде.

Обозначения

Используется 4-метрика с сигнатурой $(+ - - -)$, а также естественная система единиц $\hbar = 1, c = 1, k_B = 1$.

Элементарный заряд: $e = |e|$. Заряд фермиона: e_f .

u^α – 4-вектор скорости среды, в системе покоя среды $u^\alpha = (1, \mathbf{0})$.

$F_{\alpha\beta}$ – тензор внешнего постоянного однородного электромагнитного поля, $\tilde{F}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu}$ – дуальный тензор ($\varepsilon^{0123} = -\varepsilon_{0123} = +1$).

$\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$ – безразмерный тензор внешнего магнитного поля,

$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \varphi^{\mu\nu}$ – дуальный безразмерный тензор:

$$\varphi^{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\varphi}^{\alpha\beta} = -\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

У 4-векторов и тензоров, стоящих внутри круглых скобок, тензорные индексы полагаются свернутыми последовательно, например:

$$(pFFp) = p^\alpha F_{\alpha\beta} F^{\beta\delta} p_\delta,$$

$$(FFp)_\alpha = F_{\alpha\beta} F^{\beta\delta} p_\delta,$$

$$(FF) = F_{\alpha\beta} F^{\beta\alpha}.$$

Обезразмеренные тензоры $\Lambda_{\alpha\beta} = (\varphi\varphi)_{\alpha\beta}$, $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\alpha\beta}$ связаны соотношением $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} - \Lambda_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$.

В системе отсчёта, где присутствует только внешнее магнитное поле \mathbf{B} , мы направляем пространственную 3-ю ось вдоль вектора \mathbf{B} . 4-векторы с индексами \perp и \parallel принадлежат евклидову $\{1, 2\}$ -подпространству и $\{0, 3\}$ -подпространству Минковского соответственно. Например, $p_\perp = (0, p_1, p_2, 0)$ и $p_\parallel = (p_0, 0, 0, p_3)$.

При этом

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \text{diag}(0, 1, 1, 0), \quad \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, 0, 0, -1). \quad (8)$$

Для произвольных 4-векторов P и Q используются обозначения

$$\begin{aligned} (PQ)_\parallel &= (P \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} Q) = P_0 Q_0 - P_3 Q_3, \\ (PQ)_\perp &= (P \varphi \varphi Q) = P_1 Q_1 + P_2 Q_2, \\ (PQ) &= (PQ)_\parallel - (PQ)_\perp. \end{aligned} \quad (9)$$

Используется стандартное представление матриц Дирака, при этом знак матрицы γ_5 тот, что принят в отечественной литературе:

$$\gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3,$$

то есть “левый” векторный слабый ток содержит матрицу $(1 + \gamma_5)$.

Остальные обозначения те же, что приняты в книге [147].

Глава 1

Точные решения волновых уравнений во внешнем поле

1.1. Решение уравнения Дирака во внешнем магнитном поле

Для вычисления S -матричных элементов, описывающих квантовые процессы во внешних полях, применяется стандартная процедура, основанная на диаграммной технике Фейнмана с использованием полевых операторов заряженных фермионов на основе разложения по решениям уравнения Дирака во внешнем магнитном поле.

Уравнение Дирака для электрона с массой m_e и зарядом $(-e)$ в магнитном поле \mathbf{B} с 4-потенциалом $A^\mu(X)$, где X обозначает 4-вектор, $X^\mu = (t, x, y, z)$, имеет вид

$$\left(i(\partial \gamma) + e(A \gamma) - m \right) \Psi(X) = 0, \quad (1.1)$$

где $(\partial \gamma) = \partial_\mu \gamma^\mu$, $(A \gamma) = A_\mu \gamma^\mu$. Для случая постоянного однородного магнитного поля, направленного вдоль оси z , при выборе 4-потенциала $A^\mu = (0, 0, xB, 0)$ можно записать так называемые решения с положительной и отрицательной энергией. Процедуру получения решений можно найти, например, в [148].

Решение с положительной энергией:

$$\Psi_{n, p_y, p_z, s}^{(+)}(X) = \frac{e^{-i(E_n t - p_y y - p_z z)}}{\sqrt{2 E_n (E_n + m) L_y L_z}} U_{n, p_y, p_z, s}^{(+)}(\xi^{(+)}), \quad (1.2)$$

где число n нумерует уровни Ландау: $n = 0, 1, 2, \dots$; p_y, p_z — “компоненты импульса” электрона вдоль осей y и z (см. ниже); L_y, L_z — нормировочные размеры вдоль осей y и z ; число $s = \pm 1$ определяет знак проекции спина электрона на ось z ; E_n — энергия электрона, находящегося на n -м уровне Ландау:

$$E_n = \sqrt{m^2 + p_z^2 + 2\beta n}, \quad \beta \equiv eB. \quad (1.3)$$

Биспинор $U^{(+)}$ имеет различный вид для случаев $s = -1$ и $s = +1$:

$$U_{n,p_y,p_z,s=-1}^{(+)}(\xi^{(+)}) = \begin{pmatrix} 0 \\ (E_n + m) V_n(\xi^{(+)}) \\ -i\sqrt{2\beta n} V_{n-1}(\xi^{(+)}) \\ -p_z V_n(\xi^{(+)}) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

$$U_{n,p_y,p_z,s=+1}^{(+)}(\xi^{(+)}) = \begin{pmatrix} (E_n + m) V_{n-1}(\xi^{(+)}) \\ 0 \\ p_z V_{n-1}(\xi^{(+)}) \\ i\sqrt{2\beta n} V_n(\xi^{(+)}) \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

при этом для основного уровня Ландау, $n = 0$, решение существует только при $s = -1$. Переменная $\xi^{(+)}$ связана с координатой x соотношением

$$\xi^{(+)} = \sqrt{\beta} \left(x + \frac{p_y}{\beta} \right). \quad (1.6)$$

$V_n(\xi)$ есть нормированные функции гармонического осциллятора, которые выражаются через полиномы Чебышёва-Эрмита $H_n(\xi)$:

$$V_n(\xi) = \frac{\beta^{1/4}}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |V_n(\xi)|^2 dx = 1, \quad (1.7)$$

причём для отрицательных значений индекса n функция $V_n(\xi)$ полагается равной нулю. Заметим, что в приведённых выше выражениях p_z является

сохраняющейся компонентой импульса электрона вдоль оси z , т. е. вдоль поля, тогда как p_y — обобщённый импульс, определяющий положение центра гауссова пакета вдоль оси x соотношением $x_0 = -p_y/\beta$ (см. (1.6)).

Решение $\Psi^{(-)}$ с отрицательной энергией может быть получено из выражений (1.2), (1.4)–(1.6) сменой знака у величин E_n , p_y , p_z .

Окончательно оператор электрон-позитронного поля, построенный на основе решений уравнения Дирака в магнитном поле, может быть представлен в виде

$$\Psi(X) = \sum_{n, p_y, p_z, s} \left(a_{n, p_y, p_z, s} \Psi_{n, p_y, p_z, s}^{(+)}(X) + b_{n, p_y, p_z, s}^{\dagger} \Psi_{n, p_y, p_z, s}^{(-)}(X) \right). \quad (1.8)$$

Здесь a — оператор уничтожения электрона, b^{\dagger} — оператор рождения позитрона, $\Psi^{(+)}$ и $\Psi^{(-)}$ — нормированные решения уравнения Дирака (1.1) в магнитном поле с положительной и отрицательной энергией соответственно.

1.2. Решение для основного уровня Ландау

В сильном магнитном поле, когда индукция поля B определяет максимальный энергетический масштаб задачи, а именно $eB > E^2, m_e^2$, электроны могут находиться только в состояниях, соответствующих основному уровню Ландау ($n = 0$). В отличие от остальных уровней Ландау с $n \geq 1$, которые двукратно вырождены по спину ($s = \pm 1$), основной уровень не вырожден, т. е. спин фермиона фиксирован, $s = -1$.

Решение уравнения Дирака для фермиона с энергией E , кинетическим импульсом p_z , и обобщённым импульсом p_y в этом случае можно представить в следующей форме:

$$\Psi_p^{(+)} = \frac{(eB)^{1/4}}{(\sqrt{\pi} 2E (E + m_e) L_y L_z)^{1/2}} e^{-i(Et - p_y y - p_z z)} e^{-\xi^{(+)^2/2} u(p_{\parallel})}, \quad (1.9)$$

где p_{\parallel} — вектор энергии-импульса электрона в плоскости Минковского $\{0, 3\}$. Здесь $E = \sqrt{m_e^2 + p_z^2}$, $\xi^{(+)}$ определяется формулой (1.6).

Биспинорная амплитуда $u(p_{\parallel})$ имеет вид

$$u(p_{\parallel}) = \begin{pmatrix} (E + m_e) \psi \\ -p_z \psi \end{pmatrix}, \quad \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Интересно отметить, что биспинорная амплитуда (1.10) совпадает с решением свободного уравнения Дирака для фермиона с импульсом, параллельным

оси z . Такое выделение биспинорной амплитуды, не зависящей от пространственной координаты x , характерно только для основного уровня Ландау.

1.3. Скрещенное поле

Скрещенным называется постоянное однородное электромагнитное поле, у которого векторы напряжённости электрического поля \mathbf{E} и индукции магнитного поля \mathbf{B} взаимно перпендикулярны и равны по величине (в естественной системе единиц). Удобно описывать такое поле, вводя вспомогательные постоянные 4-векторы a^μ и k^μ , обладающие свойствами: $(kk) = 0$, $(ak) = 0$. 4-потенциал поля определяется выражением $A^\mu = a^\mu \varphi$, где $\varphi = (kx)$. При этом тензор поля равен $F^{\mu\nu} = k^\mu a^\nu - k^\nu a^\mu$. При вычислениях часто возникает свёртка двух тензоров поля по одному индексу, которая имеет вид $(FF)^{\mu\nu} = -k^\mu k^\nu (aa)$.

Решение уравнения Дирака для электрона с 4-импульсом $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ в скрещенном поле имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi_p(x) = & \left(1 - \frac{e\hat{k}\hat{a}}{2(kp)} \varphi \right) \frac{u(p)}{\sqrt{2EV}} \times \\ & \times \exp \left[-i \left((px) - \frac{e(ap)}{2(kp)} \varphi^2 - \frac{e^2(aa)}{6(kp)} \varphi^3 \right) \right], \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $u(p)$ – биспинорная амплитуда свободного электрона с импульсом p^μ .

Позитрону соответствует решение с отрицательной энергией, которое может быть получено из решения (1.11) сменой знака у всех компонент 4-импульса p^μ .

Без потери общности можно выбрать направления осей системы координат следующим образом:

$$k^\mu = (k_0, k_0, 0, 0), \quad a^\mu = (0, 0, -a, 0). \quad (1.12)$$

При этом

$$\varphi = (kx) = k_0(t - x), \quad \mathcal{E} = (0, \mathcal{E}, 0), \quad \mathbf{B} = (0, 0, B), \quad \mathcal{E} = B = k_0 a.$$

Полезно ввести также вектор $b^\mu = (0, 0, 0, -a)$, через который можно выразить дуальный тензор $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ следующим образом: $\tilde{F}^{\mu\nu} = k^\mu b^\nu - k^\nu b^\mu$.

Глава 2

Пропагаторы заряженных частиц в активной среде

Степень влияния магнитного поля на движение частицы определяется её удельным зарядом, то есть отношением заряда к массе. Таким образом, наиболее чувствительными к влиянию внешнего поля оказываются лёгкие заряженные фермионы, и прежде всего электрон. Расчёт конкретных физических явлений основан на использовании диаграммной техники Фейнмана со следующим обобщением: в начальном и конечном состояниях электрон находится во внешнем поле и описывается точным решением уравнения Дирака в этом поле, внутренние линии электронов в петлевых квантовых процессах соответствуют точным пропагаторам, построенным на основе данных решений.

Выражение для точного пропагатора электрона в постоянном однородном магнитном поле было получено Дж. Швингером [149] в формализме собственного времени Фока. Существует ряд работ, где приведены другие представления пропагатора. Так, в статье [42] был рассмотрен случай сверхсильного поля и записан вклад в пропагатор электрона от основного уровня Ландау. В статье [150] пропагатор преобразован из вида [149] в форму, где он записан как сумма по всем уровням Ландау. В работе [107] приведено также разложение пропагатора электрона в степенной ряд по интенсивности магнитного поля.

На наш взгляд, знание различных представлений пропагатора электрона во внешнем магнитном поле и условий их применимости является весьма важным. Имеются примеры, когда непонимание таких условий привело к появлению полностью ошибочных статей. Так, в работах [151, 152] проводилось вычисление собственно-энергетического оператора нейтрино в магнитном поле путём анализа однопетлевой диаграммы $\nu \rightarrow e^- W^+ \rightarrow \nu$, причём

авторы ограничились вкладом основного уровня Ландау в пропагатор электрона. В работе [153] показано, что в данной задаче вклад основного уровня Ландау не является доминирующим и следующие уровни дают вклады того же порядка. Ещё одним примером подобного рода, по-видимому, является попытка повторного анализа вероятности распада нейтрино ультравысоких энергий $\nu \rightarrow e^- W^+$ во внешнем магнитном поле, вычисляемой через мнимую часть однопетлевой амплитуды того же перехода $\nu \rightarrow e^- W^+ \rightarrow \nu$. Первоначально данная вероятность была вычислена в работе [154], затем другие авторы [155] провели повторное вычисление, настаивая на ином результате. Третье вычисление, проведённое нами [156], подтвердило результат работы [154]. Наиболее вероятная причина ошибки расчёта [155] состоит в том, что авторы использовали пропагатор W -бозона во внешнем поле в разложении по тензору $F^{\mu\nu}$ и ограничились при этом только линейными членами, в то время как квадратичные члены в данном случае также существенны.

Среди работ, посвящённых исследованию пропагаторов частиц во внешнем поле, следует выделить статью [157], где проведено вычисление собственно-энергетического оператора нейтрино в магнитном поле в произвольной ξ -калибровке. Продемонстрировано, что, хотя собственно-энергетический оператор зависит от калибровочного параметра ξ , наблюдаемые характеристики, то есть дисперсионное соотношение и дополнительная энергия нейтрино, как и следовало ожидать, являются калибровочно инвариантными.

В настоящей главе мы приводим различные представления пропагаторов заряженных частиц во внешней активной среде, которые будут необходимы для анализа квантовых процессов. Приводятся полезные с методической точки зрения преобразования от одного представления к другому. Продемонстрирован также прямой вывод стандартными методами квантовой теории поля точного пропагатора электрона во внешнем магнитном поле в виде суммы по уровням Ландау из точных решений уравнения Дирака в поле. Материал главы частично основан на наших работах [153, 158, 159].

В этой главе мы используем следующие обозначения для 4-векторов координатного пространства и их компонент: $X^\mu = (t, x, y, z)$. Цифровые индексы используются для нумерации различных 4-векторов.

2.1. Пропагаторы заряженных частиц в магнитном поле

2.1.1. Пропагаторы в формализме собственного времени Фока

Пропагатор электрона в постоянном однородном магнитном поле в формализме собственного времени Фока может быть представлен в форме

$$S(X_1, X_2) = e^{i\Phi(X_1, X_2)} S(X_1 - X_2). \quad (2.1)$$

Здесь $S(X)$ – трансляционно и калибровочно инвариантная часть пропагатора:

$$\begin{aligned} S(X) = & -\frac{i\beta}{2(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s \sin(\beta s)} \left\{ \frac{1}{s} \left[\cos(\beta s) (X \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} \gamma) + i \sin(\beta s) (X \tilde{\varphi} \gamma) \gamma_5 \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\beta}{\sin(\beta s)} (X \varphi \varphi \gamma) + m_e [2 \cos(\beta s) - \sin(\beta s) (\gamma \varphi \gamma)] \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -i \left[m_e^2 s + \frac{(X \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} X)}{4s} - \frac{\beta}{4 \operatorname{tg}(\beta s)} (X \varphi \varphi X) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\beta = eB$, e – элементарный заряд, m_e – масса электрона, $X_\mu = (X_1 - X_2)_\mu$.

Интегрирование по переменной s (фоковскому собственному времени) в формуле (2.2) требует доопределения, поскольку подынтегральное выражение имеет полюса в точках $s = \pi k / \beta$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Предполагается, что интегрирование выполняется в комплексной плоскости s по контуру, начинающемуся в точке $s = 0$ и лежащему ниже вещественной оси вблизи неё. Контур может также быть развёрнут на отрицательную мнимую полуось (см. ниже).

Фаза $\Phi(X_1, X_2)$ трансляционно и калибровочно неинвариантна и может быть определена через криволинейный интеграл:

$$\Phi(X_1, X_2) = -e \int_{X_1}^{X_2} dX_\mu K^\mu(X), \quad (2.3)$$

$$K^\mu(X) = A^\mu(X) + \frac{1}{2} F^{\mu\nu} (X - X_2)_\nu. \quad (2.4)$$

Аналогично выражению (2.1) можно определить пропэгатор W -бозона и заряженного скалярного Φ -бозона в магнитном поле (мы считаем частицами отрицательно заряженные W^- - и Φ^- -бозоны):

$$G_{\rho\sigma}^{(W)}(X_1, X_2) = e^{i\Phi(X_1, X_2)} G_{\rho\sigma}(X_1 - X_2), \quad (2.5)$$

$$D^{(\Phi)}(X_1, X_2) = e^{i\Phi(X_1, X_2)} D(X_1 - X_2), \quad (2.6)$$

где фаза $\Phi(X_1, X_2)$ определяется теми же формулами (2.3), (2.4).

Часто бывает удобно использовать фурье-образы трансляционно инвариантных частей пропэгаторов:

$$S(X) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} S(q) e^{-iqX}, \quad (2.7)$$

$$G_{\rho\sigma}(X) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} G_{\rho\sigma}(q) e^{-iqX}, \quad (2.8)$$

$$D(X) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} D(q) e^{-iqX}. \quad (2.9)$$

Из (2.2) и (2.7) получаем фурье-образ электронного пропэгатора в виде

$$\begin{aligned} S(q) &= \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(\beta s)} \exp \left[-is \left(m_e^2 - q_{\parallel}^2 + \frac{\text{tg}(\beta s)}{\beta s} q_{\perp}^2 \right) \right] \times \\ &\times \left\{ [(q\gamma)_{\parallel} + m_e] \left[\cos(\beta s) - \frac{(\gamma\varphi\gamma)}{2} \sin(\beta s) \right] - \frac{(q\gamma)_{\perp}}{\cos(\beta s)} \right\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Фурье-образ пропэгатора W -бозона (2.5), (2.8) в фейнмановской калибровке имеет вид [160]

$$\begin{aligned} G_{\rho\sigma}(q) &= - \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(\beta s)} \exp \left[-is \left(m_W^2 - q_{\parallel}^2 + \frac{\text{tg}(\beta s)}{\beta s} q_{\perp}^2 \right) \right] \times \\ &\times \left[(\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\rho\sigma} - (\varphi\varphi)_{\rho\sigma} \cos(2\beta s) - \varphi_{\rho\sigma} \sin(2\beta s) \right]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Наконец, фурье-образ пропэгатора заряженного скалярного Φ -бозона (2.6), (2.9) в фейнмановской калибровке имеет вид

$$D(q) = \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(\beta s)} \exp \left[-is \left(m_W^2 - q_{\parallel}^2 + \frac{\text{tg}(\beta s)}{\beta s} q_{\perp}^2 \right) \right]. \quad (2.12)$$

2.1.2. Замечание о неинвариантной фазе

На первый взгляд записанное в ковариантной форме (2.3), (2.4) выражение для трансляционно и калибровочно неинвариантной фазы $\Phi(X_1, X_2)$ выглядит достаточно громоздким. Некоторые авторы предпочитают, фиксируя калибровку выбором 4-потенциала $A^\mu(X) = (0, 0, xB, 0)$, записывать фазу в более компактном виде:

$$\Phi(X, X') = -\frac{eB}{2}(x+x')(y-y'). \quad (2.13)$$

Однако именно ковариантную форму фазы (2.3), (2.4) целесообразно использовать при анализе замкнутых петель, содержащих несколько пропагаторов. Заметим, что, благодаря свойству 4-вектора (2.4) $\partial_\mu K_\nu - \partial_\nu K_\mu = 0$, путь интегрирования от X_1 до X_2 в (2.3) произволен. В случае двухвершинной петли в амплитуду войдёт сумма фаз, которая равна нулю:

$$\Phi(X_1, X_2) + \Phi(X_2, X_1) = 0. \quad (2.14)$$

При наличии в петле трёх или более вершин возникает ненулевая суммарная фаза от всех пропагаторов, которая, однако, является трансляционно и калибровочно инвариантной. Это несложно показать, представляя 4-потенциал постоянного однородного внешнего поля в произвольной калибровке в следующей форме:

$$A^\mu(X) = \frac{1}{2} X_\nu F^{\nu\mu} + \partial^\mu \chi(X), \quad (2.15)$$

где $\chi(X)$ – произвольная функция. Из (2.15) автоматически следует, что $\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$. Интегрируя (2.3) с учётом соотношения (2.15), получаем

$$\Phi(X_1, X_2) = -\frac{e}{2}(X_1 F X_2) - e[\chi(X_2) - \chi(X_1)]. \quad (2.16)$$

Из формулы (2.16) видно, что при суммировании фаз в замкнутой петле члены, содержащие функцию χ , полностью сократятся. Поскольку результат выражается только через тензор поля $F^{\mu\nu}$, калибровочная инвариантность обеспечена. Нетрудно проверить, что сумма выражений (2.16) в замкнутой петле будет также и трансляционно инвариантной. Например, для трёх и четырёх пропагаторов в петле сумма фаз имеет следующий вид:

$$\Phi(X_1, X_2) + \Phi(X_2, X_3) + \Phi(X_3, X_1) = -\frac{e}{2}(X_1 - X_2)_\mu F^{\mu\nu}(X_2 - X_3)_\nu, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \Phi(X_1, X_2) + \Phi(X_2, X_3) + \Phi(X_3, X_4) + \Phi(X_4, X_1) = \\ = -\frac{e}{2}(X_1 - X_3)_\mu F^{\mu\nu}(X_2 - X_4)_\nu. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В общем случае сумма n фаз может быть представлена в виде

$$\Phi_{tot} = -\frac{e}{2} \sum_{i=1}^n (X_i F X_{i+1}) \Big|_{X_{n+1} \equiv X_1} = -\frac{e}{2} \sum_{l=2}^{n-1} \sum_{k=1}^{l-1} (Z_k F Z_l), \quad (2.19)$$

где

$$Z_i = X_i - X_{i+1}.$$

2.1.3. Пропагаторы в разложении по слабому полю

Использование точных выражений (2.10) и (2.11) приводит к достаточно громоздким вычислениям. В то же время магнитные поля, которые могут существовать в природе, всегда являются слабыми по сравнению с критическим полем для W -бозона, $B_W = m_W^2/e \simeq 10^{24}$ Гс. Следовательно, пропагаторы W -бозона и заряженного скалярного Φ -бозона в фейнмановской калибровке могут быть разложены в ряд по степеням β как малого параметра. Удерживая члены до второго порядка, для пропагатора W -бозона находим:

$$\begin{aligned} G_{\rho\sigma}(q) = -i \frac{g_{\rho\sigma}}{q^2 - m_W^2} - \beta \frac{2 \varphi_{\rho\sigma}}{(q^2 - m_W^2)^2} + \\ + i \beta^2 \left[g_{\rho\sigma} \left(\frac{1}{(q^2 - m_W^2)^3} + \frac{2 q_\perp^2}{(q^2 - m_W^2)^4} \right) + 4 (\varphi\varphi)_{\rho\sigma} \frac{1}{(q^2 - m_W^2)^3} \right] + \mathcal{O}(\beta^3). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Сравнивая (2.11) и (2.12), легко видеть, что пропагатор Φ -бозона $D(q)$ отличается только знаком от коэффициента при $g_{\rho\sigma} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\rho\sigma} - (\varphi\varphi)_{\rho\sigma}$ в разложении пропагатора $G_{\rho\sigma}(q)$ по трём независимым тензорным структурам, откуда

$$D(q) = \frac{i}{q^2 - m_W^2} - i \beta^2 \left(\frac{1}{(q^2 - m_W^2)^3} + \frac{2 q_\perp^2}{(q^2 - m_W^2)^4} \right) + \mathcal{O}(\beta^3). \quad (2.21)$$

Аналогично можно рассмотреть асимптотическое выражение для пропагатора электрона $S(q)$ в случае, если интенсивность поля является наименьшим размерным параметром задачи, $\beta \ll m_e^2 \ll m_W^2$. В таком “приближении

слабого поля” разложение для пропагатора электрона может быть записано в виде [107]

$$S(q) = i \frac{(q\gamma) + m_e}{q^2 - m_e^2} + \beta \frac{(q\gamma)_{\parallel} + m_e}{2(q^2 - m_e^2)^2} (\gamma\varphi\gamma) + \\ + \beta^2 \frac{2i \left[(q_{\parallel}^2 - m_e^2) (q\gamma)_{\perp} - q_{\perp}^2 ((q\gamma)_{\parallel} + m_e) \right]}{(q^2 - m_e^2)^4} + \mathcal{O}(\beta^3). \quad (2.22)$$

Можно видеть, что в таком разложении вклад области малых виртуальных импульсов $q^2 \sim m_e^2 \ll m_W^2$ в каждом последующем члене усиливается. При этом в случае “умеренного поля” $m_e^2 \ll \beta \ll m_W^2$ разложение (2.22) неприменимо и необходимо использовать точное выражение (2.10) для пропагатора.

2.1.4. Пропагаторы в разложении по уровням Ландау

В случае если магнитное поле достаточно велико, $B \gtrsim B_e = m_e^2/e$, оказывается удобным использовать выражение для пропагатора электрона в виде разложения по уровням Ландау. Приведём здесь процедуру получения такого выражения [150] (см. также [107]).

Перепишем фурье-образ (2.10) трансляционно и калибровочно инвариантной части электронного пропагатора, вводя новую переменную интегрирования $v = \beta s$, в виде

$$S(q) = \frac{1}{\beta} \int_0^{\infty} dv \exp(-i\rho v) \left\{ [(q\gamma)_{\parallel} + m_e] f_1(v) - \right. \\ \left. - [(q\gamma)_{\parallel} + m_e] \frac{(\gamma\varphi\gamma)}{2} f_2(v) - (q\gamma)_{\perp} f_3(v) \right\}, \quad (2.23)$$

где введены обозначения:

$$f_1(v) = \exp(-i\alpha \operatorname{tg} v), \\ f_2(v) = \operatorname{tg} v \exp(-i\alpha \operatorname{tg} v), \\ f_3(v) = \frac{1}{\cos^2 v} \exp(-i\alpha \operatorname{tg} v), \quad (2.24)$$

а также $\rho = (m_e^2 - q_{\parallel}^2)/\beta$, $\alpha = q_{\perp}^2/\beta$. Поскольку функции $f_j(v)$ ($j = 1, 2, 3$) являются периодическими, $f_j(v) = f_j(v + n\pi)$, разбивая область интегрирования $(0, \infty)$ на отрезки $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, \dots $(n\pi, (n+1)\pi) \dots$ и делая на каждом

отрезке замену переменной $v \rightarrow v + n\pi$, можем записать:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dv \exp(-i\rho v) f_j(v) &= \sum_{n=0}^\infty \exp(-i\rho n\pi) \int_0^\pi dv \exp(-i\rho v) f_j(v) = \\ &= \frac{1}{1 - \exp(-i\rho\pi)} A_j, \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$A_j = \int_0^\pi dv \exp(-i\rho v) f_j(v). \quad (2.26)$$

Достаточно вычислить интеграл A_1 , поскольку два других интеграла могут затем быть найдены по формулам:

$$\begin{aligned} A_2 &= i \frac{\partial}{\partial \alpha} A_1, \\ A_3 &= -\frac{i}{\alpha} (1 - e^{-i\rho\pi}) - \frac{\rho}{\alpha} A_1. \end{aligned} \quad (2.27)$$

В справедливости последнего соотношения легко убедиться, представляя интеграл A_3 в виде

$$A_3 = \frac{i}{\alpha} \int_0^\pi dv \exp(-i\rho v) \frac{d}{dv} \left(\exp(-i\alpha \operatorname{tg} v) \right) \quad (2.28)$$

и производя интегрирование по частям.

Для вычисления A_1 перепишем $f_1(v)$ в виде

$$f_1(v) = \exp(-i\alpha \operatorname{tg} v) = \exp \left(\alpha \frac{-e^{-2iv} + 1}{-e^{-2iv} - 1} \right). \quad (2.29)$$

Правую часть этого равенства можно преобразовать, выразив через полиномы Чебышёва–Лагерра:

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \quad (2.30)$$

Производящая функция для полиномов Чебышёва–Лагерра определяется выражением

$$\frac{1}{1-t} \exp \left(-\frac{xt}{1-t} \right) = \sum_{n=0}^\infty L_n(x) t^n \quad (2.31)$$

для $|t| < 1$, откуда можно получить

$$\exp\left(-\frac{x t}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} [L_n(x) - L_{n-1}(x)] t^n \quad (2.32)$$

с доопределением $L_{-1}(x) \equiv 0$. Обозначая в правой части формулы (2.29) $-e^{-2iv} = t$, $2\alpha = x$ и используя тождество

$$\exp\left(\frac{x t + 1}{2 t - 1}\right) = \exp\left(-\frac{x t}{1-t}\right) \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad (2.33)$$

преобразуем выражение для A_1 к виду

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_0^{\pi} dv e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} [L_n(2\alpha) - L_{n-1}(2\alpha)] (-1)^n \exp(-2inv) \exp(-i\rho v) = \\ &= e^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [L_n(2\alpha) - L_{n-1}(2\alpha)] \int_0^{\pi} dv \exp[-i(\rho + 2n)v] = \\ &= -ie^{-\alpha} (1 - e^{-i\rho\pi}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\rho + 2n} [L_n(2\alpha) - L_{n-1}(2\alpha)]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Используя соотношения (2.23), (2.24), (2.26), (2.27) и (2.34), окончательно записываем фурье-образ трансляционно и калибровочно инвариантной части электронного пропагатора в виде

$$\begin{aligned} S(q) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{q_{\parallel}^2 - m_e^2 - 2n\beta} \left\{ [(q\gamma)_{\parallel} + m_e] \left[d_n(\alpha) - \frac{i}{2} (\gamma\varphi\gamma) d'_n(\alpha) \right] - \right. \\ &\quad \left. - (q\gamma)_{\perp} 2n \frac{d_n(\alpha)}{\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

где $\alpha = q_{\perp}^2/\beta$ и введены функции:

$$d_n(\alpha) = (-1)^n e^{-\alpha} [L_n(2\alpha) - L_{n-1}(2\alpha)]. \quad (2.36)$$

Аналогично электронному пропагатору, пропагаторы W и Φ -бозонов также могут быть представлены в виде разложения по уровням Ландау. Как уже отмечалось во введении, в условиях ранней Вселенной могли существовать магнитные поля масштаба *критического значения поля* для W -бозона,

$B_W = m_W^2/e \simeq 10^{24}$ Гс. В этом случае при исследовании процессов в ранней Вселенной знание пропагатора векторного бозона, представленного в виде разложения по уровням Ландау, может быть полезным.

Фурье-образ трансляционно инвариантной части пропагатора W -бозона (2.8) в фейнмановской калибровке представлен в формуле (2.11). Аналогично преобразованиям электронного пропагатора перепишем (2.11) в более удобном для вычислений виде:

$$G_{\rho\sigma}(q) = -\frac{1}{\beta} \int_0^\infty dv \exp(-i\rho v) \times \\ \times \left[(\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\rho\sigma} f_4(v) - (\varphi\varphi)_{\rho\sigma} f_5(v) - \varphi_{\rho\sigma} f_6(v) \right], \quad (2.37)$$

где введены обозначения:

$$f_4(v) = \frac{1}{\cos v} \exp(-i\alpha \operatorname{tg} v), \\ f_5(v) = \frac{\cos(2v)}{\cos v} \exp(-i\alpha \operatorname{tg} v), \\ f_6(v) = \frac{\sin(2v)}{\cos v} \exp(-i\alpha \operatorname{tg} v), \quad (2.38)$$

а также $\rho = (m_W^2 - q_\parallel^2)/\beta$, $\alpha = q_\perp^2/\beta$.

Проводя такую же процедуру, как и в случае фермионного пропагатора, и учитывая, что $f_j(v + \pi n) = (-1)^n f_j(v)$ ($j = 4, 5, 6$), можем записать

$$\int_0^\infty dv \exp(-i\rho v) f_j(v) = \frac{1}{1 + \exp(-i\rho\pi)} A_j, \quad (2.39)$$

где аналогично (2.26) введены интегралы:

$$A_j = \int_0^\pi dv \exp(-i\rho v) f_j(v) \quad (j = 4, 5, 6). \quad (2.40)$$

Целесообразно ввести вспомогательные интегралы:

$$C(\alpha) = \int_0^{\pi} dv \exp(-i\rho v) \exp(-i\alpha \operatorname{tg} v) \cos v, \quad (2.41)$$

$$S(\alpha) = \int_0^{\pi} dv \exp(-i\rho v) \exp(-i\alpha \operatorname{tg} v) \sin v, \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} E^{(\pm)}(\alpha) &= C(\alpha) \pm i S(\alpha) = \\ &= \int_0^{\pi} dv \exp[-i(\rho \mp 1)v] \exp(-i\alpha \operatorname{tg} v). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Интеграл A_4 можно представить в виде

$$A_4 = \frac{i}{\alpha} \int_0^{\pi} dv \exp(-i\rho v) \cos v \frac{d}{dv} \left(\exp(-i\alpha \operatorname{tg} v) \right) \quad (2.44)$$

и далее, производя интегрирование по частям, записать:

$$A_4 = \frac{i}{\alpha} \left[-1 - \exp(-i\rho\pi) + i\rho C(\alpha) + S(\alpha) \right]. \quad (2.45)$$

Интегралы A_5 и A_6 выражаются через A_4 , $C(\alpha)$ и $S(\alpha)$:

$$A_5 = 2C(\alpha) - A_4, \quad (2.46)$$

$$A_6 = 2S(\alpha). \quad (2.47)$$

Для того чтобы найти интегралы $C(\alpha)$ и $S(\alpha)$, вычислим $E^{(\pm)}(\alpha)$ и применим соотношения:

$$C(\alpha) = \frac{1}{2} \left[E^{(+)}(\alpha) + E^{(-)}(\alpha) \right], \quad (2.48)$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2i} \left[E^{(+)}(\alpha) - E^{(-)}(\alpha) \right]. \quad (2.49)$$

Интеграл $E^{(\pm)}(\alpha)$ вычисляется аналогично интегралу A_1 для фермионного пропагатора и равен

$$E^{(\pm)}(\alpha) = -i \left[1 + \exp(-i\rho\pi) \right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(\alpha)}{\rho + 2n \mp 1}. \quad (2.50)$$

Здесь, как и прежде, функции $d_n(v)$ определяются выражением (2.36). Интегралы $C(\alpha)$ и $S(\alpha)$ получаем в виде

$$C(\alpha) = -\frac{i}{2} [1 + \exp(-i\rho\pi)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(\alpha) + d_{n-1}(\alpha)}{\rho + 2n - 1}, \quad (2.51)$$

$$S(\alpha) = -\frac{1}{2} [1 + \exp(-i\rho\pi)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(\alpha) - d_{n-1}(\alpha)}{\rho + 2n - 1}. \quad (2.52)$$

При получении окончательных выражений для A_4 , A_5 , A_6 необходимо использовать соотношение $\sum_{n=0}^{\infty} d_n(\alpha) = 1$. В результате интегралы записываются в следующем виде:

$$A_4 = -\frac{i}{\alpha} [1 + \exp(-i\rho\pi)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n d_n(\alpha) + (n-1) d_{n-1}(\alpha)}{\rho + 2n - 1}, \quad (2.53)$$

$$A_5 = -\frac{i}{\alpha} [1 + \exp(-i\rho\pi)] \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha - n) d_n(\alpha) + (\alpha - n + 1) d_{n-1}(\alpha)}{\rho + 2n - 1}, \quad (2.54)$$

$$A_6 = -[1 + \exp(-i\rho\pi)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(\alpha) - d_{n-1}(\alpha)}{\rho + 2n - 1}. \quad (2.55)$$

Подставляя значения интегралов (2.53)–(2.55) в выражение для пропагатора (2.37), находим $G_{\rho\sigma}(q)$:

$$G_{\rho\sigma}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i}{q_{\parallel}^2 - m_W^2 - \beta(2n-1)} \left[(\tilde{\varphi} \tilde{\varphi})_{\rho\sigma} \left(\frac{n}{\alpha} d_n(\alpha) + \frac{n-1}{\alpha} d_{n-1}(\alpha) \right) - \right. \\ \left. - (\varphi \varphi)_{\rho\sigma} \left(\left(1 - \frac{n}{\alpha} \right) d_n(\alpha) + \left(1 - \frac{n-1}{\alpha} \right) d_{n-1}(\alpha) \right) + \right. \\ \left. + i \varphi_{\rho\sigma} (d_n(\alpha) - d_{n-1}(\alpha)) \right]. \quad (2.56)$$

Следует отметить особенность, которую содержит вклад основного уровня $n = 0$ в пропагатор W -бозона, в отличие от вклада основного уровня Ландау в пропагатор электрона (2.35). Для W -бозона этот вклад имеет вид

$$G_{\rho\sigma}^{(0)}(q) = \frac{-i}{q_{\parallel}^2 - m_W^2 + \beta} e^{-q_{\perp}^2/\beta} [-(\varphi\varphi)_{\rho\sigma} + i\varphi_{\rho\sigma}], \quad (2.57)$$

то есть содержит полюс при $q_{\parallel}^2 = m_W^2 - \beta$. Таким образом, если магнитное поле приближается к критическому значению поля для W -бозона, $B_W = m_W^2/e \simeq 10^{24}$ Гс, возникает так называемая неустойчивость теории возмущений W -бозонного вакуума (см., например, [161]).

Пропагатор Φ -бозона $D(q)$, как и в случае слабого поля, восстанавливается из (2.56) в виде

$$D(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i}{q_{\parallel}^2 - m_W^2 - \beta(2n-1)} \left(\frac{n}{\alpha} d_n(\alpha) + \frac{n-1}{\alpha} d_{n-1}(\alpha) \right). \quad (2.58)$$

2.1.5. Пропагатор электрона в сильном поле

Трансляционно инвариантная часть пропагатора электрона $S(X)$ имеет и другие представления. Например, для анализа процессов в сильном магнитном поле целесообразно использовать асимптотическое выражение для пропагатора. Для перехода к нему произведём поворот контура интегрирования в комплексной плоскости переменной s в интеграле (2.2) на отрицательную мнимую полуось, $s = -i\tau$, и выполним частичное разложение в интеграл Фурье по координатам $t = X^0$ и $z = X^3$ (магнитное поле направлено вдоль 3-й оси):

$$\begin{aligned} S(X) = & -\frac{i}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{\text{th } \tau} \int \frac{d^2 q_{\parallel}}{(2\pi)^2} \left\{ [(q\gamma)_{\parallel} + m_e] \Pi_{-}(1 + \text{th } \tau) + \right. \\ & + [(q\gamma)_{\parallel} + m_e] \Pi_{+}(1 - \text{th } \tau) - (X\gamma)_{\perp} \frac{i\beta}{2 \text{th } \tau} (1 - \text{th}^2 \tau) \left. \right\} \times \\ & \times \exp \left(-\frac{\beta X_{\perp}^2}{4 \text{th } \tau} - \frac{\tau(m_e^2 - q_{\parallel}^2)}{\beta} - i(qX)_{\parallel} \right), \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$d^2 q_{\parallel} = dq_0 dq_3, \quad \Pi_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm i\gamma_1 \gamma_2), \quad \Pi_{\pm}^2 = \Pi_{\pm}, \quad [\Pi_{\pm}, (a\gamma)_{\parallel}] = 0.$$

Здесь γ_α – матрицы Дирака в стандартном представлении.

Асимптотическое выражение пропагатора в сильном магнитном поле может быть получено из (2.59) путём приближённой оценки интеграла по τ в пределе $\beta/|m_e^2 - q_\parallel^2| \gg 1$. В этом случае основной вклад в интеграл по τ даёт область $\tau \sim \beta/|m_e^2 - q_\parallel^2|$ и трансляционно инвариантная часть пропагатора принимает простой вид:

$$S(X) \simeq \frac{i\beta}{2\pi} \exp\left(-\frac{\beta X_\perp^2}{4}\right) \int \frac{d^2 q_\parallel}{(2\pi)^2} \frac{(q\gamma)_\parallel + m_e}{q_\parallel^2 - m_e^2} \Pi_- e^{-i(qX)_\parallel}, \quad (2.60)$$

который впервые был получен в работах [41, 42]. Легко видеть, что выражение (2.60) совпадает со вкладом основного уровня Ландау. Действительно, подставляя член с $n = 0$ из (2.35) в (2.7) и выполняя интегрирование по $d^2 q_\perp = dq_1 dq_2$, воспроизводим формулу (2.60).

2.2. Пропагаторы заряженных частиц в скрещенном поле

В случае скрещенного поля пропагатор электрона в формализме собственного времени имеет тот же вид (2.1), где трансляционно и калибровочно инвариантная часть $S(X)$ может быть получена из (2.2) предельным переходом, при котором инвариант β стремится к нулю, а ковариант $\beta\varphi_{\alpha\beta}$ остается конечным. При этом получаем

$$S(X) = -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{ds}{s^2} \left[\frac{1}{2s} (X\gamma) + \frac{ie}{2} (X\tilde{F}\gamma)\gamma_5 - \frac{e^2 s}{3} (XFF\gamma) + m_e - \frac{em_e s}{2} (\gamma F\gamma) \right] \exp \left\{ -i \left[m_e^2 s + \frac{X^2}{4s} + \frac{e^2 s}{12} (XFFX) \right] \right\}, \quad (2.61)$$

где $F_{\mu\nu}$ и $\tilde{F}_{\mu\nu}$ – тензор и дуально-сопряжённый тензор внешнего электромагнитного поля.

Фурье-образы трансляционно-инвариантных частей пропагаторов имеют вид

$$S(q) = \int_0^\infty ds e^{-i\Omega_e} \left[(q\gamma) + ise(q\tilde{F}\gamma)\gamma_5 - s^2 e^2 (qFF\gamma) + m_e - \frac{1}{2} sm_e e (\gamma F\gamma) \right], \quad (2.62)$$

$$G_{\rho\sigma}^{(W)}(q) = - \int_0^\infty ds e^{-i\Omega_W} \left[g_{\rho\sigma} + 2s^2 e^2 (FF)_{\rho\sigma} - 2seF_{\rho\sigma} \right], \quad (2.63)$$

$$D^{(\Phi)}(q) = \int_0^\infty ds e^{-i\Omega_W}, \quad (2.64)$$

где для W и Φ -бозонов использована фейнмановская калибровка и введено обозначение ($j = e, W$)

$$\Omega_j = s(m_j^2 - q^2) + \frac{s^3}{3} e^2 (qFFq). \quad (2.65)$$

2.3. Вывод пропагатора электрона в магнитном поле из решений уравнения Дирака

Здесь мы исследуем методологически важный вопрос о прямом выводе стандартными методами квантовой теории поля точного пропагатора электрона во внешнем магнитном поле в виде суммы по уровням Ландау из точных решений уравнения Дирака в поле. Пропагатор вычисляется как разность T - и \mathcal{N} -произведений полевых операторов и записывается в x -представлении в виде суммы по уровням Ландау. Продемонстрирована тождественность полученного выражения для пропагатора известному результату [150].

Для вычисления пропагатора электрона применяется стандартный метод, в котором используются полевые операторы, включающие решения уравнения Дирака в магнитном поле (1.8).

Пропагатор определяется как разность упорядоченного по времени и нормально упорядоченного произведений полевых операторов (1.8):

$$S(X, X') = T(\Psi(X) \bar{\Psi}(X')) - \mathcal{N}(\Psi(X) \bar{\Psi}(X')). \quad (2.66)$$

Применяя антикоммутиационные соотношения для операторов рождения и уничтожения, получаем, что пропагатор при $t > t'$ и при $t < t'$ выражается через решения соответственно с положительной энергией (1.2) и с отрицательной энергией:

$$S(X, X') \Big|_{t \gtrless t'} = \pm \sum_{n, p_y, p_z, s} \Psi_{n, p_y, p_z, s}^{(\pm)}(X) \bar{\Psi}_{n, p_y, p_z, s}^{(\pm)}(X'). \quad (2.67)$$

Таким образом, пропагатор разбивается на сумму вкладов уровней Ландау:

$$S(X, X') = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(X, X'). \quad (2.68)$$

Далее будем искать вклад n -го уровня Ландау в пропагатор (2.67). От суммирования по импульсам p_y и p_z удобнее перейти к интегрированию посредством замены

$$\frac{1}{L_y L_z} \sum_{p_y, p_z} \rightarrow \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^2}. \quad (2.69)$$

Для вклада n -го уровня находим

$$\begin{aligned} S_n(X, X') \Big|_{t \geq t'} &= \frac{1}{2(\pm E_n)(\pm E_n + m_e)} \int \frac{dp_y dp_z}{(2\pi)^2} \times \\ &\times \exp \{i[\mp E_n(t - t') \pm p_y(y - y') \pm p_z(z - z')]\} \times \\ &\times \sum_{s=\pm 1} U_{n, p_y, p_z, s}^{(\pm)}(\xi^{(\pm)}) \bar{U}_{n, p_y, p_z, s}^{(\pm)}(\xi^{(\pm)'}). \end{aligned} \quad (2.70)$$

После несложных, но довольно громоздких преобразований матрицы, построенные из биспиноров (1.4), (1.5) и соответствующих биспиноров решения с отрицательной энергией, входящие в (2.70), можно привести к виду

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pm E_n + m_e} \sum_{s=\pm 1} U_{n, p_y, p_z, s}^{(\pm)}(\xi^{(\pm)}) \bar{U}_{n, p_y, p_z, s}^{(\pm)}(\xi^{(\pm)')}) = \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\xi^{(\pm)})^2 - \frac{1}{2} (\xi^{(\pm)'})^2 \right] \left\{ (\pm E_n \gamma_0 \mp p_z \gamma^3 + m_e) \times \right. \\ &\times \left[\Pi_- H_n(\xi^{(\pm)}) H_n(\xi^{(\pm)'}) + \Pi_+ 2n H_{n-1}(\xi^{(\pm)}) H_{n-1}(\xi^{(\pm)'}) \right] + \\ &\left. + i 2n \sqrt{\beta} \gamma^1 \left[\Pi_- H_{n-1}(\xi^{(\pm)}) H_n(\xi^{(\pm)'}) - \Pi_+ H_n(\xi^{(\pm)}) H_{n-1}(\xi^{(\pm)'}) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.71)$$

где введены проекционные операторы Π_{\pm} :

$$\Pi_{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm i \gamma^1 \gamma^2), \quad \Pi_{\pm} \Pi_{\pm} = \Pi_{\pm}, \quad \Pi_{\pm} \Pi_{\mp} = 0. \quad (2.72)$$

Производя в выражении (2.70) при $t < t'$ смену знаков переменных интегрирования $p_y \rightarrow -p_y$ и $p_z \rightarrow -p_z$, видим, что двузначность при $t > t'$ и

$t < t'$ сохраняется только перед E_n . Целесообразно использовать следующее соотношение с произвольной функцией $f(E)$, где учтено выражение для энергии (1.3):

$$\frac{f(\pm E_n)}{2 E_n} e^{\mp i E_n(t-t')} \Big|_{t \gtrless t'} = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0 f(p_0) e^{-i p_0(t-t')}}{p_{\parallel}^2 - m_e^2 - 2\beta n + i\varepsilon}, \quad (2.73)$$

где $p_{\parallel}^2 = p_0^2 - p_z^2$. Напомним, что индексы « \parallel » и « \perp » используются для обозначения компонент 4-векторов, принадлежащих псевдоевклидову подпространству $\{0, z\}$ и евклидову подпространству $\{x, y\}$: $(ab)_{\parallel} = a_0 b_0 - a_z b_z$, $(ab)_{\perp} = a_x b_x + a_y b_y$, $(ab) = (ab)_{\parallel} - (ab)_{\perp}$.

С помощью соотношения (2.73) в выражении (2.70) добавляется интегрирование по нулевой компоненте импульса, в результате чего пропагатор записывается при $t > t'$ и при $t < t'$ единообразно. Переобозначая $\xi^{(+)} = \xi$, $\xi^{(+)\prime} = \xi'$, приводим (2.70) с учётом (2.71) и (2.73) к виду

$$\begin{aligned} S_n(X, X') &= \frac{i}{2^n n!} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} \exp\left(-\beta \frac{x^2 + x'^2}{2}\right) \int \frac{dp_0 dp_y dp_z}{(2\pi)^3} \times \\ &\times \frac{e^{-i(p(X-X'))_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2 - m_e^2 - 2\beta n + i\varepsilon} \exp\left\{-\frac{p_y^2}{\beta} - p_y[x + x' - i(y - y')]\right\} \times \\ &\times \left\{ [(p\gamma)_{\parallel} + m_e] [\Pi_- H_n(\xi) H_n(\xi') + \Pi_+ 2n H_{n-1}(\xi) H_{n-1}(\xi')] + \right. \\ &\left. + i 2n \sqrt{\beta} \gamma^1 [\Pi_- H_{n-1}(\xi) H_n(\xi') - \Pi_+ H_n(\xi) H_{n-1}(\xi')] \right\}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Заметим, что данное выражение для вклада n -го уровня Ландау в пропагатор электрона представляет самостоятельную ценность, так как является в определённых случаях более удобным, чем другие представления.

Для сравнения с известным выражением выполним интегрирование по p_y в пропагаторе (2.74), вводя новую переменную:

$$u = \frac{p_y}{\sqrt{\beta}} + \frac{\sqrt{\beta}}{2} [x + x' - i(y - y')]$$

и используя известные интегралы (см. [162]):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} H_n(u+a) H_n(u+b) du &= 2^n n! \sqrt{\pi} L_n(-2ab), \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} H_n(u+a) H_{n-1}(u+b) du &= \\ &= 2^{n-1} n! \sqrt{\pi} \frac{1}{b} [L_n(-2ab) - L_{n-1}(-2ab)], \end{aligned} \quad (2.75)$$

где $L_n(x)$ — полиномы Чебышёва–Лагерра

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \quad (2.76)$$

с доопределением $L_{-1}(x) \equiv 0$. В результате вклад n -го уровня Ландау в пропагатор электрона в магнитном поле можно представить в виде

$$S_n(X, X') = e^{i\Phi(X, X')} \hat{S}_n(X - X'), \quad (2.77)$$

где $\Phi(X, X')$ — трансляционно и калибровочно неинвариантная фаза, одинаковая для всех уровней:

$$\Phi(X, X') = -\frac{\beta}{2} (x + x')(y - y')$$

(подробнее о свойствах фазы см. разд. 2.1.2). $\hat{S}_n(Z)$ — калибровочно и трансляционно инвариантная часть пропагатора ($Z = X - X'$), представленная в виде двукратного интеграла по p_{\parallel} :

$$\begin{aligned} \hat{S}_n(Z) &= \frac{i\beta}{2\pi} \exp\left(-\frac{\beta}{4} Z_{\perp}^2\right) \int \frac{d^2 p_{\parallel}}{(2\pi)^2} \frac{e^{-i(pZ)_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2 - m_e^2 - 2\beta n + i\varepsilon} \times \\ &\times \left\{ \left[(p\gamma)_{\parallel} + m_e \right] \left[\Pi_- L_n\left(\frac{\beta}{2} Z_{\perp}^2\right) + \Pi_+ L_{n-1}\left(\frac{\beta}{2} Z_{\perp}^2\right) \right] + \right. \\ &+ \left. 2in \frac{(Z\gamma)_{\perp}}{Z_{\perp}^2} \left[L_n\left(\frac{\beta}{2} Z_{\perp}^2\right) - L_{n-1}\left(\frac{\beta}{2} Z_{\perp}^2\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Сравним полученное выражение (2.78) с имеющимся разложением пропагатора по уровням Ландау, приведённым в работе [150], где пропагатор

имеет вид, аналогичный (2.77), но его калибровочно и трансляционно инвариантная часть представлена в виде интеграла по 4-импульсу:

$$\hat{S}(Z) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} S(p) e^{-i(pZ)}, \quad (2.79)$$

где

$$\begin{aligned} S(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} S_n(p), \\ S_n(p) &= \frac{i}{p_{\parallel}^2 - m_e^2 - 2\beta n + i\varepsilon} \left\{ \left[(p\gamma)_{\parallel} + m_e \right] \left[d_n(v) - \frac{i}{2} (\gamma \varphi \gamma) d'_n(v) \right] - \right. \\ &\quad \left. - 2n \frac{d_n(v)}{v} (p\gamma)_{\perp} \right\}, \quad v = \frac{p_{\perp}^2}{\beta}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Напомним, что функции $d_n(v)$, введённые ранее, имеют вид

$$d_n(v) = (-1)^n e^{-v} [L_n(2v) - L_{n-1}(2v)], \quad (2.81)$$

здесь $L_n(x)$ — полиномы Чебышёва–Лагерра (2.76). Свёртка $(\gamma \varphi \gamma) = \gamma_{\alpha} \varphi^{\alpha\beta} \gamma_{\beta}$ содержит безразмерный тензор внешнего магнитного поля $\varphi^{\alpha\beta} = F^{\alpha\beta}/B$; в системе, где поле направлено вдоль оси z , имеем $(\gamma \varphi \gamma) = -2i\gamma^1 \gamma^2$.

Чтобы убедиться, что два выражения для пропэгатора (2.78) и (2.79)–(2.80) взаимно согласуются, достаточно выполнить в (2.79) интегрирование по поперечным к полю компонентам импульса p_x, p_y . При этом вклад n -го уровня Ландау в пропэгатор выражается через три различных интеграла $I_{1,2,3}(Z_{\perp})$ в евклидовой плоскости (p_x, p_y) :

$$\begin{aligned} \hat{S}_n(Z) &= \int \frac{d^2 p_{\perp}}{(2\pi)^2} \frac{i e^{-i(pZ)_{\parallel}}}{p_{\parallel}^2 - m_e^2 - 2\beta n + i\varepsilon} \times \\ &\times \left\{ \left[(p\gamma)_{\parallel} + m_e \right] \left[I_1(Z_{\perp}) - \frac{i}{2} (\gamma \varphi \gamma) I_2(Z_{\perp}) \right] - 2n I_3(Z_{\perp}) \right\}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Интегрирование по полярному углу приводит к интегралу Бесселя:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(\xi \cos \varphi - n\varphi)} d\varphi = 2\pi i^n J_n(\xi), \quad (2.83)$$

где $J_n(\xi)$ — функция Бесселя целочисленного порядка n . В результате интегралы $I_{1,2,3}(Z_\perp)$ принимают вид

$$\begin{aligned} I_1(Z_\perp) &= \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^2} d_n(v) e^{i(pZ)_\perp} = \frac{\beta}{4\pi} \int_0^\infty dv J_0(\sqrt{\beta} Z_\perp \sqrt{v}) d_n(v), \\ I_2(Z_\perp) &= \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^2} d'_n(v) e^{i(pZ)_\perp} = \frac{\beta}{4\pi} \int_0^\infty dv J_0(\sqrt{\beta} Z_\perp \sqrt{v}) d'_n(v), \\ I_3(Z_\perp) &= \int \frac{d^2 p_\perp}{(2\pi)^2} \frac{d_n(v)}{v} e^{i(pZ)_\perp} (p\gamma)_\perp = \\ &= i \frac{\beta^{3/2}}{4\pi} \frac{(Z\gamma)_\perp}{Z_\perp} \int_0^\infty dv J_1(\sqrt{\beta} Z_\perp \sqrt{v}) \frac{d_n(v)}{\sqrt{v}}, \end{aligned}$$

где $Z_\perp = \sqrt{Z_\perp^2} = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$. Вычисляя интегралы (см. [162])

$$\begin{aligned} I_1(Z_\perp) &= \frac{\beta}{4\pi} \exp\left(-\frac{\beta}{4} Z_\perp^2\right) \left[L_n\left(\frac{\beta}{2} Z_\perp^2\right) + L_{n-1}\left(\frac{\beta}{2} Z_\perp^2\right) \right], \\ I_2(Z_\perp) &= -\frac{\beta}{4\pi} \exp\left(-\frac{\beta}{4} Z_\perp^2\right) \left[L_n\left(\frac{\beta}{2} Z_\perp^2\right) - L_{n-1}\left(\frac{\beta}{2} Z_\perp^2\right) \right], \\ I_3(Z_\perp) &= -i \frac{\beta}{2\pi} \frac{(Z\gamma)_\perp}{Z_\perp^2} \exp\left(-\frac{\beta}{4} Z_\perp^2\right) \left[L_n\left(\frac{\beta}{2} Z_\perp^2\right) - L_{n-1}\left(\frac{\beta}{2} Z_\perp^2\right) \right] \end{aligned}$$

и подставляя их в (2.82), получаем в итоге выражение, совпадающее с (2.78).

Глава 3

Дисперсия частиц во внешней активной среде

3.1. Дисперсия в среде: основные определения

Дисперсионные эффекты в веществе существенно влияют на распространение частиц с небольшими массами (фотоны, нейтрино), в то время как другие частицы остаются практически нечувствительными к влиянию среды (например, аксионы и другие Намбу-Голдстоуновские бозоны). Анализируя существующую связь между рассеянием вперёд и коэффициентом преломления, можно получить и исследовать законы дисперсии фотонов и нейтрино.

В соответствии с общими понятиями квантовой теории поля частицы есть квантованные возбуждения соответствующих полей: фотоны – электромагнитного поля, электроны – электрон-позитронного поля и так далее. Обычно удобно описывать эти поля с помощью плоских волн, характеризующихся частотой ω и волновым вектором \mathbf{k} . Тогда возбуждения данных мод обладают временным и пространственным поведением, которое описывается фактором $\exp[-i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x})]$. Частота при заданном волновом векторе определяется дисперсионным соотношением. Поскольку (ω, \mathbf{k}) – это 4-вектор, то исходя из лоренц-инвариантности, получаем, что в вакууме величина $\omega^2 - \mathbf{k}^2 = m^2$ одинакова для всех частот и m есть масса частицы. Одним из следствий этого ковариантного дисперсионного соотношения является то, что распады вида $1 \rightarrow 2 + 3$ возможны только при условии $m_1 > m_2 + m_3$, чтобы в системе покоя частицы 1 было достаточно энергии для рождения конечных состояний.

В среде соотношения дисперсии, как правило, преобразуются за счёт когерентных взаимодействий с “фоном”. В простейшем случае частица приобретает эффективную массу, вызванную присутствием среды. Например, у фотонов в нерелятивистской плазме соотношение дисперсии будет иметь вид $\omega^2 = \omega_P^2 + \mathbf{k}^2$, где ω_P есть так называемая *плазменная частота*, определяемая выражением

$$\omega_P^2 = \frac{4\pi \alpha n_e}{m_e}, \quad (3.1)$$

здесь n_e – концентрация электронов. Для процессов в среде, индуцирующей эффективные массы частиц, кинематическое условие реализации распада $1 \rightarrow 2 + 3$ вместо упрощённого вакуумного соотношения $m_1 > m_2 + m_3$ уместно записать в изначальном виде через квадраты масс:

$$m_1^4 - 2m_1^2(m_2^2 + m_3^2) + (m_2^2 - m_3^2)^2 > 0. \quad (3.2)$$

В таком виде кинематическое условие возможности процесса применимо и для случая отрицательных квадратов эффективных масс. Появление у фотона в среде эффективной массы ведёт к тому, что при условии $\omega_P^2 > 4m_\nu^2$ становится кинематически разрешённым распад $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$, который может происходить в звёздах. Фактически этот так называемый плазменный процесс является основным механизмом излучения нейтрино в широком диапазоне температур и плотностей, включая, например, физические условия внутри белых карликов и красных гигантов.

Нейтрино могут участвовать в нестандартных электромагнитных процессах, например, за счёт собственных магнитных моментов, что может приводить к плазменным процессам рождения стерильных нейтрино и, таким образом, к остыванию звёзд. Ограничения на аномальную скорость остывания, полученные из наблюдений за белыми карликами и звёздами из шаровых звёздных скоплений, позволили установить наиболее жёсткие ограничения на электромагнитные взаимодействия нейтрино.

В рамках стандартной модели все фермионы первоначально являются безмассовыми. Они приобретают эффективную массу за счёт взаимодействия со скалярным полем Хиггса, вакуумное ожидание Φ_0 которого и является основным фактором, определяющим величины масс. Поэтому даже вакуумные массы могут быть интерпретированы как явления “рефракции”. Поскольку скаляр Φ_0 является лоренц-инвариантом, соотношение дисперсии, таким образом, выводится из стандартной формулы $E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$. Активная среда, вообще говоря, изменяет это соотношение и $E(\mathbf{p})$ является обычно более сложной функцией, чем $(m^2 + \mathbf{p}^2)^{1/2}$.

Заметим, что соотношение дисперсии может быть и таким, что 4-импульс $P^\mu = (E, \mathbf{p})$ окажется пространственно-подобным, $P^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 < 0$, что по величине есть “отрицательный квадрат массы” $P^2 = m_{\text{eff}}^2 < 0$. Никаких физических проблем с такими “тахionsами” не возникает, поскольку скорость распространения сигнала определяется групповой скоростью, которая всегда остаётся меньше скорости света. Соотношение дисперсии в однородной среде часто записывают через коэффициент преломления n в виде $k = |\mathbf{k}| = n\omega$. Пространственно-подобные возбуждения соответствуют условию $n > 1$; примером является фотон в воде или воздухе. В этом случае хорошо известный процесс “распада” $e \rightarrow e\gamma$ является кинематически разрешённым для достаточно быстро движущихся электронов (излучение Черенкова).

Дисперсионное соотношение может также зависеть от поляризации излучения. В “оптически активной” среде лево- и правополяризованные фотоны имеют различные коэффициенты преломления. В этом смысле вся среда является оптически активной для нейтрино, поскольку только левые нейтрино участвуют во взаимодействиях, а правые являются “стерильными”.

Взаимодействие мюонного и тау-нейтрино, ν_μ и ν_τ , с “обычной” астрофизической средой, то есть практически не содержащей термальных мюонов и тау-лептонов, отличается от взаимодействия электронного нейтрино ν_e вследствие вклада заряженного тока ($\nu_e e^-$) в амплитуду рассеяния. Поэтому такая среда является “двоякопреломляющей” по отношению к аромату нейтрино в том смысле, что среда индуцирует различные дисперсионные соотношения для нейтрино разных сортов. Важность этого эффекта для осцилляций нейтрино, которые фактически определяются соотношением фаз при распространении нейтрино разных сортов, чрезвычайно высока.

Обычно все частицы в среде имеют нетривиальный закон дисперсии несмотря на то что от конкретных обстоятельств зависит, является ли существенным эффект рефракции или нет. Например, в литературе встречались утверждения, что в достаточно плотной плазме, где $\omega_p > 2m_e$, фотоны распадаются с рождением пар, $\gamma \rightarrow e^+e^-$. Однако это неверно, поскольку заряженные лептоны также приобретают индуцированную плазмой эффективную массу, настолько большую, что такие распады не происходят [163].

Помимо модификации дисперсионных соотношений частиц наличие среды может приводить к появлению совершенно новых возбуждений. Хорошо известным примером является продольно поляризованное состояние электромагнитного поля, которое существует в плазме вдобавок к обычному состоянию с поперечной поляризацией. Эти объекты, обычно называемые продольными плазмонами, впервые обсуждались ещё в 1926 г. Лэнгмюром.

Во многих случаях такие (квантованные) коллективные возбуждения играют ту же роль, что и обычные частицы. Например, и обычные состояния с поперечной поляризацией, называемые либо поперечными плазмонами, либо просто фотонами, и продольные плазмоны могут распадаться на нейтринные пары и, следовательно, давать вклад в плазменные процессы излучения нейтрино.

В то время как дисперсионные соотношения и взаимодействия частиц в плазме формально наилучшим образом описываются с помощью теории поля при конечных температурах и плотностях, большинство важных результатов для физики элементарных частиц в звёздах были получены ещё до развития этого формализма с помощью более простых инструментов кинетической теории. Действительно, для многих задач описания дисперсионных свойств частиц или коллективных эффектов кинетический подход часто кажется физически более прозрачным, приводя к идентичным результатам. Дальнейшее обсуждение полностью базируется на кинетической теории.

При получении дисперсионного соотношения в плазме для данной частицы с известными свойствами обычно бывает достаточно воспользоваться простейшим приближением, вычисляя амплитуду рассеяния вперёд на соответствующих возбуждениях полей, входящих в состав компонент плазмы.

Наряду с горячей плотной плазмой значимое влияние на дисперсионные свойства частиц может оказывать другая компонента активной астрофизической среды – сильное магнитное поле. Однако указанное влияние поля является существенным только в случае его достаточно большой интенсивности. Существует естественный масштаб величины магнитного поля, так называемое критическое значение $B_e = m_e^2/e \simeq 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс.

3.2. Поляризационный оператор фотона во внешнем магнитном поле

Дисперсионные свойства фотона в магнитном поле определяются его поляризационным оператором, который может быть получен из амплитуды $\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow \gamma}$ перехода фотон-фотон:

$$\mathcal{M}_{\gamma \rightarrow \gamma} = -\varepsilon_\alpha^* \Pi_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta, \quad (3.3)$$

описываемого диаграммой Фейнмана, изображённой на рис. 3.1. Здесь двойная линия в петле соответствует точному пропагатору заряженного фермиона в магнитном поле. При этом доминирующую роль играет электрон как частица с максимальным удельным зарядом e/m_e , наиболее чувствительная

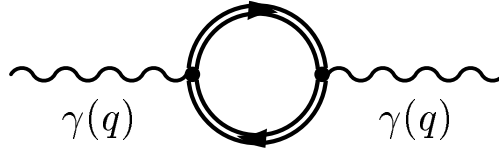


Рис. 3.1. Поляризационный оператор фотона в сильном магнитном поле

к влиянию внешнего поля. Поляризационный оператор фотона во внешнем поле исследовался в целом ряде работ (см., например, [41, 77–80]). Удобно представить поляризационный оператор в форме

$$\Pi_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda=1}^3 \frac{b_{\alpha}^{(\lambda)} b_{\beta}^{(\lambda)}}{(b^{(\lambda)})^2} \Pi^{(\lambda)}(q), \quad (3.4)$$

где $\Pi^{(\lambda)}$ – собственные значения поляризационного оператора, $b_{\alpha}^{(\lambda)}$ – собственные векторы ортогонального базиса:

$$\begin{aligned} b_{\alpha}^{(1)} &= (q\varphi)_{\alpha}, & b_{\alpha}^{(2)} &= (q\tilde{\varphi})_{\alpha}, \\ b_{\alpha}^{(3)} &= q^2(q\varphi\varphi)_{\alpha} - q_{\alpha}(q\varphi\varphi q), & b_{\alpha}^{(4)} &= q_{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Функции $\Pi^{(\lambda)}(q)$, полученные в работе [80], можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Pi^{(\lambda)}(q) &= -\frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 du \int_0^{\infty} \frac{dt}{t} \left[\frac{\beta t}{\sin \beta t} \varrho^{(\lambda)} e^{-i\Omega} - q^2 \frac{1-u^2}{2} e^{-i\Omega_0} \right] + \Pi^{(\text{vac})}(q^2), \\ \varrho^{(1)} &= \frac{q_{\parallel}^2}{2} \left(\cos \beta t u - \frac{u \sin \beta t u}{\text{tg} \beta t} \right) - q_{\perp}^2 \frac{\cos \beta t u - \cos \beta t}{\sin^2 \beta t}, \\ \varrho^{(2)} &= q_{\parallel}^2 \frac{1-u^2}{2} \cos \beta t - \frac{q_{\perp}^2}{2} \left(\cos \beta t u - \frac{u \sin \beta t u}{\text{tg} \beta t} \right), \\ \varrho^{(3)} &= \frac{q^2}{2} \left(\cos \beta t u - \frac{u \sin \beta t u}{\text{tg} \beta t} \right), \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \frac{q_{\perp}^2}{2} \left(\frac{\cos \beta t u - \cos \beta t}{\beta \sin \beta t} - \frac{1-u^2}{2} t \right), \\ \Omega_0 &= t \left(m_e^2 - q^2 \frac{1-u^2}{4} \right). \end{aligned}$$

В выражениях (3.6) произведено вычитание вакуумного поляризационного оператора, в результате чего интеграл по t стал сходящимся, затем был добавлен перенормированный вакуумный поляризационный оператор. Функция $\Pi^{(\text{vac})}(q^2)$ описывает поляризацию вакуума в отсутствие поля и имеет вид (см., например, [147], п. 103, 113)

$$\Pi^{(\text{vac})}(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} q^2 v(q^2), \quad (3.7)$$

$$v(q^2) = \int_0^1 du (1 - u^2) \ln \left(1 - \frac{q^2}{4m_e^2} (1 - u^2) \right). \quad (3.8)$$

Как показывает анализ уравнений дисперсии реального фотона в магнитном поле,

$$q^2 - \Pi^{(\lambda)}(q) = 0 \quad (\lambda = 1, 2, 3), \quad (3.9)$$

только две поперечные поляризации, $\lambda = 1, 2$, являются физическими, тогда как фотон с третьей поляризацией, $\lambda = 3$, физическим не является. Действительно, подставляя выражение для $\Pi^{(3)}(q)$ в уравнение (3.9), видим, что оно имеет единственное решение $q^2 = 0$. При этом из (3.5) следует, что базисный вектор $b_\alpha^{(3)}$ пропорционален 4-импульсу фотона q_α , то есть соответствующий оператор электромагнитного поля пропорционален полной дивергенции и может быть устранён калибровочным преобразованием.

Векторы поляризации фотонов с определённым законом дисперсии пропорциональны собственным векторам $b_\alpha^{(1,2)}$:

$$\varepsilon_\alpha^{(1)} = \sqrt{\mathcal{Z}_1} \frac{(q\varphi)_\alpha}{\sqrt{q_\perp^2}}, \quad \varepsilon_\alpha^{(2)} = \sqrt{\mathcal{Z}_2} \frac{(q\tilde{\varphi})_\alpha}{\sqrt{q_\parallel^2}}. \quad (3.10)$$

Множители $\sqrt{\mathcal{Z}_\lambda}$ учитывают перенормировку волновых функций фотонов

$$\mathcal{Z}_\lambda^{-1} = 1 - \frac{\partial \Pi^{(\lambda)}}{\partial q_\parallel^2}. \quad (3.11)$$

Эти перенормировки особенно существенны в окрестности *циклотронных резонансов*

$$q_\parallel^2 = \left(\sqrt{m_e^2 + 2neB} + \sqrt{m_e^2 + 2n'eB} \right)^2, \quad (3.12)$$

где функции $\Pi^{(\lambda)}(q)$ имеют корневые сингулярности.

Следует заметить, что в названиях двух поляризационных состояний фотона в магнитном поле (3.10) существует несогласованность. По терминологии классической работы Адлера [164] это так называемые “продольная” \parallel и “поперечная” \perp фотонные моды, $\varepsilon_\alpha^{(1)} = \varepsilon_\alpha^{(\parallel)}$ и $\varepsilon_\alpha^{(2)} = \varepsilon_\alpha^{(\perp)}$. Эти обозначения были основаны на расположении вектора напряжённости *магнитного поля* электромагнитной волны фотона по отношению к плоскости, образованной вектором внешнего магнитного поля \mathbf{B} и импульсом фотона \mathbf{q} . Позднее некоторые авторы, по-видимому, рассудили, что более естественно основываться на расположении вектора напряжённости *электрического поля* электромагнитной волны фотона по отношению к указанной плоскости, и стали использовать противоположные обозначения (см., например, [89, 165]. В результате в некоторых работах (см., например, [124]), обозначения оказались перепутанными и, ссылаясь на статью [164], авторы в действительности использовали обозначения статьи [165]. Иногда предпринимались также попытки ввести другие обозначения для двух фотонных поляризаций, B и C , I и II (см., например, [166]) или σ и π -поляризации (с точностью до калибровочного преобразования) (см., например, [167]). Мы используем обозначения $\varepsilon_\alpha^{(1,2)}$ (см. (3.10)).

В пределе сильного поля, в кинематической области $q_\parallel^2 \ll eB$, выражения для функций $\Pi^{(\lambda)}(q)$ существенно упрощаются и могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Pi^{(1)}(q) = & -\frac{\alpha}{3\pi} q_\perp^2 + \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \left(\ln \frac{B}{B_e} - C - \gamma_E + \frac{3}{2} v(q^2) \right) + \\ & + O\left(\frac{1}{eB}\right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(q) = & -\frac{2\alpha}{\pi} eB H\left(\frac{q_\parallel^2}{4m_e^2}\right) + \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \left(\ln \frac{B}{B_e} - C - \gamma_E + \frac{3}{2} v(q^2) \right) + \\ & + O\left(\frac{1}{eB}\right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\Pi^{(3)}(q^2) = \frac{\alpha}{3\pi} q^2 \left(\ln \frac{B}{B_e} - C - \gamma_E + \frac{3}{2} v(q^2) \right) + O\left(\frac{1}{eB}\right), \quad (3.15)$$

где $\gamma_E = 0.577 \dots$ – постоянная Эйлера, $C \simeq 1.2147$ есть численное значение интеграла

$$C = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dz}{z} \left(\frac{1+3z}{1+z} + \frac{3}{z \operatorname{th} z} - \frac{3}{\operatorname{th}^2 z} \right). \quad (3.16)$$

Функция $H(z)$, введённая в выражении (3.14), имеет вид

$$H(z) = \int_0^1 \frac{du}{1 - z(1 - u^2) - i0} - 1 \quad (3.17)$$

и в различных областях значений аргумента равна:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{1}{2\sqrt{-z(1-z)}} \ln \frac{\sqrt{1-z} + \sqrt{-z}}{\sqrt{1-z} - \sqrt{-z}} - 1, \quad z < 0, \\ H(z) &= \frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{z}{1-z}} - 1, \quad 0 < z < 1, \\ H(z) &= -\frac{1}{2\sqrt{z(z-1)}} \ln \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z} - \sqrt{z-1}} - 1 + \frac{i\pi}{2\sqrt{z(z-1)}}, \quad z > 1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Функция имеет асимптотики:

$$H(z) \simeq \frac{2}{3}z + \frac{8}{15}z^2 + \frac{16}{35}z^3, \quad |z| \ll 1, \quad (3.19)$$

$$H(z) \simeq -1 - \frac{1}{2z} \ln 4|z|, \quad |z| \gg 1. \quad (3.20)$$

Следует заметить, что в реальных вычислениях члены с q^2 , содержащиеся в выражениях (3.13) и (3.14), несущественны, так как определяют, в соответствии с дисперсионным уравнением (3.9), поправки порядка α .

Решение дисперсионного уравнения (3.9) для фотона второй моды, определяемое функцией (3.14), изображено на рис. 3.2. Пунктирная линия соответствует вакуумной дисперсии $q^2 = 0$. В области выше этой линии квадрат “массы фотона” $\operatorname{Re} \Pi^{(2)}$ имеет положительный знак, ниже линии – отрицательный. Расстояние по вертикали от данной точки дисперсионной кривой до линии $q^2 = 0$ равно $|q^2|$. Линия $q^2 = 0$ и горизонтальная линия $4m_e^2$ делят плоскость на области, соответствующие различным нейтринным процессам.

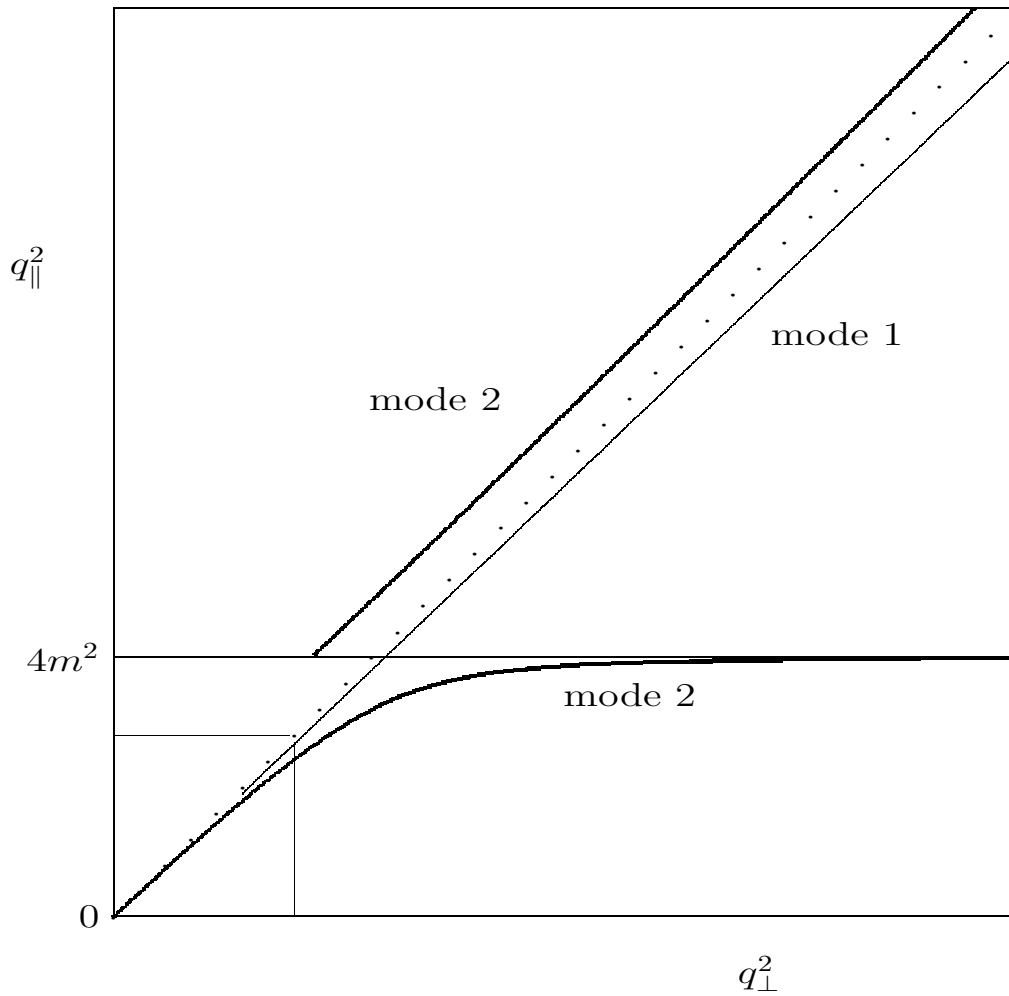


Рис. 3.2. Закон дисперсии в сильном магнитном поле для фотонов первой и второй мод: дисперсионная кривая фотона моды 2 выше линии $q_{||}^2 = 4m_e^2$ представляет собой реальную часть функции $\Pi^{(2)}$ (см. (3.14)); пунктирная линия соответствует вакуумной дисперсии $q^2 = 0$

Решение уравнения (3.9) для фотона первой моды, как видно из выражения для функции (3.13), в рассматриваемой кинематической области представляет собой прямую, незначительно отклоняющуюся от вакуумной прямой $q^2 = 0$ в область отрицательных q^2 .

3.3. Обобщённая двухточечная петлевая амплитуда $j \rightarrow f \bar{f} \rightarrow j'$ во внешнем электромагнитном поле

Результат, полученный для поляризационного оператора фотона во внешнем магнитном поле, нетрудно обобщить, проведя вычисление однопетлевой двухточечной амплитуды перехода $j \rightarrow f \bar{f} \rightarrow j'$ в постоянном однородном магнитном поле для различных комбинаций скалярного, псевдоскалярного, векторного и псевдовекторного взаимодействия токов j и j' с фермионами [168]. Под токами j, j' понимаются обобщённые локальные квантовополевые объекты, которые могут быть действительно токами или волновыми функциями соответствующих частиц.

Данная амплитуда может быть полезна для анализа как древесных, так и петлевых квантовых процессов во внешнем электромагнитном поле, и играть роль своеобразного справочника при исследованиях различных переходов, таких как распады $\nu \rightarrow \nu\gamma$, $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$, $a \rightarrow \nu\bar{\nu}$, $a \rightarrow e^- e^+$, осцилляции аксион \leftrightarrow фотон, а также массовые операторы скалярных и псевдоскалярных частиц.

3.3.1. Магнитное поле

При анализе обобщённой амплитуды перехода $j \rightarrow f \bar{f} \rightarrow j'$ используется эффективный лагранжиан взаимодействия тока j с фермионами следующего вида:

$$\mathcal{L}(x) = \sum_n j_n(x) (\bar{\psi}_f(x) \Gamma_n \psi_f(x)), \quad (3.21)$$

где индекс $n = S, P, V, A$ нумерует матрицы

$$\Gamma_n = 1, \gamma_5, \gamma_\alpha, \gamma_\alpha \gamma_5, \quad (3.22)$$

а $j_n(x)$ – обобщённый ток, включающий константу связи.

Однопетлевая амплитуда перехода $j \rightarrow j'$ описывается фейнмановской диаграммой, изображённой на рис. 3.3, и имеет следующий вид:

$$\mathcal{M}_{nn'} = -i j_n j_{n'}^* \int d^4 Z \text{Tr} [S(-Z) \Gamma_n S(Z) \Gamma_{n'}] e^{-iqZ}. \quad (3.23)$$

Здесь $S(Z)$ – трансляционно инвариантная часть пропагатора фермиона в магнитном поле (см. (2.2)). $j_n, j_{n'}$ – фурье-образы токов, q – переданный импульс. Из выражения для пропагатора видно, что амплитуда (3.23), вообще

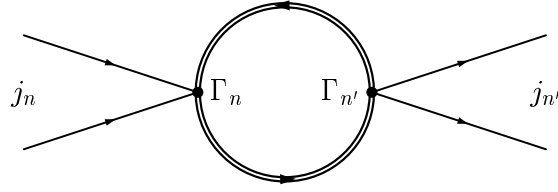


Рис. 3.3. Диаграмма Фейнмана для перехода $j \rightarrow j'$: двойные линии означают, что в пропагаторах виртуальных фермионов влияние внешнего электромагнитного поля учтено точно

говоря, содержит расходимость на нижнем пределе интеграла по собственному времени. Данная расходимость, по сути являющаяся ультрафиолетовой, связана с локальностью лагранжиана взаимодействия (3.21). В дальнейшем нас будет интересовать только индуцированная полем часть амплитуды:

$$\Delta \mathcal{M}_{nn'} = \mathcal{M}_{nn'} - \mathcal{M}_{nn'} \Big|_{B=0}. \quad (3.24)$$

Как показывает соответствующий анализ, разность (3.24) свободна от ультрафиолетовых расходимостей.

С учётом билинейной зависимости фазы трансляционно инвариантной части пропагатора $S(Z)$ от переменной Z интегрирование по Z в выражении для амплитуды (3.23) сводится к вычислению обобщённых гауссовых интегралов скалярного, векторного и тензорного типов. Скалярный интеграл имеет вид

$$\Phi = \int d^4 Z \exp \left[-i \left((Zp) + \frac{1}{4} (ZGZ) \right) \right], \quad (3.25)$$

где

$$G^{\mu\nu} = \frac{v+s}{vs} \tilde{\Lambda}^{\mu\nu} - \beta \frac{\sin(\beta(v+s))}{\sin(\beta v) \sin(\beta s)} \Lambda^{\mu\nu},$$

здесь $\beta = eB$. Переменные v и s имеют смысл собственного времени Фока в пропагаторах фермионов. Напомним, что матрицы $\Lambda_{\mu\nu}$ и $\tilde{\Lambda}_{\mu\nu}$ определяются через безразмерные тензоры $\varphi_{\mu\nu}$ и $\tilde{\varphi}_{\mu\nu}$ постоянного однородного магнитного поля:

$$\Lambda_{\mu\nu} = (\varphi\varphi)_{\mu\nu}, \quad \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} = (\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\mu\nu}.$$

Векторный и тензорный интегралы определяются из Φ соответствующим дифференцированием по импульсу p :

$$\Phi_\mu = \int d^4 Z Z_\mu \exp \left[-i \left((Zp) + \frac{1}{4}(ZGZ) \right) \right] = i \frac{\partial \Phi}{\partial p_\mu}, \quad (3.26)$$

$$\Phi_{\mu\nu} = \int d^4 Z Z_\mu Z_\nu \exp \left[-i \left((Zp) + \frac{1}{4}(ZGZ) \right) \right] = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial p_\mu \partial p_\nu}. \quad (3.27)$$

Интегрирование по пространственно-временной переменной Z даёт

$$\begin{aligned} \Phi &= -(4\pi)^2 (\det G)^{-1/2} e^{i(pG^{-1}p)}, \\ \Phi_\mu &= -2(pG^{-1})_\mu \Phi, \\ \Phi_{\mu\nu} &= 2 \left[2(pG^{-1})_\mu (pG^{-1})_\nu - iG_{\mu\nu}^{-1} \right] \Phi, \end{aligned} \quad (3.28)$$

где обратная матрица G^{-1} имеет вид

$$G_{\mu\nu}^{-1} = \frac{vs}{v+s} \tilde{\Lambda}_{\mu\nu} - \frac{\sin(\beta v) \sin(\beta s)}{\beta \sin(\beta(v+s))} \Lambda_{\mu\nu},$$

детерминант матрицы G равен

$$\det G = - \left\{ \frac{(v+s) \beta \sin(\beta(v+s))}{s v \sin(\beta v) \sin(\beta s)} \right\}^2. \quad (3.29)$$

После выполнения интегрирования по Z обобщённая амплитуда может быть выражена в виде двукратного интеграла.

Приведем выражения для амплитуд $\Delta \mathcal{M}_{nn'}$ в магнитном поле с вершинами, соответствующими векторной и псевдовекторной связи ($n, n' = V, A$), которые потребуются в нашем дальнейшем анализе. Аналогичные результаты, содержащие также вершины со скалярной и псевдоскалярной связью, могут быть найдены в статье [168] (см. также [148]).

Если ток является векторным ($j_n \equiv j_{V\alpha}$, $\Gamma_n \equiv \gamma_\alpha$), расчёт показывает, что этот ток входит в амплитуду только в комбинации $f_{\alpha\beta} = q_\alpha j_{V\beta} - q_\beta j_{V\alpha}$. При этом, если ток j_V представляет собой вектор поляризации фотона, $f_{\alpha\beta}$ приобретает смысл тензора электромагнитного поля фотона в импульсном пространстве, что соответствует калибровочной инвариантности амплитуды процесса. Таким образом, в вектор-векторную амплитуду ($n = n' = V$)

входят тензоры $f_{\alpha\beta}$ и $f'_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{M}_{VV} = & \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{(f\varphi)(f'^*\varphi)}{4q_\perp^2} Y_{VV}^{(1)} + \frac{(f\tilde{\varphi})(f'^*\tilde{\varphi})}{4q_\parallel^2} Y_{VV}^{(2)} + \right. \\ & \left. + \frac{(q\varphi\varphi f q)(q\varphi\varphi f'^* q)}{q^2 q_\parallel^2 q_\perp^2} Y_{VV}^{(3)} \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$Y_{VV}^{(i)} = \int_0^1 du \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\frac{\beta t}{\sin \beta t} y_{VV}^{(i)} e^{-i\Omega} - q^2 \frac{1-u^2}{2} e^{-i\Omega_0} \right],$$

$$y_{VV}^{(1)} = \frac{q_\parallel^2}{2} \left(\cos \beta t u - \frac{u \sin \beta t u}{\operatorname{tg} \beta t} \right) - q_\perp^2 \frac{\cos \beta t u - \cos \beta t}{\sin^2 \beta t},$$

$$y_{VV}^{(2)} = q_\parallel^2 \frac{1-u^2}{2} \cos \beta t - \frac{q_\perp^2}{2} \left(\cos \beta t u - \frac{u \sin \beta t u}{\operatorname{tg} \beta t} \right),$$

$$y_{VV}^{(3)} = \frac{q^2}{2} \left(\cos \beta t u - \frac{u \sin \beta t u}{\operatorname{tg} \beta t} \right),$$

$$f_{\alpha\beta} = q_\alpha j_{V\beta} - q_\beta j_{V\alpha}, \quad f'_{\alpha\beta} = q_\alpha j'_{V\beta} - q_\beta j'_{V\alpha},$$

$$\Omega_0 = t \left(m^2 - q^2 \frac{1-u^2}{4} \right),$$

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{q_\perp^2}{2} \left(\frac{\cos \beta t u - \cos \beta t}{\beta \sin \beta t} - \frac{1-u^2}{2} t \right),$$

$$q_\perp^2 = (q\varphi\varphi q) = q_\mu \varphi^{\mu\nu} \varphi_{\nu\rho} q^\rho,$$

$$q_\parallel^2 = (q\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}q), \quad q_\parallel^2 - q_\perp^2 = q^2,$$

где m – масса фермиона.

Аксиал-аксиальная амплитуда ($n = n' = A$) имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{M}_{AA} = & \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{(j_A\varphi q)(j'_A{}^*\varphi q)}{q_\perp^2} Y_{AA}^{(1)} + \frac{(j_A\tilde{\varphi} q)(j'_A{}^*\tilde{\varphi} q)}{q_\parallel^2} Y_{AA}^{(2)} + \right. \\ & + \frac{q^2}{q_\parallel^2 q_\perp^2} (j_A\varphi\varphi q)(j'_A{}^*\varphi\varphi q) Y_{AA}^{(3)} - \\ & \left. - \frac{(j_A\varphi\varphi q)(j'_A{}^* q) + (j'_A{}^*\varphi\varphi q)(j_A q)}{q_\parallel^2} Y_{AA}^{(4)} + \frac{(j_A q)(j'_A{}^* q)}{q_\parallel^2} Y_{AA}^{(5)} \right], \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned}
Y_{AA}^{(i)} &= \int_0^1 du \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\frac{\beta t}{\sin \beta t} y_{AA}^{(i)} e^{-i\Omega} + \left(2m^2 - q^2 \frac{1-u^2}{2} \right) e^{-i\Omega_0} \right], \\
i &= 1, 2, 3, 4, \\
Y_{AA}^{(5)} &= \int_0^1 du \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left[\frac{\beta t}{\sin \beta t} y_{AA}^{(5)} e^{-i\Omega} - \left(2m^2 + q_\perp^2 \frac{1-u^2}{2} \right) e^{-i\Omega_0} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_{AA}^{(1)} &= \frac{q_\parallel^2}{2} \left(\cos \beta t u - \frac{u \sin \beta t u}{\operatorname{tg} \beta t} \right) - q_\perp^2 \frac{\cos \beta t u - \cos \beta t}{\sin^2 \beta t} - 2m^2 \cos \beta t u, \\
y_{AA}^{(2)} &= q_\parallel^2 \frac{1-u^2}{2} \cos \beta t - \frac{q_\perp^2}{2} \left(\cos \beta t u - \frac{u \sin \beta t u}{\operatorname{tg} \beta t} \right) - 2m^2 \cos \beta t, \\
y_{AA}^{(3)} &= \frac{q^2}{2} \left(\cos \beta t u - \frac{u \sin \beta t u}{\operatorname{tg} \beta t} \right) + \frac{2m^2}{q^2} \left(q_\perp^2 \cos \beta t - q_\parallel^2 \cos \beta t u \right), \\
y_{AA}^{(4)} &= \frac{q^2}{2} \left(\cos \beta t u - \frac{u \sin \beta t u}{\operatorname{tg} \beta t} \right) - 2m^2 \cos \beta t, \\
y_{AA}^{(5)} &= \frac{q_\perp^2}{2} \left(\cos \beta t u - \frac{u \sin \beta t u}{\operatorname{tg} \beta t} \right) + 2m^2 \cos \beta t.
\end{aligned}$$

В случае векторной и аксиально-векторной вершин ($\Gamma_n \equiv \gamma_\alpha$, $\Gamma_{n'} \equiv \gamma_\beta \gamma_5$) для индуцированной полем части амплитуды получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{M}_{VA} &= -\frac{1}{4\pi^2} \beta \left[\frac{(f\tilde{\varphi})(j_A^* \varphi \varphi q)}{2q_\parallel^2} Y_{VA}^{(1)} + \frac{(j_A^* \tilde{\varphi} q)(q f \varphi \varphi q)}{q_\parallel^2 q_\perp^2} Y_{VA}^{(2)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(f\tilde{\varphi})(j_A^* q)}{2q_\parallel^2} Y_{VA}^{(3)} \right], \tag{3.32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{VA}^{(1)} &= i \int_0^1 du \int_0^\infty dt \left(\frac{q_\perp^2 + q_\parallel^2}{q_\perp^2} m^2 - q^2 \frac{q_\parallel^2}{q_\perp^2} \frac{1-u^2}{4} \right) e^{-i\Omega} - \frac{q_\parallel^2}{q_\perp^2}, \\
Y_{VA}^{(2)} &= i \int_0^1 du \int_0^\infty dt \left(m^2 - q_\parallel^2 \frac{1-u^2}{4} \right) e^{-i\Omega} - \frac{q_\parallel^2}{q^2},
\end{aligned}$$

$$Y_{VA}^{(3)} = i \int_0^1 du \int_0^\infty dt \left(m^2 + q_\parallel^2 \frac{1-u^2}{4} \right) e^{-i\Omega}.$$

При использовании полученных результатов для вычисления амплитуд процессов с участием псевдоскалярных и аксиальных токов необходимо соблюдать осторожность. Это связано с тем, что в таких диаграммах (рис. 3.3) линейный по полю член может оказаться неверным из-за *треугольной аномалии Адлера*. Поэтому, строго говоря, необходимо указать дополнительную процедуру вычитания линейного по полю члена с последующим его восстановлением. Таким образом, корректное выражение для индуцированной полем части амплитуды должно иметь вид

$$\Delta \widetilde{\mathcal{M}} = \left(\mathcal{M} - \mathcal{M} \Big|_{B=0} - B \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial B} \Big|_{B=0} \right) + \widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}, \quad (3.33)$$

где выражение в скобках свободно от аномалии Адлера. Схема восстановления правильного линейного по полю члена $\widetilde{\mathcal{M}}^{(1)}$ определяется конкретным типом процесса в зависимости от происхождения треугольной аномалии. Пример восстановления линейного члена для вектор–аксиальной части амплитуды процесса тормозного (черенковского) излучения фотона при распространении нейтрино в сильном внешнем магнитном поле, $\nu \rightarrow \nu + \gamma$ [89, 90], приведен далее в параграфе 6.1. В данном случае происхождение треугольной аномалии связано с переходом к локальному пределу слабого взаимодействия.

3.3.2. Скрещенное поле

Амплитуду перехода $j \rightarrow j'$ для случая скрещенного поля можно получить, выполняя аналогичные предыдущему анализу вычисления, но с использованием пропагатора фермиона в скрещенном поле (см. формулу (2.61)).

Индукцированные полем амплитуды $\Delta \mathcal{M}_{nn'}$ ($n, n' = V, A$) можно представить в следующей форме.

Вектор-векторная амплитуда:

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{M}_{VV} = & \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{(fF)(f'^*F)}{4(qFFq)} Y_{VV}^{(1)} + \frac{(f\tilde{F})(f'^*\tilde{F})}{4(qFFq)} Y_{VV}^{(2)} + \right. \\ & \left. + \frac{(qFFfq)(qFFf'^*q)}{q^2(qFFq)^2} Y_{VV}^{(3)} \right], \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned}
Y_{VV}^{(1)} &= - \int_0^1 du \left[\frac{1}{6} m^2 \chi^{2/3} \left(\frac{4}{1-u^2} \right)^{1/3} (3+u^2) \frac{df(x)}{dx} - q^2 \frac{1-u^2}{2} f_1(x) \right], \\
Y_{VV}^{(2)} &= - \int_0^1 du \left[\frac{1}{3} m^2 \chi^{2/3} \left(\frac{4}{1-u^2} \right)^{1/3} (3-u^2) \frac{df(x)}{dx} - q^2 \frac{1-u^2}{2} f_1(x) \right], \\
Y_{VV}^{(3)} &= \frac{q^2}{2} \int_0^1 du (1-u^2) f_1(x),
\end{aligned}$$

где использованы обозначения:

$$\begin{aligned}
\chi^2 &= \frac{e^2(qFFq)}{m^6}, \\
x &= \left(\frac{4}{\chi(1-u^2)} \right)^{2/3} \left(1 - \frac{q^2}{4m^2}(1-u^2) \right),
\end{aligned}$$

$f(x)$ – функция Харди – Стокса,

$$\begin{aligned}
f(x) &= i \int_0^\infty dt e^{-i(tx + \frac{t^3}{3})}, \\
f_1(x) &= \int_0^\infty \frac{dt}{t} \left(e^{-i(tx + \frac{t^3}{3})} - e^{-itx} \right) = \\
&= - \int_0^x f(z) dz + \ln x + \frac{1}{3} \ln 3 + \frac{2}{3} \gamma_E + \frac{i\pi}{3}.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Для остальных амплитуд получаем

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{M}_{AA} &= \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{(j_A F q)(j_A'^* F q)}{(q F F q)} Y_{AA}^{(1)} + \frac{(j_A \tilde{F} q)(j_A'^* \tilde{F} q)}{(q F F q)} Y_{AA}^{(2)} + \right. \\
&+ q^2 \frac{(j_A F F j_A'^*)}{(q F F q)} Y_{AA}^{(3)} - \\
&\left. - \frac{(j_A F F q)(j_A'^* q) + (j_A'^* F F q)(j_A q)}{(q F F q)} Y_{AA}^{(4)} + (j_A q)(j_A'^* q) Y_{AA}^{(5)} \right],
\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned}
Y_{AA}^{(1,2)} &= Y_{VV}^{(1,2)} - 2m^2 \int_0^1 du f_1(x), \\
Y_{AA}^{(3)} &= - \int_0^1 du \left[4 \frac{m^2}{q^2} \chi^{2/3} \left(\frac{4}{1-u^2} \right)^{1/3} \frac{df(x)}{dx} + \right. \\
&\quad \left. + \left(2m^2 - q^2 \frac{1-u^2}{2} \right) f_1(x) \right], \\
Y_{AA}^{(4)} &= - \int_0^1 du \left(2m^2 - q^2 \frac{1-u^2}{2} \right) f_1(x), \\
Y_{AA}^{(5)} &= \int_0^1 du \frac{1-u^2}{2} f_1(x), \\
\Delta \mathcal{M}_{VA} &= - \frac{e}{4\pi^2} \left[\frac{(f\tilde{F})(j_A^* FFq)}{2(qFFq)} Y_{VA}^{(1)} + \frac{(j_A^* \tilde{F}q)(qfFFq)}{q^2(qFFq)} Y_{VA}^{(2)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{(f\tilde{F})(j_A^* q)}{2q^2} Y_{VA}^{(3)} \right], \tag{3.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_{VA}^{(1)} &= - \frac{1}{m^2 \chi^{2/3}} \int_0^1 du \left(\frac{4}{1-u^2} \right)^{2/3} \left(2m^2 - q^2 \frac{1-u^2}{4} \right) f(x) + 1, \\
Y_{VA}^{(2)} &= -Y_{VA}^{(3)} + 1, \\
Y_{VA}^{(3)} &= - \frac{1}{m^2 \chi^{2/3}} q^2 \int_0^1 du \left(\frac{4}{1-u^2} \right)^{2/3} f(x).
\end{aligned}$$

Отметим, что в амплитуде $\Delta \mathcal{M}_{VA}$, вообще говоря, содержится неопределённость, связанная с аномалией Адлера. Процедура устранения этой неопределённости описана выше в (3.33).

Полученные выражения для амплитуд в скрещенном поле могут также использоваться для проверки правильности более громоздкого расчёта

в магнитном поле. Если в амплитудах, вычисленных в общем случае произвольного магнитного поля, сделать предельный переход, устремляя инвариант β к нулю и сохраняя конечной величину $\beta\varphi_{\alpha\beta} = eF_{\alpha\beta}$, из них можно получить соответствующие амплитуды в скрещенном поле.

Поскольку использовались точные решения уравнения Дирака, влияние внешнего электромагнитного поля учтено точно, что придаёт полученному в данной работе выражению для амплитуды достаточную общность и позволяет широко применять его при анализе разнообразных физических величин и процессов в магнитном и скрещенном поле. В частности, диагональные по обобщённым токам амплитуды $\Delta\mathcal{M}_{VV}$, $\Delta\mathcal{M}_{AA}$, с точностью до множителей, совпадают с индуцированными внешним полем вкладами в массовые операторы соответствующих полей. Амплитуды $\Delta\mathcal{M}_{VV}$ и $\Delta\mathcal{M}_{VA}$ после уже упомянутого аккуратного обращения с треугольной аномалией описывают амплитуду процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$.

3.4. Поляризационный оператор фотона в плазме

При описании электромагнитных процессов в плазме с участием виртуального фотона необходимо использование фотонного пропагатора $G_{\alpha\beta}(Q)$ с учётом поляризационных эффектов плазмы. Мы применяем здесь, как наиболее физически прозрачный, прямой способ учёта этих эффектов путём суммирования диаграмм Фейнмана для рассеяния фотона (плазмона) вперёд на частицах плазмы. Это суммирование ведёт к уравнению Дайсона, и в результате в той области, где поляризационный оператор фотона является вещественным, для пропагатора имеем [169]

$$G_{\alpha\beta}(Q) = \frac{i\rho_{\alpha\beta}(t)}{Q^2 - \Pi_t} + \frac{i\rho_{\alpha\beta}(\ell)}{Q^2 - \Pi_\ell}, \quad (3.38)$$

где $Q = (q_0, \mathbf{q})$ — передаваемый 4-импульс, $\Pi_{t,\ell}$ — собственные значения поляризационного оператора фотона $\Pi_{\alpha\beta}$ для поперечного и продольного плазмонов,

$$\Pi_{\alpha\beta} = -\Pi_t \rho_{\alpha\beta}(t) - \Pi_\ell \rho_{\alpha\beta}(\ell), \quad (3.39)$$

$\rho_{\alpha\beta}(t, \ell)$ — соответствующие матрицы плотности:

$$\rho_{\alpha\beta}(t) = - \left(g_{\alpha\beta} - \frac{Q_\alpha Q_\beta}{Q^2} - \frac{L_\alpha L_\beta}{L^2} \right), \quad (3.40)$$

$$\rho_{\alpha\beta}(\ell) = - \frac{L_\alpha L_\beta}{L^2}, \quad (3.41)$$

$$L_\alpha = Q_\alpha (u Q) - u_\alpha Q^2, \quad (3.42)$$

u_α — 4-вектор скорости плазмы. Матрицы плотности $\rho_{\alpha\beta}(\lambda)$ с $\lambda = t, \ell$ обладают свойствами проекционных операторов:

$$\rho_{\alpha\mu}(\lambda) \rho_\beta^\mu(\lambda') = -\delta_{\lambda\lambda'} \rho_{\alpha\beta}(\lambda). \quad (3.43)$$

В области, где собственные значения $\Pi_{t,\ell}$ тензора поляризации фотонов приобретают мнимые части, будем записывать их в виде

$$\Pi_\lambda = R_\lambda + i I_\lambda, \quad (3.44)$$

где R_λ и I_λ — действительная и мнимая части, содержащие вклады всех компонент активной среды. Для извлечения мнимых частей $I_{t,\ell}$ будет достаточно провести аналитическое продолжение $q_0 \rightarrow q_0 + i\epsilon$, соответствующее запаздывающему поляризационному оператору. Вклады отдельных компонент плазмы (электронов, протонов и т. д.) суммируются:

$$R_{t,\ell} = R_{t,\ell}^{(e)} + R_{t,\ell}^{(p)} + \dots, \quad I_{t,\ell} = I_{t,\ell}^{(e)} + I_{t,\ell}^{(p)} + \dots. \quad (3.45)$$

Рассматривая в качестве активной среды ядро сверхновой, заметим, что основной вклад в электрослабые процессы здесь даёт рассеяние на электронах и протонах плазмы. Целесообразно рассмотреть вначале общий случай вклада в поляризационный оператор фотона от компоненты плазмы, состоящей из заряженных фермионов, а затем получить из общих выражений частные случаи вкладов протонов и электронов.

Общее выражение для вклада заряженного фермиона в поляризационный оператор фотона имеет вид (см., например, [170])

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}(Q) &= 16\pi\alpha \int \frac{d^3\mathcal{P}}{2\mathcal{E}(2\pi)^3} [f_F(P) + \bar{f}_F(P)] \times \\ &\times \frac{(PQ)^2 g_{\alpha\beta} + Q^2 P_\alpha P_\beta - (PQ)(P_\alpha Q_\beta + Q_\alpha P_\beta)}{(PQ)^2 - (Q^2)^2/4}, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где $P^\alpha = (\mathcal{E}, \mathcal{P})$, $\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{P}^2 + m_F^2}$, m_F — эффективная масса фермиона в плазме,

$$f_F(P) = \frac{1}{e^{(Pu)/T - \eta_F} + 1}, \quad \bar{f}_F(P) = \frac{1}{e^{(Pu)/T + \eta_F} + 1} \quad (3.47)$$

есть функции распределения фермионов и антифермионов, η_F — химический потенциал фермионов, отнесённый к температуре.

При анализе протонного вклада в поляризационный оператор фотона следует учесть, что в интересующих нас астрофизических условиях вклад антипротонов пренебрежимо мал. В результате для действительных и мнимых частей протонного вклада в собственные значения поляризационного оператора фотона, переходя в систему покоя плазмы $u^\alpha = (1, \mathbf{0})$ и учитывая, что в интересующих нас условиях $|Q^2| \ll m_p^2$, можно получить

$$R_t^{(p)} = \frac{4\alpha}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\mathcal{P} \mathcal{P}^2}{\mathcal{E} (e^{(\mathcal{E} - \mu_p)/T} + 1)} \left(x^2 + \frac{x(1 - x^2)}{2v} \ln \left| \frac{x + v}{x - v} \right| \right), \quad (3.48)$$

$$I_t^{(p)} = -2\alpha x (1 - x^2) \int_{\mathcal{P}_{\min}}^\infty \frac{d\mathcal{P} \mathcal{P}}{e^{(\mathcal{E} - \mu_p)/T} + 1}, \quad \mathcal{P}_{\min} = \frac{m_p |x|}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad (3.49)$$

$$R_\ell^{(p)} = \frac{4\alpha}{\pi} (1 - x^2) \int_0^\infty \frac{d\mathcal{P} \mathcal{P}^2}{\mathcal{E} (e^{(\mathcal{E} - \mu_p)/T} + 1)} \times \\ \times \left(1 + \frac{1 - x^2}{v^2 - x^2} - \frac{x}{v} \ln \left| \frac{x + v}{x - v} \right| \right), \quad (3.50)$$

$$I_\ell^{(p)} = -2 I_t^{(p)} + 2\alpha m_p^2 x \left[\exp \left(\frac{m_p}{T \sqrt{1 - x^2}} - \frac{\mu_p}{T} \right) + 1 \right]^{-1}, \quad (3.51)$$

где μ_p — химический потенциал протонов, $v = \mathcal{P}/\mathcal{E}$, $\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{P}^2 + m_p^2}$, m_p — эффективная масса протона в плазме, зависящая от концентрации протонов N_p (см., например, [1], с. 152). Здесь мы ввели безразмерный параметр $x = q_0/q$, для которого в канале рассеяния существует ограничение $|x| < 1$.

Химический потенциал протонов μ_p может быть определён из условия электронейтральности плазмы, которое можно, пренебрегая вкладом ионов (см. ниже), записать в виде

$$N_p \simeq N_e \simeq \frac{\mu_e^3}{3\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{d\mathcal{P} \mathcal{P}^2}{e^{(\mathcal{E} - \mu_p)/T} + 1}. \quad (3.52)$$

Численный анализ уравнения (3.52) показывает, что разность $\mu_p - m_p$ (так называемый нерелятивистский химический потенциал протонов) положительна при температурах $T \simeq 30\text{--}60$ МэВ, причём того же порядка величины, что и температура. Таким образом, в условиях ядра сверхновой как приближение вырожденного ферми-газа, так и приближение классического больцмановского газа, вообще говоря, мало применимы для протонов. Однако мы проверили прямым вычислением, что наблюдаемые величины, такие как светимость, оказываются малочувствительными по отношению к выбору приближения для распределения протонов.

В условиях ядра сверхновой можно с хорошей точностью рассматривать электронную фракцию как плотную релятивистскую вырожденную плазму ($\mu_e \gg T \gg m_e$). Действительно, по современным представлениям в ядре сверхновой химический потенциал электронов достигает значений 200–250 МэВ, в то время как температура $\sim 20\text{--}25$ МэВ. При этих условиях вещественная и мнимая части (3.45) электронных вкладов в функции поляризации фотона могут быть получены из выражения (3.46) заменой $\eta_F \rightarrow \mu_e/T$ и предельным переходом $m_F = m_e \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$ в виде

$$R_t^{(e)} = m_\gamma^2 \left(x^2 + \frac{x(1-x^2)}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right), \quad (3.53)$$

$$I_t^{(e)} = -\frac{\pi}{2} m_\gamma^2 x (1-x^2), \quad (3.54)$$

$$R_\ell^{(e)} = 2 m_\gamma^2 (1-x^2) \left(1 - \frac{x}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right), \quad (3.55)$$

$$I_\ell^{(e)} = \pi m_\gamma^2 x (1-x^2), \quad (3.56)$$

где m_γ — так называемая термальная масса фотона

$$m_\gamma^2 \simeq \frac{2\alpha}{\pi} \mu_e^2. \quad (3.57)$$

На рис. 3.4, 3.5, 3.6 и 3.7 представлены для иллюстрации электронный и протонный вклады в собственные значения $\Pi_{\ell,t}$ для продольных и поперечных плазмонов при температуре $T = 25$ МэВ и химическом потенциале электронов $\mu_e = 250$ МэВ. Важность учёта протонного вклада очевидна.

Вместе с электронами и протонами в плазме также может присутствовать в общем случае и некоторая доля свободных ионов Y_i . Эта доля может с хорошей точностью считаться классическим газом Больцмана. Действительная и мнимая части соответствующих поляризационных функций для

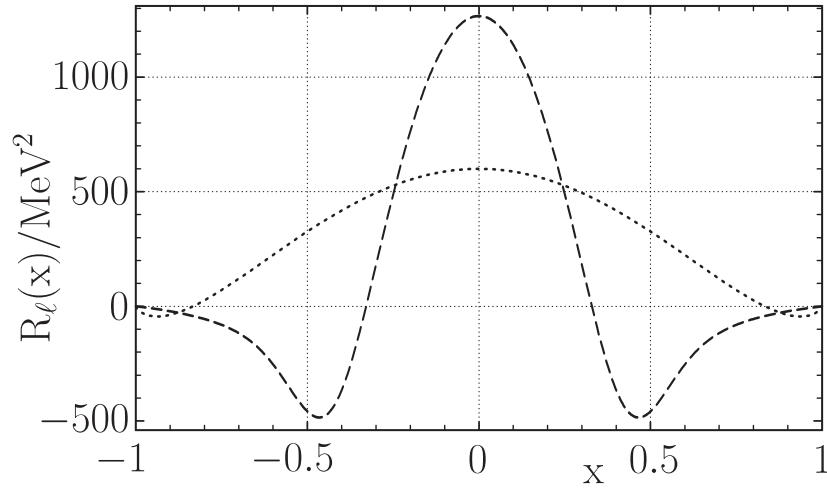


Рис. 3.4. Вклад электронов (пунктирная линия) и вклад протонов (штриховая линия) для действительной части Π_ℓ

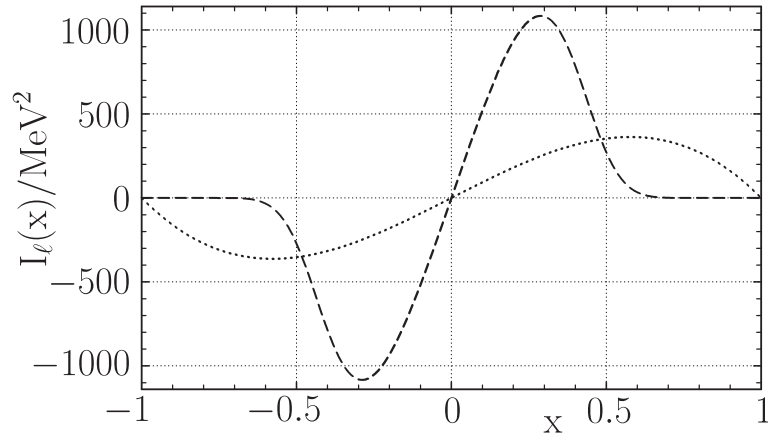


Рис. 3.5. Вклад электронов (пунктирная линия) и вклад протонов (штриховая линия) для мнимой части Π_ℓ

продольного плазмона имеют вид

$$R_\ell^{(i)} = 4\pi\alpha \frac{Z_i^2 n_i}{T} \left[1 - \phi\left(\frac{x}{x_0}\right) \right],$$

$$I_\ell^{(i)} = 8\pi^{3/2} \alpha Z_i^2 n_i \frac{1}{x_0 q} \operatorname{sh}\left(\frac{q_0}{2T}\right) \exp\left(\frac{q^2}{8m_i T}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right), \quad (3.58)$$

где $x_0 = \sqrt{2T/m_i}$ и введена функция

$$\phi(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} |y|^3 \int_0^\infty u \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| e^{-y^2 u^2} du. \quad (3.59)$$

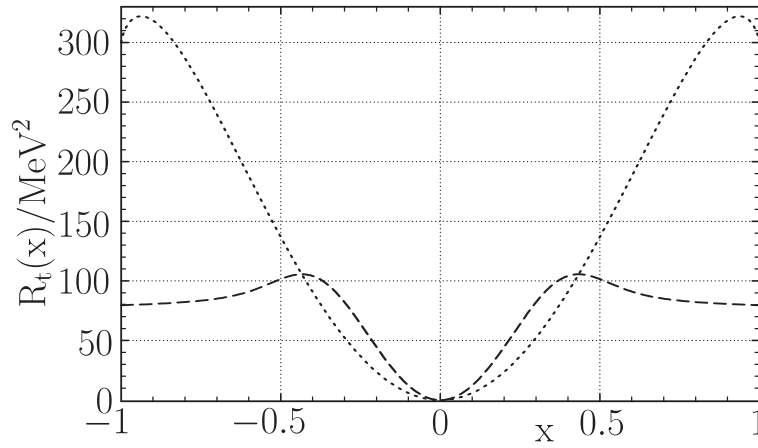


Рис. 3.6. Вклад электронов (пунктирная линия) и вклад протонов (штриховая линия) для действительной части Π_t

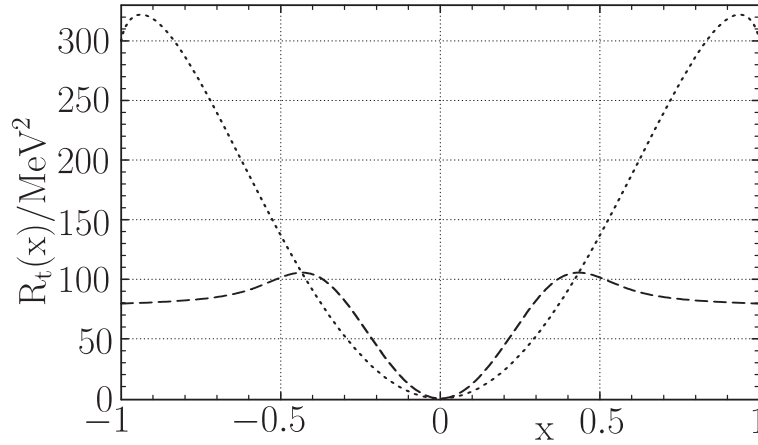


Рис. 3.7. Вклад электронов (пунктирная линия) и вклад протонов (штриховая линия) для мнимой части Π_t

Как видно из уравнения (3.58), функция $I_\ell^{(i)}$ может заметно отличаться от нуля только в узком интервале значений переменной $x = q_0/q$, а именно $x \lesssim x_0 \sim \sqrt{T/m_i} \ll 1$.

В свою очередь, функции $R_t^{(i)}$ и $I_t^{(i)}$ для поперечного плазмона имеют порядок величины $\propto Z_i^2 n_i/m_i$, так что они подавлены большой массой иона в знаменателе. Поэтому существенным может быть только вклад рассеяния нейтрино на свободных ионах через продольный плазмон ($\lambda = \ell$).

Вклад ионов (3.58) будет входить в любые наблюдаемые характеристики со множителем $Z_i^2 Y_i$, и он пренебрежимо мал в условиях ядра сверхновой в силу малости Y_i . Однако он может быть существенным в оболочке ядра сверхновой, которая, как предполагается, может быть насыщена металлами группы железа.

3.5. Массовый оператор электрона в сильном магнитном поле

Исследование асимптотических свойств диаграмм и операторов квантовой электродинамики в сверхсильных магнитных полях, $B \gg B_e$, представляет принципиальный интерес как с точки зрения выяснения границ применимости теории возмущений, так и в свете возможных применений в астрофизике и космологии ранней Вселенной. Исследования такого рода ведутся разными авторами достаточно давно. Так, история вычисления массового оператора электрона в сильном магнитном поле насчитывает уже более 50 лет (см., например, [129–134]). Важность получения точного выражения для массового оператора электрона во внешнем поле проявилась, в частности, при исследовании возможности динамической генерации массы электрона в рамках квантовой электродинамики в магнитном поле, называемой *динамическим нарушением киральной симметрии*. Это направление интенсивно развивается в литературе в последнее время (см., например, [136–143]). Предполагается, что сценарий динамического нарушения киральной симметрии мог иметь место на стадии электрослабого фазового перехода в ранней Вселенной.

3.5.1. Дважды логарифмическая асимптотика

Однопетлевой вклад в массовый оператор электрона в сильном магнитном поле был получен в работе [130] в приближении главных логарифмов в виде

$$M^{(1)} = m_0 \left(1 + \frac{\alpha}{4\pi} \ln^2 \frac{eB}{m_0^2} \right), \quad (3.60)$$

где m_0 – масса электрона в отсутствие поля.

Проиллюстрируем происхождение дважды логарифмического поведения. В квантовой электродинамике в вакууме массовый оператор электрона $\Delta M(p)$ определяется из уравнения Дайсона в импульсном представлении:

$$\mathbb{S}(p) = S(p) - i S(p) \Delta M(p) \mathbb{S}(p), \quad (3.61)$$

где $S(p)$ – “голый” пропагатор электрона (без учёта радиационных поправок) в импульсном представлении, $\mathbb{S}(p)$ – “одетый” пропагатор (со всеми радиационными поправками). В магнитном поле, в силу трансляционной неинвариантности пропагатора $S(x, y)$, определённого в формуле (2.1), переход в импульсное

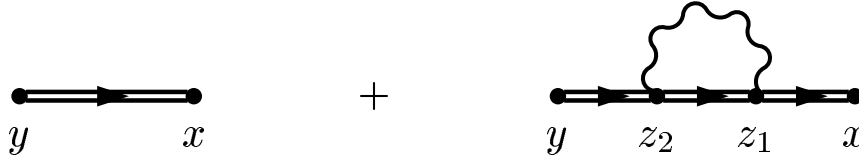


Рис. 3.8. Диаграммы Фейнмана для определения однопетлевого вклада в массовый оператор электрона в дважды логарифмической асимптотике: двойные линии соответствуют пропагаторам электрона во внешнем магнитном поле

пространство требует аккуратности. “Голый” пропагатор электрона, но уже в магнитном поле определяется в приближении сильного поля формулами (2.1), (2.60). “Одетый” пропагатор в магнитном поле, \mathbb{S}^F , в координатном представлении определяется, как и в вакууме, выражением

$$\mathbb{S}^F(x, y) \equiv \frac{\langle 0 | T (\Psi(x) \bar{\Psi}(y) \mathcal{S}) | 0 \rangle}{\langle 0 | \mathcal{S} | 0 \rangle}, \quad (3.62)$$

причем как здесь, так и в \mathcal{S} -матрице

$$\mathcal{S} = T \exp \left(ie \int (\bar{\Psi}(A\gamma)\Psi) d^4x \right), \quad (3.63)$$

$\Psi(x)$ есть точное решение уравнения Дирака в магнитном поле.

В однопетлевом приближении пропагатор (3.62) изображается диаграммами Фейнмана на рис. 3.8 и имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbb{S}^{F(1)}(x, y) &= S^F(x, y) + (ie)^2 \int d^4z_1 d^4z_2 \times \\ &\times S^F(x, z_1) \gamma^\mu S^F(z_1, z_2) \gamma^\nu S^F(z_2, y) \mathcal{D}_{\mu\nu}(z_1 - z_2), \end{aligned} \quad (3.64)$$

где $\mathcal{D}_{\mu\nu}(z_1 - z_2)$ – пропагатор фотона.

Сумма трансляционно и калибровочно неинвариантных фаз пропагаторов S^F под интегралом в (3.64) может быть представлена в форме

$$\Phi(x, z_1) + \Phi(z_1, z_2) + \Phi(z_2, y) = \Phi_\square + \Phi(x, y), \quad (3.65)$$

где Φ_\square – трансляционно и калибровочно инвариантная часть суммарной фазы:

$$\Phi_\square = \Phi(x, z_1) + \Phi(z_1, z_2) + \Phi(z_2, y) + \Phi(y, x). \quad (3.66)$$

Это позволяет представить “одетый” пропагатор в виде, аналогичном формуле (2.1) для “голого” пропагатора:

$$\mathbb{S}^{F(1)}(x, y) = e^{i\Phi(x, y)} \tilde{\mathbb{S}}^{F(1)}(x - y). \quad (3.67)$$

Используя формулу (2.18), получаем

$$\Phi_{\square} = -\frac{e}{2}(x - z_2)_{\mu} F^{\mu\nu}(z_1 - y)_{\nu}. \quad (3.68)$$

Выполняя в (3.64) технически несложные, но громоздкие интегрирования по пространственно-временным переменным z_1, z_2 , можно увидеть, что удобно ввести “продольные части” фурье-образов для “голого” пропагатора в сильном поле $\tilde{S}^F(X)$ в виде

$$\tilde{S}^F(X) = \frac{eB}{2\pi} \exp\left(-\frac{eBX_{\perp}^2}{4}\right) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} S_{\parallel}^F(p_{\parallel}) e^{-i(pX)_{\parallel}}, \quad (3.69)$$

$$S_{\parallel}^F(p_{\parallel}) = i \frac{(p\gamma)_{\parallel} + m_0}{p_{\parallel}^2 - m_0^2} \Pi_{-} \quad (3.70)$$

и, по аналогии с ним, для “одетого” пропагатора $\tilde{S}^{F(1)}(x - y)$

$$\tilde{S}^{F(1)}(X) = \frac{eB}{2\pi} \exp\left(-\frac{eBX_{\perp}^2}{4}\right) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} S_{\parallel}^{F(1)}(p_{\parallel}) e^{-i(pX)_{\parallel}}. \quad (3.71)$$

При этом для оператора $S_{\parallel}^{F(1)}(p_{\parallel})$ можно записать выражение, аналогичное уравнению (3.61), с учётом однопетлевого приближения, что позволит определить массовый оператор электрона в сильном магнитном поле:

$$S_{\parallel}^{F(1)}(p_{\parallel}) = \tilde{S}_{\parallel}^F(p_{\parallel}) - i \tilde{S}_{\parallel}^F(p_{\parallel}) \Delta M^{(1)}(p_{\parallel}) \tilde{S}_{\parallel}^F(p_{\parallel}). \quad (3.72)$$

В результате однопетлевой вклад в массу электрона получим в виде

$$\begin{aligned} \Delta M^{(1)} &= -\frac{i\alpha}{2\pi^3} m_0 \int d^2k_{\perp} e^{-k_{\perp}^2/2eB} \times \\ &\times \int \frac{d^2k_{\parallel}}{[(k - p)_{\parallel}^2 - m_0^2](k_{\parallel}^2 - k_{\perp}^2)} \Big|_{p_{\parallel}^2 = m_0^2}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Совершая в интеграле (3.73) в плоскости k_0 виковский поворот $k_0 = i\tilde{k}_0$, при этом

$$k_{\parallel}^2 = -\tilde{k}_0^2 - k_3^2 \equiv -\tilde{k}_{\parallel}^2,$$

и учитывая, что основной вклад в интеграл происходит от области

$$k_{\perp}^2 \gg \tilde{k}_{\parallel}^2 \gg m_0^2,$$

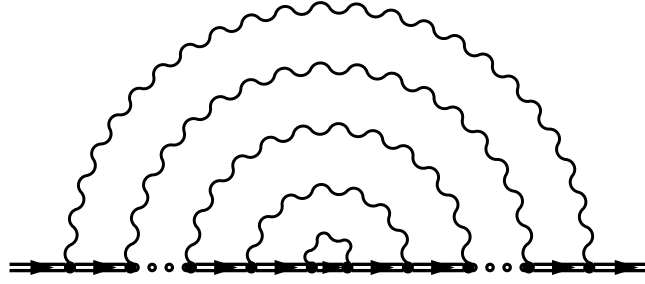


Рис. 3.9. Диаграмма Фейнмана типа “радуга”

получаем

$$\Delta M^{(1)} \simeq \frac{\alpha}{2\pi} m_0 \int_{m_0^2}^{\infty} \frac{dk_{\perp}^2}{k_{\perp}^2} e^{-k_{\perp}^2/2eB} \int_{m_0^2}^{k_{\perp}^2} \frac{d\tilde{k}_{\parallel}^2}{\tilde{k}_{\parallel}^2}. \quad (3.74)$$

Видно, что результат содержит квадрат логарифма и совпадает со вторым слагаемым формулы (3.60).

В работах Лоскутова и Скобелева [131, 132] была предпринята попытка вычислить двухпетлевой вклад, а затем и просуммировать все многопетлевые вклады в том же дважды логарифмическом приближении. Была использована разработанная авторами весьма эффективная техника “двумерной электродинамики” в сильном магнитном поле, и показано, что лидирующий вклад в массовый оператор происходит от диаграмм типа “радуга” (см. рис. 3.9).

Результат суммирования по всем порядкам теории возмущений был получен в работе [132] в виде экспоненты:

$$M_{LS} = m_0 \exp \left(\frac{\alpha}{4\pi} \ln^2 \frac{eB}{m_0^2} \right). \quad (3.75)$$

Однако в работе Гусынина и Смильги [134] суммирование по всем порядкам теории возмущений было проделано заново, с другим результатом:

$$M_{GS} = m_0 \left/ \cos \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \ln \frac{eB}{m_0^2} \right) \right. . \quad (3.76)$$

Очевидно, что здесь также собраны дважды логарифмические вклады, поскольку параметром разложения $\cos x$ является x^2 . При этом первые члены разложения обеих формул, (3.75) и (3.76), в ряд по α воспроизводят однопетлевой результат (3.60) работы [130]. Различие проявляется на двухпетлевом

уровне, где соответствующие вклады из формул (3.75) и (3.76) имеют вид

$$\Delta M_{LS}^{(2)} = m_0 \frac{1}{32} \frac{\alpha^2}{\pi^2} \ln^4 \frac{eB}{m^2}, \quad (3.77)$$

$$\Delta M_{GS}^{(2)} = m_0 \frac{5}{96} \frac{\alpha^2}{\pi^2} \ln^4 \frac{eB}{m_0^2}. \quad (3.78)$$

С точки зрения математики, в рамках использованного теми и другими авторами приближения, мы подтверждаем результат (3.78).

3.5.2. Однологарифмическая асимптотика массового оператора

Отметим, что формулы (3.60) и (3.78) имеют ограниченную область применимости, поскольку они получены без учёта влияния сильного поля на поляризационный оператор виртуального фотона. Как было, по-видимому, впервые показано в работе [133], с учётом поляризационных свойств фотона в сильном поле дважды логарифмическая асимптотика применима при $B \lesssim B_e/\alpha$. При бóльших значениях величины поля фотон приобретает эффективную массу, $m_\gamma^2 = (2\alpha/\pi)eB$. Возвращаясь к формуле (3.73), мы должны заменить выражение $k^2 = k_\parallel^2 - k_\perp^2$ в знаменателе, происходящее от пропагатора безмассового фотона, на выражение $k^2 - m_\gamma^2$, что принципиально меняет ответ, а именно в одном из двух логарифмов масса электрона заменяется на “массу фотона”, при этом

$$\ln(eB/m_\gamma^2) \sim \ln(1/\alpha).$$

Таким образом, при возрастании интенсивности поля рост одного из логарифмов останавливается, так что зависимость массового оператора электрона от поля становится не дважды, а однологарифмической:

$$\Delta M^{(1)} = m_0 \frac{\alpha}{2\pi} \left(\ln \frac{\pi}{\alpha} - \gamma_E \right) \ln \frac{eB}{m_0^2}, \quad (3.79)$$

где $\gamma_E = 0.577\dots$ – постоянная Эйлера.

3.5.3. Вклад высших уровней Ландау

Влияние магнитного поля на поляризационные свойства фотона следует учесть более детально. Как показал А.Е. Шабад (см., например, [80] и цитированные там более ранние работы), в магнитном поле пропагатор фотона

может быть диагонализирован в подходящем базисе и представлен в виде

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = -i \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{k^2 - \Pi^{(\lambda)}} \frac{b_{\mu}^{(\lambda)} b_{\nu}^{(\lambda)}}{(b^{(\lambda)})^2}, \quad (3.80)$$

где $b_{\mu}^{(\lambda)}$ – собственные векторы поляризационного оператора фотона $\Pi_{\mu\nu}$

$$b_{\mu}^{(1)} = (k\varphi)_{\mu}, \quad b_{\mu}^{(2)} = (k\tilde{\varphi})_{\mu}, \quad b_{\mu}^{(3)} = k^2(k\varphi\varphi)_{\mu} - k_{\mu}(k\varphi\varphi k), \quad (3.81)$$

а $\Pi^{(\lambda)}$ – его собственные значения. Как известно, в сильном поле, когда электроны, как реальные, так и виртуальные, занимают основной уровень Ландау, во всех процессах электрон-фотонных взаимодействий участвуют только фотоны с поляризацией $\lambda = 2$ (в обозначениях Адлера [164] – поперечной). Учитывая тот факт, что масса электрона является физической величиной и, следовательно, не зависит от калибровки, удобно вычислять ее в такой калибровке, где пропагатор фотона этой моды приобретает вид [133]

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}^{(2)}(k) = -i \mathcal{D}(k_{\perp}^2, k_{\parallel}^2) \tilde{\Lambda}_{\mu\nu}, \quad \mathcal{D}(k_{\perp}^2, k_{\parallel}^2) = \frac{1}{k^2 - \Pi^{(2)}(k_{\perp}^2, k_{\parallel}^2)}. \quad (3.82)$$

Для вычисления массового оператора электрона в главном логарифмическом приближении достаточно знать поляризационный оператор фотона моды 2 в однопетлевом приближении [80]:

$$\Pi^{(2)}(k_{\perp}^2, k_{\parallel}^2) = -\frac{2\alpha}{\pi} eB \exp\left(-\frac{k_{\perp}^2}{2eB}\right) H\left(\frac{k_{\parallel}^2}{4m_0^2}\right) + \frac{\alpha}{3\pi} k^2 \ln \frac{eB}{m_0^2}. \quad (3.83)$$

Здесь первое слагаемое обусловлено вкладом виртуальных электронов на основном уровне Ландау, второе слагаемое происходит от высших уровней Ландау. Функция $H(z)$ определена в (4.44). В интересующей нас области значений параметров $|k_{\parallel}^2| \gg 4m_0^2$ имеем $H(z) \simeq -1$, поэтому первое слагаемое в (3.83) приобретает смысл квадрата массы фотона $m_{\gamma}^2 = (2\alpha/\pi)eB$, индуцированной магнитным полем. С учётом этого, подставляя (3.83) в (3.82) и домножая функцию $\mathcal{D}(k^2)$ на α , получаем

$$\alpha \mathcal{D}(k^2) = \frac{\alpha}{k^2 - k^2 (\alpha/3\pi) \ln(eB/m_0^2) - m_{\gamma}^2(\alpha)}. \quad (3.84)$$

Из выражения (3.84) видно, что вклад высших уровней Ландау приводит к перенормировке заряда электрона в сильном магнитном поле:

$$\alpha_R = \frac{\alpha}{1 - (\alpha/3\pi) \ln(eB/m_0^2)}. \quad (3.85)$$

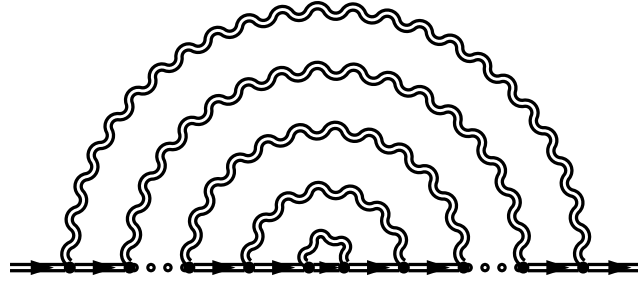


Рис. 3.10. Диаграмма типа “радуга” с учётом поляризации вакуума

В результате выражение (3.84) может быть представлено в виде

$$\alpha \mathcal{D}(k^2) = \frac{\alpha_R}{k^2 - m_\gamma^2(\alpha_R)}. \quad (3.86)$$

Таким образом, в сильном магнитном поле фотон моды 2 проявляет себя как массивный векторный бозон, взаимодействующий с электроном с перенормированной константой связи α_R .

3.5.4. Многопетлевой вклад в массовый оператор электрона

Для n -петлевого вклада в массовый оператор электрона в приближении главных логарифмов, которое определяется диаграммами типа “радуга”, но с учётом поляризации вакуума (см. рис. 3.10) мы получили

$$\Delta M^{(n)} = m_0 \left[\frac{\alpha_R}{2\pi} \left(\ln \frac{\pi}{\alpha_R} - \gamma_E \right) \ln \frac{eB}{m_0^2} \right]^n. \quad (3.87)$$

Окончательно, суммируя вклады всех порядков, получаем массовый оператор электрона в сильном магнитном поле в следующем виде [135]:

$$M = \frac{m_0}{1 - (\alpha_R/2\pi) [\ln(\pi/\alpha_R) - \gamma_E] \ln(eB/m_0^2)}. \quad (3.88)$$

Отметим, что наше выражение (3.88) для массового оператора электрона в однологарифмической полевой асимптотике отличается от аналогичного результата, полученного в работе [133] и имеющего вид

$$M = m_0 \exp \left(\frac{\alpha}{2\pi} \ln \frac{\pi}{\alpha} \ln \frac{eB}{m_0^2} \right). \quad (3.89)$$

С точностью до первого порядка по параметру $\alpha \ln(eB/m_0^2)$ результаты (3.88) и (3.89) почти совпадают¹ и сводятся к нашей формуле (3.79). Однако уже во втором порядке по $\alpha \ln(eB/m_0^2)$ результаты существенно различаются по двум причинам. Во-первых, в работе [133], по-видимому, допущена арифметическая ошибка при вычислении n -петлевой диаграммы типа “радуга”, что привело к неправильному суммированию ряда. Во-вторых, авторы [133] не учли вклад высших уровней Ландау, который оказывается существенным в логарифмической асимптотике. Принципиальное отличие нашего результата (3.88) от результата (3.89) состоит в том, что масса электрона как функция поля $M(B)$ является сингулярной, так как знаменатель выражения (3.88) может обратиться в нуль. Заметим, однако, что сингулярный характер $M(B)$ проявляется только в сверхсильном поле $B \sim 10^{75}$ Гс.

Несмотря на то что поле, в котором масса электрона обращалась бы в бесконечность, по-видимому, не встречается в природе, анализ вопроса важен с принципиальной точки зрения, так как является сигналом новой физики. Но исследование этого феномена требует выхода за рамки теории возмущений по параметру $(\alpha/2\pi) \ln(eB/m_0^2)$.

3.6. Собственно-энергетический оператор нейтрино в плазме

Важнейшим событием последних десятилетий в нейтринной физике является, несомненно, разрешение загадки солнечных нейтрино в уникальном эксперименте на тяжеловодном детекторе Нейтринной обсерватории в Садбери, Канада [171–173]. Подтвердив ключевую идею Б. Понтекорво о нейтринных осцилляциях [174, 175], этот эксперимент, а также эксперименты с атмосферными [176–178] и реакторными [179] нейтрино доказывают тем самым наличие массы покоя у нейтрино и смешивания в лептонном секторе. Кроме того, процесс решения проблемы солнечных нейтрино заметно стимулировал прогресс физики Солнца в различных её аспектах (см. [180]) а также ряда наук, изучающих свойства материи на уровне микромира – физики ядерных реакций, радиохимии и др.

Другим направлением нейтринной астрофизики, где также взаимодействуют сразу несколько отраслей физической науки, является регистрация нейтрино от взрыва сверхновой. На данный момент имеется единственный

¹В работе [133] потеряна постоянная Эйлера γ_E .

зарегистрированный нейтринный сигнал от сверхновой *SN1987A* в Большом Магеллановом Облаке, когда 4 подземных нейтринных детектора – Камиоканде-2, ИМБ, ЛСД и Баксанский сцинтилляционный телескоп – впервые зафиксировали электронные антинейтрино в реакции $\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$.

Взрывы сверхновых можно назвать уникальными естественными лабораториями для изучения фундаментальных свойств материи при экстремальных физических условиях. При этом одним из важнейших факторов, практически полностью определяющих энергетику процесса, является присутствие гигантских потоков нейтрино. Это означает, что наличие микроскопических характеристик нейтрино, определяемых его дисперсией в активной среде, могло бы оказывать решающее влияние на макроскопические свойства указанных астрофизических событий.

В качестве ещё одной естественной лаборатории для фундаментальной физики можно рассматривать раннюю Вселенную, где роль нейтрино также высока. В связи с вышеизложенным наблюдается устойчивый рост интереса к физике нейтрино в условиях внешней активной среды.

3.6.1. Определение оператора $\Sigma(p)$ в замагниченной плазме

Исследование влияния активной среды на дисперсию нейтрино основано на анализе собственно-энергетического оператора нейтрино $\Sigma(p)$. Знание оператора $\Sigma(p)$ позволяет решить, по меньшей мере, три важных задачи:

1. Из собственно-энергетического оператора нейтрино легко определяется дополнительная энергия, приобретаемая нейтрино в среде. Астрофизическая среда несимметрична по ароматам: в ней присутствуют электроны и позитроны, но отсутствуют мюоны и тау-лептоны. За счёт этого нейтрино разных ароматов приобретают различную дополнительную энергию, что и является определяющим фактором влияния среды на осцилляции аромата нейтрино;
2. Ценность вычисления собственно-энергетического оператора состоит ещё в том, что из него можно извлечь также аномальный магнитный момент нейтрино;
3. Мнимая часть собственной энергии нейтрино в среде определяет вероятность распада нейтрино на W^+ -бозон и заряженный лептон, $\nu_\ell \rightarrow \ell^- W^+$.

В дальнейшем мы рассмотрим каждую из указанных задач.

В реальных астрофизических условиях внешняя активная среда, как правило, представлена двумя компонентами: сильным магнитным полем и плотной горячей плазмой. Поэтому наибольший интерес представляет исследование дисперсионных свойств нейтрино в среде, содержащей одновременно и плазму, и поле. Однако, в связи со значительной вычислительной сложностью такого исследования, первоначально были выполнены работы, где предполагалось доминирование одной из двух указанных компонент внешней активной среды, либо сильного магнитного поля, либо плотной горячей плазмы.

Вычисление собственно-энергетического оператора нейтрино в горячей плотной плазме, без учёта магнитного поля, проводилось в работах [181–183]. Вклад внешнего магнитного поля, без учёта плазмы, в собственно-энергетический оператор нейтрино был исследован в работах [151, 153, 158, 160, 184, 185]. Серия статей [152, 186–188] была посвящена анализу оператора $\Sigma(p)$ с учётом обеих компонент среды, как поля, так и плазмы, при доминировании влияния последней, то есть вклад поля учитывался в виде малых поправок. Наконец, в работах [189, 190] вычисление оператора $\Sigma(p)$ в замагниченной плазме проводилось в широком диапазоне значений интенсивности магнитного поля.

Собственно-энергетический оператор нейтрино $\Sigma(p)$ может быть определён через инвариантную амплитуду перехода $\nu \rightarrow \nu$ соотношением

$$\mathcal{M}(\nu \rightarrow \nu) = -[\bar{\nu}(p) \Sigma(p) \nu(p)] = -\text{Tr} [\Sigma(p) \rho(p)], \quad (3.90)$$

где $p^\alpha = (E, \mathbf{p})$ – 4-импульс нейтрино, $\rho(p) = \nu(p)\bar{\nu}(p)$ – матрица плотности нейтрино. Дополнительная энергия ΔE , приобретаемая нейтрино во внешней активной среде, определяется через инвариантную амплитуду (3.90) следующим образом:

$$\Delta E = -\frac{1}{2E} \mathcal{M}(\nu \rightarrow \nu). \quad (3.91)$$

Детальное описание техники вычисления собственно-энергетического оператора нейтрино $\Sigma(p)$ во внешнем электромагнитном поле и в замагниченной плазме может быть найдено, например, в работах [148, 153, 156, 158, 160, 191]. Удобно представить оператор $\Sigma(p)$ в замагниченной плазме в следующем общем виде разложения по линейно независимым ковариантным

структурам [191]:

$$\begin{aligned}\Sigma(p) = & \left[\mathcal{A}_L(p\gamma) + \mathcal{B}_L(u\gamma) + \mathcal{C}_L e(p\tilde{F}\gamma) \right] \gamma_L + \\ & + \left[\mathcal{A}_R(p\gamma) + \mathcal{B}_R(u\gamma) + \mathcal{C}_R e(p\tilde{F}\gamma) \right] \gamma_R + \\ & + m_\nu [\mathcal{K}_1 + i\mathcal{K}_2 e(\gamma F\gamma)] .\end{aligned}\quad (3.92)$$

Здесь $\gamma_L = (1 + \gamma_5)/2$ и $\gamma_R = (1 - \gamma_5)/2$ – соответственно левый и правый киральные проекционные операторы, u^α – 4-вектор скорости среды. Следует иметь в виду, что под термином “замагниченная плазма” мы понимаем ситуацию, когда в системе покоя плазмы, $u^\alpha = (1, \mathbf{0})$, электромагнитное поле сводится к чисто магнитному. Под ковариантностью оператора $\Sigma(p)$ в этом случае следует понимать тот факт, что существует множество систем отсчёта, движущихся параллельно магнитному полю, в которых оператор (3.92) сохраняет свою форму, и электромагнитное поле остаётся чисто магнитным. Таким образом, в общем случае пространственная часть 4-вектора скорости среды отлична от нуля и параллельна магнитному полю.

Заметим, что коэффициенты \mathcal{A}_L , \mathcal{A}_R и \mathcal{K}_1 в формуле (3.92), содержащие ультрафиолетовую расходимость, не имеют самостоятельного значения, поскольку не дают вклада в энергию реального нейтрино во внешней среде на однопетлевом уровне с учётом вакуумной перенормировки волновой функции и массы нейтрино.

3.6.2. Дополнительная энергия нейтрино в горячей плотной плазме

Как впервые показал Л. Волфенштейн [192], при распространении нейтрино в среде необходимо учитывать эффект когерентного рассеяния вперёд. В астрофизических условиях влияние среды на свойства нейтрино обусловлено в первую очередь дополнительной энергией, которую приобретает только левое нейтрино (со спином, ориентированным против направления движения). Для иллюстрации приведём здесь подробное вычисление вклада в дополнительную энергию нейтрино от электрон-позитронной компоненты плазмы в соответствии с формулами (3.90), (3.91). Отметим, что в приближении безмассового левого нейтрино в операторе $\Sigma(p)$ остаются три линейно независимые ковариантные структуры, присутствующие в выражении (3.92) с коэффициентами \mathcal{A}_L , \mathcal{B}_L , и \mathcal{C}_L .

Рассмотрим процесс когерентного нейтринного рассеяния вперёд на электронах и позитронах плазмы. Ограничимся вначале локальным преде-

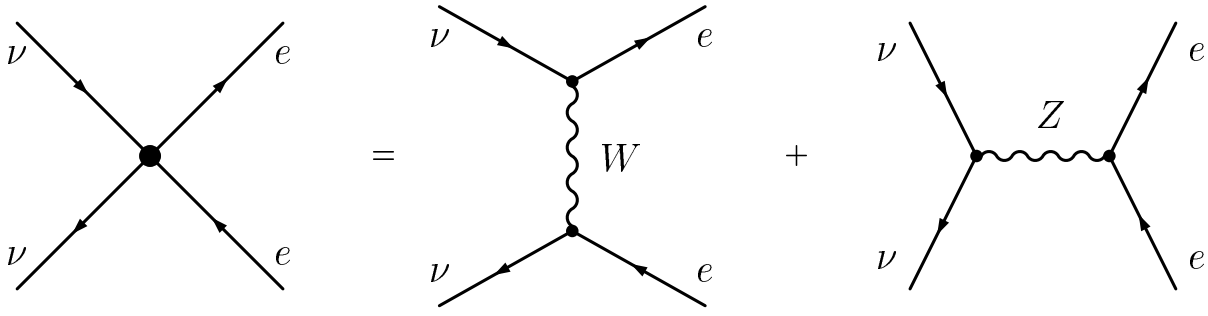


Рис. 3.11. Диаграммы Фейнмана, иллюстрирующие переход к эффективному $\nu - e$ -взаимодействию в локальном пределе

лом слабого взаимодействия левого нейтрино с электронами, когда пропагаторы промежуточных W и Z -бозонов “стягиваются” в точку, как это показано на рис. 3.11. Соответствующий эффективный локальный лагранжиан записывается в виде²

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{e}\gamma_\alpha (C_V + C_A\gamma_5)e] [\bar{\nu}\gamma^\alpha (1 + \gamma_5)\nu], \quad (3.93)$$

где константы C_V, C_A различны в двух случаях:

- если нейтрино в лагранжиане (3.93) – электронного типа, $\nu = \nu_e$ (при этом вклад в процесс даёт обмен как Z -, так и W -бозоном), имеем:

$$C_V = +\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W, \quad C_A = +\frac{1}{2}, \quad (3.94)$$

где θ_W – угол Вайнберга;

- если рассматривается мюонное и тау-нейтрино, $\nu = \nu_\mu, \nu_\tau$ (при этом вклад обусловлен только Z -бозоном), имеем:

$$C_V = -\frac{1}{2} + 2\sin^2\theta_W, \quad C_A = -\frac{1}{2}. \quad (3.95)$$

Как мы увидим в дальнейшем, имеется физическая ситуация, когда становится существенным и вклад в энергию нейтрино, обусловленный нелокальностью слабого взаимодействия.

²Заметим, что здесь является существенным знак эффективного лагранжиана, поскольку дополнительная энергия нейтрино – линейный по G_F эффект. При вычислении вероятностей и сечений слабых процессов, которые пропорциональны G_F^2 , знак эффективного лагранжиана не проявляется.

Начнём с рассеяния на электронах. Запишем S -матричный элемент процесса в стандартном виде:

$$S^{(e-)} = \frac{i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + k' - p - k)}{\sqrt{2EV} 2\varepsilon V 2E'V 2\varepsilon'V} \mathcal{M}\{\nu(p) + e^-(k) \rightarrow \nu(p') + e^-(k')\}. \quad (3.96)$$

Здесь $p^\alpha = (E, \mathbf{p})$, $k^\alpha = (\varepsilon, \mathbf{k})$ – соответственно 4-импульсы начальных нейтрино и электрона, аналогично p' и k' – 4-импульсы конечных нейтрино и электрона, \mathcal{M} – инвариантная амплитуда:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\{\nu(p) + e^-(k) \rightarrow \nu(p') + e^-(k')\} = & -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{e}(k') \gamma_\alpha (C_V + C_A \gamma_5) e(k)] \times \\ & \times [\bar{\nu}(p') \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \nu(p)]. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Учтём теперь, что речь идёт о рассеянии вперёд, то есть в S -матричном элементе (3.96) нужно положить $p' = p$ и $k' = k$. При этом

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(0) = \int d^4x e^{i0} = V \mathcal{T}, \quad (3.98)$$

где V – полный объём области взаимодействия, \mathcal{T} – полное время взаимодействия. S -матричный элемент рассеяния вперёд на электронах принимает вид

$$S_{forw}^{(e-)} = \frac{i V \mathcal{T}}{2EV 2\varepsilon V} \mathcal{M}\{\nu(p) + e^-(k) \rightarrow \nu(p) + e^-(k)\}. \quad (3.99)$$

Поскольку речь идёт о когерентном процессе, полная амплитуда рассеяния получается суммированием амплитуд рассеяния на всех электронах среды:

$$S_{tot}^{(e-)} = \sum_{\mathbf{k}, s} S_{forw}^{(e-)} = 2 \int \frac{d^3\mathbf{k} V}{(2\pi)^3} f_e(k) S_{forw}^{(e-)}, \quad (3.100)$$

где коэффициент 2 учитывает два электронных спиновых состояния s , $f_e(k)$ – функция распределения электронов среды. Будем полагать это распределение равновесным и рассмотрим систему отсчёта, где среда движется как целое с 4-вектором скорости u . При этом функция распределения Ферми–Дирака записывается в виде

$$f_e(k) = \left(\exp \frac{(ku) - \mu_e}{T} + 1 \right)^{-1}, \quad (3.101)$$

где μ_e – химический потенциал электрон-позитронной плазмы, T – температура плазмы.

Теперь мы можем определить вклад в инвариантную амплитуду перехода $\mathcal{M}^{(e-)}(\nu \rightarrow \nu)$ за счёт когерентного рассеяния вперёд на электронной фракции плазмы из выражения

$$S_{tot}^{(e-)} = S^{(e-)}(\nu \rightarrow \nu) = \frac{i V T}{2 E V} \mathcal{M}^{(e-)}(\nu \rightarrow \nu). \quad (3.102)$$

Из (3.97)–(3.102) получаем

$$\mathcal{M}^{(e-)}(\nu \rightarrow \nu) = -\sqrt{2} G_F C_V [\bar{\nu}(p) \gamma^\alpha \gamma_L \nu(p)] 2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} f_e(k) \frac{k_\alpha}{\varepsilon}. \quad (3.103)$$

Возникший интеграл является релятивистским ковариантом и легко вычисляется:

$$2 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} f_e(k) \frac{k_\alpha}{\varepsilon} = u_\alpha N_e, \quad (3.104)$$

где N_e – концентрация электронов.

Совершенно аналогично вычисляется вклад от когерентного рассеяния вперёд на позитронной фракции плазмы. В результате, с учётом (3.90), окончательно получаем собственно-энергетический оператор нейтрино в электрон-позитронной плазме в виде

$$\Sigma(p) = \sqrt{2} G_F C_V (u \gamma) \gamma_L (N_e - \bar{N}_e), \quad (3.105)$$

где N_e, \bar{N}_e – концентрации электронов и позитронов. Сравнивая (3.105) с (3.92), видим, что в данном случае в операторе $\Sigma(p)$ присутствует только одна структура с коэффициентом $\mathcal{B}_L = \sqrt{2} G_F C_V (N_e - \bar{N}_e)$.

В соответствии с (3.91) для дополнительной энергии нейтрино в электрон-позитронной плазме получаем

$$\Delta E = \sqrt{2} G_F C_V \frac{(pu)}{E} (N_e - \bar{N}_e). \quad (3.106)$$

При переходе из произвольной системы отсчёта в систему покоя плазмы следует положить $(pu) = E$.

При анализе дисперсионных свойств нейтрино в активной астрофизической среде наряду с электрон-позитронной плазмой необходимо, вообще говоря, учитывать присутствие и других компонент. Вклад протонов и нейтронов может быть найден аналогично предыдущему анализу, при этом эффективный лагранжиан обусловлен только обменом Z -бозоном (см. рис. 3.11). В плотной плазме ядра сверхновой существенным может быть также и вклад

нейтринного газа, который можно приближённо считать равновесным. Общее выражение для дополнительной энергии электронного, мюонного и тау-нейтрино, $i = e, \mu, \tau$, имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta E_i = \sqrt{2} G_F \left[\left(\delta_{ie} - \frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right) (N_e - \bar{N}_e) + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta_W \right) (N_p - \bar{N}_p) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (N_n - \bar{N}_n) + \sum_{\ell=e,\mu,\tau} (1 + \delta_{i\ell}) (N_{\nu_\ell} - \bar{N}_{\nu_\ell}) \right], \end{aligned} \quad (3.107)$$

где $N_e, N_p, N_n, N_{\nu_\ell}$ есть концентрации электронов, протонов, нейтронов и нейтрино, $\bar{N}_e, \bar{N}_p, \bar{N}_n, \bar{N}_{\nu_\ell}$ — концентрации соответствующих античастиц. Чтобы найти дополнительную энергию, которую приобретают антинейтрино в плазме, следует изменить общий знак в правой части выражения (3.107).

Формула (3.107), полученная в локальном пределе слабого взаимодействия, является недостаточной для случая, когда плазма почти зарядово симметрична, например, в условиях ранней Вселенной. В этом случае величина ΔE_i в выражении (3.107) стремится к нулю и становится существенным вклад в энергию нейтрино, обусловленный нелокальностью слабого взаимодействия. Эта дополнительная энергия была исследована в работе [181] (см. также [187]).

В общем случае вклад от нелокальности слабого взаимодействия в дополнительную энергию в плазме, одинаковый для нейтрино и антинейтрино, может быть представлен в форме

$$\Delta^{(\text{nloc})} E_i = -\frac{16 G_F E}{3 \sqrt{2}} \left[\frac{\langle E_{\nu_i} \rangle}{m_Z^2} (N_{\nu_i} + \bar{N}_{\nu_i}) + \delta_{ie} \frac{\langle E_e \rangle}{m_W^2} (N_e + \bar{N}_e) \right], \quad (3.108)$$

где E есть энергия нейтрино, движущегося сквозь плазму, $\langle E_{\nu_i} \rangle$ и $\langle E_e \rangle$ есть средние энергии плазменных нейтрино и электронов соответственно. В частном случае зарядово симметричной горячей плазмы выражение (3.108) воспроизводит результат работ [181, 187]:

$$\Delta^{(\text{nloc})} E_i = -\frac{7 \sqrt{2} \pi^2 G_F T^4}{45} \left(\frac{1}{m_Z^2} + \frac{2 \delta_{ie}}{m_W^2} \right) E. \quad (3.109)$$

Величина $\Delta^{(\text{nloc})} E_i$, зависящая линейно от энергии нейтрино E , может оказаться особенно существенной в случае ультравысоких энергий. Характерно, что эта величина является отрицательно определённой.

Для типичной астрофизической плазмы, за исключением ранней Вселенной и ядра сверхновой, имеем $\bar{N}_e \simeq \bar{N}_p \simeq \bar{N}_n \simeq N_{\nu_e} \simeq \bar{N}_{\nu_e} \simeq 0$ и $N_p \simeq N_e = Y_e N_B$, $N_n \simeq (1 - Y_e) N_B$, где N_B есть плотность барионов. Для дополнительной энергии нейтрино различных ароматов получаем

$$\Delta E_e = \frac{G_F N_B}{\sqrt{2}} (3Y_e - 1), \quad (3.110)$$

$$\Delta E_{\mu, \tau} = -\frac{G_F N_B}{\sqrt{2}} (1 - Y_e). \quad (3.111)$$

Поскольку $Y_e < 1$, дополнительная энергия левых мюонных и тау-нейтрино всегда отрицательна. В то же время дополнительная энергия электронных левых нейтрино становится положительной при $Y_e > 1/3$. И наоборот, дополнительная энергия электронных антинейтрино положительна при $Y_e < 1/3$, тогда как она всегда положительна для мюонных и тау-антинейтрино. В свою очередь, правое нейтрино, спин которого ориентирован по направлению движения, и его античастица, левое антинейтрино, будучи стерильными относительно слабого взаимодействия, не приобретают дополнительной энергии.

3.6.3. О “радиационном распаде” нейтрино в плазме

Следует заметить, что история исследований модификации закона дисперсии нейтрино плазмой не обошлась без курьёзов. Речь идёт об “открытии” одного физически невозможного эффекта. Хорошо известно, что влияние плазмы на свойства частиц может открывать новые возможности для реализации процессов, запрещённых в вакууме законами сохранения. Однако, как мы покажем далее, при этом необходимо учитывать влияние плазмы на все компоненты процесса, что может существенно усложнить кинематику.

Дополнительная энергия ΔE , определяемая выражением (3.110), обуславливает возникновение квадрата эффективной массы m_L^2 у левых нейтрино:

$$m_L^2 = \mathcal{P}^2 = (E + \Delta E)^2 - \mathbf{p}^2, \quad (3.112)$$

где \mathcal{P} есть 4-импульс нейтрино в плазме в системе её покоя, тогда как 4-вектор (E, \mathbf{p}) представлял бы собой 4-импульс нейтрино в вакууме, $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_\nu^2}$.

При наличии взаимодействия магнитного момента нейтрино с фотоном, которое приводит к перевороту спиральности нейтрино, появление дополнительной энергии левых нейтрино в плазме открывает новые кинематические

возможности для нейтринного радиационного перехода:

$$\nu \rightarrow \nu + \gamma. \quad (3.113)$$

В то же время должно быть очевидным, что необходимо учесть также влияние плазмы и на дисперсию фотона, $\omega = |\mathbf{k}|/n$, где $n \neq 1$ есть показатель преломления.

Прежде всего влияние плазмы может обеспечить выполнение условия $n > 1$ (при этом эффективный квадрат массы фотона отрицателен, $m_\gamma^2 \equiv q^2 = \omega^2 - \mathbf{k}^2 < 0$), что соответствует хорошо известному эффекту “нейтринного черенковского излучения”. В данной ситуации изменением дисперсионных свойств нейтрино под влиянием плазмы естественно пренебречь, поскольку дисперсия нейтрино определяется слабым взаимодействием, тогда как дисперсия фотона обусловлена гораздо более интенсивным электромагнитным взаимодействием с плазмой.

Чисто теоретически можно рассмотреть ещё одну ситуацию: если бы дисперсия фотона в плазме была такой же, как в вакууме³, мог бы возникать процесс нейтринного радиационного перехода $\nu \rightarrow \nu\gamma$, обусловленный только дисперсией нейтрино. Поскольку влияние плазмы изменяет дисперсионные свойства только левого нейтрино, были бы возможны переходы вида $\nu_L \rightarrow \nu_R\gamma$ за счёт взаимодействия с изменением спиральности нейтрино, например через взаимодействие с нейтринным магнитным моментом.

Именно такой воображаемый эффект, названный “нейтринным спиновым светом” ($SL\nu$), был предложен и детально исследовался в обширной серии статей (см. [193] и цитированные там работы). Однако в анализе данного эффекта авторы не учли такое важное явление, как влияние плазмы на дисперсию фотона. Как было показано в работах [194, 195], учёт этого явления делает невозможным эффект “нейтринного спинового света” практически в любых реальных астрофизических условиях.

В статьях [194, 195] был проанализирован процесс $\nu_L \rightarrow \nu_R\gamma$ с учётом дисперсионных свойств как нейтрино, так и фотона в астрофизической плазме.

Для анализа кинематики процесса необходимо оценить масштабы величин дополнительной энергии нейтрино ΔE и эффективной массы фотона (плазмона) m_γ .

Из выражения (3.110) для электронных антинейтрино получаем

$$\Delta E \simeq 6 \text{ эВ} \left(\frac{N_B}{10^{38} \text{ см}^{-3}} \right) (1 - 3 Y_e), \quad (3.114)$$

³Строго говоря, частицу, взаимодействующую с магнитным моментом нейтрино и в то же время стерильную относительно взаимодействий с электрически заряженными частицами плазмы, не следовало бы называть фотоном.

где взят масштаб плотности барионов, типичный, например, для внутренней области нейтронной звезды.

В свою очередь, плазмон приобретает в среде эффективную массу m_γ , которая при высоких энергиях является приблизительно постоянной. Для поперечного плазмона величина m_γ^2 всегда положительна и определяется так называемой плазменной частотой ω_P . Для нерелятивистской классической плазмы (например, внутри Солнца) получаем

$$m_\gamma \equiv \omega_P = \sqrt{\frac{4\pi \alpha N_e}{m_e}} \simeq 4 \times 10^2 \text{ эВ} \left(\frac{N_e}{10^{26} \text{ см}^{-3}} \right)^{1/2}. \quad (3.115)$$

Для ультрарелятивистской плотной плазмы имеем

$$m_\gamma^2 = \frac{2\alpha}{\pi} \left(\mu_e^2 + \frac{\pi^2}{3} T^2 \right), \quad (3.116)$$

где μ_e есть химический потенциал электронов плазмы. В случае холодной вырожденной плазмы из (3.116) получаем

$$m_\gamma = \sqrt{\frac{3}{2}} \omega_P = \left(\frac{2\alpha}{\pi} \right)^{1/2} (3\pi^2 N_e)^{1/3} \simeq 10^7 \text{ эВ} \left(\frac{N_e}{10^{37} \text{ см}^{-3}} \right)^{1/3}. \quad (3.117)$$

В случае горячей плазмы, когда ее температура является наибольшим физическим параметром, масса плазмона равна

$$m_\gamma = \sqrt{\frac{2\pi\alpha}{3}} T \simeq 1.2 \times 10^7 \text{ эВ} \left(\frac{T}{100 \text{ МэВ}} \right). \quad (3.118)$$

Сравнение масштабов m_γ (3.115)–(3.118) с масштабом ΔE (3.114) должно указывать на то, что пренебрежение массой плазмона, сделанное в работах указанной серии [193], является безусловной ошибкой. В то же время ещё одним физическим параметром, которому уделялось неоправданно большое внимание в работах [193], является вакуумная масса нейтрино m_ν . Однако, поскольку масштаб нейтринной вакуумной массы не может существенно превышать нескольких электрон-вольт, что много меньше типичной шкалы масс плазмонов в реальных астрофизических условиях (3.115)–(3.118), уместно пренебречь величиной m_ν в нашем анализе.

Таким образом, в соответствии с (3.112) возникает простое условие того, что процесс $\nu_L \rightarrow \nu_R \gamma$ кинематически открыт:

$$m_L^2 \simeq 2 E \Delta E > m_\gamma^2. \quad (3.119)$$

Это означает, что процесс становится кинематически разрешённым, когда энергия нейтрино превышает пороговое значение:

$$E > E_0 = \frac{m_\gamma^2}{2\Delta E}. \quad (3.120)$$

Появление пороговой энергии нейтрино можно наглядно продемонстрировать, рассматривая область интегрирования по энергиям и импульсам фотона (плазмона) в процессе $\nu_L \rightarrow \nu_R \gamma$ с учётом дисперсионных свойств как нейтрино, так и фотона в астрофизической плазме. На рис. 3.12 дисперсионная линия фотона в вакууме, $q_0 = k$, лежит внутри разрешённой кинематической области (левый график), тогда как дисперсионная линия фотона, модифицированная плазмой, может оказаться вне области, если энергия нейтрино недостаточно велика (правый график). Это означает, что фазовый объем, а следовательно, и вероятность процесса равны нулю.

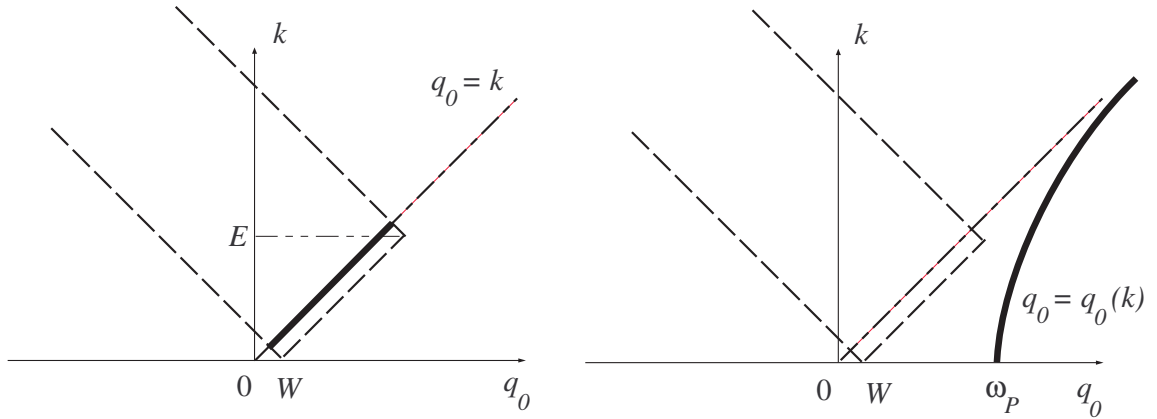


Рис. 3.12. Область интегрирования для вычисления вероятности процесса $\nu_L \rightarrow \nu_R \gamma$ при фиксированной энергии E начального нейтрино (внутри наклонного прямоугольника, изображённого штриховыми линиями) и дисперсионная линия фотона (жирная линия): в вакууме (левый график) и в плазме (правый график)

При фиксированных параметрах плазмы величины ΔE и ω_P остаются постоянными, если не учитывать вклад в энергию нейтрино от нелокальности слабого взаимодействия (3.109). Следовательно, для того чтобы получить ненулевые значения фазового объема и вероятности процесса, или, другими словами, чтобы часть дисперсионной кривой плазмона оказалась внутри области интегрирования, необходимо увеличивать энергию нейтрино E , то есть ширину наклонного прямоугольника. Очевидно, что существует минимальная энергия E_0 , начиная с которой область интегрирования будет существовать. Это и есть пороговая энергия (3.120).

Оценим эти пороговые энергии для различных астрофизических ситуаций.

В приближении нерелятивистской классической плазмы из (3.114) и (3.115) получаем, что пороговая энергия нейтрино не зависит от концентрации и определяется только химическим составом:

$$E_0 \simeq \frac{Y_e}{3Y_e - 1} 4 \sin^2 \theta_W \frac{m_W^2}{m_e}. \quad (3.121)$$

Внутри Солнца имеем $Y_e \simeq 0.6$ и пороговая энергия равна

$$E_0 \simeq 10^{10} \text{ МэВ}, \quad (3.122)$$

что следует сравнить с верхней границей ~ 20 МэВ для энергий солнечных нейтрино.

Для внутренних областей нейтронной звезды, где $Y_e \ll 1$, дополнительная энергия нейтрино (3.110), (3.111) отрицательна и процесс $\nu_L \rightarrow \nu_R \gamma$ закрыт. При этом здесь появляется возможность для кинематического открытия распада антинейтрино. Принимая для оценки $Y_e \simeq 0.1$, из (3.114) и (3.116) получаем пороговую энергию

$$E_0 \simeq 10^7 \text{ МэВ}, \quad (3.123)$$

которую следует сравнить с типичной энергией $\sim 1\text{--}0,1$ МэВ нейтрино, испускаемых в ходе прямых или модифицированных URCA-процессов [196].

Для условий ядра сверхновой дополнительная энергия левых нейтрино может быть получена из (3.107) в виде

$$\Delta E_e = \frac{G_F N_B}{\sqrt{2}} (3 Y_e + 4 Y_{\nu_e} - 1), \quad (3.124)$$

где Y_{ν_e} описывает долю захваченных электронных нейтрино в ядре сверхновой, $N_{\nu_e} = Y_{\nu_e} N_B$. Используя типичные параметры ядра сверхновой, получаем

$$E_0 \simeq 10^7 \text{ МэВ}, \quad (3.125)$$

что следует сравнить со средней энергией $\sim 10^2$ МэВ захваченных нейтрино.

В условиях ранней Вселенной, когда плазма являлась почти зарядово симметричной, формула (3.107), дающая нулевой результат, должна быть дополнена нелокальным вкладом (3.109), который одинаков для нейтрино и антинейтрино. Знак минус в выражении (3.109) недвусмысленно показывает, что, в отличие от условий внутри нейтронной звезды, процесс распада запрещён в условиях ранней Вселенной как для нейтрино, так и для антинейтрино независимо от их энергии.

Анализ суммы локального и нелокального вкладов (3.107) и (3.109) показывает, что добавление последнего приводит в общем случае к уменьшению дополнительной энергии нейтрино ΔE , то есть к увеличению пороговой энергии (3.120). Строго говоря, требуется произвести анализ кинематического неравенства (3.119), что ведёт к решению квадратного уравнения. В результате возникает “окно” энергий нейтрино, при которых процесс кинематически разрешён, $E_0 < E < E_{\max}$, где E_0 и E_{\max} есть нижняя и верхняя границы, связанные с корнями упомянутого квадратного уравнения, если они существуют. Например, во внутренних областях Солнца вообще не существует “окна” для процесса с электронными нейтрино, то есть переход $\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eR} + \gamma$ кинематически запрещён.

Таким образом, проведённый анализ показывает, что эффект с красивым названием “нейтринный спиновый свет”, к сожалению, практически не может иметь места в реальных астрофизических условиях при правильном учёте дисперсионных свойств нейтрино и фотона. Наличие эффективной массы у фотона (плазмона) обуславливает пороговый характер процесса, что почти не оставляет для него физической области.

Единственная возможность, при которой обсуждаемый процесс $\nu_L \rightarrow \nu_R \gamma$ теоретически мог бы быть реализован, – случай, когда нейтрино ультравысокой энергии пронизывает нейтронную звезду. Очевидно, что эта задача может иметь только чисто методический смысл. В работах [194, 195] было проведено корректное вычисление средней длины L свободного пробега нейтрино ультравысокой энергии по отношению к рассматриваемому процессу радиационного распада в ситуации, когда нейтрино, прилетевшее извне, пронизывает нейтронную звезду.

Исходя из типичных для нейтронных звёзд параметров $N_B \simeq 10^{38} \text{ см}^{-3}$, $Y_e \simeq 0.05$, было получено

$$L \gtrsim 10^{19} \text{ см} \times \left(\frac{10^{-12} \mu_B}{\mu_\nu} \right)^2, \quad (3.126)$$

где μ_ν – магнитный момент нейтрино, μ_B – магнетон Бора. Эту среднюю длину свободного пробега следует сравнить с радиусом нейтронной звезды $\sim 10^6 \text{ см}$, что наглядно иллюстрирует чрезвычайно малую вероятность рассматриваемого процесса.

Любопытно отметить, что ситуация с “нейтринным спиновым светом” была не первым случаем, когда влияние плазмы учитывалось для одной из частиц, участвующей в физическом процессе, и игнорировалось для другой частицы. Здесь будет уместным процитировать работу Э. Браатена [163]:

“В статье [197] утверждалось, что вычисления светимости за счёт распада фотонов (плазмонов) становятся несправедливыми при достаточно больших температурах, при которых $m_\gamma > 2m_e$, поскольку тогда становится кинематически разрешённым распад $\gamma \rightarrow e^+e^-$. Это утверждение, которое было повторено в последующих статьях [98, 198–200], есть попросту неправда. Эффекты плазмы, которые генерируют массу фотона m_γ , также генерируют и поправки к массе электрона, так что распад $\gamma \rightarrow e^+e^-$ является кинематически запрещённым всегда”.

Таким образом, история повторилась. Авторы [193] делают в точности ту же ошибку, рассматривая индуцированную плазмой дополнительную энергию нейтрино и игнорируя эффективную массу фотона m_γ , которая неизбежно должна возникать за счёт влияния той же плазмы.

3.6.4. О слабом вкладе в дисперсию электрона в плазме

Как и нейтрино, электрон во внешней среде приобретает за счёт не сохраняющего чётность слабого взаимодействия дополнительную энергию, зависящую от спиральности электрона. Вслед за “нейтринным спиновым светом” авторы [201] попытались на основе анализа этой дополнительной энергии обосновать возможность существования “электронного спинового света”. В работе [195] мы показали, что авторы [201] повторили здесь ту же ошибку, проигнорировав влияние среды на дисперсионные свойства фотона.

Для вычисления дополнительной энергии электрона во внешней среде следует рассмотреть его собственно-энергетический оператор. Для реального электрона с учётом перенормировки киральной массы и волновой функции этот собственно-энергетический оператор может быть представлен в виде

$$\Sigma = \frac{1}{2} (u\gamma) (V + A\gamma_5), \quad (3.127)$$

где u^α — 4-вектор скорости плазмы, который в системе покоя равен $u^\alpha = (1, \mathbf{0})$. Величина V образована в основном за счёт электромагнитного взаимодействия электронов:

$$V \simeq V^{\text{em}} = \frac{\alpha}{\pi E} (\mu_e^2 + \pi^2 T^2). \quad (3.128)$$

Используя выражение (3.116) для термальной массы фотона (плазмона), можно представить величину V в виде

$$V \simeq C \frac{m_\gamma^2}{E}, \quad C = \frac{3}{2} \frac{\mu_e^2 + \pi^2 T^2}{3\mu_e^2 + \pi^2 T^2}, \quad \frac{1}{2} \leq C \leq \frac{3}{2}. \quad (3.129)$$

Здесь нижняя и верхняя границы интервала для C соответствуют случаям холодной и горячей плазмы.

Мы не приводим здесь вклад в величину V , обусловленный слабым взаимодействием, поскольку в реальных астрофизических условиях электромагнитный вклад V^{em} всегда доминирует, за исключением нефизического случая чисто нейтронной среды, рассмотренного в [201]. Следует заметить, что даже в условиях холодной нейтронной звезды концентрация электронов и протонов не может быть равна нулю, $Y_e \gtrsim 0.01$ (см., например, [202]). И даже при такой минимальной величине Y_e электромагнитный вклад в V будет доминировать.

Величина A в формуле (3.127) обусловлена только слабым взаимодействием и имеет вид

$$A = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left[2 (1 - 4 \sin^2 \theta_W) (N_e - \bar{N}_e) - (1 - 4 \sin^2 \theta_W) (N_p - \bar{N}_p) + \right. \\ \left. + (N_n - \bar{N}_n) + 2 \sum_{\ell=e,\mu,\tau} (2 \delta_{\ell e} - 1) (N_{\nu_\ell} - \bar{N}_{\nu_\ell}) \right] - \\ - \frac{8 G_F E}{3\sqrt{2}} \left[\frac{\langle E_e \rangle}{m_Z^2} (N_e + \bar{N}_e) (1 - 4 \sin^2 \theta_W) + 4 \frac{\langle E_{\nu_e} \rangle}{m_W^2} (N_{\nu_e} + \bar{N}_{\nu_e}) \right]. \quad (3.130)$$

Здесь включены как локальный, так и нелокальный вклады. E есть энергия электрона, распространяющегося в плазме, $\langle E_e \rangle$ и $\langle E_{\nu_i} \rangle$ – средние энергии плазменных электронов и нейтрино соответственно. Для типичной астрофизической среды имеем $\bar{N}_e \simeq \bar{N}_p \simeq \bar{N}_n \simeq \bar{N}_{\nu_\ell} \simeq 0$, $N_p \simeq N_e = Y_e N_B$, $N_{\nu_e} \simeq Y_{\nu_e} N_B$ и выражение (3.130) для A можно упростить:

$$A = \frac{G_F}{\sqrt{2}} N_B \left[1 - 4 \sin^2 \theta_W Y_e + 2 Y_{\nu_e} - \frac{8 E \langle E_e \rangle}{3 m_Z^2} Y_e (1 - 4 \sin^2 \theta_W) - \right. \\ \left. - \frac{32 E \langle E_{\nu_e} \rangle}{3 m_W^2} Y_{\nu_e} \right]. \quad (3.131)$$

Собственно-энергетический оператор (3.127) определяет дополнительную энергию электрона, которая в системе покоя плазмы может быть записана в виде

$$\Delta E = \frac{1}{2} (V - A \lambda v), \quad (3.132)$$

где в случае левой спиральности электрона следует положить $\lambda = -1$, в случае правой спиральности $\lambda = +1$, v есть скорость электрона. Таким образом, электроны с левой и правой спиральностью приобретают во внешней среде различную дополнительную энергию. По аналогии с предыдущим

анализом для нейтрино нетрудно догадаться, что процесс $e_L \rightarrow e_R + \gamma$ возможен только для ультрарелятивистских электронов, в силу относительной малости зависящего от спиральности энергетического сдвига A . Энергия E_λ ультрарелятивистского электрона принимает вид

$$E_{\mp 1} \simeq p + \frac{\bar{m}_e^2}{2p} \pm \frac{A}{2}, \quad (3.133)$$

где введена *эффективная масса электрона в плазме* \bar{m}_e , определяемая соотношением

$$\bar{m}_e^2 = m_e^2 + C m_\gamma^2. \quad (3.134)$$

С учётом выражения (3.133) закон сохранения энергии и импульса для процесса $e_L \rightarrow e_R + \gamma$ может быть записан в виде

$$p + \frac{\bar{m}_e^2}{2p} + \frac{A(p)}{2} = p' + \frac{\bar{m}_e^2}{2p'} - \frac{A(p')}{2} + k + \frac{m_\gamma^2}{2k}, \quad (3.135)$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}' + \mathbf{k}. \quad (3.136)$$

Попробуем вначале пренебречь нелокальным вкладом в A в выражении (3.131). Такое приближение может быть оправдано, если энергии электронов не слишком высоки. В этом случае легко получить кинематическое условие того, что процесс будет открыт:

$$E > E_0 = \frac{m_\gamma^2 + 2 \bar{m}_e m_\gamma}{2 A}. \quad (3.137)$$

По аналогии с рассмотрением нейтринного процесса численный анализ даёт для пороговой энергии следующие значения:

а) для внутренних областей Солнца:

$$E_0 \simeq 10^{13} \text{ МэВ}; \quad (3.138)$$

б) для внутренних областей нейтронных звёзд:

$$E_0 \simeq 10^7 \text{ МэВ}. \quad (3.139)$$

Очевидно, что включение нелокального вклада является необходимым. Как показывает анализ, при этом внутри Солнца процесс $e_L \rightarrow e_R + \gamma$ оказывается строго запрещён, как и процесс $\nu_{eL} \rightarrow \nu_{eR} + \gamma$. Что касается внутренних областей нейтронных звёзд, здесь существует “окно” энергий электрона, при которых процесс кинематически разрешён, – от 10^7 МэВ до 10^{10} МэВ.

Таким образом, процесс $e_L \rightarrow e_R + \gamma$ может реализоваться только в том же экзотическом случае, что и “нейтринный спиновый свет”: если электрон ультравысокой энергии пронизывает нейтронную звезду. В методических целях проанализируем этот процесс с учётом влияния среды на дисперсионные свойства фотона.

Амплитуда процесса строится на основе электромагнитного взаимодействия электрона с фотоном и имеет вид

$$\mathcal{M}^{(\xi)} = e \left(\bar{e}'_R (\varepsilon^{(\xi)} \gamma) e_L \right). \quad (3.140)$$

После стандартных, но достаточно громоздких вычислений для квадрата амплитуды просуммированного по поперечным поляризациям плазмона ξ , получаем

$$|\mathcal{M}|^2 \equiv \sum_{\xi} \left| \mathcal{M}^{(\xi)} \right|^2 \simeq 4 \pi \alpha m_e^2 \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - 2 \right), \quad (3.141)$$

где E и E' – энергии начального и конечного электронов. Здесь m_e есть киральная масса электрона, которая отличается от его эффективной массы \bar{m}_e (см. (3.134)).

Заметим, что квадрат амплитуды процесса $e_L \rightarrow e_R + \gamma$ с переворотом спина должен быть равен нулю, если киральная масса электрона m_e равна нулю, в силу сохранения киральности в электромагнитных взаимодействиях.

Вероятность процесса вычисляется стандартным способом:

$$\Gamma = \frac{\alpha m_e^2}{2 E^2} \int_{E_1}^{E_2} dE' \left(\frac{E'}{E} + \frac{E}{E'} - 2 \right), \quad (3.142)$$

$$\Gamma \simeq \frac{\alpha m_e^2}{2 E} \left[\ln \frac{E_2}{E_1} - \frac{E_2 - E_1}{E} \left(2 - \frac{E_2 + E_1}{2E} \right) \right], \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= \frac{E}{2} \left(E + E_0 \frac{C}{2\sqrt{C} + 1} \right)^{-1} \left[E + E_0 \frac{2\sqrt{C} - 1}{2\sqrt{C} + 1} \mp \right. \\ &\quad \left. \mp \sqrt{(E - E_0) \left(E + E_0 \frac{2\sqrt{C} - 1}{2\sqrt{C} + 1} \right)} \right], \end{aligned} \quad (3.144)$$

$$E_0 = \frac{m_\gamma^2}{2A} (2\sqrt{C} + 1). \quad (3.145)$$

Как видно из выражений (3.142)–(3.145), E_0 является пороговой энергией. Величина C определена в формуле (3.129).

В пределе $E \gg E_0 \simeq 10^7$ МэВ выражение для вероятности процесса существенно упрощается:

$$\Gamma \simeq \frac{\alpha m_e^2}{2E} \left(\ln \frac{2EA}{\bar{m}_e^2} - \frac{3}{2} \right), \quad (3.146)$$

где \bar{m}_e – эффективная масса электрона, определённая в формуле (3.134). Напомним, что вероятность отлична от нуля только в интервале энергий электрона $E_0 < E < E_{\max}$. Формулы (3.142)–(3.145) были получены в приближении $E \ll E_{\max} \simeq 10^{10}$ МэВ.

В противоположность радиационному переходу нейтрино с переворотом спина, где средняя длина свободного пробега оказалась гигантской, выражение (3.146) даёт масштаб длины пробега для электрона на уровне десятков сантиметров. Очевидно, однако, что рассматриваемый процесс не может конкурировать со стандартными электромагнитными процессами рассеяния электронов на компонентах плотной плазмы.

3.7. Собственно-энергетический оператор нейтрино во внешнем магнитном поле

3.7.1. Определение оператора $\Sigma(p)$ в магнитном поле

Как отмечалось выше, значительный интерес представляет анализ влияния на свойства нейтрино, в частности на механизм нейтринных осцилляций, ещё одной компоненты внешней активной астрофизической среды – сильного магнитного поля. Однако указанное влияние поля является существенным только в случае его достаточно большой интенсивности. Как уже отмечалось, существует естественный масштаб величины магнитного поля, называемый критическим значением, $B_e = m_e^2/e \simeq 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс. Имеются аргументы в пользу того, что поля такого и большего масштаба могут генерироваться в астрофизических процессах, таких как взрывы сверхновых и слияния нейтронных звёзд, для которых характерны также гигантские потоки нейтрино.

Следует отметить, что исследование собственно-энергетического оператора нейтрино в магнитном поле имеет уже почти 30-летнюю историю [160, 184, 185].

Общую лоренцевскую структуру собственно-энергетического оператора нейтрино $\Sigma(p)$ в магнитном поле можно представить, аналогично выражению (3.92), в терминах линейно независимых ковариантных форм, большая часть из которых сохраняет тот же вид:

$$\begin{aligned}\Sigma(p) = & \left[\mathcal{A}_L(p\gamma) + \bar{\mathcal{B}}_L e^2 (p\tilde{F}\tilde{F}\gamma) + \bar{\mathcal{C}}_L e (p\tilde{F}\gamma) \right] \gamma_L + \\ & + \left[\mathcal{A}_R(p\gamma) + \bar{\mathcal{B}}_R e^2 (p\tilde{F}\tilde{F}\gamma) + \bar{\mathcal{C}}_R e (p\tilde{F}\gamma) \right] \gamma_R + \\ & + m_\nu [\mathcal{K}_1 + i\mathcal{K}_2 e (\gamma F \gamma)] .\end{aligned}\quad (3.147)$$

Сравнивая это выражение с формулой (3.92) для $\Sigma(p)$ в замагниченной плазме, можно видеть, что произошла замена структуры $(u\gamma)$ на структуру $(p\tilde{F}\tilde{F}\gamma)$. Такую замену всегда можно сделать, имея в виду соотношение

$$(p\tilde{F}\tilde{F}p)(u\gamma) = (pu)(p\tilde{F}\tilde{F}\gamma) - (p\tilde{F}u)(p\tilde{F}\gamma) .$$

Как уже отмечалось, если ограничиться приближением безмассового левого нейтрино, в операторе $\Sigma(p)$ остаются только три структуры с коэффициентами \mathcal{A}_L , $\bar{\mathcal{B}}_L$, и $\bar{\mathcal{C}}_L$.

Анализ показывает, что результаты расчётов инвариантных коэффициентов $\bar{\mathcal{B}}_L$, и $\bar{\mathcal{C}}_L$ в выражении (3.147), полученные разными авторами, не согласуются между собой. В таблице 3.1 мы приводим значения этих коэффициентов, полученные в предыдущих работах, а также результаты нашего вычисления, детально описанного ниже. Поле B называется “слабым” при $eB \ll m_\ell^2$ и “умеренным” при $m_\ell^2 \ll eB \ll m_W^2$.

Позднее будет детально продемонстрировано, что при наличии массы у нейтрино коэффициент $\bar{\mathcal{C}}_L$ определяет его аномальный магнитный момент. Проверкой правильности вычисления коэффициента $\bar{\mathcal{C}}_L$ должно быть согласие с известным результатом для аномального магнитного момента нейтрино [203, 204]:

$$\mu_\nu = \frac{e m_\nu \bar{\mathcal{C}}_L}{2} = \frac{3e G_F m_\nu}{8\pi^2 \sqrt{2}} .\quad (3.148)$$

Сравнение показывает, что в работе [184] коэффициент $\bar{\mathcal{C}}_L$ завышен в 4 раза, в работах [151] и [152] в нём содержатся лишние множители: $-2/3$ и $-1/3$ соответственно. Кроме того, в работе [184] получено ненулевое значение для коэффициента при структуре вида $(pF\gamma)$, определяющей электрический дипольный момент нейтрино. Однако такой вклад в собственно-энергетический оператор нейтрино может быть отличен от нуля только в

Таблица 3.1

Коэффициенты в формуле (3.147) для собственно-энергетического оператора нейтрино $\Sigma(p)$ во внешнем магнитном поле. *)

Авторы	Поле	$\bar{\mathcal{B}}_L \times \frac{\sqrt{2} \pi^2}{G_F}$	$\bar{\mathcal{C}}_L \times \frac{\sqrt{2} \pi^2}{G_F}$
McKeon (1981)	—	0	+3
Erdaş e a. (1990)	Умерен.	$-\frac{1}{3m_W^2} \left(\ln \frac{m_W^2}{m_\ell^2} + \frac{3}{4} \right)$	0
Elizalde e a. (2002)	Умерен.	$+\frac{1}{2eB}$	$-\frac{1}{2}$
Elizalde e a. (2004)	Умерен.	$+\frac{1}{4eB} e^{-p_\perp^2/(2eB)}$	$-\frac{1}{4} e^{-p_\perp^2/(2eB)}$
Наш рез-т (2006)	Слабое	$-\frac{1}{3m_W^2} \left(\ln \frac{m_W^2}{m_\ell^2} + \frac{3}{4} \right)$	$+\frac{3}{4}$
Наш рез-т (2006)	Умерен.	$-\frac{1}{3m_W^2} \left(\ln \frac{m_W^2}{eB} + 2.542 \right)$	$+\frac{3}{4}$

*) В работе Elizalde e a. (2004) указано, что результат справедлив в области импульсов нейтрино $0 < p_\perp^2 \ll eB$. Наш результат справедлив в области $0 < p_\perp^2 \ll m_W^2$.

присутствии электромагнитного поля с ненулевым CP -нечетным полевым инвариантом $(F\tilde{F}) = 4(\mathbf{E}\mathbf{H})$. Но даже в этом случае он сильно подавлен (см. [185]). Приходится сделать вывод, что результат для электрического дипольного момента нейтрино, полученный в работе [184], где рассматривалось чисто магнитное поле, является ошибочным.

Однако наиболее значительными являются разночтения в результатах для коэффициента $\bar{\mathcal{B}}_L$. В работе [184] он не вычислялся как пренебрежимо малый. Вычисление коэффициента $\bar{\mathcal{B}}_L$, проведённое в статье [160], привело к величине масштаба G_F/m_W^2 . По сравнению с этой величиной результат для $\bar{\mathcal{B}}_L$, полученный в работах [151, 152], имеет гигантское усиление фактором m_W^2/eB . В случае его правильности этот результат должен был бы привести к важнейшим следствиям для физики нейтрино в среде (см. [205]), поскольку полевой вклад в дополнительную энергию нейтрино превысил бы плазменный вклад.

Ранее вычисления вклада плазмы в оператор $\Sigma(p)$ как без учёта так и с учётом магнитного поля проводились в целом ряде статей (см., например, [182, 186, 187]).

В работе [187] дисперсионные свойства нейтрино исследовались в приближении $m_e \ll T \ll m_W$, $B \lesssim T^2$ с целью применения результатов к указанной выше стадии ранней Вселенной. В частности, для зарядово симметричной плазмы из результатов работы [187] можно извлечь разность собственных энергий, одинаковую для нейтрино и антинейтрино ⁴, $\Delta E = E_{\nu_e} - E_{\nu_i}$ ($i = \mu, \tau$), в виде

$$\Delta E^{(T,B)} \simeq -6.0 \frac{G_F T^4}{m_W^2} |\mathbf{p}| + 0.47 \frac{G_F T^2}{m_W^2} e (\mathbf{B} \mathbf{p}), \quad (3.149)$$

где \mathbf{p} – импульс нейтрино (антинейтрино). Здесь первое слагаемое представляет собой доминирующий чисто плазменный вклад, второе слагаемое обусловлено совместным воздействием плазмы и магнитного поля.

Чисто полевой вклад в собственную энергию нейтрино авторами [187] не рассматривался как несущественный. В то же время в работах [151, 152] утверждается, что именно полевой вклад является доминирующим. Результат работы [152] для чисто полевого вклада в разность собственных энергий, одинакового для нейтрино и антинейтрино, можно представить в виде

$$\Delta E^{(B)} \simeq \frac{G_F e B}{4\sqrt{2}\pi^2} |\mathbf{p}| \sin^2 \phi, \quad (3.150)$$

⁴Знак \pm перед линейным по полю членом в формуле (13) статьи [187] происходит от неудачно выбранных обозначений: импульс нейтрино полагается в этой статье равным \mathbf{k} , импульс антинейтрино – равным $-\mathbf{k}$ (Г. Раффельт, частное сообщение)

где ϕ – угол между векторами \mathbf{B} и \mathbf{p} . Как показывает сравнение формул (3.149) и (3.150), полученный авторами [151, 152] чисто полевой вклад может значительно превышать плазменный вклад (3.149). Действительно, для отношения вкладов получаем:

$$R = \left| \frac{\Delta E^{(B)}}{\Delta E^{(T,B)}} \right| \simeq 1.5 \cdot 10^{-3} \frac{eB}{T^2} \frac{m_W^2}{T^2}, \quad (3.151)$$

где в величине $\Delta E^{(B)}$ проведено усреднение по углу ϕ , а в величине $\Delta E^{(T,B)}$ удержан только лидирующий член. Поскольку температура на рассматриваемом отрезке эволюции Вселенной $T \ll m_W$, за счёт большого фактора $(m_W/T)^2$ отношение R может оказаться значительно больше единицы.

Таким образом, поскольку вопрос о том, является ли вклад внешнего магнитного поля в энергию нейтрино пренебрежимо малым или доминирующим, принципиально важен, необходимость его независимого вычисления была очевидна. Такое вычисление было предпринято нами в работе [153]. Здесь мы проводим расчёт собственно-энергетического оператора нейтрино в постоянном однородном магнитном поле, слабом по сравнению с критическим полем для W -бозона, $eB \ll m_W^2$.

\mathcal{S} -матричный элемент перехода $\nu \rightarrow \nu$ соответствует диаграмме Фейнмана, изображённой на рис. 3.13. Описание техники вычислений амплитуд квантовых процессов во внешних электромагнитных полях можно найти, например, в [148].

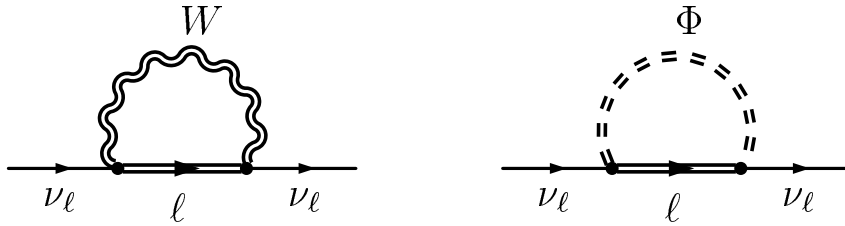


Рис. 3.13. Диаграммы Фейнмана, изображающие индуцированный магнитным полем вклад в собственно-энергетический оператор нейтрино в фейнмановской калибровке: двойные линии соответствуют точным пропагаторам заряженного лептона, W -бозона и нефизического скалярного заряженного Φ -бозона во внешнем магнитном поле

Собственно-энергетический оператор нейтрино может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \Sigma(p) = & -\frac{i g^2}{2} \left[\gamma^\alpha \gamma_L J_{\alpha\beta}^{(W)}(p) \gamma^\beta \gamma_L + \right. \\ & \left. + \frac{1}{m_W^2} (m_e \gamma_R - m_\nu \gamma_L) J^{(\Phi)}(p) (m_e \gamma_L - m_\nu \gamma_R) \right], \end{aligned} \quad (3.152)$$

где g – электрослабая константа стандартной модели. Интегралы, введённые в (3.152), имеют вид

$$J_{\alpha\beta}^{(W)}(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} S(q) G_{\beta\alpha}^{(W)}(q-p), \quad (3.153)$$

$$J^{(\Phi)}(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} S(q) D^{(\Phi)}(q-p), \quad (3.154)$$

где $S(q)$, $G_{\beta\alpha}^{(W)}(q-p)$ и $D^{(\Phi)}(q-p)$ – Фурье-образы трансляционно-инвариантных частей пропагаторов для электрона, W^- -бозона и заряженного скалярного Φ -бозона соответственно (см. (2.10), (2.11) и (2.12)). Подчеркнём, что m_ν в (3.152) в общем случае есть недиагональная дираковская массовая матрица нейтрино с учётом смешивания в лептонном секторе.

Заметим, что коэффициенты $\mathcal{A}_R, \mathcal{B}_R, \mathcal{C}_R, \mathcal{K}_{1,2}$ в формуле (3.147) происходят от фейнмановской диаграммы со скалярным Φ -бозоном и подавлены квадратом отношения лептонной массы к массе W -бозона, тогда как коэффициенты $\mathcal{A}_L, \mathcal{B}_L, \mathcal{C}_L$ содержат вклады обеих диаграмм.

Далее вычислен вклад в собственно-энергетический оператор нейтрино n -го уровня Ландау в пропагаторе заряженного лептона в комбинации с точным W -пропагатором. Показано, что вклад основного уровня Ландау не является доминирующим и следующие уровни дают вклады того же порядка, вступая в противоречие с предположением, использовавшимся в работах [151, 152]. Затем мы приводим подробный расчёт собственно-энергетического оператора нейтрино в магнитном поле в двух предельных случаях – относительно слабом поле $eB \ll m_\ell^2$ и умеренно сильном поле $m_\ell^2 \ll eB \ll m_W^2$. Вычислена дополнительная энергия, приобретаемая нейтрино во внешнем магнитном поле, и проанализированы возможные космологические и астрофизические следствия.

3.7.2. Вклад низших уровней Ландау в оператор $\Sigma(p)$

Как уже отмечалось, полученные нами результаты для коэффициентов собственно-энергетического оператора нейтрино (3.147) находятся в полном противоречии с результатами работ [151, 152]. В этих статьях вычисление собственно-энергетического оператора нейтрино в сильном магнитном поле проведено методом собственных функций Ритуса [206], который был обобщен авторами на случай частиц спина 1. На наш взгляд, основная причина расхождения состоит в том, что при расчёте собственно-энергетического оператора нейтрино авторы [151, 152] ограничились вкладом только основного

уровня Ландау в пропагатор заряженного лептона. Однако, как показывает анализ, такой подход является, вообще говоря, ошибочным, поскольку вклады следующих уровней Ландау оказываются того же порядка, что и вклад основного уровня. Дело в том, что при интегрировании по 4-импульсу виртуального лептона в петле (см. рис. 3.13) существенной оказывается область $q^2 \sim m_W^2 \gg eB$, поэтому предполагавшееся в [151, 152] доминирование основного уровня Ландау здесь не имеет места.

Продemonстрируем это прямым вычислением вклада в собственно-энергетический оператор нейтрино от n -го уровня Ландау в лептонном пропагаторе в сочетании с точным W -пропагатором. Поле будем считать умеренно сильным, $\beta \ll m_W^2$, а ещё одну величину — поперечный импульс нейтрино p_\perp — практически свободным параметром, меняющимся в широком интервале, $0 < p_\perp^2 \ll m_W^4/\beta$.

Подставляя в интеграл (3.153) точный W -пропагатор (2.11) и вклад n -го уровня Ландау в лептонный пропагатор (2.35), находим

$$\begin{aligned}
J_{\sigma\rho}^{(n)}(p) = & - \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{i}{q_\parallel^2 - m_\ell^2 - 2n\beta} \left\{ (q\gamma)_\parallel \left[d_n(v) - \frac{i}{2} (\gamma\varphi\gamma) d_n'(v) \right] - \right. \\
& \left. - (q\gamma)_\perp 2n \frac{d_n(v)}{v} \right\} \times \\
& \times \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(\beta s)} \exp \left[-is \left(m_W^2 - (q-p)_\parallel^2 + \frac{\text{tg}(\beta s)}{\beta s} (q-p)_\perp^2 \right) \right] \times \\
& \times \left[(\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\rho\sigma} - (\varphi\varphi)_{\rho\sigma} \cos(2\beta s) - \varphi_{\rho\sigma} \sin(2\beta s) \right], \tag{3.155}
\end{aligned}$$

где опущены члены с четным числом γ -матриц, которые устроятся вследствие киральной структуры оператора (3.152). Производя поворот в комплексной плоскости s , $s = -i\tau$, и используя тождество

$$\frac{1}{q_\parallel^2 - m_\ell^2 - 2n\beta} = - \int_0^\infty d\tau' \exp \left[-\tau' \left(m_\ell^2 + 2n\beta - q_\parallel^2 \right) \right], \tag{3.156}$$

перепишем интеграл (3.155) в форме

$$\begin{aligned}
J_{\sigma\rho}^{(n)}(p) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left\{ (q\gamma)_{\parallel} \left[d_n(v) - \frac{i}{2} (\gamma\varphi\gamma) d_n'(v) \right] - (q\gamma)_{\perp} 2n \frac{d_n(v)}{v} \right\} \times \\
&\times \int_0^{\infty} \frac{d\tau d\tau'}{\text{ch}(\beta\tau)} \left[(\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\rho\sigma} - (\varphi\varphi)_{\rho\sigma} \text{ch}(2\beta\tau) + i\varphi_{\rho\sigma} \text{sh}(2\beta\tau) \right] \times \\
&\times \exp \left[-\tau' \left(m_{\ell}^2 + 2n\beta - q_{\parallel}^2 \right) - \tau \left(m_W^2 - (q-p)_{\parallel}^2 \right) - \frac{\text{th}(\beta\tau)}{\beta} (q-p)_{\perp}^2 \right].
\end{aligned} \tag{3.157}$$

При интегрировании по 4-мерному пространству импульсов $d^4q = d^2q_{\parallel} d^2q_{\perp}$ интегралы по d^2q_{\parallel} имеют гауссову форму и легко вычисляются, что даёт

$$\begin{aligned}
J_{\sigma\rho}^{(n)}(p) &= \frac{i}{16\pi^3 m_W^2} \int_0^{\infty} \frac{dx dy}{(x+y) \text{ch}(\eta x)} \exp \left[-x + \xi \frac{xy}{x+y} - y(2n\eta + \lambda) \right] \times \\
&\times \left[(\tilde{\varphi}\tilde{\varphi})_{\rho\sigma} - (\varphi\varphi)_{\rho\sigma} \text{ch}(2\eta x) + i\varphi_{\rho\sigma} \text{sh}(2\eta x) \right] \times \\
&\times \int d^2q_{\perp} \exp \left[-\frac{\text{th}(\eta x)}{\beta} (q-p)_{\perp}^2 \right] \times \\
&\times \left\{ (p\gamma)_{\parallel} \frac{x}{x+y} \left[d_n(v) - \frac{i}{2} (\gamma\varphi\gamma) d_n'(v) \right] - (q\gamma)_{\perp} 2n \frac{d_n(v)}{v} \right\},
\end{aligned} \tag{3.158}$$

где введены безразмерные переменные $x = m_W^2 \tau$ и $y = m_W^2 \tau'$, а также параметры $\eta = \beta/m_W^2$, $\xi = p_{\parallel}^2/m_W^2 \simeq p_{\perp}^2/m_W^2$ и $\lambda = m_{\ell}^2/m_W^2$. Из выражения (3.158) следует, что, благодаря экспоненциальному фактору e^{-x} , существенная область изменения переменной x определяется условием $x \lesssim 1$. С учётом ограничения $\eta \ll 1$ аргумент гиперболических функций оказывается малым $\eta x \ll 1$, что ведёт к очевидным упрощениям. Следует также учесть условие $q_{\perp}^2 \lesssim \beta$, которое обеспечивается экспонентой e^{-v} , содержащейся в функциях $d_n(v)$, см. (2.36). Для весьма широкого интервала значений n , ограниченного только условием $n \ll 1/\eta = m_W^2/\beta$, экспонента, входящая в интеграл по d^2q_{\perp} , упрощается:

$$\begin{aligned}
\exp \left[-\frac{\text{th}(\eta x)}{\beta} (q-p)_{\perp}^2 \right] &\simeq \exp \left(-x \frac{p_{\perp}^2}{m_W^2} \right) \times \\
&\times \exp \left(-x \frac{q_{\perp}^2 - 2(qp)_{\perp}}{m_W^2} \right).
\end{aligned} \tag{3.159}$$

Первая из экспонент в наших обозначениях равна $e^{-\xi x}$. Напомним, что мы рассматриваем очень широкий интервал допустимых значений для величины p_\perp^2 , а именно $0 < p_\perp^2 \ll m_W^4/\beta$. Величина q_\perp во второй из экспонент является переменной интегрирования и её область существенных значений определяется указанным выше условием: $q_\perp^2 \lesssim \beta \ll m_W^2$. С учётом этого вторую из экспонент выражения (3.159) можно с хорошей точностью полагать равной единице.

При этом интегралы по области d^2q_\perp легко вычисляются:

$$\begin{aligned} \int d^2q_\perp d_n(v) &= \pi \beta (2 - \delta_{n0}), \quad \int d^2q_\perp d_n'(v) = -\pi \beta \delta_{n0}, \\ \int d^2q_\perp (q\gamma)_\perp \frac{d_n(v)}{v} &= 0. \end{aligned} \quad (3.160)$$

Вернёмся ещё раз к выражению (3.159) и сделаем дополнительные пояснения, чтобы предотвратить возможное недоразумение. На первый взгляд могло показаться, что замена величины $(p - q)_\perp^2$ на p_\perp^2 , которая фактически произошла в выражении (3.159), означает, что было принято дополнительное условие $p_\perp^2 \gg q_\perp^2 \sim eB$, которое значительно сужает область рассматриваемых значений p_\perp . Покажем прямым вычислением, что это не так и что полученный результат справедлив во всём интервале $0 < p_\perp^2 \ll m_W^4/\beta$.

Сохраним вторую из экспонент в выражении (3.159) и подставим её в первый из интегралов (3.160), обозначая его $j^{(n)}$:

$$j^{(n)} = \int d^2q_\perp d_n \left(\frac{q_\perp^2}{\beta} \right) \exp \left(-x \frac{q_\perp^2 - 2(qp)_\perp}{m_W^2} \right). \quad (3.161)$$

Рассмотрим вначале случай $n = 0$, при этом $d_0(v) = \exp(-v)$. Совершая в плоскости q_\perp переход к полярным координатам $\{q_\perp, \phi\}$, при этом $(qp)_\perp = q_\perp p_\perp \cos \phi$, и используя известный интеграл

$$\int_0^{2\pi} d\phi e^{b \cos \phi} = 2\pi I_0(b), \quad (3.162)$$

где $I_0(b)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка, получаем

$$j^{(0)} = 2\pi \int_0^\infty q_\perp dq_\perp \exp \left[-q_\perp^2 \left(\frac{1}{\beta} + \frac{x}{m_W^2} \right) \right] I_0 \left(\frac{2x q_\perp p_\perp}{m_W^2} \right). \quad (3.163)$$

Подчеркнём, что никаких приближений пока не делалось. Используя ещё один известный интеграл

$$\int_0^{\infty} dy e^{-y} I_0(2z\sqrt{y}) = e^{z^2}, \quad (3.164)$$

окончательно получаем

$$j^{(0)} = \frac{\pi\beta}{1 + x\beta/m_W^2} \exp\left(\frac{x^2 p_{\perp}^2 \beta}{m_W^4(1 + x\beta/m_W^2)}\right). \quad (3.165)$$

Вспоминая, что $x \lesssim 1$, $\beta \ll m_W^2$ и $p_{\perp}^2 \ll m_W^4/\beta$, в точности воспроизводим из (3.165) первый из интегралов (3.160) при $n = 0$:

$$j^{(0)} \simeq \pi\beta. \quad (3.166)$$

Аналогичное вычисление для $n = 1$, при этом $d_1(v) = 2v \exp(-v)$, приводит к другому известному интегралу:

$$\int_0^{\infty} y dy e^{-y} I_0(2z\sqrt{y}) = (1 + z^2) e^{z^2}, \quad (3.167)$$

что в принятых приближениях даёт

$$j^{(1)} \simeq 2\pi\beta. \quad (3.168)$$

Подобный анализ можно провести при любом n . Таким образом, приближение, использованное при вычислении интегралов (3.160), является оправданным.

С учётом соотношений (3.160) интеграл (3.158) принимает вид

$$\begin{aligned} J_{\sigma\rho}^{(n)}(p) &= \frac{i\beta}{16\pi^2 m_W^2} (p\gamma)_{\parallel} g_{\rho\sigma} \left\{ 2 - \left[1 - \frac{i}{2} (\gamma\varphi\gamma) \right] \delta_{n0} \right\} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{x dx dy}{(x+y)^2} \exp \left[-x - \xi \frac{x^2}{x+y} - y(2n\eta + \lambda) \right]. \end{aligned} \quad (3.169)$$

Учитывая малость параметров η и λ , окончательно находим вклад в интеграл от n -го уровня Ландау для любого $n \ll m_W^2/\beta$:

$$J_{\sigma\rho}^{(n)}(p) = \frac{i\beta}{16\pi^2 p_{\perp}^2} \ln \left(1 + \frac{p_{\perp}^2}{m_W^2} \right) (p\gamma)_{\parallel} g_{\rho\sigma} \left\{ 2 - \left[1 - \frac{i}{2} (\gamma\varphi\gamma) \right] \delta_{n0} \right\}. \quad (3.170)$$

Подставляя (3.170) в (3.152), для вклада в собственно-энергетический оператор нейтрино от n -го уровня Ландау в лептонном пропагаторе получаем

$$\Sigma^{(n)}(p) = -\frac{G_F eB}{\sqrt{2} 2\pi^2} \frac{m_W^2}{p_\perp^2} \ln \left(1 + \frac{p_\perp^2}{m_W^2} \right) [(2 - \delta_{n0}) (p\gamma)_\parallel - \delta_{n0} (p\tilde{\varphi}\gamma)] \gamma_L. \quad (3.171)$$

Как видно из выражения (3.171), вклад основного уровня Ландау ($n = 0$) не является доминирующим, что противоречит утверждениям статей [151, 152].

Для ещё более высоких уровней Ландау, $n \gtrsim m_W^2/\beta$, вычисления становятся значительно более громоздкими. Можно сделать уверенный вывод, что использование в данной задаче лептонного пропагатора, разложенного по уровням Ландау с последующим суммированием вкладов, является совершенно нецелесообразным. Значительно более простым и эффективным является способ вычислений с точным лептонным пропагатором (2.10).

3.7.3. Вычисление оператора $\Sigma(p)$ в “слабом” поле

В связи с расхождением наших результатов с результатами работ [151, 152] мы приводим наши расчёты оператора $\Sigma(p)$ достаточно подробно. Начнём вычисление с более простого случая относительно слабого поля, когда напряжённость поля является наименьшим размерным параметром задачи, $eB \ll m_\ell^2 \ll m_W^2$. При этом для фурье-образов пропагаторов как W -бозона, так и лептона можно использовать полевые разложения (2.20) и (2.22) и вычислить интеграл (3.153) в виде ряда по степеням параметра β/m_W^2 :

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta}(p) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[S^{(0)}(q) + S^{(1)}(q) + S^{(2)}(q) + \dots \right] \times \\ &\times \left[G_{\beta\alpha}^{(0)}(q-p) + G_{\beta\alpha}^{(1)}(q-p) + G_{\beta\alpha}^{(2)}(q-p) + \dots \right] = \\ &= \Delta_0 J_{\alpha\beta}(p) + \Delta_1 J_{\alpha\beta}(p) + \Delta_2 J_{\alpha\beta}(p) + \dots \end{aligned} \quad (3.172)$$

Несложно показать, что бесполевым член $\Delta_0 J_{\alpha\beta}(p)$, содержащий ультрафиолетовую расходимость, имеет структуру $g_{\alpha\beta} (p\gamma)$ и даёт вклад только в коэффициент \mathcal{A}_L оператора $\Sigma(p)$ (см. (3.147)), который, как уже отмечалось, уходит в перенормировку волновой функции нейтрино.

Член первого порядка складывается из двух частей:

$$\begin{aligned} \Delta_1 J_{\alpha\beta}(p) &= J_{\alpha\beta}^{(\ell_0 W_1)}(p) + J_{\alpha\beta}^{(\ell_1 W_0)}(p) = \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} S^{(0)}(q) G_{\beta\alpha}^{(1)}(q-p) + \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} S^{(1)}(q) G_{\beta\alpha}^{(0)}(q-p). \end{aligned} \quad (3.173)$$

Слагаемое, содержащее нулевой член лептонного пропагатора и первый член W -пропагатора, имеет вид

$$J_{\alpha\beta}^{(\ell_0 W_1)}(p) = 2i \beta \varphi_{\alpha\beta} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q\gamma) + m_\ell}{q^2 - m_\ell^2} \frac{1}{[(q-p)^2 - m_W^2]^2}. \quad (3.174)$$

Удерживая, в силу киральной структуры оператора (3.152), только члены с нечётным числом γ -матриц и используя разложение

$$\frac{1}{[(q-p)^2 - m_W^2]^n} \simeq \frac{1}{(q^2 - m_W^2)^n} + \frac{2n(qp)}{(q^2 - m_W^2)^{n+1}}, \quad (3.175)$$

где мы пренебрегли массой нейтрино $p^2 = m_\nu^2$, получаем при $m_\ell^2 \ll m_W^2$

$$J_{\alpha\beta}^{(\ell_0 W_1)}(p) \simeq \frac{1}{16\pi^2} \frac{\beta}{m_W^2} \varphi_{\alpha\beta}(p\gamma). \quad (3.176)$$

Аналогично вычисляется слагаемое, содержащее первый член лептонного пропагатора и нулевой член W -пропагатора:

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta}^{(\ell_1 W_0)}(p) &= -\frac{i}{2} \beta g_{\alpha\beta} (\gamma\varphi\gamma) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q\gamma)_\parallel + m_\ell}{(q^2 - m_\ell^2)^2} \frac{1}{(q-p)^2 - m_W^2} \simeq \\ &\simeq \frac{i}{32\pi^2} \frac{\beta}{m_W^2} g_{\alpha\beta} (p\tilde{\varphi}\gamma) \gamma_5, \end{aligned} \quad (3.177)$$

где использовано тождество

$$(p\gamma)_\parallel (\gamma\varphi\gamma) = -2i (p\tilde{\varphi}\gamma) \gamma_5. \quad (3.178)$$

Вклад второго порядка в интеграл $J_{\alpha\beta}(p)$ содержит три слагаемых:

$$\begin{aligned} \Delta_2 J_{\alpha\beta}(p) &= J_{\alpha\beta}^{(\ell_0 W_2)}(p) + J_{\alpha\beta}^{(\ell_1 W_1)}(p) + J_{\alpha\beta}^{(\ell_2 W_0)}(p) = \\ &= \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} S^{(0)}(q) G_{\beta\alpha}^{(2)}(q-p) + \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} S^{(1)}(q) G_{\beta\alpha}^{(1)}(q-p) + \\ &+ \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} S^{(2)}(q) G_{\beta\alpha}^{(0)}(q-p). \end{aligned} \quad (3.179)$$

В принятых приближениях, а также при $p_\perp^2 \simeq p_\parallel^2 \ll m_W^2$, используя разложение (3.175), можно получить слагаемое, содержащее нулевой член леп-

тонного пропагатора и второй член W -пропагатора, в виде

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha\beta}^{(\ell_0 W_2)}(p) &= -\beta^2 \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q\gamma) + m_\ell}{q^2 - m_\ell^2} \left[g_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{[(q-p)^2 - m_W^2]^3} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{2(q-p)_\perp^2}{[(q-p)^2 - m_W^2]^4} \right) + 4(\varphi\varphi)_{\alpha\beta} \frac{1}{[(q-p)^2 - m_W^2]^3} \right] \simeq \\
 &\simeq \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{\beta}{m_W^2} \right)^2 \left[\frac{1}{18} g_{\alpha\beta} (p\gamma)_\parallel - (\varphi\varphi)_{\alpha\beta} (p\gamma) \right], \quad (3.180)
 \end{aligned}$$

где опущено слагаемое вида $g_{\alpha\beta} (p\gamma)$, дающее вклад только в параметр \mathcal{A}_L .

Слагаемое, содержащее первый член лептонного пропагатора и первый член W -пропагатора, находим в виде

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha\beta}^{(\ell_1 W_1)}(p) &= \beta^2 \varphi_{\alpha\beta} (\gamma\varphi\gamma) \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q\gamma)_\parallel + m_\ell}{(q^2 - m_\ell^2)^2} \frac{1}{[(q-p)^2 - m_W^2]^2} \simeq \\
 &\simeq \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{\beta}{m_W^2} \right)^2 \varphi_{\alpha\beta} (p\tilde{\varphi}\gamma) \gamma_5. \quad (3.181)
 \end{aligned}$$

Наконец, комбинация второго члена лептонного пропагатора и нулевого члена W -пропагатора

$$\begin{aligned}
 J_{\alpha\beta}^{(\ell_2 W_0)}(p) &= 2\beta^2 g_{\alpha\beta} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{(q_\parallel^2 - m_\ell^2)(q\gamma)_\perp - q_\perp^2 [(q\gamma)_\parallel + m_\ell]}{(q^2 - m_\ell^2)^4} \times \\
 &\times \frac{1}{(q-p)^2 - m_W^2}, \quad (3.182)
 \end{aligned}$$

как уже отмечалось, содержит усиление вклада области относительно малых виртуальных импульсов $q^2 \sim m_\ell^2 \ll m_W^2$. Совершая виковский поворот в комплексной плоскости q_0 , $q_0 = iq_4$, $q_\parallel^2 = q_0^2 - q_3^2 = -(q_3^2 + q_4^2)$, после стандартных преобразований перепишем интеграл (3.182) в виде

$$J_{\alpha\beta}^{(\ell_2 W_0)}(p) = \frac{i}{8\pi^2} \left(\frac{\beta}{m_W^2} \right)^2 g_{\alpha\beta} (p\gamma)_\parallel (2I_1 + I_2). \quad (3.183)$$

Здесь введены, с использованием обозначений $x = -q_{\parallel}^2/m_W^2$, $y = q_{\perp}^2/m_W^2$, $\lambda = m_{\ell}^2/m_W^2 \ll 1$, следующие интегралы:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} \frac{x dx y dy}{(x + y + \lambda)^4 (x + y + 1)^2}, \\ I_2 &= \lambda \int_0^{\infty} \frac{dx y dy}{(x + y + \lambda)^4 (x + y + 1)^2}, \end{aligned} \quad (3.184)$$

которые, благодаря малости параметра λ , легко вычисляются:

$$I_1 \simeq -\frac{1}{6} \ln \lambda - \frac{17}{36}, \quad I_2 \simeq \frac{1}{6}. \quad (3.185)$$

Окончательно для вклада (3.182) получаем

$$J_{\alpha\beta}^{(\ell_2 W_0)}(p) \simeq \frac{i}{24\pi^2} \left(\frac{\beta}{m_W^2} \right)^2 g_{\alpha\beta}(p\gamma)_{\parallel} \left(\ln \frac{m_W^2}{m_{\ell}^2} - \frac{7}{3} \right). \quad (3.186)$$

Собирая вычисленные вклады в выражение (3.172), находим для интеграла $J_{\alpha\beta}(p)$ следующее разложение по степеням поля:

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta}(p) &\simeq \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{eB}{m_W^2} \left[\frac{i}{2} g_{\alpha\beta}(p\tilde{\varphi}\gamma)\gamma_5 + \varphi_{\alpha\beta}(p\gamma) \right] + \right. \\ &\left. + i \left(\frac{eB}{m_W^2} \right)^2 \left[g_{\alpha\beta}(p\gamma)_{\parallel} \left(\frac{2}{3} \ln \frac{m_W^2}{m_{\ell}^2} - \frac{3}{2} \right) - i \varphi_{\alpha\beta}(p\tilde{\varphi}\gamma)\gamma_5 - (\varphi\varphi)_{\alpha\beta}(p\gamma) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.187)$$

Здесь опущены слагаемые, которые имеют структуру $g_{\alpha\beta}(p\gamma)$ и полностью поглощаются перенормировкой волновой функции нейтрино, а также члены с чётным числом γ -матриц, которые устраниаются за счёт киральной структуры оператора (3.152).

Подставляя (3.187) в (3.152), для собственно-энергетического оператора нейтрино в пределе относительно слабого поля окончательно получаем

$$\Sigma(p) = \frac{G_F eB}{\sqrt{2} 4\pi^2} \left[3(p\tilde{\varphi}\gamma) - \frac{eB}{m_W^2} \left(\frac{4}{3} \ln \frac{m_W^2}{m_{\ell}^2} + 1 \right) (p\gamma)_{\parallel} \right] \gamma_L. \quad (3.188)$$

Коэффициент \bar{C}_L , который можно отсюда извлечь, сравнивая (3.188) с (3.147), находится в полном согласии с результатом для аномального магнитного момента нейтрино [203, 204], а также результатом работ [207, 208],

где исследовались недиагональные переходы $\nu_i \leftrightarrow \nu_j$ ($i \neq j$) во внешнем электромагнитном поле.

Коэффициент $\bar{\mathcal{B}}_L$, в свою очередь, совпадает с результатом работы [160], который, следует заметить, в действительности справедлив не для случая умеренно сильного поля $eB \ll m_W^2$, как утверждается в статье, а только в рассмотренном пределе относительно слабого поля.

Ещё одним критерием правильности вычисления коэффициента $\bar{\mathcal{B}}_L$ служит то, что на основе соответствующего слагаемого амплитуды (3.90) можно, заменяя внешнее поле полевыми операторами фотонов, построить эффективный лагранжиан $\nu\nu\gamma\gamma$ -взаимодействия в полном согласии с результатом работы [209].

3.7.4. Случай умеренно сильного поля

В случае умеренно сильного поля, $m_\ell^2 \ll eB \ll m_W^2$, как уже отмечалось, разложение пропагатора лептона по степеням поля (2.22) неприменимо. Используя точное выражение (2.10) и разложение (2.20) для пропагатора W -бозона, представим интеграл $J_{\alpha\beta}(p)$ в виде

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta}(p) &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} S(q) \left[G_{\beta\alpha}^{(0)}(q-p) + G_{\beta\alpha}^{(1)}(q-p) + G_{\beta\alpha}^{(2)}(q-p) + \dots \right] = \\ &= J_{\alpha\beta}^{(\ell_E W_0)}(p) + J_{\alpha\beta}^{(\ell_E W_1)}(p) + J_{\alpha\beta}^{(\ell_E W_2)}(p) + \dots \end{aligned} \quad (3.189)$$

Для первого из интегралов (3.189) получаем

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta}^{(\ell_E W_0)}(p) &= -i g_{\alpha\beta} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q-p)^2 - m_W^2} \times \\ &\times \int_0^\infty \frac{ds}{\cos(\beta s)} \exp \left[-is \left(m_\ell^2 - q_\parallel^2 + \frac{\text{tg}(\beta s)}{\beta s} q_\perp^2 \right) \right] \times \\ &\times \left\{ [(q\gamma)_\parallel + m_\ell] \left[\cos(\beta s) - \frac{1}{2} (\gamma\varphi\gamma) \sin(\beta s) \right] - \frac{(q\gamma)_\perp}{\cos(\beta s)} \right\}. \end{aligned} \quad (3.190)$$

С учётом разложения W -пропагатора (3.175), производя поворот в комплексной плоскости s , $s = -i\tau$ и опуская члены с чётным числом γ -матриц,

получим

$$J_{\alpha\beta}^{(\ell_E W_0)}(p) = -2g_{\alpha\beta} \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \int_0^\infty d\tau \exp \left[-\tau(m_\ell^2 - q_\parallel^2) - \frac{q_\perp^2}{\beta} \operatorname{th}(\beta\tau) \right] \times \\ \times \left\{ (q\gamma)_\parallel \left[1 + \frac{i}{2} (\gamma\varphi\gamma) \operatorname{th}(\beta\tau) \right] - \frac{(q\gamma)_\perp}{\operatorname{ch}^2(\beta\tau)} \right\} \frac{(qp)_\parallel - (qp)_\perp}{(q^2 - m_W^2)^2}. \quad (3.191)$$

Совершая виковский поворот в комплексной плоскости q_0 , $q_0 = iq_4$, интегрируя по углам в евклидовых плоскостях $\{q_1, q_2\}$ и $\{q_3, q_4\}$, переходя к безразмерным переменным $u = -q_\parallel^2/m_W^2$, $v = q_\perp^2/\beta$, $x = m_W^2\tau$ и вводя безразмерный параметр $\eta = \beta/m_W^2$, перепишем интеграл (3.191) в виде

$$J_{\alpha\beta}^{(\ell_E W_0)}(p) = \frac{i g_{\alpha\beta}}{16\pi^2} \eta \int_0^\infty dx \int_0^\infty du \int_0^\infty dv \frac{e^{-ux-v\operatorname{th}(\eta x)}}{(1+u+\eta v)^2} \times \\ \times \left\{ (p\gamma)_\parallel u \left[1 + \frac{i}{2} (\gamma\varphi\gamma) \operatorname{th}(\eta x) \right] - (p\gamma)_\perp \frac{\eta v}{\operatorname{ch}^2(\eta x)} \right\}. \quad (3.192)$$

Интеграл по переменной x требует аккуратного обращения как на нижнем, так и на верхнем пределах. Используя малость параметра η , целесообразно выбрать промежуточный масштаб A на оси x , такой что $A \gg 1$, но $\eta A \ll 1$, и разбить область интегрирования на две части, $0 < x < A$ и $A < x < \infty$:

$$J_{\alpha\beta}^{(\ell_E W_0)}(p) = J_{\alpha\beta}^{(0A)}(p) + J_{\alpha\beta}^{(A\infty)}(p). \quad (3.193)$$

В области $0 < x < A$ аргумент гиперболических функций мал, $\eta x \ll 1$, и первый из интегралов (3.193) значительно упрощается с учётом замены переменной $\eta v = w$:

$$J_{\alpha\beta}^{(0A)}(p) = \frac{i g_{\alpha\beta}}{16\pi^2} \int_0^A dx \int_0^\infty \frac{du dw}{(1+u+w)^2} e^{-x(u+w)} \left(1 + \frac{1}{3} \eta^2 x^3 w \right) \times \\ \times \left\{ (p\gamma)_\parallel u \left[1 + \frac{i}{2} (\gamma\varphi\gamma) \eta x \right] - (p\gamma)_\perp w (1 - \eta^2 x^2) \right\}. \quad (3.194)$$

Переходя от переменных $\{u, w\}$ к новым переменным $\{z, \xi\}$:

$$u = z \frac{1+\xi}{2}, \quad w = z \frac{1-\xi}{2}, \quad \int_0^\infty du dw = \frac{1}{2} \int_0^\infty z dz \int_{-1}^1 d\xi, \quad (3.195)$$

интегрируя по ξ и опуская, как и ранее, слагаемые вида $g_{\alpha\beta}(p\gamma)$, перепишем интеграл (3.194) с учётом (3.178) в виде

$$J_{\alpha\beta}^{(0A)}(p) = \frac{i g_{\alpha\beta}}{32\pi^2} \left[(p\tilde{\varphi}\gamma) \gamma_5 \eta I_3 + (p\gamma)_{\parallel} \eta^2 \left(I_4 - \frac{1}{9} I_5 \right) \right], \quad (3.196)$$

где введены интегралы:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^A x dx \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{(1+z)^2} e^{-xz}, & I_4 &= \int_0^A x^2 dx \int_0^{\infty} \frac{z^2 dz}{(1+z)^2} e^{-xz}, \\ I_5 &= \int_0^A x^3 dx \int_0^{\infty} \frac{z^3 dz}{(1+z)^2} e^{-xz}. \end{aligned} \quad (3.197)$$

Учитывая, что A – большой параметр, с точностью до членов $O(1/A)$ получаем

$$I_3 = 1, \quad I_4 = 2 \ln A - 5 + 2\gamma_E, \quad I_5 = 6 \ln A - 17 + 6\gamma_E, \quad (3.198)$$

где $\gamma_E = 0.577\dots$ – постоянная Эйлера. В результате для интеграла $J_{\alpha\beta}^{(0A)}(p)$ имеем

$$J_{\alpha\beta}^{(0A)}(p) = \frac{i g_{\alpha\beta}}{32\pi^2} \left[(p\tilde{\varphi}\gamma) \gamma_5 \eta + \frac{4}{3} (p\gamma)_{\parallel} \eta^2 \left(\ln A - \frac{7}{3} + \gamma_E \right) \right]. \quad (3.199)$$

Для второго из интегралов (3.193) также имеется упрощение. Как видно из (3.192), экспонента в числителе обеспечивает при $A < x < \infty$ малость членов u и ηv в знаменателе по сравнению с единицей. Целесообразно перейти к новым переменным $z = \eta x$, $y = u/\eta$:

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta}^{(A\infty)}(p) &= \frac{i g_{\alpha\beta}}{16\pi^2} \eta^2 \int_{\eta A}^{\infty} dz \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} dv e^{-yz} e^{-v \operatorname{th} z} \times \\ &\times \left\{ (p\gamma)_{\parallel} y \left[1 + \frac{i}{2} (\gamma\varphi\gamma) \operatorname{th} z \right] - (p\gamma)_{\perp} \frac{v}{\operatorname{ch}^2 z} \right\} \times \\ &\times \frac{1}{(1 + \eta y + \eta v)^2}. \end{aligned} \quad (3.200)$$

Заменяя последнюю дробь на 1, видим, что интегралы по y и v легко вычисляются. Пренебрегая слагаемым $O(1/A)$, получаем

$$J_{\alpha\beta}^{(A\infty)}(p) = \frac{i g_{\alpha\beta}}{16\pi^2} \eta^2 \left\{ (p\gamma)_{\parallel} \int_{\eta A}^{\infty} \frac{dz}{z^2 \operatorname{th} z} - (p\gamma)_{\perp} \int_{\eta A}^{\infty} \frac{dz}{z \operatorname{sh}^2 z} \right\}. \quad (3.201)$$

Здесь первый из интегралов можно преобразовать ко второму интегрированием по частям:

$$\int_{\eta A}^{\infty} \frac{dz}{z^2 \operatorname{th} z} = - \int_{\eta A}^{\infty} \frac{dz}{z \operatorname{sh}^2 z} + \frac{1}{(\eta A)^2} + \frac{1}{3} + O((\eta A)^2). \quad (3.202)$$

Учитывая, что $\eta A \ll 1$, оставшийся интеграл целесообразно переписать в виде

$$\int_{\eta A}^{\infty} \frac{dz}{z \operatorname{sh}^2 z} = \int_{\eta A}^{\infty} \frac{dz}{z^3} \left(\frac{z^2}{\operatorname{sh}^2 z} - \frac{3}{3+z^2} \right) + 3 \int_{\eta A}^{\infty} \frac{dz}{z^3(3+z^2)}. \quad (3.203)$$

Здесь добавленный и вычитаемый член выбран так, чтобы, с одной стороны, обеспечить сходимость первого из интегралов и на нижнем, и на верхнем пределах, а с другой стороны, чтобы сам он легко вычислялся. Итак, первый из интегралов (3.203) является конечным, если устремить нижний предел к нулю. Его численное значение

$$C = \int_0^{\infty} \frac{dz}{z^3} \left(\frac{z^2}{\operatorname{sh}^2 z} - \frac{3}{3+z^2} \right) \simeq -0.055. \quad (3.204)$$

В результате для интеграла (3.203) получаем

$$\int_{\eta A}^{\infty} \frac{dz}{z \operatorname{sh}^2 z} = \frac{1}{2(\eta A)^2} + \frac{1}{3} \ln A + \frac{1}{3} \ln \eta - \frac{1}{6} \ln 3 + C \quad (3.205)$$

с точностью до членов более высокого порядка малости. Суммируя вычисленные вклады и опуская, как и ранее, слагаемые вида $g_{\alpha\beta}(p\gamma)$, для интеграла в области $A < x < \infty$ имеем

$$J_{\alpha\beta}^{(A\infty)}(p) = \frac{i g_{\alpha\beta}}{24\pi^2} (p\gamma)_{\parallel} \eta^2 \left(-\ln A + \ln \frac{1}{\eta} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 3 - 3C \right). \quad (3.206)$$

Окончательное выражение для интеграла (3.193), как и следовало ожидать, не содержит промежуточного масштаба A :

$$J_{\alpha\beta}^{(\ell_E W_0)}(p) = \frac{i g_{\alpha\beta}}{32\pi^2} \left[(p\tilde{\varphi}\gamma) \gamma_5 \eta + \frac{4}{3} (p\gamma)_{\parallel} \eta^2 \left(\ln \frac{1}{\eta} - \frac{11}{6} + \frac{1}{2} \ln 3 + \gamma_E - 3C \right) \right]. \quad (3.207)$$

Присутствие здесь члена $\eta^2 \ln \eta$ ($\eta = \beta/m_W^2$) еще раз показывает, что разложение лептонного пропагатора по β как малому параметру в данном случае невозможно.

Аналогичный анализ второго и третьего членов разложения (3.189) показывает, что “опасный” вклад с логарифмом β возникает здесь в следующих порядках по параметру η , поэтому можно использовать полевое разложение лептонного пропагатора, записывая интегралы в виде

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta}^{(\ell_E W_1)}(p) &= J_{\alpha\beta}^{(\ell_0 W_1)}(p) + J_{\alpha\beta}^{(\ell_1 W_1)}(p), \\ J_{\alpha\beta}^{(\ell_E W_2)}(p) &= J_{\alpha\beta}^{(\ell_0 W_2)}(p). \end{aligned} \quad (3.208)$$

Таким образом, суммируя (3.207), (3.176), (3.180) и (3.181), находим

$$\begin{aligned} J_{\alpha\beta}(p) &= \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \frac{eB}{m_W^2} \left[\frac{i}{2} g_{\alpha\beta} (p\tilde{\varphi}\gamma) \gamma_5 + \varphi_{\alpha\beta} (p\gamma)_{\parallel} \right] + \right. \\ &+ i \left(\frac{eB}{m_W^2} \right)^2 \left[g_{\alpha\beta} (p\gamma)_{\parallel} \left(\frac{2}{3} \ln \frac{m_W^2}{eB} - \frac{7}{6} + \frac{1}{3} \ln 3 + \frac{2}{3} \gamma_E - 2C \right) - \right. \\ &\left. \left. - i \varphi_{\alpha\beta} (p\tilde{\varphi}\gamma) \gamma_5 - (\varphi\varphi)_{\alpha\beta} (p\gamma) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.209)$$

Для собственно-энергетического оператора нейтрино в случае умеренно сильного поля, $m_\ell^2 \ll eB \ll m_W^2$, окончательно получаем

$$\Sigma(p) = \frac{G_F eB}{\sqrt{2} 4\pi^2} \left[3(p\tilde{\varphi}\gamma) - \frac{eB}{m_W^2} \left(\frac{4}{3} \ln \frac{m_W^2}{eB} + 3.389 \right) (p\gamma)_{\parallel} \right] \gamma_L. \quad (3.210)$$

На первый взгляд вторым слагаемым в (3.188) и (3.210), которое содержит дополнительный малый фактор eB/m_W^2 , можно было бы пренебречь. Однако, как мы покажем ниже, именно оно даёт доминирующий вклад в энергию нейтрино.

В работе [151] авторы попытались в качестве проверки правильности своих аналитических вычислений произвести численный расчёт коэффициентов $\bar{\mathcal{B}}_L$ и $\bar{\mathcal{C}}_L$ оператора $\Sigma(p)$, записанных в виде двойных интегралов (см. формулы (89) и (90) работы [151]). Как мы покажем ниже, данный численный расчёт также неверен. Основная причина ошибки состоит, по-видимому, в том, что авторы пытались рассчитать численно интеграл от разности двух, в сущности, бесконечных величин. Анализ показал, что этот интеграл конечен и имеет порядок величины $eB/m_W^2 \lesssim 10^{-6}$ для соответствующих значений поля, но не порядка единицы, как утверждают авторы [151].

Аналогично работе [151] представим выражения для коэффициентов оператора $\Sigma(p)$ в виде двойных интегралов. Подставим в интеграл (3.153) точные выражения для пропагаторов (2.10) и (2.11), в которых удобно сразу произвести поворот в комплексной плоскости s , $s = -i\tau$. При этом интегралы по 4-импульсу $d^4q = d^2q_{\parallel} d^2q_{\perp}$ сравнительно легко вычисляются. Подставляя затем результат в (3.152) и сравнивая с определением собственно-энергетического оператора (3.147), можно представить коэффициенты \mathcal{A}_L , $\bar{\mathcal{B}}_L$ и $\bar{\mathcal{C}}_L$ в следующем виде:

$$\mathcal{A}_L = -\frac{g^2 \eta}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx dy \operatorname{sh}(\eta x)}{(x+y) \operatorname{sh}^2[\eta(x+y)]} \exp[-\Phi(x, y, \lambda, p, m_W)], \quad (3.211)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{B}}_L &= \frac{g^2 \eta}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dx dy}{(x+y) \operatorname{sh}[\eta(x+y)]} \left[\frac{\operatorname{sh}(\eta x)}{\operatorname{sh}[\eta(x+y)]} - \frac{x \operatorname{ch}[\eta(2x+y)]}{x+y} \right] \times \\ &\times \exp[-\Phi(x, y, \lambda, p, m_W)], \end{aligned} \quad (3.212)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_L = \frac{g^2 \eta}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{x dx dy}{(x+y)^2} \frac{\operatorname{sh}[\eta(2x+y)]}{\operatorname{sh}[\eta(x+y)]} \exp[-\Phi(x, y, \lambda, p, m_W)], \quad (3.213)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, \lambda, p, m_W) &= x + \lambda y - \\ &- \frac{x y}{x+y} \frac{p^2}{m_W^2} - \left(\frac{x y}{x+y} - \frac{\operatorname{sh}(\eta x) \operatorname{sh}(\eta y)}{\eta \operatorname{sh}[\eta(x+y)]} \right) \frac{p_{\perp}^2}{m_W^2}, \end{aligned} \quad (3.214)$$

а также введены обозначения $\eta = \beta/m_W^2$, $\lambda = m_{\ell}^2/m_W^2$.

Нетрудно увидеть, что интеграл, выражающий коэффициент \mathcal{A}_L , является расходящимся. Как уже неоднократно отмечалось, этот коэффициент уходит в перенормировку волновой функции нейтрино.

Заметим, что полученные выражения для коэффициентов $\bar{\mathcal{B}}_L$ и $\bar{\mathcal{C}}_L$ находятся в согласии с формулами (89) и (90) работы [151] с точностью до очевидной ошибки в знаке в формуле (90). Однако из (3.212) видно, что коэффициент $\bar{\mathcal{B}}_L$ есть чётная функция параметра η , следовательно, линейная зависимость $\bar{\mathcal{B}}_L$ от η , декларируемая в работе [151], является явной ошибкой.

Для проверки правильности наших аналитических расчётов рассмотрим предельный случай, когда $m_\ell^2 \ll m_W^2$ и $p_\parallel^2 \simeq p_\perp^2 \ll m_W^2$. Переходя к новой переменной $z = x + y$, упростим интегралы (3.212) и (3.213):

$$\bar{\mathcal{B}}_L = \frac{g^2 \eta}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dz}{z \operatorname{sh}(\eta z)} \int_0^z dx e^{-x} \left[\frac{\operatorname{sh}(\eta x)}{\operatorname{sh}(\eta z)} - \frac{x \operatorname{ch}[\eta(z+x)]}{z} \right], \quad (3.215)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_L = \frac{g^2 \eta}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dz}{z^2 \operatorname{sh}(\eta z)} \int_0^z x dx e^{-x} \operatorname{sh}[\eta(z+x)]. \quad (3.216)$$

Результаты численного расчёта величин $\bar{\mathcal{B}}_L$ и $\bar{\mathcal{C}}_L$ как функций параметра η демонстрируют хорошее согласие с полученными ранее приближёнными формулами, особенно при малых значениях параметра η .

3.7.5. Оператор нейтрино $\Sigma(p)$ в скрещенном поле

Кроме рассмотренных в работе [194] предельных случаев слабого поля $eB \ll m_\ell^2$ и умеренно сильного поля $m_\ell^2 \ll eB \ll m_W^2$, существует ещё одна область значений физических параметров, требующая отдельного анализа. Имеется в виду ситуация, когда поперечный по отношению к магнитному полю импульс нейтрино p_\perp является достаточно большой величиной, например $p_\perp \gtrsim m_W$ или $p_\perp \gg m_W$. Эта область значений параметров является актуальной в связи с проблемами физики космических лучей ультравысоких энергий. В частности, широко обсуждаются возможности регистрации космических нейтрино ультравысоких энергий, $E_\nu \sim 10^{7 \div 17}$ ГэВ (см., например, [210] и цитированные там работы). По-видимому, описание процесса распространения нейтрино таких энергий будет неполным без учёта их взаимодействия с магнитными полями астрофизической природы.

Указанная область значений параметров соответствует приближению скрещенного поля. Фурье-образы трансляционно-инвариантных частей пропагаторов, входящих в выражения (3.153), (3.154), представлены в формулах (2.62), (2.63), (2.64).

Общая лоренцевская структура оператора $\Sigma(p)$ в присутствии магнитного поля представлена в выражении (3.147).

В приближении скрещенного поля интересующие нас коэффициенты в (3.147) выражаются через интегралы от функции Харди–Стокса:

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{B}}_L &= \frac{G_F}{12\sqrt{2}\pi^2 m_W^2} \int_0^1 \frac{dv v [2(1+v)(2+v) + \lambda(1-v)(2-v)]}{[v + \lambda(1-v)]^2} \times \\ &\times u^2 \frac{df(u)}{du}, \end{aligned} \quad (3.217)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_L = \frac{G_F}{4\sqrt{2}\pi^2} \int_0^1 \frac{dv v [2(1+v) - \lambda(1-v)]}{v + \lambda(1-v)} u f(u), \quad (3.218)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_R = \frac{G_F}{12\sqrt{2}\pi^2 m_W^2} \frac{m_\nu^2}{m_W^2} \int_0^1 \frac{dv v (1-v)(2-v)}{[v + \lambda(1-v)]^2} u^2 \frac{df(u)}{du}, \quad (3.219)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_R = \frac{G_F}{4\sqrt{2}\pi^2} \frac{m_\nu^2}{m_W^2} \int_0^1 \frac{dv v (1-v)}{v + \lambda(1-v)} u f(u), \quad (3.220)$$

$$\mathcal{K}_2 = \frac{G_F \lambda}{8\sqrt{2}\pi^2} \int_0^1 \frac{dv (1-v)}{v + \lambda(1-v)} u f(u), \quad (3.221)$$

где $\lambda = m_\ell^2/m_W^2$, $f(u)$ – функция Харди–Стокса:

$$f(u) = i \int_0^\infty dt \exp \left[-i \left(tu + \frac{t^3}{3} \right) \right]. \quad (3.222)$$

Аргумент функции $f(u)$ в выражениях (3.217)–(3.221) имеет вид

$$u = \frac{v + \lambda(1-v)}{[\chi v(1-v)]^{2/3}}, \quad (3.223)$$

где χ – динамический полевой параметр, $\chi^2 = e^2(pFFp)/m_W^6$.

Существуют три области значений динамического параметра χ , в которых можно найти простые приближённые аналитические выражения для интегралов (3.217)–(3.221).

1. Область, где χ является самым малым параметром задачи, $\chi^2 \ll \lambda$, или $eB p_\perp \ll m_\ell m_W^2$. В данной области мы получили

$$\bar{B}_L \simeq -\frac{G_F}{3\sqrt{2}\pi^2 m_W^2} \left[\ln \frac{1}{\lambda} + \frac{3}{4} + i\pi \frac{\sqrt{3\lambda}}{\chi} \exp\left(-\frac{\sqrt{3\lambda}}{\chi}\right) \right], \quad (3.224)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_L \simeq & \frac{3G_F}{4\sqrt{2}\pi^2} \left[1 - \frac{2}{3}\lambda \left(\ln \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{4} \right) + \frac{4}{3}\chi^2 \left(\ln \frac{1}{\lambda} - 3 \right) + \right. \\ & \left. + i \frac{4\pi\lambda}{3} \exp\left(-\frac{\sqrt{3\lambda}}{\chi}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.225)$$

$$\bar{B}_R \simeq -\frac{G_F}{6\sqrt{2}\pi^2 m_W^2} \frac{m_\nu^2}{m_W^2} \left(\ln \frac{1}{\lambda} - \frac{9}{4} \right), \quad (3.226)$$

$$\bar{C}_R \simeq \frac{G_F}{8\sqrt{2}\pi^2} \frac{m_\nu^2}{m_W^2}, \quad (3.227)$$

$$\mathcal{K}_2 \simeq \frac{G_F}{8\sqrt{2}\pi^2} \left[\lambda \left(\ln \frac{1}{\lambda} - 1 \right) + \frac{2}{3}\chi^2 \right]. \quad (3.228)$$

2. Область промежуточных значений динамического параметра $\lambda \ll \chi^2 \ll 1$. По-видимому, именно эта область значений представляет наибольший интерес. Напомним, что $\lambda = m_e^2/m_W^2 \simeq 4 \times 10^{-11}$. Представляя параметр χ в форме

$$\chi^2 \simeq 3 \times 10^{-3} \left(\frac{B}{B_e} \right)^2 \left(\frac{E}{10^{20} \text{ эВ}} \right)^2, \quad (3.229)$$

видим, что в очень широких интервалах значений магнитного поля и энергий нейтрино параметр χ принадлежит этой промежуточной области.

Здесь мы получили

$$\bar{B}_L \simeq -\frac{G_F}{3\sqrt{2}\pi^2 m_W^2} \left(2 \ln \frac{1}{\chi} - \frac{5}{4} + \ln 3 + 2\gamma_E + i\pi \right), \quad (3.230)$$

$$\bar{C}_L \simeq \frac{3G_F}{4\sqrt{2}\pi^2} \left[1 + \frac{4}{3}\chi^2 \left(2 \ln \frac{1}{\chi} - \frac{17}{3} + \ln 3 + 2\gamma_E + i\pi \right) \right], \quad (3.231)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_R \simeq -\frac{G_F}{6\sqrt{2}\pi^2} \frac{m_\nu^2}{m_W^2} \left(2\ln \frac{1}{\chi} - \frac{17}{4} + \ln 3 + 2\gamma_E + i\pi \right), \quad (3.232)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_R \simeq \frac{G_F}{12\sqrt{2}\pi^2} \frac{m_\nu^2}{m_W^2}, \quad (3.233)$$

$$\mathcal{K}_2 \simeq \frac{G_F}{8\sqrt{2}\pi^2} \frac{m_\ell^2}{m_W^2} \left(2\ln \frac{1}{\chi} - 1 + \ln 3 + 2\gamma_E + i\pi \right), \quad (3.234)$$

где $\gamma_E = 0.577\dots$ – постоянная Эйлера.

3. Область больших значений динамического параметра $\chi \gg 1$. Наши результаты в этой области следующие:

$$\bar{\mathcal{B}}_L \simeq -i \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\pi} \frac{G_F}{m_W^2 \chi}, \quad \bar{\mathcal{C}}_L \simeq \frac{\pi G_F (1 + i\sqrt{3})}{5\sqrt{2} 3^{1/6} \Gamma^4(2/3) \chi^{2/3}}, \quad (3.235)$$

$$\bar{\mathcal{B}}_R \simeq \frac{3^{7/6} \Gamma^4(2/3) G_F (1 - i\sqrt{3})}{32\sqrt{2} \pi^3 \chi^{4/3}} \frac{m_\nu^2}{m_W^4}, \quad (3.236)$$

$$\bar{\mathcal{C}}_R \simeq \frac{\pi G_F (1 + i\sqrt{3})}{90\sqrt{2} 3^{1/6} \Gamma^4(2/3) \chi^{2/3}} \frac{m_\nu^2}{m_W^2}, \quad (3.237)$$

$$\mathcal{K}_2 \simeq \frac{\pi G_F (1 + i\sqrt{3})}{36\sqrt{2} 3^{1/6} \Gamma^4(2/3) \chi^{2/3}} \frac{m_\ell^2}{m_W^2}, \quad (3.238)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $\Gamma(2/3) = 1.354\dots$

3.7.6. Магнитный момент нейтрино

В предельном случае $\chi^2 \ll \lambda = m_\ell^2/m_W^2$ для магнитного момента нейтрино (3.280) получаем

$$\mu_{\nu_\ell} \simeq \mu_{\nu_\ell}^{(0)} \left[1 - \frac{1}{2} \lambda + \frac{4}{3} \chi^2 \left(\ln \frac{1}{\lambda} - 3 + \frac{1}{3} \right) \right], \quad \mu_{\nu_\ell}^{(0)} = \frac{3e G_F m_\nu}{8\pi^2 \sqrt{2}}. \quad (3.239)$$

где $\mu_{\nu_e}^{(0)}$ есть магнитный момент нейтрино в вакууме [203, 204]. Лидирующий член полевой поправки $\sim \chi^2$ в (3.239) с большим логарифмом совпадает с результатом работы [185], где не учитывались постлогарифмические члены. Последний член в полевой поправке выражения (3.239) обусловлен вкладом Φ -бозона. Как видно, он относительно мал, но не имеет параметрического подавления.

3.8. Собственно-энергетический оператор нейтрино в замагниченной плазме

Исследование собственно-энергетического оператора нейтрино $\Sigma(p)$, из которого, в частности, можно извлечь и закон дисперсии нейтрино, в плотной плазме в присутствии внешнего электромагнитного поля проводилось в целом ряде работ (см., например, [152, 153, 181, 187, 188]).

Для дополнительной энергии электронного нейтрино в зарядово симметричной слабо замагниченной плазме в физических условиях

$$m_W^2 \gg T^2 \gg eB \gg m_e^2 \quad (3.240)$$

было получено выражение

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{|\mathbf{p}|} = & -\frac{7\sqrt{2} G_F \pi^2 T^4}{45} \left(\frac{1}{m_Z^2} + \frac{2}{m_W^2} \right) + \\ & + \frac{\sqrt{2} G_F T^2 eB}{3m_W^2} \cos \phi + \frac{\sqrt{2} G_F (eB)^2}{6 \pi^2 m_W^2} \ln \left(\frac{T^2}{m_e^2} \right) \sin^2 \phi. \end{aligned} \quad (3.241)$$

Здесь E и \mathbf{p} – энергия и импульс нейтрино, m_e, m_Z, m_W – массы электрона, Z -бозона и W -бозона соответственно, T – температура плазмы, ϕ – угол между направлением магнитного поля \mathbf{B} и вектором импульса \mathbf{p} . Первое слагаемое в выражении (3.241) описывает дополнительную энергию нейтрино в плазме без магнитного поля [181], а второе [187] и третье [188] слагаемые обусловлены одновременным присутствием плазмы и магнитного поля. Как видно из (3.241), слагаемое, пропорциональное квадрату напряжённости магнитного поля, содержит усиление логарифмическим фактором $\ln(T^2/m_e^2)$, что в физических условиях (3.240), вообще говоря, вызывает сомнения. Действительно, в условиях (3.240) вклад в энергию нейтрино определяется плазменными электронами и позитронами, заселяющими высшие

уровни Ландау. Энергия таких электронов и позитронов на n -м уровне Ландау выражается формулой

$$\omega_n = \sqrt{m_e^2 + k_z^2 + 2eBn}, \quad n \gg 1. \quad (3.242)$$

Поскольку в предполагаемых условиях масса электрона является самым малым параметром задачи, ею можно пренебречь в выражении для энергии (3.242), поэтому маловероятно, чтобы масса электрона присутствовала в окончательном ответе в лидирующем приближении. Таким образом, формула (3.241) требовала уточнения, то есть было необходимо независимое вычисление дисперсии нейтрино в замагниченной плазме. Следуя работе [211], воспроизведём здесь такое вычисление. Будет исследовано влияние зарядово симметричной замагниченной плазмы на дисперсию нейтрино и вычислено общее выражение для собственно-энергетического оператора нейтрино $\Sigma(p)$. Вспомогательным, но важным результатом является вычисление матрицы плотности плазменного электрона. Будет подробно проанализирована дисперсия нейтрино в физических условиях слабо замагниченной плазмы, относительно слабо замагниченной плазмы и сильно замагниченной плазмы.

3.8.1. Рассеяние нейтрино на замагниченной плазме

Для того чтобы получить выражение для собственно-энергетического оператора нейтрино $\Sigma(p)$, необходимо рассмотреть процесс рассеяния нейтрино вперёд, амплитуда которого связана с оператором $\Sigma(p)$ следующим соотношением:

$$M_{(\nu \rightarrow \nu)} = -\bar{U}(p) \Sigma(p) U(p). \quad (3.243)$$

Изменение энергии нейтрино, обусловленное его рассеянием вперёд в среде, может быть выражено через амплитуду этого процесса:

$$\Delta E = -\frac{1}{2E} M(\nu \rightarrow \nu) = \frac{1}{4E} \text{Tr} \{((p\gamma) + m_\nu) (1 + (s\gamma) \gamma_5) \Sigma(p)\}, \quad (3.244)$$

где $E = \sqrt{p_3^2 + m_\nu^2}$ – энергия нейтрино в вакууме, m_ν – масса нейтрино, s^μ – 4-вектор поляризации нейтрино.

Общий вид оператора $\Sigma(p)$ в присутствии плазмы и однородного магнитного поля представлен в выражении (3.92).

Используя (3.92) и (3.244), дополнительную энергию нейтрино ΔE в замагниченной плазме можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta E = & \frac{1}{2} \mathcal{B}_L [1 - (\mathbf{s}\mathbf{v})] + \frac{1}{2} \mathcal{B}_R [1 + (\mathbf{s}\mathbf{v})] - \\ & - \frac{e m_\nu}{2} (\mathcal{C}_L - \mathcal{C}_R + 4\mathcal{K}_2) \left[(\mathbf{s}\mathbf{B}_t) + \frac{m_\nu}{E} (\mathbf{s}\mathbf{B}_\ell) \right] + \\ & + \frac{m_\nu^2}{2E} (\mathcal{A}_L + \mathcal{A}_R + 2\mathcal{K}_1), \end{aligned} \quad (3.245)$$

где $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$ – вектор скорости нейтрино, \mathbf{s} – удвоенный вектор среднего спина нейтрино, $\mathbf{B}_{t,\ell}$ – поперечная и продольная составляющие магнитного поля \mathbf{B} по отношению к импульсу нейтрино, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_\ell$.

Как уже отмечалось, коэффициенты \mathcal{A}_R , \mathcal{B}_R , \mathcal{C}_R , $\mathcal{K}_{1,2}$ подавлены квадратом отношения лептонной массы к массе W -бозона и мы будем ими пренебрегать. Для ультрарелятивистского нейтрино из выражения (3.245) получаем

$$\Delta E \simeq \mathcal{B}_L \frac{(1 - (\mathbf{n}\mathbf{s}))}{2} - \mathcal{C}_L \frac{e m_\nu}{2} (\mathbf{B} [\mathbf{n} \times [\mathbf{s} \times \mathbf{n}]]), \quad (3.246)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор в направлении импульса нейтрино. В выражении (3.246) опущены слагаемые, пропорциональные квадрату массы нейтрино.

Таким образом, задача нахождения дополнительной энергии, приобретаемой нейтрино в процессе рассеяния вперёд в замагниченной плазме, сводится к вычислению параметров \mathcal{B}_L и \mathcal{C}_L .

Слагаемое в (3.246), пропорциональное массе нейтрино в первой степени, соответствует вкладу в дополнительную энергию нейтрино, обусловленному магнитным моментом, и будет подробно проанализировано далее. В случае левого безмассового нейтрино его дополнительная энергия в среде определяется только параметром \mathcal{B}_L :

$$\Delta E = \mathcal{B}_L.$$

Поскольку дополнительная энергия нейтрино, как физическая величина, является калибровочно инвариантной, вычисления будем проводить в унитарной калибровке, удобство которой состоит в том, что в ней отсутствует вклад скалярных бозонов. В этой калибровке амплитуда процесса рассеяния $\nu \rightarrow \nu$ в замагниченной плазме может быть представлена в виде суммы двух слагаемых:

$$M_{(\nu \rightarrow \nu)} = M_{(\nu \rightarrow \nu)}^W + M_{(\nu \rightarrow \nu)}^Z, \quad (3.247)$$

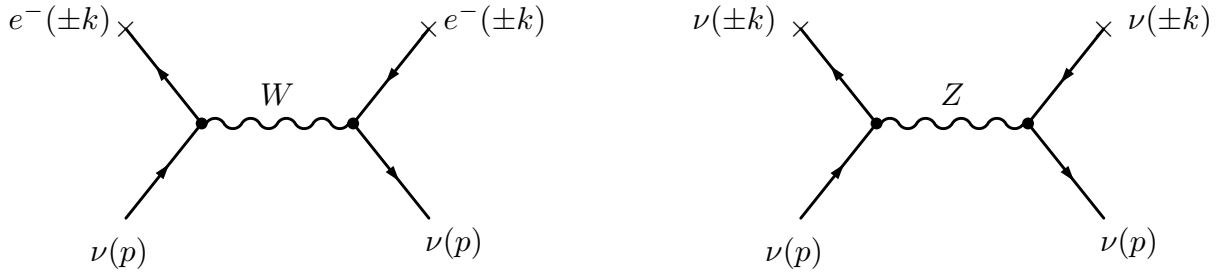


Рис. 3.14. Диаграммы Фейнмана, описывающие процесс рассеяния нейтрино вперёд в замагниченной плазме

где первое слагаемое соответствует амплитуде рассеяния нейтрино вперёд на плазменных электронах и позитронах среды через W -бозон, второе слагаемое обусловлено процессом перехода $\nu \rightarrow \nu$ через Z -бозон (см. рис. 3.14). Процесс рассеяния нейтрино вперёд на плазменных нейтрино, изображённый на второй диаграмме рис. 3.14, не чувствителен к присутствию внешнего магнитного поля, его вклад в дополнительную энергию нейтрино исследовался ранее и может быть извлечён из работы [181]:

$$\frac{\Delta E^Z}{|\mathbf{p}|} = -\frac{7\sqrt{2} G_F \pi^2 T^4}{45 m_Z^2}. \quad (3.248)$$

Отметим, что на рис. 3.14 не приведены диаграммы, в которых 4-импульс промежуточного Z -бозона равен нулю. Это связано с тем, что такие диаграммы дают только локальный вклад, который равен нулю в зарядово симметричной плазме. Таким образом, задача сводится к вычислению вклада замагниченной плазмы в дополнительную энергию нейтрино, обусловленного обменом W -бозоном.

Процесс рассеяния, соответствующий первой диаграмме на рис. 3.14, обусловлен лагранжианом:

$$L = \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{e} \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e) W_\alpha + \frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{\nu}_e \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) e) W_\alpha^*. \quad (3.249)$$

\mathcal{S} -матричный элемент процесса рассеяния нейтрино вперёд на плазменных электронах следует из лагранжиана (3.249):

$$S_{\nu e^- \rightarrow \nu e^-}^W = \frac{g^2}{8} \sum_n \int \frac{d^4x d^4x'}{\sqrt{2EV} \sqrt{2E'V}} e^{i(px' - p'x)} \times \quad (3.250)$$

$$\times \bar{U}(p') O_\alpha R_n(x, x') O_\beta U(p) G_{\beta\alpha}^W(x', x),$$

где $V = L_1 L_2 L_3$ – нормировочный объём, $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ и $p'^\mu = (E', \mathbf{p}')$ – 4-импульсы начального и конечного нейтрино, $U(p)$ – биспинорная амплитуда

нейтрино, $O_\alpha = \gamma_\alpha(1 + \gamma_5)$, $G_{\beta\alpha}^W(x', x)$ – пропагатор W -бозона в магнитном поле, $R_n(x, x')$ – матрица плотности плазменного электрона с фиксированным номером уровня Ландау n :

$$R_n(x, x') = \sum_s \int \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} L_2 L_3 f(\omega_n) \psi_e(x) \bar{\psi}_e(x'). \quad (3.251)$$

Здесь $\psi_e(x)$ – решения уравнения Дирака во внешнем магнитном поле⁵, $\omega_n = \sqrt{k_3^2 + 2eBn + m_e^2}$ – энергия электрона на n -м уровне Ландау, k_3 – кинетический импульс вдоль третьей оси, k_2 – обобщённый импульс, определяющий положение x_0 центра гауссова пакета на первой оси, $x_0 = -k_2/eB$, $f(\omega_n)$ – функция распределения электронов, учитывающая наличие плазмы. В системе покоя плазмы она имеет вид

$$f(\omega) = [e^{(\omega_n - \mu)/T} + 1]^{-1},$$

где μ и T – химический потенциал и температура плазмы соответственно.

3.8.2. Матрица плотности плазменного электрона с фиксированным номером уровня Ландау

При исследовании квантовых процессов в замагниченной плазме иногда возникает необходимость в вычислении матрицы плотности плазменного электрона (3.251), просуммированной по всем квантовым состояниям, кроме номера уровня Ландау.

Подставляя в выражение (3.251) нормированные решения $\psi_e(x)$ уравнения Дирака во внешнем магнитном поле (см. формулы (1.2)–(1.8)), можно привести матрицу плотности к виду

$$R_n(x, x') = e^{-i\Phi(x', x)} \sum_s R_{n\parallel}(Z_{\parallel}) R_{n\perp}(Z_{\perp}), \quad (3.252)$$

где введена 4-координата $Z_\mu = x_\mu - x'_\mu$, а также следующие функции:

$$\Phi(x', x) = \frac{eB}{2} (x_1 + x'_1) (x_2 - x'_2), \quad (3.253)$$

⁵Мы проводим вычисления в калибровке $A^\mu = (0, 0, Bx, 0)$, магнитное поле направлено вдоль третьей оси $\mathbf{B} = (0, 0, B)$.

$$R_{n\parallel}(Z_{\parallel}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3}{\omega_n(\omega_n + m_e)} f(\omega_n) e^{-i(kZ)_{\parallel}},$$

$$R_{n\perp}(Z_{\perp}) = \frac{\sqrt{eB}}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi u_s(\xi) \bar{u}_s(\xi - \sqrt{eB}Z_1) e^{-i\sqrt{eB}(\sqrt{eB}Z_1Z_2/2 - \xi Z_2)}.$$

Функцию $R_{n\perp}(Z_{\perp})$ как функцию двух переменных Z_1, Z_2 можно разложить в интеграл Фурье:

$$R_{n\perp}(Z_{\perp}) = \int \frac{d^2k_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{i(kZ)_{\perp}} R_{n\perp}(k_{\perp}), \quad (3.254)$$

$$R_{n\perp}(k_{\perp}) = \int d^2z_{\perp} e^{-i(kZ)_{\perp}} R_{n\perp}(Z_{\perp}).$$

Выполняя интегрирование функции $R_{n\perp}(k_{\perp})$ по координатам Z_1, Z_2 и подставляя результат в (3.252), получаем

$$R_n(x, x') = \frac{e^{-i\Phi(x', x)}}{\sqrt{eB}(2\pi)^3} \int \frac{d^3k f(\omega_n)}{\omega_n(\omega_n + m_e)} e^{-i(kZ)} e^{2ik_1k_2/eB} \quad (3.255)$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-2ik_1\xi/\sqrt{eB}} \sum_s u_s(\xi) \bar{u}_s(\xi'),$$

где $\xi' = 2k_2/\sqrt{eB} - \xi$.

После несложных, хотя и несколько громоздких вычислений, с учётом суммирования по спиновым состояниям начального и конечного электронов, занимающих один и тот же уровень Ландау с номером n , произведение биспинорных амплитуд может быть приведено к виду

$$\sum_s u_s(\xi) \bar{u}_s(\xi') = (\omega_n + m_e) \times \quad (3.256)$$

$$\times [((k\gamma)_{\parallel} + m_e) (\Pi_+ V_{n-1}(\xi) V_{n-1}(\xi') + \Pi_- V_n(\xi) V_n(\xi')) - \sqrt{2eBn} (\Pi_+ \gamma_2 V_{n-1}(\xi) V_n(\xi') + \Pi_- \gamma_2 V_n(\xi) V_{n-1}(\xi'))].$$

Здесь $(k\gamma)_{\parallel} = (k\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}\gamma) = \omega_n\gamma_0 - k_3\gamma_3$, $\Pi_{\pm} = (1 \pm i\gamma_1\gamma_2)/2$ — проекционные операторы.

Интеграл по переменной ξ в выражении (3.255) может быть вычислен с помощью формулы

$$\begin{aligned} J_{n,n'} &= \frac{e^{iab/2}}{\sqrt{eB}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-ia\xi} V_n(\xi) V_{n'}(b - \xi) = \\ &= (-1)^{n'} e^{-i(n-n')\varphi} F_{n',n}(x), \end{aligned} \quad (3.257)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{a}{b}, \quad x = \frac{a^2 + b^2}{2}, \\ F_{n',n}(x) &= \sqrt{\frac{n'!}{n!}} x^{(n-n')/2} e^{-x/2} L_{n'}^{n-n'}(x), \end{aligned}$$

а обобщённые полиномы Чебышёва–Лагерра $L_k^s(x)$ определены стандартным образом:

$$L_k^s(x) = \frac{1}{k!} e^x x^{-s} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x} x^{k+s}) \quad (3.258)$$

с условием нормировки

$$\int_0^\infty e^{-u} u^s L_n^s(u) L_m^s(u) du = \frac{\Gamma(n+s+1)}{n!} \delta_{nm},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера.

Окончательно матрица плотности электрона в постоянном однородном магнитном поле записывается в виде трёхкратного интеграла, удобном для дальнейшего использования:

$$\begin{aligned} R_n(x, x') &= e^{-i\Phi(x', x)} (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} e^{-u} e^{-ik(x-x')} \times \\ &\times [((k\gamma)_\parallel + m_e)(L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + 2(k\gamma)_\perp L_{n-1}^1(2u)], \end{aligned} \quad (3.259)$$

где $u = k_\perp^2/eB$. Выражение (3.259) может применяться при исследовании квантовых процессов в плазме в присутствии магнитного поля произвольной напряжённости.

3.8.3. Дополнительная энергия нейтрино в замагниченной плазме

Пропагатор W -бозона $G_{\beta\alpha}^W(x', x)$ в общем случае может быть представлен в виде

$$G_{\beta\alpha}^W(x', x) = e^{i\Phi(x', x)} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x'-x)} G_{\beta\alpha}^W(q), \quad (3.260)$$

где $G_{\beta\alpha}^W(q)$ – фурье-образ трансляционно инвариантной части пропагатора W -бозона. Явный вид фазы определяется выбором потенциала, и в выбранной калибровке $A^\mu = (0, 0, Bx, 0)$ она описывается выражением (3.253).

После подстановки функции $R_n(x, x')$ (см. (3.259)) и пропагатора W -бозона (3.260) в выражение (3.250) и интегрирования по 4-координатам \mathcal{S} -матричный элемент процесса $\nu e^- \rightarrow \nu e^-$ может быть приведён к виду

$$\begin{aligned} S_{\nu e^- \rightarrow \nu e^-}^W &= \frac{g^2(2\pi)^4 \delta^4(p-p')}{8\sqrt{2EV}\sqrt{2E'V}} \sum_n (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} e^{-u} G_{\beta\alpha}^W(k-p) \times \\ &\quad \times \bar{U}(p) O_\alpha [(k\gamma)_\parallel (L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + \\ &\quad + 2(k\gamma)_\perp L_{n-1}^1(2u)] O_\beta U(p). \end{aligned} \quad (3.261)$$

В \mathcal{S} -матричном элементе выделилась четырёхмерная δ -функция, соответствующая закону сохранения энергии и импульса. Поэтому можно воспользоваться стандартной связью \mathcal{S} -матричного элемента и инвариантной амплитуды перехода

$$\mathcal{S}_{if} = \frac{i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(q-q')}{2\omega V} M_{if} \quad (3.262)$$

и выделить инвариантную амплитуду процесса рассеяния нейтрино на плазменных электронах в виде

$$\begin{aligned} M_{\nu e^- \rightarrow \nu e^-}^W &= -\frac{ig^2}{8} \sum_n (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} e^{-u} G_{\beta\alpha}^W(k-p) \times \\ &\quad \times \bar{U}(p) O_\alpha [(k\gamma)_\parallel (L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + \\ &\quad + 2(k\gamma)_\perp L_{n-1}^1(2u)] O_\beta U(p). \end{aligned} \quad (3.263)$$

Вычисление амплитуды $M_{\nu e^+ \rightarrow \nu e^+}^W$, соответствующей процессу рассеяния нейтрино на позитронах плазмы, полностью аналогичны вычислениям амплитуды $M_{\nu e^- \rightarrow \nu e^-}^W$. Как оказалось, в зарядово симметричной плазме результат для амплитуды перехода $M_{\nu e^+ \rightarrow \nu e^+}^W$ отличается от (3.263) общим знаком и заменой в аргументе пропагатора W -бозона $k_\mu \rightarrow -k_\mu$.

С учётом когерентного рассеяния на всех плазменных электронах и позитронах для амплитуды процесса рассеяния $\nu e \rightarrow \nu e$ в замагниченной плазме получаем

$$\begin{aligned}
 M_{\nu e \rightarrow \nu e}^W &= M_{\nu e^- \rightarrow \nu e^-}^W + M_{\nu e^+ \rightarrow \nu e^+}^W = -\frac{ig^2}{8} \sum_n (-1)^n \times \\
 &\times \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} e^{-u} (G_{\beta\alpha}^W(k-p) - G_{\beta\alpha}^W(-k-p)) \times \\
 &\times \bar{U}(p) O_\alpha [(k\gamma)_\parallel (L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + \\
 &\quad + 2(k\gamma)_\perp L_{n-1}^1(2u)] O_\beta U(p).
 \end{aligned} \tag{3.264}$$

Используя выражение для амплитуды (3.243), находим вклад плазменных электронов и позитронов в собственно-энергетический оператор нейтрино:

$$\begin{aligned}
 \Sigma^W(p) &= \frac{ig^2}{8} \sum_n (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} e^{-u} (G_{\beta\alpha}^W(k-p) - G_{\beta\alpha}^W(-k-p)) \times \\
 &\times O_\alpha [(k\gamma)_\parallel (L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + 2(k\gamma)_\perp L_{n-1}^1(2u)] O_\beta.
 \end{aligned} \tag{3.265}$$

Фурье-образ пропагатора W -бозона в унитарной калибровке имеет достаточно громоздкий вид. В рассматриваемых физических условиях, когда масса W -бозона является самым большим физическим параметром задачи, фурье-образ пропагатора может быть представлен в форме разложения по обратным степеням массы W -бозона:

$$G_{\beta\alpha}^W(q) \simeq \frac{ig_{\beta\alpha}}{m_W^2} - \frac{3eF_{\beta\alpha}}{2m_W^4} - \frac{iq_\beta q_\alpha}{m_W^4} + \frac{iq^2 g_{\beta\alpha}}{m_W^4} + O\left(\frac{1}{m_W^6}\right). \tag{3.266}$$

Здесь первое и второе слагаемые, не зависящие от импульса, соответствуют локальному пределу слабого взаимодействия. В зарядово симметричной плазме их вклад оказывается равным нулю [181], что явно видно из выражения (3.264). Третье и четвертое слагаемые учитывают нелокальность взаимодействия. Как показывает анализ, третье слагаемое в (3.266) даёт вклад только в коэффициенты $\mathcal{A}_{L,R}$ и, следовательно, не влияет на дополнительную энергию нейтрино.

Подставляя в (3.265) пропагатор W -бозона (3.266) и опуская в нем слабые, не дающие вклада в дополнительную энергию нейтрино, имеем

$$\begin{aligned} \Sigma^W(p) &= \frac{g^2 g_{\alpha\beta}}{2m_W^4} \sum_n (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{f(\omega_n)}{\omega_n} (pk) e^{-u} \times \\ &\times O_\alpha[(k\gamma)_\parallel (L_n(2u)\Pi_- - L_{n-1}(2u)\Pi_+) + 2(k\gamma)_\perp L_{n-1}^1(2u)] O_\beta. \end{aligned}$$

Переходя в этом выражении к интегрированию по переменной $u = k_\perp^2/eB$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d^3k = \pi eB \int_{-\infty}^{+\infty} dk_3 \int_0^{+\infty} du$$

и выполняя интегрирование по переменной u с использованием соотношений

$$\int_0^\infty du e^{-u} L_n(2u) = (-1)^n,$$

$$2u L_{n-1}^1(2u) = n (L_{n-1}(2u) - L_n(2u)),$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned} \Sigma^W(p) &= \frac{g^2 eB}{2\pi^2 m_W^4} \sum'_{n=0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3 f(\omega_n)}{\omega_n} \times \\ &\times \left\{ (p\gamma) eBn - (p\tilde{\varphi}\gamma) \left(\frac{(k\tilde{\varphi}p)}{\omega_n E} (k_3^2 - eBn) - \delta_{n0} \omega_n^2 \right) - \right. \\ &\left. - (u\gamma) \left(E (\omega_n^2 + eBn + \frac{p_3^2}{E^2} (k_3^2 - eBn)) - \delta_{n0} p_3 (k_3^2 + \omega_n^2) \right) \right\} \gamma_L. \end{aligned} \quad (3.267)$$

Здесь δ_{n0} – символ Кронекера, отличный от нуля только для основного уровня Ландау, сумма по уровням Ландау определена следующим образом:

$$\sum'_{n=0} F(n) = \frac{1}{2} F(n=0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n).$$

Окончательно находим вклад в дополнительную энергию нейтрино, обусловленный его рассеянием вперёд на электронах и позитронах замагниченной плазмы:

$$\mathcal{B}^W = -\frac{2\sqrt{2} G_F e B E}{\pi^2 m_W^2} \sum_{n=0}' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3 f(\omega_n)}{\omega_n} \times \quad (3.268)$$

$$\times (\omega_n^2 + e B n + \cos^2 \phi (k_3^2 - e B n) - \delta_{n0} \cos \phi (k_3^2 + \omega_n^2)),$$

где ϕ – угол между направлением магнитного поля и вектором импульса нейтрино.

Рассмотрим некоторые предельные случаи, которые могут представлять интерес с точки зрения возможных астрофизических приложений.

3.8.4. Дополнительная энергия нейтрино в предельных случаях

Общее выражение для дополнительной энергии нейтрино в зарядово симметричной замагниченной плазме получается суммированием вкладов от процессов, обусловленных обменом Z -бозоном и W -бозоном, и может быть представлено в виде однократного интеграла

$$\frac{\Delta E}{|\mathbf{p}|} = -\frac{7\sqrt{2} G_F \pi^2 T^4}{45 m_Z^2} - \frac{2\sqrt{2} G_F e B}{\pi^2 m_W^2} \sum_{n=0}' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_3 f(\omega_n)}{\omega_n} \times \quad (3.269)$$

$$\times (\omega_n^2 + e B n + \cos^2 \phi (k_3^2 - e B n) - \delta_{n0} \cos \phi (k_3^2 + \omega_n^2)).$$

Следует отметить, что выражение (3.269) описывает вклад замагниченной плазмы в дополнительную энергию нейтрино. Для того чтобы получить полное выражение для энергии нейтрино в замагниченной плазме, необходимо к результату (3.269) прибавить чисто полевой вклад, который был вычислен в работе [153].

Интеграл в выражении (3.269) может быть вычислен в некоторых предельных случаях, рассмотренных ниже.

- Предел слабого магнитного поля, когда напряжённость магнитного поля является самым малым физическим параметром задачи:

$$T^2 \gg m_e^2 \gg e B. \quad (3.270)$$

Дополнительная энергия нейтрино в такой слабо замагниченной плазме может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{|\mathbf{p}|} = & \frac{\sqrt{2} G_F}{3m_W^2} \left\{ -\frac{7\pi^2 T^4}{15} \left(2 + \frac{m_W^2}{m_Z^2} \right) + T^2 eB \cos \phi + \right. \\ & \left. + \frac{(eB)^2}{2\pi^2} \left[\sin^2 \phi \left(\ln \frac{T^2}{m_e^2} + 0.635 \right) - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.271)$$

Выражение (3.271) содержит логарифмический фактор с массой электрона m_e , однако в рассматриваемых физических условиях (3.270) масса электрона не является самым малым параметром, следовательно, нельзя исследовать дополнительную энергию нейтрино (3.271) в пределе $m_e \rightarrow 0$.

- Предел относительно слабого магнитного поля, когда напряжённость поля является малой на масштабе физических параметров среды, но в то же время существенно превышает критическое значение поля для электрона:

$$T^2 \gg eB \gg m_e^2. \quad (3.272)$$

Такая физическая ситуация могла бы реализоваться, например, в ядре сверхновой после коллапса, где температура плазмы $T \sim 70 m_e$. Подставляя это значение в условия (3.272), получаем

$$\frac{T^2}{m_e^2} \sim 5 \cdot 10^3 \gg \frac{B}{B_e} \gg 1. \quad (3.273)$$

Видно, что даже магнитные поля с напряжённостью до $B \sim 10^{15} - 10^{16}$ Гс удовлетворяют условию (3.272) и, следовательно, могут рассматриваться как “относительно слабые”.

В физических условиях (3.272) возбуждается большое число уровней Ландау. В этом пределе для дополнительной энергии нейтрино найдём

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{|\mathbf{p}|} = & \frac{\sqrt{2} G_F}{3m_W^2} \left\{ -\frac{7\pi^2 T^4}{15} \left(2 + \frac{m_W^2}{m_Z^2} \right) + T^2 eB \cos \phi + \right. \\ & \left. + \frac{(eB)^2}{2\pi^2} \left[\sin^2 \phi \left(\ln \frac{T^2}{eB} + 2.93 \right) - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.274)$$

Как видно из выражения (3.274), в физических условиях (3.272) дополнительная энергия нейтрино не содержит инфракрасной расходимости в пределе $m_e \rightarrow 0$, в отличие от результата работы [188].

- Предел сильного магнитного поля, соответствующий физической ситуации, когда из всех физических параметров, характеризующих замагниченную плазму, самым большим параметром является напряжённость магнитного поля

$$eB \gg T^2, m_e^2. \quad (3.275)$$

В условиях (3.275) плазменные электроны и позитроны заселяют преимущественно основной уровень Ландау.

В пределе сильно замагниченной плазмы для дополнительной энергии нейтрино имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta E}{|\mathbf{p}|} = & -\frac{\sqrt{2} G_F}{3m_W^2} \left[\frac{7\pi^2 T^4 m_W^2}{15 m_Z^2} + \frac{T^2 eB}{2} (1 - \cos \phi)^2 + \right. \\ & \left. + 3(eB)^2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{3/2} \left(\frac{T^2}{2eB}\right)^{1/4} (3 - \cos^2 \phi) e^{-\sqrt{2eB}/T} \right]. \end{aligned} \quad (3.276)$$

Здесь второе слагаемое обусловлено вкладом основного уровня Ландау, третье слагаемое, содержащее экспоненциальное подавление, — вкладом первого уровня Ландау.

3.8.5. Магнитный момент нейтрино в замагниченной плазме

Как уже отмечалось, ценность вычисления собственно-энергетического оператора состоит ещё в том, что из него можно извлечь аномальный магнитный момент нейтрино. Попытка вычисления магнитного момента нейтрино в замагниченной плазме была предпринята в работе [212], однако полученные авторами результаты вызывают сомнение, поскольку в них магнитный момент нейтрино либо имеет гигантское усиление фактором $1/m_\nu$, либо совсем не зависит от массы нейтрино. Как было отмечено в работе [187], результаты работы [212] скорее запутывают ситуацию с магнитным моментом нейтрино, чем проясняют её. Таким образом, было необходимо независимое вычисление магнитного момента нейтрино в замагниченной плазме. Такое вычисление было проведено в работе [191]. Здесь мы воспроизводим общую схему вычисления.

Найдём изменение энергии нейтрино за счёт наличия у него магнитного момента μ_ν . Поправка к энергии фермиона, обладающего магнитным моментом и находящегося во внешнем магнитном поле, может быть найдена из лагранжиана

$$\Delta L_{int} = -\frac{i\mu_\nu}{2} (\bar{\Psi} \sigma_{\mu\nu} \Psi) F^{\mu\nu}, \quad (3.277)$$

где Ψ – поле фермиона, $\sigma_{\mu\nu} = (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)/2$.

Подставляя этот лагранжиан в определение дополнительной энергии

$$\Delta E^{(\mu)} = - \int dV < \Delta L_{int} >, \quad (3.278)$$

получаем

$$\Delta E^{(\mu)} = -\mu \left[(\mathbf{s} \mathbf{B}_t) + \frac{m_\nu}{E} (\mathbf{s} \mathbf{B}_l) \right], \quad (3.279)$$

где \mathbf{s} – удвоенный вектор среднего спина фермиона, $\mathbf{B}_{t,\ell}$ – поперечная и продольная составляющие магнитного поля \mathbf{B} по отношению к импульсу фермиона, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_\ell$.

Сравнивая (3.279) с (3.245), видим, что аномальный магнитный момент нейтрино выражается через коэффициенты собственно-энергетического оператора (3.92) следующим образом:

$$\mu_{\nu_\ell} = \frac{e m_\nu}{2} (\mathcal{C}_L - \mathcal{C}_R + 4 \mathcal{K}_2). \quad (3.280)$$

Некорректность определения магнитного момента нейтрино в работе [212], по нашему мнению, состояла в предположении авторов, что вся дополнительная энергия нейтрино в замагниченной плазме, связанная с зависимостью от спина и магнитного поля, определяет магнитный момент нейтрино. Однако реально, как мы видим, только одна структура в дополнительной энергии нейтрино соответствует магнитному моменту.

Таким образом, для определения магнитного момента нейтрино в замагниченной плазме достаточно найти коэффициенты $\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ и \mathcal{K}_2 . Далее мы вычисляем интересующие нас слагаемые собственно-энергетического оператора нейтрино $\Sigma(p)$, которые дают вклад в магнитный момент нейтрино. В замагниченной плазме магнитный момент нейтрино содержит два вклада: чисто полевой вклад и вклад плазмы.

Полевой вклад в магнитный момент нейтрино вычислялся ранее во многих работах (см., например, [158, 185, 190]). Выражение для магнитного момента нейтрино в широком диапазоне энергий нейтрино и напряжённости

магнитного поля, $m_l^2/m_W^2 \ll (eB)^2 p_\perp^2/m_W^6 \ll 1$, может быть извлечено из работы [158]:

$$\mu_{\nu_l} \simeq \mu_{\nu_l}^0 \left\{ 1 + \frac{4\chi^2}{3} \left(\ln \frac{1}{\chi} - \frac{17}{3} + \ln 3 + 2\gamma_E + i\pi \right) \right\}. \quad (3.281)$$

Здесь $\mu_{\nu_l}^0$ – магнитный момент нейтрино в вакууме [203, 204]

$$\mu_{\nu_l}^0 = \frac{3eG_F m_{\nu_l}}{8\sqrt{2}\pi^2}, \quad (3.282)$$

m_{ν_l} – масса нейтрино, p_\perp – поперечный по отношению к магнитному полю импульс нейтрино, $\chi^2 = (eB)^2 p_\perp^2/m_W^6$, $\lambda = m_l^2/m_W^2$, $\gamma_E = 0,577\dots$ – постоянная Эйлера. Мнимая часть магнитного момента (3.281) соответствует неустойчивости нейтрино во внешнем электромагнитном поле по отношению к распаду $\nu \rightarrow \ell W$.

Для вычисления собственно-энергетического оператора $\Sigma(p)$ достаточно найти амплитуду процесса рассеяния нейтрино вперёд в замагниченной плазме (3.243). В реальных астрофизических условиях основной вклад в ту часть амплитуды, которая обуславливает магнитный момент нейтрино, даёт рассеяние нейтрино на плазменных электронах и позитронах. Амплитуда процесса рассеяния $\nu \rightarrow \nu$ в замагниченной плазме, а значит, и собственно-энергетический оператор нейтрино могут быть представлены в виде суммы трёх слагаемых, соответствующих трём диаграммам на рис. 3.15:

$$\Sigma(p) = \Sigma^W(p) + \Sigma^\Phi(p) + \Sigma^Z(p). \quad (3.283)$$

Опуская детали несложных, хотя и несколько громоздких вычислений, для вклада в $\Sigma(p)$, обусловленного процессом обмена W -бозоном, получаем

$$\begin{aligned} \Sigma^W(p) = & \frac{ig^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-z}}{\omega_n} \times \\ & \times \left(f(\omega_n) G_{\beta\alpha}^W(p-k) - \tilde{f}(\omega_n) G_{\beta\alpha}^W(p+k) \right) \times \\ & \times \gamma_\alpha [(k\gamma)_\parallel (L_n(2z) \Pi_- - L_{n-1}(2z) \Pi_+) + 2(k\gamma)_\perp L_{n-1}^1(2z)] \gamma_\beta \gamma_L, \end{aligned} \quad (3.284)$$

где g – константа электрослабого взаимодействия в стандартной модели, $z = k_\perp^2/\beta$, $\beta = eB$, $(k\gamma)_\parallel = (k\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}\gamma) = \omega_n\gamma_0 - k_3\gamma_3$, $(k\gamma)_\perp = (k\varphi\varphi\gamma) = k_1\gamma_1 + k_2\gamma_2$, $\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$ и $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\varphi_{\rho\sigma}/2$ – безразмерные тензор и дуальный тензор внешнего магнитного поля соответственно, $\Pi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm i\gamma_1\gamma_2)$ – проекционные операторы, $G_{\beta\alpha}^W(q)$ – фурье-образ трансляционно инвариантной

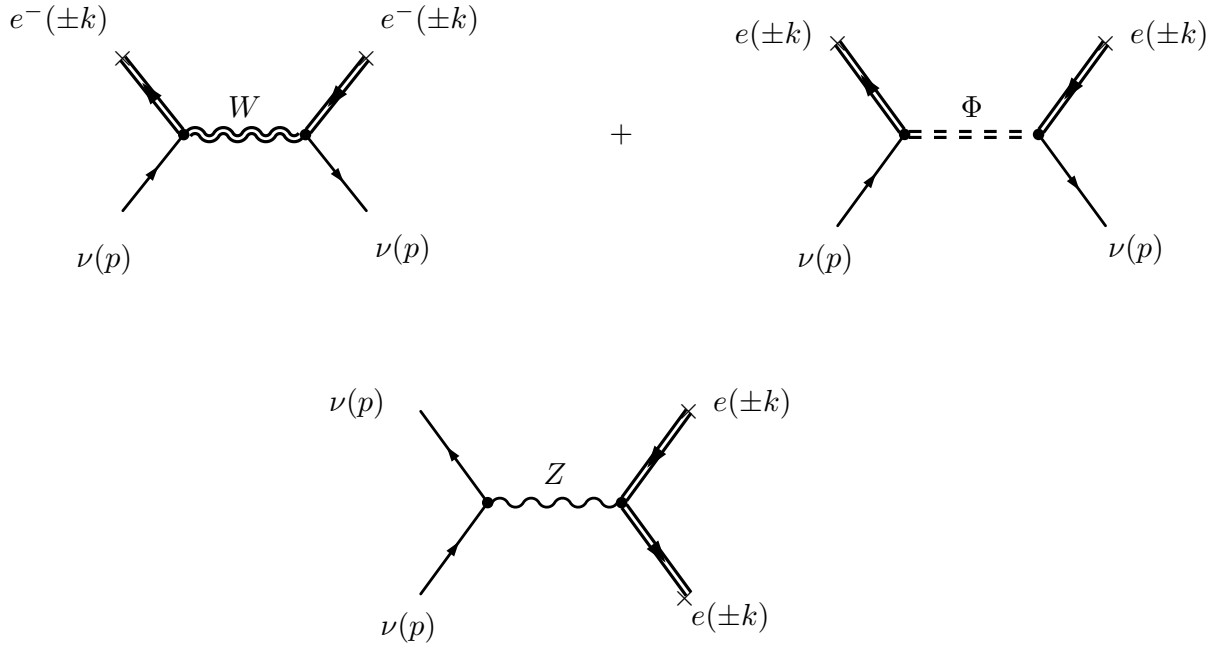


Рис. 3.15. Диаграммы Фейнмана, обуславливающие вклад замагниченной плазмы в амплитуду процесса рассеяния нейтрино вперёд: двойные линии соответствуют заряженным частицам

части пропагатора W -бозона, $f(\omega_n)$ и $\tilde{f}(\omega_n)$ – функции распределения электронов и позитронов. В системе покоя плазмы они имеют вид

$$f(\omega_n) = [e^{(\omega_n - \mu)/T} + 1]^{-1}, \quad \tilde{f}(\omega_n) = [e^{(\omega_n + \mu)/T} + 1]^{-1},$$

где μ и T – химический потенциал и температура плазмы соответственно, ω_n – энергия электрона (позитрона) на n -м уровне Ландау.

Аналогично для вклада, обусловленного процессом рассеяния нейтрино с обменом заряженным скалярным Φ -бозоном, находим

$$\begin{aligned} \Sigma^\Phi(p) = & -\frac{i g^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-z}}{\omega_n} \times \\ & \times \left(f(\omega_n) G^\Phi(p - k) - \tilde{f}(\omega_n) G^\Phi(p + k) \right) \times \\ & \times \left\{ \frac{m_e^2 m_\nu}{m_W^2} (L_n(2z) \Pi_- - L_{n-1}(2z) \Pi_+) - \right. \\ & - [(k\gamma)_\parallel (L_n(2z) \Pi_- - L_{n-1}(2z) \Pi_+) + \\ & + 2(k\gamma)_\perp L_{n-1}^1(2z)] \left. \left(\frac{m_e^2}{m_W^2} \gamma_L - \frac{m_\nu^2}{m_W^2} \gamma_R \right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.285)$$

Отметим, что выписанные вклады соответствуют только электронному типу нейтрино, для других типов нейтрино ν_μ, ν_τ вклад с обменами заряженными бозонами равен нулю: $\Sigma^W(p) = \Sigma^\Phi(p) = 0$.

Далее будем рассматривать типичную астрофизическую ситуацию, когда масса W -бозона является самым большим параметром задачи. Это означает, что параметры, характеризующие замагниченную плазму, удовлетворяют условию

$$m_e^2, \mu^2, T^2, eB \ll m_W^2. \quad (3.286)$$

Если плазма зарядово несимметричная, то в пропагаторах W и Φ -бозона достаточно удержать лидирующий вклад в разложении по обратным степеням m_W^2 :

$$G_{\beta\alpha}^W \simeq \frac{i g_{\beta\alpha}}{m_W^2}, \quad G^\Phi \simeq -\frac{i}{m_W^2}.$$

После несложных вычислений для вкладов в собственно-энергетический оператор находим

$$\Sigma^W(p) \simeq \sqrt{2} G_F \left(\dots - \frac{n_e^0 - \tilde{n}_e^0}{EB} (p \tilde{F} \gamma) \right) \gamma_L, \quad (3.287)$$

$$\begin{aligned} \Sigma^\Phi(p) \simeq & \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \dots + \frac{n_e^0 - \tilde{n}_e^0}{EB} (p \tilde{F} \gamma) \left(\frac{m_e^2}{m_W^2} \gamma_L + \frac{m_\nu^2}{m_W^2} \gamma_R \right) - \right. \\ & \left. - \frac{ie}{4\pi^2} m_\nu \frac{m_e^2}{m_W^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk}{\omega_0} (f(\omega_0) - \tilde{f}(\omega_0)) (\gamma F \gamma) \right\}, \end{aligned} \quad (3.288)$$

где многоточие соответствует слагаемым, не дающим вклада в магнитный момент нейтрино, ω_0 – энергия электрона (позитрона) на основном ($n = 0$) уровне Ландау, n_e^0, \tilde{n}_e^0 – плотность электронов и позитронов соответственно на основном уровне Ландау, причём их разность определяется следующим интегралом:

$$n_e^0 - \tilde{n}_e^0 = \frac{eB}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} dk (f(\omega_0) - \tilde{f}(\omega_0)). \quad (3.289)$$

Сравнивая результаты (3.287) и (3.288) с параметризацией (6.42), получаем искомые коэффициенты $\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ и \mathcal{K}_2 :

$$\mathcal{C}_L^W = -\frac{e G_F}{\sqrt{2} \pi^2 E} \int_0^{+\infty} dk (f(\omega_0) - \tilde{f}(\omega_0)), \quad (3.290)$$

$$\mathcal{C}_R^W = \mathcal{K}_2^W = 0, \quad (3.291)$$

$$\mathcal{C}_L^\Phi = -\frac{m_e^2}{2m_W^2} \mathcal{C}_L^W, \quad \mathcal{C}_R^\Phi = -\frac{m_\nu^2}{2m_W^2} \mathcal{C}_L^W, \quad (3.292)$$

$$\mathcal{K}_2^\Phi = -\frac{e G_F}{4\sqrt{2}\pi^2} \frac{m_e^2}{m_W^2} \int_0^{+\infty} \frac{dk}{\omega_0} (f(\omega_0) - \tilde{f}(\omega_0)). \quad (3.293)$$

Как уже отмечалось выше, вклады, обусловленные обменом заряженным скаляром, подавлены малыми факторами m_ν^2/m_W^2 и m_e^2/m_W^2 .

Интересующая нас часть Σ^Z , происходящая от рассеяния нейтрино на заряженных фермионах плазмы с обменом Z -бозоном, легко вычисляется:

$$\Sigma_f^Z = \sqrt{2} G_F \left(\cdots - \frac{T_3^f}{BE} (n_f^0 - \tilde{n}_f^0) (p \tilde{F} \gamma) \right) \gamma_L. \quad (3.294)$$

Здесь n_f^0, \tilde{n}_f^0 – плотность заряженных фермионов и антифермионов на основном уровне Ландау соответственно, T_3^f – третья компонента изоспина заряженного фермиона. Многоточие соответствует слагаемым, не дающим вклада в магнитный момент нейтрино. Учитывая, что наибольшая концентрация на основном уровне Ландау соответствует электронам и позитронам, из выражения (3.294) находим искомые коэффициенты $\mathcal{C}_L, \mathcal{C}_R$ и \mathcal{K}_2 :

$$\mathcal{C}_L^Z = -\frac{e G_F}{2\sqrt{2} \pi^2 E} \int_0^{+\infty} dk (f(\omega_0) - \tilde{f}(\omega_0)), \quad (3.295)$$

$$\mathcal{C}_R^Z = \mathcal{K}_2^Z = 0. \quad (3.296)$$

Таким образом, магнитный момент нейтрино, индуцированный зарядово несимметричной плазмой, определяется в основном коэффициентами \mathcal{C}_L^Z и \mathcal{C}_L^W , к которым следует добавить чисто полевой вклад (3.281). Окончательно

для \mathcal{C}_L получаем

$$\mathcal{C}_L \simeq \mathcal{C}_L^W + \mathcal{C}_L^Z \simeq \frac{3eG_F}{4\sqrt{2}\pi^2} \left(1 \mp \frac{2}{3E} \int_0^{+\infty} dk (f(\omega_0) - \tilde{f}(\omega_0)) \right). \quad (3.297)$$

Верхний знак в этом выражении соответствует электронному нейтрино ν_e , нижний знак – мюонному и тау нейтрино, ν_μ, ν_τ . Здесь мы отбросили вклады, пропорциональные $1/m_W^4, 1/m_W^6$ и т. д.

Интеграл в выражении (3.297) легко вычисляется в ультрарелятивистской плазме. В этом случае для магнитного момента получаем простое выражение:

$$\mu_\nu = \frac{\mathcal{C}_L m_\nu}{2} \simeq \frac{3e G_F m_\nu}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(1 \mp \frac{2}{3} \frac{\mu}{E} \right). \quad (3.298)$$

Здесь μ – химический потенциал электронов ультрарелятивистской плазмы. Следует отметить, что в слабо замагниченной плазме он имеет вид

$$\mu \simeq (3\pi^2 (n_e - \tilde{n}_e))^{1/3},$$

в то время как в сильно замагниченной плазме, когда из двух компонент активной среды доминирующим является магнитное поле и электроны плазмы заселяют преимущественно основной уровень Ландау, химический потенциал равен

$$\mu \simeq 2\pi^2 \frac{(n_e - \tilde{n}_e)}{eB},$$

где n_e и \tilde{n}_e – полная концентрация электронов и позитронов соответственно.

Еще одна ситуация, когда можно провести аналитические вычисления магнитного момента нейтрино до конца – это физические условия зарядово симметричной электрон-позитронной плазмы. В этом случае вклад от диаграмм с обменом Z -бозоном исчезает, следовательно, нейтрино ν_μ и ν_τ не имеют дополнительного магнитного момента, индуцированного замагниченной плазмой.

Для электронного нейтрино в зарядово симметричной e^-e^+ плазме магнитный момент определяется выражением

$$\mu_{\nu_e} \simeq \frac{3e G_F m_\nu}{8\sqrt{2}\pi^2} \left(1 + \frac{4\pi^2}{9} \frac{T^2}{m_W^2} \right). \quad (3.299)$$

Как можно видеть, в реальных астрофизических условиях, когда $T \ll m_W$, плазменный вклад в магнитный момент нейтрино оказывается подавленным.

Таким образом, мы показали, что присутствие плазмы не приводит к усилению магнитного момента, что противоречит утверждению, сделанному ранее [212]. Более того, плазменный вклад в магнитный момент оказывается подавленным массой нейтрино m_ν , а в зарядово симметричной плазме – еще и дополнительным фактором $T^2/m_W^2 \ll 1$.

3.9. Дисперсионные свойства электрона в аксионной среде

Одним из актуальных направлений современной физики являются исследования физики частиц за пределами стандартной модели. Особое внимание уделяется лёгким и даже строго безмассовым голдстоуновским и псевдо-голдстоуновским бозонам, возникающим при спонтанном нарушении симметрии на энергетическом масштабе, много большем электрослабого. Поскольку такие частицы очень слабо взаимодействуют с веществом, изучение физических следствий существования этих частиц представляет интерес с точки зрения возможных астрофизических приложений. Например, одной из загадок современной космологии является тёмная холодная материя, природа которой до сих пор остается до конца неясной. В качестве одного из наиболее вероятных кандидатов на роль холодной тёмной материи широко обсуждается аксион – псевдоголдстоуновский бозон, чьё появление связано с нарушением симметрии Печчеи–Куин [213–216]. Существующие астрофизические ограничения определяют интервал массы аксиона

$$10^{-6} \text{ эВ} < m_a < 10^{-2} \text{ эВ},$$

а его время жизни в вакууме относительно основного канала распада на пару фотонов [217]

$$\tau_{a \rightarrow 2\gamma} \sim 10^{50} \text{ с} \left(\frac{F_a}{10^{10} \text{ ГэВ}} \right)^6 \left(\frac{\omega}{1 \text{ МэВ}} \right)$$

значительно превышает возраст Вселенной $\tau_u \sim 10^{18}$ с. Здесь ω – энергия аксиона и F_a – масштаб нарушения симметрии Печчеи–Куин.

Согласно моделям, в которых аксионы являются основной частью холодной тёмной материи, в космическом пространстве могут формироваться области с достаточно высокой плотностью аксионов (аксионные звёзды) [218, 219]. При прохождении сквозь такую аксионную среду космических лучей высоких энергий частицы взаимодействуют с аксионной средой

и в принципе могут изменять свои дисперсионные свойства. В частности, изменение закона дисперсии фермионов в холодной аксионной среде исследовалось в работе [220]. Однако, как будет показано ниже, в силу того что автор [220] некорректно использовал юкавский лагранжиан взаимодействия аксиона с фермионами, полученный им результат оказался сильно завышенным. В работах [221, 222] было пересмотрено влияние холодной аксионной среды на дисперсию фермиона, обусловленную рассеянием фермиона вперёд на аксионах среды.

В существующих аксионных моделях взаимодействие аксиона с фермионом f описывается лагранжианом вида [1]:

$$L_{af} = \frac{c_a}{F_a} (\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \psi) \partial_\mu a, \quad (3.300)$$

где c_a – безразмерный параметр порядка единицы, зависящий от конкретной модели; ψ и a – квантованные фермионное и аксионное поля.

Следует подчеркнуть, что, поскольку диаграммы рассматриваемого процесса рассеяния содержат две аксионные линии, при вычислениях необходимо использовать именно лагранжиан с производной (3.300), а не лагранжиан с псевдоскалярной юкавской связью:

$$L_{af} = \frac{-2ic_a m_f}{F_a} (\bar{\psi} \gamma_5 \psi) a, \quad (3.301)$$

впервые это было отмечено в работе [223].

Для того чтобы исследовать влияние аксионной среды на дисперсию фермионов, необходимо рассмотреть процесс рассеяния фермиона вперёд на аксионах среды, амплитуда которого связана с массовым оператором $\Sigma(p)$ известным соотношением:

$$M = -\bar{u}(p)\Sigma(p)u(p). \quad (3.302)$$

Используя лагранжиан (3.300), для амплитуды процесса, соответствующей левой диаграмме на рис. 3.16, получаем следующее выражение:

$$M^{(1)} = \frac{ic_a^2}{2F_a^2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \omega} f(\omega) (\bar{u}(p) [(q\gamma)\gamma_5 S(p+q)(q\gamma)\gamma_5] u(p)). \quad (3.303)$$

Здесь $q^\mu = (\omega, \mathbf{q})$ и $p^\mu = (E, \mathbf{p})$ – 4-векторы импульсов аксиона и фермиона соответственно, $f(\omega)$ – функция распределения для аксионов с энергией ω , $f(\omega) = (e^{\omega/T} - 1)^{-1}$, $u(p)$ – биспинорная амплитуда фермиона, $S(p)$ – фурье-образ пропагатора фермиона с массой m_f :

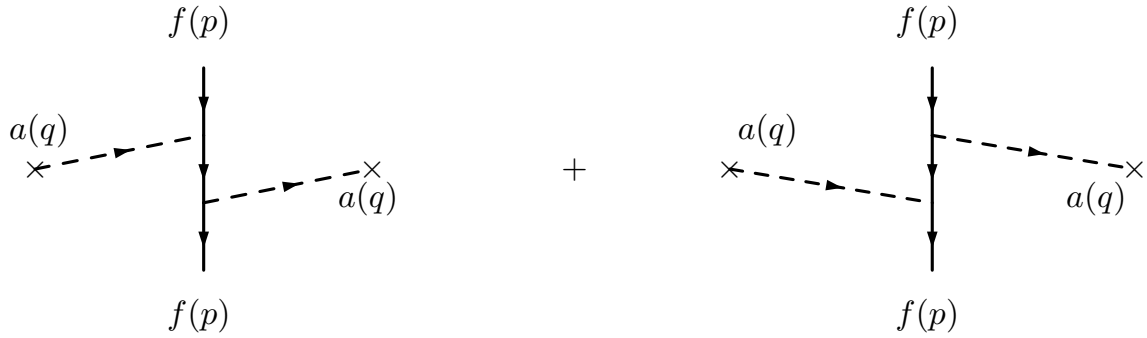


Рис. 3.16. Диаграммы Фейнмана, изображающие процесс рассеяния вперёд фермиона на аксионах среды

$$S(p) = i \frac{(p\gamma) + m_f}{p^2 - m_f^2}.$$

Амплитуда процесса рассеяния, соответствующая правой диаграмме на рис. 3.16, получается из (3.303) заменой $q \rightarrow -q$. После преобразований амплитуда процесса $f + a \rightarrow f + a$ с учётом когерентного рассеяния на всех аксионах среды приводится к виду

$$M = \frac{c_a^2}{2F_a^2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \omega} f(\omega) \times \quad (3.304)$$

$$\times \bar{u}(p) \left(\frac{-(p^2 - m_f^2)(q\gamma) - ((p\gamma) + m_f)q^2}{(p+q)^2 - m_f^2} + (q \rightarrow -q) \right) u(p).$$

Используя связь амплитуды рассеяния вперёд с массовым оператором (3.302), из выражения (3.304) выделяем массовый оператор в виде

$$\Sigma(p) = \frac{-c_a^2}{2F_a^2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 \omega} f(\omega) \left(\frac{-(p^2 - m_f^2)(q\gamma) - ((p\gamma) + m_f)q^2}{(p+q)^2 - m_f^2} + q \rightarrow -q \right). \quad (3.305)$$

Согласно современным астрофизическим моделям, звёздный аксионный газ представляет собой холодную нерелятивистскую среду, что позволяет использовать приближение $q^\mu \simeq (m_a, \mathbf{q})$, $|\mathbf{q}| \ll m_a$. При таких условиях выражение для массового оператора (3.305) принимает более простой вид:

$$\Sigma(p) = \frac{-c_a^2 n_a}{4F_a^2 E^2 m_a} \{ 2E(u\gamma) \delta m_f^2 - ((p\gamma) + m_f)(\delta m_f^2 + m_a^2) \}, \quad (3.306)$$

где n_a – концентрация аксионного газа, u^μ – 4-вектор среды, который в системе покоя плазмы имеет вид $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$, δm_f^2 – отклонение закона дисперсии фермиона f от вакуумного, $p^2 - m_f^2 = \delta m_f^2$.

Таким образом, массовый оператор может быть представлен в виде

$$\Sigma(p) = Am_f + B(p\gamma) - C(u\gamma), \quad (3.307)$$

$$A = B = \frac{n_a(\delta m_f^2 + m_a^2)}{4F^2 E^2 m_a}, \quad C = \frac{n_a \delta m_f^2}{2F^2 E m_a}.$$

Закон дисперсии следует из равенства нулю определителя

$$\det((p\gamma) - m_f - \Sigma(p)) = 0.$$

Решая это уравнение, находим поправку к энергии фермиона в аксионной среде:

$$\Delta E_{f,\tilde{f}} = \frac{m_f^2(A + B)}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_f^2}} \mp C. \quad (3.308)$$

Уравнение (3.308) позволяет найти отклонение закона дисперсии фермиона от вакуумного:

$$\delta m_f^2 \left(1 - \zeta \left(\frac{m_f^2}{E^2} \pm 1 \right) \right) = \zeta \frac{m_a^2 m_f^2}{E^2}, \quad \zeta = \frac{n_a}{F_a^2 m_a}. \quad (3.309)$$

Учитывая, что при типичных значениях концентрации аксионного газа [220] параметр ζ экстремально мал:

$$\zeta \sim 10^{-36} \left(\frac{10^{10} \text{ГэВ}}{F_a} \right)^2 \left(\frac{n_a}{10^{13} \text{см}^{-3}} \right) \left(\frac{10^{-3} \text{эВ}}{m_a} \right),$$

для δm_f^2 получаем следующее выражение:

$$\delta m_f^2 \simeq \zeta \frac{m_a^2 m_f^2}{E^2} = \frac{n_a m_a m_f^2}{E^2 F_a^2}. \quad (3.310)$$

Это выражение следует сравнить с результатом, полученным в работе Саху [220]:

$$(\delta m_f^2)^{\text{Sahu}} \simeq \frac{n_a m_f^2}{2m_a F_a^2}. \quad (3.311)$$

Сравнение (3.310) с (3.311)

$$R = \frac{\delta m_f^2}{(\delta m_f^2)_{\text{Sahu}}} = \frac{2m_a^2}{E^2} \ll 1$$

показывает, что результат, представленный в работе [220], сильно завышен. Как уже упоминалось ранее, такое завышение результата есть следствие использования для описания аксион-фермионного взаимодействия лагранжиана с юкавской связью. Данный лагранжиан может применяться только при исследовании процессов с участием одного аксиона [223], в то время как изменение закона дисперсии фермиона фактически обусловлено процессом рассеяния фермиона вперёд на аксионах среды, то есть процессом с участием двух аксионов. Наши расчёты показали, что использование юкавского лагранжиана приводит к существенному завышению результатов. В реальных астрофизических условиях влияние аксионной среды на дисперсию фермионов оказывается пренебрежимо мало.

Глава 4

Электромагнитные взаимодействия во внешней активной среде

4.1. Распад фотона на e^-e^+ пару в сильном магнитном поле

4.1.1. Прямой расчёт на основе решений уравнения Дирака

Распад фотона на электрон-позитронную пару $\gamma(q) \rightarrow e^-(p') + e^+(p)$ в магнитном поле описывается лагранжианом электромагнитного взаимодействия

$$\mathcal{L}_{em} = e (\bar{\Psi}(x)(A(x)\gamma)\Psi(x)) \quad (4.1)$$

и изображается диаграммой, представленной на рис. 4.1.

В первом приближении теории возмущений по взаимодействию (4.1) получаем для матричного элемента \mathcal{S}_{if} следующее выражение:

$$\mathcal{S}_{if} = ie \langle f | N \int (\bar{\Psi}(A\gamma)\Psi) d^4x | i \rangle, \quad (4.2)$$

где A_α – оператор электромагнитного поля

$$A_\alpha = \sum_{\mathbf{q}, \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\omega V}} \left(c_\lambda \varepsilon_\alpha^{(\lambda)} e^{-iqx} + c_\lambda^\dagger \varepsilon_\alpha^{(\lambda)*} e^{iqx} \right),$$

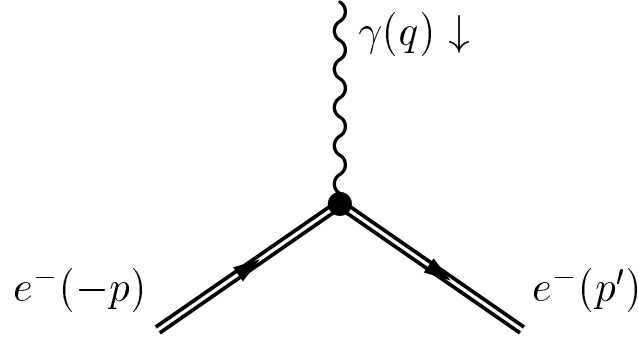


Рис. 4.1. Диаграмма, описывающая процесс $\gamma \rightarrow e^-e^+$ в магнитном поле: двойная линия показывает, что в волновых функциях электрона и позитрона внешнее поле учтено точно

Ψ – оператор электрон-позитронного поля

$$\Psi = \sum_{\mathbf{p}, s, n} \left(a_{p,s} \Psi^{(+)} + b_{p,s}^+ \Psi^{(-)} \right),$$

$\Psi^{(+)}$ и $\Psi^{(-)}$ – нормированные решения уравнения Дирака в магнитном поле с положительной и отрицательной энергией соответственно (см. (1.2)). В сильном магнитном поле электрон и позитрон могут рождаться только в состояниях, соответствующих основному уровню Ландау (1.9) и описываемых волновыми функциями:

$$\Psi^{(+)} = \frac{(eB/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2L_y L_z E'(E' + m_e)}} u_{p'} e^{-\xi'^2/2} e^{-iE't} e^{i(p'_y y + p'_z z)}, \quad (4.3)$$

$$\Psi^{(-)} = \frac{(eB/\pi)^{1/4}}{\sqrt{2L_y L_z E(E - m_e)}} u_{-p} e^{-\xi^2/2} e^{iEt} e^{-i(p_y y + p_z z)}, \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{p_z^2 + m_e^2}, \quad E' = \sqrt{p_z'^2 + m_e^2}, \\ \xi &= \sqrt{eB} \left(x - \frac{p_y}{eB} \right), \quad \xi' = \sqrt{eB} \left(x + \frac{p'_y}{eB} \right), \\ u_{p'} &= \begin{pmatrix} 0 \\ E' + m_e \\ 0 \\ -p'_z \end{pmatrix}, \quad u_{-p} = \begin{pmatrix} 0 \\ E - m_e \\ 0 \\ -p_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Подставляя волновые функции конечного состояния (4.3), (4.4) в выражение (4.2) и интегрируя по $dt dy dz$, получаем

$$\mathcal{S}_{if} = \frac{ie(2\pi)^3 \delta^3(p + p' - q)}{2L_y L_z \sqrt{2\omega V E E'}} (\bar{u}_{p'}(\varepsilon^{(\lambda)} \gamma) u_{-p}) \int e^{iq_x x} e^{-\xi^2/2} e^{-\xi'^2/2} dx, \quad (4.6)$$

где $\delta^3(p+p'-q) = \delta(p_y+p'_y-q_y)\delta(p_z+p'_z-q_z)\delta(E+E'-\omega)$. Интегрирование по x удобно проводить в системе координат, где вектор импульса начального фотона имеет вид $\mathbf{q} = (q_x, 0, q_z)$ и, следовательно, $p_y = -p'_y$, $\xi = \xi'$. Так как $u(p')$ и $u(-p)$ от x не зависят, интеграл гауссова типа по x легко вычисляется. Учитывая предел сильного поля, мы будем полагать $e^{-q_x^2/2eB} \simeq 1$. В результате квадрат \mathcal{S} -матричного элемента может быть записан в виде

$$|\mathcal{S}_{if}|^2 = \frac{e^2(2\pi)^3 T}{8L_y L_z V \omega E E'} |\bar{u}_{p'}(\varepsilon^{(\lambda)}\gamma)u_{-p}|^2 \delta^3(p+p'-q), \quad (4.7)$$

где $\delta^3(p+p'-q) = \delta(p_y+p'_y)\delta(p_z+p'_z-q_z)\delta(E+E'-\omega)$, T – полное время взаимодействия. Вычисление величин $|\bar{u}_{p'}(\varepsilon^{(\lambda)}\gamma)u_{-p}|^2$ сводится к вычислению следов с матрицами плотности поляризованных электронов и позитронов:

$$|\bar{u}_{p'}(\varepsilon^{(\lambda)}\gamma)u_{-p}|^2 = \text{Tr} [\rho(p')(\varepsilon^{(\lambda)}\gamma)\rho(-p)(\varepsilon^{(\lambda)}\gamma)],$$

где матрица плотности поляризованных электронов

$$\rho(p') = ((p'\gamma)_{\parallel} + m_e)\Pi_{-}, \quad (4.8)$$

матрица плотности поляризованных позитронов

$$\rho(-p) = ((p\gamma)_{\parallel} - m_e)\Pi_{-}. \quad (4.9)$$

Π_{-} есть проекционный оператор, соответствующий состоянию электрона со спином против поля и имеющий следующий вид:

$$\Pi_{-} = \frac{1}{2}(1 - i\gamma_1\gamma_2).$$

Здесь под p_{\parallel} понимаются только продольные составляющие 4-векторов, т. е.

$$p_{\parallel}^{\alpha} = (E', 0, 0, p'_z), \quad p_{\parallel}^{\alpha} = (E, 0, 0, p_z).$$

Для дальнейшего упрощения вычислений перейдем в систему отсчёта, в которой $q_z = 0$. Это можно сделать преобразованием Лоренца вдоль поля, так как q_{\parallel} – времениподобный вектор:

$$q_{\parallel}^2 = \omega^2 - q_z^2 = (E + E')^2 - (p_z + p'_z)^2 > 0.$$

В этой системе $p_z = -p'_z$, $E = E'$. Проведём вычисления отдельно для различных поляризаций фотона, используя явный вид векторов поляризации $\varepsilon^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2$). Эти векторы могут быть выбраны в виде

$$\varepsilon_{\alpha}^{(1)} = \frac{(q\varphi)_{\alpha}}{\sqrt{q_{\perp}^2}}, \quad \varepsilon_{\alpha}^{(2)} = \frac{(q\tilde{\varphi})_{\alpha}}{\sqrt{q_{\parallel}^2}}, \quad (4.10)$$

где $\varphi_{\alpha\beta}$ – безразмерный тензор внешнего поля, $\varphi_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta}/B$, $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma}\varphi^{\rho\sigma}$ – дуальный тензор, $q_{\perp}^2 = (q\varphi q)$, а q_{\parallel}^2 , введённое выше, может быть также определено через тензор $\tilde{\varphi}$, $q_{\parallel}^2 = (q\tilde{\varphi}q)$.

Подставляя вектор поляризации фотона первой моды, находим

$$\text{Tr} [\rho(p')(\varepsilon^{(1)}\gamma)\rho(-p)(\varepsilon^{(1)}\gamma)] = 0.$$

Таким образом, фотон первой моды не может распадаться на электрон-позитронную пару в магнитном поле в случае, когда и электрон, и позитрон находятся на основном уровне Ландау. Проводя аналогичные вычисления для фотона второй моды, получаем

$$\text{Tr} [\rho(p')(\varepsilon^{(2)}\gamma)\rho(-p)(\varepsilon^{(2)}\gamma)] = 4m_e^2.$$

В результате квадрат \mathcal{S} -матричного элемента, описывающего распад фотона второй моды, приобретает вид

$$|\mathcal{S}_{if}|^2 = \frac{e^2(2\pi)^3 m_e^2 T}{2L_y L_z V \omega E E'} \delta^3(p + p' - q), \quad (4.11)$$

где $\delta^3(p + p' - q) = \delta(2E - \omega)\delta(p_y + p'_y - q_y)\delta(p_z + p'_z)$.

Чтобы найти вероятность распада, надо проинтегрировать по фазовому пространству конечных электронов и позитронов:

$$dW = \frac{|\mathcal{S}_{if}|^2}{T} dn_f, \quad (4.12)$$

где

$$dn_f = \frac{dp_y dp_z dp'_y dp'_z}{(2\pi)^4} L_y^2 L_z^2. \quad (4.13)$$

Энергетическая δ -функция может быть преобразована к виду

$$\frac{\delta(2E - \omega)}{\omega} = \frac{1}{4|p^*|} [\delta(p_z - p^*) + \delta(p_z + p^*)] \theta(\omega^2 - 4m_e^2),$$

где $p^* = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{\omega^2 - 4m_e^2})$.

Интегрирование по $dp'_y dp'_z dp_z$ устраняет δ -функции. Легко видеть, что подынтегральное выражение не зависит от p_y , следовательно, интегрирование по p_y , в сущности, определяет кратность вырождения состояния электрона с данной энергией:

$$N_E = \frac{L_y}{2\pi} \int dp_y = \frac{eBL_y}{2\pi} \int_{-L_x/2}^{L_x/2} dx_0 = \frac{eBL_x L_y}{2\pi}, \quad (4.14)$$

где $x_0 = p_y/eB$ определяет положение центра гауссова пакета на оси x (см. (4.5)). В результате получаем для вероятности распада фотона второй моды

$$W^{(2)} = \frac{4\alpha e B m_e^2}{\omega^2 \sqrt{\omega^2 - 4m_e^2}} \theta(\omega^2 - 4m_e^2). \quad (4.15)$$

Совершая обратное преобразование Лоренца с учётом того, что произведение ωW есть инвариант, запишем вероятность (4.15) в произвольной системе:

$$\omega W^{(2)} = \frac{4\alpha e B m_e^2}{\sqrt{q_{\parallel}^2 (q_{\parallel}^2 - 4m_e^2)}} \theta(q_{\parallel}^2 - 4m_e^2), \quad (4.16)$$

где $q_{\parallel}^2 = \omega^2 - q_3^2 \simeq \omega^2 \sin^2 \theta$.

Полученная формула показывает, что процесс распада фотона в магнитном поле носит резонансный характер и существенно усиливается, когда фотон летит под углом, близким к $\theta_{res} = 4m_e^2 / \omega^2$. На такую корневую сингулярность в вероятности распада впервые указал Н. П. Клепиков [224]

4.1.2. Расчёт на основе мнимой части петлевой диаграммы

Существует другой способ вычисления вероятности распада фотона в магнитном поле, основанный на применении соотношения унитарности. При этом вероятность выражается через мнимую часть амплитуды перехода “фотон–фотон”, где в качестве промежуточного состояния следует рассматривать электрон-позитронную пару:

$$W(\gamma \rightarrow e^- e^+) = \frac{1}{\omega} \text{Im } \mathcal{M}(\gamma \rightarrow \gamma), \quad (4.17)$$

где ω – энергия фотона. Амплитуда перехода $\mathcal{M}(\gamma^{(\lambda)} \rightarrow \gamma^{(\lambda)}) = \mathcal{M}^{(\lambda)}$ в магнитном поле определяется выражениями (3.3)–(3.6), где следует подставить векторы поляризации $\varepsilon_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}^{(\lambda)}$ фотона первой или второй мод (4.10). При этом можно отбросить члены с q^2 , содержащиеся в выражениях (3.6), так как они определяют в соответствии с дисперсионным уравнением (3.9) поправки порядка α^2 . Переходя в функциях $\Pi^{(1,2)}(q)$ к пределу сильного поля (3.13), (3.14), видим, что мнимую часть имеет только амплитуда перехода фотона второй моды $\mathcal{M}^{(2)}$, в кинематической области $q_{\parallel}^2 > 4m_e^2$:

$$\text{Im} \mathcal{M}^{(2)} = \frac{4\alpha e B m_e^2}{\sqrt{q_{\parallel}^2 (q_{\parallel}^2 - 4m_e^2)}} \theta(q_{\parallel}^2 - 4m_e^2). \quad (4.18)$$

Подставляя (4.18) в (4.17), получаем выражение для вероятности, совпадающее с (4.16).

Амплитуда $\mathcal{M}^{(1)}$ не имеет мнимой части в области $q_{\parallel}^2 \ll eB$. Анализ показывает, что мнимая часть $\mathcal{M}^{(1)}$ возникает только при

$$q_{\parallel}^2 > E_{01}^2 = \left(m_e + \sqrt{m_e^2 + 2eB}\right)^2.$$

Это соответствует рождению одной из частиц, электрона или позитрона, на первом уровне Ландау, а другой частицы – на нулевом.

4.2. Процесс $\gamma \rightarrow e^- e^+$ в скрещенном поле

4.2.1. Прямой расчёт на основе решений уравнения Дирака

Подставляя в \mathcal{S} -матричный элемент (4.2) решения в скрещенном поле (1.11) для электрона и позитрона, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{if} = & \frac{ie}{\sqrt{2\omega V 2EV 2E'V}} \int d^4x \exp \left[-i \left((Qx) - r^3 \kappa^3 (\varphi_0 \varphi^2 + \frac{1}{3} \varphi^3) \right) \right] \times \\ & \times \left[\bar{u}(p) \left(1 - \frac{e(a\gamma)(k\gamma)}{2(kp)} \varphi \right) \hat{\varepsilon} \left(1 + \frac{e(a\gamma)(k\gamma)}{2(kp')} \varphi \right) u(-p') \right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

где введены обозначения: $Q = q - p - p'$,

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{\chi}{2\chi_1\chi_2} \right)^{1/3}, \quad \kappa^2 = -\frac{e^2(aa)}{m^2}, \quad \varphi_0 = -\frac{e(qFp)}{m^4\kappa\chi}, \\ \chi &= \left(\frac{e^2(qFFq)}{m^6} \right)^{1/2} = \frac{\kappa(qk)}{m^2}, \\ \chi_1 &= \left(\frac{e^2(pFFp)}{m^6} \right)^{1/2} = \frac{\kappa(pk)}{m^2}, \\ \chi_2 &= \left(\frac{e^2(p'FFp')}{m^6} \right)^{1/2} = \frac{\kappa(p'k)}{m^2}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Выбирая систему отсчёта (1.12) и учитывая, что $\varphi = (kx) = k_0(t - x)$, можем записать

$$(Qx) = (Q_0 - Q_x)t - Q_y y - Q_z z + s\varphi, \quad s = \frac{Q_x}{k_0}.$$

Интеграл по y и z даёт двумерную δ -функцию

$$\int dy dz e^{i(Q_y y + Q_z z)} = (2\pi)^2 \delta^{(2)}(\mathbf{Q}_\perp).$$

Переходя от переменных t, x к переменным t, φ

$$\int dt dx = \frac{1}{k_0} \int dt d\varphi$$

и интегрируя по t

$$\int dt e^{-i(Q_0 - Q_x)t} = 2\pi \delta(Q_0 - Q_x) = 2\pi k_0 \delta(kQ) = 2\pi k_0 \frac{\varkappa}{m^2} \delta(\chi - \chi_1 - \chi_2),$$

преобразуем \mathcal{S} -матричный элемент (4.19) к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{if} &= \frac{ie(2\pi)^3 \delta^2(\mathbf{Q}_\perp) \delta(kQ)}{\sqrt{2\omega V 2EV 2E'V}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \left[\bar{u}(p) \gamma_\mu L^{\mu\nu} \varepsilon_\nu u(-p') \right] \times \\ &\times \exp \left[-i \left(s\varphi - r^3 \varkappa^3 (\varphi_0 \varphi^2 + \frac{1}{3} \varphi^3) \right) \right], \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$L^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \kappa_- F^{\mu\nu} \varphi + i\kappa_+ \gamma_5 \tilde{F}^{\mu\nu} \varphi - \frac{e^2 \varkappa^2}{2m^4 \chi_1 \chi_2} (FF)^{\mu\nu} \varphi^2, \quad (4.22)$$

$$\kappa_\pm = \frac{e\varkappa}{2m^2} \left(\frac{1}{\chi_1} \pm \frac{1}{\chi_2} \right). \quad (4.23)$$

Совершим в интеграле сдвиг по переменной φ , $\varphi \rightarrow \varphi - \varphi_0$, при этом можно избавиться от членов в показателе экспоненты, пропорциональных φ^2 . Получаем

$$s\varphi - r^3 \varkappa^3 (\varphi_0 \varphi^2 + \frac{1}{3} \varphi^3) \rightarrow \bar{s}\varphi - \frac{1}{3} r^3 \varkappa^3 \varphi^3 + A,$$

где

$$\bar{s} = s + r^3 \varkappa^3 \varphi_0^2,$$

а величина A , не зависящая от φ , приведёт к появлению в \mathcal{S} -матричном элементе постоянного фазового множителя, который несуществен. С учётом

симметричности пределов интегрирования данная процедура сдвига по φ позволяет выразить результаты через функцию Эйри

$$\text{Ai}(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dz \cos \left(yz + \frac{z^3}{3} \right), \quad (4.24)$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\text{Ai}''(y) - y\text{Ai}(y) = 0. \quad (4.25)$$

При этом имеющиеся интегралы по φ запишутся в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \exp \left(-i(\bar{s}\varphi - \frac{1}{3}r^3\kappa^3\varphi^3) \right) = \frac{2\pi}{r\kappa} \text{Ai}(y), \quad (4.26)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \varphi \exp \left(-i(\bar{s}\varphi - \frac{1}{3}r^3\kappa^3\varphi^3) \right) = -\frac{2\pi i}{r^2\kappa^2} \text{Ai}'(y), \quad (4.27)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi \varphi^2 \exp \left(-i(\bar{s}\varphi - \frac{1}{3}r^3\kappa^3\varphi^3) \right) = -\frac{2\pi}{r^3\kappa^3} \text{Ai}''(y), \quad (4.28)$$

где

$$y = -\frac{\bar{s}}{r\kappa}. \quad (4.29)$$

Дальнейшие вычисления целесообразно проводить для фотона конкретной поляризации. В скрещенном поле векторы поляризации (4.10) представляются в виде

$$\varepsilon_{\alpha}^{(1)} = \frac{(Fq)_{\alpha}}{\sqrt{(qFFq)}}, \quad \varepsilon_{\alpha}^{(2)} = \frac{(\tilde{F}q)_{\alpha}}{\sqrt{(qFFq)}}, \quad (4.30)$$

при этом получаем

$$\begin{aligned} (L\varepsilon^{(1)})_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{(qFFq)}} \left[(Fq)_{\mu} + \kappa_{-}(FFq)_{\mu}(\varphi - \varphi_0) \right], \\ (L\varepsilon^{(2)})_{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{(qFFq)}} \left[(\tilde{F}q)_{\mu} + i\kappa_{+}\gamma_5(FFq)_{\mu}(\varphi - \varphi_0) \right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Вероятность распада фотона определяется выражением

$$W = \frac{1}{T} \int |\mathcal{S}_{if}|^2 \frac{d^3p V}{(2\pi)^3} \frac{d^3p' V}{(2\pi)^3}. \quad (4.32)$$

При подстановке матричного элемента следует, как обычно, учесть, что

$$\delta^2(\mathbf{Q}_\perp = 0) = \frac{L_y L_z}{(2\pi)^2}, \quad \delta(kQ = 0) = \frac{T}{2\pi k_0},$$

где L_x, L_y, L_z – характерные линейные размеры вдоль осей OX, OY и OZ , а T – полное время взаимодействия.

Интегрирование с δ -функциями по импульсам позитрона даёт

$$\int \frac{d^3p'}{E'} \delta^2(\mathbf{Q}_\perp) \delta(kQ) \{ \dots \} = \frac{\varkappa}{m^2 \chi_2} \{ p' \rightarrow q - p - sk; \chi_2 \rightarrow \chi - \chi_1 \}.$$

Для интегрирования по импульсам электрона удобно ввести переменные τ и u :

$$\tau = \frac{e(q\tilde{F}p)}{m^4 \chi}, \quad u = 1 - 2\frac{\chi_1}{\chi}, \quad (4.33)$$

так что

$$\chi_1 = \frac{1-u}{2}\chi, \quad \chi_2 = \frac{1+u}{2}\chi, \quad (4.34)$$

при этом

$$\int \frac{d^3p}{E} \frac{1}{\chi_2} = \frac{2m^2 \varkappa}{\chi} \int_{-1}^1 \frac{du}{1-u^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d\varphi_0,$$

но, как показывает расчёт, подынтегральное выражение не содержит зависимости от φ_0 . Вспоминая связь между φ и x , заключаем, что интеграл по φ_0 отражает произвол выбора точки начала отсчёта координаты x . При решении задачи в конечном объёме квантования, $V = L_x L_y L_z$, область интегрирования по φ_0 конечна и равна $k_0 L_x$, т. е.

$$\int d\varphi_0 = k_0 \int dx_0 = k_0 L_x.$$

Аргумент функции Эйри (4.29) в обозначениях (4.33) имеет вид

$$y = r^2(\tau^2 + 1), \quad r = \left(\frac{2}{\chi(1-u^2)} \right)^{1/3}. \quad (4.35)$$

Результат вычислений вероятностей распада фотонов обеих поляризаций (4.30) можно представить в виде

$$W^{(1,2)} = \frac{e^2 m^2 \chi^{1/3}}{2^{1/3} \pi \omega} \int_0^1 \frac{du}{(1-u^2)^{2/3}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \left\{ \left(\frac{1+u^2}{2} \mp \frac{1-u^2}{2} \right) [\text{Ai}'(y)]^2 + \left(\frac{2}{\chi(1-u^2)} \right)^{2/3} \left[1 + \tau^2 \left(\frac{1+u^2}{2} \pm \frac{1-u^2}{2} \right) \right] [\text{Ai}(y)]^2 \right\}. \quad (4.36)$$

Этот результат совпадает с точностью до обозначений с формулой (56) (с. 82 из обзора [40]), где поляризации \parallel и \perp соответствуют нашим поляризациям 1 и 2.

Для вычисления входящих в выражение (4.36) интегралов по переменной τ :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [\text{Ai}(y)]^2, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau^2 [\text{Ai}(y)]^2, \quad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [\text{Ai}'(y)]^2 \quad (4.37)$$

воспользуемся известными соотношениями для функции Эйри (см. [40]):

$$y [\text{Ai}(y)]^2 + [\text{Ai}'(y)]^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dy^2} [\text{Ai}(y)]^2, \quad (4.38)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} [\text{Ai}(t+a)]^2 = \frac{1}{2} \int_{2^{2/3}a}^{\infty} dy \text{Ai}(y), \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dt t^{\sigma} [\text{Ai}(t+a)]^2 &= \frac{\sigma}{2(2\sigma+1)} \left(\frac{d^2}{da^2} - 4a \right) \times \\ &\times \int_0^{\infty} dt t^{\sigma-1} [\text{Ai}(t+a)]^2, \quad \sigma > 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Интегралы (4.37) равны

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2r} \text{Bi}(z), \quad I_2 = \frac{2^{1/3}}{8r^3} [-\text{Ai}'(z) - z \text{Bi}(z)], \\ I_3 &= \frac{2^{1/3}}{8r} [-3\text{Ai}'(z) - z \text{Bi}(z)], \end{aligned} \quad (4.41)$$

где обозначено

$$\text{Bi}(z) = \int_z^\infty dy \text{Ai}(y), \quad z = 2^{2/3} r^2 = \left(\frac{4}{\chi(1-u^2)} \right)^{2/3}. \quad (4.42)$$

Подставляя интегралы (4.41) и переходя к новой переменной $v = 1/(1-u^2)$, запишем вероятность (4.36) в виде

$$W^{(1,2)} = \frac{\alpha m^2}{2\omega} \int_1^\infty \frac{dv}{v\sqrt{v(v-1)}} \left\{ \text{Bi}(z) - \frac{4v-2 \mp 1}{z} \text{Ai}'(z) \right\}, \quad (4.43)$$

где $z = (4v/\chi)^{2/3}$. Выражение (4.43) можно дальше упростить, воспользовавшись уравнением (4.25) для функции Эйри. В результате получаем

$$W^{(1,2)} = -\frac{\alpha m^2 \chi}{16\omega} \int_{(4/\chi)^{2/3}}^\infty \frac{dz}{\sqrt{z}} \frac{8v+1 \mp 3}{v\sqrt{v(v-1)}} \text{Ai}'(z), \quad v = \frac{\chi z^{3/2}}{4}. \quad (4.44)$$

В предельных случаях малых и больших значений динамического параметра χ формулы для вероятностей значительно упрощаются:

$$W^{(1,2)}(\chi \ll 1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(3 \mp 1)\alpha m^2}{16\omega} \chi e^{-8/(3\chi)}, \quad (4.45)$$

$$W^{(1,2)}(\chi \gg 1) = \frac{3(5 \mp 1)\alpha m^2}{28\pi^2\omega} \Gamma^4\left(\frac{2}{3}\right) (3\chi)^{2/3}. \quad (4.46)$$

Приведённые выражения для вероятностей совпадают с точностью до обозначений с соответствующими формулами на с. 83 из [40].

4.2.2. Расчёт на основе мнимой части петлевой диаграммы

Вероятность распада в скрещенном поле можно также вычислить через соотношение унитарности. Для этого в формулу (4.17) в качестве амплитуды $\mathcal{M}(\gamma \rightarrow \gamma)$ следует подставить выражение (3.34), заменяя векторные токи на векторы поляризации фотона (4.30), $j_{V\alpha} \rightarrow e\varepsilon_\alpha^{(1,2)}$, и полагая $q^2 = 0$.

Получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\gamma^{(1)} \rightarrow \gamma^{(1)}) &= \frac{\alpha}{\pi} Y_{VV}^{(1)} = \\
&= -\frac{\alpha m^2 \chi^{2/3}}{6\pi} \int_0^1 du \left(\frac{4}{1-u^2} \right)^{1/3} (3+u^2) \frac{df(z)}{dz}, \\
\mathcal{M}(\gamma^{(2)} \rightarrow \gamma^{(2)}) &= \frac{\alpha}{\pi} Y_{VV}^{(2)} = \\
&= -\frac{\alpha m^2 \chi^{2/3}}{3\pi} \int_0^1 du \left(\frac{4}{1-u^2} \right)^{1/3} (3-u^2) \frac{df(z)}{dz}, \quad (4.47)
\end{aligned}$$

где $z = (4/[\chi(1-u^2)])^{2/3}$. Учитывая, что мнимая часть функции Харди – Стокса выражается через функцию Эйри, $\text{Im} f(z) = \pi \text{Ai}(z)$, и переходя в интеграле от переменной u к z

$$\int_0^1 du = \frac{3}{4} \int_{(4/\chi)^{2/3}}^{\infty} \frac{dz}{z} \frac{1}{\sqrt{v(v-1)}},$$

$v = \chi z^{3/2}/4$, сразу получаем формулу (4.44).

4.3. Затухание фотона в результате рождения e^-e^+ пары в сильном магнитном поле

В данном параграфе исследовано затухание электромагнитной волны в присутствии сильного магнитного поля в кинематической области, близкой к порогу рождения электрон-позитронной пары. Показано, что в данной области неэкспоненциальный характер затухания электромагнитного поля усилен. Обнаружено, что эффективная ширина распада фотона, $\gamma \rightarrow e^+e^-$, существенно меньше по сравнению с известными в литературе результатами. Изложение основано на работе [225].

Задача о распространении электромагнитных полей в активной среде возникает при рассмотрении самых различных физических явлений. Наиболее масштабными и интересными из них являются рождение и эволюция сверхновых и нейтронных звёзд, внутри которых плотность вещества может достигать величин порядка ядерных ($\rho \sim 10^{14} - 10^{15} \text{ г/см}^3$), а температура –

нескольких десятков МэВ. Наряду с плотной и горячей материей возможна также генерация сильного магнитного поля, которое в описываемых выше объектах может превосходить на несколько порядков критическое значение, $B_e = m_e^2/e \simeq 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс. В присутствии интенсивного магнитного поля возможны новые явления, которые могут существенно влиять на динамику развития подобных астрофизических объектов. К одному из таких явлений относится затухание электромагнитного поля в результате рождения электрон-позитронной пары во внешнем магнитном поле. Напомним, что в вакууме процесс $\gamma \rightarrow e^+e^-$ кинематически запрещён. Присутствие магнитного поля приводит к изменению кинематики заряженных частиц (электронов и позитронов), что делает процесс рождения электрон-позитронной пары возможным в кинематической области $q_{\parallel}^2 = q_0^2 - q_z^2 \geq 4m_e^2$, где q_0 – энергия фотона, а q_z – компонента импульса вдоль магнитного поля.

Впервые процесс рождения электрон-позитронной пары фотоном в магнитном поле был рассмотрен Клепиковым в 1954 г. [224]. Была получена амплитуда и ширина распада $\gamma \rightarrow e^+e^-$ в квазиклассическом пределе. Позднее этот процесс рассматривался в ряде работ [80, 226–230] в связи с его возможным применением в астрофизике. В работах [229, 230] отмечалось, что использование выражения для ширины, полученного в [224], приводит к существенному завышению результата в пределе сильного магнитного поля. В этом случае нужно использовать точное выражение для ширины однофотонного рождения пары, когда электроны и позитроны занимают только основной уровень Ландау. Было замечено, однако, что выражение для ширины распада в пределе сильного магнитного поля содержит особенность корневого типа в точке $q_{\parallel}^2 = 4m_e^2$. Как подчеркивалось в работе [80], это обстоятельство свидетельствует о невозможности интерпретации данной ширины распада, вычисленной по теории возмущений вблизи порога рождения пары, как коэффициента затухания. В этом случае первичным для нахождения коэффициента затухания является временная зависимость волновой функции фотона в присутствии магнитного поля. Для определения такой зависимости в работе [80] в качестве метода предлагалось решать уравнение дисперсии с учётом поляризации вакуума в магнитном поле с комплексными значениями энергии фотона. Данный метод, однако, имеет, на наш взгляд, ряд недостатков. Во-первых, хорошо известно (хотя и редко упоминается), что решений уравнения дисперсии с комплексными энергиями на физическом листе не существует. Решения находятся на нефизических римановых листах (область аналитичности поляризационного оператора), число которых, вообще говоря, бесконечно. Это в свою очередь ведёт к бесконечному числу решений уравнения дисперсии как с положительными, так и с от-

рицательными значениями мнимой части энергии. Физический статус этих решений требует отдельного исследования.

В работе [80] использовалась асимптотическая форма поляризационного оператора вблизи порога рождения пары, которая ошибочно полагалась двулистной комплексной функцией. Данное обстоятельство привело к существованию двух комплексно сопряжённых решений, одно из которых (с положительной мнимой частью) не может иметь физического смысла, так как приводит к экспоненциальному росту амплитуды электромагнитной волны. Таким образом, для получения физически осмысленного результата требуется “руками” отбрасывать лишние решения.

Кроме того, в таком подходе не удастся корректно описать характер затухания в околопороговой области в сильном поле, который в этом случае существенно отличается от экспоненциального.

Тем самым способ описания затухающих электромагнитных волн в магнитном поле путем решения уравнения дисперсии не является самодостаточным.

Рассмотрим подробно затухание фотона в результате рождения электрон-позитронной пары в сильном магнитном поле [225]. Особое внимание уделим исследованию затухания фотона вблизи порога рождения e^+e^- пары. Мы используем метод, применяемый в теории поля при конечных температурах и в физике плазмы (см., например, [231]). Он состоит в нахождении запаздывающего решения уравнения электромагнитного поля в присутствии внешнего источника с учётом поляризации вакуума в магнитном поле. Временное затухание электромагнитной волны исследуется во внешнем однородном магнитном поле, когда его величина является наибольшим параметром, $B_e \gg q^2, m_e^2$.

Для описания эволюции электромагнитной волны $\mathcal{A}_\alpha(x)$ во времени¹ рассмотрим линейный отклик системы ($\mathcal{A}_\alpha(x)$ и поляризованный в магнитном поле вакуум) на внешний источник, который адиабатически включается при $t = -\infty$ и в момент времени $t = 0$ выключается. При $t > 0$ электромагнитная волна будет эволюционировать самостоятельно. Таким образом, источник необходим для создания начального состояния. Для простоты рассмотрим эволюцию монохроматической волны. Для этого функцию источника следует выбрать в виде

$$\mathcal{J}_\alpha(x) = j_\alpha e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} e^{\varepsilon t} \theta(-t), \quad \varepsilon \rightarrow 0^+. \quad (4.48)$$

¹ $x^\mu = (t, \mathbf{x})$

Зависимость $\mathcal{A}_\alpha(x)$ от времени определяется уравнением

$$(g_{\alpha\beta} \partial_\mu^2 - \partial_\alpha \partial_\beta) \mathcal{A}^\beta(x) + \int d^4x' \mathcal{P}_{\alpha\beta}(x - x') \mathcal{A}^\beta(x') = \mathcal{J}_\alpha(x), \quad (4.49)$$

где $\mathcal{P}_{\alpha\beta}(x - x')$ – поляризационный оператор фотона в магнитном поле. Отметим, что для того, чтобы источник в правой части уравнения (4.49) являлся сохраняющейся величиной, $\partial_\alpha \mathcal{J}^\alpha = 0$, необходимо выбрать ток j_α в виде $j^\alpha = (0, \mathbf{j})$, $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$. Запаздывающее решение, описывающее эволюцию $\mathcal{A}_\alpha(x)$, имеет вид

$$\mathcal{A}_\alpha^R(x) = \int d^4x' G_{\alpha\beta}^R(x - x') \mathcal{J}^\beta(x'), \quad (4.50)$$

где $G_{\alpha\beta}^R(x - x')$ – запаздывающая функция Грина. Она определяется через коммутатор гейзенберговских операторов электромагнитного поля $\hat{A}_\alpha(x)$ согласно

$$G_{\alpha\beta}^R(x - x') = -i \langle 0 | [\hat{A}_\alpha(x), \hat{A}_\beta(x')] | 0 \rangle \theta(t - t') \quad (4.51)$$

(см., например, [232]). Полезно выразить эту функцию через причинную функцию Грина

$$G_{\alpha\beta}^C(x - x') = -i \langle 0 | \mathbf{T} \hat{A}_\alpha(x) \hat{A}_\beta(x') | 0 \rangle, \quad (4.52)$$

используя следующее соотношение:

$$G_{\alpha\beta}^R(x - x') = 2 \operatorname{Re} G_{\alpha\beta}^C(x - x') \theta(t - t'). \quad (4.53)$$

Эту формулу легко получить, если заметить, что

$$G_{\alpha\beta}^C(t - t', \mathbf{x} - \mathbf{x}') \theta(t - t') = -i \langle 0 | \hat{A}_\alpha(t, \mathbf{x}) \hat{A}_\beta(t', \mathbf{x}') | 0 \rangle \theta(t - t'). \quad (4.54)$$

Прибавляя к последнему уравнению комплексно-сопряжённое и сравнивая полученное выражение с (4.51), получаем соотношение (4.53).

В магнитном поле удобно разложить функцию Грина (4.52) по собственным векторам поляризационного оператора $b_\alpha^{(1,2,3)}$ (см. (3.5)):

$$G_{\alpha\beta}^C(x) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} G_{\alpha\beta}^C(q) e^{-iqx}, \quad (4.55)$$

$$G_{\alpha\beta}^C(q) = \sum_{\lambda=1}^3 \frac{b_\alpha^{(\lambda)} b_\beta^{(\lambda)}}{(b^{(\lambda)})^2} \frac{1}{q^2 - \Pi^{(\lambda)}(q)}, \quad (4.56)$$

где $\Pi^{(\lambda)}(q)$ – собственные значения поляризационного оператора. Подставляя выражения (4.48), (4.53) в уравнение (4.50) и используя разложения (4.55), (4.56), после несложного интегрирования получаем для $\mathcal{A}_\alpha^R(x)$ следующий результат при $t > 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha^R(x) &= \sum_{\lambda=1}^3 V_\alpha^{(\lambda)}(x) = 2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \times \\ &\times \text{Re} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{b_\alpha^{(\lambda)}(b^{(\lambda)}j)/(b^{(\lambda)})^2 e^{-iq_0 t}}{(q_0 - i\varepsilon)(q_0^2 - \mathbf{k}^2 - \Pi^{(\lambda)}(q))}, \end{aligned} \quad (4.57)$$

где $q^\alpha = (q_0, \mathbf{k})$. Следует отметить, что интеграл в последней формуле требует доопределения, так как подынтегральное выражение может содержать особенности, которые, с одной стороны, связаны с нулями знаменателя в (4.57), а с другой стороны, с областью определения подынтегральной функции. Для исследования этих особенностей необходимо знать явный вид и аналитические свойства собственных значений, $\Pi^{(\lambda)}(q)$, поляризационного оператора. В пределе сильного поля они могут быть представлены в следующем виде (см. (3.13)–(3.15)):

$$\Pi^{(1)}(q) \simeq -\frac{\alpha}{3\pi} q_\perp^2 - q^2 \Lambda(B, q^2), \quad (4.58)$$

$$\Pi^{(3)}(q) \simeq -q^2 \Lambda(B, q^2), \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \Pi^{(2)}(q) &\simeq -\frac{2\alpha eB}{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{z(1-z)}} \arctg \sqrt{\frac{z}{1-z}} - 1 \right) - \\ &- q^2 \Lambda(B, q^2), \end{aligned} \quad (4.60)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda(B, q^2) &= \frac{\alpha}{3\pi} [1.792 - \ln(B/B_e)], \\ z &= q_\parallel^2/4m_e^2, \quad q_\perp^2 = q_1^2 + q_2^2. \end{aligned}$$

Отметим, что вклад полюса $q_\parallel^2 = 0$, происходящего из нормировки базисных векторов $b_\alpha^{(2)}$ и $b_\alpha^{(3)}$, является нефизическим. С учётом явного вида собственных значений поляризационного оператора (4.58)–(4.60) он может быть устранен калибровочным преобразованием после суммирования по поляризациям. Таким образом, вклад в решение могут дать только полюса, соответствующие уравнениям дисперсии:

$$q^2 - \Pi^{(\lambda)}(q) = 0. \quad (4.61)$$

Как уже отмечалось, для реальных фотонов в магнитном поле физический смысл имеют только две моды, $\lambda = 1, 2$, с векторами поляризации:

$$\varepsilon_{\alpha}^{(1)} = \frac{b_{\alpha}^{(1)}}{\sqrt{(b^{(1)})^2}} = \frac{(q\varphi)_{\alpha}}{\sqrt{q_{\perp}^2}}, \quad \varepsilon_{\alpha}^{(2)} = \frac{b_{\alpha}^{(2)}}{\sqrt{(b^{(2)})^2}} = \frac{(q\tilde{\varphi})_{\alpha}}{\sqrt{q_{\parallel}^2}}. \quad (4.62)$$

В пределе сильного магнитного поля только мода с вектором поляризации $\varepsilon_{\mu}^{(2)}$ может распадаться на электрон-позитронную пару, поскольку только собственное значение поляризационного оператора $\Pi^{(2)}(q)$ (4.60) имеет мнимую часть при $q_{\parallel}^2 \geq 4m_e^2$. Таким образом, для анализа временного затухания электромагнитного поля достаточно в выражении (4.57) рассмотреть только слагаемое с $V_{\alpha}^{(2)}(x)$.

Для упрощения дальнейших вычислений удобно перейти в систему отсчёта, где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$, что всегда можно сделать не нарушая характера внешнего магнитного поля. При этом $q_{\parallel}^2 = q_0^2$ и вектор поляризации моды 2 принимает вид $\varepsilon^{(2)\alpha} = (0, 0, 0, -1)$. В итоге для $V_{\alpha}^{(2)}(x)$ получаем следующее выражение:

$$V_{\alpha}^{(2)}(x) = V_{\alpha}^{(2)}(0, \mathbf{x}) \frac{\text{Re}F(t)}{\text{Re}F(0)}, \quad (4.63)$$

где

$$F(t) = \int_C \frac{dq_0}{2\pi i} \frac{e^{-iq_0 t}}{(q_0 - i\varepsilon)(q_0^2 - \mathbf{k}^2 - \Pi^{(2)}(q))}, \quad (4.64)$$

а $V_{\alpha}^{(2)}(0, \mathbf{x}) = 2\varepsilon_{\alpha}^{(2)} j_3 e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \text{Re}F(0)$.

Контур интегрирования C в (4.64) определяется аналитическими свойствами $\Pi^{(2)}(q)$ и изображён на рис. 4.2. Функция $\Pi^{(2)}(q)$ является аналитической на комплексной плоскости q_0 с разрезами вдоль вещественной оси. В кинематической области $|q_0| < 2m_e$ собственное значение $\Pi^{(2)}(q)$ вещественно, при этом уравнение (4.61) имеет вещественные корни, которые определяют дисперсию фотона в данной области.

Для дальнейшего анализа контур интегрирования удобно преобразовать в контур, изображённый на рис. 4.3. Тогда интеграл (4.64) может быть представлен в форме двух слагаемых

$$F(t) = F_{pole}(t) + F_{cut}(t), \quad (4.65)$$

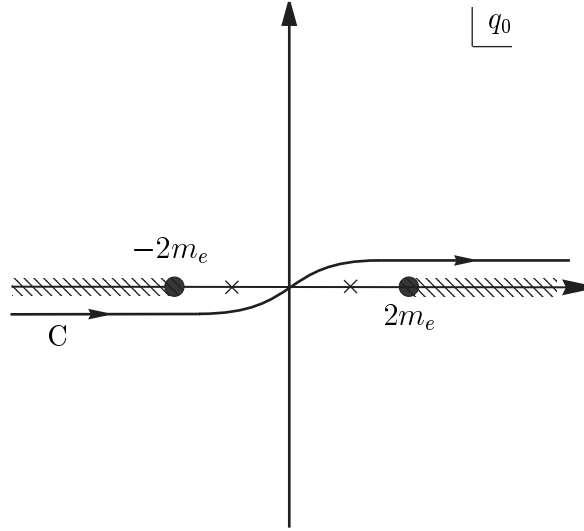


Рис. 4.2. Контур интегрирования C в комплексной плоскости q_0 : крестиками обозначены полюса, соответствующие вещественным решениям уравнения дисперсии (4.61); штриховкой указаны разрезы вдоль вещественной оси

первое из которых определяется вычетом в точке $q_0 = \omega$, являющейся решением уравнения дисперсии (4.61). Оно соответствует незатухающему решению в области $\omega < 2m_e$ [80].

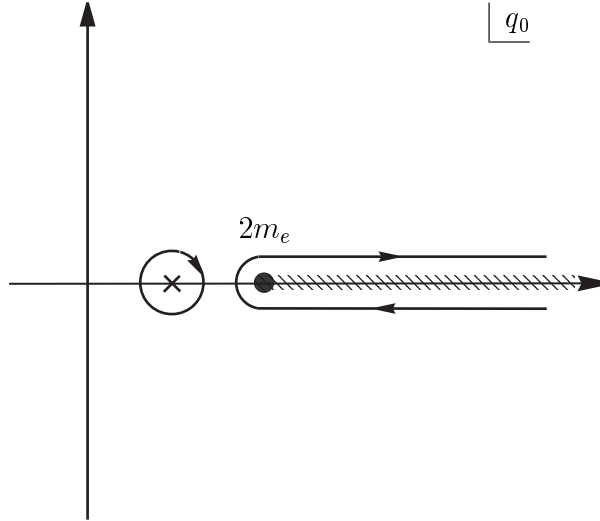


Рис. 4.3. Контур интегрирования C после преобразования, позволяющего выделить вклады полюса $F_{pole}(t)$ и разреза $F_{cut}(t)$

Второе слагаемое определяет зависимость электромагнитного поля от времени в области выше порога рождения электрон-позитронной пары и

имеет вид фурье-интеграла:

$$F_{cut}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_0}{2\pi} F_{cut}(q_0) e^{-iq_0 t}, \quad (4.66)$$

$$F_{cut}(q_0) = \frac{2\theta(q_0 - 2m_e) I}{q_0 ([q_0^2 - \mathbf{k}^2 - R]^2 + I^2)}, \quad (4.67)$$

$$R \equiv \text{Re } \Pi^{(2)}(q_0) = \frac{\alpha}{\pi} eB \left(\frac{1}{\sqrt{z(z-1)}} \ln \frac{\sqrt{z} + \sqrt{z-1}}{\sqrt{z} - \sqrt{z-1}} + 2 \right), \quad (4.68)$$

$$I \equiv -\text{Im } \Pi^{(2)}(q_0 + i\varepsilon) = \frac{\alpha eB}{\sqrt{z(z-1)}}, \quad z = \frac{q_0^2}{4m_e^2}. \quad (4.69)$$

Выражения (4.66)–(4.69) с учётом (4.63) позволяют решить задачу о нахождении временной зависимости волновой функции фотона выше порога рождения пары в присутствии сильного магнитного поля.

Строго говоря, вследствие порогового поведения фурье-образа $F_{cut}(q_0)$ характер временного затухания функции $F_{cut}(t)$, а значит, и волновой функции $\mathcal{A}_\mu(t)$ отличается от экспоненциального. Однако на протяжении некоторого характерного отрезка времени² зависимость волновой функции можно приближённо описать как экспоненциально затухающие гармонические колебания

$$\mathcal{A}_\mu(t) \sim \exp(-\gamma_{\text{eff}} t/2) \cos(\omega_{\text{eff}} t + \phi_0). \quad (4.70)$$

Здесь ω_{eff} и γ_{eff} – эффективная частота и ширина распада фотона соответственно, которые должны быть найдены с использованием (4.66)–(4.69) для каждого значения импульса \mathbf{k} , что определяет эффективный закон дисперсии фотона выше порога рождения электрон-позитронной пары.

Важную роль в астрофизических приложениях играет величина γ_{eff} , определяющая интенсивность поглощения γ -квантов в магнитном поле за счёт рождения e^+e^- -пар. Обычно в астрофизике используют выражение для коэффициента поглощения, полученное на основе вероятности распада $\gamma \rightarrow e^+e^-$ и содержащее корневую сингулярность (см., например, [233]). Как отмечалось в работе [80], это приводит к завышению интенсивности рождения e^+e^- -пар. Наш анализ показывает, что вычисление коэффициента поглощения (ширины распада) с использованием комплексного решения

²Естественно в качестве такого характерного времени выбрать обратную эффективную ширину распада $\gamma \rightarrow e^+e^-$.

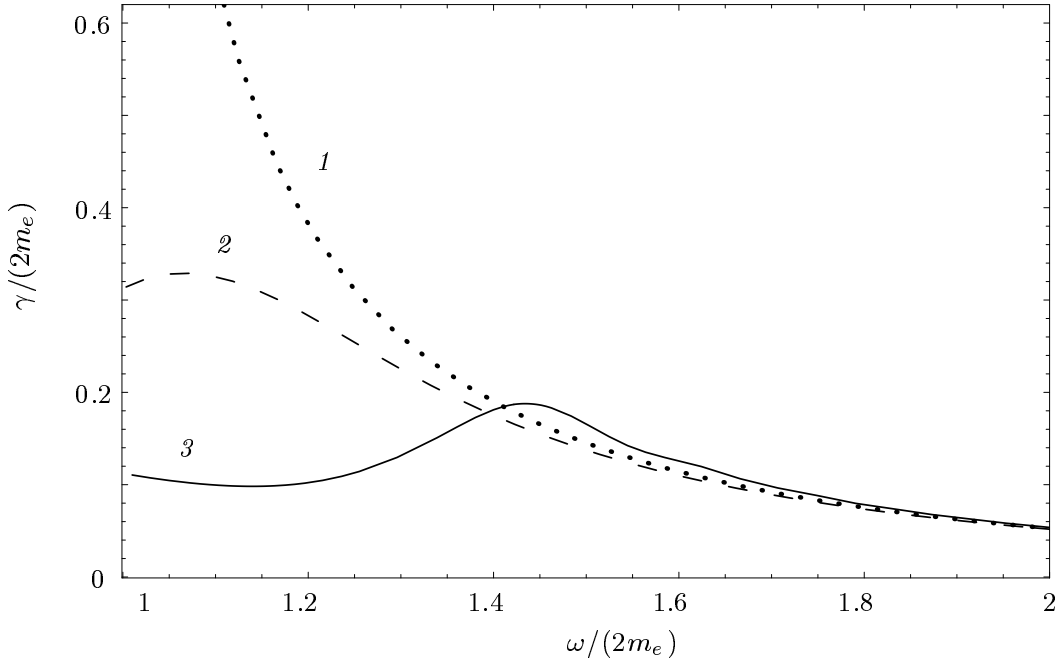


Рис. 4.4. Зависимость ширины распада от частоты в околопороговой области для значений магнитного поля $B = 200B_e$: линия 1 – ширина распада $\gamma \rightarrow e^+e^-$, вычисленная в древесном приближении и содержащая корневую сингулярность; линия 2 – ширина распада, полученная из комплексного решения дисперсионного уравнения на втором римановом листе [80]; линия 3 соответствует ширине распада γ_{eff} , вычисленной на основе аппроксимации (4.70)

на втором римановом листе [80] также приводит к существенно завышенному результату в околопороговой области, как это видно на рис. 4.4 и рис. 4.5.

Неэкспоненциальный характер затухания в околопороговой области известен для процессов в вакууме и веществе [234, 235], однако во внешнем поле, как нам известно, прежде не рассматривался. В магнитном поле, в отличие от случая вакуума или среды, околопороговый эффект оказывается кинематически усилен благодаря сингулярному поведению поляризационного оператора в этой области. Поэтому изучение указанного затухания электромагнитной волны не только является актуальным с точки зрения возможных астрофизических приложений, но представляет и концептуальный интерес.

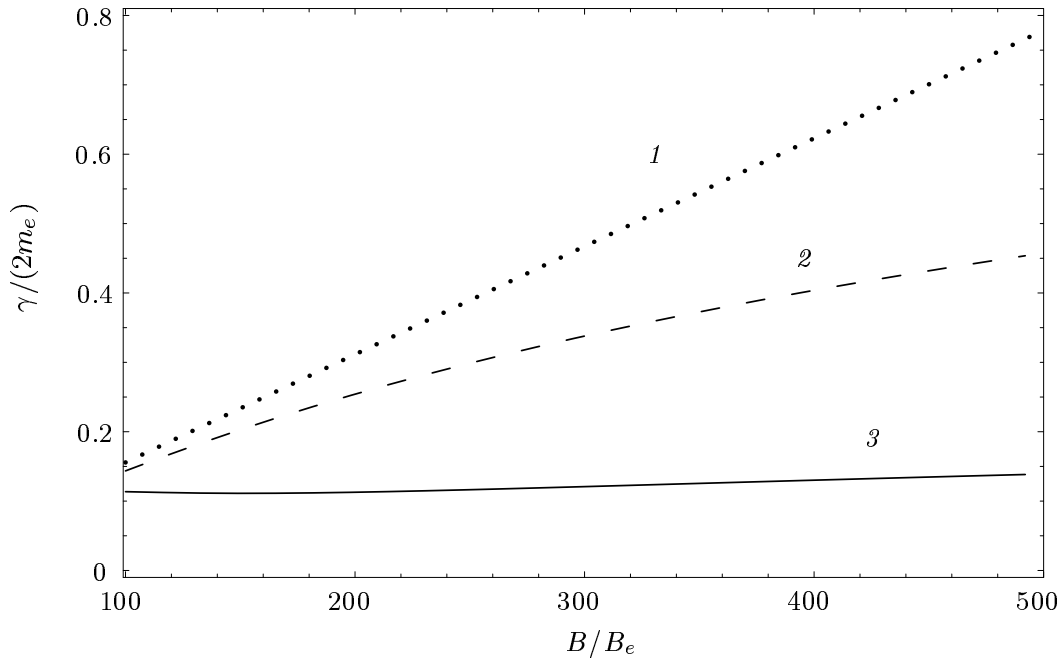


Рис. 4.5. Зависимость ширины распада от величины магнитного поля для значения частоты $\omega = 2.5 m_e$; нумерация линий такая же, что и на рис. 4.4

4.4. Процесс расщепления фотона $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в сильном магнитном поле

4.4.1. Исторический экскурс

Процесс расщепления фотона на два фотона является еще одним ярким примером процесса, кинематически запрещённого в вакууме, но открытого во внешнем электромагнитном поле, изменяющем дисперсионные свойства фотонов.

Теоретическое исследование данного процесса имеет довольно длинную историю (см., например, обзор [122]). Впервые правильные формулы для расщепления фотона во внешнем постоянном и однородном магнитном поле были получены в начале 70-х годов в работах [236, 237]. В них процесс расщепления анализировался при малых энергиях фотонов ($\omega \ll m_e$) в слабом магнитном поле ($B \ll B_e$) с использованием эффективного лагранжиана Гейзенберга–Эйлера. При этом отмечалось, что низший не исчезающий вклад в амплитуду распада даёт однопетлевая шестиугольная диаграмма с тремя линиями внешнего поля, что приводит к характерной кубической зависимости от напряжённости магнитного поля. Более детальное исследование процесса было проведено Адлером в работе [164]. С учётом правил отбора по поляризациям была вычислена единственная разрешённая в колли-

неарном пределе амплитуда процесса при энергии распадающегося фотона меньше порога рождения электрон-позитронной пары ($\omega \leq 2m_e$). Величина поля считалась произвольной. Использовалась стандартная диаграммная техника Фейнмана, где пропагаторы виртуальных электронов в магнитном поле записывались в представлении собственного времени Фока–Швингера. Аналогичные вычисления в пределе скрещенного поля были проведены в работах [238, 239]. Позже процесс $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ рассматривался также в работах [165, 166].

Недавние достижения в астрофизике вновь привлекли внимание к индуцированному магнитным полем расщеплению фотона. Предполагается, что данный процесс мог бы объяснить специфику спектров наблюдаемых γ -вспышек [240], природа которых до сих пор неясна [241]. Существует ряд моделей, где источниками γ -вспышек являются астрофизические катаклизмы типа взрывов сверхновых или слияний нейтронных звёзд, в которых могут развиваться сильные магнитные поля, значительно превышающие критическое значение и достигающие величин порядка $10^{16} - 10^{17} \text{ Гс}$ [27, 28, 33, 34].

В работах [123–126] было продолжено изучение процесса расщепления фотона в сильном магнитном поле в связи с его возможными астрофизическими приложениями. При этом использовался коллинеарный предел, в котором возможна лишь одна конфигурация начальных и конечных поляризаций фотонов, $1 \rightarrow 22$ ($\gamma_{\parallel} \rightarrow \gamma_{\perp}\gamma_{\perp}$ в обозначениях Адлера [164]).

Далее будет исследовано расщепление фотона $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ с учётом того, что в сильном магнитном поле ($B \gg B_e$) дисперсия фотона [80] приводит к значительным отклонениям от коллинеарности кинематики данного процесса. В частном случае коллинеарной кинематики, когда все импульсы фотонов пропорциональны друг другу, наш результат совпадает с известным [124, 125].

4.4.2. Кинематика расщепления фотона $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$

Дисперсионные свойства фотонов первой и второй мод в сильном магнитном поле описываются уравнением (3.9), где функции $\Pi^{(1,2)}$ должны быть записаны в виде (3.13) и (3.14). Закон дисперсии для фотона второй моды изображён также на рис. 3.2. “Квадрат массы” фотона, $q^2 = q_{\parallel}^2 - q_{\perp}^2$, на этом рисунке есть расстояние по вертикали от дисперсионной кривой до прямой $q^2 = 0$. Для фотона первой моды, подставляя функцию (3.13) в уравнение (3.9), получим, что такой фотон имеет везде отрицательное и относительно малое значение q^2 . В действительности это имеет место, пока q_{\parallel}^2 ниже следующего циклотронного резонанса (3.12), при $q_{\parallel}^2 < (m_e + \sqrt{m_e^2 + 2eB})^2$,

так как только в этой области справедливо приближение (3.13) для функции $\Pi^{(1)}$. Фотон второй моды практически везде в области $4m_e^2 < q_{\parallel}^2 < (m_e + \sqrt{m_e^2 + 2eB})^2$ имеет также относительно малое, но положительное значение q^2 . Это означает, что в случае, когда все три фотона процесса $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ находятся в данной кинематической области, практически реализуется только коллинеарная кинематика. Известно, однако, что в коллинеарном пределе отлична от нуля амплитуда только одного канала $1 \rightarrow 22$. Но этот канал закрыт в данной области кинематически (квадрат “массы” начальной частицы меньше суммы квадратов “масс” конечных частиц).

Иная ситуация имеет место, когда конечный фотон второй моды попадает в кинематическую область $q_{\parallel}^2 < 4m_e^2$ (нижняя ветвь на дисперсионной кривой рис. 3.2), где он может иметь большое по модулю отрицательное значение q^2 . В этом случае реализуется существенная неколлинеарность кинематики, что открывает новые каналы, запрещённые в коллинеарном пределе. Кроме того, амплитуда разрешённого канала $1 \rightarrow 22$, полученная в коллинеарном пределе, недостаточна для вычисления вероятности процесса.

Таким образом, важную роль в кинематике рассматриваемого процесса играет окрестность точки $q_{\parallel}^2 = 4m_e^2$, где q^2 велик по модулю. Как уже отмечалось, это обусловлено явлением циклотронного резонанса в поляризации вакуума в присутствии магнитного поля, когда поляризационный оператор имеет особенности корневого типа в точках, где виртуальные электрон и позитрон в петле (см. рис. 3.1), становятся реальными на уровнях Ландау (см. формулу (3.12)). В пределе сильного поля, когда $q_0^2 \ll eB$, существенной остается только окрестность низшего резонанса, $n = n' = 0$, $q_{\parallel}^2 = 4m_e^2$. Следует отметить, что корневая особенность поляризационного оператора при $q_{\parallel}^2 = 4m_e^2$ не является характерной только для однопетлевого приближения, а обусловлена финитностью движения электрона и позитрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

Тот факт, что поляризационный оператор велик в сильном поле и особенно вблизи циклотронного резонанса, указывает на необходимость учёта больших радиационных поправок, которые сводятся к перенормировке волновых функций фотонов (см. (3.10), (3.11)). В действительности в пределе сильного поля существенной является перенормировка только для фотона второй моды.

Приведённый анализ основан на использовании поляризационного оператора фотона в однопетлевом приближении. Оправданность такого подхода обусловлена тем, что радиационные поправки к поляризационному оператору в сильном магнитном поле имеют, как максимум, дважды логариф-

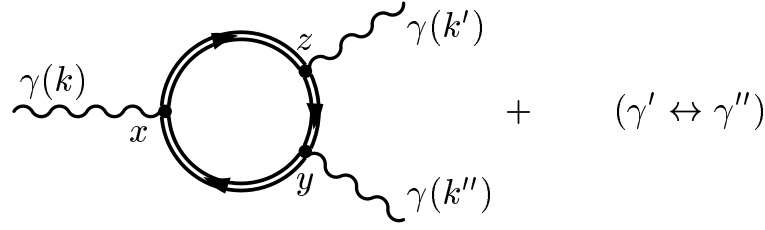


Рис. 4.6. Диаграмма Фейнмана для процесса расщепления фотона в магнитном поле

мическую зависимость от напряженности поля, $\sim (\alpha/\pi) \ln^2(B/B_e)$, происходящую от массового оператора электрона (см. работу [242]), а в пределе $B/B_e \gg \alpha^{-1}$ характер зависимости становится однологарифмическим, $\sim (\alpha/\pi) \ln(\pi/\alpha) \ln(B/B_e)$ [133].

4.4.3. Амплитуда процесса $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ в сильном магнитном поле

Процесс расщепления фотона в магнитном поле описывается диаграммой Фейнмана, изображенной на рис. 4.6.

Инвариантная амплитуда для процесса $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & e^3 \int d^4X d^4Y \text{Tr}\{\hat{\varepsilon}(k) \tilde{S}^F(Y) \hat{\varepsilon}(k'') \tilde{S}^F(-X-Y) \hat{\varepsilon}(k') \tilde{S}^F(X)\} \times \\ & \times e^{-ie(XFY)/2} e^{i(k'X - k''Y)} + (\varepsilon(k'), k' \leftrightarrow \varepsilon(k''), k''), \end{aligned} \quad (4.71)$$

где $X = z - x$, $Y = x - y$. Используя асимптотическое выражение для пропагатора электрона в сильном магнитном поле (2.60) и выполняя несложные интегрирования, получаем результат в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \simeq & -i \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} eB \int d^2p \text{Tr} \left\{ \hat{\varepsilon}(k) \frac{(p_2\gamma)_{\parallel} + m_e}{(p_2)_{\parallel}^2 - m_e^2} \hat{\varepsilon}(k'') \frac{(p\gamma)_{\parallel} + m_e}{p_{\parallel}^2 - m_e^2} \times \right. \\ & \times \left. \hat{\varepsilon}(k') \frac{(p_1\gamma)_{\parallel} + m_e}{(p_1)_{\parallel}^2 - m_e^2} \Pi_- \right\} + (\varepsilon(k'), k' \leftrightarrow \varepsilon(k''), k''), \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$p_1 = p + k', \quad p_2 = p - k''.$$

Как показывает анализ, хотя каждое слагаемое в амплитуде линейно растет с полем, суммарная амплитуда такого роста не содержит. Действительно, если во втором слагаемом в (4.72) после вычисления следа сделать замену переменных $p \rightarrow -p$, то оно в точности сокращает первое. Таким образом,

использование асимптотического представления (2.60) для пропагатора позволяет доказать сокращение линейного по полю вклада в амплитуду, но не даёт возможности выделить следующий член разложения по полю.

Анализ показывает, что выделение следующего члена разложения можно провести, подставляя в амплитуду (4.71) два пропагатора в асимптотической форме (2.60) и один – в виде (2.59), со всеми перестановками. Дальнейшие вычисления удобно производить, переходя от общего выражения (4.71) к парциальным амплитудам, связанным с фотонами, имеющими определённые поляризации (3.10), которые и являются стационарными состояниями в магнитном поле:

$$\mathcal{M}_{\lambda\lambda'\lambda''} = \mathcal{M}(\varepsilon^{(\lambda)}(k), \varepsilon^{(\lambda')}(k'), \varepsilon^{(\lambda'')}(k'')), \quad \lambda, \lambda', \lambda'' = 1, 2. \quad (4.73)$$

Таким образом, имеются четыре независимые амплитуды. В силу калибровочной инвариантности амплитуда рассматриваемого процесса исчезает при стремлении к нулю 4-импульса любого из фотонов. Это позволяет упростить вычисления, рассматривая “регуляризованную” амплитуду

$$\mathcal{M}_R(k', k'') = \mathcal{M}(k', k'') - \mathcal{M}(k', 0) - \mathcal{M}(0, k'') + \mathcal{M}(0, 0), \quad (4.74)$$

где добавочные слагаемые в действительности равны нулю, но амплитуда в виде (4.74) заведомо свободна от ультрафиолетовых расходимостей. Альтернативный путь, приводящий, как мы убедились, к тем же результатам, состоит в использовании размерной регуляризации при интегрировании в импульсном пространстве.

Мы получили следующие выражения для парциальных амплитуд с точностью до членов $O(1/B)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{111} &= 0, \\ \mathcal{M}_{112} &= i4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(k' \varphi k'')(k' \tilde{\varphi} k'')}{[(k')_{\perp}^2 (k'')_{\parallel}^2 k_{\perp}^2]^{1/2}} H\left(\frac{(k'')_{\parallel}^2}{4m_e^2}\right), \\ \mathcal{M}_{122} &= i4\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(k' \tilde{\Lambda} k'')}{[(k')_{\parallel}^2 (k'')_{\parallel}^2 k_{\perp}^2]^{1/2}} \left\{ (k \Lambda k'') H\left(\frac{(k')_{\parallel}^2}{4m_e^2}\right) + \right. \\ &\quad \left. + (k \Lambda k') H\left(\frac{(k'')_{\parallel}^2}{4m_e^2}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

где функция $H(z)$ определена в (3.18).

Амплитуда \mathcal{M}_{222} имеет громоздкий вид. Мы приведем здесь только её асимптотическое выражение в пределе больших энергий фотонов:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{222} \simeq & -i 16\pi \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \frac{(k' \varphi k'')(k' \tilde{\varphi} k'')}{[k_{\parallel}^2(k')_{\parallel}^2(k'')_{\parallel}^2]^{1/2}} \int_0^1 \frac{dx dy}{a(x, y)^2} \{ (k')_{\parallel}^2 (k'')_{\parallel}^2 (1-x)^2 + \\ & + 2k_{\parallel}^2 (k')_{\parallel}^2 xy^2 (1-xy) \} + (k' \leftrightarrow k''), \end{aligned} \quad (4.76)$$

где

$$a(x, y) = k_{\parallel}^2 xy(1-y) + (k')_{\parallel}^2 y(1-x) + (k'')_{\parallel}^2 (1-x)(1-y). \quad (4.77)$$

Отметим, что при вычислении этих парциальных амплитуд не использовались какие-либо кинематические ограничения на 4-импульсы k, k', k'' .

Как видно из выражений (4.75), (4.76), в коллинеарном пределе $k_{\alpha} \sim k'_{\alpha} \sim k''_{\alpha}$ парциальные амплитуды $\mathcal{M}_{112}, \mathcal{M}_{222}$ обращаются в нуль, а амплитуда \mathcal{M}_{122} отлична от нуля и в этом пределе совпадает с результатом работы [124]. Отметим, однако, что коллинеарный предел в сильном поле не исчерпывает фазовый объем процесса $1 \rightarrow 22$, поэтому результат [124] недостаточен для вычисления вероятности расщепления.

4.4.4. Вероятность расщепления фотона

Рассматриваемый процесс является трёхчастичным, однако его амплитуда не есть константа, в отличие от ситуации в вакууме, поскольку строится из инвариантов, содержащих не только 4-векторы импульсов частиц, но и тензор внешнего поля. Поэтому вычисление вероятности не сводится к умножению квадрата амплитуды на фазовый объём:

$$\begin{aligned} W_{\lambda\lambda'\lambda''}(\gamma \rightarrow \gamma'\gamma'') &= \frac{g}{32\pi^2\omega} \int |\mathcal{M}_{\lambda\lambda'\lambda''}|^2 Z_{\lambda} Z_{\lambda'} Z_{\lambda''} \times \\ &\times \delta(\omega_{\lambda}(k) - \omega_{\lambda'}(k') - \omega_{\lambda''}(k - k')) \frac{d^3 k'}{\omega_{\lambda'} \omega_{\lambda''}}, \end{aligned} \quad (4.78)$$

где множитель $g = 1 - \frac{1}{2} \delta_{\lambda'\lambda''}$ введен для учёта возможной тождественности фотонов в конечном состоянии, множители Z_{λ} учитывают возможные большие радиационные “поправки” в окрестности резонанса, сводящиеся к перенормировке волновой функции реального фотона с конкретным законом дисперсии $\omega = \omega_{\lambda}(k)$.

С учётом свойств амплитуд (4.75), (4.76) и кинематики процесса $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ разрешёнными каналами расщепления являются $1 \rightarrow 22$, $1 \rightarrow 12$, $2 \rightarrow 12$,

$2 \rightarrow 2$ 2. Отметим, что фотон второй моды может распадаться на два фотона только в кинематической области $k_{\parallel}^2 = \omega^2 - k_z^2 > 4m_e^2$. Однако в этой области для него имеется “древесный” канал $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ [224] с существенно большей вероятностью распада:

$$\frac{W(\gamma \rightarrow e^+ e^-)}{W(\gamma \rightarrow \gamma\gamma)} \sim \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{eB}{\omega^2} \right)^2 \gg 1. \quad (4.79)$$

Однако при $\omega < m_e + \sqrt{m_e^2 + 2eB}$ распад фотона первой моды на электрон-позитронную пару закрыт кинематически, и такой фотон в низшем неисчезающем приближении может распадаться только на два фотона. Следовательно, физический интерес с точки зрения возможных астрофизических приложений [233, 240] представляет вычисление вероятностей расщепления фотона по каналам $1 \rightarrow 22$ (разрешённый в коллинеарном пределе) и $1 \rightarrow 12$ (запрещённый в коллинеарном пределе).

Как видно из (4.78), вычисление вероятности является сложной математической задачей. Мы провели численный расчёт вероятности расщепления, результаты которого справедливы при $\omega^2 \sin^2 \theta \ll eB$ (θ – угол между векторами импульса распадающегося фотона \mathbf{k} и напряжённостью магнитного поля \mathbf{B}) и приведены на рис. 4.7–4.10.

Видно, что при высоких энергиях фотона оба канала дают существенный вклад в вероятность распада, причем “запрещённый” канал $1 \rightarrow 12$ доминирует.

В асимптотическом пределе $m_e^2 \ll \omega^2 \sin^2 \theta \ll eB$ для канала $1 \rightarrow 12$ получено аналитическое выражение для полной вероятности распада:

$$W \simeq \frac{\alpha^3 m_e^2}{4\omega} \frac{1-x}{x^2} \left[1 - x + 2x^2 + 2(1-x)(1+x)^2 \ln(1+x) + \right. \\ \left. + 2x^2 \frac{2-x^2}{1-x} \ln x \right], \quad x = \frac{2m_e}{\omega \sin \theta} \ll 1. \quad (4.80)$$

На рис. 4.9 этот результат изображен пунктирной линией 4. В системе отсчёта, где импульс распадающегося фотона перпендикулярен напряжённости магнитного поля \mathbf{B} , в этом же пределе получено выражение для спектра:

$$\frac{dW}{d\omega'} \simeq \frac{\alpha^3}{2} \frac{\sqrt{(\omega - \omega')^2 - 4m_e^2}}{\omega' + \sqrt{(\omega - \omega')^2 - 4m_e^2}}, \quad (4.81) \\ \frac{\omega}{2} - \frac{2m_e^2}{\omega} < \omega' < \omega - 2m_e,$$

где ω, ω' – энергии начального и конечного фотонов первой моды.

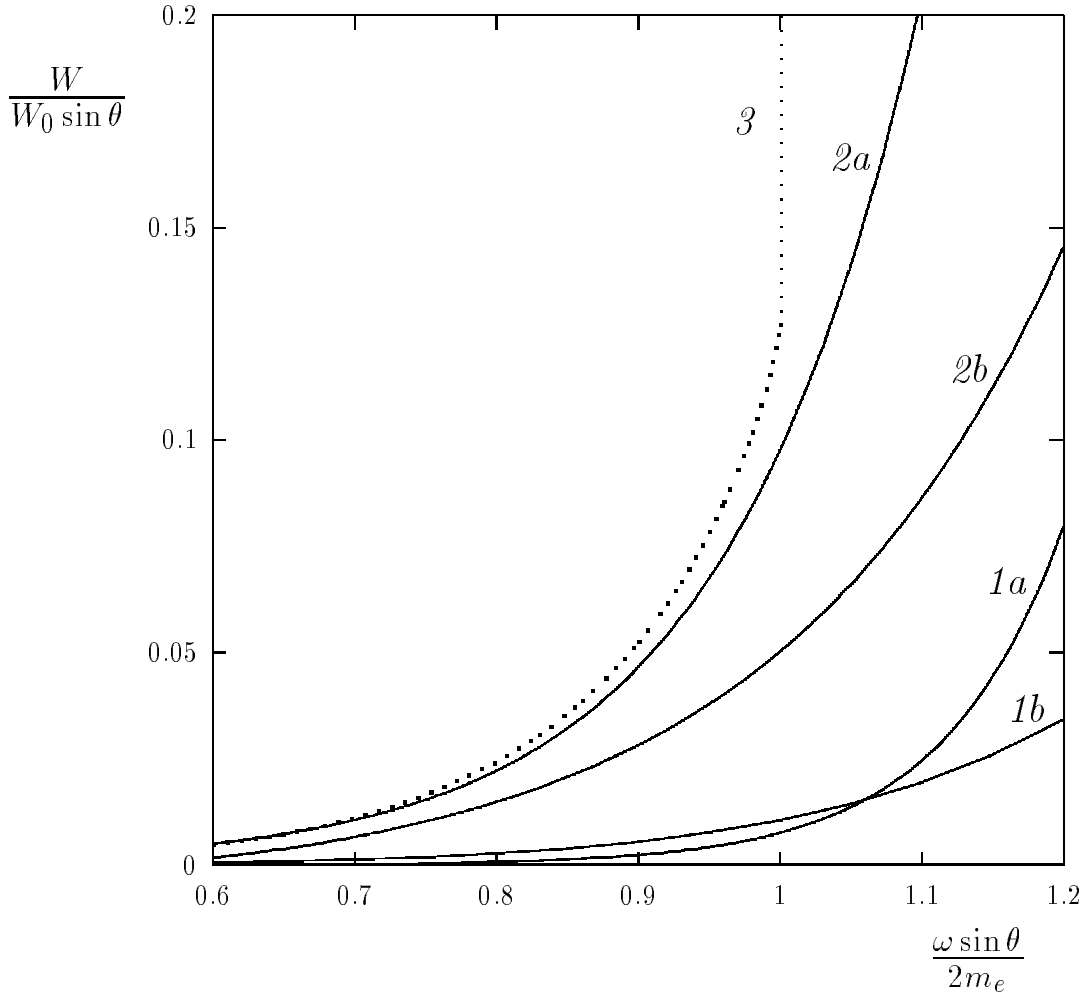


Рис. 4.7. Зависимость вероятности расщепления фотона $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ от его энергии ниже и вблизи порога рождения пары ($\omega \sin \theta \lesssim 2m_e$): $1a, 1b$ – для “запрещённого” канала $1 \rightarrow 12$ при напряжённости магнитного поля $B = 10^2 B_e$ и $10^3 B_e$ соответственно; $2a, 2b$ – для “разрешённого” канала $1 \rightarrow 22$ при напряжённости магнитного поля $B = 10^2 B_e$ и $10^3 B_e$ соответственно; 3 – для “разрешённого” канала $1 \rightarrow 22$ в коллинеарном приближении без учёта больших радиационных поправок; здесь $W_0 = (\alpha/\pi)^3 m_e$

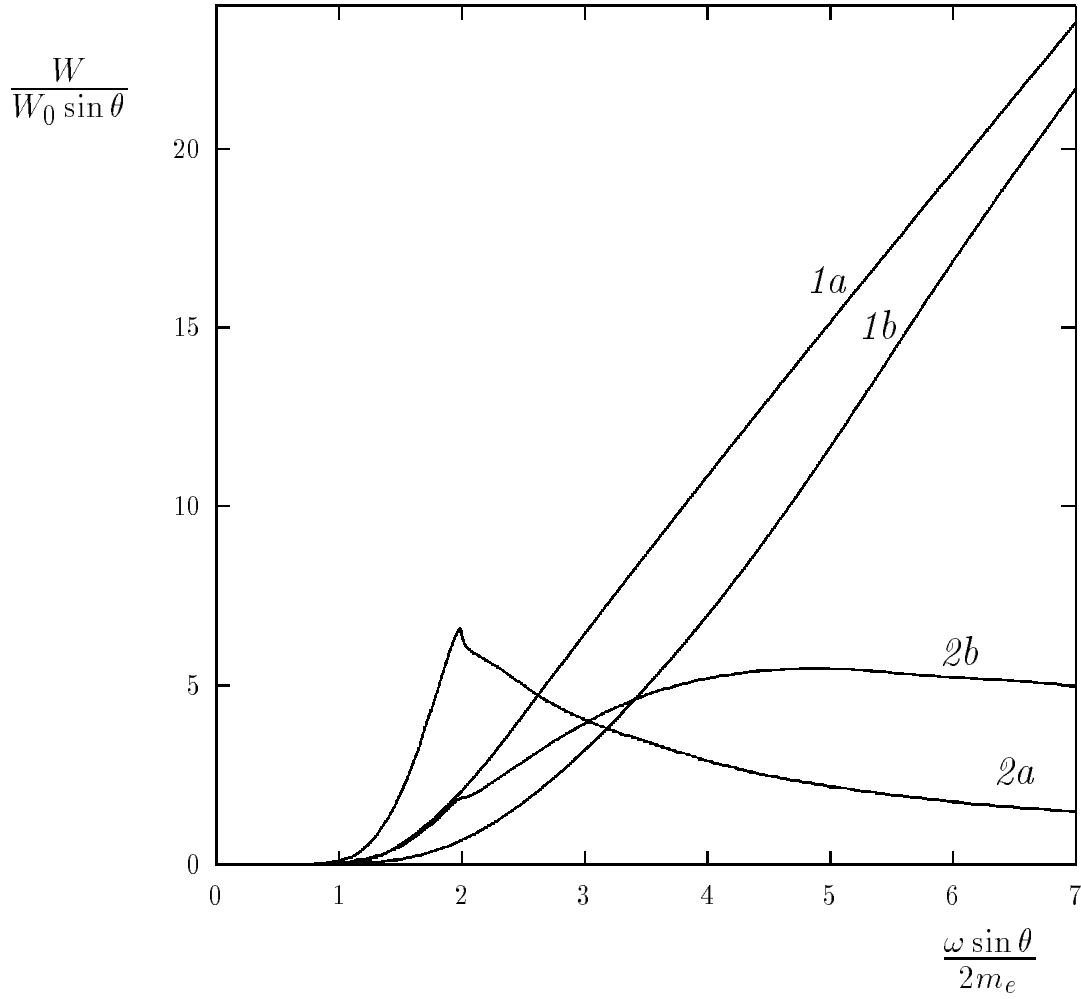


Рис. 4.8. Зависимость вероятности расщепления фотона $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ от его энергии выше порога рождения пары: $1a, 1b$ – для “запрещённого” канала $1 \rightarrow 12$ при напряжённости магнитного поля $B = 10^2 B_e$ и $10^3 B_e$ соответственно; $2a, 2b$ – для “разрешённого” канала $1 \rightarrow 22$ при напряжённости магнитного поля $B = 10^2 B_e$ и $10^3 B_e$ соответственно

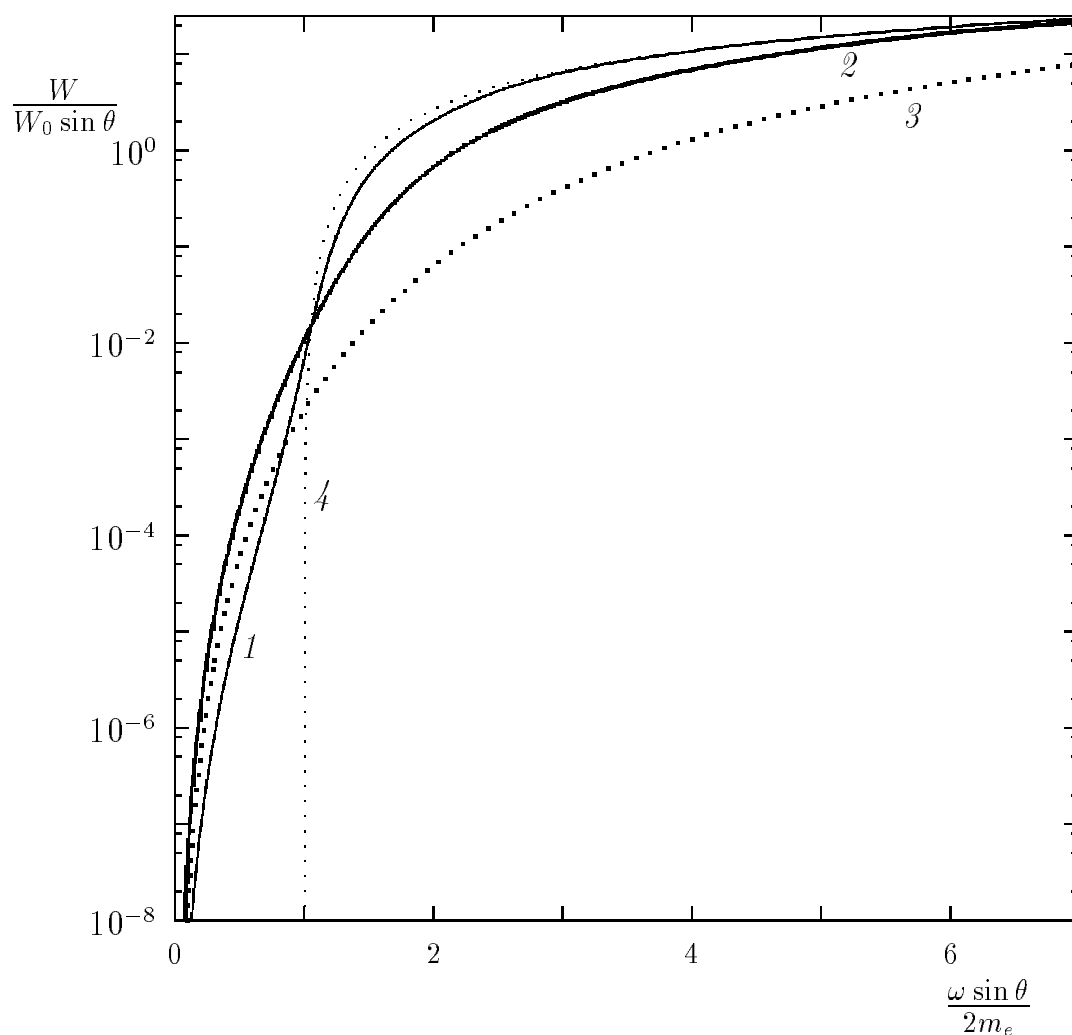


Рис. 4.9. Зависимость вероятности расщепления фотона по “запрещённому” каналу $1 \rightarrow 12$ от его энергии при различных значениях напряжённости магнитного поля: $B = 100 B_e$ (линия 1); $10^3 B_e$ (линия 2); $10^4 B_e$ (линия 3); линия 4 изображает вероятность, рассчитанную по асимптотической формуле (4.80)

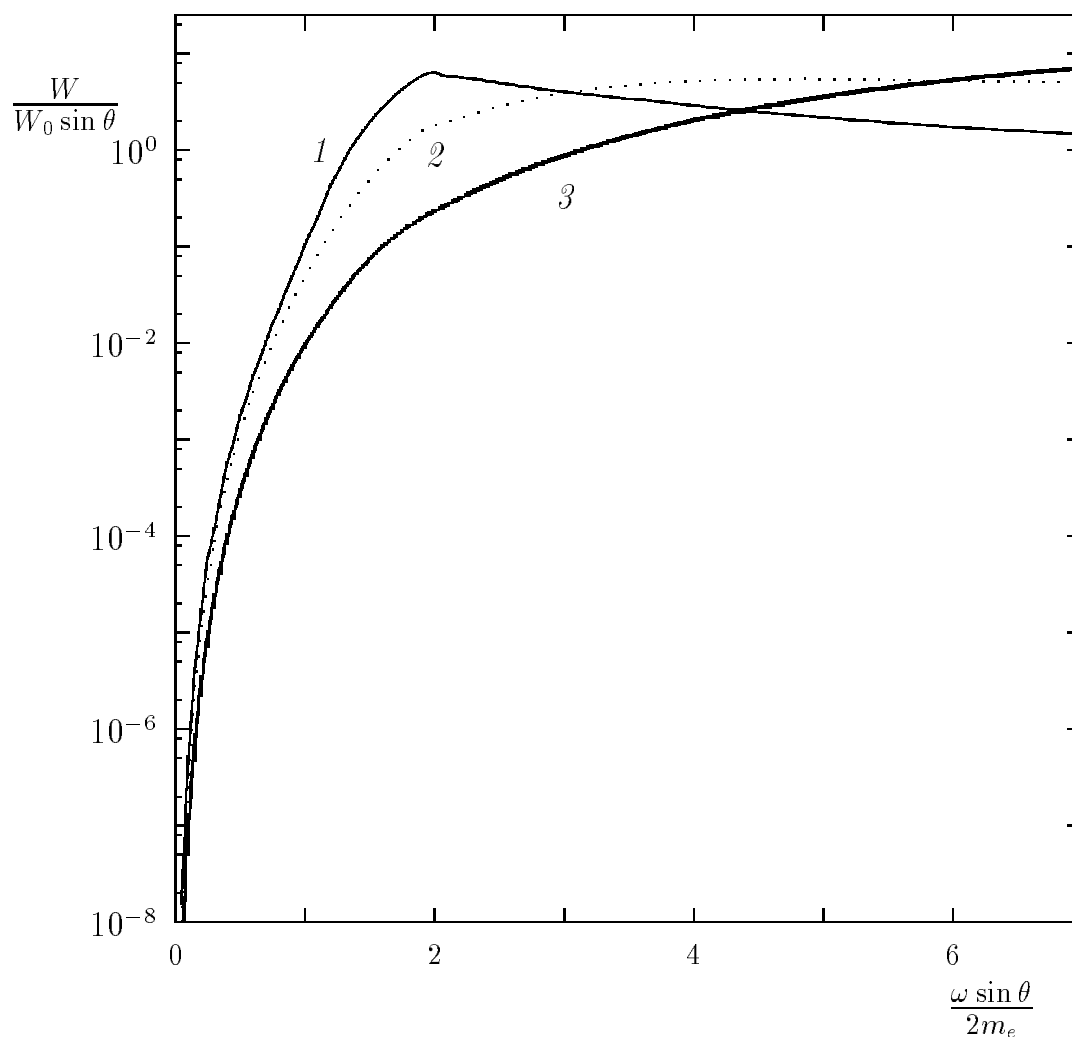


Рис. 4.10. Зависимость вероятности расщепления фотона по “разрешённому” каналу $1 \rightarrow 22$ от его энергии при различных значениях напряжённости магнитного поля: $B = 100 B_e$ (линия 1); $10^3 B_e$ (линия 2); $10^4 B_e$ (линия 3)

4.5. Электромагнитное взаимодействие дираковского нейтрино, обладающего магнитным моментом

4.5.1. Магнитный момент дираковского нейтрино – астрофизические проявления

Ненулевой по величине магнитный момент нейтрино открывает возможности для протекания различных процессов с переворотом спиральности, в которых левоспиральные нейтрино, рождённые внутри звезды, становятся правоспиральными, то есть стерильными по отношению к слабому взаимодействию, и это может быть важным, например, при учёте потерь энергии звёздами. В минимально расширенной стандартной модели с массивными нейтрино величина магнитного момента нейтрино была получена в работах [203, 204] в виде

$$\mu_\nu^{(SM)} = \frac{3e G_F m_\nu}{8\pi^2 \sqrt{2}} = 3.20 \times 10^{-19} \left(\frac{m_\nu}{1 \text{ эВ}} \right) \mu_B, \quad (4.82)$$

где m_ν – масса нейтрино, $\mu_B = e/2m_e$ – магнетон Бора³. С учётом известных пределов на массы нейтрино величина (4.82) пренебрежимо мала. Однако нетривиальные расширения стандартной модели (такие, как лево-правая симметрия) могут привести к более значительным величинам магнитного момента нейтрино.

Механизм переворота спиральности нейтрино $\nu_L \rightarrow \nu_R$ был применён впервые при попытке решить проблему солнечных нейтрино. При этом анализировались два различных сценария. Первый, основанный на вращении магнитного момента нейтрино в магнитном поле звезды, был рассмотрен в работах [243–245]. Во втором сценарии нейтрино меняют спиральность за счёт электромагнитного взаимодействия их магнитного момента с плазмой [246, 247]. Более полный список работ можно найти, например, в [248]. В обоих подходах было показано, что при $\mu_\nu < 10^{-10} \mu_B$ эффект слишком мал, чтобы существенно повлиять на решение проблемы солнечных нейтрино.

Ещё более сильные ограничения на величину μ_ν были установлены путём анализа физических процессов в других типах звёзд. Например, нестандартные нейтринные потери могли бы более существенно проявляться, приводя

³Мы используем естественную систему единиц $\hbar = c = k_B = 1$. $e > 0$ – элементарный заряд.

к задержке возгорания гелия, в ядрах красных гигантов малой массы, где плазма примерно на 4 порядка плотнее, чем в центре Солнца. Соответственно, был получен предел [249, 250]:

$$\mu_\nu < 0.3 \times 10^{-11} \mu_B. \quad (4.83)$$

Независимое ограничение на магнитный момент нейтрино было также установлено на основе анализа эволюции ранней Вселенной [251, 252]:

$$\mu_\nu < 6.2 \times 10^{-11} \mu_B, \quad (4.84)$$

где нейтринные столкновения с переворотами спиральности могли бы заметно увеличить число стерильных дираковских компонент в эпоху перед отщеплением нейтрино. Это, в свою очередь, стало бы причиной удвоения эффективного числа термально возбуждённых степеней свободы нейтрино и увеличения скорости расширения Вселенной, что привело бы к переизбытку гелия.

Интерес к возможным астрофизическим и космологическим проявлениям магнитного момента нейтрино стимулировал эксперименты по его измерению в лабораторных условиях. Наилучшее ограничение получено в недавнем эксперименте *GEMMA* по изучению рассеяния антинейтрино на электронах, поставленном на Калининской атомной станции коллаборацией ИТ-ЭФ (Москва) и ОИЯИ (Дубна). Верхняя граница на магнитный момент нейтрино составила [253]

$$\mu_\nu < 3.2 \times 10^{-11} \mu_B. \quad (4.85)$$

Этот результат более чем вдвое улучшил предыдущее лабораторное ограничение [254].

Заметным толчком для роста интереса к магнитному моменту нейтрино явилось знаменательное событие взрыва сверхновой *SN1987A*. Как известно, при взрыве сверхновой гигантские потоки нейтрино по сути определяют энергетику процесса, а это означает, что такая микроскопическая характеристика нейтрино, как магнитный момент, может иметь решающее влияние на макроскопические свойства этих астрофизических событий. Нейтрино левой спиральности, запертые внутри ядра сверхновой во время коллапса, могут перейти в правоспиральные. Этот процесс возможен благодаря взаимодействию магнитного момента дираковского нейтрино с виртуальным плазмоном, который может как рождаться, так и поглощаться:

$$\nu_L \rightarrow \nu_R + \gamma^*, \quad \nu_L + \gamma^* \rightarrow \nu_R. \quad (4.86)$$

Эти стерильные нейтрино, покидая ядро, могли бы не оставить достаточно энергии, необходимой для объяснения наблюдаемой нейтринной светимости сверхновой. Отсюда может быть установлена верхняя граница на магнитный момент нейтрино.

Данный вопрос в различных аспектах рассматривался многими авторами [255–259]. Так, в работе [257] анализировался переворот спиральности нейтрино за счёт процессов рассеяния внутри ядра сверхновой, $\nu_L e^- \rightarrow \nu_R e^-$ и $\nu_L p \rightarrow \nu_R p$, непосредственно после коллапса. Принимая верхний предел на светимость правых нейтрино в виде $L_{\nu_R} \sim 10^{53}$ эрг/сек, авторы [257] получили ограничение сверху на магнитный момент нейтрино:

$$\mu_\nu < (0.2 - 0.8) \times 10^{-11} \mu_B. \quad (4.87)$$

Однако в работе [257] не были учтены существенные в данном случае поляризационные эффекты плазмы в фотонном пропагаторе. Вместо этого дисперсия фотона учитывалась феноменологически, путём включения специальным образом подобранной термальной массы фотона. Детальное исследование этого вопроса было проведено в работах [260, 261], где был применён формализм термальной теории поля для учёта влияния горячей плотной астрофизической плазмы на фотонный пропагатор. Верхняя граница на магнитный момент нейтрино была улучшена в [260, 261] на фактор 2 по сравнению с результатом [257]:

$$\mu_\nu < (0.1 - 0.4) \times 10^{-11} \mu_B. \quad (4.88)$$

Рассматривая промежуточные результаты аналитических вычислений, представленные в работах [260, 261], можно видеть, что авторами был учтён только вклад электронов плазмы, тогда как вкладом протонной составляющей они пренебрегли. Следует отметить, что в работе [257] электронный и протонный вклады в процесс переворота спиральности нейтрино рассматривались как вклады одного порядка. Необходимо также заметить, что улучшение ограничения (4.88) по отношению к ограничению (4.87) было основано отчасти на завышении на фактор 2 объёма ядра сверхновой в работах [260, 261] по сравнению с [257], в то время как плотность была взята той же величины, $\rho_c \simeq 8 \times 10^{14}$ г/см³. Это значит, что масса ядра в работах [260, 261] оказалась порядка $3 M_\odot$, что примерно в два раза больше массы остатка сверхновой, считающейся типичной.

Детальный анализ процессов конверсии спиральности нейтрино (4.86), обусловленных взаимодействием как с электронами, так и с протонами плазмы через виртуальный плазмон, с учётом поляризационных эффектов плазмы на фотонный пропагатор был осуществлён в [262]. В частности, вклад

протонной компоненты плазмы оказался не только существенным, но даже доминирующим.

Однако все предыдущие исследования [255–262] были основаны на очень упрощённых моделях ядра сверхновой как однородного шара с некоторыми усреднёнными величинами физических параметров. Более того, величины параметров выглядят по современным представлениям скорее завышенными, чем типичными.

Далее мы, следуя работам [263, 264], производим оценку магнитного момента дираковского нейтрино на основе ограничения на вклад излучения ν_R в светимость ядра сверхновой более надёжным, чем в предыдущих работах, образом, используя радиальные распределения и временную эволюцию физических параметров из нескольких более реалистичных моделей ядра сверхновой.

Мы рассматриваем только дираковские нейтрино, поскольку в этом случае взаимодействие магнитного момента нейтрино (и диагональных, и недиагональных составляющих) с фотонами переводит активные левые нейтрино в правые, которые стерильны по отношению к слабому взаимодействию. Случай майорановских нейтрино в данном аспекте не представляет интереса, поскольку рождающиеся правые антинейтринные состояния при этом не стерильны.

Будет проведено вычисление амплитуды процесса переворота спиральности за счёт рассеяния на компонентах плазмы и получено общее выражение для вероятности рождения правых нейтрино с фиксированной энергией. Будет произведена оценка светимости ядра по отношению к излучению ν_R и получено ограничение сверху на магнитный момент нейтрино с учётом радиальных распределений и временной эволюции физических параметров.

4.5.2. Взаимодействие нейтрино с астрофизической средой

Переворот спиральности нейтрино происходит при его рассеянии через промежуточный фотон (плазмон) на электромагнитном токе компонент плазмы – электронов, $\nu_L e^- \rightarrow \nu_R e^-$, протонов, $\nu_L p \rightarrow \nu_R p$ и т. д. Полный лагранжиан процесса состоит из двух частей. Первая представляет собой взаимодействие нейтрино, имеющего магнитный момент, с фотонами, а вторая часть описывает взаимодействие плазмы с фотонами:

$$\mathcal{L} = -\frac{i}{2} \sum_{i,j} \mu_{\nu}^{ij} (\bar{\nu}_j \sigma_{\alpha\beta} \nu_i) F^{\alpha\beta} - e J_{\alpha} A^{\alpha}, \quad (4.89)$$

где $\sigma_{\alpha\beta} = (1/2)(\gamma_\alpha\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma_\alpha)$, $F^{\alpha\beta}$ – тензор электромагнитного поля фотона, $J_\alpha = -(\bar{e}\gamma_\alpha e) + (\bar{p}\gamma_\alpha p) + \dots$ – электромагнитный ток в общем случае, образованный различными компонентами среды, т. е. свободными электронами и позитронами, протонами, свободными ионами и т. д. Магнитный момент нейтрино в общем случае представляет собой матрицу $\mu_{\nu_i\nu_j} \equiv \mu_\nu^{ij}$, содержащую как диагональные, так и переходные магнитные моменты, где ν_i, ν_j – состояния нейтрино с определённой массой. Нейтринные состояния ν_ℓ с определёнными ароматами ℓ , рождающиеся в слабых процессах, являются суперпозициями состояний ν_i :

$$\nu_\ell = \sum_i U_{\ell i}^* \nu_i, \quad (4.90)$$

где $U_{\ell i}$ – унитарная матрица лептонного смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакавы [174, 175, 265, 266], аналогичная матрице Кабиббо–Кобаяши–Маскава [267, 268]. Далее мы будем рассматривать для простоты диагональный магнитный момент нейтрино μ_ν . Расширение на общий случай матрицы магнитных моментов μ_ν^{ij} не представляет сложности и состоит в том, что величина магнитного момента во всех последующих выражениях должна рассматриваться как эффективное значение. Например, для процессов с начальными электронными нейтрино под μ_ν следует понимать величину

$$\mu_\nu \rightarrow \mu_{\nu_e} \equiv \left(\sum_i \left| \sum_j \mu_\nu^{ij} U_{ej} \right|^2 \right)^{1/2}. \quad (4.91)$$

Аналогичные подстановки следует использовать для начальных мюонного и тау-нейтрино.

Процесс переворота спиральности нейтрино при рассеянии на компонентах плазмы описывается фейнмановской диаграммой, изображённой на рис. 4.11.

Техника вычисления вероятности переворота спиральности нейтрино вполне стандартна. Инвариантная амплитуда для процесса рассеяния нейтрино на k -й компоненте плазмы может быть записана в форме

$$\mathcal{M}^{(k)} = -ie \mu_\nu j_{(\nu)}^\alpha G_{\alpha\beta}(Q) J_{(k)}^\beta, \quad (4.92)$$

где $j_{(\nu)}^\alpha$ – фурье-образ тока магнитного момента нейтрино,

$$j_{(\nu)}^\alpha = [\bar{\nu}_R(p') \sigma^{\mu\alpha} \nu_L(p)] Q_\mu,$$

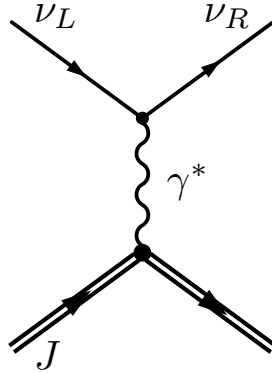


Рис. 4.11. Диаграмма Фейнмана для переверота спиральности нейтрино при рассеянии через промежуточный плазмон γ^* на электромагнитном токе плазмы J

$J_{(k)}^\beta$ – фурье-образ k -й компоненты электромагнитного тока плазмы, $Q = (q_0, \mathbf{q})$ – передаваемый 4-импульс. Единственная принципиальная особенность – использование фотонного пропагатора $G_{\alpha\beta}(Q)$ с учётом поляризационных эффектов плазмы.

4.5.3. Вероятность рождения правых нейтрино

Физический интерес представляет величина, определяющая вероятность рождения правого нейтрино $\Gamma_{\nu_R}(E')$ с фиксированной энергией E' , просуммированная по всем состояниям начальных левых нейтрино. Эта функция может быть получена интегрированием квадрата амплитуды (4.92) по состояниям начальных левых нейтрино и по состояниям начальных и конечных частиц плазмы, образующих электромагнитный ток $J_{(k)}^\beta$:

$$\Gamma_{\nu_R}(E') = \sum_k \Gamma_{\nu_R}^{(k)}(E'), \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu_R}^{(k)}(E') &= \frac{1}{16(2\pi)^5 E'} \int \sum_{s,s'} |\mathcal{M}^{(k)}|^2 \delta^{(4)}(p' + \mathcal{P}' - p - \mathcal{P}) \times \\ &\times \frac{d^3\mathbf{P}}{\mathcal{E}} f_k(\mathcal{E}) \frac{d^3\mathbf{P}'}{\mathcal{E}'} [1 \mp f_k(\mathcal{E}')] \frac{d^3\mathbf{p}}{E} f_\nu(E). \end{aligned} \quad (4.94)$$

Здесь $p^\alpha = (E, \mathbf{p})$ и $p'^\alpha = (E', \mathbf{p}')$ – 4-импульсы начального и конечного нейтрино, $\mathcal{P}^\alpha = (\mathcal{E}, \mathbf{P})$ и $\mathcal{P}'^\alpha = (\mathcal{E}', \mathbf{P}')$ – 4-импульсы начальной и конечной частиц плазмы; $\sum_{s,s'}$ означает суммирование по спинам этих частиц, индекс $k = e, p, i, \dots$ соответствует типу частиц плазмы (электроны, протоны, свободные ионы и т. д.) с функцией распределения $f_k(\mathcal{E})$, которая может

быть как фермионной (верхний знак в $[1 \mp f_k(\mathcal{E}')]])$, так и бозонной (нижний знак); $f_\nu(E) = (e^{E/T - \eta_\nu} + 1)^{-1}$ – функция распределения Ферми–Дирака для начальных левых нейтрино в системе покоя плазмы, η_ν – химический потенциал нейтрино, отнесённый к температуре.

В уравнении (4.94) удобно перейти от интегрирования по начальному импульсу нейтрино \mathbf{p} к интегрированию по импульсу виртуального плазмона $p - p' = Q = (q_0, \mathbf{q})$, $|\mathbf{q}| \equiv q$. Такой переход определяется соотношением

$$\frac{d^3\mathbf{p}}{E} f_\nu(E) = \frac{2\pi}{E'} q dq dq_0 \theta(-Q^2) \theta(2E' + q_0 - q) f_\nu(E' + q_0).$$

Подставляя квадрат амплитуды (4.92) в уравнение (4.94), получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu R}(E') &= \frac{\mu_\nu^2}{8\pi^2 E'^2} \int_{-E'}^{\infty} dq_0 \int_{|q_0|}^{2E'+q_0} q dq f_\nu(E' + q_0) j_{(\nu)}^\alpha j_{(\nu)}^{\alpha'*} \times \\ &\times \sum_{\lambda, \lambda'} \frac{\rho_{\alpha\beta}(\lambda) \rho_{\alpha'\beta'}(\lambda')}{(Q^2 - \Pi_\lambda)(Q^2 - \Pi_{\lambda'}^*)} T^{\beta\beta'}, \end{aligned} \quad (4.95)$$

где введён следующий тензорный интеграл:

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \frac{e^2}{32\pi^2} \sum_k \sum_{s, s'} \int J_{(k)}^\alpha J_{(k)}^{\beta*} d\Phi, \\ d\Phi &= \frac{d^3\mathbf{P} d^3\mathbf{P}'}{\mathcal{E} \mathcal{E}'} f_k(\mathcal{P}) [1 \mp f_k(\mathcal{P}')] \delta^{(4)}(\mathcal{P}' - \mathcal{P} - Q). \end{aligned} \quad (4.96)$$

Вычисление тензора $T^{\alpha\beta}$ удобно произвести, используя его ковариантные свойства, для чего необходимо записать функцию распределения $f_k(\mathcal{P})$ в произвольной системе отсчёта:

$$f_k(\mathcal{P}) = \left[\exp\left(\frac{(\mathcal{P}u)}{T} - \eta\right) \pm 1 \right]^{-1}, \quad (4.97)$$

где u_α – 4-вектор скорости плазмы. Этот вектор, а также 4-вектор Q_α являются “строительным материалом” для формирования тензора $T^{\alpha\beta}$. Поскольку электромагнитный ток $J_{(k)}^\alpha$ является вещественным, тензор $T^{\alpha\beta}$ симметричен. Кроме того, он ортогонален 4-вектору Q_α в силу сохранения электромагнитного тока. Легко видеть, что существуют только две

независимые структуры, обладающие такими свойствами – это матрицы плотности (3.40) и (3.41). Таким образом, можно записать

$$T^{\alpha\beta} = \mathcal{A}^{(t)} \rho_{\alpha\beta}(t) + \mathcal{A}^{(\ell)} \rho_{\alpha\beta}(\ell). \quad (4.98)$$

В силу ортогональности тензоров $\rho_{\alpha\beta}(t)$ и $\rho_{\alpha\beta}(\ell)$ (см. (3.43)), получаем

$$\mathcal{A}^{(t)} = \frac{1}{2} T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}(t) = \frac{e^2}{64 \pi^2} \rho_{\alpha\beta}(t) \sum_k \sum_{s,s'} \int J_{(k)}^\alpha J_{(k)}^{\beta*} d\Phi, \quad (4.99)$$

$$\mathcal{A}^{(\ell)} = T^{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta}(\ell) = \frac{e^2}{32 \pi^2} \rho_{\alpha\beta}(\ell) \sum_k \sum_{s,s'} \int J_{(k)}^\alpha J_{(k)}^{\beta*} d\Phi. \quad (4.100)$$

Можно показать, что именно интегралы (4.99) и (4.100) определяют вероятности поглощения (при $q_0 > 0$) и рождения (при $q_0 < 0$) плазмона частицами плазмы. Действительно, рассмотрим для определённости вероятность поглощения поперечного плазмона частицами плазмы, образующими электромагнитный ток $J_{(k)}^\beta$. Амплитуда процесса имеет вид

$$\mathcal{M}^{(k)}(t) = -e \varepsilon_\alpha(t) J_{(k)}^\alpha, \quad (4.101)$$

где $\varepsilon_\alpha(t)$ – единичный 4-вектор поляризации. Производя стандартные вычисления, для вероятности поглощения плазмона всеми компонентами плазмы находим

$$\Gamma_{(t)}^{abs} = \frac{1}{32 \pi^2 q_0} \frac{1}{2} \sum_\tau \sum_k \sum_{s,s'} \int |\mathcal{M}^{(k)}(t)|^2 d\Phi, \quad (4.102)$$

где суммирование производится по всем k типам частиц плазмы и по поляризациям всех частиц, участвующих в процессе, индекс $\tau = 1, 2$ нумерует поляризации плазмона, индексы s, s' введены для спиновых состояний частиц плазмы.

Подставляя амплитуду (4.101) в (4.102),

$$\Gamma_{(t)}^{abs} = \frac{e^2}{64 \pi^2 q_0} \rho_{\alpha\beta}(t) \sum_k \sum_{s,s'} \int J_{(k)}^\alpha J_{(k)}^{\beta*} d\Phi, \quad (4.103)$$

где $\rho_{\alpha\beta}(t) = \sum_{\tau=1}^2 \varepsilon_\alpha^\tau(t) \varepsilon_\beta^\tau(t)$, и, сравнивая её с (4.99), можно найти величину

$$\mathcal{A}^{(t)} = q_0 \Gamma_{(t)}^{abs}. \quad (4.104)$$

Применяя известное соотношение [269] между вероятностью поглощения поперечного плазмона и мнимой частью I_t собственного значения Π_t тензора поляризации фотона $\Pi_{\alpha\beta}$

$$I_t(q_0) = -q_0 \left(1 - e^{-q_0/T}\right) \Gamma_{(t)}^{abs}, \quad (4.105)$$

выразим величину $\mathcal{A}^{(t)}$ через I_t :

$$\mathcal{A}^{(t)} = -\frac{I_t}{1 - e^{-q_0/T}} = -I_t [1 + f_\gamma(q_0)], \quad (4.106)$$

где $f_\gamma(q_0) = (e^{q_0/T} - 1)^{-1}$ — функция распределения Бозе–Эйнштейна для фотонов. Это соотношение, полученное в случае $q_0 > 0$, также верно для случая $q_0 < 0$, который соответствует рождению поперечного плазмона с энергией $\omega = -q_0 > 0$. Здесь необходимо применить связь между мнимой частью I_t и вероятностью рождения поперечного плазмона:

$$I_t(\omega) = -\omega \left(e^{\omega/T} - 1\right) \Gamma_{(t)}^{cr}. \quad (4.107)$$

Также важна нечётность функции I_t :

$$I_t(-q_0) = -I_t(q_0), \quad (4.108)$$

и эта особенность происходит от свойств запаздывающего поляризационного оператора.

Легко проверить, что соотношение (4.106) справедливо также для продольного плазмона. Необходимо помнить, что $\rho_{\alpha\beta}(\ell) = -\varepsilon_\alpha(\ell) \varepsilon_\beta(\ell)$ и

$$I_\ell(q_0) = q_0 \left(1 - e^{-q_0/T}\right) \Gamma_{(\ell)}^{abs}. \quad (4.109)$$

Окончательно получаем тензор $T^{\alpha\beta}$ в виде

$$T^{\alpha\beta} = [-I_t \rho^{\alpha\beta}(t) - I_\ell \rho^{\alpha\beta}(\ell)] [1 + f_\gamma(q_0)]. \quad (4.110)$$

Подставляя (4.110) в (4.95), используя ортогональность тензоров $\rho^{\alpha\beta}(t)$ и $\rho^{\alpha\beta}(\ell)$ (3.43) и учитывая выражения для свёрток нейтринного тока с этими тензорами

$$j_{(\nu)}^\alpha j_{(\nu)}^{\beta*} \rho_{\alpha\beta}(t) = Q^4 \left[\frac{(2E' + q_0)^2}{q^2} - 1 \right],$$

$$j_{(\nu)}^\alpha j_{(\nu)}^{\beta*} \rho_{\alpha\beta}(\ell) = -Q^4 \frac{(2E' + q_0)^2}{q^2},$$

для вероятности рождения правых нейтрино в итоге получаем

$$\Gamma_{\nu_R}(E') = \frac{\mu_\nu^2}{16\pi^2 E'^2} \int_{-E'}^{\infty} dq_0 \int_{|q_0|}^{2E'+q_0} q^3 dq f_\nu(E' + q_0) (2E' + q_0)^2 \times \\ \times \left(1 - \frac{q_0^2}{q^2}\right)^2 [1 + f_\gamma(q_0)] \left[\left(1 - \frac{q^2}{(2E' + q_0)^2}\right) \varrho_t - \varrho_\ell \right]. \quad (4.111)$$

Здесь введены спектральные плотности плазмона

$$\varrho_\lambda = \frac{-2 I_\lambda}{(Q^2 - R_\lambda)^2 + I_\lambda^2}, \quad (4.112)$$

которые определяются собственными значениями (3.44) тензора поляризации фотонов (3.39).

Формула (4.111) представляет наш основной результат. Заметим, что она находится в согласии, с точностью до обозначений, с вероятностью, полученной в работе [252] из анализа запаздывающего собственно-энергетического оператора нейтрино правой спиральности. Однако, извлекая из нашего общего выражения только вклад электронов, мы получаем результат, который больше в 2 раза, чем соответствующее выражение, полученное в статьях [260, 261]. Можно видеть, что в этих работах ошибка содержится непосредственно в первой формуле, определяющей вероятность рождения правых нейтрино.

Наша формула (4.111), полученная для процесса взаимодействия нейтрино с виртуальными фотонами, фактически имеет более общий смысл и может быть использована для нейтрино-фотонных процессов в любой оптически активной среде. Необходимо только определить функции спектральной плотности фотонов ϱ_λ . Например, в среде, где $I_t \rightarrow 0$ в пространственно-подобной области $Q^2 < 0$, что соответствует величинам коэффициента преломления $n > 1$, функция спектральной плотности переходит в δ -функцию. При этом воспроизводится результат работы [270], посвящённой исследованию так называемого нейтринного черенковского излучения, когда нейтрино в среде излучает поперечный фотон.

4.5.4. Вклады компонент плазмы в процессы рассеяния нейтрино

Как было отмечено выше, анализ процессов переворота спиральности нейтрино проводится с учётом рассеяния нейтрино на различных компонен-

тах плазмы: электронах, протонах, свободных ионах и т. д. Поскольку эти процессы некогерентны и вероятности различных каналов складываются, имеет смысл рассмотрение отдельного вклада рассеяния нейтрино на электронах в вероятность рождения правых нейтрино. Это означает, что нужно учесть только электронный вклад в функцию I_λ , находящуюся в числителе уравнения (4.112). Необходимо отметить, однако, что функции R_λ и I_λ в знаменателе уравнения (4.112) при этом будут содержать вклады всех компонент плазмы. Здесь наш результат для рассеяния нейтрино на электронах отличается от результата работ [260, 261], где не только в числителе, но и в знаменателе спектральных плотностей плазмона был учтён лишь электронный вклад, что некорректно.

Как видно из анализа, проведённого в п. 3.4, электронный и протонный вклады в мнимые части I_λ собственных значений Π_λ тензора поляризации фотонов имеют одинаковый порядок величины и одинаковый знак как при $\lambda = t$, так и при $\lambda = \ell$ (см. рис. 3.5 и 3.7). Это обстоятельство само по себе должно вести к уменьшению вклада электронов в функцию $\Gamma_{\nu_R}(E')$. Кроме того, из рис. 3.4 видно, что электронный и протонный вклады в действительную часть R_ℓ собственного значения Π_ℓ — одного порядка величины, но имеют противоположные знаки в области, где мнимая часть электронного вклада в числителе уравнения (4.112) относительно велика. В результате вклад рассеяния нейтрино на электронах в вероятность рождения нейтрино правой спиральности, полученный нами, оказался близким к результату работ [260, 261], за исключением упомянутого выше фактора 2.

Подобным же образом можно исследовать вклад в вероятность рождения правых нейтрино от рассеяния нейтрино на протонах. В этом случае следует брать только протонный вклад в функции I_λ (3.49), (3.51) в числителе уравнения (4.112).

Результаты нашего численного анализа отдельных вкладов рассеяния нейтрино на электронах и протонах, а также полной вероятности рождения ν_R при характерных условиях ядра сверхновой представлены на рис. 4.12.

Приведённая на графике безразмерная ширина $\mathcal{R}(E')$ определяется выражением

$$\Gamma_{\nu_R}(E') = \mu_\nu^2 \eta_e^3 T^3 \mathcal{R}(E'). \quad (4.113)$$

Для сравнения результат работы [261] также изображён на рис. 4.12, иллюстрирующем сильное занижение вероятности переворота спиральности нейтрино, допущенное этими авторами.

Мы также рассмотрели вклад рассеяния нейтрино на свободных ионах в вероятность рождения ν_R . Необходимо отметить, что в этом случае основ-

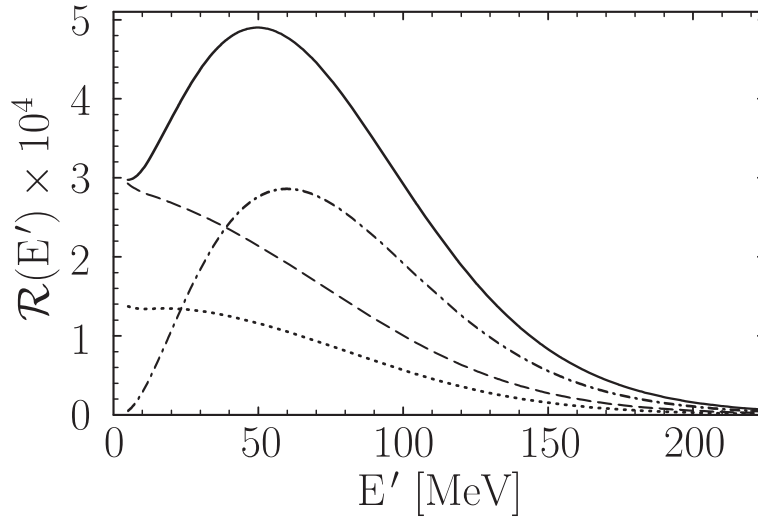


Рис. 4.12. Вклады от электронов (штриховая линия) и протонов (штрихпунктирная линия) в обезразмеренную ширину $\mathcal{R}(E')$ рождения ν_R , и полная ширина (сплошная линия) для температуры плазмы $T = 25$ МэВ и относительных химических потенциалов электронов и нейтрино $\eta_e = 10$ и $\eta_{\nu_e} = 4$ соответственно; пунктирной линией изображён результат работы [261]

ной вклад в вероятность рождения ν_R дают продольные виртуальные плазмоны. Как видно из уравнений (3.58), функция $I_\ell^{(i)}$ отлична от нуля только в узкой области Δx переменной $x = q_0/q$, а именно $\Delta x \sim \sqrt{T/m_i} \ll 1$, где m_i – масса иона. Это даёт возможность произвести вычисление ионного вклада в вероятность рождения ν_R аналитически и получить соотношение

$$\Delta \Gamma_{\nu_R}^{(i)}(E') = \mu_\nu^2 \alpha Z_i^2 n_i f_\nu(E') \left(\ln \frac{4E'^2 + m_D^2}{m_D^2} - \frac{4E'^2}{4E'^2 + m_D^2} \right), \quad (4.114)$$

где α – постоянная тонкой структуры, eZ_i и n_i – заряд и плотность ионов, m_D имеет смысл обратного радиуса экранирования Дебая, $m_D^2 = \sum_k R_\ell^{(k)}(q_0 = 0)$, где суммирование производится по всем компонентам плазмы. Интересно заметить, что уравнение (4.114), полученное в приближении тяжёлых ионов, достаточно удовлетворительно описывает вклад протонов.

При помощи полученной функции $\Gamma_{\nu_R}(E')$ можно вычислить полное число правых нейтрино, излучённых в расчёте на 1 МэВ шкалы энергий, за единицу времени из единичного объёма, то есть спектр энергий правоспиральных нейтрино:

$$\frac{dn_{\nu_R}}{dE'} = \frac{E'^2}{2\pi^2} \Gamma_{\nu_R}(E'). \quad (4.115)$$

Спектр энергий правых нейтрино (4.115) может быть использован для исследования возможных механизмов переноса энергии этими нейтрино во

внешние слои оболочки сверхновой. Например, возможен процесс обратной конверсии части правых нейтрино в левые с их последующим поглощением. Именно эти процессы были предложены А. Даром [271] и затем исследованы в работах [272–276] в качестве одного из предполагаемых механизмов стимулирования затухающей ударной волны при взрыве сверхновой.

4.5.5. Ограничения на магнитный момент нейтрино

Полученные выше формулы могут быть использованы для установления ограничения сверху на магнитный момент нейтрино путём сравнения светимости ядра сверхновой, вычисленной из спектра энергии правых нейтрино (4.115), со светимостью левых нейтрино $L_{\nu_L} \sim 10^{52} - 10^{53}$ эрг/сек [1, 277].

Далее мы проводим более надёжную оценку магнитного момента нейтрино, чем это делалось ранее, с учётом радиальных распределений и эволюции физических параметров во времени из реалистичных моделей ядра сверхновой. Верхние ограничения получены на комбинацию эффективных магнитных моментов электронного, мюонного и тау-нейтрино. Основой для данных ограничений является условие достаточно малого влияния испускания правых нейтрино в течение 1–2 секунд после коллапса на последующую стадию взрыва сверхновой, так называемую стадию Кельвина–Гельмгольца. Модели рассматриваются в обратном хронологическом порядке.

В настоящее время существует несколько групп астрофизиков, занимающихся моделированием взрыва сверхновой. По нашему запросу нам были любезно предоставлены Х.-Т. Янкой (Гархинг, Германия) ещё не опубликованные результаты ⁴ недавнего моделирования коллапса кислородно-неоново-магниевого ядра сверхновой. Данная модель Х.-Т. Янки с соавторами является продолжением модельных расчётов, описанных в работах [278, 279]. Результат успешного взрыва для данной модели был независимо подтверждён группой моделирования сверхновых, работающей в университетах Аризоны и Принстона (США) [280, 281], пришедшей к аналогичным выводам.

Следует подчеркнуть, что данная модель коллапса O-Ne-Mg-ядра (для начальной массы звезды $8.8 M_{\odot}$) неприменима напрямую к SN1987A, масса которой перед коллапсом оценивается на уровне $15 - 20 M_{\odot}$, и, согласно общей теории эволюции звёзд, предсверхновая SN1987A имела коллапсирующее ядро, состоящее из элементов вплоть до железа. Однако, как будет видно из дальнейшего, полученное в данной модели ограничение на магнит-

⁴Х.-Т. Янка, Л. Хюдепол, Б. Мюллер, частное сообщение

ный момент нейтрино оказывается близким к ограничениям, получаемым из анализа других моделей с коллапсом железного ядра.

Для наших целей следует записать уравнение для спектральной плотности светимости ядра сверхновой за счёт правых нейтрино, где необходимо проинтегрировать по объёму области, испускающей нейтрино, для получения спектральной плотности светимости ядра сверхновой через правые нейтрино:

$$\frac{dL_{\nu_R}}{dE'} = \int dV \frac{E'^3}{2\pi^2} \Gamma_{\nu_R}(E'). \quad (4.116)$$

Для иллюстрации на рис. 4.13 приведен указанный спектр светимости для значения химического потенциала электронов $\eta_e T = 250$ МэВ и для нескольких значений температуры плазмы.

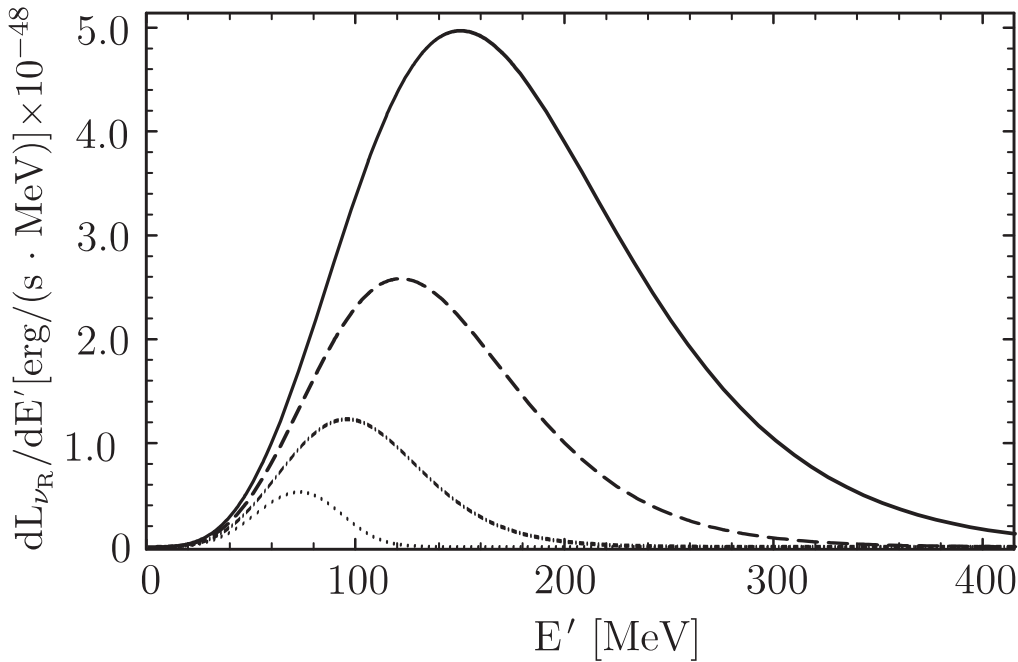


Рис. 4.13. Энергетические распределения светимости правых нейтрино для значений температуры плазмы $T = 35$ МэВ (сплошная линия), $T = 25$ МэВ (штриховая линия), $T = 15$ МэВ (штрих-пунктирная линия), $T = 5$ МэВ (пунктирная линия) и магнитного момента нейтрино $\mu_\nu = 3 \times 10^{-13} \mu_B$

Используя здесь величины, определённые в уравнениях (4.111) и (4.112), мы учитываем их зависимость от радиуса R и времени t . Полный набор распределений параметров, использованных в наших оценках, включает профили плотности ρ , температуры T , доли электронов Y_e , долей электронных нейтрино Y_{ν_e} , электронных антинейтрино $Y_{\bar{\nu}_e}$ и долей Y_{ν_x} для остальных

типов нейтрино и антинейтрино ($\nu_x = \nu_{\mu,\tau}, \bar{\nu}_{\mu,\tau}$), которые считаются идентичными. Временная эволюция распределений параметров была рассчитана в интервале до ~ 2 с после коллапса. Для иллюстрации мы представляем на рис. 4.14–4.16 радиальные распределения внутри ядра сверхновой от 0 до 20 км в момент времени $t = 1.0$ с после коллапса для температуры, для химических потенциалов электронов η_e и электронных нейтрино η_{ν_e} и для так называемого нерелятивистского химического потенциала протонов, $\mu_p^* = \mu_p - m_N$, определяющего вырожденность протонов с использованием эффективной нуклонной массы m_N в плазме (см. [1], с. 152)).

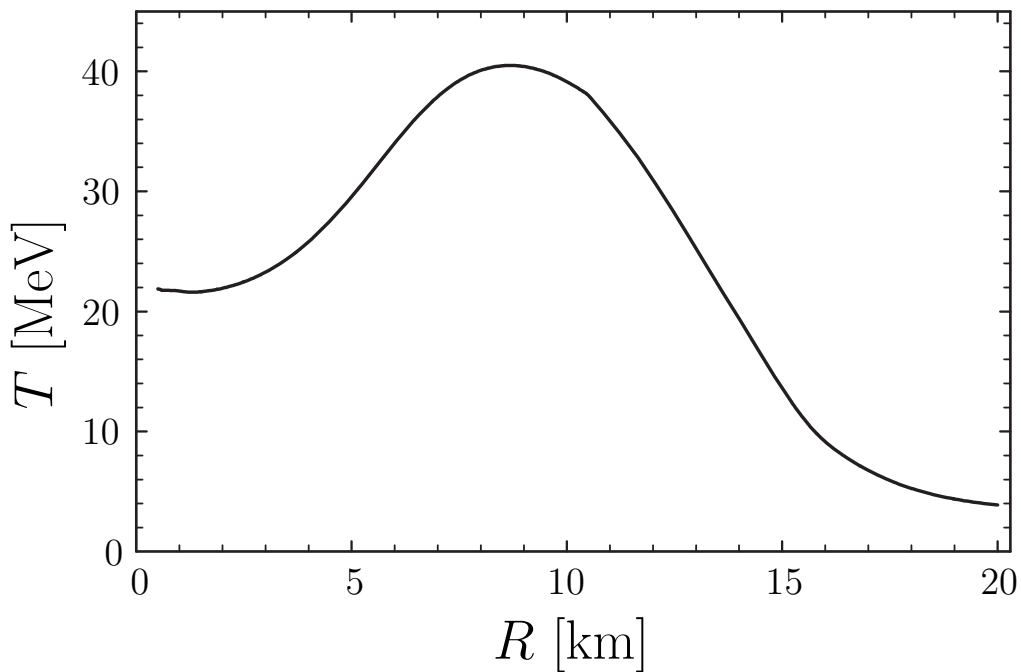


Рис. 4.14. Радиальное распределение температуры в ядре сверхновой в момент времени $t = 1.0$ с после коллапса

Для анализа вклада излучения правых нейтрино в полную потерю энергии сверхновой мы также используем временную эволюцию полной светимости всех типов левых нейтрино, изображённую на рис. 4.17.

Интегрируя выражение (4.116) по энергии нейтрино, получаем временную эволюцию светимости правых нейтрино:

$$L_{\nu_R}(t) = \frac{1}{2\pi^2} \int dV \int_0^\infty dE' E'^3 \Gamma_{\nu_R}(E'). \quad (4.117)$$

Правые нейтрино – это новый охлаждающий агент, который должен конкурировать с потерями энергии через активные типы нейтрино, для того

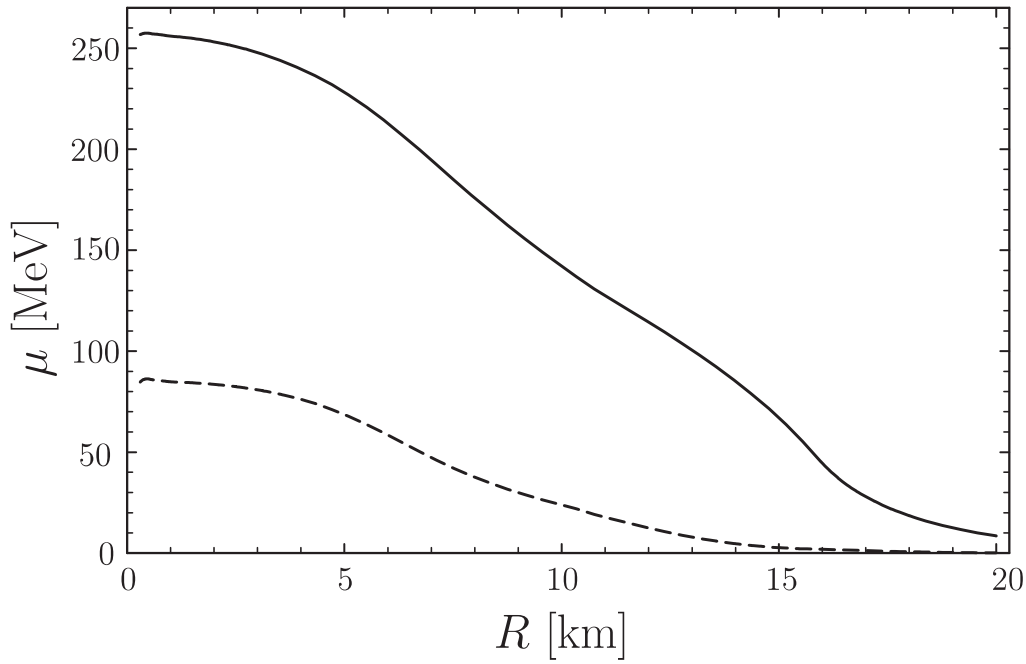


Рис. 4.15. Радиальные распределения химических потенциалов электронов (сплошная линия) и электронных нейтрино (пунктирная линия) внутри ядра сверхновой в момент времени $t = 1.0$ с после коллапса

чтобы значительно повлиять на темп охлаждения звёздного ядра. Таким образом, наблюдавшаяся длительность нейтринного сигнала от сверхновой *SN1987A* указывает, что дополнительные потери энергии через правые нейтрино должны быть ограничены сверху, по меньшей мере, значением потерь через левые нейтрино:

$$L_{\nu_R} < L_{\nu_L}. \quad (4.118)$$

Мы будем полагать, что к рассматриваемой модели коллапса *O-Ne-Mg*-ядра эта оценка также применима. Во временном интервале до 2 с после коллапса получаем из выражений (4.117), (4.118) зависящий от времени верхний предел на комбинацию эффективных магнитных моментов электронного, мюонного и тау-нейтрино. Если предположить для простоты, что эти эффективные магнитные моменты равны, получим эволюцию во времени ограничения сверху на некоторый усреднённый по ароматам магнитный момент нейтрино $\bar{\mu}_\nu$. Эта зависимость показана на рис. 4.18, где $\bar{\mu}_{12} = \bar{\mu}_\nu / (10^{-12} \mu_B)$.

Как видно из рис. 4.18, усреднённая верхняя граница стремится к определённой величине, дающей предел

$$\bar{\mu}_\nu < 2.4 \times 10^{-12} \mu_B. \quad (4.119)$$

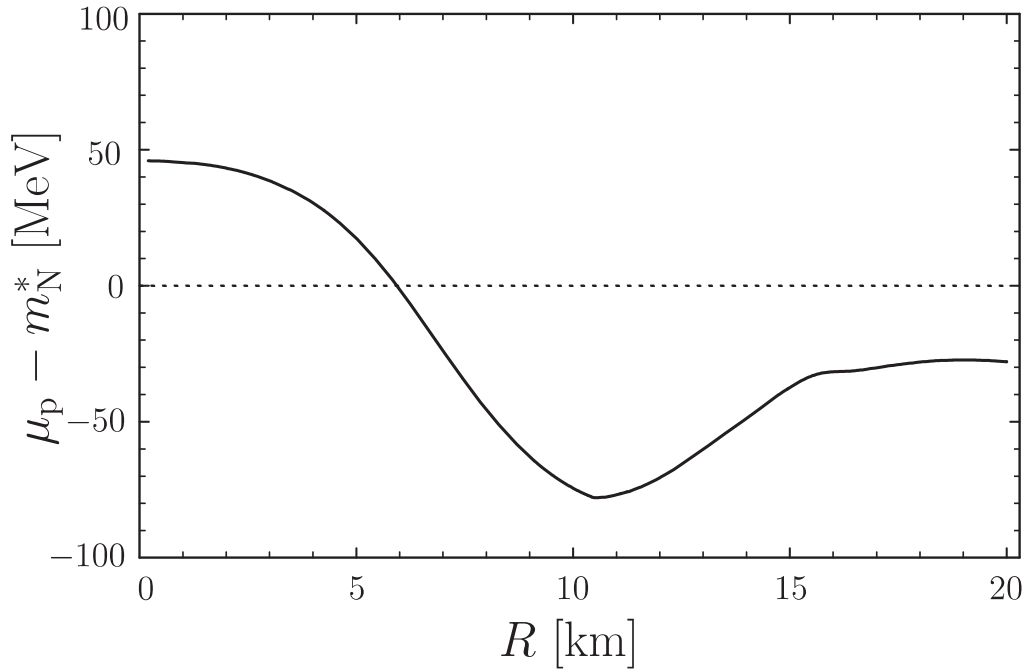


Рис. 4.16. Радиальное распределение нерелятивистского химического потенциала протонов, $\mu_p^* = \mu_p - m_N$ внутри ядра сверхновой в момент времени $t = 1.0$ с после коллапса

В общем случае комбинированный предел на эффективные магнитные моменты электронного, мюонного и тау-нейтрино равен

$$\left[\mu_{\nu_e}^2 + 0.71 \left(\mu_{\nu_\mu}^2 + \mu_{\nu_\tau}^2 \right) \right]^{1/2} < 3.7 \times 10^{-12} \mu_B, \quad (4.120)$$

где эффективные магнитные моменты определяются согласно выражению (4.91). Этот предел менее строгий, чем ограничение [262], полученное в рамках модели однородного шара для ядра сверхновой, но оно, разумеется, является более достоверным. Кроме того, оно устанавливает ограничение сверху на эффективные магнитные моменты мюонного и тау-нейтрино.

Подобная процедура оценки была осуществлена нами с использованием данных модели [282] для двумерного гидродинамического моделирования коллапса ядра сверхновой при массе звезды $15M_\odot$. Радиальные распределения параметров в моменты времени $t = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ с после коллапса в модели *s15Gio_32.a* были взяты из рис. 40 работы [282]. Кроме того, доля электронных нейтрино оценивалась как $Y_{\nu_e} \simeq (1/5) Y_e$. При вычислении светимости правых нейтрино с такими параметрами и использовании ограничения (4.118), где полная светимость за счёт активных типов нейтрино L_{ν_L} в данной модели может быть взята из рис. 42 работы [282], получаем, что верхний предел на усреднённый по ароматам магнитный момент нейтрино $\bar{\mu}_\nu$ также меняется со временем, как и в предыдущем случае. Усреднённая

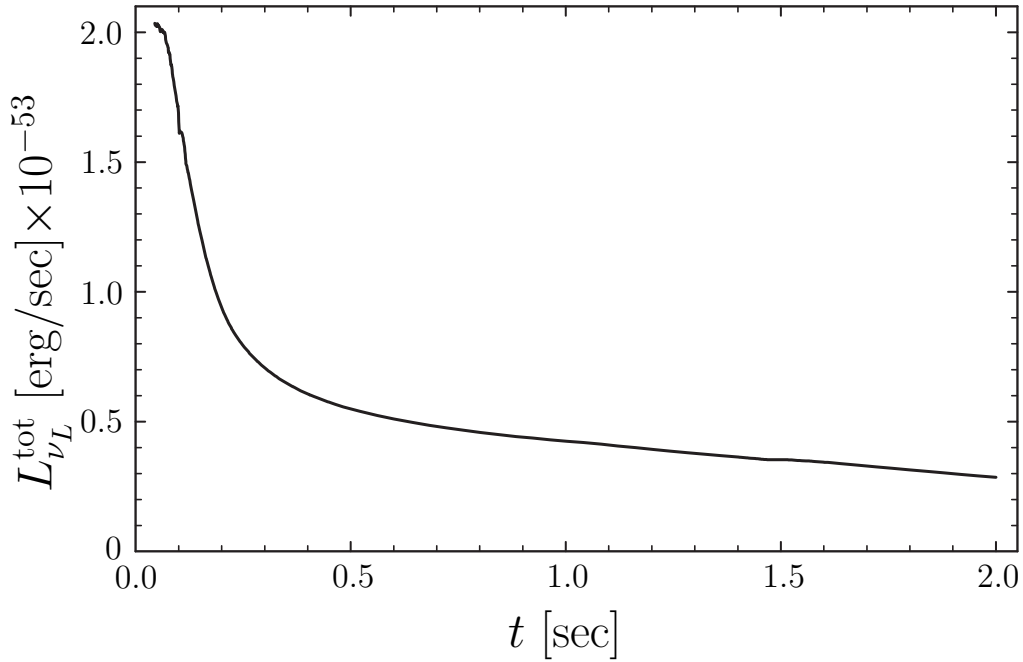


Рис. 4.17. Временная эволюция полной светимости нейтрино всех активных типов

по времени верхняя граница на $\bar{\mu}_\nu$, соответствующая интервалу 0.4–0.8 с, равна

$$\bar{\mu}_\nu < 2.7 \times 10^{-12} \mu_B \quad (4.121)$$

и близка к пределу (4.119).

В работе [283] была исследована термальная и химическая эволюция на протяжении стадии Кельвина–Гельмгольца рождения нейтронной звезды. Используя данные из рис. 9 и 14 работы [283], мы получили усреднённую по времени верхнюю границу на $\bar{\mu}_\nu$ для интервала времени 1–10 с эволюции после коллапса в форме

$$\bar{\mu}_\nu < 1.2 \times 10^{-12} \mu_B. \quad (4.122)$$

Мы также использовали результаты работы [284], в которой представлены численные модельные расчёты нейтринного охлаждения недавно сформированной, обогащённой лептонами нейтронной звезды. На основе данных, представленных на рис. 3–9 модели SBH (горячей звезды с относительно малой барионной массой) в работе [284], мы оценили усреднённое по времени ограничение сверху на $\bar{\mu}_\nu$ для интервала 0.5–5 с после коллапса в виде

$$\bar{\mu}_\nu < 1.1 \times 10^{-12} \mu_B. \quad (4.123)$$

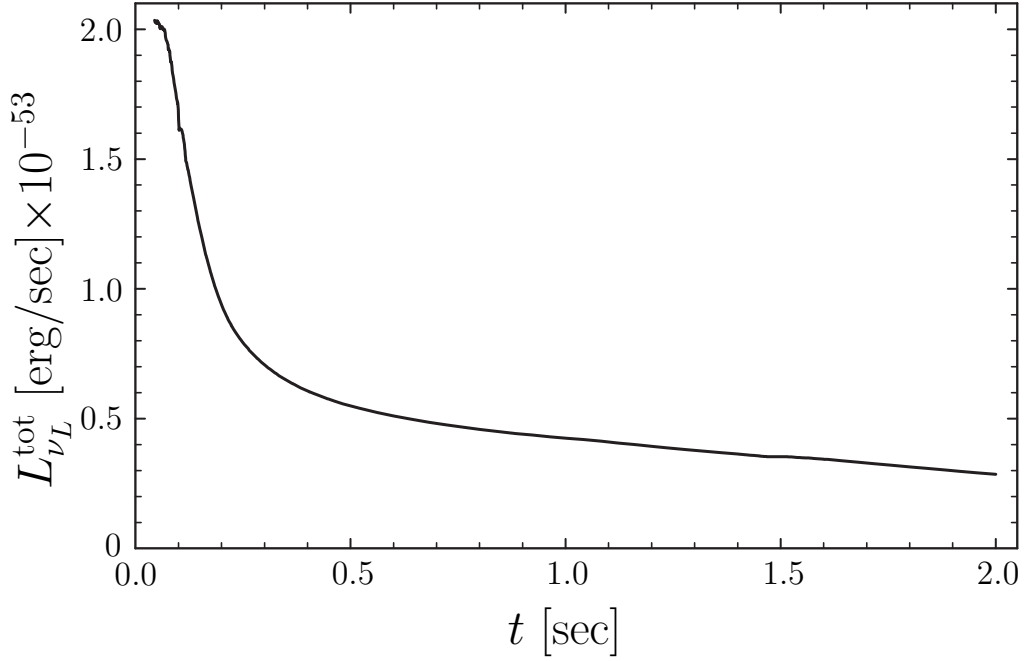


Рис. 4.18. Временная эволюция верхнего предела на магнитный момент нейтрино в интервале времени до 2 с после коллапса (в предположении, что эффективные магнитные моменты электронного, мюонного и тау-нейтрино равны)

Суммируя все полученные нами оценки (4.119), (4.121), (4.122), (4.123), видим, что верхняя граница на усреднённый по ароматам и по времени магнитный момент нейтрино на стадии Кельвина–Гельмгольца взрыва сверхновой может быть представлена в форме

$$\bar{\mu}_\nu < (1.1 - 2.7) \times 10^{-12} \mu_B \quad (4.124)$$

в зависимости от модели взрыва.

Глава 5

Нейтрино-электронные взаимодействия во внешней активной среде

5.1. Процесс $\nu_e \rightarrow e^- W^+$ в сильном магнитном поле

Как уже отмечалось, интенсивное электромагнитное поле делает возможными процессы, кинематически запрещённые в вакууме, такие как распад нейтрино на электрон и W -бозон и нейтринное рождение лептонных пар $\nu \rightarrow \nu \ell^- \ell^+$ ($\ell = e, \mu, \tau$).

Вероятность распада нейтрино $\nu_e \rightarrow e^- W^+$ во внешнем электромагнитном поле – это один из наиболее интересных результатов, которые могут быть извлечены из собственно-энергетического оператора нейтрино. Эта вероятность может быть выражена через мнимую часть амплитуды (3.90) с собственно-энергетическим оператором нейтрино (3.147).

Для простоты здесь и далее мы пренебрегаем массой нейтрино m_ν , выбирая матрицу плотности левых нейтрино в виде $\rho(p) = (p\gamma) \gamma_L$. Получаем

$$\begin{aligned} w(\nu_e \rightarrow e^- W^+) &= \frac{1}{E} \text{Im } \mathcal{M}(\nu_e \rightarrow \nu_e) = \\ &= -\frac{1}{E} \text{Im Tr } [\Sigma(p) (p\gamma) \gamma_L] = -2 \frac{e^2 B^2 p_\perp^2}{E} \text{Im } \bar{\mathcal{B}}_L. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Анализ распада нейтрино $\nu_e \rightarrow e^- W^+$ во внешнем поле интересен только при ультравысоких энергиях нейтрино.

Во всех предыдущих работах вероятность распада нейтрино во внешнем электромагнитном поле была вычислена в приближении скрещенного поля, в этом случае вероятность выражается через динамический полевой параметр χ и параметр массы лептона λ :

$$\chi = \frac{e(pFFp)^{1/2}}{m_W^3}, \quad \lambda = \frac{m_e^2}{m_W^2}. \quad (5.2)$$

В системе отсчёта, где поле чисто магнитное, динамический полевой параметр принимает вид

$$\chi = \frac{eB p_\perp}{m_W^3}. \quad (5.3)$$

Общее выражение для вероятности распада может быть записано в этом случае в виде [158]

$$w(\nu_e \rightarrow e^- W^+) = -\frac{\sqrt{2} G_F m_W^4 \chi^{2/3}}{12\pi E} \times \\ \times \int_0^1 \frac{dv v}{[v(1-v)]^{4/3}} \frac{d\text{Ai}(u)}{du} [2(1+v)(2+v) + \lambda(1-v)(2-v)], \quad (5.4)$$

где $\text{Ai}(u)$ есть функция Эйри (4.24) аргумента:

$$u = \frac{v + \lambda(1-v)}{[\chi v(1-v)]^{2/3}}. \quad (5.5)$$

Производная функции Эйри выражается через модифицированную функцию Бесселя $K_\nu(x)$

$$\frac{d\text{Ai}(u)}{du} = -\frac{u}{\sqrt{3}\pi} K_{2/3} \left(\frac{2}{3} u^{3/2} \right). \quad (5.6)$$

Переходя в (5.4) к пределу $\chi, \lambda \ll 1$, получим результат, который может быть выражен только через модифицированный динамический полевой параметр вида

$$\xi = \frac{\chi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{eB p_\perp}{m_e m_W^2}. \quad (5.7)$$

Заметим, что интервал значений параметра ξ оказывается весьма широким, $0 < \xi \ll 1/\sqrt{\lambda}$, при этом $1/\sqrt{\lambda} \gg 1$.

Вероятность распада принимает вид

$$w(\nu \rightarrow e^- W^+) = \frac{\sqrt{2} G_F}{3\pi} \frac{(eB p_\perp)^2}{m_W^2 E} F(\xi), \quad (5.8)$$

где

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3} \pi \xi^2} \int_0^\infty dx \frac{1+x}{x} K_{2/3} \left(\frac{2}{3} \frac{(1+x)^{3/2}}{\xi x} \right). \quad (5.9)$$

Напомним, что эти формулы справедливы в приближении $\xi \ll m_W/m_e$. Интервал значений ξ является очень широким для электрона, $\xi \ll 1.6 \times 10^5$, но он не так широк для τ -лептона, $\xi \ll 45$.

Интегрирование в (5.9) может быть выполнено точно, что дает

$$F(\xi) = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\xi} \right) \exp \left(-\frac{\sqrt{3}}{\xi} \right). \quad (5.10)$$

Формулы (5.8)–(5.10) следует сравнить с результатами работ [154, 155, 185]. Заметим, что вероятность распада w , определённая в работах [158, 185], совпадает в естественной системе единиц с коэффициентом поглощения α [154] и коэффициентом затухания нейтрино γ [155]. Можно видеть, что коэффициент поглощения α , присутствующий в формуле (25) работы [154], выглядит очень похожим на наше выражение (5.8) и (5.10). Однако угловая зависимость в наших формулах различная: вместо фактора $p_\perp^2/E = E \sin^2 \theta$, стоящего в нашем выражении (5.8), в формуле (25) работы [154] присутствует фактор $p_\perp = E \sin \theta$.

Далее, можно видеть, что наш результат (5.8)–(5.10) определённо противоречит формуле (58) работы [155], где была произведена попытка ещё раз исследовать процесс $\nu_e \rightarrow e^- W^+$ в приближении скрещенного поля. Различие наиболее существенно при малых значениях ξ , где результат работы [155] является сильно заниженным.

В более ранней статье [185] Борисовым и др. было выполнено вычисление вероятности процесса $\nu \rightarrow e^- W^+$ в двух предельных случаях малого и большого значений параметра χ . В пределе $\chi^2 \ll \lambda$ их результат может быть представлен в виде

$$w = \frac{\sqrt{2} G_F}{\sqrt{3} \pi} m_e eB \sin \theta \exp \left(-\sqrt{3} \frac{m_e m_W^2}{eB p_\perp} \right). \quad (5.11)$$

Этот результат может быть воспроизведён из общих формул (5.8)–(5.10).

В пределе $\chi \gg 1$ ($\xi \gg 1/\sqrt{\lambda}$) результат статьи [185] записывается в виде

$$w = \frac{\sqrt{3} G_F}{\sqrt{2} \pi} m_W eB \sin \theta, \quad (5.12)$$

и также может быть получен из нашей более общей формулы (5.4).

Анализ распада $\nu_e \rightarrow e^- W^+$ имеет физический смысл только в полях масштаба магнитных полей пульсаров, где напряжённость поля порядка критического значения $\sim 10^{13}$ Гс. Записанные выше формулы для вероятности, кроме выражения (5.12), применимы только для относительно слабых полей, $B \ll 10^{13}$ Гс. Имея в виду физические условия магнитаров, нейтронных звезд с полями $\sim 10^{14} - 10^{15}$ Гс, интересно вычислить вероятность процесса $\nu_e \rightarrow e^- W^+$ в таких полях, когда приближение скрещенного поля неприменимо.

Таким образом, мы будем использовать следующую иерархию физических параметров: $p_\perp^2 \gg m_W^2 \gg eB \gg m_e^2$. Общее выражение для вероятности процесса $\nu_e \rightarrow e^- W^+$ может быть получено подстановкой (3.152) в выражение (5.1) с учётом (2.10)–(2.12). После несложных, но громоздких вычислений вероятность процесса может быть представлена в виде

$$w(\nu \rightarrow e^- W^+) = \frac{G_F (eB)^{3/2} p_\perp}{\pi \sqrt{2\pi} E} \Phi(\eta), \quad (5.13)$$

где $\Phi(\eta)$ – функция, зависящая только от параметра η :

$$\eta = \frac{4 eB p_\perp^2}{m_W^4}, \quad (5.14)$$

$$\Phi(\eta) = \frac{1}{\eta} \int_0^\infty \frac{dy}{y^{1/2}} \frac{(\operatorname{sh} y)^2 - y \operatorname{th} y}{(y - \operatorname{th} y)^{3/2}} \frac{(\operatorname{th} y)^{1/2}}{(\operatorname{sh} y)^2} \exp \left[-\frac{y \operatorname{th} y}{\eta(y - \operatorname{th} y)} \right]. \quad (5.15)$$

Формулы (5.13), (5.15) представляют главные результаты работы [156] в широкой области значений параметра η , $0 < \eta \ll m_W^2/(eB)$. Функция $\Phi(\eta)$ существенно упрощается при больших и малых значениях аргумента.

В пределе $\eta \gg 1$ получим

$$\Phi(\eta \gg 1) \simeq \frac{1}{3} \sqrt{\pi(\eta - 0.3)}, \quad (5.16)$$

при этом ошибка составляет менее 1 % для $\eta > 10$.

Формулы (5.13), (5.16) воспроизводят вероятность (5.8), (5.10), где следует использовать предел $\xi \gg 1$, и $F(\xi \gg 1) \simeq 1$.

В другом предельном случае $\eta \ll 1$ находим

$$\Phi(\eta \ll 1) \simeq \exp\left(-\frac{1}{\eta}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\eta + \frac{3}{4}\eta^2\right), \quad (5.17)$$

с ошибкой менее 1 % для $\eta < 0.5$.

Полученные формулы позволяют установить верхний предел на спектр энергий нейтрино, распространяющихся в сильном магнитном поле. Рассмотрим типичный размер R области с сильным магнитным полем масштаба $R \sim 10$ км. Если средняя длина свободного пробега нейтрино $\lambda = 1/w$ много меньше, чем размер области, где присутствует поле, $\lambda \ll R$, все нейтрино распадаются внутри такого поля. Для $\lambda = 1$ км $\ll R$ находим энергию обрезания E_c спектра нейтрино в зависимости от напряжённости магнитного поля в следующем виде:

а) для относительно слабого поля, $B \simeq 0.1B_e \simeq 4 \times 10^{12}$ Гс, средняя длина свободного пробега нейтрино может быть получена из (5.11):

$$\lambda \simeq \frac{4.9 \text{ м}}{B_{0.1} \sin \theta} \exp\left(\frac{219}{B_{0.1} E_{15} \sin \theta}\right), \quad (5.18)$$

где $B_{0.1} = B/(0.1B_e)$, $E_{15} = E/(10^{15} \text{ эВ})$, а энергия обрезания, соответствующая $\lambda = 1$ км, при $B_{0.1} = 1$, $\theta = \pi/2$ есть

$$E_c \simeq 0.4 \times 10^{17} \text{ эВ}; \quad (5.19)$$

б) для относительно сильного поля, $B \simeq 10B_e \simeq 4 \times 10^{14}$ Гс, средняя длина свободного пробега нейтрино может быть получена из (5.13), (5.17):

$$\lambda \simeq \frac{3.2 \text{ см}}{B_{10}^{3/2} \sin \theta} \exp\left(\frac{4.0}{B_{10} E_{15}^2 \sin^2 \theta}\right), \quad (5.20)$$

где $B_{10} = B/(10B_e)$, а энергия обрезания, соответствующая $\lambda = 1$ км, при $B_{10} = 1$, $\theta = \pi/2$ есть

$$E_c \simeq 0.6 \times 10^{15} \text{ эВ}. \quad (5.21)$$

Приведённые результаты демонстрируют существенное влияние сильного магнитного поля на вероятность процесса $\nu_e \rightarrow e^- W^+$. Несмотря на экспоненциальный характер подавления вероятности в сильном поле (см. (5.16)),

так же как и в слабом поле (см. (5.11)), вероятность распада для одной и той же энергии нейтрино в сильном поле на несколько порядков величины больше, чем в слабом поле.

5.2. Процесс $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ в сильном магнитном поле

5.2.1. Лагранжиан взаимодействия

Хотя вероятность процесса нейтринного рождения лептонных пар $\nu \rightarrow \nu \ell^- \ell^+$ ($\ell = e, \mu, \tau$) имеет следующий порядок по константе слабого взаимодействия G_F по отношению к обсуждавшемуся выше распаду $\nu_e \rightarrow e^- W^+$, именно процесс рождения пар необходимо рассматривать как возможный механизм нейтринных потерь энергии при энергиях нейтрино ниже порога рождения W -бозона. Заметим, что в силу специфической кинематики заряженной частицы в электромагнитном поле $\ell^- \ell^+$ -пара может иметь достаточно большой по абсолютной величине пространственно-подобный суммарный импульс, так что кинематика рассматриваемого процесса нечувствительна к массе нейтрино и, следовательно, к смешиванию в лептонном секторе. Это, в свою очередь, приводит к эффективной диагонализации процесса по аромату нейтрино.

Процесс нейтринного рождения электрон-позитронной пары

$$\nu(P) \rightarrow \nu(P') + e^-(p) + e^+(p')$$

в случае относительно малых передач импульса, $|q^2| \ll m_W^2$, описывается эффективным локальным лагранжианом взаимодействия нейтрино с электронами (см. рис. 3.11).

Анализ показывает, что при изучении процессов в магнитном поле для локализации лагранжиана следует добавить условия

$$E \ll \frac{m_W^3}{eB} \simeq 10^{10} \text{ ГэВ} \left(\frac{10^{16} \text{ Гс}}{B} \right),$$

где E – энергия начального нейтрино, и

$$B \ll \frac{m_W^2}{e} \simeq 10^{24} \text{ Гс},$$

которые, очевидно, несильно ограничивают общность результатов.

Напомним, что эффективный локальный лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{e}\gamma_\alpha(C_V + C_A\gamma_5)e] [\bar{\nu}\gamma^\alpha(1 + \gamma_5)\nu], \quad (5.22)$$

где константы C_V, C_A различны для разных типов нейтрино (см. (3.94), (3.95)).

5.2.2. Расчёт дифференциальной вероятности на основе решений уравнения Дирака

Общая амплитуда для нейтрино-электронных процессов непосредственно получается из лагранжиана (5.22), где для электрона и позитрона нужно использовать известные решения уравнения Дирака в магнитном поле. В сильном магнитном поле, когда индукция B определяет максимальный энергетический масштаб задачи, а именно $eB > E^2, m_e^2$, электрон и позитрон могут рождаться только в состояниях, соответствующих основному уровню Ландау (см. формулы (1.9), (1.10)).

Используя лагранжиан (5.22) и волновые функции на основном уровне Ландау, запишем \mathcal{S} -матричный элемент процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} = & -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{(2\pi)^3 \delta(\varepsilon + \varepsilon' - q_0) \delta(p_y + p'_y - q_y) \delta(p_z + p'_z - q_z)}{\sqrt{2EV} 2E'V 2\varepsilon L_y L_z 2\varepsilon' L_y L_z} \times \\ & \times e^{-q_\perp^2/4eB - i q_x(p_y - p'_y)/2eB} [\bar{u}(p_\parallel) \gamma^\alpha (C_V + C_A\gamma_5) u(-p'_\parallel)] j_\alpha, \end{aligned} \quad (5.23)$$

где $q = P - P'$ – изменение 4-вектора импульса нейтрино, $\varepsilon, \varepsilon'$ – энергии электрона и позитрона, p_z, p'_z – компоненты их импульсов (магнитное поле направлено вдоль оси z), p_y, p'_y – обобщённые импульсы, определяющие положение центра гауссова пакета на оси x , q_\perp – проекция вектора \mathbf{q} на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{B} , $q_\perp^2 = q_x^2 + q_y^2$, $j_\alpha = \bar{\nu}(P')\gamma_\alpha(1 + \gamma_5)\nu(P)$ – фурье-образ тока левых нейтрино. Прямое вычисление с учётом законов сохранения в (5.23) дает

$$[\bar{u}(p_\parallel) \hat{j}(C_V + C_A\gamma_5) u(-p'_\parallel)] = \frac{2m_e}{\sqrt{q_\parallel^2}} \frac{q_z}{|q_z|} [C_V(j\tilde{\varphi}q) + C_A(j\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}q)]. \quad (5.24)$$

Дальнейшие вычисления будут проводиться для случая, когда масса электрона является наименьшим параметром задачи, то есть при следующей иерархии: $eB \gg E^2 \gg m_e^2$. При этом выражение (5.24), а значит, и

общая амплитуда (5.23) содержат подавление, связанное с относительной малостью массы электрона. Это подавление не является случайным, но отражает закон сохранения углового момента. Например, в кроссинг-процессе $\nu\bar{\nu} \rightarrow e^- e^+$, описываемом той же амплитудой (5.23), полный спин нейтрино-антинейтринной пары в системе центра инерции равен 1, тогда как полный спин электрон-позитронной пары на основном уровне Ландау равен 0. Таким образом, амплитуда процесса обращается в нуль в пределе $m_e \rightarrow 0$ и, следовательно, содержит подавление в рассматриваемом релятивистском пределе. Однако, как показывает анализ, при интегрировании по фазовому объему существуют кинематические области, где $\sqrt{q_{\parallel}^2} \sim m_e$, и указанное подавление может быть скомпенсировано.

Для дифференциальной по импульсу вторичного нейтрино вероятности процесса в единицу времени получаем

$$dW = \frac{1}{T} \frac{d^3 P' V}{(2\pi)^3} \int |S|^2 d\Gamma_{e^-} d\Gamma_{e^+}, \quad (5.25)$$

где T – полное время взаимодействия, $d\Gamma_e$ – элементы фазового объема электрона и позитрона, находящихся на основном уровне Ландау:

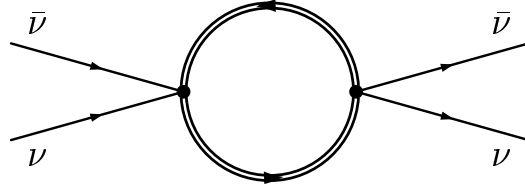
$$d\Gamma_{e^-} = \frac{d^2 p L_y L_z}{(2\pi)^2}, \quad d\Gamma_{e^+} = \frac{d^2 p' L_y L_z}{(2\pi)^2}. \quad (5.26)$$

Подставляя (5.23) в (5.25) и интегрируя с δ -функциями по $d^2 p'$, при этом, как обычно, $\delta^3(0) = T L_y L_z / (2\pi)^3$, получим для полной вероятности в единицу времени

$$W = \frac{G_F^2}{32(2\pi)^4 E} \frac{1}{L_x} \int \frac{d^3 P'}{E'} e^{-q_{\perp}^2/2eB} \int \frac{dp_y dp_z}{\varepsilon^2} \times \\ \times \delta(\varepsilon + \varepsilon' - q_0) |\bar{u}(p_{\parallel}) \hat{j}(C_V + C_A \gamma_5) u(-p'_{\parallel})|^2, \quad (5.27)$$

где нужно подставить $\varepsilon' = \sqrt{m_e^2 + (q_z - p_z)^2}$, $p'_z = q_z - p_z$. Подынтегральное выражение в (5.27) не зависит от p_y , следовательно, интегрирование по p_y , как уже отмечалось (см. (4.14)), определяет кратность вырождения состояния электрона с данной энергией. Выполняя в (5.27) интегрирование по импульсу электрона, получаем вероятность процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ в виде следующего интеграла по импульсу конечного нейтрино:

$$W = \frac{G_F^2 e B m_e^2}{32\pi^4 E} \int \frac{d^3 P'}{E'} e^{-q_{\perp}^2/2eB} \theta(q_0 - \sqrt{q_z^2 + 4m_e^2}) \times \\ \times \frac{1}{(q_{\parallel}^2)^{3/2} (q_{\parallel}^2 - 4m_e^2)^{1/2}} |C_V(j\tilde{\varphi}q) + C_A(j\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}q)|^2. \quad (5.28)$$

Рис. 5.1. Диаграмма Фейнмана для процесса $\nu\bar{\nu} \rightarrow \nu\bar{\nu}$

5.2.3. Вычисление вероятности распада $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ на основе мнимой части петлевой диаграммы

Существует второй способ вычисления дифференциальной вероятности (5.28) распада $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$, основанный на использовании соотношения унитарности. Кроссинг-процессом нейтринного рождения пары $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ является реакция превращения нейтрино-антинейтринной пары в электрон-позитронную пару $\nu\bar{\nu} \rightarrow e^- e^+$. Как известно, сечение такой реакции связано с мнимой частью амплитуды перехода $\nu\bar{\nu} \rightarrow \nu\bar{\nu}$ через электронную петлю (см. рис. 5.1) соотношением унитарности:

$$\sigma(\nu\bar{\nu} \rightarrow e^- e^+) = \frac{1}{q^2} \text{Im } \mathcal{M}(\nu\bar{\nu} \rightarrow \nu\bar{\nu}), \quad (5.29)$$

где q^α – 4-импульс нейтрино-антинейтринной пары. Легко видеть, что соотношение (5.29) позволяет найти вероятность процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$, если произвести в нем дополнительное интегрирование по фазовому объему конечного нейтрино:

$$w(\nu \rightarrow \nu e^- e^+) E = \frac{1}{16\pi^3} \int \frac{d^3 P'}{E'} \text{Im } \mathcal{M}(\nu\bar{\nu} \rightarrow \nu\bar{\nu}). \quad (5.30)$$

Напомним, что $P^\alpha = (E, \mathbf{P})$, $P'^\alpha = (E', \mathbf{P}')$ – 4-импульсы начального и конечного нейтрино, а $q = P - P'$.

Индукцированная внешним полем часть амплитуды процесса рис. 5.1 может быть построена из обобщённой амплитуды (3.23). Следует использовать амплитуды типа вектор–вектор (3.30), аксиал–аксиал (3.31) и вектор–аксиал (3.32) с соответствующими подстановками обобщённых токов:

$$j_{V\alpha} \rightarrow \frac{G_F}{\sqrt{2}} C_V j_\alpha, \quad j_{A\alpha} \rightarrow \frac{G_F}{\sqrt{2}} C_A j_\alpha, \quad (5.31)$$

где j_α – нейтринный ток. Следует также учесть, что $\beta = -eB$ и $(jq) = 0$ (в пренебрежении нейтринными массами). В результате для магнитного поля получаем

$$\begin{aligned}
\Delta \mathcal{M}_{j \rightarrow j} = & \frac{G_F^2}{8\pi^2} \left\{ \left(C_V^2 Y_{VV}^{(1)} + C_A^2 Y_{AA}^{(1)} \right) \frac{|q\varphi j|^2}{q_\perp^2} + \right. \\
& + \left(C_V^2 Y_{VV}^{(2)} + C_A^2 Y_{AA}^{(2)} \right) \frac{|q\tilde{\varphi} j|^2}{q_\parallel^2} + \left(C_V^2 Y_{VV}^{(3)} + C_A^2 Y_{AA}^{(3)} \right) \frac{q^2 |q\varphi\varphi j|^2}{q_\perp^2 q_\parallel^2} + \\
& + 2C_V C_A eB \left(Y_{VA}^{(1)} + \frac{q^2}{q_\perp^2} Y_{VA}^{(2)} \right) \frac{\text{Re}[(q\tilde{\varphi} j)(q\varphi\varphi j^*)]}{q_\parallel^2} \Big\}. \quad (5.32)
\end{aligned}$$

Теперь в функциях Y перейдем к пределу сильного поля. Для этой цели удобно совершить в комплексной плоскости t виковский поворот контура интегрирования, перемещая его на отрицательную мнимую полуось, $t = -i\tau$, где τ – вещественная переменная. При этом $\sin \beta t = -i \text{sh } \beta\tau$, $\cos \beta t = \text{ch } \beta\tau$. Предел сильного поля означает, что полевой параметр $|\beta| = eB$ является максимальным размерным параметром задачи, $|\beta| \gg q_\parallel^2, q_\perp^2, m_e^2$. Например, для интеграла $Y_{VV}^{(2)}$ (3.30), учитывая, что основной вклад дает область значений $\tau \sim 1/m_e^2, 1/q_\parallel^2 \gg 1/|\beta|$, где можно полагать

$$\text{ch } \beta\tau \simeq \frac{\beta}{|\beta|} \text{sh } \beta\tau \simeq \frac{1}{2} e^{|\beta|\tau},$$

получаем

$$Y_{VV}^{(2)} \simeq 2eB e^{-q_\perp^2/2eB} H\left(\frac{q_\parallel^2}{4m_e^2}\right). \quad (5.33)$$

Функция $H(z)$ (3.18) имеет мнимую часть при $z > 1$. Анализ показывает, что из всех функций Y , входящих в (5.32), мнимые части, усиленные полем, имеют только следующие функции:

$$\begin{aligned}
\text{Im} Y_{VV}^{(2)} &= \frac{q^2}{q_\perp^2} \text{Im} Y_{AA}^{(3)} = eB \text{Im} \left(Y_{VA}^{(1)} + \frac{q^2}{q_\perp^2} Y_{VA}^{(2)} \right) = \\
&= \frac{4\pi eB m_e^2}{\sqrt{q_\parallel^2(q_\parallel^2 - 4m_e^2)}} e^{-q_\perp^2/2eB} \theta(q_\parallel^2 - 4m_e^2). \quad (5.34)
\end{aligned}$$

Подставляя (5.32) в (5.30) с учётом (5.34), сразу получаем выражение (5.28) для дифференциальной вероятности процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ в сильном магнитном поле.

5.2.4. Полная вероятность процесса

Дальнейшее интегрирование по импульсу конечного нейтрино удобно, без потери общности, проводить не в произвольной системе отсчёта, далее обозначаемой K , а в выделенной системе K_0 , где импульс начального нейтрино перпендикулярен магнитному полю, $P_z = 0$. Можно затем вернуться из системы K_0 в K , совершая лоренц-преобразование вдоль поля (напомним, что поле является инвариантом относительно такого преобразования). Действительно, можно видеть, что при этом произведение $E W$, определяемое из выражения (5.28), содержит только инварианты (в том числе, и знак аргумента θ -функции).

В формуле (5.28) удобно перейти к безразмерным цилиндрическим координатам в пространстве вектора импульса конечного нейтрино \mathbf{P}' :

$$\rho = \sqrt{P_x'^2 + P_y'^2}/E_\perp, \quad \text{tg } \phi = P_y'/P_x', \quad \zeta = P_z'/E_\perp. \quad (5.35)$$

Здесь E_\perp есть энергия начального нейтрино в системе K_0 , которая связана с его энергией E в произвольной системе K соотношением $E_\perp = E \sin \theta$, где θ – угол между векторами импульса начального нейтрино и индукции магнитного поля в системе K .

После замены переменных (5.35) интеграл (5.28) принимает вид

$$\begin{aligned} EW &= \frac{G_F^2 m_e^2 e B E_\perp^2}{2\pi^3} \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} \int_0^{1-\lambda} d\rho \rho e^{-\varepsilon(1-2\rho \cos \phi + \rho^2)/2} \times \\ &\times \int_{-\zeta_m}^{\zeta_m} \frac{d\zeta}{\beta \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} (1 - 2\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} + \rho^2)^2} \times \\ &\times \left\{ (C_V^2 + C_A^2) \left[(1 + \rho^2) \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} - 2\rho^2 \right] - \right. \\ &\left. - (C_V^2 - C_A^2) \rho (1 - 2\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} + \rho^2) \cos \phi - 2C_V C_A (1 - \rho^2) \zeta \right\}, \end{aligned} \quad (5.36)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2m_e}{E_\perp}, \quad \varepsilon = \frac{E_\perp^2}{eB}, \quad \zeta_m = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \rho^2 - \lambda^2)^2 - 4\rho^2}, \\ \beta &= \sqrt{1 - \frac{4m_e^2}{q_\parallel^2}} = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{1 - 2\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} + \rho^2}}. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Отметим, что подынтегральное выражение в (5.36) имеет усиление, которое полностью компенсирует подавление малостью массы электрона. При этом основной вклад дает область вблизи верхнего предела интегрирования по ρ , соответствующая значениям $\sqrt{q_{\parallel}^2} \sim m_e$.

Последнее слагаемое в (5.36), обусловленное интерференцией аксиально-го и векторного электронных токов, определяет асимметрию вылета нейтрино по отношению к магнитному полю и, очевидно, не даст вклада в вероятность. Однако оно оказывается существенным при вычислении асимметрии средней потери импульса нейтрино.

Для упомянутых выше астрофизических процессов характерны энергии нейтрино $E \gg m_e$. Отметим, что выражения (5.28), (5.36), полученные для основного уровня Ландау, имеют физический смысл полной вероятности процесса только при $eB > E^2/2$, когда закрыт вклад остальных уровней Ландау. Тем не менее для полноты мы приведем здесь асимптотические выражения как для сильных полей, $eB \gg m_e^2$, так и для относительно слабых полей, $eB \ll E^2$, чтобы в дальнейшем оценить относительный вклад основного уровня Ландау в вероятность процесса. При этом громоздкое выражение (5.36) можно заменить простыми частично перекрывающимися формулами.

1. В случае сильных полей, $eB \gg m_e^2$, имеем

$$W(\nu \rightarrow \nu e^- e^+) = \frac{G_F^2(C_V^2 + C_A^2)}{16\pi^3} eBE^3 \sin^4 \theta f_1(\varepsilon), \quad (5.38)$$

где

$$\begin{aligned} f_1(\varepsilon) &= 4e^{-\varepsilon/2} \int_0^1 d\rho \rho(1 - \rho^2) e^{-\varepsilon\rho^2/2} I_0(\varepsilon\rho) = \\ &= e^{-\varepsilon/2} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) + \frac{5}{12} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2 - \frac{11}{60} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^3 + \dots \right]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Здесь $\varepsilon = E_{\perp}^2/eB$, $I_0(x)$ – модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Особенно простой вид формула (5.38) приобретает в случае $eB \gg E_{\perp}^2$, и при этом результат определяет именно полную вероятность процесса

$$W = \frac{G_F^2(C_V^2 + C_A^2)}{16\pi^3} eBE^3 \sin^4 \theta. \quad (5.40)$$

Видно, что вероятность быстро растет с энергией нейтрино, $W \sim E^3$, однако, как будет видно ниже, при больших энергиях нейтрино с учётом вклада

высших уровней Ландау характер роста заменится на линейный, который будет сохраняться вплоть до энергий, соответствующих условию применимости эффективного локального лагранжиана (5.22).

В другом пределе относительно слабых полей, $m_e^2 \ll eB \ll E_\perp^2$, из формулы (5.38) получаем для вклада основного уровня Ландау

$$W = \frac{G_F^2(C_V^2 + C_A^2)}{2^{3/2}\pi^{7/2}} (eB)^{5/2}. \quad (5.41)$$

2. В случае относительно слабых полей, $eB \ll E_\perp^2$, из общего выражения (5.36) имеем

$$\begin{aligned} W = & \frac{2^{1/2}G_F^2 m_e^2 (eB)^{3/2}}{\pi^{7/2}} \left[(C_V^2 + C_A^2) \int_1^\infty du u e^{-2u^2/b} \mathbf{E}\left(\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}\right) - \right. \\ & \left. - C_V^2 \int_1^\infty \frac{du}{u} e^{-2u^2/b} \mathbf{K}\left(\frac{\sqrt{u^2-1}}{u}\right) \right], \end{aligned} \quad (5.42)$$

где $b = eB/m_e^2 = B/B_e$, $\mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{E}(k)$ – полные эллиптические интегралы 1 и 2 рода [285]. Отметим, что области применимости формул (5.38) и (5.42) перекрываются в случае $m_e^2 \ll eB \ll E_\perp^2$. Действительно, если положить в (5.42) $b \gg 1$, то, как и следовало ожидать, воспроизводится формула (5.41). В слабом поле, $eB \ll m_e^2$, результат имеет, как обычно, экспоненциальное подавление:

$$W = \frac{G_F^2 C_A^2}{(2\pi)^{5/2}} (eB)^{5/2} e^{-2m_e^2/(eB)}. \quad (5.43)$$

5.3. Процесс $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ в скрещенном поле

5.3.1. Исторический экскурс

Исследование процесса нейтринного рождения электрон-позитронных пар в пределе скрещенного поля имеет довольно длинную историю [47–55]. Уже в первой из указанных работ [47] была найдена правильная зависимость лидирующего вклада в вероятность от динамического параметра χ :

$$\chi^2 = \frac{e^2(PFFP)}{m_e^6}$$

в главном логарифмическом приближении вида $\sim \chi^2 \ln \chi$, однако числовой коэффициент был ошибочным. В последующих работах проводилось уточнение этого коэффициента и вычисление пост-логарифмических поправок, которые могут оказаться весьма существенными при не очень большом значении $\ln \chi$.

Следует отметить, что по самой постановке задачи речь может идти только об ультрарелятивистском нейтрино, которое, благодаря киральному характеру его взаимодействия в рамках стандартной модели, существует практически только левополяризованным, даже в том случае, когда его масса отлична от нуля. Это утверждение остается в силе, если допустить существование у нейтрино экзотических свойств, которые могли бы приводить в определённых физических условиях к деполяризационным эффектам (до сих пор не наблюдавшимся). Непонимание того, что в природе не бывает неполяризованных ультрарелятивистских нейтринных потоков, часто приводило к появлению ошибочного дополнительного множителя $1/2$ в формулах для вероятностей процессов с нейтрино в начальном состоянии из-за нефизического усреднения по его поляризациям (см., например, [53, 86]).

В результатах для вероятности процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ в скрещенном поле, полученных в указанных работах, имеются существенные различия. В работе [53], посвящённой изучению распада массивного нейтрино $\nu_i \rightarrow \nu_j e^- e^+$ ($m_i > m_j + 2m_e$) во внешнем поле, также проводилось сравнение различных формул для вероятности процесса, однако в [53] говорится о взаимном согласии результатов, которое, по нашему мнению, отсутствует.

Действительно, вероятность процесса в пределе $\chi \gg 1$ можно представить в следующем виде:

$$W(\nu \rightarrow \nu e^- e^+) = K W_0 \chi^2 \left(\ln \chi - \frac{1}{2} \ln 3 - \gamma_E + \Delta \right), \quad (5.44)$$

где

$$W_0 = \frac{G_F^2 (C_V^2 + C_A^2) m_e^6}{27\pi^3 E}, \quad (5.45)$$

$\gamma_E = 0.577 \dots$ – постоянная Эйлера, E – энергия начального нейтрино. Входящие в выражение (5.44) константы K и Δ , полученные разными авторами, приведены в табл. 5.1. При этом в работах [47, 53] вычисление проводилось с учётом электрон-нейтринного взаимодействия только через W -бозон. Для сравнения формулы (5.44) с результатами этих работ нужно положить в ней соответственно $C_V = C_A = 1$ [47] и $C_V = C_A = |U_{ei} U_{e3}|$ [53]. Потеря множителя m_e/E в формулах статьи [49] для вероятности является не числовой, а

Таблица 5.1

Константы K и Δ из выражения (5.44), полученные в разных работах

Авторы		K	Δ
Чобан, Иванов	1969 [47]	$\frac{29}{1024\pi}$	—
Борисов и др.	1983 [48]	1	$-2 \ln 2 - \frac{389}{384} + \frac{9}{128} \frac{C_V^2 - C_A^2}{C_V^2 + C_A^2}$
Книжников и др.	1984 [49]	$\frac{9}{16} \frac{E}{m_e}$	—
Борисов и др.	1993 [50]	$\frac{1}{2}$	$+\frac{5}{4}$
Кузнецов, Михеев	1997 [51]	1	$-\frac{29}{24}$
Борисов, Заморин	1999 [53]	$\frac{1}{2}$	$-\frac{29}{24}$

физической ошибкой, так как ведёт к утрате релятивистской инвариантности величины EW .

Как уже отмечалось, формула (5.44) для вероятности описывает достаточно частный случай $\ln \chi \gg 1$. В то же время в ряде физических задач реализуется ситуация, когда динамический параметр принимает умеренно большие значения, так что $\chi \gg 1$, однако $\ln \chi \sim 1$. При этом приближение скрещенного поля применимо, но упомянутое условие $\ln \chi \gg 1$ не выполняется, так что в формуле (5.44) необходим учёт следующих членов разложения по обратным степеням большого параметра χ . Содержащиеся в перечисленных статьях формулы для произвольных значений χ имеют вид весьма громоздких многократных интегралов и неудобны для анализа.

5.3.2. Расчёт дифференциальной вероятности на основе решений уравнения Дирака

В связи с имеющимися разногласиями в результатах вычисления вероятности процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ в скрещенном поле (см. табл. 5.1), целесообразно

привести подробный расчёт. Отметим, что полученные результаты тривиально обобщаются и на другие нейтрино-лептонные процессы. Например, вероятность процесса $\nu_e \rightarrow \nu_e e^- e^+$ с при замене $m_e \rightarrow m_\mu$ и соответствующей замене констант C_V, C_A даёт вероятность процесса $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu \mu^- \mu^+$ и т. д. Данный расчёт во многом аналогичен вычислениям, проведённым в п. 4.2.1 для распада фотона $\gamma \rightarrow e^- e^+$ в скрещенном поле, поэтому все обозначения здесь, кроме особо оговорённых, совпадают с обозначениями п. 4.2.1.

Используя лагранжиан нейтрино-электронного взаимодействия (5.22) и решения (1.11) для электрона и позитрона в скрещенном поле, получаем \mathcal{S} -матричный элемент процесса $\nu(P) \rightarrow \nu(P') + e^-(p) + e^+(p')$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{if} = & i \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2EV2E'V2\varepsilon V2\varepsilon'V}} \times \\ & \times \int d^4x \exp \left[-i \left((Qx) - r^3 \kappa^3 (\varphi_0 \varphi^2 + \frac{1}{3} \varphi^3) \right) \right] \times \\ & \times \left[\bar{u}(p) \left(1 - \frac{e \hat{a} \hat{k}}{2(kp)} \varphi \right) \hat{j}(C_V + C_A \gamma_5) \left(1 + \frac{e \hat{k} \hat{a}}{2(kp')} \varphi \right) u(-p') \right], \end{aligned} \quad (5.46)$$

где j_α – нейтринный ток, $Q = P - P' - p - p' = q - p - p'$,

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{\chi_q}{2\chi_1\chi_2} \right)^{1/3}, \quad \kappa^2 = -\frac{e^2(aa)}{m_e^2}, \quad \varphi_0 = -\frac{e(qFp)}{m_e^4 \kappa \chi_q}, \\ \chi_q &= \left(\frac{e^2(qFFFq)}{m_e^6} \right)^{1/2} = \frac{\kappa(qk)}{m_e^2}, \\ \chi_1 &= \left(\frac{e^2(pFFFp)}{m_e^6} \right)^{1/2} = \frac{\kappa(pk)}{m_e^2}, \\ \chi_2 &= \left(\frac{e^2(p'FFp')}{m_e^6} \right)^{1/2} = \frac{\kappa(p'k)}{m_e^2}, \\ \chi &= \left(\frac{e^2(PFFP)}{m_e^6} \right)^{1/2} = \frac{\kappa(Pk)}{m_e^2}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Выберем систему отсчёта (1.12), при этом фаза φ и напряжённости электрического и магнитного полей $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и \mathbf{B} принимают вид

$$\varphi = (kx) = k_0(t - x), \quad \boldsymbol{\mathcal{E}} = (0, \mathcal{E}, 0), \quad \mathbf{B} = (0, 0, B), \quad \mathcal{E} = B = k_0 a.$$

С учётом соотношений

$$(Qx) = (Q_0 - Q_x)t - Q_y y - Q_z z + s\varphi, \quad s = \frac{Q_x}{k_0}$$

интегрирование по координате x удобно заменить на интегрирование по переменной φ .

Вычисляя интегралы по t, y, z , преобразуем \mathcal{S} -матричный элемент (5.46) к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{if} = & \frac{iG_F(2\pi)^3\delta^2(\mathbf{Q}_\perp)\delta((kQ))}{\sqrt{2}\sqrt{2EV2E'V2\varepsilon V2\varepsilon'V}} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \left[\bar{u}(p)\gamma_\mu L^{\mu\nu} j_\nu (C_V + C_A\gamma_5)u(-p') \right] \times \\ & \times \exp \left[-i \left(s\varphi - r^3 \kappa^3 (\varphi_0 \varphi^2 + \frac{1}{3} \varphi^3) \right) \right], \end{aligned} \quad (5.48)$$

где

$$L^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \kappa_- F^{\mu\nu} \varphi + i\kappa_+ \gamma_5 \tilde{F}^{\mu\nu} \varphi - \frac{e^2 \kappa^2}{2m_e^4 \chi_1 \chi_2} (FF)^{\mu\nu} \varphi^2, \quad (5.49)$$

$$\kappa_\pm = \frac{e\kappa}{2m_e^2} \left(\frac{1}{\chi_1} \pm \frac{1}{\chi_2} \right). \quad (5.50)$$

Совершая в интеграле сдвиг по переменной φ , $\varphi \rightarrow \varphi - \varphi_0$, можно избавиться от членов в показателе экспоненты, пропорциональных φ^2 :

$$s\varphi - r^3 \kappa^3 (\varphi_0 \varphi^2 + \frac{1}{3} \varphi^3) \rightarrow \bar{s}\varphi - \frac{1}{3} r^3 \kappa^3 \varphi^3 + A,$$

где

$$\bar{s} = s + r^3 \kappa^3 \varphi_0^2,$$

а величина A , не зависящая от φ , приведёт к появлению в \mathcal{S} -матричном элементе постоянного фазового множителя, который несуществен. С учётом симметричности пределов интегрирования данная процедура сдвига по φ позволяет выразить имеющиеся интегралы через функцию Эйри (4.24) (см. (4.26)-(4.28)).

Вероятность процесса определяется выражением

$$W(\nu \rightarrow \nu e^- e^+) = \frac{1}{T} \int |\mathcal{S}_{if}|^2 \frac{d^3 P' V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p V}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p' V}{(2\pi)^3}. \quad (5.51)$$

При подстановке матричного элемента следует, как обычно, учесть, что

$$\delta^2(\mathbf{Q}_\perp = 0) = \frac{L_y L_z}{(2\pi)^2}, \quad \delta(kQ = 0) = \frac{T}{2\pi k_0}.$$

Интегрирование с δ -функциями по импульсам позитрона даёт

$$\int \frac{d^3 p'}{E'} \delta^2(\mathbf{Q}_\perp) \delta(kQ) \{ \dots \} = \frac{\varkappa}{m_e^2 \chi_2} \{ p' \rightarrow q - p - sk; \chi_2 \rightarrow \chi_q - \chi_1 \}.$$

Для интегрирования по импульсам электрона удобно ввести переменные τ и u :

$$\tau = \frac{e(q\tilde{F}p)}{m_e^4 \chi_q}, \quad u = 1 - 2\frac{\chi_1}{\chi_q}, \quad (5.52)$$

так что

$$\chi_1 = \frac{1-u}{2} \chi_q, \quad \chi_2 = \frac{1+u}{2} \chi_q, \quad (5.53)$$

при этом

$$\int \frac{d^3 p}{E} \frac{1}{\chi_2} = \frac{2m_e^2 \varkappa}{\chi_q} \int_{-1}^1 \frac{du}{1-u^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int d\varphi_0,$$

но, как показывает расчёт, подынтегральное выражение не содержит зависимости от φ_0 . Вспоминая связь между φ и x , заключаем, что интеграл по φ_0 отражает произвол выбора точки начала отсчёта координаты x . При решении задачи в конечном объеме квантования $V = L_x L_y L_z$ область интегрирования по φ_0 конечна и равна $k_0 L_x$, т. е.

$$\int d\varphi_0 = k_0 \int dx_0 = k_0 L_x.$$

Аргумент функции Эйри (4.29) в обозначениях (5.52) имеет вид

$$y = r^2 \left(\tau^2 + 1 - \frac{\chi_1 \chi_2}{\chi_q^2} \frac{q^2}{m_e^2} \right), \quad r = \left(\frac{2}{\chi_q (1-u^2)} \right)^{1/3}. \quad (5.54)$$

Для вероятности процесса получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned}
W = & \frac{G_F^2(C_V^2 + C_A^2)m_e^2}{2^6\pi^4 E} \int \frac{d^3 P'}{E'} \int_0^1 r du \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \times \\
& \times \left\{ -i_0 \left(2 \frac{\tau^2 + 1}{1 - u^2} [\text{Ai}(y)]^2 + r \chi_q u^2 [\text{Ai}'(y)]^2 \right) - \right. \\
& - i_1 \frac{q^2}{m_e^2} \left[\left(\tau^2 + 1 - \frac{q^2(1 - u^2)^2}{4m_e^2} \right) \frac{r^3}{\chi_q} [\text{Ai}(y)]^2 + \frac{r}{\chi_q} u^2 [\text{Ai}'(y)]^2 \right] + \\
& + i_2 \left(-2 \frac{\tau^2}{\chi_q^2} [\text{Ai}(y)]^2 + \frac{r}{\chi_q} (1 - u^2) [\text{Ai}'(y)]^2 \right) + \\
& + \frac{2C_A^2}{C_V^2 + C_A^2} \left[i_0 [\text{Ai}(y)]^2 + 2i_1 \left(\tau^2 + 1 - \frac{q^2(1 - u^2)}{4m_e^2} \right) \frac{r^3}{\chi_q} [\text{Ai}(y)]^2 + \right. \\
& + 2i_1 \frac{r}{\chi_q} [\text{Ai}'(y)]^2 \left. \right] + \frac{8C_V C_A}{C_V^2 + C_A^2} i_3 \left(1 - \frac{q^2(1 - u^2)}{4m_e^2} \right) \frac{r^2}{\chi_q^2} \text{Ai}(y) \text{Ai}'(y) \left. \right\}, \tag{5.55}
\end{aligned}$$

где введены инварианты, построенные из нейтринного тока и тензора поля:

$$\begin{aligned}
i_0 &= (j j^*), \quad i_1 = \frac{e^2(j F F j^*)}{m_e^4}, \quad i_2 = \frac{e^2(q \tilde{F} j)(q \tilde{F} j^*)}{m_e^6}, \\
i_3 &= \frac{e^3 \text{Re}[(q \tilde{F} j)(q F F j^*)]}{m_e^8}. \tag{5.56}
\end{aligned}$$

Для вычисления входящих в выражение (5.55) интегралов по переменной

τ :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [\text{Ai}(y)]^2, & I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tau^2 [\text{Ai}(y)]^2, \\
I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [\text{Ai}'(y)]^2, & I_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \text{Ai}(y) \text{Ai}'(y) \tag{5.57}
\end{aligned}$$

воспользуемся известными соотношениями для функции Эйри (4.38)–(4.40). Интегралы (5.57) равны

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2r} \text{Bi}(U), & I_2 &= \frac{2^{1/3}}{8r^3} [-\text{Ai}'(U) - U \text{Bi}(U)], \\ I_3 &= \frac{2^{1/3}}{8r} [-3\text{Ai}'(U) - U \text{Bi}(U)], & I_4 &= -\frac{2^{2/3}}{4r} \text{Ai}(U), \end{aligned} \quad (5.58)$$

где обозначено

$$\text{Bi}(U) = \int_U^\infty dy \text{Ai}(y), \quad U = \left(\frac{4}{\chi_q(1-u^2)} \right)^{2/3} \left(1 - \frac{q^2(1-u^2)}{4m_e^2} \right). \quad (5.59)$$

В результате вероятность процесса принимает вид следующего интеграла по импульсу конечного нейтрино:

$$\begin{aligned} W &= \frac{G_F^2(C_V^2 + C_A^2)m_e^2}{2^7\pi^4 E} \int \frac{d^3 P'}{E'} \int_0^1 du \left\{ i_0 \left[\frac{1+3u^2}{(1-u^2)^{1/3}} \left(\frac{\chi_q}{4} \right)^{2/3} \text{Ai}'(U) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(1 + \frac{q^2(1+u^2)}{4m_e^2} \right) \text{Bi}(U) \right] + i_1 \frac{q^2}{m_e^2} \left[\frac{1+3u^2}{16(1-u^2)^{1/3}} \left(\frac{4}{\chi_q} \right)^{4/3} \text{Ai}'(U) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\chi_q^2} \left(1 - \frac{q^2(1-3u^2)}{4m_e^2} \right) \text{Bi}(U) \right] - i_2 \frac{1}{8} (1-u^2)^{2/3} \left(\frac{4}{\chi_q} \right)^{4/3} \text{Ai}'(U) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_A^2}{C_V^2 + C_A^2} \left[i_0 2\text{Bi}(U) - i_1 \frac{1}{(1-u^2)^{1/3}} \left(\frac{4}{\chi_q} \right)^{4/3} \text{Ai}'(U) \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_V C_A}{4(C_V^2 + C_A^2)} i_3 \left(\frac{4}{\chi_q} \right)^2 U \text{Ai}(U) \right\}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Существует также второй способ вычисления дифференциальной вероятности (5.60) распада $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ в пределе скрещенного поля, основанный на использовании соотношения унитарности. Повторяя те же операции, что в п. 5.2.3, но с соответствующими амплитудами (3.34), (3.36), (3.37), получим выражение, несколько отличающееся от (5.60), которое, однако, сводится к последнему с помощью интегрального соотношения для функции Эйри:

$$\int_0^1 du \left[\left(1 - \frac{q^2(1-3u^2)}{4m^2} \right) \text{Bi}(U) + \frac{3-7u^2}{3(1-u^2)^{1/3}} \left(\frac{\chi_q}{4} \right)^{2/3} \text{Ai}'(U) \right] = 0. \quad (5.61)$$

Данное соотношение легко доказывается двукратным интегрированием по частям с учётом уравнения для функции Эйри (4.25).

5.3.3. Полная вероятность процесса

Для интегрирования в выражении (5.60) по импульсу конечного нейтрино введём новые инвариантные переменные κ , ξ и ϕ :

$$\kappa = -\frac{q^2}{[4e^2(PFFP)]^{1/3}}, \quad \xi = \sqrt{\frac{(qFFq)}{(PFFP)}}, \quad \phi = \arctg \frac{(PFP')}{(P\tilde{F}P')}.$$

Угол ϕ в системе отсчёта, где импульс начального нейтрино $\mathbf{P} \perp \mathbf{B}$, имеет смысл азимутального угла в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{P} , между проекцией вектора \mathbf{P}' на эту плоскость и направлением магнитного поля. В этих переменных

$$\int \frac{d^3P'}{E'} = 4\pi m_e^2 \left(\frac{\chi}{4}\right)^{2/3} \int_0^1 d\xi \int_0^\infty d\kappa \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi}. \quad (5.62)$$

Как уже отмечалось, интерференционный член в формуле (5.60), пропорциональный $C_V C_A$, не даёт вклада в вероятность, но может быть существенным при вычислении асимметрии средней потери импульса нейтрино.

После интегрирования по ϕ выражение (5.60) принимает вид

$$\begin{aligned} W = & \frac{G_F^2 (C_V^2 + C_A^2) m_e^6 \chi^2}{16\pi^3 E} \int_0^1 du \int_0^1 d\xi \int_0^\infty d\kappa \left\{ -2\kappa^2 (1 - u^2) \text{Bi}(U) - \right. \\ & - \kappa \frac{2 - 2\xi + \xi^2}{3\xi^{4/3}} \frac{9 - u^2}{(1 - u^2)^{1/3}} \text{Ai}'(U) - \\ & \left. - \frac{2C_A^2}{C_V^2 + C_A^2} \left(\frac{4}{\chi}\right)^{2/3} \left[\kappa \text{Bi}(U) + 4 \frac{1 - \xi}{\xi^{4/3}} \frac{1}{(1 - u^2)^{1/3}} \text{Ai}'(U) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.63)$$

Выполняя интегрирование по переменной κ , вероятность процесса можно привести к следующему виду:

$$\begin{aligned} W = & \frac{G_F^2 (C_V^2 + C_A^2) m_e^6 \chi^2}{27\pi^3 E} \int_0^1 du \int_0^1 x dx z \text{Ai}(z) \times \\ & \times \left\{ \frac{3 + x^2}{(1 - u^2)(1 - x)} + \frac{3}{8}(1 - 3x) + \frac{9}{4} \frac{C_A^2}{C_V^2 + C_A^2} (5 + x) \right\}, \end{aligned} \quad (5.64)$$

где

$$z = \left(\frac{4}{\chi(1-u^2)(1-x)} \right)^{2/3}.$$

Наконец, выполняя еще одно интегрирование, вероятность можно записать в виде однократного интеграла, содержащего функцию Эйри:

$$\begin{aligned} W = & \frac{G_F^2 (C_V^2 + C_A^2) m_e^6 \chi^2}{27\pi^3 E} \int_0^1 u^2 du t \operatorname{Ai}(t) \times \\ & \times \left\{ \frac{4}{1-u^2} \left(2L(u) - \frac{29}{24} \right) - \frac{15}{2} L(u) - \frac{47}{48} + \right. \\ & + \frac{1}{8} (1 + (1-u^2)L(u)) \left(33 - \frac{47}{4}(1-u^2) \right) + \\ & \left. + \frac{9}{16} \frac{C_A^2}{C_V^2 + C_A^2} [48L(u) + 2 - (1 + (1-u^2)L(u)) (28 - 3(1-u^2))] \right\}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

Здесь

$$t = \left(\frac{4}{\chi(1-u^2)} \right)^{2/3}, \quad L(u) = \frac{1}{2u} \ln \frac{1+u}{1-u}. \quad (5.66)$$

В случае $\chi \ll 1$ из выражения (5.65) немедленно получаем формулу для вероятности, которая содержит хорошо известное экспоненциальное подавление:

$$W(\chi \ll 1) \simeq \frac{3\sqrt{6} G_F^2 m_e^6}{(16\pi)^3 E} (3C_V^2 + 13C_A^2) \chi^4 \exp\left(-\frac{8}{3\chi}\right), \quad (5.67)$$

и согласуется с соответствующей формулой работы [50].

В случае $\chi \gg 1$ (а точнее, $\ln \chi \gg 1$) из выражения (5.65) нетрудно получить формулу (5.44), где $K = 1$, $\Delta = -29/24$, в согласии с результатом [51, 52]:

$$W(\chi \gg 1) \simeq \frac{G_F^2 (C_V^2 + C_A^2) m_e^6 \chi^2}{27\pi^3 E} \left(\ln \chi - \frac{1}{2} \ln 3 - \gamma_E - \frac{29}{24} \right). \quad (5.68)$$

Поскольку динамический параметр χ пропорционален энергии нейтрино, видно, что вероятность (5.68) растёт с энергией, как $E \ln E$, в отличие от роста $W \sim E^3$ в режиме сильного поля (см. (5.40)). Сравнивая также (5.68)

с (5.41), видим, что относительный вклад в вероятность от основного уровня Ландау в пределе $E^2 \gg eB$ мал ($\sim \sqrt{eB}/E \ll 1$).

Из формулы (5.65) нетрудно также найти следующий член разложения по обратным степеням параметра χ , что даёт

$$W(\chi \gg 1) \simeq \frac{G_F^2 (C_V^2 + C_A^2) m_e^6 \chi^2}{27\pi^3 E} \left\{ \ln \chi - \frac{1}{2} \ln 3 - \gamma_E - \frac{29}{24} - \frac{1}{\chi^{2/3}} \frac{9}{56} \frac{3^{1/3} \pi^2}{[\Gamma(\frac{2}{3})]^4} \frac{19C_V^2 - 63C_A^2}{C_V^2 + C_A^2} \right\}, \quad (5.69)$$

где $\Gamma(x)$ – гамма-функция, $\Gamma(2/3) = 1.354 \dots$.

Из формулы (5.69) видно, что поправочный член $\sim \chi^{-2/3}$ уже не имеет универсального характера. Он относительно мал и отрицателен для случая, когда аромат нейтрино совпадает с ароматом заряженного лептона ($\nu_e \rightarrow \nu_e e^- e^+$, $\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu \mu^- \mu^+$). Когда ароматы нейтрино и заряженного лептона различны ($\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu e^- e^+$, $\nu_e \rightarrow \nu_e \mu^- \mu^+$), этот член положителен и относительно велик.

На графике рис. 5.2 изображена вероятность процесса $\nu \rightarrow \nu \ell^- \ell^+$ в зависимости от динамического параметра в области умеренно больших значений χ . Из рисунка видно, что в этой области поправочный член $\sim \chi^{-2/3}$

скорее ухудшает описание поведения вероятности. Это, по-видимому, можно объяснить тем, что следующий член разложения по параметру χ может быть достаточно велик, однако выделить его представляется затруднительным.

Из рисунка видно также, что величина вероятности, рассчитанная по точной формуле (5.65), при любых χ больше приближённого значения (5.68), например при $\chi = 20$ – в 1.6 раза для совпадающих ароматов нейтрино и лептона. При $\chi \lesssim 10$ приближённая формула (5.68) теряет смысл.

Таким образом, при детальном анализе вероятности процесса нейтринно-го рождения лептонной пары во внешнем электромагнитном поле в области умеренно больших значений параметра χ следует пользоваться полученной нами точной формулой (5.65).

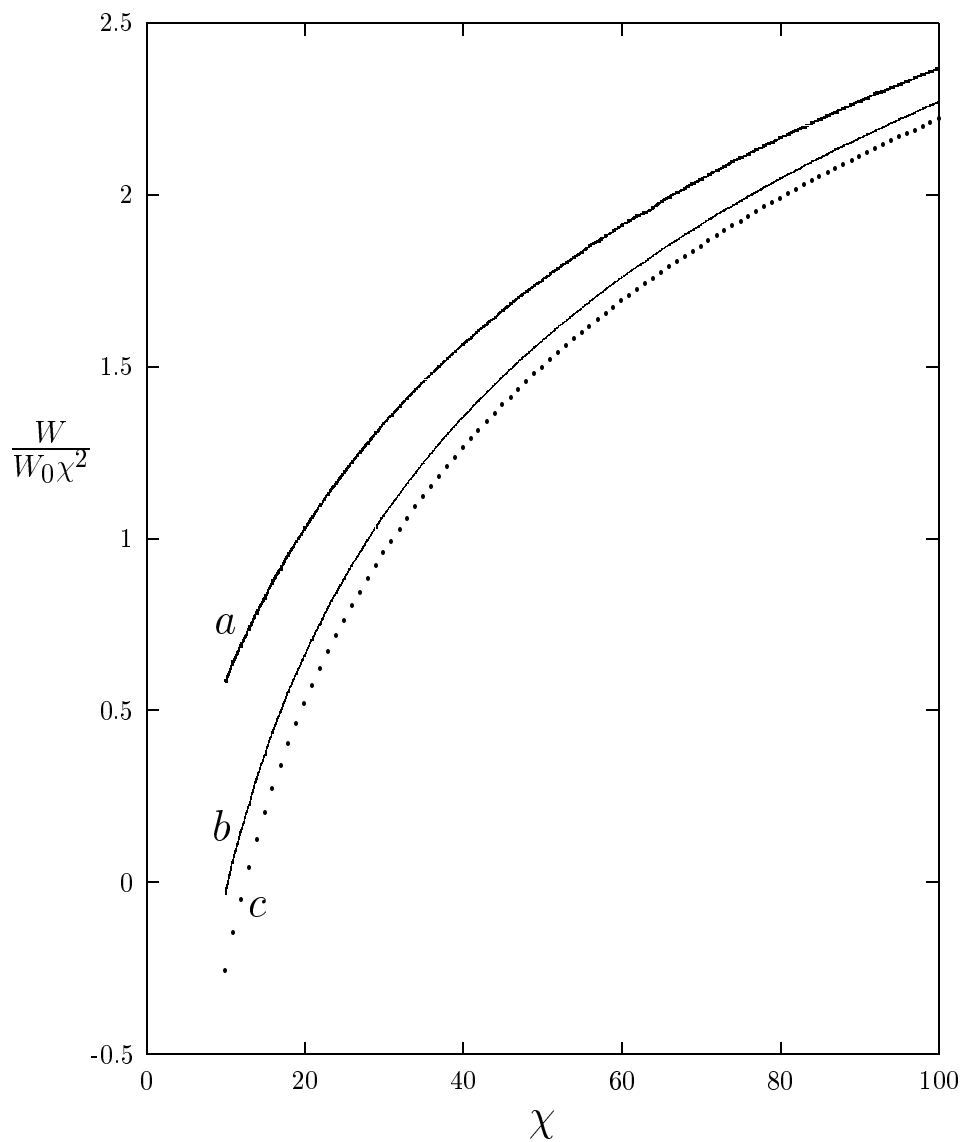


Рис. 5.2. Зависимость вероятности процесса $\nu \rightarrow \nu \ell^- \ell^+$ от динамического параметра в области умеренно больших значений χ для случая, когда аромат нейтрино совпадает с ароматом заряженного лептона ($\nu_e \rightarrow \nu_e e^- e^+, \dots$): *a*) по точной формуле (5.65); *b*) по приближённой формуле (5.68); *c*) по формуле (5.69) с “поправкой” $\sim \chi^{-2/3}$

5.4. Возможные астрофизические проявления процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ во внешнем магнитном поле

5.4.1. Средняя потеря энергии и импульса нейтрино

Следует заметить, что практический интерес для астрофизики имеет скорее не вероятность процесса, а средняя потеря энергии и импульса нейтрино в сильном магнитном поле, которую можно определить 4-вектором:

$$Q^\alpha = E \int dW q^\alpha = (\mathcal{I}, \mathcal{F}) E. \quad (5.70)$$

Его нулевая компонента связана со средней энергией, теряемой нейтрино за единицу времени, $\mathcal{I} = -dE/dt$. Пространственные компоненты вектора (5.70) связаны аналогичным образом с потерей импульса нейтрино за единицу времени, $\mathcal{F} = -d\mathbf{p}/dt$. Мы приведем здесь вектор Q^α в тех же двух предельных случаях, что рассматривались ранее.

1. При $eB \gtrsim E^2 \sin^2 \theta$ имеем

$$\begin{aligned} Q^\alpha = & \frac{G_F^2 e B (P \varphi P)^2 (C_V^2 + C_A^2)}{48\pi^3} [P^\alpha f_2(\varepsilon) - 2(\varphi P)^\alpha f_3(\varepsilon) + \\ & + \frac{2C_V C_A}{C_V^2 + C_A^2} (\tilde{\varphi} P)^\alpha f_2(\varepsilon)], \end{aligned} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} f_2(\varepsilon) &= 6 \int_0^1 d\rho \rho (1 - \rho^2)^2 e^{-\varepsilon(1+\rho^2)/2} I_0(\varepsilon\rho) = \\ &= 1 - \frac{5}{8} \varepsilon + \frac{21}{80} \varepsilon^2 - \frac{7}{80} \varepsilon^3 + \dots, \\ f_3(\varepsilon) &= 3 \int_0^1 d\rho \rho (1 - \rho^2) e^{-\varepsilon(1+\rho^2)/2} [(1 + \rho^2) I_0(\varepsilon\rho) - 2\rho I_1(\varepsilon\rho)] = \\ &= 1 - \frac{15}{16} \varepsilon + \frac{21}{40} \varepsilon^2 - \frac{7}{32} \varepsilon^3 + \dots \end{aligned}$$

В предельном случае $eB \gg E^2 \sin^2 \theta$ для нейтринных потерь энергии и импульса получаем

$$\mathcal{I} = \frac{1}{3}EW \left(1 + \frac{2C_V C_A}{C_V^2 + C_A^2} \cos \theta \right), \quad (5.72)$$

$$\mathcal{F}_z = \frac{1}{3}EW \left(\cos \theta + \frac{2C_V C_A}{C_V^2 + C_A^2} \right), \quad \mathcal{F}_\perp = EW \sin \theta, \quad (5.73)$$

где ось z направлена вдоль поля, вектор \mathcal{F}_\perp , поперечный к полю, лежит в плоскости векторов \mathbf{B} и \mathbf{p} , в качестве W нужно подставить вероятность процесса (5.40).

2. При $eB \ll E^2 \sin^2 \theta$ для процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ имеем

$$\begin{aligned} Q^\alpha &= \frac{7G_F^2(C_V^2 + C_A^2)m_e^6\chi^2}{432\pi^3} [P^\alpha(\ln \chi - 1.888) - \sqrt{3} \frac{\eta^2}{\chi} (\varphi\varphi P)^\alpha - \\ &- 7.465 \frac{C_V C_A}{C_V^2 + C_A^2} \frac{\eta}{\chi^{2/3}} (\tilde{\varphi}P)^\alpha]. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Напомним, что $\eta = eB/m_e^2$.

В предельном случае очень больших значений динамического параметра, $\ln \chi \gg 1$, выражение для 4-вектора потерь значительно упрощается:

$$Q^\alpha \simeq \frac{7}{16}EW P^\alpha, \quad (5.75)$$

где вероятность W следует взять из формулы (5.68).

Для астрофизических приложений важно, что формулы (5.40), (5.68), (5.71), (5.75) справедливы и для процесса с участием антинейтрино $\bar{\nu} \rightarrow \bar{\nu} e^- e^+$ благодаря CP -инвариантности слабого взаимодействия.

5.4.2. Условие применимости результата, полученного в поле, в присутствии плазмы

Отметим, что полученные нами формулы справедливы также в присутствии плотной плазмы с концентрацией электронов порядка 10^{33} см^{-3} . Это связано с особенностями статистики ультрарелятивистского электронного газа в магнитном поле [286]. С учётом вырождения по поперечному импульсу (4.14), связь концентрации ультрарелятивистского электрон-позитронного газа с химическим потенциалом μ и температурой T описы-

вается следующей суммой по уровням Ландау:

$$n = n_{e^-} - n_{e^+} = \frac{eB}{2\pi^2} \int_0^\infty dp \left\{ \left(\exp \left(\frac{p - \mu}{T} \right) + 1 \right)^{-1} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^\infty \left(\exp \left(\frac{\sqrt{p^2 + 2keB} - \mu}{T} \right) + 1 \right)^{-1} - (\mu \rightarrow -\mu) \right\}. \quad (5.76)$$

В сильном поле при условии $\sqrt{eB} - \mu \gg T$, когда заселён практически лишь основной уровень Ландау, зависимость от температуры в соотношении (5.76) исчезает и *химический потенциал* становится функцией только концентрации плазмы и интенсивности поля:

$$\mu = \frac{2\pi^2 n}{eB} \simeq 2.6 \text{ МэВ} \left(\frac{n}{10^{33} \text{ см}^{-3}} \right) \left(\frac{10^{16} \text{ Гс}}{B} \right). \quad (5.77)$$

Таким образом, химический потенциал может быть значительно меньше, чем *в отсутствие поля*, $\mu \simeq (3\pi^2 n)^{1/3}$, при тех же значениях концентрации. Однако видно, что химический потенциал растёт с концентрацией значительно быстрее, чем в отсутствие поля. При значении

$$n > 3.5 \times 10^{33} \text{ см}^{-3} \left(\frac{B}{10^{16} \text{ Гс}} \right)^{3/2}$$

начинают заселяться следующие уровни Ландау и взаимосвязь химического потенциала и концентрации определяется выражением

$$n \simeq \frac{eB\mu}{2\pi^2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{k_{\max}} \sqrt{1 - k \frac{2eB}{\mu^2}} \right), \quad k_{\max} = \left[\frac{\mu^2}{2eB} \right], \quad (5.78)$$

где $[x]$ – целая часть x . Зависимость химического потенциала от концентрации релятивистского электронного газа изображена на рис. 5.3. Видно, что при возбуждении нескольких низших уровней Ландау химический потенциал уже почти не отличается от бесполевого значения. Таким образом, при типичных энергиях рождающихся электронов и позитронов порядка энергий нейтрино ~ 20 МэВ и при параметрах плазмы, соответствующих условиям оболочки сверхновой, $n \sim 10^{33} \text{ см}^{-3}$, $T \sim 1$ МэВ, подавляющие статистические факторы несутсущественны.

В другом предельном случае очень высокой температуры $T \gg \sqrt{eB}, \mu$ учёт влияния среды приводит к появлению постоянных статистических факторов, равных $1/2$ как для электрона, так и для позитрона, что уменьшает вероятность процесса в 4 раза.

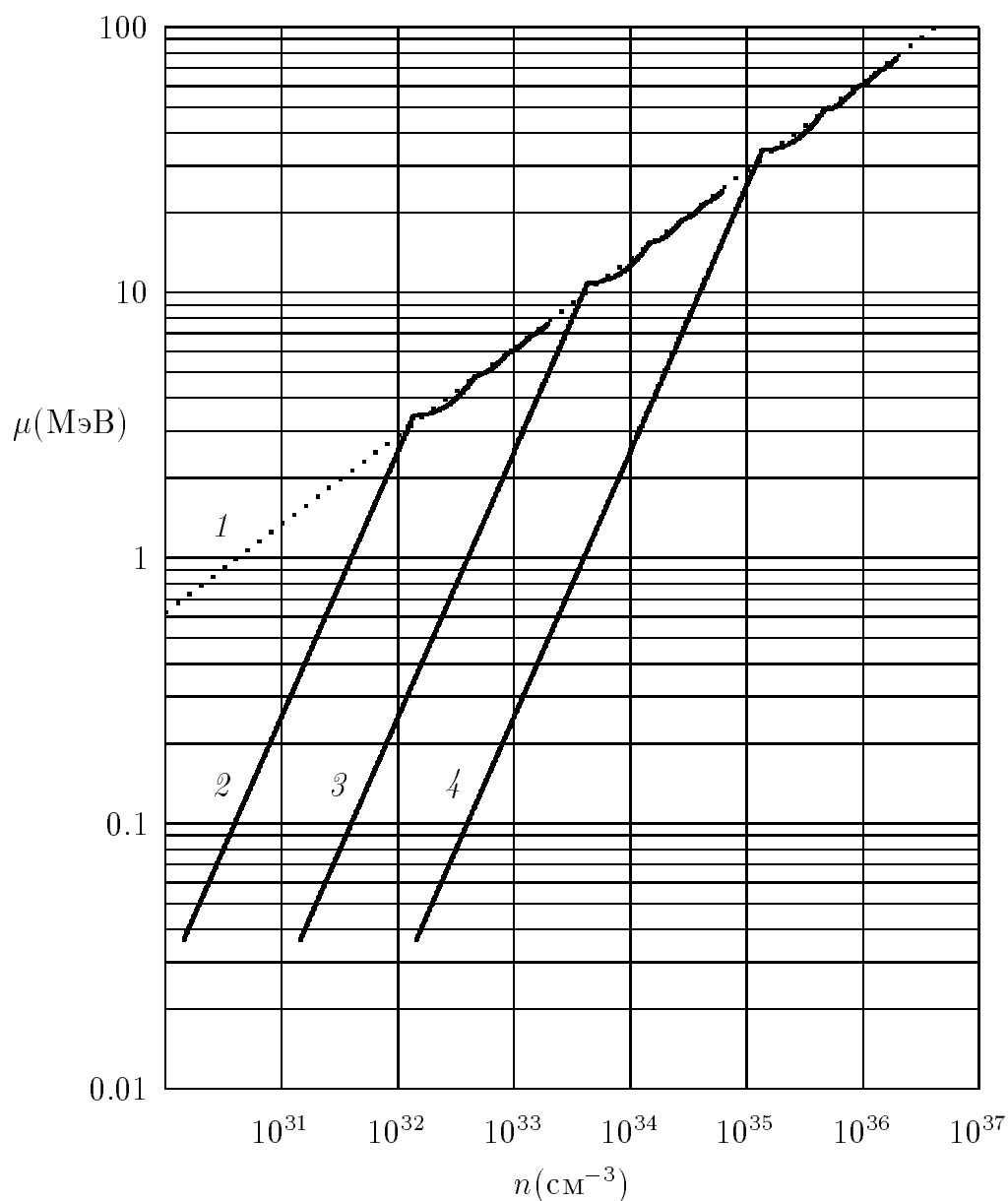


Рис. 5.3. Зависимость химического потенциала от концентрации релятивистского электронного газа: 1 – в отсутствие поля, 2, 3, 4 – в сильном магнитном поле (см. формулу (5.78)) для значений индукции поля 10^{15} , 10^{16} , 10^{17} Гс соответственно; изломы кривых соответствуют последовательному открыванию уровней Ландау

5.4.3. Возможные астрофизические следствия

Для иллюстрации применим полученные выше результаты к конкретным физическим условиям оболочки ядра взрыва сверхновой, в результате которого рождается замагниченная нейтронная звезда – пульсар. Представим, что в процессе этого катаклизма в окрестности нейтриносферы возникает по какой-либо причине очень сильное магнитное поле порядка $10^{16} - 10^{17}$ Гс [27–29, 33, 34]. Плотность электронов в этой области, уже прозрачной для нейтрино, не слишком высока (см. (5.77)), так что подавляющих статистических факторов не возникает. Из формул (5.71) и (5.75) можно найти долю энергии, теряемую нейтрино при прохождении магнитного поля. В пределе сильного поля $eB \gg E^2$ получаем из (5.71)

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_{tot}} \sim 0.6 \times 10^{-2} \left(\frac{B}{10^{17} \text{ Гс}} \right) \left(\frac{\bar{E}}{10 \text{ МэВ}} \right)^3 \left(\frac{\Delta \ell}{10 \text{ км}} \right), \quad (5.79)$$

где \mathcal{E}_{tot} – полная энергия, уносимая нейтрино при взрыве сверхновой, \bar{E} – энергия нейтрино, усредненная по спектру, $\Delta \ell$ есть характерный размер области, где поле меняется несущественно. Здесь мы взяли масштабы энергий, которые считаются типичными для взрыва сверхновой [5, 6].

Таким образом, при наличии достаточно сильного магнитного поля за счёт процесса нейтринного рождения электрон-позитронных пар могла бы быть решена известная проблема FOE (ten to the Fifty One Ergs), состоящая в том, что для согласованного описания динамики взрыва сверхновой необходимо, чтобы выходящий нейтринный поток за счёт какого-то механизма оставлял в оболочке $\sim 10^{51}$ эрг, то есть около 1% полной выделяющейся при взрыве энергии $\sim 10^{53}$ эрг.

Другой интересной характеристикой является асимметрия вылета нейтрино:

$$A = \frac{|\sum_i \mathbf{p}_i|}{\sum_i |\mathbf{p}_i|}. \quad (5.80)$$

В этом же пределе сильного поля полоидального типа [27, 33, 34] из формулы (5.79) получаем

$$A \sim 2 \times 10^{-3} \left(\frac{B}{10^{17} \text{ Гс}} \right) \left(\frac{\bar{E}}{10 \text{ МэВ}} \right)^3 \left(\frac{\Delta \ell}{10 \text{ км}} \right). \quad (5.81)$$

Как видно из формул (5.79) и (5.81), рассматриваемый эффект может проявляться на процентном уровне и в принципе может быть существенным при детальном теоретическом описании динамики остывания сверхновой.

В другом предельном случае $eB \ll E^2$ из (5.75) находим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathcal{E}}{\mathcal{E}_{tot}} &\sim 10^{-6} \left(\frac{B}{10^{15} \text{ Гс}} \right)^2 \left(\frac{\bar{E}}{20 \text{ МэВ}} \right) \left(\frac{\Delta \ell}{10 \text{ км}} \right) \times \\ &\times \left[4.7 + \ln \left(\frac{B}{10^{15} \text{ Гс}} \frac{\bar{E}}{20 \text{ МэВ}} \right) \right], \end{aligned} \quad (5.82)$$

что значительно меньше, чем (5.79). Асимметрия в этом случае имеет дополнительное подавление и, по-видимому, не представляет практического интереса.

Заметим, что в основе асимметрии потери импульса нейтрино в магнитном поле (5.81) лежит нарушение пространственной четности в слабом взаимодействии, так как величина A определяется членом, пропорциональным произведению констант $C_V C_A$ в выражении (5.71). Как уже отмечалось, вклады в асимметрию от вылетающих нейтрино и антинейтрино суммируются в силу CP -инвариантности слабого взаимодействия. Импульс, теряемый нейтрино, приводит к возникновению “толчковой” собственной скорости остатка катаклизма – пульсара. Если по каким-либо причинам физические параметры имели бы величины порядка масштабов формулы (5.81), то только за счёт нейтринного рождения электрон-позитронных пар в сильном магнитном поле звезды это привело бы для остатка с массой около массы Солнца к скоростям порядка 150 км/с.

5.5. Нейтрино в сильно замагниченной электрон-позитронной плазме

Процесс нейтринного рождения электрон-позитронных пар в сильном магнитном поле, если принять во внимание другую компоненту внешней активной среды – плотную плазму, будет подавляться за счёт возникновения статистических факторов Ферми–Дирака. В п. 5.4.2 определены условия, при которых такое подавление еще несущественно. Эти условия могут реализоваться, например, при слиянии нейтронных звезд. При бóльших значениях концентрации плазмы, что соответствует условиям взрыва сверхновой, влияние плазмы необходимо учитывать. При этом, наряду с подавлением процесса рождения e^-e^+ -пар, возникают новые каналы нейтрино-электронных взаимодействий.

Далее на основе работ [70–73] исследуется полный набор нейтрино-электронных процессов в замагниченной плазме, включающий, кроме ка-

нических реакций рассеяния $\nu e^\mp \rightarrow \nu e^\mp$ и аннигиляции $\nu \bar{\nu} \rightarrow e^- e^+$, идущих и в отсутствие поля, также процессы “синхротронного” излучения и поглощения нейтринной пары $e \leftrightarrow e \nu \bar{\nu}$ и нейтринного излучения электрон-позитронной пары $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$, возможные только в магнитном поле, и, кроме того, “экзотический” процесс, когда нейтрино захватывает из плазмы электрон-позитронную пару: $\nu e^- e^+ \rightarrow \nu$. Этот процесс разрешен только при одновременном наличии и магнитного поля, и горячей плазмы.

5.5.1. Что мы понимаем под сильно замагниченной $e^- e^+$ -плазмой

Речь идёт о таких условиях, когда среди всех физических параметров, характеризующих электрон-позитронную плазму, полевой параметр является доминирующим. Упрощённо можно охарактеризовать данные условия следующим соотношением: $eB \gg \mu^2, T^2$, где μ – химический потенциал электронов, T – температура плазмы. Для нахождения более обоснованного соотношения сравним плотности энергии магнитного поля $B^2/8\pi$ и электрон-позитронной плазмы.

Как известно, магнитное поле изменяет статистические свойства электрон-позитронного газа [286]. С учётом вырождения по поперечному импульсу зависимость концентрации и плотности энергии электрон-позитронного газа от химического потенциала и температуры описывается следующей суммой по уровням Ландау:

$$n = n_{e^-} - n_{e^+} = \frac{eB}{2\pi^2} \int_0^\infty dp [\Phi(p, \mu, T) - \Phi(p, -\mu, T)], \quad (5.83)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{e^-} + \mathcal{E}_{e^+} = \frac{eB}{2\pi^2} \int_0^\infty p dp [\Phi(p, \mu, T) + \Phi(p, -\mu, T)], \quad (5.84)$$

$$\begin{aligned} \Phi(p, \mu, T) = & \left(\exp\left(\frac{p - \mu}{T}\right) + 1 \right)^{-1} + \\ & + 2 \sum_{k=1}^\infty \left(\exp\left(\frac{\sqrt{p^2 + 2keB} - \mu}{T}\right) + 1 \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Здесь мы использовали приближение ультрарелятивистского электрон-позитронного газа, поскольку для астрофизических процессов характерны

достаточно высокие энергии нейтрино и электронов плазмы, $E \gg m_e$. Таким образом, мы будем пренебрегать массой электрона везде, где это не вызовет недоразумений.

В сильном поле, а именно при выполнении условия $\sqrt{eB} - \mu \gg T$, заселённым оказывается практически лишь основной уровень Ландау. При этом из (5.83), (5.84) получаем

$$n = \frac{eB\mu}{2\pi^2}, \quad (5.86)$$

$$\mathcal{E} = \frac{eB\mu^2}{4\pi^2} + \frac{eBT^2}{12}. \quad (5.87)$$

Таким образом, более точное условие того, что электрон-позитронная плазма является сильно замагниченной, можно записать в виде

$$\frac{B^2}{8\pi} \gg \frac{\pi^2 n^2}{eB} + \frac{eBT^2}{12}. \quad (5.88)$$

Выбирая в качестве масштабов в соотношении (5.88) значения физических параметров, типичные для оболочки сверхновой, перепишем его в виде

$$0.8 \times 10^{32} B_3^2 \gg 1.7 \times 10^{30} \frac{\rho_{12}^2 Y_{0.1}^2}{B_3} + 1.1 \times 10^{27} B_3 T_5^2 \quad \left(\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3} \right), \quad (5.89)$$

где обозначено

$$B_3 = \frac{B}{10^3 B_e}, \quad \rho_{12} = \frac{\rho}{10^{12} \text{г/см}^3}, \quad Y_{0.1} = \frac{Y_e}{0.1}, \quad T_5 = \frac{T}{5 \text{ МэВ}}, \quad (5.90)$$

здесь ρ – полная плотность плазмы в оболочке, Y_e – отношение числа электронов к числу барионов. Видно, что условие замагниченности плазмы заведомо выполняется.

5.5.2. Нейтрино-электронные процессы в сильно замагниченной плазме. Кинематический анализ

Вычисления здесь аналогичны проведённым в п. 5.2. При изучении процессов в замагниченной плазме к условиям применимости эффективного локального лагранжиана (5.22) следует добавить условия $eBT, eB\mu \ll m_W^3$.

Все нейтрино-электронные процессы, определяемые лагранжианом (5.22), можно разделить на две группы:

- 1) процессы, в которых нейтрино присутствует как в начальном, так и в конечном состоянии: $\nu e^\mp \rightarrow \nu e^\mp$, $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$, $\nu e^- e^+ \rightarrow \nu$, и аналогичные процессы с антинейтрино;
- 2) процессы с рождением или поглощением нейтрино-антинейтринной пары: $e^- e^+ \rightarrow \nu \bar{\nu}$, $\nu \bar{\nu} \rightarrow e^- e^+$, $e \rightarrow e \nu \bar{\nu}$, $e \nu \bar{\nu} \rightarrow e$.

Как видно из выражения (5.24), квадрат амплитуды каждого из нейтрино-электронных процессов содержит фактор m^2/q_\parallel^2 . Однако величина $q_\parallel^2 = q_0^2 - q_z^2$ для процессов 1-го и 2-го типов принципиально различается. Для процессов с нейтрино-антинейтринной парой имеем $q = P + P'$ (P и P' – 4-импульсы нейтрино и антинейтрино соответственно), следовательно, $q^2 > 0$. Поскольку $q_\parallel^2 = q^2 + q_\perp^2$, где оба слагаемых положительны, величина q_\parallel^2 может быть малой только при одновременной малости как q^2 , так и q_\perp^2 , что возможно только в малой области фазового пространства. Это означает, что практически везде в фазовом пространстве $\sqrt{q_\parallel^2} \sim E \sim T \gg m$, что приводит к подавлению вероятности множителем $m^2/T^2 \ll 1$.

В свою очередь, для процессов с нейтрино в начальном и конечном состояниях $q = P - P'$, следовательно, $q^2 < 0$ и величина q_\parallel^2 может быть малой в достаточно широкой области фазового пространства. Расчёт подтверждает, что для этих процессов реализуется кинематическое усиление, приводящее к исчезновению множителя m^2/T^2 в вероятностях.

Таким образом, взаимодействие нейтрино с сильно замагниченной электрон-позитронной плазмой определяется процессами $\nu e^- \rightarrow \nu e^-$, $\nu e^+ \rightarrow \nu e^+$, $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$, $\nu e^- e^+ \rightarrow \nu$. На рис. 5.4 изображены кинематические области в пространстве импульсов конечного нейтрино для перечисленных процессов в удобной системе отсчёта, где импульс начального нейтрино перпендикулярен магнитному полю. Основной вклад в вероятности происходит от областей вблизи парабол $q_\parallel^2 = 0$, где реализуется указанное кинематическое усиление.

Интересно проанализировать кинематику процессов $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$, $\nu e^- e^+ \rightarrow \nu$ в плоскости Минковского $\{0, 3\}$. Энергии электрона и позитрона (см. формулу (1.3)) на основном уровне Ландау равны $\varepsilon = \sqrt{p_z^2 + m_e^2}$, $\varepsilon' = \sqrt{p_z'^2 + m_e^2}$ и при $\varepsilon \sim \varepsilon' \sim T \gg m_e$ электрон и позитрон ведут себя практически как безмассовые частицы. В свою очередь, в энергиях начального и конечного нейтрино, $E = \sqrt{P_z^2 + P_\perp^2}$, $E' = \sqrt{P_z'^2 + P_\perp'^2}$, поперечные компоненты импульсов могут играть в плоскости $\{0, 3\}$ роль эффективных масс, $P_\perp^2 = (m_\nu)_{\text{eff}}^2$, $P_\perp'^2 = (m'_\nu)_{\text{eff}}^2$. Таким образом, процесс $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ открыт при

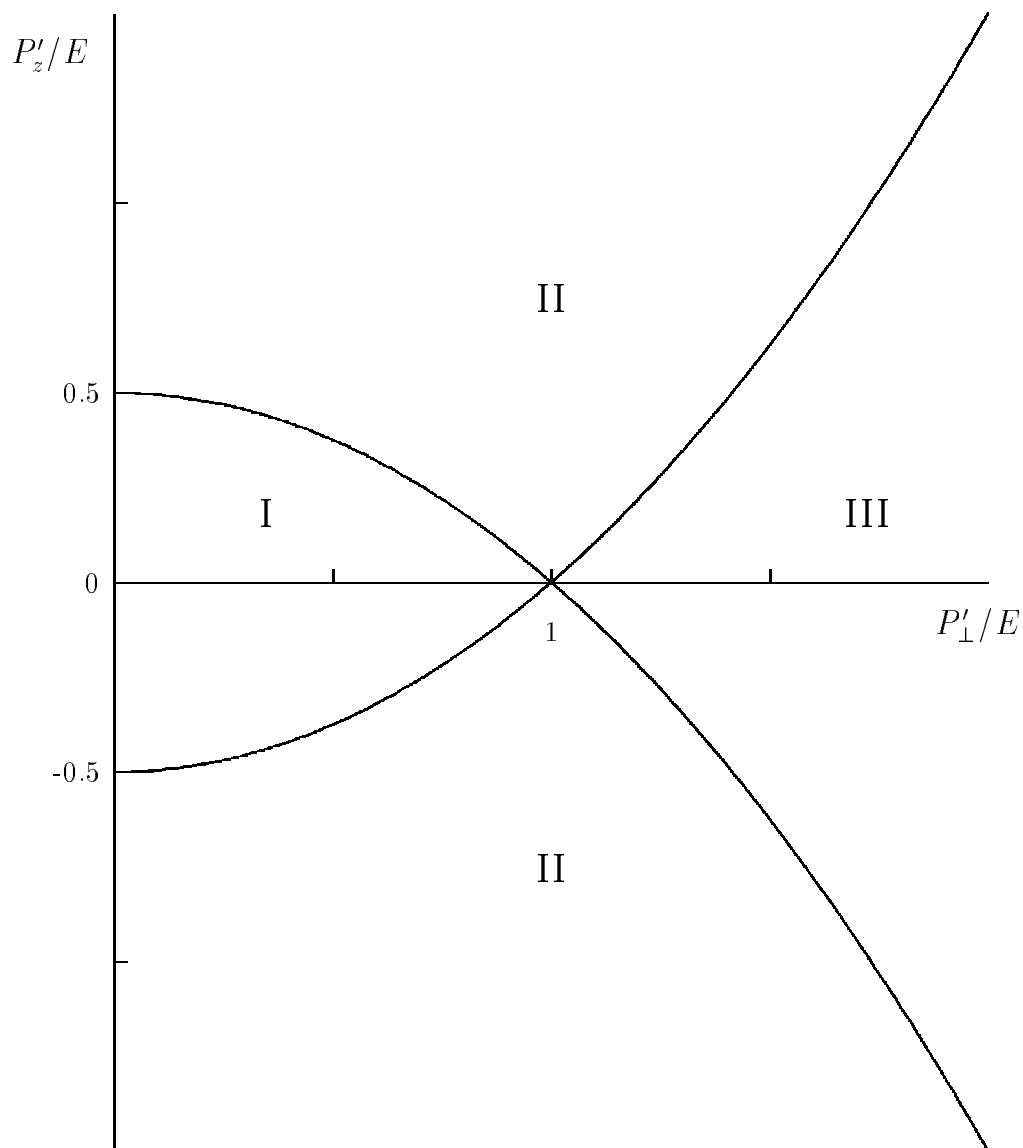


Рис. 5.4. Кинематические области в пространстве импульсов конечного нейтрино: I – для процесса рождения пары $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$; II – для каналов рассеяния $\nu e^- \rightarrow \nu e^-$, $\nu e^+ \rightarrow \nu e^+$; III – для процесса захвата пары $\nu e^- e^+ \rightarrow \nu$; линии соответствуют значению $q_{\parallel}^2 = 0$

$(m_\nu)_{\text{eff}} > (m'_\nu)_{\text{eff}}$ и выглядит в плоскости $\{0, 3\}$ как распад более “тяжёлого” нейтрино на более “лёгкое” плюс “безмассовые” электрон и позитрон. Соответственно, процесс захвата пары $\nu e^- e^+ \rightarrow \nu$ открыт при $(m_\nu)_{\text{eff}} < (m'_\nu)_{\text{eff}}$.

5.5.3. Вероятность процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$

\mathcal{S} -матричный элемент процесса

$$\nu(P) \rightarrow \nu(P') + e^-(p) + e^+(p')$$

имеет вид (5.23), амплитуды других нейтрино-электронных процессов получаются отсюда кроссинг-преобразованиями.

Вероятность нейтринного рождения $e^- e^+$ – пары в единицу времени представим в следующем виде:

$$W(\nu \rightarrow \nu e^- e^+) = \frac{1}{T} \int |\mathcal{S}|^2 d\Gamma_{e^-} (1 - f_{e^-}) d\Gamma_{e^+} (1 - f_{e^+}) d\Gamma'_\nu (1 - f'_\nu), \quad (5.91)$$

где T – полное время взаимодействия, $d\Gamma$ – элемент фазового объёма частицы,

$$d\Gamma_{e^-} = \frac{d^2 p L_y L_z}{(2\pi)^2}, \quad d\Gamma_{e^+} = \frac{d^2 p' L_y L_z}{(2\pi)^2}, \quad d\Gamma'_\nu = \frac{d^3 P' V}{(2\pi)^3}. \quad (5.92)$$

Функции распределения электронов и позитронов

$$f_{e^-} = \frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/T} + 1}, \quad f_{e^+} = \frac{1}{e^{(\varepsilon' + \mu)/T} + 1} \quad (5.93)$$

учитывают наличие плазмы, здесь μ, T – химический потенциал и температура электрон-позитронного газа. Для общности мы учли также возможное наличие квазиравновесного нейтринного газа, описываемого функцией распределения f'_ν . Вообще говоря, вопрос о правомерности описания состояния нейтринного газа в условиях звездного коллапса или другого астрофизического процесса с помощью равновесной функции распределения, а также определение этой функции представляет собой непростую астрофизическую проблему (см., например, [287]). По-видимому, приближение равновесного нейтринного ферми-газа с функцией распределения

$$f_\nu^{(eq)} = \frac{1}{e^{(E - \mu_\nu)/T_\nu} + 1}, \quad (5.94)$$

где μ_ν, T_ν – химический потенциал и температура нейтринного газа, должно удовлетворительно работать внутри нейтриносферы. За пределами нейтриносферы, где формируется выходящий нейтринный поток и, следовательно,

возникает асимметрия импульсов нейтрино, принято использовать предположение о факторизации локальной функции распределения

$$f_\nu = \frac{\Phi(\vartheta, R)}{e^{(E-\mu_\nu)/T_\nu} + 1}, \quad (5.95)$$

где энергетическое распределение приближённо считается равновесным. Функция $\Phi(\vartheta, R)$ определяет угловое распределение нейтрино, $\vartheta = \cos \alpha$, α – угол между импульсом нейтрино и радиальным направлением в звезде, R – расстояние до центра звезды. При этом, как показывает анализ [287], в окрестности нейтриносферы функция $\Phi(\vartheta, R)$ незначительно отличается от единицы. При вычислении вероятности мы будем использовать нейтринную функцию распределения в виде (5.94), пренебрегая асимметрией. Далее при анализе возможных астрофизических проявлений обсуждаемых нейтрино-электронных процессов асимметрия в функции распределения (5.95) будет учтена как для начальных, так и для конечных нейтрино.

Подставляя \mathcal{S} -матричный элемент (5.23) в (5.91) и интегрируя с δ -функциями по d^2p' , получим

$$W = \frac{G_F^2}{32(2\pi)^4 E} \frac{1}{L_x} \int \frac{d^3P'}{E'} (1 - f'_\nu) \frac{dp_y dp_z}{\varepsilon^2} \delta(\varepsilon + \varepsilon' - q_0) \times \\ \times (1 - f_{e^-}) (1 - f_{e^+}) |\bar{u}(p_\parallel) \hat{j}(C_V + C_A \gamma_5) u(-p'_\parallel)|^2, \quad (5.96)$$

где нужно подставить $\varepsilon' = \sqrt{m^2 + (q_z - p_z)^2}$, $p'_z = q_z - p_z$.

Выполняя в (5.96) интегрирование по импульсу электрона с учётом (4.14), получаем вероятность процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ в виде следующего интеграла по импульсу конечного нейтрино:

$$W = \frac{G_F^2 e B m^2}{64\pi^4 E} \int \frac{d^3P'}{E'} \theta(q_0 - \sqrt{q_z^2 + 4m^2}) \frac{1}{(q_\parallel^2)^{3/2} (q_\parallel^2 - 4m^2)^{1/2}} \times \\ \times |C_V(j\tilde{\varphi}q) + C_A(j\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}q)|^2 (1 - f'_\nu) [(1 - f_{e^-})(1 - f_{e^+}) + (q_z \rightarrow -q_z)]. \quad (5.97)$$

В этом выражении энергии электрона и позитрона, ε и ε' , входящие в функции распределения f_{e^\mp} , определяются законом сохранения $\varepsilon + \varepsilon' - q_0 = 0$ и равны

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(q_0 + q_z \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q_\parallel^2}} \right), \quad \varepsilon' = \frac{1}{2} \left(q_0 - q_z \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q_\parallel^2}} \right). \quad (5.98)$$

Выражение (5.97) является обобщением формулы (5.28), где процесс $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ исследовался в чисто магнитном поле большой интенсивности, на случай присутствия электрон-позитронного и нейтринного газа.

Дальнейшее интегрирование по импульсу конечного нейтрино удобно проводить, как и в п. 5.2, в системе отсчёта, где импульс начального нейтрино перпендикулярен магнитному полю, $P_z = 0$. В случае чисто магнитного поля в эту систему можно было перейти без потери общности, совершая лоренц-преобразование вдоль поля, поскольку величина EW , определяемая из выражения (5.97), содержит, кроме статистических факторов Ферми–Дирака, только инварианты относительно такого преобразования. Однако теперь у нас есть выделенная система отсчёта – система покоя плазмы, в которой и записаны функции распределения (5.93), (5.94). Для перехода в систему, где $P_z = 0$, представим эти функции в релятивистски инвариантном виде:

$$f_{e^-} = \frac{1}{e^{((pv)-\mu)/T} + 1}, \quad f_{e^+} = \frac{1}{e^{((p'v)+\mu)/T} + 1}, \quad f'_\nu = \frac{1}{e^{((P'v)-\mu_\nu)/T_\nu} + 1}. \quad (5.99)$$

Здесь введён 4-вектор скорости плазмы v^α , ($v^2 = 1$), который в её системе покоя равен: $v^\alpha = (1, \mathbf{0})$, при этом функции распределения (5.99) в точности совпадают с функциями (5.93), (5.94). В системе $P_z = 0$ имеем: $v^\alpha = (v_0, 0, 0, v_z)$, $v_0 = 1/\sin \theta$, $v_z = -\cos \theta/\sin \theta$, где θ – угол между векторами импульса начального нейтрино и индукции магнитного поля в системе покоя плазмы.

Перейдём в формуле (5.97) к безразмерным цилиндрическим координатам в пространстве вектора импульса конечного нейтрино \mathbf{P}' :

$$\rho = \sqrt{P_x'^2 + P_y'^2}/E_\perp, \quad \text{tg } \phi = P_y'/P_x', \quad \zeta = P_z'/E_\perp.$$

Здесь E_\perp есть энергия начального нейтрино в системе $P_z = 0$, которая связана с его энергией E в системе покоя плазмы соотношением $E_\perp = E \sin \theta$.

В переменных ρ, ζ выражение (5.97) перепишется в виде

$$\begin{aligned}
 EW &= \frac{G_F^2 m^2 e B E_\perp^2}{4\pi^3} \int_0^{1-\lambda} d\rho \rho \int_{-\zeta_m}^{\zeta_m} \frac{d\zeta}{\beta \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} (1 - 2\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} + \rho^2)^2} \times \\
 &\times \left\{ (C_V^2 + C_A^2) \left[(1 + \rho^2) \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} - 2\rho^2 \right] - 2C_V C_A (1 - \rho^2) \zeta \right\} \times \\
 &\times \frac{1}{1 + e^{-(P'v)/T_\nu - \eta_\nu}} \left(\frac{1}{1 + e^{-(pv)/T + \eta}} \frac{1}{1 + e^{-(p'v)/T - \eta}} \right) \Bigg|_{\sigma=+1} + \\
 &+ \frac{1}{1 + e^{-(pv)/T + \eta}} \frac{1}{1 + e^{-(p'v)/T - \eta}} \Bigg|_{\sigma=-1} \Bigg), \tag{5.100}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 (pv) &= \frac{E_\perp}{2 \sin \theta} \left[\left(1 - \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \right) (1 + \sigma \beta \cos \theta) - \zeta (\cos \theta + \sigma \beta) \right], \\
 (p'v) &= \frac{E_\perp}{2 \sin \theta} \left[\left(1 - \sqrt{\rho^2 + \zeta^2} \right) (1 - \sigma \beta \cos \theta) - \zeta (\cos \theta - \sigma \beta) \right], \\
 (P'v) &= \frac{E_\perp}{\sin \theta} \left(\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} + \zeta \cos \theta \right),
 \end{aligned}$$

кроме того, введены обозначения $\eta = \mu/T$, $\eta_\nu = \mu_\nu/T_\nu$,

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{q_\parallel^2}} = \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{1 - 2\sqrt{\rho^2 + \zeta^2} + \rho^2}},$$

$$\lambda = \frac{2m}{E_\perp}, \quad \zeta_m = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \rho^2 - \lambda^2)^2 - 4\rho^2}.$$

Переходя в выражении (5.100) к новым переменным интегрирования β и $x = E_\perp(1 - \rho^2)/4T \sin \theta$ и выделяя лидирующий вклад $\sim E_\perp^2/m^2$, преобразуем

вероятность к виду

$$\begin{aligned}
 EW = & \frac{G_F^2 e B E_\perp^2 T^2 \sin^2 \theta}{2\pi^3} \int_0^{\epsilon\tau/4} x dx \int_0^1 d\beta \left\{ \frac{(C_V + C_A)^2}{1 + e^{-\epsilon + 2x(1+u)/\tau + \eta_\nu}} \times \right. \\
 & \times \left[f(\beta, u, \eta) f(-\beta, u, -\eta) + f(\beta, u, -\eta) f(-\beta, u, \eta) \right] + \\
 & + \frac{(C_V - C_A)^2}{1 + e^{-\epsilon + 2x(1-u)/\tau + \eta_\nu}} \left[f(\beta, -u, \eta) f(-\beta, -u, -\eta) + \right. \\
 & \left. \left. + f(\beta, -u, -\eta) f(-\beta, -u, \eta) \right] \right\}, \quad (5.101)
 \end{aligned}$$

где обозначено $\epsilon = E_\perp / (T_\nu \sin \theta)$, $u = \cos \theta$, $\tau = T_\nu / T$,

$$f(\beta, u, \eta) = \frac{1}{1 + e^{-x(1+\beta)(1+u)+\eta}}.$$

Интегрируя (5.101) по переменной β , с использованием соотношения

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 d\beta f(\beta, u, \eta) f(-\beta, u, -\eta) = \\
 & = \frac{1}{a(1 - e^{-2a})} \ln \left(\frac{1 + e^{-2a+\eta}}{1 + e^\eta} \frac{1 + e^{a+\eta}}{1 + e^{-a+\eta}} \right), \quad (5.102)
 \end{aligned}$$

где $a = x(1+u)$, и переходя в систему покоя плазмы, окончательно находим

$$\begin{aligned}
 W(\nu \rightarrow \nu e^- e^+) = & \frac{G_F^2 e B T^2 E}{4\pi^3} \left\{ (C_V + C_A)^2 (1-u)^2 \times \right. \\
 & \times \int_0^{\epsilon\tau \frac{1+u}{2}} \frac{d\xi}{(1 - e^{-\xi})(1 + e^{-\epsilon + \xi/\tau + \eta_\nu})} \ln \frac{\text{ch } \xi + \text{ch } \eta}{1 + \text{ch } \eta} + \\
 & \left. + (C_A \rightarrow -C_A; u \rightarrow -u) \right\}, \quad (5.103)
 \end{aligned}$$

где $\epsilon = E/T_\nu$. Зависимость вероятности (5.103) от концентрации электрон-позитронного газа $n = n_{e^-} - n_{e^+}$ определяется через его химический потенциал (см. (5.86)). Отметим, что формула для вероятности (5.103) справедлива

для случаев как горячей ($\mu \ll T$), так и холодной ($\mu \gg T$) плазмы. В случае разреженного электрон-позитронного и нейтринного газа ($T, \mu, T_\nu, \mu_\nu \rightarrow 0$) формула (5.103) воспроизводит результат (5.40) для вероятности процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ в пределе сильного магнитного поля, $eB \gg E^2 \sin^2 \theta$, без плазмы.

В отсутствие нейтринного газа ($T_\nu, \mu_\nu \rightarrow 0$), для горячей электрон-позитронной плазмы ($T \rightarrow \infty$) вероятность (5.103) становится равной $1/4$ от чисто полевой вероятности (5.40), как указывалось в п. 5.4.2, поскольку статистические факторы для электрона и позитрона в этом пределе становятся равными $1/2$.

5.5.4. Полная вероятность взаимодействия нейтрино с замагниченной электрон-позитронной плазмой

Для корректного анализа процесса распространения нейтрино в горячей плотной плазме в присутствии сильного магнитного поля необходимо рассмотреть полный набор нейтрино-электронных процессов. А именно, кроме реакций рассеяния $\nu e^\mp \rightarrow \nu e^\mp$, идущих и в отсутствие поля, и процесса рождения пар $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$, возможного только в магнитном поле, следует учесть “экзотический” процесс, когда нейтрино захватывает из плазмы электрон-позитронную пару: $\nu e^- e^+ \rightarrow \nu$. Этот процесс разрешён только при одновременном наличии и магнитного поля, и плазмы. При этом физический смысл имеет только вероятность процесса, просуммированная по всем начальным состояниям электронов и позитронов плазмы. Аналогично определяется вероятность каналов рассеяния $\nu e^\mp \rightarrow \nu e^\mp$ как сумма по начальным состояниям e^- или e^+ . Полная вероятность взаимодействия нейтрино с электрон-позитронной плазмой в магнитном поле складывается из вероятностей перечисленных процессов.

Таким образом, вероятности процессов рассеяния следует определять в виде

$$W(\nu e^\mp \rightarrow \nu e^\mp) = \frac{1}{T} \int |\mathcal{S}|^2 d\Gamma_{e^\mp} f_{e^\mp} d\Gamma'_{e^\mp} (1 - f'_{e^\mp}) d\Gamma'_\nu (1 - f'_\nu). \quad (5.104)$$

Аналогично для процесса захвата пары

$$W(\nu e^- e^+ \rightarrow \nu) = \frac{1}{T} \int |\mathcal{S}|^2 d\Gamma_{e^-} f_{e^-} d\Gamma_{e^+} f_{e^+} d\Gamma'_\nu (1 - f'_\nu). \quad (5.105)$$

Как видно из рис. 5.4, процессам рассеяния и захвата пары соответствуют неограниченные кинематические области, поскольку начальные электроны

и позитроны формально могут иметь любую энергию. Сходимость интегралов обеспечивается функциями распределения.

Интегрирование выражений (5.104), (5.105) выполняется по той же схеме, что изложена выше для процесса рождения пары $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$. Важным моментом при интегрировании будет то, что величина энергии, передаваемой от нейтрино активной среде, $q_0 = E - E'$, не является положительно определённой. Для вероятности (в единицу времени) рассеяния нейтрино на электронах замагниченной плазмы получаем

$$\begin{aligned}
 W(\nu e^- \rightarrow \nu e^-) &= \frac{G_F^2 e B T^2 E}{4\pi^3} \times \\
 &\times \left\{ (C_V + C_A)^2 (1-u)^2 \int_0^{\epsilon\tau \frac{1+u}{2}} \frac{d\xi}{(1-e^{-\xi})(1+e^{-\epsilon+\xi/\tau+\eta_\nu})} \ln \frac{1+e^\eta}{1+e^{-\xi+\eta}} + \right. \\
 &+ (C_V - C_A)^2 (1+u)^2 \int_0^{\epsilon\tau \frac{1-u}{2}} \frac{d\xi}{(1-e^{-\xi})(1+e^{-\epsilon+\xi/\tau+\eta_\nu})} \ln \frac{1+e^\eta}{1+e^{-\xi+\eta}} + \\
 &+ [(C_V + C_A)^2 (1-u)^2 + (C_V - C_A)^2 (1+u)^2] \times \\
 &\times \left. \int_0^\infty \frac{d\xi}{(e^\xi - 1)(1+e^{-\epsilon-\xi/\tau+\eta_\nu})} \ln \frac{1+e^\eta}{1+e^{-\xi+\eta}} \right\}. \quad (5.106)
 \end{aligned}$$

С учётом функций распределения (5.99) вероятность рассеяния на позитронах получается из (5.106) заменой $\eta \rightarrow -\eta$. Для канала захвата пары имеем

$$\begin{aligned}
 W(\nu e^- e^+ \rightarrow \nu) &= \frac{G_F^2 e B T^2 E}{4\pi^3} [(C_V + C_A)^2 (1-u)^2 + \\
 &+ (C_V - C_A)^2 (1+u)^2] \int_0^\infty \frac{d\xi}{(e^\xi - 1)(1+e^{-\epsilon-\xi/\tau+\eta_\nu})} \ln \frac{\text{ch } \xi + \text{ch } \eta}{1 + \text{ch } \eta}. \quad (5.107)
 \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, физический смысл имеет только полная вероятность взаимодействия нейтрино с электрон-позитронной плазмой:

$$\begin{aligned}
 W(\nu \rightarrow \nu) &= W(\nu \rightarrow \nu e^- e^+) + W(\nu e^- e^+ \rightarrow \nu) + \\
 &+ W(\nu e^- \rightarrow \nu e^-) + W(\nu e^+ \rightarrow \nu e^+). \quad (5.108)
 \end{aligned}$$

Как оказалось, эта величина имеет существенно более простой вид:

$$W(\nu \rightarrow \nu) = \frac{G_F^2 e B T^2 E}{4\pi^3} \left\{ (C_V + C_A)^2 (1 - u)^2 \times \right. \\ \left. \times \left[F_1\left(\frac{\epsilon\tau(1+u)}{2}\right) - F_1(-\infty) \right] + (C_A \rightarrow -C_A; u \rightarrow -u) \right\}, \quad (5.109)$$

где $F_1(z)$ есть одна из семейства функций вида

$$F_k(z) = \int_0^z \frac{\xi^k d\xi}{(1 - e^{-\xi})(1 + e^{-\epsilon + \eta_\nu + \xi/\tau})}. \quad (5.110)$$

Что примечательно, в суммарной вероятности сократилась зависимость от химического потенциала электрон-позитронного газа μ , которая присутствовала в вероятностях отдельных процессов. На первый взгляд, этот результат выглядит необычным. Действительно, химический потенциал сильно замагниченной плазмы, согласно (5.86), пропорционален ее концентрации, от которой вероятность взаимодействия нейтрино с плазмой оказывается не зависящей. Возвращаясь к отдельным каналам, видим, что для процесса рождения пары $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ рост концентрации плазмы должен приводить к уменьшению вероятности, поскольку уменьшается число свободных энергетических уровней для электронов и позитронов. В процессе захвата пары $\nu e^- e^+ \rightarrow \nu$ вероятность, соответственно, растет с концентрацией. Для каналов рассеяния важны оба эти механизма. Однако обнаруженный нами эффект точной компенсации этих механизмов в суммарной вероятности, по-видимому, нельзя было предсказать заранее, без проведения конкретного вычисления.

В случае разреженного нейтринного газа вероятность (5.109) выражается через дилогарифм Эйлера $\text{Li}_2(x)$:

$$W(\nu \rightarrow \nu) = \frac{G_F^2 e B T^2 E}{4\pi^3} \left\{ (C_V^2 + C_A^2) \frac{E^2 \sin^4 \theta}{4T^2} + \right. \\ + (C_V + C_A)^2 (1 - \cos \theta)^2 \text{Li}_2\left(1 - e^{-E(1+\cos \theta)/2T}\right) + \\ + (C_V - C_A)^2 (1 + \cos \theta)^2 \text{Li}_2\left(1 - e^{-E(1-\cos \theta)/2T}\right) + \\ \left. + \frac{\pi^2}{3} [(C_V^2 + C_A^2)(1 + \cos^2 \theta) - 4 C_V C_A \cos \theta] \right\}, \quad (5.111)$$

где $\text{Li}_n(x)$ – полилогарифм порядка n

$$\text{Li}_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^n}. \quad (5.112)$$

Относительные вклады плазмы и магнитного поля в процесс взаимодействия нейтрино с активной средой проиллюстрированы на рис. 5.5, где представлено отношение вероятностей взаимодействия нейтрино с замагниченной плазмой и с чистым магнитным полем, $R_w = W_{B+pl}/W_B$, при значении угла $\theta = \pi/2$ в зависимости от отношения энергии нейтрино к температуре плазмы. Видно, что при повышении температуры вероятность взаимодействия увеличивается.

Вероятность (5.109) определяет парциальный вклад рассматриваемых процессов в непрозрачность по отношению к распространению нейтрино в среде. Оценка длины свободного пробега, связанной с нейтрино-электронными процессами, даёт

$$\lambda_e = \frac{1}{W} \simeq 170 \text{ км} \left(\frac{10^3 B_e}{B} \right) \left(\frac{5 \text{ МэВ}}{T} \right)^3. \quad (5.113)$$

Это следует сравнивать с длиной свободного пробега нейтрино за счёт взаимодействия с нуклонами, которая при плотности $\rho \sim 10^{12} \text{ г/см}^3$ оказывается порядка 1 км. На первый взгляд, влияние нейтрино-электронных реакций на процесс распространения нейтрино пренебрежимо мало. Однако длина пробега не исчерпывает нейтринной физики в среде. Существенными в астрофизических приложениях величинами являются также потери энергии и импульса нейтрино. Особенно важным является возникновение асимметрии потери импульса нейтрино, обусловленной влиянием внешнего магнитного поля. Попытки вычисления таких асимметрий за счёт нейтрино-нуклонных процессов, связанные с проблемой больших собственных скоростей пульсаров, предпринимались неоднократно (см. [288] и цитированные там работы). Как мы покажем ниже, несмотря на относительную малость вероятностей нейтрино-электронных процессов, их вклад в асимметрию может оказаться сравнимым с вкладами нейтрино-нуклонных процессов.

5.5.5. Средние потери энергии и импульса нейтрино

При исследовании указанных нейтрино-электронных взаимодействий в магнитном поле и/или плазме [47–50, 68] анализ обычно ограничивался вычислением вероятностей и сечений процессов. Как уже отмечалось, практический интерес для астрофизики имеют не только вероятности процессов,

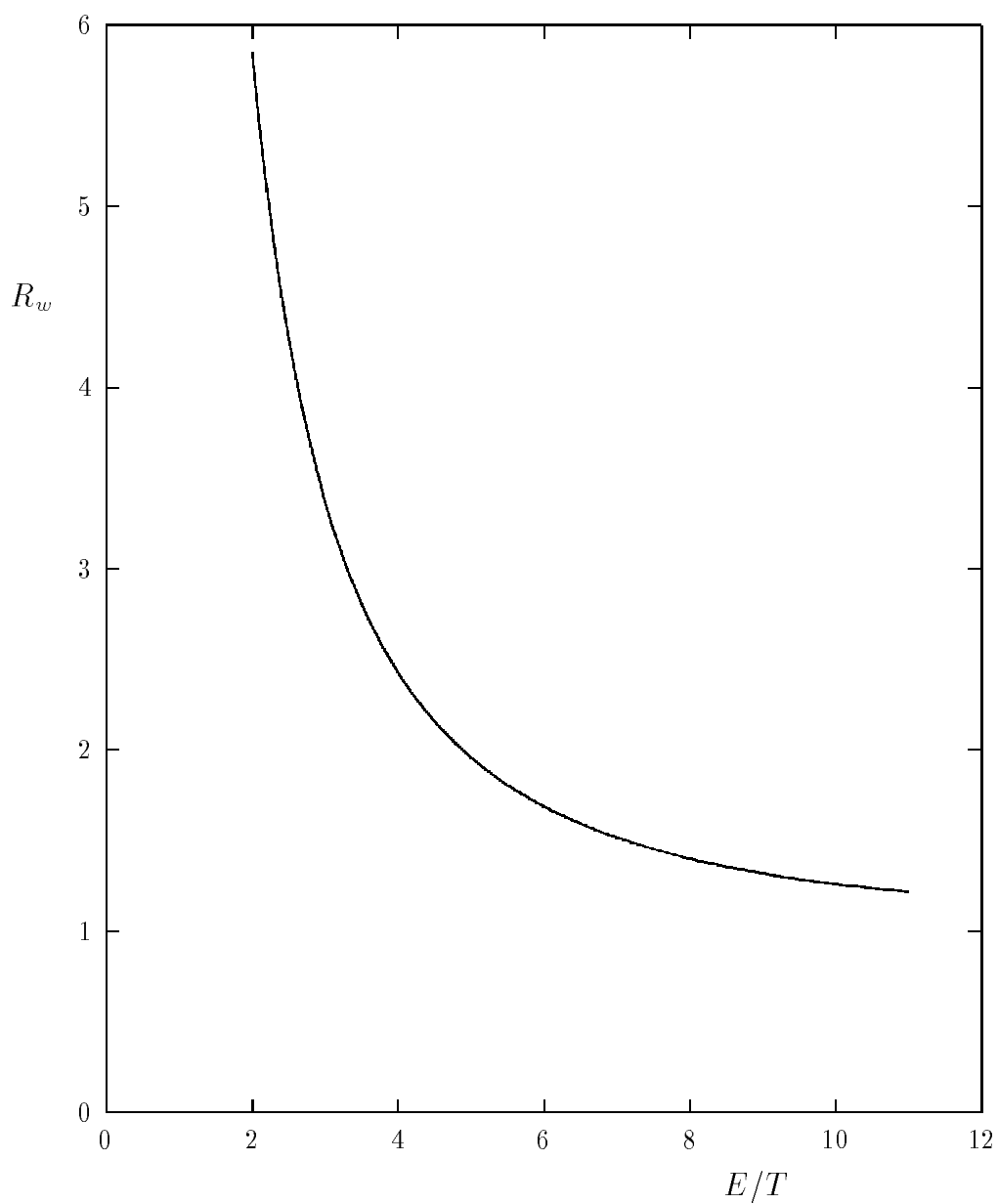


Рис. 5.5. Отношение вероятностей взаимодействия нейтрино с замагниченной плазмой и с чистым магнитным полем, $R_w = W_{B+pl}/W_B$, при $\theta = \pi/2$ в зависимости от отношения энергии нейтрино к температуре плазмы

но и средняя потеря энергии и импульса нейтрино в среде ¹, которая определяется 4-вектором

$$Q^\alpha = -E \left(\frac{dE}{dt}, \frac{d\mathbf{P}}{dt} \right) = E \int q^\alpha dW, \quad (5.114)$$

где E и \mathbf{P} – энергия и импульс начального нейтрино, q – разность импульсов начального и конечного нейтрино, $q = P - P'$, dW – полная дифференциальная вероятность всех процессов, перечисленных в (5.108). Нулевая компонента Q^0 связана со средней энергией, теряемой одним нейтрино за единицу времени, пространственные компоненты \mathbf{Q} – с потерей импульса нейтрино за единицу времени.

Для случая чисто магнитного поля 4-вектор потерь Q^α вычислен в п. 5.4.1, где потери были обусловлены единственно возможным в отсутствие плазмы процессом – рождением пары при движении нейтрино в сильном магнитном поле, $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$. В пределе сильного магнитного поля для нулевой и z -компонент вектора Q^α было получено

$$Q_{0,z}^{(B)} = \frac{G_F^2 e B E^5 \sin^4 \theta}{48\pi^3} \times \quad (5.115)$$

$$\times \left\{ C_V^2 + C_A^2 + 2C_V C_A \cos \theta, (C_V^2 + C_A^2) \cos \theta + 2C_V C_A \right\}.$$

Из выражения (5.115), в частности, видно, что даже при изотропном распределении импульсов нейтрино средняя потеря импульса будет отлична от нуля (пропорциональна $C_V C_A$), что обусловлено несохранением чётности в слабом взаимодействии. Как показано в п. 5.4.3, в полях $\sim 10^3 B_e$ величина интегральной асимметрии вылета нейтрино, обусловленная компонентой Q_z и определяемая выражением $A = |\sum \mathbf{P}| / \sum |\mathbf{P}|$, могла бы только за счёт процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ приближаться к масштабу $\sim 1\%$, который, как известно, требуется для объяснения наблюдаемых собственных скоростей пульсаров [56, 57].

В присутствии замагниченной плазмы наши вычисления дают следующий результат для тех же компонент 4-вектора потерь:

$$Q_{0,z} = \frac{G_F^2 e B T^3 E^2}{4\pi^3} \left\{ (C_V + C_A)^2 (1 - u)^2 \times \right. \quad (5.116)$$

$$\times \left[F_2 \left(\frac{\epsilon \tau (1 + u)}{2} \right) - F_2(-\infty) \right] \pm (C_A \rightarrow -C_A; u \rightarrow -u) \left. \right\},$$

¹Вообще говоря, нейтрино может как терять, так и подхватывать энергию и импульс, поэтому в дальнейшем мы будем понимать “потерю” энергии и импульса в алгебраическом смысле.

где функция $F_2(z)$ определена в выражении (5.110), знаки “плюс” или “минус” соответствуют нулевой и z -компонентам. Наш результат для 4-вектора потерь, полученный для случая чисто магнитного поля (5.115), воспроизводится из формулы (5.116) в пределе разреженной плазмы ($T, T_\nu, \mu_\nu \rightarrow 0$).

Для иллюстрации соотношения вкладов плазмы и магнитного поля в 4-вектор средних потерь энергии и импульса нейтрино в активной среде рассмотрим более простую ситуацию разреженного нейтринного газа и перепишем выражение (5.116) при значении угла $\theta = \pi/2$ в следующем виде:

$$Q_{0,z}(\theta = \pi/2) = \frac{G_F^2 e B E^5}{48\pi^3} (C_V^2 + C_A^2, 2C_V C_A) \mathcal{F}\left(\frac{E}{T}\right), \quad (5.117)$$

где

$$\mathcal{F}(x) = 1 + \frac{6}{x} \ln(1 - e^{-x/2}) - \frac{24}{x^2} \text{Li}_2(e^{-x/2}) - \frac{48}{x^3} \text{Li}_3(e^{-x/2}). \quad (5.118)$$

Из сравнения (5.117) с формулой (5.115) при $\theta = \pi/2$ видно, что функция $\mathcal{F}(E/T)$ представляет собой отношение компонент вектора потерь в замагниченной плазме и в чисто магнитном поле. На рис. 5.6 приведён график функции $\mathcal{F}(E/T)$. Видно, что при $E = E_0 \simeq 3.4 T$ существует своеобразное “окно прозрачности”, когда нейтрино не обменивается энергией и импульсом с замагниченной плазмой. Отрицательные значения функции $\mathcal{F}(E/T)$ при меньших энергиях означают, что нейтрино захватывают энергию из плазмы и получают от неё импульс против направления магнитного поля. При энергиях, больших E_0 , нейтрино передает плазме энергию, а также импульс в направлении поля. Это может иметь весьма интересные астрофизические следствия.

5.5.6. Интегральное действие нейтрино на замагниченную плазму

В качестве иллюстрации применения полученных нами результатов к астрофизическим условиям оценим объёмную плотность энергии, теряемой нейтрино за единицу времени, $\dot{\mathcal{E}}$ и компоненту \mathcal{F}_z (вдоль поля) объёмной плотности силы, действующей на плазму со стороны нейтрино:

$$(\dot{\mathcal{E}}, \mathcal{F}_z) = \int dn_\nu \frac{1}{E} Q_{0,z}, \quad (5.119)$$

где dn_ν – плотность начальных нейтрино

$$dn_\nu = \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \frac{\Phi(\vartheta, R)}{e^{(E-\mu_\nu)/T_\nu} + 1}. \quad (5.120)$$

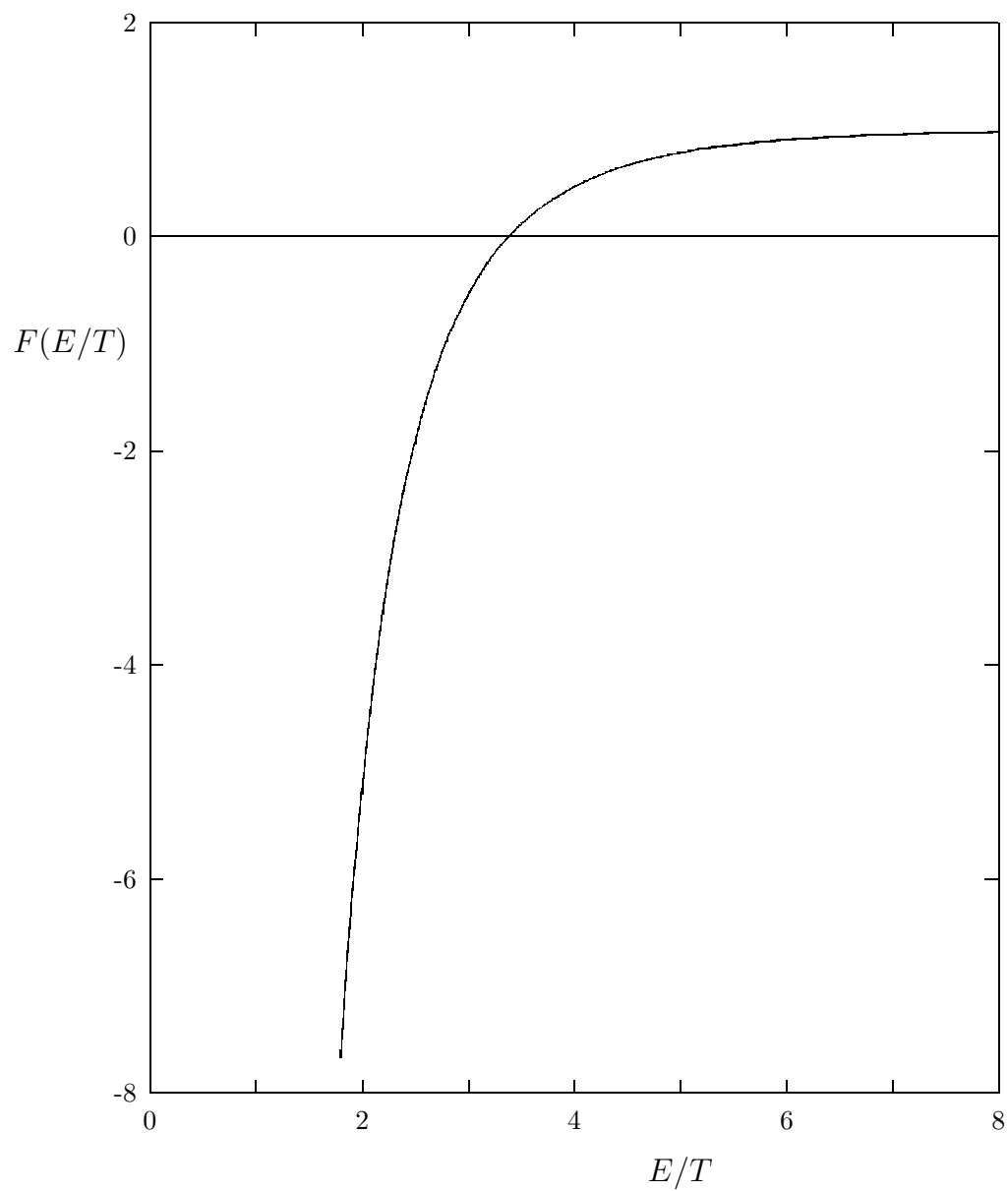


Рис. 5.6. Функция $\mathcal{F}(E/T)$, определяющая зависимость компонент 4-вектора потерь энергии и импульса нейтрино в замагниченной плазме от отношения энергии нейтрино к температуре плазмы, введённая в (5.117)

Здесь в функции $\Phi(\vartheta, R)$ учтено угловое распределение начальных нейтрино, $\vartheta = \cos \alpha$, α – угол между импульсом нейтрино и радиальным направлением в звезде, R – расстояние до центра звезды. Одновременно аналогичная функция $\Phi(\vartheta', R)$ должна быть введена в статистическом факторе $(1 - f'_\nu)$ при интегрировании по импульсам конечного нейтрино. В оболочке сверхновой угловое распределение нейтрино близко к изотропному [287], поэтому в разложении функции Φ по величине ϑ достаточно ограничиться младшими полиномами Лежандра $P_\ell(\vartheta)$, и она может быть однозначно выражена через средние значения $\langle \vartheta \rangle$ и $\langle \vartheta^2 \rangle$ (которые зависят от R) следующим образом:

$$\Phi(\vartheta, R) \simeq 1 + 3 \langle P_1(\vartheta) \rangle P_1(\vartheta) + 5 \langle P_2(\vartheta) \rangle P_2(\vartheta). \quad (5.121)$$

Нейтрино, вылетая из центральной области звезды с высокой температурой, попадают в периферийную область, где генерируется сильное магнитное поле и где температура электрон-позитронного газа более низкая. При этом спектральные температуры для разных типов нейтрино различны (см., например, [5, 287]):

$$T_{\nu_e} \simeq 4 \text{ МэВ}, \quad T_{\bar{\nu}_e} \simeq 5 \text{ МэВ}, \quad T_{\nu_{\mu,\tau}} \simeq T_{\bar{\nu}_{\mu,\tau}} \simeq 8 \text{ МэВ}. \quad (5.122)$$

Действие нейтрино на плазму ведёт к установлению теплового равновесия, $\dot{\mathcal{E}}_{tot} = 0$. При анализе этого равновесия следует учитывать вклады в величину $\dot{\mathcal{E}}_{tot}$ всех процессов взаимодействия нейтрино со средой. Как уже отмечалось, вероятность β -процессов $\nu_e + n \leftrightarrow e^- + p$ существенно выше, чем для нейтрино-электронных процессов, поэтому они доминируют в энергетическом балансе. Энергия, передаваемая за единицу времени единице объёма плазмы за счёт этих процессов, где участвуют только электронные нейтрино, может быть представлена в виде $\dot{\mathcal{E}}(\beta) \simeq \mathcal{B}(T_{\nu_e} - T)/T$. Отсюда следует, что за счёт нейтринного прогрева температура плазмы должна устанавливаться очень близко к спектральной температуре электронных нейтрино ($T \simeq T_{\nu_e}$). Однако вклад в $\dot{\mathcal{E}}$ остальных типов нейтрино, спектральные температуры которых превышают T_{ν_e} , приводит к тому, что температура плазмы оказывается несколько выше ($T \gtrsim T_{\nu_e}$). В связи с этим имеет смысл отдельно оценить вклады в величины $(\dot{\mathcal{E}}, \mathcal{F}_z)$ от нейтрино-электронных процессов с участием ν_e и со всеми остальными нейтрино и антинейтрино.

Подчеркнём, что возникновение плотности силы \mathcal{F}_z в выражении (5.119) обусловлено интерференцией векторной и аксиально-векторной связей в эффективном лагранжиане (5.22) и является макроскопическим проявлением несохранения чётности в слабых взаимодействиях. На первый взгляд, основной вклад в величину \mathcal{F}_z должны давать электронные нейтрино, поскольку

$C_V(\nu_e) \gg C_V(\nu_{\mu,\tau})$. Однако, как будет показано ниже, основные вклады происходят именно от мюонных и тау-нейтрино и антинейтрино (в силу сохранения CP -чётности нейтрино и антинейтрино “толкают” плазму в одну и ту же сторону). Это обусловлено тем, что в окрестности ν_e -нейтриносферы спектральные температуры остальных типов нейтрино существенно отклоняются от температуры плазмы $T \simeq T_{\nu_e}$.

а). *Процессы с участием электронных нейтрино*

Для объёмной плотности нейтринных потерь энергии и плотности силы (5.119) мы получили следующее выражение:

$$(\dot{\mathcal{E}}, \mathcal{F}_z)_{\nu_e} = \frac{G_F^2 e B T^7}{3\pi^5} (C_V^2 + C_A^2, 2C_V C_A) \times \\ \times \left\{ (\tau_e - 1) \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \int_0^\infty \frac{y^3 dy}{(1 + e^{-x-y+\eta_\nu})(1 + e^{y-\eta_\nu})} + \right. \\ \left. + \frac{27}{8} \left(\langle \vartheta^2 \rangle - \frac{1}{3} \right) \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} \int_0^\infty \frac{y^3 (3y - x) dy}{(x + y)^2 (1 + e^{y-\eta_\nu})} \right\}, \quad (5.123)$$

где $\tau_e = T_{\nu_e}/T$. Эта формула выписана в предположении малого отклонения от теплового равновесия между нейтринным газом и электрон-позитронной плазмой, $(\tau_e - 1) \ll 1$, и, следовательно, сравнительно небольшой асимметрии нейтринного распределения, $(\langle \vartheta^2 \rangle - 1/3) \ll 1$.

Численная оценка дает

$$(\dot{\mathcal{E}}, \mathcal{F}_z)_{\nu_e} \simeq \left(2.0 \times 10^{30} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}, 0.57 \times 10^{20} \frac{\text{дн}}{\text{см}^3} \right) \left(\frac{B}{10^{16} \text{Гс}} \right) \left(\frac{T}{4 \text{ МэВ}} \right)^7 \times \\ \times e^{\eta_\nu} \left[(\tau_e - 1) + 0.53 \left(\langle \vartheta^2 \rangle - \frac{1}{3} \right) \right]. \quad (5.124)$$

б). *Процессы с участием $\bar{\nu}_e$, $\nu_{\mu,\tau}$, $\bar{\nu}_{\mu,\tau}$*

В этом случае величину $(T_\nu/T - 1)$ уже нельзя считать малым параметром, в то же время относительный вклад асимметрии нейтринного распределения невелик [287] и им можно пренебречь.

Для численной оценки удобно представить величины $\dot{\mathcal{E}}$ и \mathcal{F}_z (5.119) в следующей форме:

$$(\dot{\mathcal{E}}, \mathcal{F})_{\nu_i} \simeq \mathcal{A} (C_V^2 + C_A^2, 2C_V C_A) \varphi(\eta_i) \psi(\tau_i), \quad (5.125)$$

где

$$\mathcal{A} = \frac{12G_F^2 e B T^7}{\pi^5} = \left(\frac{B}{10^{16} \text{Гс}} \right) \left(\frac{T}{4 \text{ МэВ}} \right)^7 \times \begin{cases} 1.6 \times 10^{30} \frac{\text{Эрг}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}, \\ 0.55 \times 10^{20} \frac{\text{Дн}}{\text{см}^3}, \end{cases} \quad (5.126)$$

$$\varphi(\eta_i) = \frac{\eta_i^4}{24} + \frac{\pi^2 \eta_i^2}{12} + \frac{7\pi^4}{360} + \text{Li}_4(-e^{-\eta_i}), \quad \varphi(0) = \frac{7\pi^4}{720} \simeq 0.947, \quad (5.127)$$

$$\psi(\tau_i) = \frac{\tau_i^7}{6} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{e^{\tau_i y} - 1} \left[e^{(\tau_i - 1)y} - 1 \right], \quad \psi(\tau_i)|_{\tau_i \rightarrow 1} \simeq \tau_i - 1. \quad (5.128)$$

Формулы (5.123)–(5.128) демонстрируют, в частности, что воздействие каждой отдельной нейтринной фракции на электрон-позитронную плазму обращается в нуль в случае термодинамического равновесия между данной фракцией и плазмой, $\tau_i = 1$, $\langle \vartheta \rangle = 0$, $\langle \vartheta^2 \rangle = 1/3$.

Покажем, что главный вклад в воздействие нейтрино на плазму обусловлен, как уже отмечалось, мюонными и тау-нейтрино и антинейтрино. Действительно, функция $\psi(\tau_i)$ (5.128) быстро растёт с увеличением отклонения спектральной температуры нейтрино от температуры плазмы. Например, при температурах (5.122) имеем для электронных антинейтрино $\psi(1.25) \simeq 0.824$, для мюонных и тау-нейтрино и антинейтрино $\psi(2) \simeq 38.47$. Именно это обстоятельство приводит к компенсации малости константы $C_V(\nu_{\mu,\tau})$ и делает вклад $\nu_{\mu,\tau}$, $\bar{\nu}_{\mu,\tau}$ не только сравнимым с вкладом электронных нейтрино и антинейтрино, но даже доминирующим.

Как отмечалось выше, вклад нейтрино-электронных процессов в энергетическое воздействие нейтрино на плазму мал по сравнению со вкладом β -процессов и приводит к небольшому отклонению от равновесия между электронными нейтрино и плазмой, так что суммарный вклад β -процессов и всех νe -процессов в величину $\dot{\mathcal{E}}$ оказывается равным нулю.

Что касается силового воздействия нейтрино на плазму вдоль магнитного поля, описываемого величиной \mathcal{F}_z в формулах (5.123)–(5.128), для суммарного вклада всех сортов нейтрино находим

$$\mathcal{F}_z \simeq 3.6 \times 10^{20} \frac{\text{Дн}}{\text{см}^3} \left(\frac{B}{10^{16} \text{Гс}} \right) \left(\frac{T}{4 \text{ МэВ}} \right)^7. \quad (5.129)$$

Здесь мы для оценки положили химические потенциалы нейтрино равными нулю [5]. Напомним, что величина (5.129) оказалась не зависящей от химического потенциала электрон-позитронной плазмы.

Плотность силы (5.129) следует сравнить с результатом для аналогичной силы, обусловленной β -процессами [289]. При тех же физических условиях полученная нами величина силы за счёт нейтрино-электронных процессов оказывается того же порядка и, что особенно важно, того же знака, что и результат [289]. Таким образом, роль нейтрино-электронных процессов в интенсивном магнитном поле может оказаться существенной, наряду со вкладом β -процессов.

Отметим, что плотность силы (5.129) на 5 порядков меньше плотности гравитационной силы и поэтому практически не влияет на радиальную динамику оболочки сверхновой. Однако в случае, когда в оболочке генерируется тороидальное магнитное поле [28, 29], сила (5.129), направленная вдоль поля, способна достаточно быстро, за времена порядка секунды ², привести к существенному перераспределению касательных скоростей плазмы. При этом в двух тороидах, в которых магнитное поле имеет противоположные направления, касательное нейтринное ускорение плазмы будет иметь разный знак по отношению к вращательному движению плазмы. Этот эффект, в свою очередь, может обусловить существенное перераспределение силовых линий магнитного поля, концентрируя их преимущественно в одном из тороидов. Это приводит к значительной асимметрии энергии магнитного поля в двух полушариях и может быть причиной асимметричного взрыва сверхновой [290, 291], что могло бы служить объяснением феномена больших собственных скоростей пульсаров [56, 57]. По нашему мнению, представляет интерес моделирование механизма генерации тороидального магнитного поля с учётом силового нейтринного воздействия на плазму как через нейтрино-нуклонные, так и нейтрино-электронные процессы.

Как нам известно, в существующих системах численного моделирования астрофизических катаклизмов, таких как взрывы сверхновых и слияния нейтронных звезд, где, в принципе, могут реализоваться рассматриваемые физические условия, исследуемые нами эффекты нейтрино-электронных взаимодействий не учитывались. Вместе с тем при детальном анализе указанных астрофизических процессов учёт влияния такой активной среды, как замагниченная e^-e^+ -плазма, на квантовые процессы с участием нейтрино может оказаться существенным.

²Известно, что стадия остывания оболочки сверхновой, так называемая стадия Кельвина–Гельмгольца, длится около 10 с

5.5.7. Нейтрино-электронные процессы с учётом вклада возбуждённых уровней Ландау

Наличие плотной плазмы во внешнем магнитном поле при условии $\mu^2 \gg 2eB$ приводит к такой ситуации, когда электроны плазмы начинают заселять возбуждённые уровни Ландау. В статьях [74, 76] анализировался полный набор нейтрино-электронных процессов в физических условиях плотной замагниченной плазмы. По сравнению с работами [70–73], в них рассматривался случай более слабого магнитного поля, когда доминирующим физическим параметром задачи является химический потенциал электронов μ :

$$\mu^2 > 2eB \gg T^2, \omega^2 \gg m_e^2, \quad (5.130)$$

где ω – типичная энергия нейтрино. Однако при этом также предполагалось, что напряжённость магнитного поля достаточно велика:

$$eB \gg \mu\omega. \quad (5.131)$$

Согласно современным астрофизическим представлениям, условия (5.130) и (5.131) могли бы реализоваться во внешних слоях оболочки сверхновой, при этом магнитное поле, являясь слабым на масштабе химического потенциала плазмы, может быть достаточно большим по сравнению с критическим значением B_e . Действительно, типичные условия в оболочке сверхновой таковы, что химический потенциал $\mu \sim 30 m_e$, температура плазмы, а следовательно, и средняя энергия нейтрино $T \sim \omega \sim 6 m_e$. Подставляя эти значения в условия (5.130) и (5.131), можно оценить напряжённость магнитного поля:

$$900 > 2 \frac{B}{B_e} \gg 36 \gg 1, \quad (5.132)$$

$$\frac{B}{B_e} \gg 18. \quad (5.133)$$

Соотношения (5.132), (5.133) показывают, что магнитные поля с напряжённостями $B \sim 10^{15} - 10^{16}$ Гс удовлетворяют указанным условиям и могут рассматриваться как относительно ”слабые”.

Согласно представленному в работах кинематическому анализу, в рассматриваемых условиях (5.130) основная часть нейтрино-электронных процессов оказывается подавлена. В частности, в сильно вырожденной плазме статистическим фактором подавлены процессы с электрон-позитронной парой в начальном или конечном состояниях, $\nu e^- e^+ \leftrightarrow \nu$, $\nu \bar{\nu} \leftrightarrow e^- e^+$, а также процессы с позитроном в начальном и конечном состояниях, $e^+ \nu \leftrightarrow e^+ \nu$,

$e^+ \nu \tilde{\nu} \leftrightarrow e^+$. Кинематический анализ позволяет сделать вывод о том, что в условиях плотной замагниченной плазмы возможны только процессы, в которых и начальный, и конечный электроны занимают один и тот же уровень Ландау. При этом процессы синхротронного поглощения и излучения нейтринной пары, возможные только при $n \neq n'$, запрещены, так что единственно возможным процессом в условиях (5.130), (5.131) является процесс рассеяния нейтрино на плазменных электронах с сохранением номера уровня Ландау.

Вероятность нейтрино-электронного рассеяния с сохранением номера уровня Ландау, просуммированная по состояниям начального электрона, имеет вид

$$\begin{aligned}
 W_{(\nu e^- \rightarrow \nu e^-)} &\simeq \frac{G_F^2 (C_V^2 + C_A^2) e B \omega}{4\pi^3 z^2} \int_{a'}^{b'} \frac{q_0 d\omega'}{(e^{\eta_\nu - \omega'/T_\nu} + 1)(1 - e^{-q_0/T})} \times \\
 &\times \left((1 + u^2)(1 + z^2) - 4uz + q_0(1 - z^2) \frac{(1 - u/z)}{\omega} \right) + \\
 &+ (u \rightarrow -u), \quad (5.134)
 \end{aligned}$$

где $z = \sqrt{1 - 2eBn/\mu^2}$, $a' = \omega(1 - uz)/(1 + z)$, $b' = \omega(1 - uz)/(1 - z)$, $\eta_\nu = \mu_\nu/T_\nu$, $u = \cos \theta$, θ – угол между вектором импульса начального нейтрино \mathbf{k} и направлением магнитного поля.

Полная вероятность нейтрино-электронных процессов в замагниченной плазме может быть представлена в виде суммы по уровням Ландау:

$$W_{tot} = W_{n=0} + W_{n \geq 1}.$$

Здесь $W_{n=0}$ – вероятность полного набора нейтрино-электронных процессов в сильно замагниченной плазме в случае, когда электроны занимают только основной уровень Ландау [70–73], $W_{n \geq 1}$ – вклад от высших уровней Ландау при условии, когда доминирующим является процесс рассеяния нейтрино на электронах с сохранением номера уровня Ландау:

$$W_{n \geq 1} = \sum_{n=1}^{n_{max}} W_{n \rightarrow n}, \quad (5.135)$$

где $n_{max} = [\mu^2/2eB] \geq 1$, а $[x]$ – целая часть числа x .

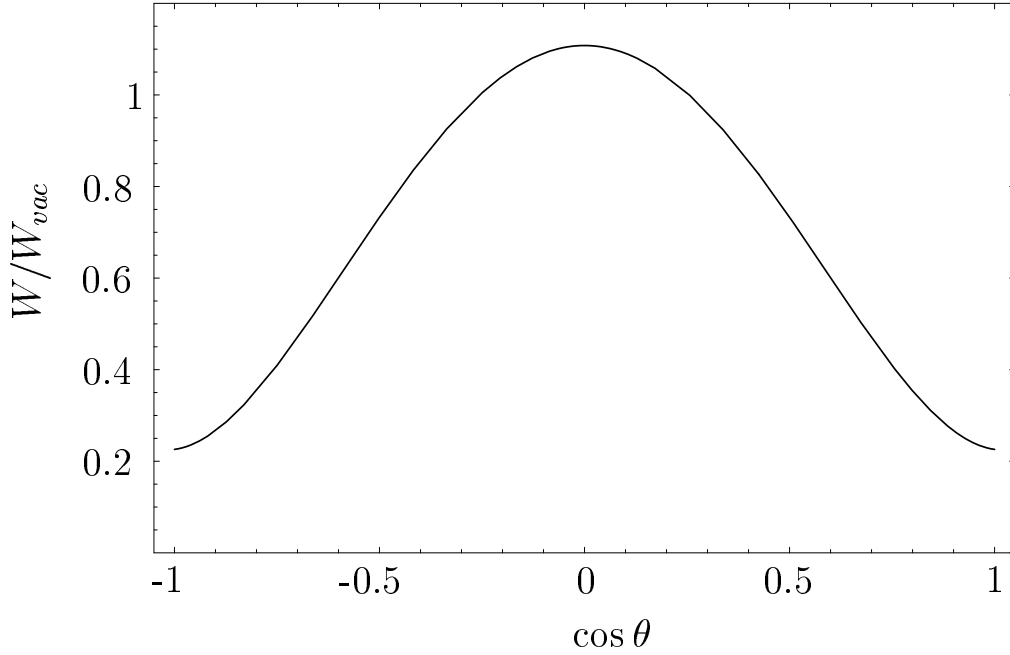


Рис. 5.7. Относительная вероятность нейтрино-электронного рассеяния в замагниченной плазме как функция угла между вектором импульса начального нейтрино и направлением магнитного поля

В пределе плотной плазмы, когда основной вклад в полную вероятность дают уровни Ландау с $n \gg 1$, выражение для вероятности (5.135) приобретает вид

$$\begin{aligned}
 W_{n \geq 1} = & \frac{G_F^2 (C_V^2 + C_A^2) \mu^2 T^2 \omega}{4 \pi^3} \int_0^1 \frac{dz}{z} \times \\
 & \times \left\{ ((1+z^2)(1+u^2) - 4uz) \int_{-a}^b \Phi(\xi) d\xi + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{z r \tau} (z^2 - 1)(z - u) \int_{-a}^b \xi \Phi(\xi) d\xi \right\} + (u \rightarrow -u),
 \end{aligned} \tag{5.136}$$

где $a = r\tau z(1+u)/(1+z)$ и $b = r\tau z(1-u)/(1-z)$, $r = \omega/T_\nu$, $\tau = T_\nu/T$.

В пределе разреженного нейтринного газа ($\omega \gg T_\nu$) полная вероятность нейтрино-электронных процессов имеет особенно простой вид:

$$W_{tot} \simeq \frac{G_F^2 \mu^2 (C_V^2 + C_A^2) \omega^3}{15 \pi^3} (0.82u^4 - 1.71u^2 + 1.11). \tag{5.137}$$

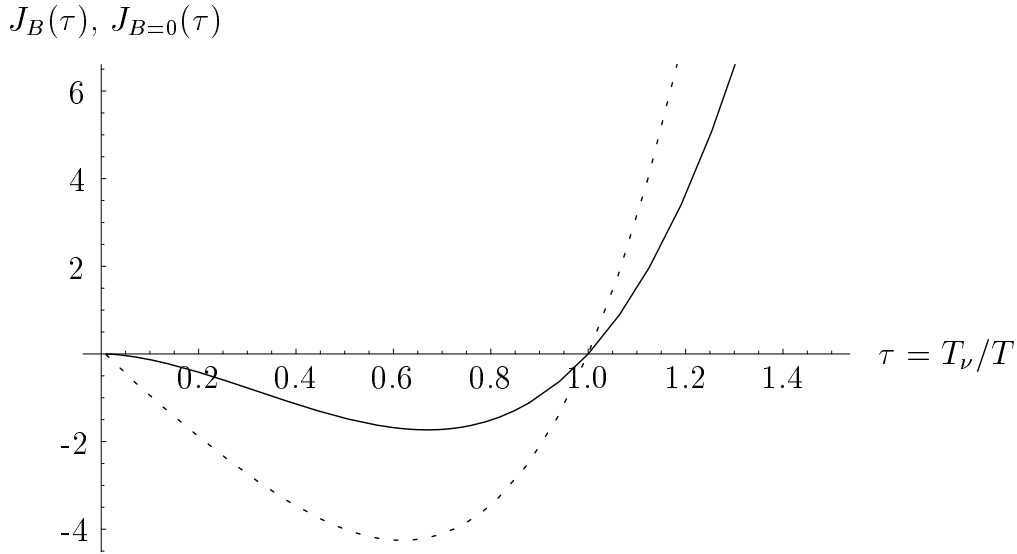


Рис. 5.8. Функции $J_B(\tau)$ (сплошная линия) и $J_{B=0}(\tau)$ (пунктирная линия) в зависимости от относительной спектральной температуры нейтрино

Необходимо заметить, что выражение (5.137) для полной вероятности получено в приближении достаточно большого поля ($eB \gg \mu T$). Несмотря на то что оно не зависит явно от величины магнитного поля, оно не является изотропным и не совпадает с результатом

$$W_{vac} = \frac{G_F^2 \mu^2 (C_V^2 + C_A^2) \omega^3}{15\pi^3}, \quad (5.138)$$

полученным в отсутствие поля.

Отношение вероятностей (5.137) и (5.138) представлено графически на рис. 5.7. Как можно увидеть из графика, вероятность рассеяния нейтрино на плазменных электронах в присутствии внешнего магнитного поля незначительно превышает вероятность в плазме без поля только в окрестности точки $\theta = \pi/2$, то есть когда начальное нейтрино распространяется в плоскости, перпендикулярной направлению внешнего магнитного поля.

В качестве возможных астрофизических приложений вычислены средние потери энергии и импульса нейтрино при распространении сквозь замагниченную плазму. В пределе очень плотной плазмы, когда возбуждается большое число уровней Ландау, потери энергии нейтрино в процессе $\nu e^- \rightarrow \nu e^-$ имеют относительно простой вид:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{G_F^2 (C_V^2 + C_A^2)}{\pi^3} \mu^2 T^4 n_\nu J_B(\tau), \quad (5.139)$$

$$J_B(\tau) = \frac{\tau^4}{2} \int_0^1 \frac{dz}{z^2} \int_0^\infty dy y^2 [y(1-z^2) + 4z(1+z^2)] \times \\ \times \frac{1 - e^{y(1-\tau)}}{1 - e^{-y\tau}} e^{-y(1+z)/2z}, \quad (5.140)$$

где n_ν – концентрация начальных нейтрино, а параметр τ имеет смысл относительной спектральной температуры нейтрино, $\tau = T_\nu/T$. Интересно сравнить результат (5.139) с потерями энергии нейтрино в процессе рассеяния на плазменных электронах в отсутствие поля, которые могут быть представлены в форме

$$\dot{\varepsilon}_{B=0} = \frac{G_F^2(C_V^2 + C_A^2)}{\pi^3} \mu^2 T^4 n_\nu J_{B=0}(\tau), \quad (5.141)$$

$$J_{B=0}(\tau) = 4\tau^4 \int_0^\infty d\xi \xi^2 \frac{e^{\xi(\tau-1)} - 1}{e^{\xi\tau} - 1}. \quad (5.142)$$

Функции $J_B(\tau)$ и $J_{B=0}(\tau)$ определяют зависимость потерь энергии нейтрино от его относительной спектральной температуры τ , а также знак этих потерь. В пределе больших $\tau \gg 1$ ($T_\nu \gg T$) эти функции сводятся к степенным и имеют простой вид:

$$J_B(\tau) \simeq 4.35 \tau^4, \quad J_{B=0}(\tau) \simeq 8 \tau^4.$$

График функций $J_B(\tau)$ и $J_{B=0}(\tau)$ представлен на рис. 5.8. Из графика, в частности, видно, что в случае, когда температура нейтрино ниже, чем температура плазмы, $T_\nu < T$ ($\tau < 1$), потери энергии отрицательны. Это означает, что нейтрино подхватывает энергию из плазмы, что приводит к охлаждению последней. Положительные значения функций $J_B(\tau)$ и $J_{B=0}(\tau)$ при $T_\nu < T$ ($\tau < 1$) соответствуют тому, что нейтрино, распространяясь сквозь плазму, отдаёт энергию, тем самым нагревая её. Таким образом, действие нейтрино на плазму ведёт к установлению теплового равновесия. В случае, когда спектральная температура нейтрино близка к температуре плазмы, $\tau \rightarrow 1$, нейтрино не изменяет энергии плазмы, так как потери энергии нейтрино (5.139) стремятся к нулю.

Более того, результаты численных расчётов, представленные на рис. 5.8, показывают, что потери энергии нейтрино в замагниченной плазме меньше, чем в плазме без поля. Таким образом, замагниченная электрон-позитронная плазма является более прозрачной средой для нейтрино, чем не замагниченная.

Что касается силового воздействия нейтрино на плазму, то, как видно из выражения (5.136), вероятность процесса $\nu e^- \rightarrow \nu e^-$ – симметричная функция относительно замены $\theta \rightarrow \pi - \theta$. Следовательно, процесс рассеяния нейтрино на возбуждённых электронах плазмы с сохранением номера уровня Ландау не дает вклада в силу \mathcal{F}_3 . Таким образом, в случае относительно слабо замагниченной плазмы в условиях (5.130), (5.131) сила, с которой нейтрино действует на плазму, обусловлена нейтрино-электронными процессами, в которых участвуют электроны, занимающие только основной уровень Ландау. Как уже упоминалось, этот случай подробно исследовался в работах [70–73]. В частности, было обнаружено, что суммарный вклад нейтрино-электронных процессов не зависит от химического потенциала электрон-позитронной плазмы. Отметим, что возникновение силы в пределе сильного магнитного поля, когда электроны заселяют только основной уровень Ландау, было обусловлено интерференцией векторной и аксиально-векторной констант связи в эффективном лагранжиане взаимодействия нейтрино с электронами (5.22). Как оказалось, для электронов на возбуждённых уровнях Ландау ($n \neq 0$) такая интерференция не имеет места и нейтрино-электронные процессы с участием электронов на высших уровнях Ландау дают вклад только в потери энергии. Следовательно, результат, полученный в работах [70–73], имеет более широкое применение и может быть использован даже в случае, когда квадрат химического потенциала электронов значительно больше напряжённости магнитного поля ($\mu^2 \gg eB$).

Глава 6

Нейтрино-фотонные взаимодействия во внешней активной среде

6.1. Взаимодействие $\nu\nu\gamma$ во внешней активной среде

Как уже отмечалось, сильное магнитное поле оказывает активное влияние на свойства частиц. Во-первых, оно способно индуцировать новые взаимодействия частиц, например возникающее на однопетлевом уровне взаимодействие незаряженных безмассовых нейтрино и фотона. Во-вторых, поле существенно меняет кинематику частиц, открывая новые каналы, запрещённые в вакууме законами сохранения. Среди таких процессов нейтринный распад фотона $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ и нейтринное излучение фотона $\nu \rightarrow \nu\gamma$, называемое также черенковским нейтринным процессом, вызывают наибольший интерес уже в течение длительного времени.

6.1.1. Эффективный лагранжиан $\nu\nu\gamma$ -взаимодействия

В настоящем параграфе приводится расчет амплитуды нейтрино-фотонного процесса за счет $\nu\nu\gamma$ -взаимодействия, индуцированного магнитным полем, для случая, когда частицы, вообще говоря, находятся вне массовой поверхности. В сущности это означает, что будет получен эффективный лагранжиан в импульсном пространстве для $\nu\nu\gamma$ -взаимодействия. Расчёт выполнен в рамках стандартной модели с возможным смешивани-

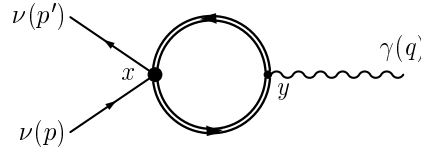


Рис. 6.1. Диаграмма, описывающая вершину $\nu\nu\gamma$ в локальном пределе слабого взаимодействия

ем в лептонном секторе. Результат справедлив для магнитного поля любой интенсивности в рамках применимости эффективного локального $\nu\nu ee$ -взаимодействия.

Эффективный локальный лагранжиан взаимодействия нейтрино с электронами, при учете возможного смешивания в лептонном секторе, преобразуется к виду

$$\mathcal{L}_{\nu e} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{e}\gamma_\alpha (C_V + C_A\gamma_5)e] [\bar{\nu}_j\gamma^\alpha (1 + \gamma_5)\nu_i], \quad (6.1)$$

здесь C_V , C_A – векторная и аксиальная электрослабые константы:

$$\begin{aligned} C_V &= U_{ie}U_{je}^* - \frac{1}{2}\delta_{ij}(1 - 4\sin^2\theta_W), \\ C_A &= U_{ie}U_{je}^* - \frac{1}{2}\delta_{ij}, \end{aligned}$$

где индексы i, j нумеруют состояния нейтрино с определёнными массами, U_{ie} есть элементы матрицы смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты в лептонном секторе. Диаграмма Фейнмана, описывающая вершину $\nu\nu\gamma$, изображена на рис. 6.1.

Следует отметить, что вычисление эффективного лагранжиана $\nu\nu\gamma$ -взаимодействия, индуцированного внешним полем, требует дополнительной процедуры вычитания. Дело в том, что переход к локальному пределу слабого взаимодействия ведет к появлению двух проблем: амплитуда приобретает ультрафиолетовую расходимость, а также треугольную аксиальную аномалию. Это можно легко увидеть, производя разложение амплитуды процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$ в ряд по внешнему магнитному полю, как это показано на рис. 6.2.

Нулевой член в этом разложении

$$\mathcal{L}^{(0)} = \mathcal{L}(B = 0)$$

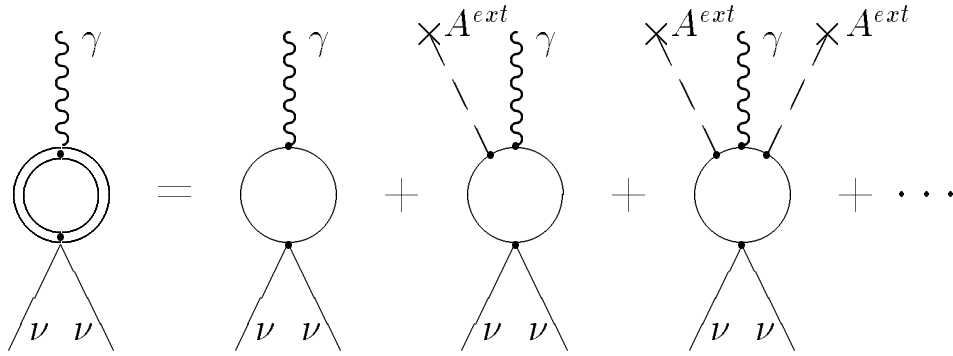


Рис. 6.2. Разложение амплитуды процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma$ в ряд по внешнему магнитному полю: двойная линия соответствует точному пропагатору электрона в магнитном поле, штриховые линии – внешнему полю

содержит ультрафиолетовую расходимость, тогда как линейный по полю член

$$\mathcal{L}^{(1)} = B \left. \frac{d\mathcal{L}}{dB} \right|_{B=0}$$

содержит известную треугольную аномалию Адлера из-за присутствия аксиального взаимодействия в эффективном слабом лагранжиане. Поскольку оба эти члена, вообще говоря, не могут быть правильно вычислены в локальном пределе, корректное выражение для индуцированного внешним полем эффективного лагранжиана $\Delta\mathcal{L}_{\nu\nu\gamma}$ может быть определено следующим образом:

$$\Delta\mathcal{L}_{\nu\nu\gamma} = \left(\mathcal{L} - \mathcal{L}^{(0)} - \mathcal{L}^{(1)} \right) + \tilde{\mathcal{L}}^{(1)}, \quad (6.2)$$

где правильный линейный по полю член $\tilde{\mathcal{L}}^{(1)}$ должен быть вычислен в электрослабой теории без перехода к локальному пределу с учетом вклада всех виртуальных заряженных фермионов. Выражение для $\tilde{\mathcal{L}}^{(1)}$ может быть получено, например, из эффективного лагранжиана комптоноподобного процесса $\nu(p_1) + \gamma^*(q_1) \rightarrow \nu(p_2) + \gamma^*(q_2)$, где фотоны $\gamma^*(q_1)$ и $\gamma^*(q_2)$ находятся в общем случае вне массовой поверхности. Таким лагранжианом в импульсном пространстве является амплитуда процесса $\nu + \gamma^* \rightarrow \nu + \gamma^*$, в которой следует заменить тензор поля одного из фотонов на тензор постоянного однородного магнитного поля по правилу

$$q_\alpha \rightarrow 0, \quad f_{\alpha\beta} \rightarrow iF_{\alpha\beta}.$$

После преобразований выражение $\tilde{\mathcal{L}}^{(1)}$ может быть приведено к виду

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}^{(1)} = & \frac{e G_F}{\sqrt{2}} C_A \frac{eB}{4\pi^2} \left[\frac{(f\tilde{\varphi})(q\varphi\varphi j)}{2q_{\parallel}^2} - \frac{(q\varphi\varphi f q)(q\tilde{\varphi} j)}{q_{\parallel}^2 q^2} + \right. \\ & \left. + \frac{(f\tilde{\varphi})(jq)}{2q_{\parallel}^2} \frac{q_{\parallel}^2 + q^2}{q^2} \right] \mathcal{I}(q^2), \end{aligned} \quad (6.3)$$

где $j^\alpha = \bar{\nu}_j \gamma^\alpha (1 + \gamma_5) \nu_i$ – нейтринный ток,

$$\mathcal{I}(q^2) = i \frac{q^2}{4} \int_0^1 du (1 - u^2) \int_0^\infty dt \exp \left[-it \left(m_e^2 - q^2 \frac{1 - u^2}{4} - i0 \right) \right]. \quad (6.4)$$

Эффективный лагранжиан \mathcal{L} , соответствующий диаграмме, изображенной на рис. 6.1, вычисляется по стандартным правилам Фейнмана с использованием пропагатора электрона во внешнем постоянном магнитном поле (см. формулы (2.1), (2.2)). Имеем

$$\mathcal{L} = -i \frac{e G_F}{\sqrt{2}} j_\alpha \varepsilon_\beta^*(q) \int d^4 Z \text{Tr} [\tilde{S}^F(-Z) \gamma^\beta \tilde{S}^F(Z) \gamma^\alpha (C_V + C_A \gamma_5)] e^{-iqZ}. \quad (6.5)$$

Таким образом, индуцированная полем часть данного лагранжиана может быть построена как сумма вектор-векторной и вектор-аксиальной амплитуд (3.23), $\Delta \mathcal{M}_{VV}$ и $\Delta \mathcal{M}_{VA}$ с заменами токов

$$j_{V\beta} \rightarrow e \varepsilon_\beta^*(q), \quad j'_{V\alpha} \rightarrow \frac{G_F}{\sqrt{2}} C_V j_\alpha, \quad j'_{A\alpha} \rightarrow \frac{G_F}{\sqrt{2}} C_A j_\alpha$$

и с последующим вычитанием и восстановлением линейного по полю члена, как описано выше (см. (6.2)).

Окончательное выражение для индуцированного магнитным полем эффективного лагранжиана $\nu\nu\gamma$ -взаимодействия имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{L}_{\nu\nu\gamma} = & -\frac{e G_F}{8\pi^2\sqrt{2}} \left\{ C_V \left[\frac{(f\varphi)(q\varphi j)}{q_\perp^2} Y_{VV}^{(1)} + \frac{(f\tilde{\varphi})(q\tilde{\varphi}j)}{q_\parallel^2} Y_{VV}^{(2)} + \right. \right. \\
& + 2 \frac{(q\varphi\varphi f q)}{q_\parallel^2} \left(\frac{(q\varphi\varphi j)}{q_\perp^2} - \frac{(jq)}{q^2} \right) Y_{VV}^{(3)} \Big] + \\
& + C_A e B \left[\frac{(f\tilde{\varphi})(q\varphi\varphi j)}{q_\parallel^2} \left(Y_{VA}^{(1)} - 1 \right) + \right. \\
& + 2 \frac{(q\varphi\varphi f q)(q\tilde{\varphi}j)}{q_\perp^2 q_\parallel^2} \left(Y_{VA}^{(2)} + \frac{q_\perp^2}{q^2} \right) + \\
& \left. \left. + \frac{(f\tilde{\varphi})(jq)}{q_\parallel^2} \left(Y_{VA}^{(3)} - 1 + 2\mathcal{I}(q^2) \right) \right] \right\}, \tag{6.6}
\end{aligned}$$

где функции Y_{VV} , Y_{VA} определены в (3.30), (3.32).

Полученное выражение для эффективного лагранжиана (6.6) явно калибровочно инвариантно, справедливо вне массовой поверхности фотона и нейтрино и, следовательно, может быть использовано как индуцированная внешним полем вершина $\nu\nu\gamma$ -взаимодействия при анализе нейтринных электрослабых процессов в магнитном поле.

Однако кинематика процессов с участием фотона в сильном магнитном поле существенно зависит от дисперсионных свойств фотона, анализировавшихся в п. 3.2. На рис. 6.3 изображён закон дисперсии фотона второй моды на плоскости $(q_\perp^2, q_\parallel^2)$ и определяемые им кинематические области различных нейтринных процессов.

Область, изображённая прямоугольником при малых q_\perp^2 и q_\parallel^2 , где дисперсия фотона незначительно отличается от вакуумной, соответствует радиационному распаду массивного нейтрино.

6.1.2. Излучение фотона безмассовым нейтрино $\nu \rightarrow \nu\gamma$

Процесс $\nu \rightarrow \nu\gamma$ в магнитном поле исследовался в случаях относительно слабого поля [81], сильного поля [82] и для поля произвольной интенсивности [89]. В этих работах рассматривалась только ситуация с относительно малыми энергиями нейтрино, $E < 2m_e$. В случае более значительных энергий нейтрино, $E \gtrsim 2m_e$, который интересен в свете возможных астрофизических приложений, становятся существенными большие радиационные поправки, приводящие к перенормировке волновых функций фотонов

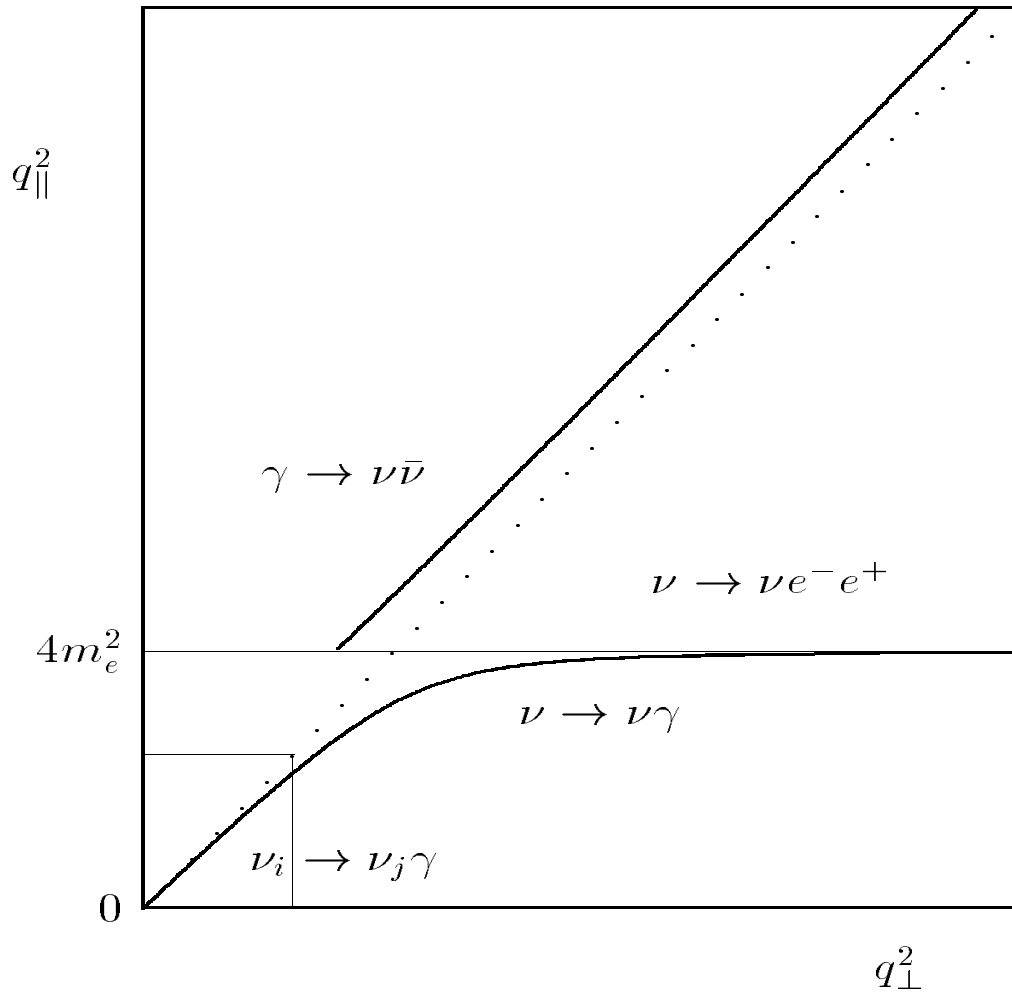


Рис. 6.3. Кинематические области различных нейтринных процессов, определяемые дисперсионными свойствами фотона второй моды в сильном магнитном поле: пунктирная линия соответствует вакуумной дисперсии $q^2 = 0$

(см. (3.10)). Ещё одним существенным фактором является значительное отклонение закона дисперсии фотона второй моды от вакуумного (см. рис. 3.2). Оба эти фактора были впервые корректно учтены в работе [90].

Общее выражение для эффективной $\nu\nu\gamma$ -вершины представляется в виде (6.6). Отметим, что вершина имеет значительное усиление в окрестности циклотронных резонансов (3.12), как и поляризационный оператор фотона в поле. Амплитуда перехода $\nu(p) \rightarrow \nu'(p') + \gamma(q)$ существенно упрощается в случае высоких энергий нейтрино, $E \gg m_e$, и в пределе сильного поля, когда напряженность является максимальным физическим параметром, $eB > E^2$. Индуцированные полем амплитуды процессов $\nu\nu\gamma$ -взаимодействий с участием реальных фотонов, векторы поляризации которых определены в (3.10), имеют вид

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\nu\nu\gamma^{(1)}) &= -\frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\mathcal{Z}_1}}{\sqrt{q_\perp^2}} C_V (q\varphi j) Y_{VV}^{(1)}, \\ \mathcal{M}(\nu\nu\gamma^{(2)}) &= -\frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\mathcal{Z}_2}}{\sqrt{q_\parallel^2}} \left[C_V(q\tilde{\varphi}j) Y_{VV}^{(2)} + C_A eB(q\varphi\varphi j) \left(Y_{VA}^{(1)} - 1 \right) \right],\end{aligned}\tag{6.7}$$

где множители $\sqrt{\mathcal{Z}_{1,2}}$ учитывают перенормировку волновых функций фотонов (3.11), j_α – нейтринный ток. Амплитуды (6.7) описывают как излучение фотона в нейтринном процессе $\nu \rightarrow \nu'\gamma$ (это может быть радиационный распад массивного нейтрино или радиационный переход безмассового нейтрино), так и распад фотона на нейтринную пару $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$.

Как отмечалось выше, дисперсия фотона первой моды в случае сильного поля незначительно отличается от вакуумного закона. Это означает, что в процессе $\nu \rightarrow \nu\gamma^{(1)}$ реализуется коллинеарная кинематика

$$j_\alpha \sim q_\alpha \sim p_\alpha \sim p'_\alpha,\tag{6.8}$$

следовательно, амплитуда $M(\nu\nu\gamma^{(1)})$ имеет дополнительное подавление, поскольку $(q\varphi j) \simeq (q\varphi q) = 0$. В свою очередь, в переходе, где участвует фотон второй моды, кинематика далека от коллинеарности, особенно в окрестности циклотронного резонанса, когда q_\parallel^2 стремится снизу к $4m_e^2$.

Отметим, что без учета перенормировки волновой функции фотона амплитуда $M(\nu\nu\gamma^{(2)})$ в этой области имела бы корневую сингулярность в точке $q_\parallel^2 = 4m_e^2$. С учетом перенормировки (фактор $\sqrt{\mathcal{Z}_2}$) амплитуда становится

конечной и равна

$$\mathcal{M}(\nu\nu\gamma^{(2)}) \simeq -\frac{eG_F}{4\pi} \frac{eB}{\sqrt{q_\perp^2}} [C_V(q\tilde{\varphi}j) + C_A(q\varphi\varphi j)]. \quad (6.9)$$

Вычисление вероятности процесса проводится стандартным для двухчастичного распада путем. При интегрировании по фазовому объему конечного фотона следует учитывать, что закон его дисперсии имеет вид $\omega \simeq |q_3|$.

Выражение для вероятности процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma^{(2)}$ в случае $eB \gg E^2 \sin^2 \theta$ имеет простой вид:

$$W(\nu \rightarrow \nu\gamma^{(2)}) \simeq \frac{\alpha G_F^2}{8\pi^2} (C_V^2 + C_A^2) e^2 B^2 E \sin^2 \theta, \quad (6.10)$$

где E – энергия начального нейтрино, θ – угол между векторами импульса начального нейтрино и индукции магнитного поля.

Вероятность процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma^{(2)}$ отлична от нуля также в области на рис. 3.2 выше порога рождения e^-e^+ пары, $q_\parallel^2 > 4m_e^2$, что обусловлено наличием мнимой части у поляризационного оператора и, следовательно, неопределённости в законе дисперсии фотона в магнитном поле в данной кинематической области. Однако здесь доминирующим является рассмотренный ранее древесный канал $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$.

Для 4-вектора Q^α (5.70) потерь энергии и импульса нейтрино за счёт процесса $\nu \rightarrow \nu\gamma^{(2)}$ в рассматриваемом пределе сильного поля, $eB \gg E^2 \sin^2 \theta$, получаем

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4}EW \left(1 + \frac{2C_VC_A}{C_V^2 + C_A^2} \cos \theta \right), \quad (6.11)$$

$$\mathcal{F}_z = \frac{1}{4}EW \left(\cos \theta + \frac{2C_VC_A}{C_V^2 + C_A^2} \right), \quad \mathcal{F}_\perp = \frac{1}{2}EW \sin \theta, \quad (6.12)$$

где вероятность W следует взять из (6.10).

Асимметрия (5.81), обусловленная процессом $\nu \rightarrow \nu\gamma^{(2)}$, отличается от соответствующей величины (5.126) за счёт процесса $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ на фактор $\sim \alpha(eB/E^2)$, а именно

$$A^{(\gamma)} \sim 2\pi\alpha \frac{eB}{E^2} A^{(ee)}, \quad (6.13)$$

где $A^{(ee)}$ есть величина, определённая в формуле (5.126). Можно видеть, что вклады процессов $\nu \rightarrow \nu\gamma$ и $\nu \rightarrow \nu e^- e^+$ в асимметрию могут быть сравнимы в случае сильного магнитного поля, несмотря на наличие подавляющего фактора α в (6.13).

6.1.3. Нейтринный распад фотона $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$

Процесс $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ становится кинематически разрешённым ($q^2 > 0$) благодаря специфике дисперсии фотона в магнитном поле. Для фотона второй моды с поляризацией $\varepsilon_\alpha^{(2)}$ это условие реализуется в области $q_\parallel^2 > 4m_e^2$, а для первой моды с поляризацией $\varepsilon_\alpha^{(1)}$ – в области $q_\parallel^2 > \left(m_e + \sqrt{m_e^2 + 2eB}\right)^2$.

Индукцированная магнитным полем “масса” фотона в рассматриваемой области ($q^2 > 0$) достаточно мала по сравнению с энергией фотона ω , $q^2 \ll \omega^2$, если поле не слишком велико, $eB \ll \omega^2/\alpha$. Последнее в свою очередь означает, что в процессе распада фотона $\gamma(q) \rightarrow \nu(p) + \bar{\nu}(p')$ реализуется коллинеарная кинематика

$$j_\alpha \sim q_\alpha \sim p_\alpha \sim p'_\alpha. \quad (6.14)$$

При этом нейтринный ток можно представить в виде

$$j_\alpha \simeq 4\sqrt{x(1-x)} q_\alpha, \quad (6.15)$$

где $x = E/\omega$, $1-x = E'/\omega$ – относительные энергии антинейтрино и нейтрино соответственно.

Индукцированные полем амплитуды процессов $\nu\nu\gamma$ -взаимодействия с участием реальных фотонов первой и второй мод, векторы поляризации которых определены в (3.10), имеют вид

$$\mathcal{M}_1 = -\frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\mathcal{Z}_1}}{\sqrt{q_\perp^2}} C_V (q\varphi j) Y_{VV}^{(1)}, \quad (6.16)$$

$$\mathcal{M}_2 = -\frac{eG_F}{4\pi^2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\mathcal{Z}_2}}{\sqrt{q_\parallel^2}} \left[C_V (q\tilde{\varphi} j) Y_{VV}^{(2)} + C_A eB (q\varphi j) \left(Y_{VA}^{(1)} - 1 \right) \right].$$

Как видно из выражений (6.16), в коллинеарном пределе, с учетом (6.15), амплитуда распада фотона первой моды обращается в нуль, а выражение для амплитуды второй моды существенно упрощается:

$$\mathcal{M}_1 \simeq 0, \quad \mathcal{M}_2 \simeq \frac{2eG_F C_A}{\sqrt{2}\pi^2} \sqrt{x(1-x)} [e^2(qFFq)]^{1/2} J(q_\parallel^2), \quad (6.17)$$

здесь мы учли, что в этой области перенормировочный множитель \mathcal{Z}_2 мало отличается от единицы. Безразмерный “полевой формфактор” $J(q_\parallel^2)$ имеет

вид

$$\begin{aligned}
 J(q_{\parallel}^2) &= \frac{1}{2} \left(1 - Y_{VA}^{(1)} \right) \simeq \\
 &\simeq 1 - i m_e^2 \int_0^1 du \int_0^\infty dt \exp \left\{ -i \left[t \left(m_e^2 - q_{\parallel}^2 \frac{1-u^2}{4} \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{q_{\perp}^2}{2\beta} \frac{\cos \beta u t - \cos \beta t}{\sin \beta t} \right] \right\}. \tag{6.18}
 \end{aligned}$$

Рассматриваемый процесс является трёхчастичным, однако его амплитуда не есть константа, в отличие от ситуации в вакууме, поскольку зависит не только от 4-импульсов частиц, но и от тензора внешнего поля. Поэтому вычисление вероятности не сводится к умножению квадрата амплитуды на фазовый объём:

$$W(\gamma^{(2)} \rightarrow \nu_j \bar{\nu}_i) = \frac{1}{16\pi\omega} \int_{x_1}^{x_2} dx |M_2|^2. \tag{6.19}$$

Здесь пределы интегрирования x_1 и x_2 определяются через отношения масс нейтрино к “массе” фотона $\mu_i^2 = m_i^2/q^2$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{1}{2} (\varepsilon \pm p), \quad \varepsilon = 1 + \mu_i^2 - \mu_j^2, \\
 p &= \sqrt{[1 - (\mu_i + \mu_j)^2][1 - (\mu_i - \mu_j)^2]}.
 \end{aligned}$$

Величины ε и p имеют физический смысл энергии и импульса i -го антинейтрино в долях $\sqrt{q^2}/2$ в системе “покоя” распадающегося фотона. Подставляя выражение для амплитуды M_2 (6.17) в (6.19), получим

$$\begin{aligned}
 W(\gamma^{(2)} \rightarrow \nu_j \bar{\nu}_i) &= \frac{\alpha G_F^2 C_A^2}{12\pi^4\omega} e^2 (q F F q) \left[1 + \mu_i^2 + \mu_j^2 - 2(\mu_i^2 - \mu_j^2)^2 \right] \times \\
 &\times \sqrt{[1 - (\mu_i + \mu_j)^2][1 - (\mu_i - \mu_j)^2]} |J(q_{\parallel}^2)|^2. \tag{6.20}
 \end{aligned}$$

Аргумент функции $J(q_{\parallel}^2)$ имеет простой физический смысл:

$$q_{\parallel}^2 \simeq q_{\perp}^2 \simeq \omega^2 \sin^2 \theta, \tag{6.21}$$

где θ есть угол между векторами импульса распадающегося фотона \mathbf{q} и напряжённости магнитного поля \mathbf{B} .

Полученное выражение для вероятности (6.20) описывает один канал распада фотона в j -е нейтрино и i -е антинейтрино. Физический же смысл имеет полная вероятность распада фотона на все “лёгкие” нейтрино, для которых открыт канал распада ($\mu_i + \mu_j < 1$). Если нейтрино обладают иерархическим спектром масс, таким что для $i \leq N_L$ $\mu_i \ll 1$, а для $i > N_L$ $\mu_i > 1$ (N_L имеет смысл числа “лёгких” нейтрино), то полная вероятность распада фотона имеет следующий простой вид:

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i,j=1}^{N_L} W(\gamma^{(2)} \rightarrow \nu_j \bar{\nu}_i) = \frac{\alpha G_F^2 \overline{C_A^2}}{12\pi^4 \omega} e^2 (q F F q) |J(q_{\parallel}^2)|^2, \quad (6.22) \\ \overline{C_A^2} &= \sum_{i,j=1}^{N_L} C_A^2 = \frac{1}{4} N_L - U^2 (1 - U^2), \\ U^2 &= \sum_{i=1}^{N_L} |U_{ie}|^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Если все три типа нейтрино “лёгкие”, $m_i^2 \ll q^2$ ($N_L = 3$, $U^2 = 1$), то $\overline{C_A^2} = 3/4$ и вероятность распада $\gamma^{(2)} \rightarrow \nu \bar{\nu}$ не зависит от параметров смешивания в лептонном секторе.

Функция $J(q_{\parallel}^2)$ упрощается в двух предельных случаях:

1. Если магнитное поле является самым большим параметром задачи, $eB \gg q_{\parallel}^2$, получаем $J(q_{\parallel}^2) = -H(q_{\parallel}^2/4m_e^2)$, где функция $H(z)$ определена в (3.18).
2. В альтернативном случае, когда $eB \ll q_{\parallel}^2$, имеем $J(q_{\parallel}^2) \simeq 1$.

Отметим, что в случае сильного поля вероятность распада (6.22), с учётом сингулярного поведения функции $H(z)$ при $z \rightarrow 1$, содержит, на первый взгляд, сингулярность полюсного типа при $q_{\parallel}^2 \rightarrow 4m_e^2$. Однако аккуратное решение уравнения дисперсии фотона в этом пределе [80] показывает, что

$$|q_{\parallel}^2 - 4m_e^2|_{\min} = \omega \Gamma_{\gamma \rightarrow e^- e^+}. \quad (6.23)$$

Подобная кажущаяся сингулярность, но корневого типа, как известно, имеет место в процессе распада фотона в магнитном поле на электрон-позитронную пару $\gamma \rightarrow e^+ e^-$ [224]. Как отмечалось в работе [80], при учёте

дисперсии фотона в процессе $\gamma \rightarrow e^+e^-$ ширина распада всюду конечна и достигает максимального значения при $q_{\parallel}^2 \simeq 4m_e^2$:

$$(\Gamma_{\gamma \rightarrow e^-e^+})_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2\alpha eB}{m_e^2} \right)^{2/3} \frac{m_e^2}{\omega}. \quad (6.24)$$

С учетом (6.23), (6.24) вероятность распада $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ также является конечной, достигая максимального значения:

$$(W^{(2)})_{\max} = \frac{1}{3\sqrt{3}\pi^2} \left(\frac{2\alpha eB}{m_e^2} \right)^{1/3} (G_F m_e^2)^2 \overline{C_A^2} \frac{eB}{\omega}. \quad (6.25)$$

Вероятность (6.22) с подстановкой $J(q_{\parallel}^2)$ в предельных случаях $eB \ll q_{\parallel}^2$ и $eB \gg q_{\parallel}^2$ совпадает с результатами работ [81] и [82] соответственно, с точностью до фактора $\overline{C_A^2}$. Отличие обусловлено тем, что в работах [81, 82] не учитывалось возможное смешивание лептонов и вклад Z -бозона. В работе [83] нейтринный распад фотона в магнитном поле изучался в случае низких энергий, $\omega \ll m_e$, при произвольной величине поля и с учетом вкладов как W , так и Z -бозона. В пределе сильного поля, $eB \gg m_e^2$, результат работы [83] в 3 раза меньше нашей формулы (6.22), поскольку авторы [83] учли только один канал распада, $\gamma \rightarrow \nu_e\bar{\nu}_e$. Процесс распада фотона в пределе сильного магнитного поля изучался также в работе [292] в рамках стандартной модели со смешиванием лептонов. Однако в этой работе не учтён вклад, обусловленный обменом Z -бозоном, поэтому полученная в [292] вероятность распада $\gamma \rightarrow \nu_i\bar{\nu}_j$ не имеет физического смысла полной вероятности распада фотона, так как не учитывает каналы $\gamma \rightarrow \nu_i\bar{\nu}_i$.

Разумеется, вероятность (6.25) электрослабого процесса $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ подавлена фактором $(G_F m_e^2)^2 \sim 10^{-23}$ по сравнению с вероятностью (6.24) процесса $\gamma \rightarrow e^+e^-$. Однако первый процесс может играть роль в астрофизике как дополнительный источник нейтринного охлаждения.

Оценим энергию, уносимую нейтрино из единицы объёма фотонного газа за единицу времени (нейтринную светимость), которая определяется выражением

$$Q = \int dN_{\gamma} \omega W = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\omega/T} - 1} \omega W. \quad (6.26)$$

Здесь учтено, что вклад в светимость дают только фотоны второй моды (3.10). Для оценки будем полагать, что все нейтрино лёгкие, $m_i^2 \ll q^2$, $\overline{C_A^2} = 3/4$.

Подставляя вероятность (6.22) в (6.26), выражение для светимости можно привести к виду

$$Q = \frac{\alpha (G_{Fe} B)^2}{8\pi^4} m_e^5 \mathcal{F}(T) \simeq 0.96 \cdot 10^{18} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{с}} \left(\frac{B}{B_e} \right)^2 \mathcal{F}(T), \quad (6.27)$$

где функция $\mathcal{F}(T)$ определяется интегралом

$$\mathcal{F}(T) = \frac{8}{\pi^2} \int_0^1 du (1 - u^2) \int_{x_0}^{\infty} \frac{x^4 dx}{e^{x/\tau} - 1} |J(q_{\parallel}^2)|^2. \quad (6.28)$$

Здесь $\tau = T/2m_e$ и введены переменные интегрирования $u = \cos \theta$, $x = \omega/2m_e$, при этом аргумент функции J равен $q_{\parallel}^2 = 4m_e^2 x^2(1 - u^2)$, x_0 определяется из соотношения (6.23).

Как показывает анализ, функция $\mathcal{F}(T)$ слабо зависит от поля и принимает следующий вид в достаточно широком интервале температур при единственном ограничении $T \gtrsim m_e$:

$$\mathcal{F}(T) \simeq \frac{4\zeta(5)}{\pi^2} \left(\frac{T}{m_e} \right)^5, \quad (6.29)$$

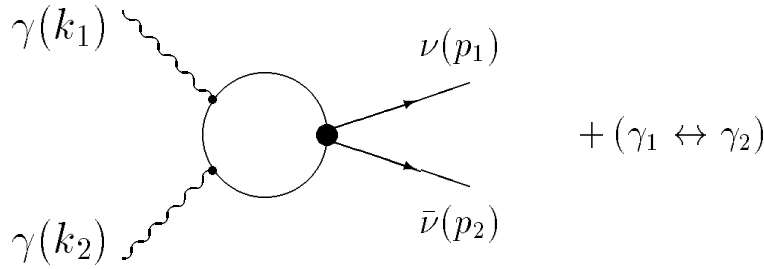
где $\zeta(5) \simeq 1.037$ (ζ -функция Римана).

В случае низких температур $T \ll 2m_e$ функция $\mathcal{F}(T)$ экспоненциально мала, $\mathcal{F}(T) \sim \exp(-2m_e/T)$.

Оценим вклад процесса распада фотона $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в нейтринную светимость в условиях взрыва сверхновой. Будем предполагать существование сильного магнитного поля тороидального типа [28, 29] в центральной области взрыва с размером порядка сотни километров. Оценка даёт

$$\frac{dE}{dt} \sim 10^{45} \frac{\text{эрг}}{\text{с}} \left(\frac{B}{10^{15} \text{ Гс}} \right)^2 \left(\frac{T}{2 \text{ МэВ}} \right)^5 \left(\frac{R}{100 \text{ км}} \right)^3. \quad (6.30)$$

В условиях сверхновой этот вклад оказывается малым по сравнению с полной светимостью 10^{52} эрг/с. Следует отметить, что вклад процесса $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ одинаков для всех ароматов нейтрино и может быть существенным в низкоэнергетической части нейтринного спектра.

Рис. 6.4. Диаграмма Фейнмана для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$

6.2. Комптоноподобное взаимодействие нейтрино с фотонами

6.2.1. Амплитуда процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в вакууме

(а). *Стандартное слабое взаимодействие*

По-видимому, историю исследований процессов рождения нейтринных пар нужно отсчитывать от статьи Б. Понтекорво [293], указавшего на их возможную роль в астрофизике. Процесс превращения фотонной пары в пару нейтрино-антинейтрино описывается двумя диаграммами Фейнмана с виртуальным фермионом в петле и с перестановкой фотонов (см. рис. 6.4).

Здесь большой кружок изображает эффективное слабое взаимодействие фермиона с нейтрино (см. рис. 3.11).

С учётом градиентной инвариантности электромагнитного взаимодействия амплитуду процесса можно записать в следующем самом общем виде:

$$\mathcal{M} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_l(p_1) T_{\alpha\beta\mu\nu} \nu_l(-p_2)] f_1^{\alpha\beta} f_2^{\mu\nu}, \quad (6.31)$$

где индекс l определяет аромат нейтрино, $l = e, \mu, \tau$ ¹, $f^{\alpha\beta} = k^\alpha \varepsilon^\beta - k^\beta \varepsilon^\alpha$ – тензор электромагнитного поля фотона в импульсном пространстве. Тензор $T_{\alpha\beta\mu\nu}$, который является дираковской матрицей, имеет размерность обратной массы и должен быть построен из имеющихся ковариантов.

Видимо, самое первое правильное заключение об этой амплитуде было сделано в работе [94], это теорема Гелл-Манна: в случае безмассовых нейтрино, реальных фотонов, и в локальном пределе стандартного слабого взаимодействия амплитуда строго равна нулю. Качественно это можно увидеть из следующего рассуждения: в системе центра инерции левое нейтрино и

¹Выражение (6.31) легко обобщается на случай лептонного смешивания.

правое антинейтрино уносят полный угловой момент, равный единице. Однако, как впервые было показано Ландау [294], система из двух фотонов не может находиться в состоянии с таким угловым моментом (так называемая теорема Янга [295]). На языке тензорного анализа это означает, что с учётом киральности безмассовых нейтрино и бозе-симметрии в задаче нет ковариантов для построения тензора $T_{\alpha\beta\mu\nu}$.

При любом отклонении от условий теоремы Гелл-Манна возникает ненулевая амплитуда (6.31). В случае массивных нейтрино процесс становится разрешённым [95, 96] благодаря изменению киральности нейтрино, при этом амплитуда пропорциональна массе нейтрино. Чтобы проиллюстрировать лоренцевскую структуру, приведем здесь выражение для тензора $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ в случае низких энергий фотонов ($\omega \ll m_e$), когда максимальный вклад в амплитуду даёт электронная петля:

$$T_{\alpha\beta\mu\nu} = -\frac{i}{12} \left(\delta_{le} - \frac{1}{2} \right) \frac{m_{\nu_l}}{m_e^2} \gamma_5 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}. \quad (6.32)$$

При учёте нелокальности слабого взаимодействия через W -бозон импульсы нейтрино и антинейтрино могут входить в амплитуду по отдельности, а не только в виде суммы, при этом возникает следующая структура [97–99]:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\mu\nu} &= \frac{8i}{3} \left(\ln \frac{m_W^2}{m_e^2} + \frac{3}{4} \right) \frac{1}{m_W^2} \times \\ &\times [\gamma_\alpha g_{\beta\mu}(p_1 - p_2)_\nu + \gamma_\mu g_{\nu\alpha}(p_1 - p_2)_\beta] (1 + \gamma_5). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Видно, что в обоих случаях амплитуда имеет сильное подавление за счёт либо малой массы нейтрино в числителе, либо большой массы W -бозона в знаменателе.

(б). Модель с нарушенной лево-правой симметрией

Ещё одно отклонение от условий теоремы Гелл-Манна, при котором процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ также возможен, реализуется, когда в эффективном лагранжиане нейтрино-лептонного взаимодействия нейтрино меняет киральность. При записи лагранжиана в форме нейтральных токов к этому приводит связь скалярных и псевдоскалярных токов. Такой случай, рассматривавшийся в работе [104], имеет место в модели с нарушенной лево-правой симметрией [296–302] и со смешиванием векторных бозонов, взаимодействующих с левыми и правыми заряженными слабыми токами [303]. В этой модели

лагранжиан $\nu e W$ -взаимодействия может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{g}{2\sqrt{2}} \left\{ [\bar{e}\gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu_e] (W_1^\alpha \cos \zeta + W_2^\alpha \sin \zeta) + \right. \\ & \left. + [\bar{e}\gamma_\alpha (1 - \gamma_5) \nu_e] (-W_1^\alpha \sin \zeta + W_2^\alpha \cos \zeta) + h.c. \right\}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

где $W_{1,2}$ – заряженные векторные W -бозоны с определённой массой, ζ – угол смешивания. Существующие ограничения на параметры данной модели получены в низкоэнергетических экспериментах на ускорителях и имеют вид [304]

$$M_{W_2} > 715 \text{ ГэВ}, \quad \zeta < 0.013. \quad (6.35)$$

Благодаря малости угла смешивания состояние W_2 практически совпадает с правым бозоном W_R .

Существует также более жёсткое ограничение на параметры модели, полученное из астрофизических данных, а именно из анализа нейтринных событий от сверхновой SN1987A. В комбинации с ускорительными данными получено [305]

$$M_{W_R} > 23 \text{ ТэВ}, \quad \zeta < 10^{-5}. \quad (6.36)$$

Для реализации процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ важна та часть эффективного лагранжиана $\nu\nu ee$ -взаимодействия, за счёт которой рождающееся нейтрино или анти-нейтрино будет иметь “нестандартную” киральность. Это возможно именно благодаря смешиванию бозонов, когда в эффективном лагранжиане перемножаются левый и правый токи из (6.34). С учётом малости угла смешивания и отношения масс M_{W_1}/M_{W_2} , можно записать лагранжиан $\nu\nu ee$ -взаимодействия в виде

$$\mathcal{L}_{eff} \simeq -4 \zeta \frac{G_F}{\sqrt{2}} [(\bar{e}e) (\bar{\nu}_e \nu_e) - (\bar{e}\gamma_5 e) (\bar{\nu}_e \gamma_5 \nu_e)]. \quad (6.37)$$

При этом существуют два новых по сравнению со стандартной моделью канала превращения фотонной пары в пару нейтрино-антинейтрино, а именно

$$\gamma\gamma \rightarrow (\nu_e)_L (\bar{\nu}_e)_L, \quad \gamma\gamma \rightarrow (\nu_e)_R (\bar{\nu}_e)_R. \quad (6.38)$$

Здесь $(\nu_e)_R$ и $(\bar{\nu}_e)_L$ – состояния, “стерильные” относительно стандартного слабого взаимодействия. Полный спин нейтринных пар в (6.38) в системе центра инерции равен нулю, что открывает процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$.

Представляя амплитуду процесса с эффективным лагранжианом (6.37) в форме (6.31), мы получили для тензора $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ следующее выражение:

$$T_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{4\zeta m_e}{(k_1 k_2)} \left\{ \left[1 + \frac{1}{2} (1 - 4\tau) I(\tau) \right] g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu} - \frac{i}{4} I(\tau) \gamma_5 \varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \right\}, \quad (6.39)$$

где

$$\tau = \frac{m_e^2}{2(k_1 k_2)}, \quad I(\tau) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{\tau - xy - i0}. \quad (6.40)$$

Отметим, что наш результат (6.39), совпадая по структуре с тензором, который можно извлечь из работы [104], отличается от него числовыми коэффициентами.

Амплитуда процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в рассматриваемой модели также имеет подавление за счет малости угла смешивания ζ .

(в). Случай виртуальных фотонов

Еще один случай появления ненулевой амплитуды реализуется, если один из фотонов [100] или оба фотона [101] находятся вне массовой поверхности. При этом $k_\mu f^{\mu\nu} \neq 0$ и импульсы фотонов могут участвовать в построении тензора $T_{\alpha\beta\mu\nu}$.

Вычислим общую амплитуду процесса $\nu\gamma^* \rightarrow \nu\gamma^*$ в стандартной модели электрослабого взаимодействия с учётом виртуальности фотонов, наличия массы у нейтрино и возможного смешивания в лептонном секторе [102, 103].

Как показал анализ, в такой амплитуде факторизуется нейтринный $(V - A)$ -ток и её можно представить в следующем общем виде:

$$\mathcal{M} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\rho^{(\nu)} e_{1\alpha} e_{2\beta}^* L_{\alpha\beta\rho}(k_1, k_2), \quad (6.41)$$

где $j_\rho^{(\nu)} = \bar{\nu}_j(p_2) \gamma_\rho (1 + \gamma_5) \nu_i(p_1)$, индексы i и j (вообще говоря, $i \neq j$) нумеруют состояния нейтрино с определёнными массами; $e_{1,2}$ – 4-векторы поляризации и $k_{1,2}$ – 4-импульсы фотонов. Как следует из вышесказанного, в тензор $L_{\alpha\beta\rho}$ могут входить только два независимых импульса – k_1 и k_2 .

Рассмотрим более подробно вклад в амплитуду от обмена Z -бозоном. Для его получения необходимо произвести суммирование по всем фундаментальным заряженным фермионам f в петле, как лептонам, так и кваркам,

при этом можно записать

$$L_{\alpha\beta\rho} = \sum_f T_{3f} Q_f^2 L_{\alpha\beta\rho}^{(f)} , \quad (6.42)$$

где Q_f есть электрический заряд фермиона в единицах элементарного заряда e , $Q_f = e_f/e$, T_{3f} – третья компонента слабого изоспина. Для вклада отдельного фермиона получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta\rho}^{(f)} = & i \varepsilon_{\lambda\mu\beta\rho} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{a_f} \left\{ g_{\lambda\alpha} k_{1\mu} [k_1^2 x(1-2x) + k_2^2 y(1-2y) - \right. \\ & - 4(k_1 k_2) xy] + 2 g_{\lambda\alpha} k_{2\mu} k_1^2 x + \\ & \left. + 4 k_{1\lambda} k_{2\mu} x [k_{2\alpha} y - k_{1\alpha} (1-x)] \right\} + (k_1 \leftrightarrow -k_2, \alpha \leftrightarrow \beta) , \end{aligned} \quad (6.43)$$

где обозначено

$$a_f = m_f^2 + 2(k_1 k_2)xy - k_1^2 x(1-x) - k_2^2 y(1-y) . \quad (6.44)$$

В формуле (6.43) отброшены слагаемые, не зависящие от массы фермиона, так как, благодаря известному соотношению $\sum_f T_{3f} Q_f^2 = 0$ (для каждого поколения), они не дают вклада в амплитуду. Выражение (6.43) можно преобразовать к виду, когда калибровочная инвариантность амплитуды будет очевидна. Для этого введём тензор

$$f_{\mu\nu} = k_\mu e_\nu - k_\nu e_\mu , \quad (6.45)$$

пропорциональный фурье-образу тензора электромагнитного поля фотона, а также дуальный тензор

$$\tilde{f}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} f_{\alpha\beta} . \quad (6.46)$$

Вводя обозначение

$$R_\rho^{(f)} = e_{1\alpha} e_{2\beta}^* L_{\alpha\beta\rho}^{(f)} , \quad (6.47)$$

найдем для вектора $R_\rho^{(f)}$ с учётом (6.45), (6.46) выражение, представляющее амплитуду в явном калибровочно инвариантном виде:

$$R_\rho^{(f)} = 4i \left\{ \tilde{f}_{2\rho\mu} f_{1\mu\nu} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{a_f} [k_{1\nu}(1-x) - k_{2\nu}y] + \right. \\ \left. + \tilde{f}_{1\rho\mu} f_{2\mu\nu} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{y dy}{a_f} [k_{1\nu}x - k_{2\nu}(1-y)] \right\}. \quad (6.48)$$

При переходе от (6.43) к (6.48) использовалось следующее тождество:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{a_f} [k_1^2 x(1-2x) - k_2^2 y(1-2y)] \equiv 0. \quad (6.49)$$

Расчёт показывает, что вклад в амплитуду от диаграммы с виртуальным W -бозоном также выражается через вектор (6.48), где в качестве виртуального фермиона фигурирует заряженный лептон. Полная амплитуда процесса $\nu_i \gamma^* \rightarrow \nu_j \gamma^*$ может быть представлена в виде

$$\mathcal{M} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{G_F}{\sqrt{2}} j_\rho^{(\nu)} \left(\sum_l U_{il} U_{jl}^* R_\rho^{(l)} + \delta_{ij} \sum_f T_{3f} Q_f^2 R_\rho^{(f)} \right), \quad (6.50)$$

где U_{il} есть унитарная матрица лептонного смешивания Понтекорво–Маки–Накагавы–Сакаты, $l = e, \mu, \tau$. Амплитуда должна удовлетворять требованиям упомянутой теоремы Гелл-Манна [94], однако в выражении (6.48) это ещё не очевидно. Воспользовавшись следующим соотношением для тензоров (6.45), (6.46):

$$\tilde{f}_{1\rho\mu} f_{2\mu\sigma} + \tilde{f}_{2\rho\mu} f_{1\mu\sigma} = \frac{1}{2} f_{1\mu\nu} \tilde{f}_{2\nu\mu} g_{\rho\sigma}, \quad (6.51)$$

запишем вектор $R_\rho^{(f)}$ в окончательном виде:

$$R_\rho^{(f)} = -4i \left[\frac{1}{2} (f_1 \tilde{f}_2) (k_2 - k_1)_\rho A(m_f, k_1, k_2) - \right. \\ \left. - (\tilde{f}_2 f_1 k_1)_\rho B(m_f, k_1, k_2) + (\tilde{f}_1 f_2 k_2)_\rho B(m_f, k_2, k_1) \right], \quad (6.52)$$

где обозначено

$$A(m_f, k_1, k_2) = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} \frac{y dy}{m_f^2 + 2(k_1 k_2)xy - k_1^2 x(1-x) - k_2^2 y(1-y)}, \quad (6.53)$$

$$B(m_f, k_1, k_2) = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)dy}{m_f^2 + 2(k_1 k_2)xy - k_1^2 x(1-x) - k_2^2 y(1-y)}.$$

Таким образом, для амплитуды в виде (6.50), (6.52) теорема Гелл-Манна удовлетворяется очевидным образом.

Полученная амплитуда в частных случаях совпадает с известными результатами [95, 96, 100, 101]. Так, первое слагаемое в (6.52) дает при подстановке в (6.50) дивергенцию нейтринного тока, то есть будет пропорционально массе нейтрино. Для реальных фотонов, при низких энергиях $\omega \ll m_e$, когда $l = f = e$, и без учёта лептонного смешивания, $i = j = l'$, $U_{lk} = \delta_{lk}$, из амплитуды (6.50), (6.52), (6.53) воспроизводится выражение для тензора (6.32). В другом случае, когда оба фотона виртуальные, $k_{1,2}^2 \neq 0$, нашу амплитуду можно привести, полагая нейтрино безмассовыми, к виду, совпадающему с результатом работы [101]. Подчеркнем, что авторы [101] ввели искусственную зависимость амплитуды от импульсов нейтрино. Очевидно, однако, что в рассматриваемом приближении (фактически в локальном пределе слабого взаимодействия) амплитуда процесса $\nu \gamma^* \rightarrow \nu \gamma^*$ может явно зависеть только от импульсов фотонов.

В этом случае при низких энергиях фотонов, $\omega \ll m_e$, для тензора $T_{\alpha\beta\mu\nu}$, введённого в формуле (6.31), имеем

$$T_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{i}{12} \left(U_{ie} U_{je}^* - \frac{1}{2} \delta_{ij} \right) \frac{1}{m_e^2} \gamma^\rho (1 + \gamma_5) (\varepsilon_{\rho\alpha\mu\nu} k_{1\beta} + \varepsilon_{\rho\mu\alpha\beta} k_{2\nu}). \quad (6.54)$$

Следует заметить, что общая амплитуда (6.50), (6.52) позволяет, в частности, получить первые члены разложения по внешнему полю амплитуд радиационного распада нейтрино $\nu_i \rightarrow \nu_j \gamma$ и безрадиационного перехода $\nu_i \rightarrow \nu_j$ в электромагнитном поле произвольной конфигурации. Для этого достаточно в выражении (6.52) произвести замену тензора электромагнитного поля одного или обоих фотонов на тензор внешнего электромагнитного поля.

Применим выражение для полученной амплитуды процесса $\nu \gamma^* \rightarrow \nu \gamma^*$ к вычислению вероятности радиационного распада массивного нейтрино

$\nu_i \rightarrow \nu_j \gamma$ во внешнем поле [85, 87] в случае относительно слабого поля. Заменяя тензор поля одного из фотонов на тензор постоянного однородного магнитного поля

$$q_{1\alpha} \rightarrow 0, \quad f_{1\alpha\beta} \rightarrow iF_{\alpha\beta}, \quad q_{2\alpha} \rightarrow q_\alpha, \quad f_{2\alpha\beta} \rightarrow f_{\alpha\beta} \quad (6.55)$$

и учитывая, что основной вклад происходит от электронной петли, а также что дисперсия фотона в слабом поле практически не отличается от вакуумной ($q^2 = 0$), для амплитуды процесса $\nu_i \rightarrow \nu_j \gamma$ получаем

$$\mathcal{M} = \frac{eG_F C_A}{48\sqrt{2}\pi^2} \frac{B}{B_e} (\varphi \tilde{f}^*) (j^{(\nu)} q), \quad (6.56)$$

где $C_A = U_{ie}U_{je}^* - \frac{1}{2}\delta_{ij}$. Выражение (6.56) совпадает с линейным по полю членом амплитуды, приведённой в формуле (4) статьи [85].

Полагая для простоты конечное нейтрино безмассовым, находим вероятность распада $\nu_i \rightarrow \nu_j \gamma$ в системе покоя начального нейтрино:

$$W = \frac{\alpha}{18\pi} \frac{G_F^2 C_A^2}{192\pi^3} m_{\nu_i}^5 \left(\frac{B}{B_e} \right)^2. \quad (6.57)$$

Вероятность (6.57) согласуется с формулой (5) статьи [85], но в 4 раза меньше вероятности, получаемой из формулы (32) статьи [87] в пределе слабого поля.

6.2.2. Рассеяние нейтрино в кулоновском поле ядра

В качестве ещё одной иллюстрации применения общей формулы (6.50) рассмотрим процесс рассеяния нейтрино высокой энергии на ядре с излучением фотона. Отметим, что ранее [95, 96, 100] изучались только астрофизические проявления процесса $\nu \gamma \rightarrow \nu \gamma$. Мы хотим исследовать возможность обнаружения этой реакции в лабораторном эксперименте с нейтрино высоких энергий от ускорителя. Реально такой процесс проявлялся бы как тормозное излучение нейтрино в кулоновском поле ядра

$$\nu_i + \text{ядро} \rightarrow \nu_j + \gamma + \text{ядро}. \quad (6.58)$$

При этом экспериментальным свидетельством реакции должно быть обнаружение одиночного жёсткого γ -кванта без какого-либо сопровождения.

Амплитуду реакции (6.58) можно получить из (6.50) и (6.52), полагая один из фотонов (например, γ_2) реальным, при этом $f_{2\mu\nu}k_{2\nu} = 0$. Если пренебречь массой нейтрино и смешиванием в лептонном секторе, то в амплитуду даст вклад только второй член выражения (6.52). Подставляя вместо 4-вектора поляризации первого фотона $e_{1\mu}$ величину $(Ze/k_1^2)J_\mu$, где J_μ – электромагнитный ток ядра, k_1 – 4-импульс виртуального фотона, получим для амплитуды следующее выражение:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & 4i \frac{Ze\alpha}{\pi} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \varepsilon_{\rho\mu\alpha\beta} j_\rho^{(\nu)} J_\mu k_{2\alpha} e_{2\beta}^* \left[B(m_l, k_1, k_2) + \right. \\ & \left. + \sum_f T_{3f} Q_f^2 B(m_f, k_1, k_2) \right], \end{aligned} \quad (6.59)$$

где m_l – масса заряженного лептона, партнера нейтрино, участвующего в реакции. В приближении, когда конечное ядро практически покоится, $J_\mu = (2m_N, 0)$, m_N – масса ядра, $k_{1\mu} = (0, \mathbf{k}_1)$, где величина передаваемого импульса $|\mathbf{k}_1|$ ограничена сверху значением k_m порядка обратного радиуса ядра: $1/r \sim k_m \simeq 200 \cdot A^{-1/3}$ МэВ. Анализ показывает, что при высоких энергиях нейтрино вклад в амплитуду (6.59) дают все заряженные фермионы, кроме t -кварка (напомним, что рассматривается приближение $(pk_1) \ll m_W^2 < m_t^2$). Если при этом ограничиться главным логарифмическим приближением, то массами фермионов в интеграле $B(m_f, k_1, k_2)$, определённом в (6.53), можно пренебречь. Для спектра испускаемых фотонов получается следующее выражение:

$$d\sigma = \frac{\alpha}{54\pi} \left(\frac{Z\alpha}{\pi} \right)^2 \frac{G_F^2 k_m^2}{\pi} \frac{d\omega}{\omega} \left[1 - \frac{\omega}{E} + \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{E} \right)^2 \right] \ln^3 \left(\frac{2\omega}{k_m} \right), \quad (6.60)$$

где ω – энергия фотона, E – энергия начального нейтрино. Интегрируя по энергиям фотонов и удерживая только старшую степень логарифма, находим для полного сечения

$$\sigma \simeq \left(\frac{\alpha}{2\pi} \right)^3 \frac{Z^2}{27} \frac{G_F^2 k_m^2}{\pi} \ln^4 \left(\frac{2E}{k_m} \right). \quad (6.61)$$

Например, при энергии нейтрино $E = 100$ ГэВ имеем

$$\sigma \sim \frac{Z^2}{A^{2/3}} 10^{-46} \text{ см}^2. \quad (6.62)$$

Малая величина сечения (6.62) делает наблюдение изучаемого процесса труднодоступным в ближайшем будущем, несмотря на наличие чёткого

сигнала – излучение одиночного жёсткого γ -кванта без какого-либо сопровождения. Отметим, что такой сигнал возможен также при когерентном излучении γ -кванта нуклонами ядра [306, 307]. Однако обсуждаемый нами процесс характеризуется более узким угловым распределением γ -квантов, $\theta < k_m/E$ вместо $\theta < \sqrt{k_m/E}$ [306, 307]. Кроме того, необходимо уметь различать в нейтринном эксперименте электромагнитные ливни, рождаемые, с одной стороны, фотонами и, с другой стороны, электронами отдачи в стандартном процессе рассеяния $\nu e \rightarrow \nu e$, сечение которого в 10^4 раз больше, чем сечение (6.61).

Можно надеяться, однако, что указанные экспериментальные трудности в будущем могут быть преодолены и обсуждаемый процесс $\nu\gamma^* \rightarrow \nu\gamma$ станет доступным для наблюдения. Важность изучения такого процесса, как минимум однопетлевого, обусловлена тем, что его экспериментальное обнаружение явилось бы одним из тестов на применимость высших порядков теории возмущений в стандартной модели электрослабого взаимодействия.

6.2.3. Влияние внешнего поля на процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$

Как уже отмечалось, внешнее магнитное поле может усилить данный процесс. Поскольку в задаче возникает тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$, это открывает новую возможность для построения тензора $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ в амплитуде (6.31). В действительности поле войдет в амплитуду в виде безразмерного тензора $eF_{\mu\nu}/m_e^2$, который может дать дополнительное усиление, если величина поля превышает критическое значение $B_e = m_e^2/e$.

В работе [105] процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ исследовался в рамках стандартной модели в относительно слабом магнитном поле $B \ll B_e$, в низшем порядке разложения по B/B_e и при малых энергиях фотонов $\omega \ll m_e$ (именно в этом приближении уместно применение эффективного лагранжиана, полученного в [114] из амплитуды процесса $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\nu\bar{\nu}$ и использованного в [105]). Как следует из [105], амплитуда процесса линейно растёт с полем. Мы покажем ниже, что этот рост имеет место только при $B \ll B_e$, но в сильном поле, $B \gg B_e$, амплитуда в случае стандартного слабого взаимодействия выходит на константу.

В работах [106, 107] процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ и кроссинг-процессы исследовались также в слабом магнитном поле, но практически без ограничения малости энергий фотонов, а именно при условии $\omega < m_W$. В пределе $\omega \ll m_e$ амплитуда из [107] согласуется с результатом работы [105]. К сожалению, амплитуда в [107] записана в очень громоздком виде, так что простейший тест на калибровочную инвариантность провести чрезвычайно затруднительно.

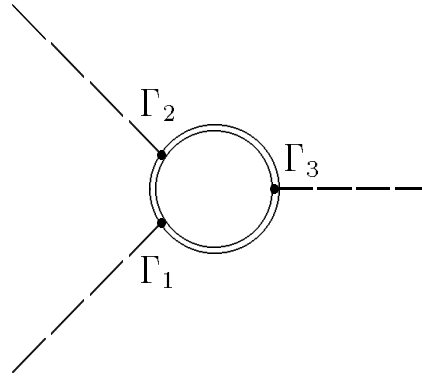


Рис. 6.5. Диаграмма Фейнмана для трёхвершинного петлевого процесса в сильном магнитном поле: двойные линии соответствуют электронным пропагаторам, построенным на основе точных решений уравнения Дирака во внешнем поле

В более ранней работе [109] процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ был исследован в сильном магнитном поле $B \gg B_e$ при малых энергиях фотонов, $\omega \ll m_e$, без учета вклада Z -бозона.

Анализ трёхвершинного петлевого процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в сильном магнитном поле при произвольных кинематических условиях был впервые проведен в нашей работе [110].

Рассмотрим общий случай трёхвершинного петлевого процесса в сильном магнитном поле, который описывается диаграммой Фейнмана, изображенной на рис. 6.5.

В процессе превращения фотонной пары в пару нейтрино-антинейтрино, $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$, две вершины являются векторными, например $\Gamma_1 = \Gamma_2 = V$, а третья может содержать в рамках стандартной модели векторную и аксиальную связи, $\Gamma_3 = V, A$, при выходе за пределы стандартной модели — также скалярную и псевдоскалярную связи, $\Gamma_3 = S, P$.

Еще один трёхвершинный петлевой процесс, в течение многих лет находящийся в поле внимания теоретиков, — расщепление фотона на два фотона в магнитном поле, $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$, который в вакууме запрещен кинематически, см. параграф 4.4. В данном процессе все три вершины являются векторными, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = V$. Таким образом, в дальнейшем анализе две вершины, например Γ_1 и Γ_2 , мы будем считать векторными и связанными с фотонами, а вершину Γ_3 оставим произвольной и связанной с соответствующим током.

Будем использовать пропагатор электрона в магнитном поле (см. п. 2.1). Инвариантная амплитуда процесса, описываемого диаграммой на рис. 6.5, с

учетом (2.1), (2.17) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & e^2 g_3 \int d^4 X d^4 Y \operatorname{Tr} \{ (j_3 \Gamma_3) \tilde{S}^F(Y) (\varepsilon_2 \gamma) \tilde{S}^F(-X - Y) (\varepsilon_1 \gamma) \tilde{S}^F(X) \} \times \\ & \times e^{-i e (X F Y)/2} e^{i(k_1 X - k_2 Y)} + (\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2), \end{aligned} \quad (6.63)$$

где $X = z - x$, $Y = x - y$, Γ_3 – матрица, соответствующая S, P, V или A вершине, g_3 – константа связи, j_3 – соответствующий квантовый объект (нейтринный ток или вектор поляризации фотона) в импульсном пространстве, ε_1 , k_1 и ε_2 , k_2 – векторы поляризации и 4-импульсы начальных фотонов.

Использование пропагатора вида (2.1), (2.2) в трёхвершинной петле ведёт в общем случае к очень громоздким выражениям. Относительно простые результаты были получены только для процесса расщепления фотона в двух случаях: в пределе слабого поля [164] и в сильном поле в приближении коллинейрной кинематики [124, 125].

Для анализа амплитуды процесса (6.63) в сильном поле целесообразно использовать асимптотическое выражение электронного пропагатора (2.60). Подставляя пропагатор в амплитуду, находим, что две её части, отличающиеся перестановкой фотонов, пропорциональны величине поля B :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \simeq & -\frac{i \alpha g_3 e B}{(4\pi)^2} \exp \left(-\frac{k_{1\perp}^2 + k_{2\perp}^2 + (k_1 k_2)_\perp}{2eB} \right) \exp \left(-i \frac{(k_1 \varphi k_2)}{2eB} \right) \times \\ & \times \int d^2 p \operatorname{Tr} \{ (j_3 \Gamma_3) S_\parallel(p + k_2) (\varepsilon_2 \gamma) S_\parallel(p) (\varepsilon_1 \gamma) S_\parallel(p - k_1) \} + \\ & + (\gamma_1 \leftrightarrow \gamma_2), \end{aligned} \quad (6.64)$$

где $S_\parallel(p) = 2\Pi_-((p\gamma)_\parallel + m_e)/(p_\parallel^2 - m_e^2)$. Следует заметить, что в амплитуде (6.64) проекционный оператор Π_- выделяет фотоны только одной поляризации из двух возможных – второй моды (см. (3.10)),

$$\varepsilon_\alpha^{(1)} = \frac{F_{\alpha\beta} k_\beta}{\sqrt{(k F F k)}}, \quad \varepsilon_\alpha^{(2)} = \frac{\tilde{F}_{\alpha\beta} k_\beta}{\sqrt{(k \tilde{F} \tilde{F} k)}}. \quad (6.65)$$

Используя стандартную процедуру, можно преобразовать след во втором члене выражения (6.64), с переставленными фотонами, к следу в первом члене. Однако

- это происходит с изменением знака для $\Gamma_3 = P, V, A$ (и появлением фактора $\sin[(k_1 \varphi k_2)/2eB]$ в результирующей амплитуде)

- и без изменения знака для $\Gamma_3 = S$ (и с появлением фактора $\cos[(k_1 \varphi k_2)/2eB]$ после суммирования).

Следовательно, когда величина магнитного поля является максимальным физическим параметром, $eB \gg k_\perp^2, k_\parallel^2$, только амплитуда со скалярной вершиной линейно растёт с полем.

6.2.4. Амплитуда и сечение процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в модели с нарушенной лево-правой симметрией

Используя эффективный лагранжиан $\nu\nu ee$ -взаимодействия со скалярной связью (6.37), подставляя $\Gamma_3 = 1$, $g_3 = -4 \zeta G_F/\sqrt{2}$ и $j_3 = [\bar{\nu}_e(p_1)\nu_e(-p_2)]$ в амплитуду (6.64) и интегрируя по виртуальному импульсу в пределе сильного поля, получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \frac{8\alpha}{\pi} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\zeta}{m_e} \frac{B}{B_e} [\bar{\nu}_e(p_1) \nu_e(-p_2)] \varepsilon_{1\alpha}^{(2)} \varepsilon_{2\beta}^{(2)} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{a^2} \times \\ & \times \left\{ \left[k_{1\parallel}^2 x(1-2x) + k_{2\parallel}^2 y(1-2y) - (k_1 k_2)_\parallel (1-4xy) \right] \tilde{\Lambda}^{\alpha\beta} - \right. \\ & - (1-2x)(1-2y) k_{1\parallel}^\alpha k_{2\parallel}^\beta + (1-4xy) k_{2\parallel}^\alpha k_{1\parallel}^\beta - \\ & \left. - 2x(1-2x) k_{1\parallel}^\alpha k_{1\parallel}^\beta - 2y(1-2y) k_{2\parallel}^\alpha k_{2\parallel}^\beta \right\}, \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$a = 1 - \frac{q_\parallel^2}{m_e^2} xy - (1-x-y) \left(\frac{k_{1\parallel}^2}{m_e^2} x + \frac{k_{2\parallel}^2}{m_e^2} y \right), \quad (6.67)$$

где $q_\parallel = k_{1\parallel} + k_{2\parallel}$. Приведем амплитуду (6.66) к явно калибровочно инвариантной форме (6.31):

$$\mathcal{M} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_e(p_1) T_{\alpha\beta\mu\nu} \nu_e(-p_2)] f_1^{(2)\alpha\beta} f_2^{(2)\mu\nu}, \quad (6.68)$$

куда теперь войдут тензоры поля фотонов только второй поляризации:

$$f_{\alpha\beta}^{(2)} = k_{\alpha\parallel} \varepsilon_\beta^{(2)} - k_{\beta\parallel} \varepsilon_\alpha^{(2)}.$$

Выражение для тензора $T_{\alpha\beta\mu\nu}$ при этом приобретает вид

$$T_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{4\zeta}{m_e} \frac{B}{B_e} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{a^2} \left\{ (1-4xy) \tilde{\Lambda}_{\alpha\nu} \tilde{\Lambda}_{\beta\mu} + \right. \\ \left. + 4(1-x-y)(1-2x-2y) \frac{1}{q_{\parallel}^2} k_{1\parallel\alpha} \tilde{\Lambda}_{\beta\mu} k_{2\parallel\nu} \right\}. \quad (6.69)$$

Отметим, что для преобразования амплитуды процесса к форме (6.68) необходимо использовать следующие нетривиальные интегральные тождества:

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{Sx(1-2x) - Ty(1-2y)}{A^N} \equiv 0, \quad (6.70)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{Zy(1-2y) + S(1-x-y)(1-2x-2y)}{A^N} \equiv 0, \quad (6.71)$$

$$A = 1 - Zxy - (1-x-y)(Sx + Ty), \quad (6.72)$$

где Z, S, T – произвольные параметры, N – произвольное целое число, в данном случае $N = 2$. Ранее уже использовалось тождество (6.70) для случая $N = 1$ (см. (6.49)).

Выражение для амплитуды упрощается в двух предельных случаях (здесь уже подставлены векторы поляризации $\varepsilon_{1,2}^{(2)}$, см. (6.65)):

а) при низких энергиях фотонов, $\omega \lesssim m_e$

$$\mathcal{M} \simeq \frac{8\alpha}{3\pi} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \frac{\zeta}{m_e} \frac{B}{B_e} [\bar{\nu}_e(p_1) \nu_e(-p_2)] \sqrt{k_{1\parallel}^2 k_{2\parallel}^2}; \quad (6.73)$$

б) при высоких энергиях фотонов, $\omega \gg m_e$, в главном логарифмическом приближении

$$\mathcal{M} \simeq \frac{16\alpha}{\pi} \frac{G_F}{\sqrt{2}} \zeta \frac{B}{B_e} m_e^3 [\bar{\nu}_e(p_1) \nu_e(-p_2)] \frac{1}{\sqrt{k_{1\parallel}^2 k_{2\parallel}^2}} \ln \frac{\sqrt{k_{1\parallel}^2 k_{2\parallel}^2}}{m_e^2}. \quad (6.74)$$

Вычисляя стандартным путём сечения обоих процессов, $\gamma\gamma \rightarrow (\nu_e)_L(\bar{\nu}_e)_L$ и $\gamma\gamma \rightarrow (\nu_e)_R(\bar{\nu}_e)_R$, получаем, что они равны, $\sigma_{LL} = \sigma_{RR} \equiv \sigma$. В двух указанных предельных случаях выражения для сечения имеют вид

$$\sigma(\omega \lesssim m_e) \simeq \frac{2\alpha^2 G_F^2 \zeta^2}{9\pi^3} \left(\frac{B}{B_e}\right)^2 \frac{k_{1\parallel}^2 k_{2\parallel}^2}{m_e^2}, \quad (6.75)$$

$$\sigma(\omega \gg m_e) \simeq \frac{2\alpha^2 G_F^2 \zeta^2}{\pi^3} \left(\frac{B}{B_e}\right)^2 \frac{m_e^6}{k_{1\parallel}^2 k_{2\parallel}^2} \ln^2 \frac{k_{1\parallel}^2 k_{2\parallel}^2}{m_e^4}. \quad (6.76)$$

6.2.5. Проявления процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в астрофизике

Наблюдаемой величиной в астрофизике является потеря энергии из единицы объёма звезды в единицу времени, обусловленная выходом нейтрино (нейтринная излучательная способность – emissivity). Для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ она записывается в виде

$$Q = \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\omega_1/T} - 1} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{e^{\omega_2/T} - 1} \times \\ \times (\omega_1 + \omega_2) \frac{(k_1 k_2)}{\omega_1 \omega_2} \sigma(\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}), \quad (6.77)$$

где T – температура фотонного газа. В выражении (6.77) учтено, что в рассматриваемом процессе участвуют фотоны одной поляризации. Поскольку только “стерильное” (анти)нейтрино из пары (см. (6.38)) свободно вылетает из горячей и плотной звездной среды (другое, участвующее в стандартном взаимодействии, имеет малую длину пробега и поглощается), в качестве сечения подставляем $(\sigma_{LL} + \sigma_{RR})/2 = \sigma$.

а). *Случай низких температур, $T \lesssim m_e$*

В этом случае, подставляя (6.75) в (6.77), получим

$$Q_{(B)} \simeq 2.5 \cdot 10^{13} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{ с}} \left(\frac{\zeta}{0.013}\right)^2 \left(\frac{B}{B_e}\right)^2 \left(\frac{T}{m_e}\right)^{11}. \quad (6.78)$$

Сравним эту величину со вкладами в нейтринную излучательную способность за счёт других механизмов в процессе $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$, обсуждавшихся в данной главе. Например, для вклада за счёт ненулевой массы нейтрино в работе [96] получено

$$Q_{(m_\nu)} \simeq 0.4 \cdot 10^5 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{ с}} \left(\frac{m_\nu}{1 \text{ эВ}}\right)^2 \left(\frac{T}{m_e}\right)^{11}. \quad (6.79)$$

Подставляя сечение, найденное с учётом нелокальности слабого взаимодействия [99], в выражение (6.77), находим

$$Q_{(\text{nloc})} \simeq 10 \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{ с}} \left(\frac{T}{m_e} \right)^{13}. \quad (6.80)$$

Видно, что для $B \gtrsim B_e$, даже в случае очень малого смешивания $\zeta \sim 10^{-5}$, индуцированный полем механизм реакции $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ доминирует над всеми другими механизмами.

б). Случай высоких температур, $T \gg m_e$

В случае высоких температур, подставляя (6.76) в (6.77), получим

$$Q_{(B)} \simeq 0.4 \cdot 10^{12} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{ с}} \left(\frac{\zeta}{0.013} \right)^2 \left(\frac{B}{B_e} \right)^2 \left(\frac{T}{m_e} \right)^3 \ln^5 \frac{T}{m_e}. \quad (6.81)$$

Для численной оценки рассмотрим взрыв сверхновой с генерацией очень сильного магнитного поля $B \sim 10^3 B_e$ [27, 28, 33, 34], с температурой $T \sim 35$ МэВ, типичной для коры сверхновой [1], и $V \sim 10^{19} \text{ см}^3$. Для вклада рассматриваемого индуцированного полем процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в нейтринную светимость звезды (luminosity) получим

$$L \sim 10^{45} \frac{\text{эрг}}{\text{сек}} \left(\frac{\zeta}{0.013} \right)^2. \quad (6.82)$$

Эта величина оказывается малой по сравнению с типичной нейтринной светимостью сверхновой 10^{52} эрг/с . Тем не менее при напряжённости поля $B \gtrsim B_e$ этот механизм может доминировать над другими обсуждавшимися в литературе механизмами процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ по вкладу в нейтринную испускательную способность замагниченной звезды.

Как уже отмечалось выше, амплитуда (6.64) с векторной и аксиальной вершинами, $\Gamma_3 = V, A$, не содержит линейно растущего с полем вклада в пределе сильного поля, $eB \gg k_{\perp}^2, k_{\parallel}^2$. Это означает, что амплитуды как для процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ со стандартным $\nu\nu e e$ -взаимодействием, так и для расщепления фотона $\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ не зависят от поля в этом пределе. Отметим также, что нейтрино, рождающиеся в стандартном взаимодействии, за счет такого же взаимодействия интенсивно поглощаются горячей и плотной звездной средой и, таким образом, не могут давать вклада в остывание центральной области взрывающейся сверхновой.

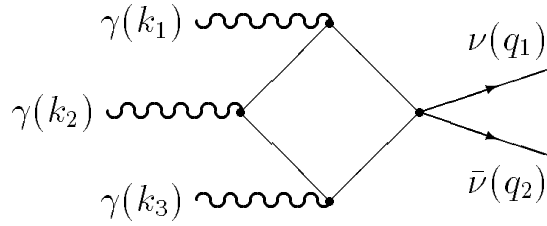


Рис. 6.6. Диаграмма Фейнмана для процесса $\gamma + \gamma + \gamma \rightarrow \nu + \bar{\nu}$

6.3. Фоторождение нейтрино на ядрах в сильном магнитном поле

Как уже отмечалось, и в вакууме, и в сильном магнитном поле у процесса $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ имеется конкурирующий канал с дополнительным фотоном, $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}\gamma$, несмотря на лишний фактор α .

В работе [43] изучался, в частности, вклад в остывание звёзд от петлевого процесса фоторождения нейтринной пары на ядре

$$\gamma + Ze \rightarrow Ze + \gamma + \nu + \bar{\nu} \quad (6.83)$$

в сильном внешнем магнитном поле и сделан вывод, что вклад этого процесса может конкурировать со вкладом URCA-процессов. Таким образом, процесс (6.83) необходимо было бы учитывать при описании остывания сильно замагниченной нейтронной звезды как ещё один канал нейтринных потерь энергии.

Однако, как было показано в нашей работе [121], с учетом дисперсии фотона в сильном магнитном поле катализирующее влияние поля на процесс (6.83) значительно уменьшается. Этот эффект не был учтён в работе [43], в результате чего вклад данного процесса оказался завышен на много порядков.

Амплитуду реакции фоторождения нейтринной пары на ядре (6.83) можно получить из амплитуды процесса взаимодействия трёх фотонов и нейтринной пары, например:

$$\gamma + \gamma + \gamma \rightarrow \nu + \bar{\nu}, \quad (6.84)$$

диаграмма Фейнмана для которого изображена на рис. 6.6.

Как известно (см., например, [113]), в интенсивном магнитном поле трёхфотонные процессы вида (6.84) усилены по сравнению с соответствующими двухфотонными процессами, поскольку амплитуда процессов типа (6.84) с

векторно-аксиальным нейтринным током в пределе сильного поля линейно растёт с полем, тогда как для процессов типа $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ амплитуда с таким нейтринным током перестаёт зависеть от поля.

Амплитуда процесса (6.84) в сильном магнитном поле может быть представлена в следующей ковариантной форме [113]:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & -\frac{8e^3 G_F eB m_e^2}{\sqrt{2}\pi^2} (\varepsilon_1 \tilde{\varphi} k_1) (\varepsilon_2 \tilde{\varphi} k_2) (\varepsilon_3 \tilde{\varphi} k_3) \times \\ & \times [C_V (j \tilde{\varphi} k_4) + C_A (j \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} k_4)] I(k_1, k_2, k_3), \end{aligned} \quad (6.85)$$

где C_V , C_A – векторная и аксиальная константы эффективного $\nu e e$ -лагранжиана (6.1), $\varepsilon_{1,2,3}$ и $k_{1,2,3}$ – 4-векторы поляризации и 4-импульсы фотонов, $j_\alpha = [\bar{\nu}(q_1) \gamma_\alpha (1 + \gamma_5) \nu(-q_2)]$ – фурье-образ нейтринного тока, $k_4 = q_1 + q_2$ – 4-импульс нейтринной пары.

Формфактор $I(k_1, k_2, k_3)$ имеет вид трёхкратного интеграла по фейнмановским переменным:

$$\begin{aligned} I(k_1, k_2, k_3) = & \frac{1}{D} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y dz \left\{ \frac{a(k_1, k_2, k_3)}{[m_e^2 - b(k_1, k_2, k_3)]^3} + \right. \\ & \left. + \{k_1 \leftrightarrow k_2\} + \{k_2 \leftrightarrow k_3\} \right\}. \end{aligned} \quad (6.86)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} D = & k_1^2(k_2 k_3) + k_2^2(k_1 k_3) + k_3^2(k_1 k_2) + 2(k_1 k_2)(k_1 k_3) + \\ & + 2(k_1 k_2)(k_2 k_3) + 2(k_1 k_3)(k_2 k_3), \end{aligned} \quad (6.87)$$

$$a(k_1, k_2, k_3) = k_1^2(1-x)^2 - k_2^2 y(1-y) + k_3^2 z^2 + \quad (6.88)$$

$$\begin{aligned} & + (k_1 k_2)(1-2x)(1-y) + (k_1 k_3)[1-x-z(1-2x)] - (k_2 k_3)y(1-2z), \\ b(k_1, k_2, k_3) = & k_1^2 x(1-x) + k_2^2 y(1-y) + k_3^2 z(1-z) + \quad (6.89) \\ & + 2(k_1 k_2)(1-x)y + 2(k_1 k_3)(1-x)z + 2(k_2 k_3)(1-y)z. \end{aligned}$$

В формулах (6.87)–(6.89) под скалярными произведениями вида $(k_i k_j)$ понимаются свертки типа $(k_i \tilde{\varphi} \tilde{\varphi} k_j)$.

В случае низких энергий фотонов, $\omega_{1,2,3} \ll m_e$, интеграл (6.86) легко вычисляется и равен

$$I(k_1, k_2, k_3) \simeq \frac{1}{60 m_e^8}. \quad (6.90)$$

При этом амплитуда (6.85) с учетом (6.90) соответствует эффективному локальному лагранжиану $\gamma\gamma\gamma\nu\bar{\nu}$ – взаимодействия:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{eff} = & -\frac{e^3 G_F e B}{45 \sqrt{2} \pi^2 m_e^6} \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x_\beta} \tilde{\varphi}_{\alpha\beta} \right)^3 \times \\ & \times \frac{\partial}{\partial x_\sigma} [\bar{\nu} \gamma^\rho (1 + \gamma_5) \nu] [C_V \tilde{\varphi}_{\rho\sigma} + C_A (\tilde{\varphi} \tilde{\varphi})_{\rho\sigma}]. \end{aligned} \quad (6.91)$$

Отметим, что $\gamma\gamma\gamma\nu\bar{\nu}$ -взаимодействие в пределе низких энергий изучалось ранее в работе [113], однако полученный там лагранжиан завышен в 2 раза.

Анализируя амплитуду (6.85) по размерности на предмет зависимости от характерной энергии фотонов $|k_1| \sim |k_2| \sim |k_3| \sim \omega$ в предельных случаях малых и больших энергий, можно видеть существенное различие, а именно при переходе от малых значений ω к большим рост амплитуды с энергией вида $\sim \omega^5$ заменяется на падение по закону $\sim \omega^{-3}$.

При вычислении амплитуды процесса (6.83) на ядре в локальном пределе эффективного $\gamma\gamma\gamma\nu\bar{\nu}$ -взаимодействия (6.91) необходимо учитывать влияние сильного магнитного поля на дисперсионные свойства фотонов, как реальных, так и виртуального. Это влияние, как мы покажем, имеет решающее значение. Напомним, что в сильном магнитном поле в процессе (6.83) участвуют фотоны только второй поляризации из двух возможных поляризаций (3.10).

Для виртуального фотона вместо вакуумного выражения для пропагатора $\sim q^{-2}$ необходимо использовать пропагатор с учётом поляризации вакуума в магнитном поле

$$D^{(B)}(q_\parallel^2, q_\perp^2) = \frac{1}{q^2 - \Pi(q_\parallel^2)}, \quad (6.92)$$

здесь $q_\parallel^2 = q_0^2 - q_z^2$, $q_\perp^2 = q_x^2 + q_y^2$, $q^2 = q_\parallel^2 - q_\perp^2$ (магнитное поле направлено вдоль оси z), $\Pi(q_\parallel^2)$ – поляризационный оператор фотона в поле, который в случае сильного поля, $B \gg B_e$, и в приближении $|q_\parallel^2| \ll m_e^2$ принимает простой вид [80]:

$$\Pi(q_\parallel^2) \simeq -\frac{\alpha}{3\pi} \frac{B}{B_e} q_\parallel^2. \quad (6.93)$$

Удобно ввести безразмерный параметр, которым будет определяться влияние поля во всех последующих выражениях:

$$\beta = \frac{\alpha}{3\pi} \frac{B}{B_e}. \quad (6.94)$$

При величинах поля $10^3 B_e$ и $10^4 B_e$ параметр β принимает значения соответственно 0.77 и 7.7, то есть малым считаться не может. С учётом (6.93), (6.94), а также принимая во внимание, что для виртуального фотона, связанного с неподвижным ядром, $q_0 = 0$, пропагатор (6.92) можно переписать в виде

$$D^{(B)} \simeq - \frac{1}{q_{\perp}^2 + (1 + \beta)q_z^2}. \quad (6.95)$$

В свою очередь, реальные фотоны, участвующие в процессе (6.83), также находятся под воздействием сильного магнитного поля, приводящим к перенормировке волновых функций:

$$\varepsilon_{\alpha} \longrightarrow \sqrt{\mathcal{Z}} \varepsilon_{\alpha}, \quad (6.96)$$

где перенормировочный множитель \mathcal{Z} с учетом (6.93) принимает вид

$$\mathcal{Z} = \left(1 - \frac{d\Pi(q_{\parallel}^2)}{dq_{\parallel}^2} \right)^{-1} = \frac{1}{1 + \beta}. \quad (6.97)$$

Кроме того, существенно меняются кинематические свойства фотонов. Уравнение дисперсии фотона $k^2 - \Pi(k_{\parallel}^2) = 0$ с учётом (6.93) и (6.94) переписывается в виде $\omega^2 = \mathbf{k}^2(1 + \beta \cos^2 \theta)/(1 + \beta)$, и элемент импульсного пространства можно представить в форме

$$d^3k = (1 + \beta) \omega^2 d\omega dy d\varphi, \quad y = \cos \theta \sqrt{1 + \beta} / \sqrt{1 + \beta \cos^2 \theta},$$

где θ, φ – полярный и азимутальный углы.

Используя эффективный лагранжиан (6.91), учитывая влияние магнитного поля на свойства фотонов (6.92)–(6.97) и подставляя векторы поляризации реальных фотонов

$$\varepsilon_{\alpha}^{(2)} = \sqrt{\mathcal{Z}} \frac{(\tilde{\varphi}k)_{\alpha}}{\sqrt{k_{\parallel}^2}}, \quad (6.98)$$

амплитуду процесса (6.83) можно представить в следующем виде:

$$\mathcal{M} = \frac{32\pi\alpha Z G_F}{5\sqrt{2}m_e^4} \frac{\beta}{1 + \beta} \frac{2m_N q_z \sqrt{k_{1\parallel}^2 k_{2\parallel}^2}}{q_{\perp}^2 + (1 + \beta)q_z^2} [C_V(j\tilde{\varphi}k_4) + C_A(j\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}k_4)], \quad (6.99)$$

где m_N – масса ядра, q – импульс, переданный ядру, $q^\alpha = (0, \mathbf{q})$. Наше выражение для амплитуды (6.99) существенно отличается от результата работы [43], где не учтено влияние сильного магнитного поля на дисперсионные свойства фотонов.

Имеющая важное в астрофизических приложениях значение величина – энергия, уносимая нейтрино из единицы объёма звезды за единицу времени. Она определяется через амплитуду процесса (6.83) следующим образом:

$$Q_\nu = \frac{(2\pi)^4 n_N}{2m_N} \int |\mathcal{M}|^2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \delta^4(k_1 - k_2 - q_1 - q_2 - q) \times \quad (6.100)$$

$$\times \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} f(\omega_1) \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} [1 + f(\omega_2)] \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon_1} \frac{d^3 q_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon_2} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3 2m_N},$$

где n_N – концентрация ядер, ε_1 и ε_2 – энергии нейтрино и антинейтрино, $f(\omega) = [\exp(\omega/T) - 1]^{-1}$ – функция плотности равновесного фотонного газа при температуре T .

Подставляя амплитуду (6.99), для объёмной плотности мощности излучения Q_ν находим следующее выражение:

$$Q_\nu = \frac{8(2\pi)^9}{225} Z^2 \alpha^2 G_F^2 m_e^6 n_N \left(\frac{T}{m_e} \right)^{14} J(\beta). \quad (6.101)$$

Зависимость от полевого параметра (6.94) определяется интегралом

$$J(\beta) = \beta^2 \int_{-1}^1 du (1 - u^2) \int_{-1}^1 dv (1 - v^2) \int_0^1 ds s^3 (1 - s)^8 \int_0^1 dr r^2 \times \quad (6.102)$$

$$\times \int_{-1}^1 dx [u - sv - (1 - s)rx]^2 (1 - r^2 x^2) \times$$

$$\times \left[\overline{C_V^2} (1 - r^2) + \overline{C_A^2} r^2 (1 - x^2) \right] \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_2}{2\pi} \frac{1}{[F(\beta)]^2},$$

где

$$F(\beta) = (1 + \beta) \left\{ 1 - u^2 + s^2(1 - v^2) - 2s\sqrt{1 - u^2}\sqrt{1 - v^2} \cos \varphi_1 + \right. \quad (6.103)$$

$$+ [u - sv - (1 - s)rx]^2 \left. \right\} - 2\sqrt{1 + \beta}(1 - s)r\sqrt{1 - x^2} \times$$

$$\times \left[\sqrt{1 - u^2} \cos \varphi_2 - s\sqrt{1 - v^2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \right] + (1 - s^2)r^2(1 - x^2).$$

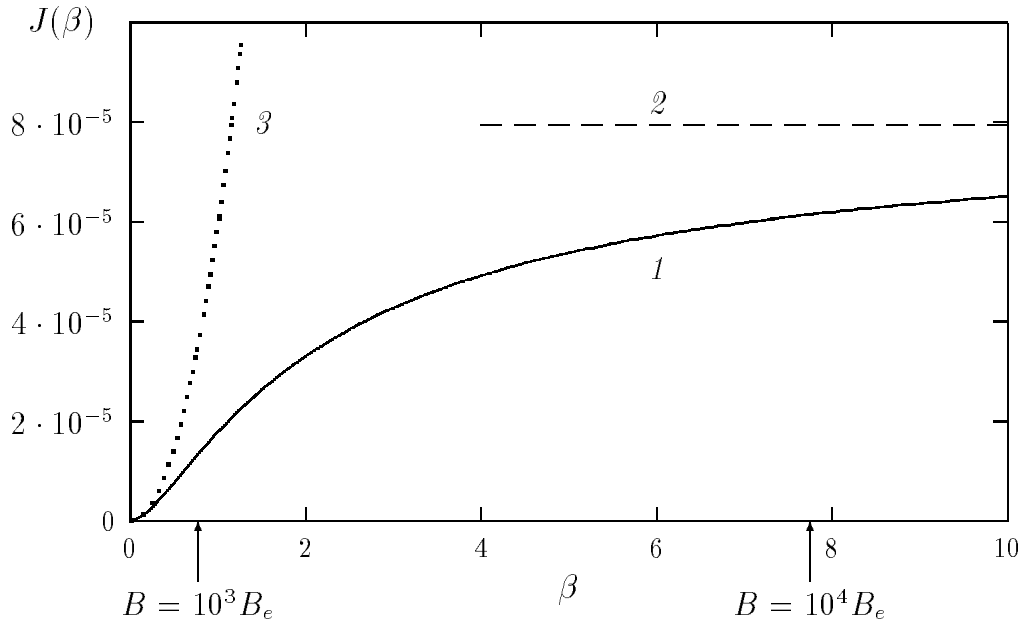


Рис. 6.7. Зависимость функции $J(\beta)$ от полевого параметра β : линия 1; линией 2 показана асимптотика функции при больших значениях β , $J(\beta) \rightarrow 8 \cdot 10^{-5}$; линия 3 изображает зависимость $\sim \beta^2$, которая имела бы место без учета влияния магнитного поля на дисперсию фотонов

Стоящие под знаком интеграла (6.102) константы $\overline{C_V^2} = 0.93$ и $\overline{C_A^2} = 0.75$ есть результат суммирования по всем каналам рождения нейтрино типов ν_e, ν_μ, ν_τ . Результат численного вычисления интеграла (6.102) представлен на рис. 6.7.

Видно, что учёт влияния сильного магнитного поля на дисперсию фотона принципиально изменяет зависимость мощности нейтринных потерь энергии от величины поля, а именно вместо квадратичной зависимости происходит выход на константу. С учётом этого для величины Q_ν находим верхнюю границу в асимптотически сильном поле

$$Q_\nu \lesssim 2.3 \cdot 10^{27} \left(\frac{T}{m_e} \right)^{14} \left\langle \frac{Z^2}{A} \right\rangle \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right) \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{с}}, \quad (6.104)$$

где Z, A – зарядовое и массовое числа ядра, усреднение производится по всем ядрам, $\rho_0 = 2.8 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ – характерная ядерная плотность, ρ – средняя плотность звезды. Сравнение результата (6.104) с мощностью нейтринных потерь энергии за счет стандартного канала – модифицированного URCA-процесса [308, 309]

$$Q_\nu(\text{URCA}) \sim 10^{27} \left(\frac{T}{m_e} \right)^8 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} \frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{с}}, \quad (6.105)$$

на первый взгляд, подтверждает вывод работы [43] о конкуренции рассматриваемого процесса (6.83) с URCA-процессами. Однако более тщательный анализ формулы (6.104) показывает, что это утверждение является неверным. Дело в том, что возникший в формуле (6.101) и в аналогичных формулах работы [43] большой числовой множитель происходит от интеграла по энергиям начального фотона ω_1 ($x = \omega_1/T$):

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{13} dx}{e^x - 1} = 13! \zeta(14) = \frac{(2\pi)^{14}}{24} \simeq 6.2 \cdot 10^9. \quad (6.106)$$

Очевидно, однако, что интеграл (6.106) набирает свою величину в области значений аргумента $x \sim 10 \div 20$ ($\omega_1 \sim (10 \div 20) T$). Следовательно, поскольку амплитуда (6.99) процесса получена в приближении $\omega \lesssim m_e$, следующее из нее выражение для мощности нейтринных потерь энергии может быть справедливым при температурах фотонного газа $T \lesssim (1/10) m_e$, но оно заведомо неприменимо при температурах $T \sim m_e$. Таким образом, предположение, сделанное в работе [43], что фактор $(T/m_e)^{14}$ можно брать порядка единицы, является ошибочным. С учетом указанной области применимости получаем, что $(T/m_e)^{14} \lesssim 10^{-14}$.

Таким образом, фоторождение нейтрино на ядрах не может конкурировать с URCA-процессами в сколь угодно сильном магнитном поле.

Глава 7

Процессы с участием слабо взаимодействующих псевдоскалярных частиц во внешней активной среде

Принято считать, что в астрофизических процессах, имеющих характер катаклизма (взрыв сверхновой, слияние нейтронных звёзд), определяющую роль играют нейтринные процессы. Следует заметить, что существенное значение при описании таких катаклизмов могут также иметь исследования процессов с участием не только нейтрино, но и других слабо взаимодействующих частиц. В качестве таких частиц могли бы выступать лёгкие и даже строго безмассовые голдстоуновские и псевдоголдстоуновские бозоны, возникающие при нарушении глобальной симметрии на некотором энергетическом масштабе.

Как известно, в простейшем варианте теории электрослабого взаимодействия Глэшоу–Вайнберга–Салама требуется существование всего одного дублета хиггсовских частиц, спонтанно нарушающих симметрию от электрослабой группы $SU(2) \times U(1)$ до электромагнитной группы $U_{em}(1)$. Три голдстоуновских степени свободы идут на приобретение масс калибровочными бозонами (механизм Хиггса). Таким образом, наблюдаемым оказывается лишь один нейтральный хиггсовский бозон. В действительности же, нет никаких причин считать, что хиггсовский сектор столь беден. Наоборот, имеются основания предполагать, что если скалярные бозоны существуют вообще, то число их может быть значительным. При богатом содержании хиггсовского сектора возможна ситуация, когда одна или несколько гол-

дстоуновских степеней свободы не поглощаются механизмом Хиггса и проявляются как физические безмассовые частицы.

Стандартная модель в настоящее время является наиболее удачной теорией, описывающей физику электрослабых взаимодействий. Однако, несмотря на успехи в объяснении экспериментальных данных, она оставляет нерешёнными целый ряд проблем, таких как существование нескольких фермионных поколений, различие масс у частиц, принадлежащих разным поколениям. Возможно, эти вопросы могли бы быть решены путём введения дополнительной *горизонтальной симметрии* между поколениями фермионов. При спонтанном нарушении такой симметрии в теории возникает голдстоуновский (или сверхлегкий, псевдоголдстоуновский) бозон – фамилон, имеющий недиагональное по ароматам взаимодействие с лептонами и кварками.

В общем случае взаимодействие фамилона с фермионами описывается лагранжианом вида (см., например, [310])

$$\mathcal{L} = \sum_{i,j} \frac{c_{ij}}{v_\phi} (\bar{\Psi}_i \gamma_\alpha (g_v + g_a \gamma_5) \Psi_j) \partial^\alpha \Phi + h.c., \quad (7.1)$$

где c_{ij} – безразмерные факторы порядка единицы, зависящие от конкретной модели, v_ϕ – масштаб нарушения горизонтальной симметрии, Φ – поле фамилона, Ψ_i – оператор фермионного поля, индексы i и j нумеруют аромат фермионов, $g_a^2 + g_v^2 = 1$.

Современные экспериментальные данные определяют нижнюю границу масштаба нарушения симметрии на уровне [304]:

$$v_\phi > (3.1 - 9.9) \times 10^9 \text{ ГэВ}. \quad (7.2)$$

В частном случае диагонального по ароматам взаимодействия ($i = j$), в силу сохранения векторного тока, лагранжиан (7.1) преобразуется к виду

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{c_i}{v_\phi} (\bar{\Psi}_i \gamma_\alpha \gamma_5 \Psi_i) \partial^\alpha \Phi, \quad (7.3)$$

где c_i – безразмерные модельно зависимые параметры порядка единицы. Следует отметить, что вне зависимости от конкретных особенностей коэффициенты c_i удовлетворяют условию

$$\sum_i c_i e_i^2 = 0. \quad (7.4)$$

Здесь e_i – заряд фермиона, сумма производится по всем фермионам. Условие (7.4) иллюстрирует тот факт, что взаимодействие фамилонa свободно от аномалии Адлера, а значит, фамилон не взаимодействует с фотоном в вакууме в локальном пределе, в отличие, например, от аксиона, который содержит взаимодействие с фотонами из-за наличия аномалии Адлера в трёхточечной петлевой $a\gamma\gamma$ -амплитуде [1, 311].

Поиск процессов распада с испусканием фамилонa является одним из важных направлений экспериментальной физики на протяжении нескольких последних десятилетий [312]. В частности, в ПИЯФ разработана методика эксперимента по поиску безнейтринного распада мюона на позитрон и фамилон. Метод основан на анализе высокоэнергетической части спектра позитронов от распада мюона по основному каналу $\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu}$. Эксперимент будет проводиться в мюонном пучке фазотрона ЛЯП ОИЯИ на установке ФАМИЛОН. Ближайшая задача этих физических исследований – получение первой прямой экспериментальной оценки на уровне

$$R = \frac{W(\mu \rightarrow e\phi)}{W(\mu \rightarrow e\nu\bar{\nu})} < 10^{-5}.$$

В дальнейшем развитие эксперимента связано с разработкой нового оборудования, что, как предполагается, позволит исследовать данный процесс на уровне $R < 3 \times 10^{-8}$.

Изучение физических следствий существования слабо взаимодействующих частиц представляет интерес не только в теоретических аспектах физики, но также и в астрофизических и космологических приложениях. Кроме того, исследования подобного рода представляют собой астрофизический метод получения ограничений на параметры частиц (такие как масса и константа связи). Суть этого метода состоит в следующем. Предполагая существование каких-либо гипотетических частиц, рассматривают различные процессы их излучения, происходящие в звёздах. Слабая связь голдстоуновских частиц с полями материи приводит к тому, что при характерных звёздных плотностях плазмы они имеют очень большие длины свободного пробега, превышающие размеры самих звёзд. Поэтому практически все лёгкие голдстоуновские бозоны, рождённые внутри звезды, свободно ее покидают. При этом уносится некоторая энергия, что, вообще говоря, влияет на время жизни и процесс тепловой эволюции звезды. С другой стороны, теоретически рассчитав вклад в полную светимость звезды за счет излучения гипотетических “невидимых” частиц и полагая затем, что этот вклад не влияет на стандартный сценарий эволюции звезды, получают упомянутые оценки. Впервые подобного рода рассуждения применялись в контексте физики ней-

трино. Применительно к гипотетическим частицам астрофизический метод впервые использовался в [313] для оценки константы связи лёгких хиггсовских бозонов.

Для фамилона наиболее сильные астрофизические ограничения на масштаб нарушения горизонтальной симметрии следуют из анализа времени жизни звёзд, находящихся на стадии гелиевого горения. Полученная оценка масштаба нарушения симметрии составляет

$$v_\phi > 7 \times 10^9 \text{ ГэВ}.$$

Анализ светимости нейтронных звёзд и белых карликов дает близкое ограничение:

$$v_\phi > (1.1 - 2.0) \times 10^9 \text{ ГэВ}.$$

Востребованность исследований процессов с участием фамилона в замагниченной плазме обусловлена возможными приложениями в современной астрофизике и космологии. В частности, процессы излучения фамилонa, наряду с нейтрино, могут являться новыми каналами потери энергии звёздными объектами. Например, при взрыве сверхновой, вследствие высокой плотности ядра, нейтрино могут излучаться только с поверхности так называемой нейтриносферы, в то время как фамилон, в силу слабого взаимодействия с веществом, может уносить энергию из всего объёма ядра сверхновой. Таким образом, несмотря на существенно более низкую вероятность излучения фамилонa, его вклад в потери энергии взрывающейся звезды может быть сравним с потерями на нейтринное излучение.

Так, в работах [314,315] рассматривались процессы излучения фамилонa плотной замагниченной плазмой $e^- \rightarrow e^- \phi$, $e^- \rightarrow \mu^- \phi$, которые запрещены в вакууме законом сохранения энергии-импульса, но становятся возможными в замагниченной плазме вследствие нетривиальной кинематики частиц.

Предполагалась такая физическая ситуация, когда типичная энергия электронов плазмы является доминирующим параметром задачи

$$\mu^2, T^2 \gg eB \gg m_e^2, \quad (7.5)$$

где μ и T – химический потенциал и температура плазмы соответственно. Именно такие условия могли бы реализоваться, например, в ядре сверхновой, где по современным представлениям химический потенциал плазмы $\mu \sim 500 m_e$, температура плазмы $T \sim 70 m_e$ [1]. В этом случае даже очень сильные магнитные поля с напряжённостью до $B \sim 10^{17}$ Гс удовлетворяют условию (7.5) и, следовательно, могут рассматриваться как относительно

слабые. В условиях (7.5) электроны плазмы занимают большое число уровней Ландау.

Действительно, зная энергию ультрарелятивистского электрона в магнитном поле на N -м уровне Ландау

$$E \simeq \sqrt{p_z^2 + 2eBN},$$

можно оценить максимальный номер уровня Ландау:

$$N_{max} \simeq \frac{E^2}{2eB} \sim \frac{\mu^2}{2eB} \gg 1.$$

В физических условиях (7.5), когда возбуждается большое число уровней Ландау, исследование квантовых процессов эффективно сводится к вычислениям в постоянном скрещенном поле ($\mathbf{B} \perp \mathbf{E}$, $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|$), техника расчётов в котором хорошо известна. Это обусловлено тем фактом, что произвольное, относительно слабое, медленно меняющееся внешнее электромагнитное поле в системе покоя ультрарелятивистского электрона будет выглядеть близким к скрещенному полю. При этом результат в лидирующем приближении реально зависит только от одного динамического инварианта $[e^2(pFFp)]^{1/2}$, где p_μ – 4-импульс частицы, $F_{\mu\nu}$ – тензор электромагнитного поля.

Особый интерес представляет процесс синхротронного излучения фамилон-электронами плазмы. Это обусловлено тем, что в замагниченной плазме фамилон может взаимодействовать с электронами не только на древесном уровне, но также иметь и индуцированное взаимодействие через промежуточный фотон. В результате во внешней активной среде (плазма + поле) наряду с каналом за счёт прямого фамилон-электронного взаимодействия (см. рис. 7.1 (а)) открывается канал излучения фамилон-электронами плазмы через виртуальный плазмон в качестве промежуточного состояния, $e^- \rightarrow e^- \gamma_{\rightarrow \phi}^*$, изображённый диаграммой (b) на рис. 7.1.

Авторами получена вероятность процесса прямого синхротронного излучения фамилон-электронами плазмы:

$$W_{(e^- \rightarrow e^- \phi)} = \frac{c_e^2 m_e^4}{2\pi v_\phi^2 p_0} \int_0^\chi \frac{d\chi_q}{(\chi - \chi_q)^{1/3}} \left(\frac{\chi_q}{\chi} \right)^{4/3} \times \quad (7.6)$$

$$\times (-\text{Ai}'(z)) (1 - f(p', \mu)),$$

где $q^\alpha = (\omega, \mathbf{k})$ – 4-импульс фамилон-электрона, $p^\alpha = (p_0, \mathbf{p})$ и $p'^\alpha = (p'_0, \mathbf{p}')$ – 4-векторы импульса, фиксирующие состояние начального и конечного элек-

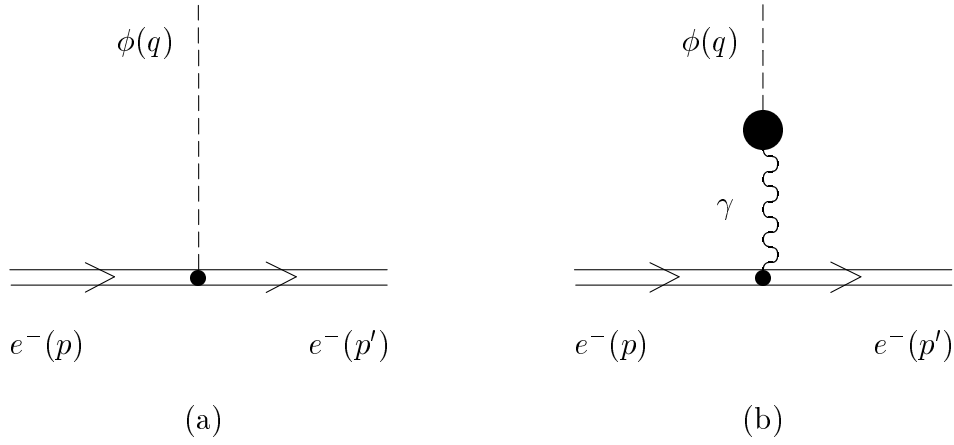


Рис. 7.1. Диаграммы, описывающие излучение фамилона электроном в замагниченной плазме

тронов в скрещенном поле, $\text{Ai}(z)$ – функция Эйри:

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dx \cos \left(zx + \frac{x^3}{3} \right), \quad (7.7)$$

$f(p', \mu)$ – функция распределения конечного электрона, учитывающая наличие плазмы, которая может быть записана в инвариантной форме:

$$f(p', \mu) = \frac{1}{e^{((p'u) - \mu)/T) + 1}}, \quad (7.8)$$

где u^α – 4-вектор скорости среды, который в системе покоя плазмы имеет вид $u^\alpha = (1, \mathbf{0})$.

В выражении (7.6) также введены динамические параметры:

$$z = \left(\frac{\chi_q}{\chi(\chi - \chi_q)} \right)^{2/3}, \quad \chi_q^2 = \frac{e^2(qFFq)}{m_e^6}, \quad \chi^2 = \frac{e^2(pFFp)}{m_e^6}. \quad (7.9)$$

Результат (7.6) с точностью до обозначений воспроизводит известную вероятность процесса синхротронного излучения аксиона в слабом магнитном поле с напряженностью $B \ll B_e$. Однако результат (7.6) не связан ограничением $B \ll B_e$, а справедлив при более мягких условиях (7.5).

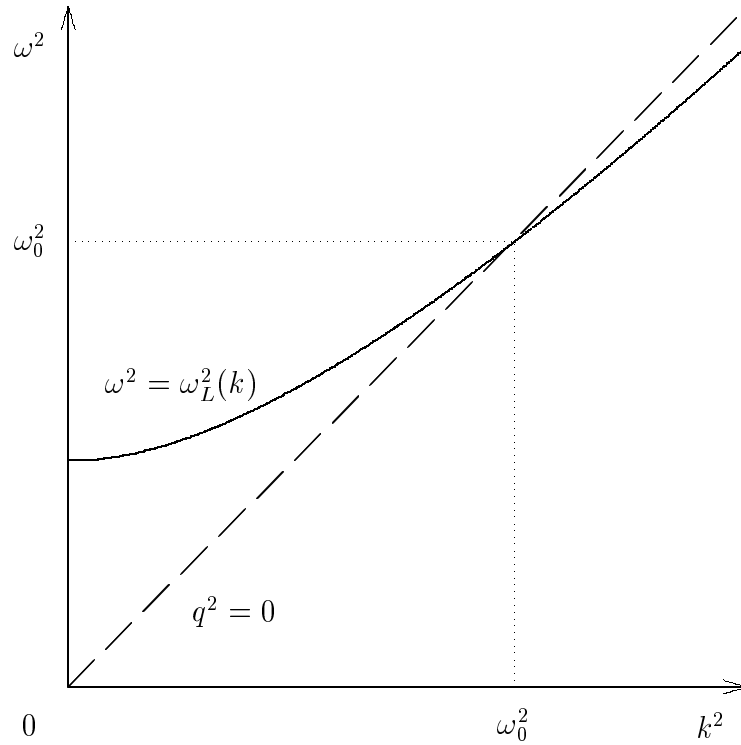


Рис. 7.2. Дисперсионные кривые продольного плазмона $\omega^2 = \omega_L^2(k)$ (сплошная линия) и фамилона $\omega^2 = k^2$ (пунктирная линия)

Что касается вероятности процесса излучения фамилона через промежуточный плазмон, то показано, что, несмотря на более высокий порядок теории возмущений, амплитуда процесса излучения фамилона через виртуальный плазмон может быть одного порядка с древесной, особенно в случае, когда виртуальный плазмон продольный. Это обусловлено тем фактом, что дисперсионные кривые фамилона и продольного плазмона пересекаются при некоторой энергии фамилона $\omega = \omega_0$ (рис. 7.2), что, в свою очередь, приводит к резонансному характеру излучения фамилона электронами плазмы. При этом оказывается, что в случае ультрарелятивистской плазмы вклад от поперечного плазмона пренебрежимо мал.

В работах [314, 315] вычислена вероятность процесса $e^- \rightarrow e^- \gamma_{\rightarrow \phi}^*$:

$$W_{(e^- \rightarrow e^- \gamma_{\rightarrow \phi}^*)} \simeq \frac{\alpha^2 c_e^2 (eB)^2}{6\pi^3 v_\phi^2 E} \cos^2 \theta \frac{(E - \omega_0)}{\omega_0 \gamma} [1 - f(E - \omega_0, \mu)], \quad (7.10)$$

где θ – угол между вектором импульса электрона и направлением магнитного поля, $f(E - \omega_0, \mu)$ – функция распределения (7.8) в системе покоя плазмы, γ – безразмерный параметр, определяющий ширину резонанса

$$\gamma = \frac{2\alpha \mu^2}{3 \omega_0^2}. \quad (7.11)$$

Таким образом, полная вероятность процесса синхротронного излучения фамилонa электронами плазмы через виртуальный плазмон характеризуется двумя параметрами, зависящими от состояния плазмы, а именно безразмерной шириной резонанса γ и энергией фамилонa ω_0 , при которой дисперсионные кривые фамилонa и продольного плазмона пересекаются. Энергия ω_0 может быть найдена из совместного решения дисперсионных уравнения фамилонa и продольного плазмона. В случае вырожденной ультрарелятивистской плазмы получаем

$$\omega_0^2 \simeq \frac{4\alpha}{\pi} \mu^2 \left(\ln \frac{2\mu}{m_e} - 1 \right).$$

В случае горячей плазмы ω_0^2 определяется выражением

$$\omega_0^2 \simeq \frac{4\pi\alpha}{3} T^2 \left(\ln \frac{4T}{m_e} + \frac{1}{2} - \gamma_E + \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} \right),$$

где γ_E – константа Эйлера, $\gamma_E \simeq 0.577$, $\zeta'(2)/\zeta(2) \simeq -0.570$.

Кроме процесса синхротронного излучения фамилонa электронами плазмы, возможен также процесс излучения фамилонa в переходе $e^- \rightarrow \mu^- \phi$, обусловленный недиагональным взаимодействием фамилонa с фермионами (см. рис. 7.3), который также может быть рассмотрен в качестве возможного дополнительного источника фамилонной светимости замагниченной плотной плазмы. Этот процесс изучался ранее [316, 317] в условиях вырожденной плазмы в пределе сильного магнитного поля, когда $eB \gg \mu^2 - m_\mu^2$, так что мюоны рождались только на основном уровне Ландау. В частности, в работах [316, 317] было показано, что фамилонная светимость в рассматриваемых авторами условиях оказывается конкурирующей с нейтринной светимостью, обусловленной магнитотормозным излучением электронами нейтринных пар. Следует отметить, однако, что магнитотормозное излучение нейтрино не определяет реальную светимость остатка сверхновой – нейтронной звезды. В действительности, реальная светимость вышеуказанных астрофизических объектов обусловлена модифицированными URCA-процессами [318].

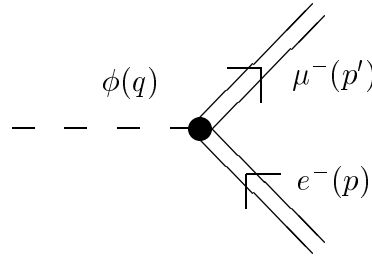


Рис. 7.3. Диаграмма, описывающая излучение фамилона в переходе $e^- \rightarrow \mu^- \phi$ во внешнем поле

В отличие от работ [316, 317] авторами [314, 315] рассматривалась физическая ситуация относительно слабого магнитного поля, которая могла бы иметь место, например, в ядре сверхновой, где

$$\mu^2 - m_\mu^2 \gg eB.$$

При этом условии мюоны, так же как и электроны, занимают много уровней Ландау.

Вычисления проводились в пренебрежении массой электрона и статистическим фактором мюонов, в предположении, что в ядре сверхновой концентрация термализованных мюонов мала.

Вероятность процесса $e^- \rightarrow \mu^- \phi$, вычисленная в условиях (7.5), имеет вид

$$W_{(e^- \rightarrow \mu^- \phi)} = \frac{c_{\mu e}^2 m_\mu^4}{8\pi v_\phi^2 p_0} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_0^\chi \frac{\chi_q^2 d\chi_q}{r \chi^2 (\chi - \chi_q)} \times \quad (7.12)$$

$$\times [\text{Ai}^2(y) r^2 (\tau^2 + \chi^2 / \chi_q^2) + \text{Ai}'^2(y) - 4 g_a g_v \text{Ai}(y) \text{Ai}'(y) r \tau],$$

где m_μ – масса мюона, функция Эйри $\text{Ai}(y)$ определена в (7.7), её аргумент

$$y = r^2 \left(\tau^2 + \frac{\chi}{\chi_q} \right),$$

а также введены обозначения:

$$\tau = \frac{e(p\tilde{F}q)}{\chi_q m_\mu^4}, \quad r = \left(\frac{\chi_q}{2\chi(\chi - \chi_q)} \right)^{1/3}.$$

Динамические параметры χ и χ_q обезразмериваются массой мюона:

$$\chi_q^2 = \frac{e^2(qFFq)}{m_\mu^6}, \quad \chi^2 = \frac{e^2(pFFp)}{m_\mu^6}.$$

Следует отметить, что выражение для вероятности (7.12) получено в ультрарелятивистском пределе, когда массой электрона можно пренебречь.

Последнее слагаемое в квадратных скобках выражения (7.12) описывает интерференцию векторной и аксиально-векторной констант взаимодействия лагранжиана (7.1), и хотя не дает вклада в полную вероятность распада, но приводит к асимметрии вылета фамилонизации из ядра сверхновой в процессе $e^- \rightarrow \mu^- \phi$. В свою очередь, такая асимметрия могла бы быть красивым макроскопическим проявлением *нарушения лево-правой симметрии* в микромире.

Полная вероятность процесса $e^- \rightarrow \mu^- \phi$ в физических условиях относительно слабого магнитного поля в системе покоя плазмы имеет вид

$$W_{(e^- \rightarrow \mu^- \phi)} = \frac{c_{\mu e}^2 m_\mu e B}{36 \sqrt{3} \pi v_\phi^2} \sin \theta e^{-\sqrt{3}/\chi}, \quad (7.13)$$

где динамический параметр электрона в системе покоя плазмы равен

$$\chi = \frac{e B E \sin \theta}{m_\mu^3}.$$

Экспоненциальная малость вероятности (7.13) является характерной для всех процессов, запрещённых в вакууме и открывающихся в относительно слабом магнитном поле. Однако, как показывают расчеты, несмотря на экспоненциальное подавление, вероятность распада $W_{(e^- \rightarrow \mu^- \phi)}$ оказывается одного порядка с вероятностями обоих каналов процесса синхротронного излучения фамилонизации электронами плазмы. Это обусловлено тем фактом, что последние также содержат малость, связанную либо с постоянной тонкой структурой α (процесс излучения фамилонизации через виртуальный плазмон (7.10)), либо массой электрона m_e , являющейся самым малым параметром задачи (процесс излучения в модели с прямой связью фамилонизации с электронами (7.6)).

В качестве возможных астрофизических приложений в работах [314, 315] вычислена объёмная плотность плазменных потерь энергии на излучение фамилонизации в физических условиях ядра сверхновой. Результат численных оценок, проводимых при значении масштаба нарушения горизонтальной

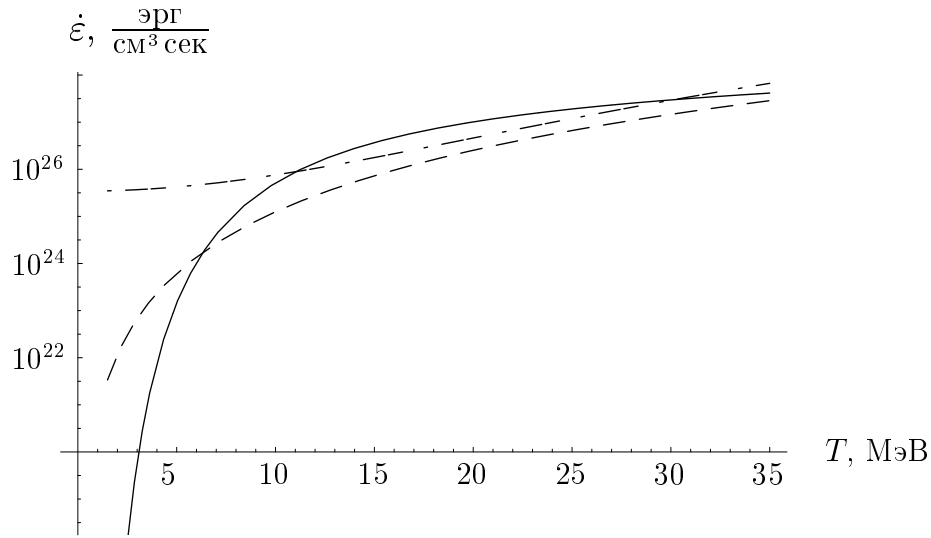


Рис. 7.4. Фамилонная светимость вырожденной плазмы ($\mu \gg T$) как функция температуры: сплошная линия соответствует процессу синхротронного излучения фамилона через виртуальный плазмон ($e^- \rightarrow e^- \gamma_{\text{и} \rightarrow \phi}^*$); пунктирная – процессу прямого синхротронного излучения фамилона ($e^- \rightarrow e^- \phi$); штрих-пунктирная – переходу $e^- \rightarrow \mu^- \phi$

симметрии $v_\phi = 3.1 \times 10^9$ ГэВ, в физических условиях, характерных для ядра сверхновой $\mu = 250$ МэВ, $T = 35$ МэВ, $B = 10^{17}$ Гс, представлен на рис. 7.4.

Сравнение фамилонной светимости с известной нейтринной светимостью при тех же условиях показывает, что на начальной стадии остывания, когда температура плазмы $T \sim 35$ МэВ, рассмотренные процессы не оказывают существенного влияния на динамику остывания звезды. Однако на более поздней стадии остывания, когда температура плазмы уменьшается до величин порядка МэВ, процесс $e^- \rightarrow \mu^- \phi$ начинает доминировать над синхротронным излучением фамилона $e^- \rightarrow e^- \phi$, $e^- \rightarrow e^- \gamma_{\text{и} \rightarrow \phi}^*$. При этом потери энергии плазмой на излучение фамилона составляют

$$\dot{\epsilon}_{(e^- \rightarrow \mu^- \phi)} \simeq 3.4 \times 10^{25} \left(\frac{\text{эрг}}{\text{см}^3 \text{с}} \right)$$

и могут быть сравнимы с потерями, обусловленными нейтринным излучением на той же стадии, $\dot{\epsilon}_\nu \sim 10^{26}$ эрг/см³с.

Представляет интерес количественная оценка асимметрии вылета фамилона по отношению к направлению магнитного поля, которая определяет силу, действующую со стороны вылетающего фамилона на остаток сверх-

новой в направлении магнитного поля. Непосредственные вычисления показали, что вклад перехода $e^- \rightarrow \mu^- \phi$ в эту асимметрию не зависит ни от химического потенциала плазмы, ни от её температуры и имеет простой вид:

$$A \simeq \frac{g_A g_V}{3} \frac{eB}{m_\mu^2}. \quad (7.14)$$

Следует отметить, что возникновение асимметрии обусловлено интерференцией векторной, g_V , и аксиально-векторной, g_A , констант лагранжиана фамилон-фермионного взаимодействия. В результате асимметрии полный импульс, уносимый фамилоном, отличен от нуля. Это, в свою очередь, приводит к “толчковой” скорости остатка сверхновой. Оценки показывают, что даже в сильных магнитных полях ($B \sim 10^{17}$ Гс) скорость остатка с массой порядка массы Солнца не превышает 120 км/с. Таким образом, интересный сам по себе, эффект асимметрии вылета фамилон в процессе $e^- \rightarrow \mu^- \phi$ не может, к сожалению, решить проблему *собственных скоростей пульсаров*.

Заключение

Вопросы, затронутые в данной монографии, относятся к актуальному научному направлению, лежащему на стыке физики плазмы, физики сверхсильных магнитных полей, квантовой теории поля, физики элементарных частиц и астрофизики. Анализ проблем физики горячей плотной замагниченной плазмы, возникающих при детальном количественном описании коллапса ядра сверхновой, определённо указывает на необходимость развития новой физики, возможно связанной с уравнением состояния ядерной или субъядерной плазмы и слабыми взаимодействиями в субъядерном режиме, а также на недостаточную исследованность фундаментальных свойств нейтрино и механизмов нейтринных взаимодействий в горячей плотной сильно замагниченной плазме или на необходимость включения в рассмотрение других, гипотетических, слабо взаимодействующих элементарных частиц.

Это научное направление, интенсивно развивающееся в течение около 40 лет, разумеется, ещё далеко от завершения. Имеются большие ожидания как в отношении дальнейшего развития теории, так и в отношении новых экспериментальных результатов.

Что касается развития теории – предсказать появление новых плодотворных идей невозможно. Однако в рамках уже развитого теоретического аппарата будут продолжаться комплексные исследования свойств горячей плотной плазмы, состоящей из электрон-позитронной, протонной и нуклонной компонент, при экстремальных значениях физических параметров, реализующихся в центральной части массивных звезд и одновременно соответствующих характеристикам ядерного или субъядерного вещества. Среди факторов, воздействующих на астрофизическую плазму и требующих изучения, важное место занимают сильное магнитное поле и мощный поток нейтрино. В частности, должны быть исследованы следующие вопросы:

1. Влияние плазмы и магнитного поля на физические характеристики нейтрино.
2. Нейтринное поглощение и излучение плазмой в магнитном поле.

3. Совместное влияние плазмы, магнитного поля и нейтринного потока на электромагнитное излучение и его обратное влияние на плазму.
4. Механизмы генерации электрон-позитронной плазмы потоком высокоэнергичных фотонов и электронов.

Экспериментальные исследования, относящиеся к рассматриваемой области, естественно разделяются на два направления. Первое из них – наземные эксперименты, прежде всего нейтринные, среди которых главные ожидания следует, по-видимому, связывать с нейтринными экспериментами с длинной базой (long-baseline neutrino oscillation experiments), нацеленными на уточнение параметров смешивания и других физических характеристик нейтрино.

Второе направление – группа экспериментов, которые можно условно называть космическо-земными. Она связана с наблюдениями астрофизических объектов, прежде всего остатков взрывов сверхновых, в широком диапазоне электромагнитного и других видов излучений. Особый класс составляют нейтринные телескопы, расположенные под землёй, водой и антарктическим льдом и нацеленные на ожидаемый взрыв галактической сверхновой. Интересной возможностью является также регистрация нейтринного сигнала от коллапса ядра массивной звезды, происходящего без срыва оболочки, то есть без образования сверхновой. Наконец, большие надежды связаны с гравитационно-волновыми детекторами, которые, по мнению специалистов, вплотную приблизились по уровню чувствительности к оптимистической границе астрофизического прогноза для интенсивности и вероятной частоты гравитационно-волновых сигналов, ожидаемых от коллапсов массивных звёзд.

Впереди ещё много открытий.

Литература

1. Raffelt G. G. Stars as laboratories for fundamental physics. Chicago: University of Chicago Press, 1996. 664 p.
2. Клапдор-Клайнротхаус Г. В., Цюбер К. Астрофизика элементарных частиц. М.: Редакция журнала “Успехи физ. наук”, 2000. 496 с.
3. Хлопов М. Ю. Основы космомикрoфизики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
4. Гинзбург В. Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными (тридцать лет спустя, причем уже на пороге XXI века)? // Успехи физ. наук. 1999. Т. 169, вып. 4. С. 419–441.
5. Имшенник В. С., Надежин Д. К. Сверхновая 1987А в Большом Магеллановом Облаке: наблюдения и теория // Успехи физ. наук. 1988. Т. 156, вып. 4. С. 561–651.
6. Nadyozhin D. K., Imshennik V. S. Physics of supernovae // Int. J. Mod. Phys. A. 2005. Vol. 20, N 29. P. 6597–6611.
7. Фортов В. Е. Мощные ударные волны и экстремальные состояния вещества // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177, вып. 4. С. 347–368.
8. Истомин Я. Н. Генерация электронно-позитронной плазмы в магнитосфере нейтронных звезд // Успехи физ. наук. 2008. Т. 178, вып. 8. С. 880–884.
9. Быков А. М., Топтыгин И. Н. Неустойчивости многокомпонентной плазмы с ускоренными частицами и генерация магнитных полей в астрофизических объектах // Успехи физ. наук. 2007. Т. 177, вып. 2. С. 149–182.
10. Whelan J., Iben I. Binaries and supernovae of type I // Astrophys. J. 1973. Vol. 186, N 12. P. 1007–1014.

11. Woosley S. E., Garcia-Senz D., Niemeyer J., Hillebrandt W., Blinnikov S., Sasorov P. Chandrasekhar mass models for type Ia superovae // *Ann. NY Acad. Sci.* 1995. Vol. 759. P. 352.
12. Heinz U. W., Jacob M. Evidence for a new state of matter: An assessment of the results from the CERN lead beam programme // *arXiv: nucl-th/0002042* (2000).
13. Gyulassy M., McLerran L. New forms of QCD matter discovered at RHIC // *Nucl. Phys. A.* 2005. Vol. 750, N 1. P. 30–63.
14. Красников Н.В., Матвеев В.А. Поиск новой физики на большом адронном коллайдере // *Успехи физ. наук.* 2004. Т. 174, вып. 7. С. 697–725.
15. Ройзен И.И., Фейнберг Е.Л., Чернавская О.Д. Деконфайнмент цвета и субадронное вещество: фазовые состояния и роль конститuentных кварков // *Успехи физ. наук.* 2004. Т. 174, вып. 5. С. 473–493.
16. Mrowczynski S., Thoma M. H. What do electromagnetic plasmas tell us about quark-gluon plasma? // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2007. Vol. 57, N 1. P. 61–94.
17. Nefediev A. V., Simonov Yu. A., Trusov M. A. Deconfinement and quark-gluon plasma // *Int. J. Mod. Phys. E.* 2009. Vol. 18, N 3. P. 549–599.
18. Boyanovsky D., de Vega H. J., Schwarz D. J. Phase transitions in the early and the present Universe // *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 2006. Vol. 56, N 1. P. 441–500.
19. Haensel P., Potekhin A. Y., Yakovlev D. G. Neutron stars. 1. Equation of state and structure. New York: Springer-Verlag, 2006.
20. Glendenning N. K. Compact stars, nuclear physics, particle physics, and general relativity. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 2000.
21. Adams J. B., Ruderman M. A., Woo C.-H. Neutrino pair emission by a stellar plasma // *Phys. Rev.* 1963. Vol. 129, N 3. P. 1383–1390.
22. Zaidi M.H. Emission of neutrino-pairs from a stellar plasma // *Nuovo Cim. A.* 1965. Vol. 40, N 2. P. 502–505.

23. Kouveliotou C., Strohmayer T., Hurley K. et al. Discovery of a magnetar associated with the Soft Gamma Repeater SGR 1900+14 // *Astrophys. J.* 1999. Vol. 510, N 2. P. L115–L118.
24. Hurley K., Cline T., Mazets E. et al. A giant, periodic flare from the soft gamma repeater SGR 1900+14 // *Nature* 1999. Vol. 397, N 6714. P. 41–43.
25. Li X.-D., van den Heuvel E. P. J. Could 2S 0114+650 be a magnetar? // *Astrophys. J.* 1999. Vol. 513, N 1. P. L45–L48.
26. Mereghetti S., Chiarlone L., Israel G. L., Stella L. The anomalous X-ray pulsars // *Proceedings of the 270. WE-Heraeus seminar on neutron stars, pulsars, and supernova remnants. MPE report 278.* Edited by W. Becker, H. Lesch, and J. Trümper. Garching bei München: Max-Planck-Institut für extraterrestrische Physik, 2002. P. 29–43 (e-print astro-ph/0205122).
27. Duncan R. C., Thompson C. Formation of very strongly magnetized neutron stars: implications for gamma-ray bursts // *Astrophys. J.* 1992. Vol. 392, N 1. P. L9–L13.
28. Бисноватый-Коган Г. С. О механизме взрыва вращающейся звезды как сверхновой // *Астрон. журн.* 1970. Т. 47. С. 813.
29. Бисноватый-Коган Г. С. Физические вопросы теории звездной эволюции. М.: Наука, 1989. 487 с.
30. Balbus S. A., Hawley J. F. Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks // *Rev. Mod. Phys.* 1998. Vol. 70, N 1. P. 1–53.
31. Akiyama S., Wheeler J. C., Meier D. L., Lichtenstadt I. The magnetorotational instability in core collapse supernova explosions // *Astrophys. J.* 2003. Vol. 584, N 2. P. 954–970.
32. Ardeljan N. V., Bisnovatyi-Kogan G. S., Moiseenko S. G. Magnetorotational supernova // *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 2005. Vol. 359, N 1. P. 333–344.
33. Bocquet P., Bonazzola S., Gourgoulhon E., Novak J. Rotating neutron star models with magnetic field // *Astron. Astrophys.* 1995. Vol. 301, N 9. P. 757–775.
34. Cardall C. Y., Prakash M., Lattimer J. M. Effects of strong magnetic fields on neutron star structure // *Astrophys. J.* 2001. Vol. 554, N 1. P. 322–339.

35. Зельдович Я. Б., Новиков И. Д. Теория тяготения и эволюция звезд. М.: Наука, 1971. 484 с.
36. Липунов В. М. Астрофизика нейтронных звезд. М.: Наука, 1987. 294 с.
37. Vachaspati T. Magnetic fields from cosmological phase transitions // *Phys. Lett. B*. 1991. Vol. 265, N 3–4. P. 258–261.
38. Ambjørn J., Olesen P. Electroweak magnetism, W -codensation and anti-screening // In: *Proc. of 4th Hellenic School on Elementary Particle Physics, Corfu, 1992* (e-print hep-ph/9304220).
39. Grasso D., Rubinstein H. R. Magnetic fields in the early Universe // *Phys. Rep.* 2001. Vol. 348, N 3. P. 163–266.
40. Ритус В. И. Квантовые эффекты взаимодействия элементарных частиц с интенсивным электромагнитным полем // *Тр. ФИАН СССР “Квантовая электродинамика явлений в интенсивном поле”*. М.: Наука, 1979. Т. 111. С. 5–151.
41. Скобелев В. В. Поляризационный оператор фотона в сверхсильном магнитном поле // *Изв. вузов. Физика*. 1975. № 10. С. 142–143.
42. Loskutov Yu. M., Skobelev V. V. Nonlinear electrodynamics in a superstrong magnetic field // *Phys. Lett. A*. 1976. Vol. 56, N 3. P. 151–152.
43. Скобелев В. В. Фотогенерация нейтрино и аксионов на при стимулирующем влиянии сильного магнитного поля // *Журн. эксперим. и теор. физики*. 2001. Т. 120, вып. 4. С. 786–796.
44. Gvozdev A. A., Mikheev N. V., Vassilevskaya L. A. The radiative decay of a massive neutrino in the external electromagnetic fields // *Phys. Rev. D* 1996. Vol. 54, N 9. P. 5674–5685.
45. Mikheev N. V., Parkhomenko A. Ya., Vassilevskaya L. A. Axion in an external electromagnetic field // *Phys. Rev. D*. 1999. Vol. 60, N 3. P. 035001 (1–11).
46. Байер В. Н., Катков В. М. Рождение пары нейтрино при движении электрона в магнитном поле // *ДАН СССР*. 1966. Т. 171, вып. 2. С. 313–316.

47. Чобан Э. А., Иванов А. Н. Рождение лептонных пар высокоэнергетическими нейтрино в поле сильной электромагнитной волны // Журн. эксперим. и теор. физики. 1969. Т. 56, вып. 1. С. 194–200.
48. Борисов А. В., Жуковский В. Ч., Лысов Б. А. Рождение электрон – позитронной пары нейтрино в магнитном поле // Изв. вузов. Физика. 1983. № 8. С. 30–34.
49. Книжников М. Ю., Татаринцев А. В. Рождение электрон – позитронной пары нейтрино в постоянном внешнем поле // Вестн. МГУ. Серия “Физика, астрономия”. 1984. Т. 25, N 3. С. 26–30.
50. Borisov A. V., Ternov A. I., Zhukovsky V. Ch. Electron–positron pair production by a neutrino in an external electromagnetic field // Phys. Lett. B. 1993. Vol. 318, N 3. P. 489–491.
51. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Neutrino energy and momentum loss through the process $\nu \rightarrow \nu e^- - e^+$ in a strong magnetic field // Phys. Lett. B. 1997. Vol. 394, N 1,2. P. 123–126.
52. Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Нейтринное рождение электрон–позитронных пар в магнитном поле // Ядер. физика. 1997. Т. 60, вып. 11. С. 2038–2047.
53. Борисов А. В., Заморин Н. Б. Рождение электрон – позитронной пары в распаде массивного нейтрино в постоянном внешнем поле // Ядер. физика. 1999. Т. 62, вып. 9. С. 1647–1656.
54. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V., Rumyantsev D. A. Lepton pair production by high–energy neutrino in an external electromagnetic field // Mod. Phys. Lett. A. 2000. Vol. 15, N 8. P. 573–578.
55. Кузнецов А. В., Михеев Н. В., Румянцев Д. А. Нейтринное рождение лептонных пар во внешнем электромагнитном поле // Ядер. физика. 2002. Т. 65, вып. 2. С. 303–306.
56. Шкловский И. С. Замечания о возможных причинах векового увеличения периодов пульсаров // Астрон. журн. 1969. Т. 46, вып. 4. С. 715–720.
57. Lyne A. G., Lorimer D. R. High birth velocities of radio pulsars // Nature. 1994. Vol. 369, N 6476. P. 127–129.

58. Чугай Н.Н. Спиральность нейтрино и пространственные скорости пульсаров // Письма в астрофиз. журн. 1984. Т. 10, вып. 3. С. 210–213.
59. Дорофеев О. Ф., Родионов В. Н., Тернов И. М. Анизотропное излучение нейтрино от бета-распада в сильном магнитном поле // Письма в астрофиз. журн. 1985. Т. 11, вып. 4. С. 302–309.
60. Vilenkin A. Parity nonconservation and neutrino transport in magnetic fields // *Astrophys. J.* 1995. Vol. 451, N 10. P. 700–702.
61. Horowitz C. J., Piekarewicz J. Macroscopic parity violation and supernova asymmetries // *Nucl. Phys. A.* 1998. Vol. 640, N 2. P. 281–290.
62. Horowitz C. J., Gang Li. Cumulative parity violation in supernovae // *Phys. Rev. Lett.* 1998. Vol. 80, N 17. P. 3694–3697; Erratum // *ibid.* Vol. 81, N 9. P. 1985.
63. Cooperstein J. Neutrinos in supernovae // *Phys. Rep.* 1988. Vol. 163, N 1–3. P. 95–126.
64. Myra E. S. Neutrino transport in stellar collapse // *Phys. Rep.* 1988. Vol. 163, N 1–3. P. 127–136.
65. Mezzacappa A., Bruenn S.W. Stellar core collapse – a Boltzmann treatment of neutrino-electron scattering // *Astrophys. J.* 1993. Vol. 410, N 2. P. 740–760.
66. Kaminker A. D., Levenfish K. P., Yakovlev D. G. et al. Neutrino emissivity from e^- synchrotron and e^-e^+ annihilation processes in a strong magnetic field: general formalism and nonrelativistic limit // *Phys. Rev. D.* 1992. Vol. 46, N 8. P. 3256–3264.
67. Kaminker A. D., Gnedin O. Yu., Yakovlev D. G. et al. Neutrino emissivity from e^-e^+ annihilation in a strong magnetic field: hot, nondegenerate plasma // *Phys. Rev. D.* 1992. Vol. 46, N 10. P. 4133–4139.
68. Bezchastnov V. G., Haensel P. Neutrino - electron scattering in a dense magnetized plasma // *Phys. Rev. D.* 1996. Vol. 54, N 6. P. 3706–3721.
69. Yakovlev D. G., Kaminker A. D., Gnedin O. Y., Haensel P. Neutrino emission from neutron stars // *Phys. Rep.* 2001. Vol. 354, N 1–2. P. 1–155.

70. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Neutrino - electron processes in a strong magnetic field and plasma // *Mod. Phys. Lett. A*. 1999. Vol. 14, N 36. P. 2531–2536.
71. Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Влияние плазмы на процессы $\nu \rightarrow \nu e^+ e^-$, ... в магнитном поле // *Ядер. физика*. 1999. Т. 62, вып. 12. С. 2272–2275.
72. Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Взаимодействие нейтрино с сильно замагниченной электрон - позитронной плазмой // *Журн. эксперим. и теор. физики*. 2000. Т. 118, вып. 4. С. 863–876.
73. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Plasma influence on the neutrino-electron processes in a strong magnetic field // *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)*. 2000. Vol. 81. P. 302–308.
74. Mikheev N. V., Narynskaya E. N. Neutrino-electron processes in a dense magnetized plasma // *Mod. Phys. Lett. A*. 2000. Vol. 15, N 25. P. 1551–1556.
75. Нарынская Е. Н. Нейтрино - электронные процессы в плотной замагниченной плазме // *Вестн. молодых ученых. Сер. физ. науки*. 2002. № 1. С. 48–53.
76. Mikheev N. V., Narynskaya E. N. Energy and momentum losses in the process of neutrino scattering on plasma electrons in the presence of a magnetic field // *Centr. Europ. J. of Phys.* 2003. Vol. 1, N 1. P. 145–152.
77. Баталин И. А., Шабад А. Е. Функция Грина фотона в постоянном однородном электромагнитном поле общего вида. // *Журн. эксперим. и теор. физики*. 1971. Т. 60, вып. 3. С. 894–900.
78. Tsai W.-Y. Vacuum polarization in homogeneous magnetic fields // *Phys. Rev. D*. 1974. Vol. 10, N 8. P. 2699–2702.
79. Shabad A. E. Photon dispersion in a strong magnetic field // *Ann. Phys. (N. Y.)*. 1975. Vol. 90, N 1. P. 166–195.
80. Шабад А. Е. Поляризация вакуума и квантового релятивистского газа во внешнем поле // *Тр. ФИАН СССР “Поляризационные эффекты во внешних калибровочных полях”*. М.: Наука, 1988. Т. 192. С. 5–152.

81. Гальцов Д. В., Никитина Н. С. Фотонейтринные процессы в сильном поле // Журн. эксперим. и теор. физики. 1972. Т. 62, вып. 6. С. 2008–2012.
82. Скобелев В. В. О реакциях $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ и $\nu \rightarrow \gamma\nu$ в сильном магнитном поле // Журн. эксперим. и теор. физики. 1976. Т. 71, вып. 4. С. 1263–1267.
83. DeRaad Jr. L. L., Milton K. A., Hari Dass N. D. Photon decay into neutrinos in a strong magnetic field // Phys. Rev. D. 1976. Vol. 14, N 12. P. 3326–3334.
84. Gvozdev A. A., Mikheev N. V., Vassilevskaya L. A. The magnetic catalysis of the radiative decay of a massive neutrino in the standard model with lepton mixing // Phys. Lett. B. 1992. Vol. 289, N 1–2. P. 103–108.
85. Василевская Л. А., Гвоздев А. А., Михеев Н. В. Распад массивного нейтрино $\nu_i \rightarrow \nu_j \gamma$ в скрещенном поле // Ядер. физика. 1994. Т. 57, вып. 1. С. 124–127.
86. Скобелев В. В. Распад массивного нейтрино в сильном магнитном поле // Журн. эксперим. и теор. физики. 1995. Т. 108, вып. 1. С. 3–13.
87. Zhukovsky V. Ch., Eminov P. A., Grigoruk A. E. Radiative decay of a massive neutrino in the Weinberg - Salam model with mixing in a constant uniform magnetic field // Mod. Phys. Lett. A. 1996. Vol. 11, N 39–40. P. 3119–3126.
88. D’Olivo J. C., Nieves J. F., Pal P. B. Cherenkov radiation by massless neutrinos // Phys. Lett. B. 1996. Vol. 365, N 1–4. P. 178–184.
89. Ioannisian A. N., Raffelt G. G. Cherenkov radiation by massless neutrinos in a magnetic field // Phys. Rev. D. 1997. Vol. 55, N 11. P. 7038–7043.
90. Gvozdev A. A., Mikheev N. V., Vassilevskaya L. A. Resonance neutrino bremsstrahlung $\nu \rightarrow \nu\gamma$ in a strong magnetic field // Phys. Lett. B. 1997. Vol. 410, N 2–4. P. 211–215.
91. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V., Vassilevskaya L. A. Photon splitting $\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ in an external magnetic field // Phys. Lett. B. 1998. Vol. 427, N 1–2. P. 105–108.

92. Василевская Л. А., Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Индуцированное магнитным полем нейтрино-фотонное $\nu\nu\gamma$ -взаимодействие // Ядер. физика. 1999. Т. 62, вып. 4. С. 715–722.
93. Василевская Л. А., Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Нейтринные процессы в сильном внешнем магнитном поле // Физика элементарных частиц и атомного ядра: материалы XXXIII зимней школы ПИЯФ, Гатчина, 1999 / Ред. В. А. Гордеев и др.; ПИЯФ. СПб, 1999. С. 182–206.
94. Gell-Mann M. The reaction $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ // Phys. Rev. Lett. 1961. Vol. 6, N 2. P. 70–71.
95. Crewther R. J., Finjord J., Minkowski P. The annihilation process $\nu\bar{\nu} \rightarrow \gamma\gamma$ with massive neutrino in cosmology // Nucl. Phys. B. 1982. Vol. 207, N 2. P. 269–287.
96. Dodelson S., Feinberg G. Neutrino - two-photon vertex // Phys. Rev. D. 1991. Vol. 43, N 3. P. 913–920.
97. Levine M. J. The process $\gamma + \gamma \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ // Nuovo Cim. A. 1967. Vol. 48, N 1. P. 67–71.
98. Dicus D. A. Stellar energy-loss rates in a convergent theory of weak and electromagnetic interactions // Phys. Rev. D. 1972. Vol. 6, N 4. P. 941–949.
99. Dicus D. A., Repko W. W. Photon neutrino scattering // Phys. Rev. D. 1993. Vol. 48, N 11. P. 5106–5108.
100. Rosenberg L. Electromagnetic interactions of neutrinos // Phys. Rev. 1963. Vol. 129, N 6. P. 2786–2788.
101. Cung V. K., Yoshimura M. Electromagnetic interaction of neutrinos in gauge theories of weak interactions // Nuovo Cim. A. 1975. Vol. 29, N 4. P. 557–564.
102. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Compton-like interaction of massive neutrinos with virtual photons // Phys. Lett. B. 1993. Vol. 299, N 3–4. P. 367–369.
103. Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Амплитуда процесса $\nu_i\gamma^* \rightarrow \nu_j\gamma^*$ с виртуальными фотонами и тормозное излучение при рассеянии нейтрино в кулоновском поле ядра // Ядер. физика. 1993. Т. 56, вып. 6. С. 108–114.

104. Liu J. Low-energy neutrino–two-photon interactions // Phys. Rev. D. 1991. Vol. 44, N 9. P. 2879–2891.
105. Shaisultanov R. Photon - neutrino interactions in magnetic fields // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 80, N 8. P. 1586–1587.
106. Chyi T. K., Hwang C.-W., Kao W. F. et al. Neutrino - photon scattering and its crossed processes in a background magnetic field // Phys. Lett. B. 1999. Vol. 466, N 2–4. P. 274–280.
107. Chyi T. K., Hwang C.-W., Kao W. F. et al. The weak-field expansion for processes in a homogeneous background magnetic field // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 62, N 10. P. 105014 (1–13).
108. Dicus D. A., Repko W. W. Neutrino - photon scattering in a magnetic field // Phys. Lett. B. 2000. Vol. 482, N 1–3. P. 141–144.
109. Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. Двухфотонное рождение нейтрино в сильном внешнем поле // Вестн. МГУ. Серия “Физика, астрономия”. 1981. Т. 22, N 4. С. 10–13.
110. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Photon-pair conversion into neutrinos in a strong magnetic field // Mod. Phys. Lett. A. 2001. Vol. 16, N 25. P. 1659–1665.
111. Кузнецов А. В., Михеев Н. В., Румянцев Д. А. Процесс $\gamma\gamma \rightarrow \nu\bar{\nu}$ в сильном магнитном поле // Ядер. физ. 2003. Т. 66, вып. 2. С. 319–326.
112. Нгуен Ван Хьеу, Шабалин Е. П. О роли процесса $\gamma + \gamma \rightarrow \gamma + \nu + \bar{\nu}$ в нейтринном излучении звезд // Журн. эксперим. и теор. физики. 1963. Т. 44, вып. 3. С. 1003–1007.
113. Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. Эффективный лагранжиан $A^3(\nu\bar{\nu})$ - взаимодействия и процесс $\gamma\gamma \rightarrow \gamma(\nu\bar{\nu})$ в двумерном приближении квантовой электродинамики // Теор. и мат. физ. 1987. Т. 70, вып. 2. С. 303–308.
114. Dicus D. A., Repko W. W. Photon - neutrino interactions // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 79, N 4. P. 569–571.
115. Harris M., Wang J., Teplitz V. L. Astrophysical effects of $\nu\gamma \rightarrow \nu\gamma\gamma$ and its crossed processes // E-print astro-ph/9707113.

116. Abada A., Matias J., Pittau R. Five-leg photon-neutrino interactions // In: Proc. XXIX ICHEP (Vancouver). E-print hep-ph/9809418.
117. Abada A., Matias J., Pittau R. Inelastic photon-neutrino interactions using an effective Lagrangian // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 59, N 1. P. 013008 (1–7).
118. Abada A., Matias J., Pittau R. Direct computation of inelastic photon-neutrino processes in the Standard Model // Nucl. Phys. B. 1999. Vol. 543, N 1–2. P. 255–268.
119. Abada A., Matias J., Pittau R. Low-energy photon-neutrino inelastic processes beyond the Standard Model // Phys. Lett. B. 1999. Vol. 450, N 1–3. P. 173–181.
120. Dicus D. A., Kao C., Repko W. W. $\gamma\nu \rightarrow \gamma\gamma\nu$ and crossed processes at energies below m_W // Phys. Rev. D. 1999. Vol. 59, N 1. P. 013005 (1–6).
121. Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Фоторождение нейтрино на ядрах в сильном магнитном поле // Письма в Журн. эксперим. и теор. физики. 2002. Т. 75, вып. 9. С. 531–534.
122. Папанян В. О., Ритус В. И. Трехфотонное взаимодействие в интенсивном поле // Тр. ФИАН СССР “Проблемы квантовой электродинамики интенсивного поля”. М.: Наука, 1986. Т. 168. С. 120–140.
123. Adler S. L., Schubert C. Photon splitting in a strong magnetic field: recalculation and comparison with previous calculations // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77, N 9. P. 1695–1698.
124. Baier V. N., Milstein A. I., Shaisultanov R. Zh. Photon splitting in a very strong magnetic field // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77, N 9. P. 1691–1694.
125. Байер В. Н., Мильштейн А. И., Шайсултанов Р. Ж. Расщепление фотона в сверхсильном магнитном поле // Журн. эксперим. и теор. физики. 1997. Т. 111, вып. 1. С. 52–62.
126. Wilke C., Wunner G. Photon splitting in strong magnetic fields: asymptotic approximation formulae vs. accurate numerical results // Phys. Rev. D. 1997. Vol. 55, N 2. P. 997–1000.
127. Chistyakov M. V., Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Photon splitting above the pair creation threshold in a strong magnetic field // Phys. Lett. B. 1998. Vol. 434, N 1. P. 67–73.

128. Кузнецов А. В., Михеев Н. В., Чистяков М. В. Расщепление фотона на два фотона в сильном магнитном поле // Ядер. физика. 1999. Т. 62, вып. 9. С. 1638–1646.
129. Demeur M. Etude de l'interaction entre le champ propre d'une particule et un champ électro-magnétique homogène et constant // Acad. Roy. Belg., Classe Sci., Mem. 1953. Vol. 28. P. 1643.
130. Jancovici B. Radiative correction to the ground-state energy of an electron in an intense magnetic field // Phys. Rev. 1969. Vol. 187, N 5. P. 2275–2276.
131. Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. Радиационные поправки к массовому оператору электрона в двумерном приближении квантовой электродинамики // Теор. и мат. физ. 1979. Т. 38, вып. 2. С. 195–200.
132. Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. Полевая асимптотика массового оператора: суммирование диаграмм теории возмущений // Теор. и мат. физ. 1981. Т. 48, вып. 1. С. 44–48.
133. Лоскутов Ю. М., Скобелев В. В. Массовый оператор: однологарифмическая полевая асимптотика // Вестн. МГУ. Серия “Физика, астрономия”. 1983. Т. 24, N 6. С. 95–97.
134. Gusynin V. P., Smilga A. V. Electron self-energy in strong magnetic field: summation of double logarithmic terms // Phys. Lett. B. 1999. Vol. 450, N 1–3. P. 267–274.
135. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V., Osipov M. V. Electron mass operator in a strong magnetic field // Mod. Phys. Lett. A. 2002. Vol. 17, N 4. P. 231–235.
136. Gusynin V. P., Miransky V. A., Shovkovy I. A. Dynamical chiral symmetry breaking by a magnetic field in QED. // Phys. Rev. D. 1995. Vol. 52, N 8. P. 4747–4751.
137. Gusynin V. P., Miransky V. A., Shovkovy I. A. Dimensional reduction and catalysis of dynamical symmetry breaking by a magnetic field // Nucl. Phys. B. 1996. Vol. 462, N 2–3. P. 249–290.
138. Leung C. N., Ng Y. J., Ackley A. W. Schwinger-Dyson equation approach to chiral symmetry breaking in an external magnetic field // Phys. Rev. D. 1996. Vol. 54, N 6. P. 4181–4184.

139. Lee D.-S., Leung C. N., Ng Y. J. Chiral symmetry breaking in a uniform external magnetic field // *Phys. Rev. D*. 1997. Vol. 55, N 10. P. 6504–6513.
140. Gusynin V. P., Miransky V. A., Shovkovy I. A. Dynamical chiral symmetry breaking in QED in a magnetic field: toward exact results // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 83, N 7. P. 1291–1294.
141. Gusynin V. P., Miransky V. A., Shovkovy I. A. Theory of the magnetic catalysis of chiral symmetry breaking in QED // *Nucl. Phys. B*. 1999. Vol. 563, N 1–2. P. 361–389.
142. Alexandre J., Farakos K., Koutsoumbas G. QED in a strong external magnetic field: beyond the constant mass approximation // *Phys. Rev. D*. 2000. Vol. 62, N 10. P. 105017 (1–12).
143. Alexandre J., Farakos K., Koutsoumbas G. Remark on the momentum dependence of the magnetic catalysis in QED // *Phys. Rev. D*. 2001. Vol. 64, N 6. P. 067702 (1–3).
144. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Electron mass operator in a strong magnetic field and dynamical chiral symmetry breaking // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, N 1. P. 011601 (1–4).
145. Gusynin V. P., Miransky V. A., Shovkovy I. A. Comment on “Electron mass operator in a strong magnetic field and dynamical chiral symmetry breaking” // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 90, N 8. P. 089101.
146. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Reply to Comment on “Electron mass operator in a strong magnetic field and dynamical chiral symmetry breaking” // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 90, N 8. P. 089102.
147. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989. 728 с.
148. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003. 136 p.
149. Schwinger J. On gauge invariance and vacuum polarization // *Phys. Rev.* 1951. Vol. 82, N 5. P. 664–679.
150. Chodos A., Everding K., Owen D. A. QED with a chemical potential: The case of a constant magnetic field // *Phys. Rev. D*. 1990. Vol. 42, N 8. P. 2881–2892.

151. Elizalde E., Ferrer E. J., de la Incera V. Neutrino self-energy and index of refraction in strong magnetic field: A new approach // *Ann. of Phys.* 2002. Vol. 295, N 1. P. 33–49.
152. Elizalde E., Ferrer E. J., de la Incera V. Neutrino propagation in a strongly magnetized medium // *Phys. Rev. D.* 2004. Vol. 70, N 4. P. 043012 (1–19).
153. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V., Raffelt G. G., Vassilevskaya L. A. Neutrino dispersion in external magnetic fields // *Phys. Rev. D.* 2006. Vol. 73, N 2. P. 023001 (1–8).
154. Erdas A., Lissia M. High-energy neutrino conversion into an electron- W pair in a magnetic field and its contribution to neutrino absorption // *Phys. Rev. D.* 2003. Vol. 67, N 3. P. 033001 (1–6).
155. Bhattacharya K., Sahu S. Neutrino absorption by W production in the presence of a magnetic field // *Eur. Phys. J. C.* 2009. Vol. 62, N 3. P. 481–489.
156. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V., Serghienko A. V. High energy neutrino absorption by W production in a strong magnetic field // *Phys. Lett. B.* 2010. Vol. 690, N 4. P. 386–389.
157. Erdas A., Isola C. Neutrino self-energy in a magnetized medium in arbitrary ξ -gauge // *Phys. Lett. B.* 2000. Vol. 494, N 3–4. P. 262–272.
158. Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Дисперсионные свойства нейтрино во внешнем магнитном поле // *Ядер. физ.* 2007. Т. 70, вып. 7. С. 1299–1304.
159. Кузнецов А. В., Округин. А. А. Точный пропагатор электрона в магнитном поле в виде суммы по уровням Ландау на основе решений уравнения Дирака // *Эффекты сильного поля: сб. ст., посв. 65-летию Н. В. Михеева / под ред. А. В. Кузнецова, Е. Н. Нарынской, Д. А. Румянцева; Ярослав. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. Ярославль: ЯрГУ, 2007. С. 65–75.*
160. Erdas A., Feldman G. Magnetic field effects on Lagrangians and neutrino self-energies in the Salam-Weinberg theory in arbitrary gauges // *Nucl. Phys. B.* 1990. Vol. 343, N 3. P. 597–621.
161. Скалозуб В. В. Структура вакуума в теории Вайнберга–Салама // *Ядер. физ.* 1987. Т. 45, вып. 6. С. 1708–1718.

162. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Физматлит, 2003.
163. Braaten E. Emissivity of a hot plasma from photon and plasmon decay // Phys. Rev. Lett. 1991. Vol. 66, N 13. P. 1655–1658.
164. Adler S. L. Photon splitting and photon dispersion in a strong magnetic field // Ann. Phys. (N. Y.). 1971. Vol. 67, N 2. P. 599–647.
165. Stoneham R. J. Photon splitting in the magnetized vacuum // J. Phys. A. 1979. Vol. 12, N 11. P. 2187–2203.
166. Байер В. Н., Мильштейн А. И., Шайсултанов Р. Ж. Расщепление фотона в сильном электромагнитном поле // Журн. эксперим. и теор. физики. 1986. Т. 90, вып. 4. С. 1141–1153.
167. Соколов А. А., Тернов И. М., Жуковский В. Ч., Борисов А. В. Квантовая электродинамика. М.: Изд-во МГУ, 1983.
168. Боровков М. Ю., Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Однопетлевая амплитуда перехода $j \rightarrow f\bar{f} \rightarrow j'$ во внешнем электромагнитном поле // Ядер. физика. 1999. Т. 62, вып. 9. С. 1714–1722.
169. Weldon H. A. Covariant calculations at finite temperature: The relativistic plasma // Phys. Rev. D. 1982. Vol. 26, N 6. P. 1394–1407.
170. Braaten E., Segel D. Neutrino energy loss from the plasma process at all temperatures and densities // Phys. Rev. D. 1993. Vol. 48, N 4. P. 1478–1491.
171. Ahmad Q. R., Allen R. C., Andersen T. C. et al. (SNO Collab.). Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by 8B solar neutrinos at the Sudbury Neutrino Observatory // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87, N 7. P. 071301 (1–6).
172. Ahmad Q. R., Allen R. C., Andersen T. C. et al. (SNO Collab.). Direct evidence for neutrino flavor transformation from neutral-current interactions in the Sudbury Neutrino Observatory // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89, N 1. P. 011301 (1–6).
173. Ahmad Q. R., Allen R. C., Andersen T. C. et al. (SNO Collab.). Measurement of day and night neutrino energy spectra at SNO and constraints

- on neutrino mixing parameters // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Vol. 89, N 1. P. 011302 (1–5).
174. Понтекорво Б. М. Мезоний и антимезоний // *Журн. эксперим. и теор. физики.* 1957. Т. 33, вып. 2. С. 549–551.
175. Понтекорво Б. М. Обратные β -процессы и несохранение лептонного заряда // *Журн. эксперим. и теор. физики.* 1958. Т. 34, вып. 1. С. 247–249.
176. Fukuda Y., Hayakawa T., Ichihara E. et al. (Super-Kamiokande Collab.). Measurement of a small atmospheric ν_μ/ν_e ratio // *Phys. Lett. B.* 1998. Vol. 433, N 1–2. P. 9–18.
177. Fukuda Y., Hayakawa T., Ichihara E. et al. (Super-Kamiokande Collab.). Study of the atmospheric neutrino flux in the multi-GeV energy range // *Phys. Lett. B.* 1998. Vol. 436, N 1–2. P. 33–41.
178. Fukuda Y., Hayakawa T., Ichihara E. et al. (Super-Kamiokande Collab.). Measurement of the flux and zenith-angle distribution of upward through-going muons by Super-Kamiokande // *Phys. Rev. Lett.* 1999. Vol. 82, N 13. P. 2644–2648.
179. Eguchi K., Enomoto S., Furuno K. et al. (KamLAND Collab.). First results from KamLAND: Evidence for reactor antineutrino disappearance // *Phys. Rev. Lett.* 2003. Vol. 90, N 2. P. 021802 (1–6).
180. Bahcall J. N. Solar models and Solar neutrinos // Invited talk at the XXIII Physics in Collisions Conference (PIC03), Zeuthen, Germany, June 2003. E-print: arXiv:astro-ph/0310030.
181. Nötzold D., Raffelt G. Neutrino dispersion at finite temperature and density // *Nucl. Phys. B.* 1988. Vol. 307, N 4. P. 924–936.
182. D’Olivo J. C., Nieves J. F., Pal P. B. Electromagnetic properties of neutrinos in a background of electrons // *Phys. Rev. D* 1989. Vol. 40, N 11. P. 3679–3687.
183. D’Olivo J. C., Nieves J. F., Torres M. Finite-temperature corrections to the effective potential of neutrinos in a medium // *Phys. Rev. D* 1992. Vol. 46, N 3. P. 1172–1179.
184. McKeon G. Propagation of a neutrino in a homogeneous magnetic field // *Phys. Rev. D* 1981. Vol. 24, N 10. P. 2744–2747.

185. Борисов А. В., Жуковский В. Ч., Курилин А. В., Тернов А. И. Радиационные поправки к массе нейтрино во внешнем электромагнитном поле // Ядер. физика. 1985. Т. 41, вып. 3. С. 743–748.
186. Semikoz V. B., Valle J. W. F. Nucleosynthesis constraints on active-sterile neutrino conversions in the early Universe with random magnetic field // Nucl. Phys. B. 1994. Vol. 425, N 3. P. 651–664; Erratum: *ibid.* 1997. Vol. 485, N 1–2. P. 545–547.
187. Elmfors P., Grasso D., Raffelt G. Neutrino dispersion in magnetized media and spin oscillations in the early Universe // Nucl. Phys. B. 1996. Vol. 479, N 1–2. P. 3–24.
188. Erdas A., Kim C. W., Lee T. H. Neutrino self-energy and dispersion in a medium with magnetic field // Phys. Rev. D 1998. Vol. 58, N 8. P. 085016 (1–8).
189. Bravo Garcia A., Bhattacharya K., Sahu S. The neutrino self-energy in a magnetized medium // Mod. Phys. Lett. A. 2008. Vol. 23, N 32. P. 2771–2786.
190. Erdas A. Neutrino self-energy in an external magnetic field // Phys. Rev. D. 2009. Vol. 80, N 11. P. 113004 (1–8).
191. Аникин Р. А., Михеев Н. В., Нарынская Е. Н. Индуцированный замагниченной плазмой магнитный момент нейтрино // Журн. эксперим. и теор. физики. 2010. Т. 137, вып. 6. С. 1115–1119.
192. Wolfenstein L. Neutrino oscillations in matter // Phys. Rev. D. 1978. Vol. 17, N 9. P. 2369–2374.
193. Studenikin A. Quantum treatment of neutrino in background matter // J. Phys. A: Math. Gen. 2006. Vol. 39. P. 6769–6776.
194. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Plasma induced neutrino radiative decay instead of neutrino spin light // Mod. Phys. Lett. A. 2006. Vol. 21, N 23. P. 1769–1775.
195. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Plasma induced fermion spin-flip conversion $f_L \rightarrow f_R + \gamma$ // Int. J. Mod. Phys. A. 2007. Vol. 22, N 19. P. 3211–3227.

196. Яковлев Д. Г., Левенфиш К. П., Шибанов Ю. А. Остывание нейтронных звёзд и сверхтекучесть в их ядрах // Успехи физ. наук. 1999. Т. 169, вып. 8. С. 825–868.
197. Beaudet G., Petrosian V., Salpeter E. E. Energy losses due to neutrino processes // *Astrophys. J.* 1967. Vol. 150, N 3. P. 979–999.
198. Munakata H., Kohiyama Y., Itoh N. Neutrino energy loss in stellar interiors // *Astrophys. J.* 1985. Vol. 296, N 1. P. 197–203.
199. Schinder P. J., Schramm D. N., Wiita P. J. et al. Neutrino emission by the pair, plasma, and photo processes in the Weinberg-Salam model // *Astrophys. J.* 1987. Vol. 313, N 2. P. 531–542.
200. Itoh N., Adachi T., Nakagawa M. et al. Neutrino energy loss in stellar interiors. III - Pair, photo-, plasma, and bremsstrahlung processes // *Astrophys. J.* 1989. Vol. 339, N 4. P. 354–364.
201. Grigoriev A., Shinkevich S., Studenikin A., Ternov A., Trofimov I. Spin light of electron in dense matter // *Grav. Cosmol.* 2008. Vol. 14. P. 248–255.
202. Shapiro S. L., Teukolsky S. A. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars*. New York: Wiley, 1983.
203. Lee B. W., Shrock R. E. Natural suppression of symmetry violation in gauge theories: muon-lepton and electron-lepton number nonconservation // *Phys. Rev. D.* 1977. Vol. 16, N 5. P. 1444–1473.
204. Fujikawa K., Shrock R. E. The magnetic moment of a massive neutrino and neutrino spin rotation // *Phys. Rev. Lett.* 1980. Vol. 45, N 12. P. 963–966.
205. Ferrer E. J., de la Incera V. Neutrino propagation and oscillations in a strong magnetic field // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2004. Vol. 19, N 31. P. 5385–5394.
206. Ritus V. I. Radiative corrections in quantum electrodynamics with intense field and their analytical properties // *Ann. of Phys.* 1972. Vol. 69, N 2. P. 555–582.
207. Borisov A. V., Ternov I. M., Vassilevskaya L. A. Transitions of $\nu_i \rightarrow \nu_j$ ($i \neq j$) type in an external field // *Phys. Lett. B.* 1991. Vol. 273, N 1–2. P. 163–166.

208. Борисов А. В., Василевская Л. А., Тернов И. М. Недиagonальные по аромату переходы массивных нейтрино во внешнем поле // Ядер. физика. 1991. Т. 54, вып. 5 (11). С. 1384–1390.
209. Dicus D. A., Kovner K., Repko W. W. Photons, neutrinos, and large compact space dimensions // Phys. Rev. D 2000. Vol. 62, N 5. P. 053013 (1–5).
210. Ringwald A. Extremely energetic cosmic neutrinos: Opportunities for astrophysics, particle physics, and cosmology // Int. J. Mod. Phys. A. 2006. Vol. 21, N: Supp. 1. P. 12–19.
211. Андреев М. С., Михеев Н. В., Нарынская Е. Н. Дисперсия нейтрино в зарядово-симметричной плазме // Журн. эксперим. и теор. физики. 2010. Т. 137, вып. 2. С. 259–267.
212. Жуковский В. Ч., Шония Т. Л., Аминов П. А. Сдвиг энергии и аномальный магнитный момент нейтрино в постоянном магнитном поле при конечных температуре и плотности // Журн. эксперим. и теор. физики. 1993. Т. 104, вып. 4. С. 3269–3279.
213. Peccei R. D., Quinn H. R. CP conservation in the presence of pseudoparticles // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38, N 25. P. 1440–1443.
214. Peccei R. D., Quinn H. R. Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles // Phys. Rev. D. 1977. Vol. 16, N 6. P. 1791–1797.
215. Weinberg S. A new light boson? // Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 40, N 4. P. 223–226.
216. Wilczek F. Problem of strong P and T invariance in the presence of instantons // Phys. Rev. Lett. 1978. Vol. 40, N 5. P. 279–282.
217. Raffelt G. G. Astrophysical methods to constrain axions and other novel particle phenomena // Phys. Rep. 1990. Vol. 198, N 1,2. P. 1–113.
218. Hogan C. J., Rees M. J. Axion miniclusters // Phys. Lett. B. 1988. Vol. 205, N 2–3. P. 228–230.
219. Kolb E. W., Tkachev I. I. Nonlinear axion dynamics and the formation of cosmological pseudosolitons // Phys. Rev. D. 1994. Vol. 49, N 10. P. 5040–5051.

220. Sahu S. Cosmic rays propagation in a pseudo-scalar medium // *Mod. Phys. Lett. A*. 1999. Vol. 14, N 19. P. 1287–1295.
221. Михеев Н. В., Нарынская Е. Н. Влияние аксионной среды на дисперсию фермионов // *Ядер. физика*. 2008. Т. 71, вып. 8. С. 1515–1517.
222. Mikheev N. V., Narynskaya E. N. Fermion dispersion in axion medium // *International Journal of Modern Physics A*. 2008. Vol. 23, N 22. P. 3747–3751.
223. Raffelt G. G., Seckel D. Bounds on exotic particle interactions from SN1987A // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 60, N 18. P. 1793–1796.
224. Клепиков Н. П. Излучение фотонов и электрон-позитронных пар в магнитном поле // *Журн. эксперим. и теор. физики*. 1954. Т. 26, вып. 1. С. 19–34.
225. Михеев Н. В., Чистяков М. В. Затухание фотона в результате рождения электрон-позитронной пары в сильном магнитном поле // *Письма в Журн. эксперим. и теор. физики*. 2001. Т. 73, вып. 12. С. 726–730.
226. Sturrock P. A. A model of pulsars // *Astrophys. J.* 1971. Vol. 164, N 3. P. 529–556.
227. Tadamaru E. On the energy spectrum of relativistic electrons in the Crab Nebula // *Astrophys. J.* 1973. Vol. 183, N 7. P. 625–636.
228. Ruderman M. A., Sutherland P. S. Theory of pulsars: polar gaps, sparks, and coherent microwave radiation // *Astrophys. J.* 1975. Vol. 196, N 2. P. 51–72.
229. Бескин В. С. Рождение пар в сильном магнитном поле // *Астрофизика*. 1982. Т. 18, вып. 7. С. 439–449.
230. Daugherty J. K., Harding A. K. Pair production in superstrong magnetic fields // *Astrophys. J.* 1983. Vol. 273, N 10. P. 761–773.
231. Boyanovsky D., de Vega H. J., Ng Y. J., Lee D.-S., Wang S.-Y. Fermion damping in a fermion-scalar plasma // *Phys. Rev. D*. 1999. Vol. 59, N 10. P. 105001 (1–13).
232. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 448 с.

233. Harding A. C., Baring M. G., Gonthier P. L. Photon-splitting cascades in gamma-ray pulsars and the spectrum of PSR 1509-58 // *Astrophys. J.* 1997. Vol. 476, N 1. P. 246–260.
234. Халфин Л. А. К теории распада квазистационарного состояния // *Журн. эксперим. и теор. физики.* 1958. Т. 33, вып. 6. С. 1371–1382.
235. Joichi I., Matsumoto Sh., Yoshimura M. Quantum dissipation and decay in a medium // *Phys. Rev. A.* 1998. Vol. 57, N 2. P. 798–805.
236. Adler S. L., Bahcall J. N., Callan C. G., Rosenbluth M. N. Photon splitting in a strong magnetic field // *Phys. Rev. Lett.* 1970. Vol. 25, N 15. P. 1061–1065.
237. Bialynicka-Birula Z., Bialynicki-Birula I. Nonlinear effects in quantum electrodynamics. Photon propagation and photon splitting in an external field // *Phys. Rev. D.* 1970. Vol. 2, N 10. P. 2341–2345.
238. Папанян В. О., Ритус В. И. Поляризация вакуума и расщепление фотонов в интенсивном поле // *Журн. эксперим. и теор. физики.* 1971. Т. 61, вып. 6. С. 2231–2241.
239. Папанян В. О., Ритус В. И. Трехфотонное взаимодействие в интенсивном поле и масштабная инвариантность // *Журн. эксперим. и теор. физики.* 1973. Т. 65, вып. 5. С. 1756–1771.
240. Baring M. G. Photon-splitting limit to the hardness of emission in strongly magnetized soft gamma repeaters // *Astrophys. J.* 1995. Vol. 440, N 2. P. L69–L72.
241. Постнов К. А. Космические гамма-всплески // *Успехи физ. наук.* 1999. Т. 169, вып. 5. С. 545–558.
242. Лоскутов Ю. М., Лысов Б. А., Скобелев В. В. О полевой асимптотике поляризационного оператора // *Теор. и мат. физ.* 1982. Т. 53, вып. 3. С. 469–473.
243. Cisneros A. Effect of neutrino magnetic moment on solar neutrino observations // *Astrophys. & Space Sci.* 1971. Vol. 10, N 1. P. 87–92.
244. Волошин М. Б., Высоцкий М. И., Окунь Л. Б. Об электромагнитных свойствах нейтрино и возможных полугодовых вариациях потока нейтрино от Солнца // *Ядер. физ.* 1986. Т. 44, вып. 3 (9). С. 677–680.

245. Волошин М. Б., Высоцкий М. И., Окунь Л. Б. Электродинамика нейтрино и возможные эффекты для солнечных нейтрино // Журн. эксперим. и теор. физики. 1986. Т. 91, вып. 3. С. 754–765; Erratum: *ibid.* 1987. Т. 92, вып. 1. С. 368.
246. Clark R. B., Pedigo R. D. Forward-peaked $\nu_e - e$ scattering and the solar-neutrino problem // Phys. Rev. D. 1973. Vol. 8, N 7. P. 2261–2263.
247. Radomski M. Neutrino magnetic moment, plasmon Cerenkov radiation, and the solar-neutrino problem // Phys. Rev. D. 1975. Vol. 12, N 8. P. 2208–2211.
248. Raffelt G. G. Limits on neutrino electromagnetic properties — an update // Phys. Rept. 1999. Vol. 320, N 1–6. P. 319–327.
249. Raffelt G. G. New bound on neutrino dipole moments from globular-cluster stars // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64, N 24. P. 2856–2858.
250. Raffelt G. G. Core mass at the helium flash from observations and a new bound on neutrino electromagnetic properties // Astrophys. J. 1990. Vol. 365, N 12. P. 559–568.
251. Fukugita M., Yazaki S. Reexamination of astrophysical and cosmological constraints on the magnetic moment of neutrinos // Phys. Rev. D 1987. Vol. 36, N 12. P. 3817–3819.
252. Elmfors P., Enqvist K., Raffelt G., Sigl G. Neutrinos with magnetic moment: Depolarization rate in plasma // Nucl. Phys. B. 1997. Vol. 503, N 1–2. P. 3–23.
253. Beda A. G., Demidova E. V., Starostin A. S. et al. GEMMA experiment: three years of the search for the neutrino magnetic moment. E-Print: arXiv: 0906.1926 [hep-ex].
254. Wong H. T., Li H. B., Lin S. T. et al. (TEXONO Collaboration). Search of neutrino magnetic moments with a high-purity germanium detector at the Kuo-Sheng nuclear power station // Phys. Rev. D. 2007. Vol. 75, N 1. P. 012001 (1–16).
255. Goldman I., Aharonov Y., Alexander G., Nussinov S. Implications of the supernova SN1987A neutrino signals // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60, N 18. P. 1789–1792.

256. Lattimer J. M., Cooperstein J. Limits on the neutrino magnetic moment from SN1987A // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 61, N 1. P. 23–26.
257. Barbieri R., Mohapatra R. N. Limit on the magnetic moment of the neutrino from Supernova 1987 observations // *Phys. Rev. Lett.* 1988. Vol. 61, N 1. P. 27–30.
258. Nötzold D. New bounds on neutrino magnetic moments from stellar collapse // *Phys. Rev. D.* 1988. Vol. 38, N 6. P. 1658–1668.
259. Goyal A., Dutta S. Choudhury S. R. Bounds on the neutrino magnetic moment from SN 1987 A // *Phys. Lett. B.* 1995. Vol. 346, N 3–4. P. 312–316.
260. Ayala A., D’Olivo J. C., Torres M. Bound on the neutrino magnetic moment from chirality flip in supernovae // *Phys. Rev. D.* 1999. Vol. 59, N 11. P. 111901 (1–4).
261. Ayala A., D’Olivo J. C., Torres M. Right-handed neutrino production in dense and hot plasmas // *Nucl. Phys. B.* 2000. Vol. 564, N 1–2. P. 204–222.
262. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. A new bound on the Dirac neutrino magnetic moment from the plasma induced neutrino chirality flip in a supernova // *Journ. Cosmol. Astropart. Phys.* 2007. Vol. 11. P. 031.
263. Kuznetsov A. V., Mikheev N. V., Okrugin A. A. Reexamination of a bound on the Dirac neutrino magnetic moment from the supernova neutrino luminosity // *Int. J. Mod. Phys. A.* 2009. Vol. 24, N 31. P. 5977–5989.
264. Кузнецов А. В., Михеев Н. В., Округин А. А. Индуцированный плазмой переворот спиральности нейтрино в сверхновой и ограничение на магнитный момент дираковского нейтрино // *Журн. эксперим. и теор. физики.* 2010. Т. 138, вып. 1 (7). С. 80–92.
265. Maki Z., Nakagawa M., Sakata S. Remarks on the unified model of elementary particles // *Prog. Theor. Phys.* 1962. Vol. 28, N 5. P. 870–880.
266. Понтекорво Б. М. Нейтринные опыты и вопрос о сохранении лептонного заряда // *Журн. эксперим. и теор. физики.* 1967. Т. 53, вып. 5. С. 1717–1725.
267. Cabibbo N. Unitary symmetry and leptonic decays // *Phys. Rev Lett.* 1963. Vol. 10, N 12. P. 531–533.

268. Kobayashi M., Maskawa T. *CP*-violation in the renormalizable theory of weak interaction // Prog. Theor. Phys. 1973. Vol. 49, N 2. P. 652–657.
269. Weldon H. A. Simple rules for discontinuities in finite-temperature field theory // Phys. Rev. D. 1983. Vol. 28, N 8. P. 2007–2015.
270. Grimus W., Neufeld H. Cherenkov radiation of neutrinos // Phys. Lett. B. 1993. Vol. 315, N 1–2. P. 129–133.
271. Dar A. Neutrino magnetic moment may solve the supernovae problem. Inst. Advanced Study Preprint-87-0178. Princeton, 1987.
272. Voloshin M. B. Resonant helicity flip of the electron neutrino due to the magnetic moment and the dynamics of the supernova // Phys. Lett. B. 1988. Vol. 209, N 2–3. P. 360–364.
273. Окунь Л. Б. Рассеяние $\nu_e - \nu_e$ и возможность резонансного изменения нейтринной спиральности в магнитном поле сверхновой // Ядер. физ. 1988. Т. 48, вып. 5 (11). С. 1519–1520.
274. Блинников С. И., Окунь Л. Б. Модели сверхновых и магнитный момент нейтрино // Письма в астроф. журн. 1988. Т. 14. С. 867.
275. Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Магнитный момент нейтрино и стимулирование ударной волны при взрыве сверхновой // Ядерная физика. 2008. Т. 71, вып. 12. С. 2202–2206.
276. Кузнецов А. В., Михеев Н. В., Округин А. А. Магнитный момент дираковского нейтрино и динамика взрыва сверхновой // Письма в журн. эксперим. и теор. физики. 2009. Т. 89, вып. 3. С. 115–120.
277. Janka H.-Th., Langanke K., Marek A. et al. Theory of core-collapse supernovae // Phys. Rept. 2007. Vol. 442, N 1–6. P. 38–74.
278. Kitaura F. S., Janka H.-Th., Hillebrandt W. Explosions of O-Ne-Mg cores, the Crab supernova, and subluminal Type II-P supernovae // Astron. Astrophys. 2006. Vol. 450, N 1. P. 345–350.
279. Janka H.-Th., Müller B., Kitaura F. S., Buras R. Dynamics of shock propagation in O-Ne-Mg core collapse supernovae and nucleosynthesis conditions // Astron. Astrophys. 2008. Vol. 485, N 1. P. 199–208.

280. Dessart L., Burrows A., Ott C. D. et al. Multidimensional simulations of the accretion-induced collapse of white dwarfs to neutron stars // *Astrophys. J.* 2006. Vol. 644, N 2. P. 1063–1084.
281. Burrows A., Dessart L., Ott C. D., Livne E. Multi-dimensional explorations in supernova theory // *Phys. Rept.* 2007. Vol. 442, N 1–6. P. 23–37.
282. Buras R., Rampp M., Janka H.-Th., Kifonidis K. Two-dimensional hydrodynamic core-collapse supernova simulations with spectral neutrino transport. I. Numerical method and results for a $15 M_{\odot}$ star // *Astron. Astrophys.* 2006. Vol. 447, N 3. P. 1049–1092.
283. Pons J. A., Reddy S., Prakash M. et al. Evolution of proto-neutron stars // *Astrophys. J.* 1999. Vol. 513, N 2. P. 780–804.
284. Keil W., Janka H.-Th. Hadronic phase transitions at supranuclear densities and the delayed collapse of newly formed neutron stars // *Astron. Astrophys.* 1995. Vol. 296, N 1. P. 145–163.
285. Справочник по специальным функциям / под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979. 830 с.
286. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. М.: Наука, 1976. 584 с.
287. Yamada S., Janka H.-T., Suzuki H. Neutrino transport in type II supernovae: Boltzmann solver vs. Monte Carlo method // *Astron. Astrophys.* 1999. Vol. 344, N 2. P. 533–550.
288. Arras P., Lai D. Neutrino-nucleon interactions in magnetized neutron-star matter: the effects of parity violation // *Phys. Rev. D.* 1999. Vol. 60, N 4. P. 043001 (1–28).
289. Гвоздев А. А., Огнев И. С. О возможном усилении магнитного поля процессами переизлучения нейтрино в оболочке сверхновой // *Письма в журн. эксперим. и теор. физики.* 1999. Т. 69, вып. 5. С. 337–342.
290. Бисноватый-Коган Г. С., Моисеенко С. Г. Нарушение зеркальной симметрии магнитного поля во вращающейся звезде и возможные астрофизические проявления // *Астрон. журн.* 1992. Т. 69, вып. 3. С. 563–571.

291. Bisnovaty-Kogan G. S. Asymmetric neutrino emission and formation of rapidly moving pulsars // *Astron. Astrophys. Trans.* 1993. Vol. 3, N 4. P. 287–294.
292. Скобелев В. В. Массивный фотон в сильном магнитном поле: каналы генерации и распада // *Изв. вузов. Физика.* 1997. № 2. С. 35–39.
293. Понтекорво Б. М. Универсальное взаимодействие Ферми и астрофизика // *Журн. эксперим. и теор. физики.* 1959. Т. 36, вып. 5. С. 1615–1616.
294. Ландау Л. Д. О моменте системы из двух фотонов // *ДАН СССР.* 1948. Т. 60. С. 207.
295. Yang C. N. Selection rules for the dematerialization of a particle into two photons // *Phys. Rev.* 1950. Vol. 77, N 2. P. 242–245.
296. Липманов Э. М. О возможных экспериментальных проявлениях $(V + A)$ -токов в слабых взаимодействиях элементарных частиц // *Ядер. физ.* 1967. Т. 6, вып. 3. С. 541–546.
297. Липманов Э. М. О нарушенной зеркальной $(V \mp A)$ -симметрии слабых взаимодействий элементарных частиц и свойствах нейтрино // *Журн. эксперим. и теор. физики.* 1968. Т. 55, вып. 6. С. 2245–2251.
298. Липманов Э. М., Михеев Н. В. К вопросу о $(V + A)$ -токах в слабых взаимодействиях элементарных частиц // *Письма в журн. эксперим. и теор. физики.* 1968. Т. 7, вып. 4. С. 139–142.
299. Pati J. C., Salam A. Lepton number as the fourth “color” // *Phys. Rev. D.* 1974. Vol. 10, N 1. P. 275–293.
300. Mohapatra R. N., Pati J. C. Left–right gauge symmetry and an “isoconjugate” model of CP violation // *Phys. Rev. D.* 1975. Vol. 11, N 3. P. 566–571.
301. Mohapatra R. N., Pati J. C. “Natural” left–right symmetry // *Phys. Rev. D.* 1975. Vol. 11, N 9. P. 2558–2561.
302. Senjanović G., Mohapatra R. N. Exact left–right symmetry and spontaneous violation of parity // *Phys. Rev. D.* 1975. Vol. 12, N 5. P. 1502–1505.
303. Bég M. A. B., Budny R. V., Mohapatra R. N., Sirlin A. Manifest left-right symmetry and its experimental consequences // *Phys. Rev. Lett.* 1977. Vol. 38, N 22. P. 1252–1255.

304. Nakamura K., Hagiwara K., Hikasa K. et al. (Particle Data Group). The review of particle physics // J. Phys. G. 2010. Vol. 37, N 7A. P. 075021 (1–1422).
305. Barbieri R., Mohapatra R. N. Limits on right-handed interactions from SN 1987A observations // Phys. Rev. D. 1989. Vol. 39, N 4. P. 1229–1232.
306. Rein D., Sehgal L. M. Coherent production of photons by neutrinos // Phys. Lett. B. 1981. Vol. 104, N 5. P. 394–398; Erratum: *ibid.* 1981. Vol. 106, N 6. P. 513.
307. Герштейн С. С., Комаченко Ю. А., Хлопов М. Ю. Образование одиночных фотонов в эксклюзивном нейтринном процессе $\nu N \rightarrow \nu \gamma N$ // Ядер. физ. 1981. Т. 33, вып. 6. С. 1597–1604.
308. Friman B. L., Maxwell O. V. Neutrino emissivities of neutron stars // Astrophys. J. 1979. Vol. 232, N 9. P. 541–559.
309. Yakovlev D. G., Levenfish K. P. Modified URCA process in neutron star cores // Astron. Astrophys. 1995. Vol. 297, N 5. P. 717–726.
310. Feng J. L., Moroi T., Murayama H. et. al. Third generation familons, B factories, and neutrino cosmology // Phys. Rev. D. 1998. Vol. 57, N 9. P. 5875–5892.
311. Raffelt G. G. Astrophysical methods to constrain axions and other novel particle phenomena // Phys. Rept. 1990. Vol. 198, N 1–2. P. 1–113.
312. Ammar R., Bean A., Besson D. et. al. (CLEO Collaboration). Search for the Familon via $B^\pm \rightarrow \pi^\pm X^0$, $B^\pm \rightarrow K^\pm X^0$, $B^0 \rightarrow K_s^0 X^0$ Decays // Phys. Rev. Lett. 2001. Vol. 87, N 27. P. 271801 (1–5).
313. Sato K., Sato H. Higgs meson emission from a star and a constraint on its mass // Prog. Theor. Phys. 1975. Vol. 54, N 5. P. 1564–1565.
314. Mikheev N. V., Narynskaya E. N. Familon emission by dense magnetized plasma // Mod. Phys. Let. A. 2001. Vol. 16, N 25. P. 1635–1642.
315. Михеев Н. В., Нарынская Е. Н. Фамилонные потери энергии и импульса замагниченной плазмой // Ядер. физ. 2003. Т. 66, вып. 7. С. 1337–1349.

-
316. Averin A. V., Borisov A. V., Studenikin A. I. On a possible mechanism of familon emission from a neutron star // *Phys. Lett. B.* 1989. Vol. 231, N 3. P. 280–282.
317. Аверин А. В., Борисов А. В., Студеникин А. И. Процесс $\mu \rightarrow e +$ фамилон и радиационный сдвиг массы мюона во внешнем поле // *Ядер. физ.* 1989. Т. 50, вып. 4(10). С. 1058–1064.
318. Kachelriess M., Wilke C., Wunner G. Axion cyclotron emissivity of magnetized white dwarfs and neutron stars // *Phys. Rev. D.* 1997. Vol. 56, N 2. P. 1313–1319.

Предметный указатель

- Адлера треугольная аномалия, 66, 257
- Вайнберга угол, 86
- Гелл-Манна теорема, 22, 268
- гауссов пакет, 204
- Дайсона уравнение, 69
- дилогарифм Эйлера, 239
- импульс обобщённый, 204
- интеграл
Бесселя, 50
эллиптический полный, 210
- лагранжиан
взаимодействия
магнитного момента, 137, 182
фамилона с фермионами, 292
эффективный локальный, 86, 204, 256
- магнитное поле
галактическое, 16
критическое
 W -бозона, 40
электрона, 15
крупномасштабное, 16
первичное, 16
полоидальное, 17
скрещенное, 19, 31
тороидальное, 17, 248
- матрица
смешивания лептонов Понте-корво–Маки–Накагавы–Сакаты, 183, 256, 273
- нейтрино
“окно прозрачности” в замагниченной плазме, 243
“спиновый свет”, 91
длина свободного пробега, 202, 240
коэффициент
затухания, 200
поглощения, 200
матрица магнитных моментов, 183
состояния с определённой массой, 183
состояния с определённым ароматом, 183
спектральные температуры, 245
- нуклон
эффективная масса в плазме, 193
- плазменная частота, 53
- плазмон
поперечный, 69
продольный, 69, 297
эффективная масса, 92
- полилогарифм порядка n , 240
- полиномы
Чебышёва–Лагерра, 39, 49

- обобщённые, 130
 - производящая функция, 39
- Чебышёва–Эрмита, 29
- проблема FOE, 226
- пульсары
 - собственные скорости, 21, 227, 248, 302
- распределение
 - Бозе–Эйнштейна, 187
 - Ферми–Дирака, 87
- резонанс циклотронный, 57
- сверхновые
 - асимметричный взрыв, 248
 - ротационный взрыв, 17
 - типа I, 12
 - типа II, 12
- симметрия
 - горизонтальная, 292
 - киральная, динамическое нарушение, 75
 - нарушенная лево–правая, 269, 300
 - Печчеи–Куин нарушенная, 143
- Фейнмана диаграмма, “радуга”, 78
- фотон
 - дисперсия в плазме, 93
 - перенормировка волновой функции, 57, 287
 - термальная масса, 72
- функция
 - Бесселя, 51
 - Бесселя модифицированная, 199, 209
 - Грина
 - запаздывающая, 162
 - причинная, 162
 - гармонического осциллятора, 29
 - Харди–Стокса, 67, 121, 159
 - Эйри, 155, 159, 296
 - Эйри, производная, 199
 - Эйри, соотношения, 157, 217
 - Эйри, уравнение, 155
- химический потенциал
 - протонов, нерелятивистский, 193
- Эйлера постоянная, 59
- эксперимент
 - GEMMA, 180
 - ФАМИЛОН, 293
- электродинамика двумерная, 20
- электрон
 - химический потенциал, 224
 - в сильном поле, 224
 - эффективная масса в плазме, 98
- Янга теорема, 269

Научное издание

Кузнецов Александр Васильевич
Михеев Николай Владимирович

**ЭЛЕКТРОСЛАБЫЕ ПРОЦЕССЫ
ВО ВНЕШНЕЙ АКТИВНОЙ СРЕДЕ**

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова
Компьютерный набор и верстка А. В. Кузнецов

Подписано в печать 16.11.2010. Формат 60×84 1/16.

Бумага тип. Усл. печ. л. 19,53. Уч.-изд. л. 17,8.

Тираж 100 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.
Ярославский государственный университет.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Отпечатано ООО “ИПК Индиго”
150049, г. Ярославль, ул. Свободы, 97
тел. (4852) 93-06-10 (2-57-внутр.)
e-mail: info@indigo-press.ru, www.indigo-press.ru

Для сведения читателей

За последние годы авторами подготовлены следующие издания, в том числе в соавторстве:

Научная литература

Kuznetsov A. V., Mikheev N. V. Electroweak processes in external electromagnetic fields. New York: Springer-Verlag, 2003. 136 p.

Учебная литература

- Василевская Л. А., Михеев Н. В., Пархоменко А. Я. Задания по квантовой теории поля в сильном внешнем магнитном поле: метод. указания. Ярославль: ЯрГУ, 2000. 32 с.
- Кузнецов А. В., Михеев Н. В. Электрослабые процессы во внешних электромагнитных полях: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2001. 72 с.
- Нарынская Е. Н., Михеев Н. В. Введение в аппарат квантовой механики: метод. указания. Ярославль: ЯрГУ, 2003. 36 с.
- Кузнецов А. В. Методы математической физики: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2004. 200 с.
- Кузнецов А. В., Румянцев Д. А. Метод ренормализационной группы в квантовой теории поля: текст лекций. Ярославль: ЯрГУ, 2006. 76 с.
- Кузнецов А. В., Румянцев Д. А. Вариационные задачи теоретической физики: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2008. 96 с.
- Кузнецов А. В., Лоханин М. В. Элементы теории квантовых вычислений: учеб. пособие. Ярославль: ЯрГУ, 2008. 136 с.
- Михеев Н. В., Нарынская Е. Н. Введение в калибровочную теорию классических полей: метод. указания. Ярославль: ЯрГУ, 2009. 32 с.