2. $R_\alpha(n) = \exp\left(-\frac{i\alpha S_n}{\hbar}\right) = \exp\left(-i\frac{\alpha}{2} n\cdot\sigma\right)$

a) $R_\varepsilon^\dagger(n)\, S R_\varepsilon(n) = \left(1 + \frac{i\alpha \vec{S}_n}{\hbar}\right)\left(S_x\hat{x} + S_y\hat{y} + S_z\hat{z}\right)\left(1 - \frac{i\alpha \vec{S}_n}{\hbar}\right)$

$(\alpha = \varepsilon)$

$= \vec{S} + \frac{i\alpha}{\hbar}[\vec{S}\cdot\vec{n}, \vec{S}]\ \cancel{- \frac{i\alpha}{\hbar}[\vec{S}, \vec{S}\cdot\vec{n}]}$

$= \vec{S} + \frac{i\alpha}{\hbar}[\vec{S}\cdot\vec{n}, \vec{S}]$

$= \vec{S} + \frac{i\alpha}{\hbar}[S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z,\ S_x\hat{x} + S_y\hat{y} + S\hat{z}]$

$x$-component $= \frac{i\alpha}{\hbar}[S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z,\ S_x]\hat{x}$

$= \frac{i\alpha}{\hbar}\Big[n_y[S_y, S_x] + n_z[S_z, S_x]\Big]\hat{x}$

$= \frac{\alpha\hbar}{\hbar}(S_z n_y - S_y n_z)\hat{x}$

$\Rightarrow \boxed{R_\varepsilon^\dagger(n)\, S R_\varepsilon(n) = \vec{S} + \alpha(\vec{n}\times\vec{S})}$

$\Rightarrow O(\varepsilon) = (\vec{n}\times\vec{S})$

$\langle n';+|R_\varepsilon^\dagger(n)\, S R_\varepsilon(n)|n';+\rangle = \langle \underbrace{R_\varepsilon(n)\, n';+}|S|\underbrace{R_\varepsilon(n) n';+}\rangle$

$= \langle\vec{S}\rangle_{n'} + \alpha(\vec{n}\times\langle\vec{S}\rangle_{n'})$ $\qquad \langle n'';+|S|n'';+\rangle$

$\qquad\qquad = \vec{n}''$

$= \vec{n}' + \alpha(\vec{n}\times\vec{n}')$

$\Rightarrow \vec{n}'' = \vec{n}' + \alpha(\vec{n}\times\vec{n}')$

clearly this is rotation of $\vec{n}'$ around $\vec{n}$ by infinitesimal angle $\alpha$