Спектральный анализ электрических сигналов

Шмаков Владимир Б04-105
МФТИ - октябрь 2022

Цель работы

Целью данной работы является изучение спектрального состава периодических сигналов.

Сведения об амплитудной модуляции

Рассмотрим амплитудную модуляцию на примере гармонических сигналов:

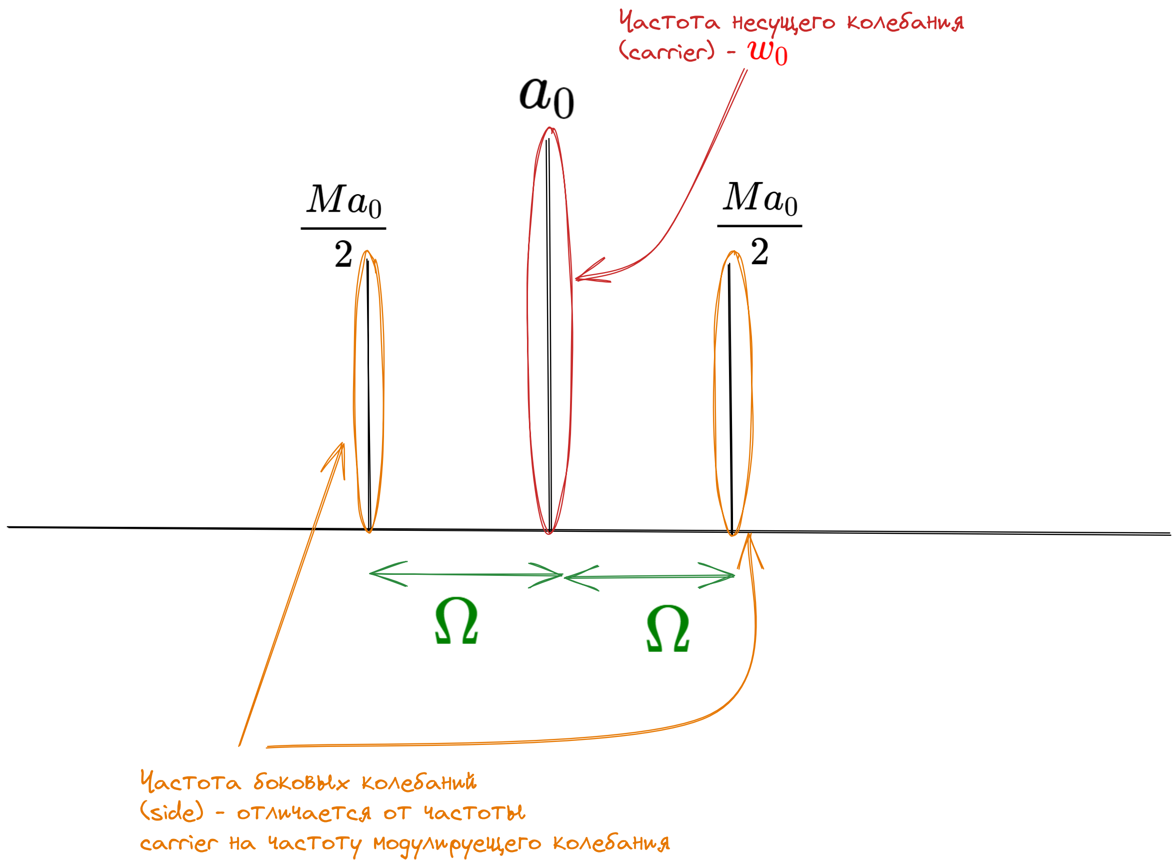
$$f(t) = a_0 \cos(w_0 t) \qquad a(t) = a_0(1 + M\cos(\Omega t)) \tag{1}$$

В данном случае a_0 - сдвиг модулирующего сигнала(*offset*). M - отношение амплитуды модулирующего сигнала к его сдвигу. Этому параметру присвоено название **глубины модуляции.**

Глубину модуляции можем выразить через максимальную и мимнимальную амплитуды результирующего сигнала:

$$M = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$$

В выражении (1) раскроем скобки, и воспользуемся формулой произведения косинусов. В реузльтате получим, что результат амплитудной модуляции есть сумма трёх гармоник:



- $f_{carrier}(t) = a_0 \cos w_0 t$ - частота несущей гармоники совпадает с частотой несущего сигнала
- $f_{sideR}(t) = \frac{Ma_0}{2}\cos(w_0 + \Omega)t$
- $f_{sideL}(t) = \frac{Ma_0}{2}\cos(w_0 - \Omega)t$

Заметим, что согласно полученным формулам:

$$\frac{A_{side}}{A_{carr}} = \frac{Ma_0}{2a_0} = \frac{M}{2} \tag{2}$$

Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

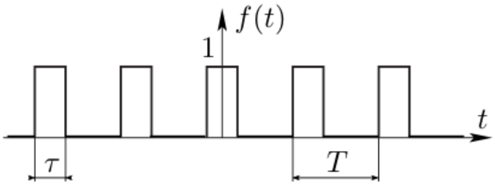
Пусть f - периодическая функция: $f(t) = f(t+T) \quad \forall t$. В курсе математического анализа доказывается, что:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inw_0 t) \quad n \in Z \tag{3}$$

При этом составляющие спектра c_n определяются по формуле:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(inw_0 t)dt \tag{3.1}$$

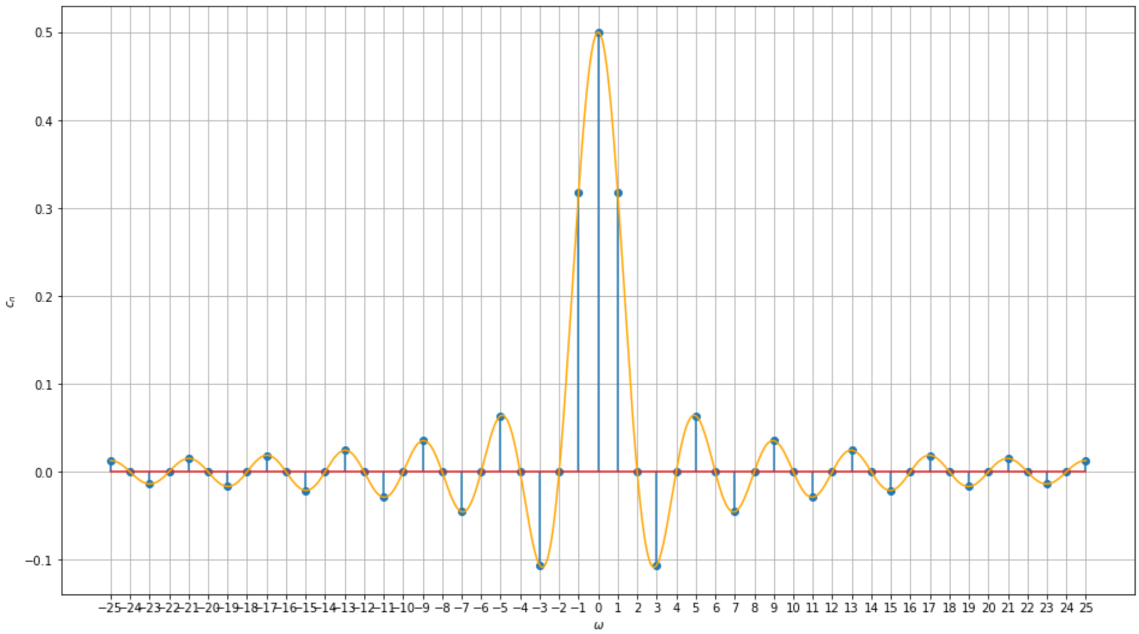
Теперь можем найти спектр мендра. Пусть τ - длительность импульса, T - период сигнала:



Для нахождения составляющих спектра проинтегрируем выражение (3.1) на интервале $[-T/2, T/2]$. Рассматриваемая функция f отлична от нуля только на промежутке от $[-\tau/2, \tau/2]$. Получаем:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(inw_0 t)dt = \frac{sin(\pi n\tau/T)}{\pi n} \tag{4}$$

В качестве примера приведу спектр меандра со скважностью 2:



> оранжевым обозначены линии огибающей спектра

Полуширину главного максимума огибающей функции можем найти из условия $sin(w\tau/2) = 0$. Отсюда получаем:

$$\Delta w\tau = 2\pi \tag{5}$$

Данная формула называется **соотношением неопределённости**.

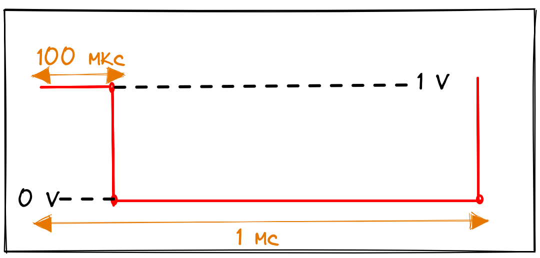
Оборудование

- Двуканальный генератор электрических сигналов
- АЦП с частотой дисретизации $48.8\ kHz$.
- Компьютер с программой для анализа спектра

Обработка результатов эксперимента

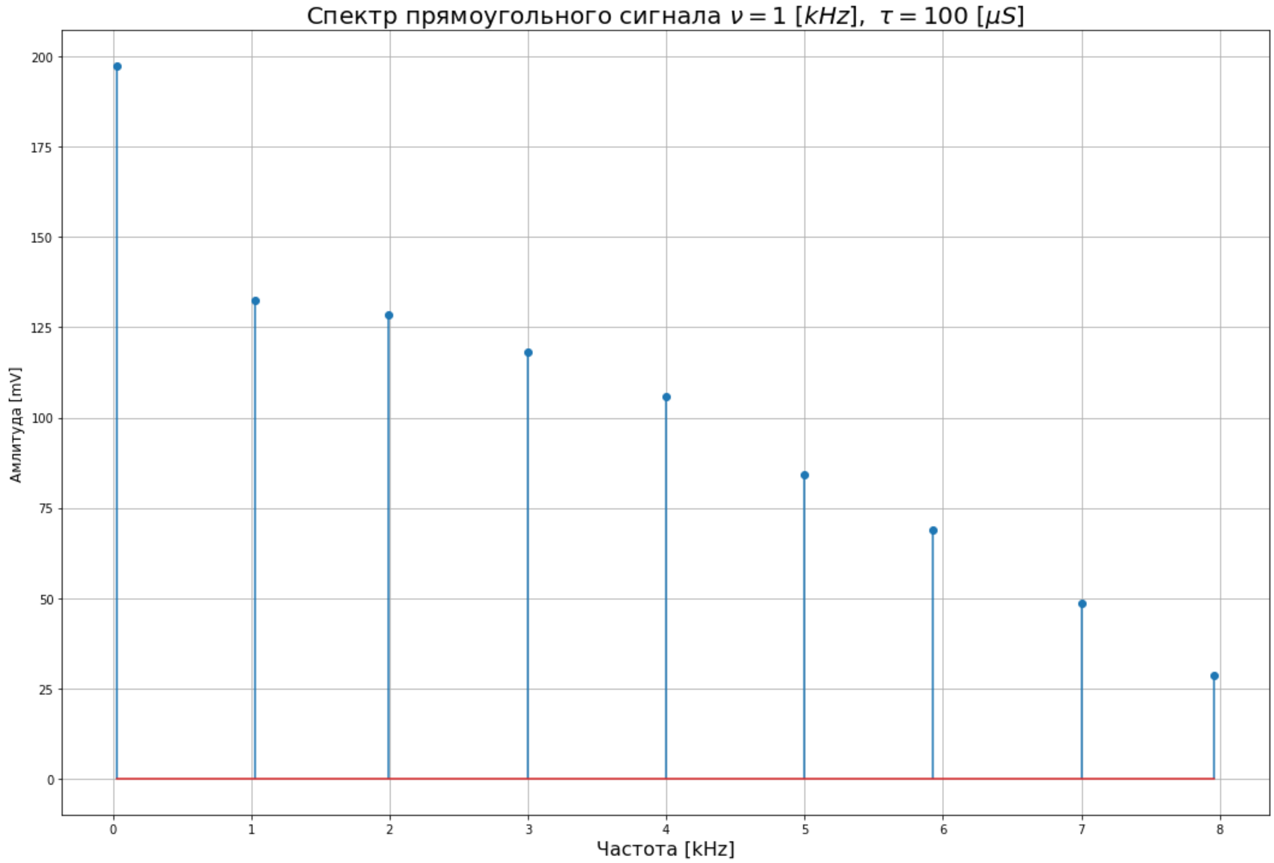
Спектр периодической последовательности прямоугольных сигналов

Исследуем спектр периодической последовательности прямоугольных сигналов. Для этого подадим на спектрометр прямоугольный сигнал с харатеристиками:

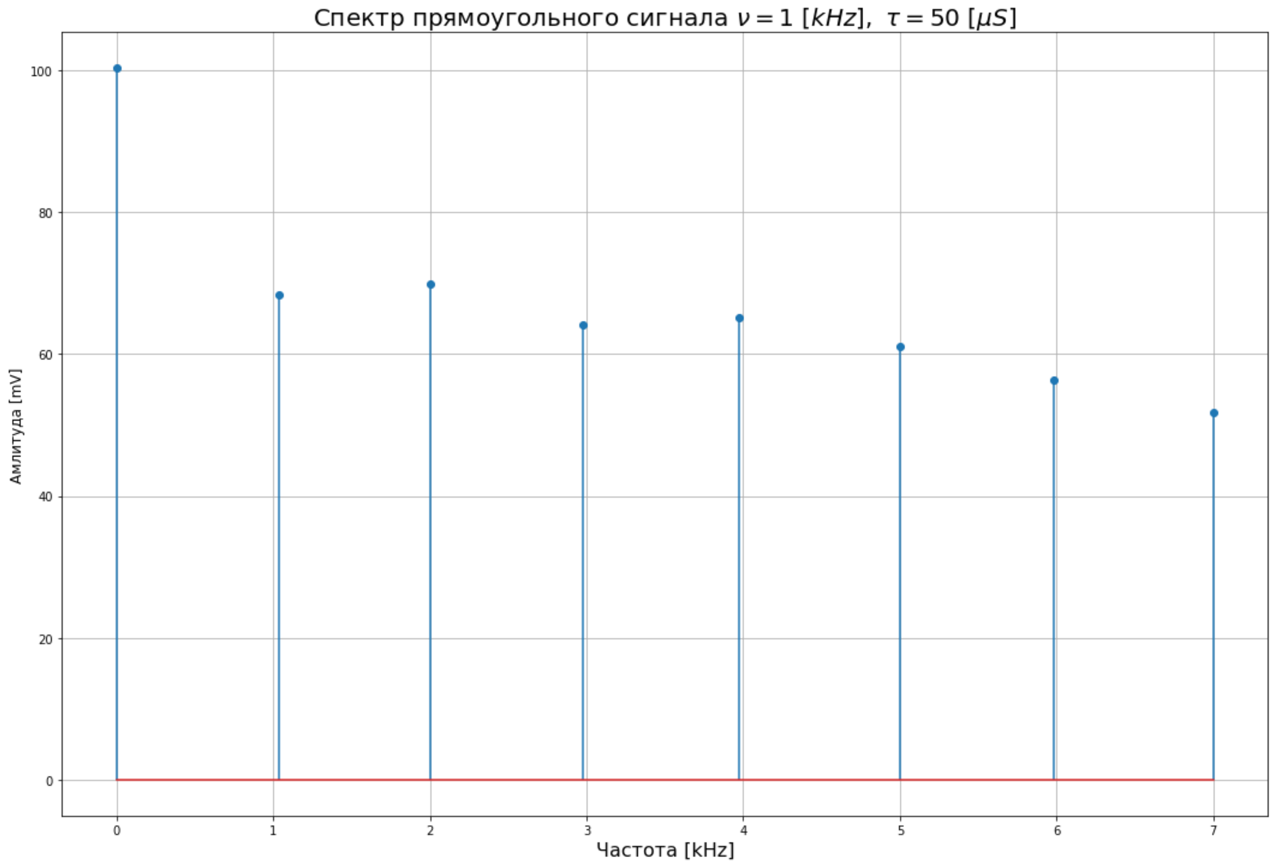


- $f = 1\ kHz$
- $Ampl = 0.5V$
- $Offset = 0.5V$
- $\tau = 100\mu s$

В результате получаем следующий спектр:



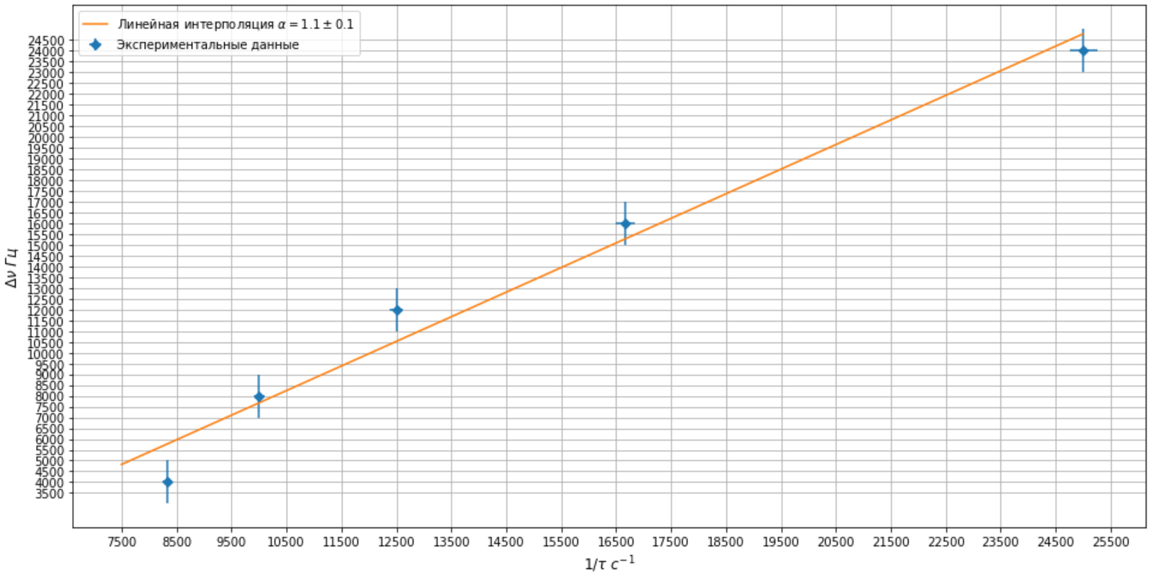
Теперь попробуем увеличить скважность сигнала вдвое. Согласно теоретической модели, ширина спектра тоже должна увеличиться. При этом частоты «пиков» спектра останутся неизменными:



Изменяя скважность сигнала (ручкой параметра τ) можем наблюдать изменение ширины спектра.

Изменим τ от 40 до 120 $мкс$, и запишем ширину спектра.

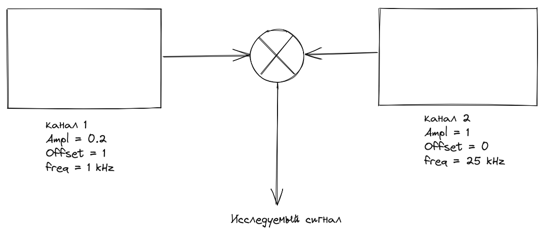
По полученным данным можем проверить соотношение неопределённости (5). Для этого построим график зависимости ширины спектра $\Delta\nu$ от величины, обратной длительности имупульса:



Методом наименьших квадратов вычислим наклон наилучшей кривой. Получим: $\alpha = 1.1 \pm 0.1$.
Согласно соотношению неорпедлённости $\Delta\nu\tau = 1$. Значит *экспериментально полученное значение в пределах погрешности совпадает с табличным*.

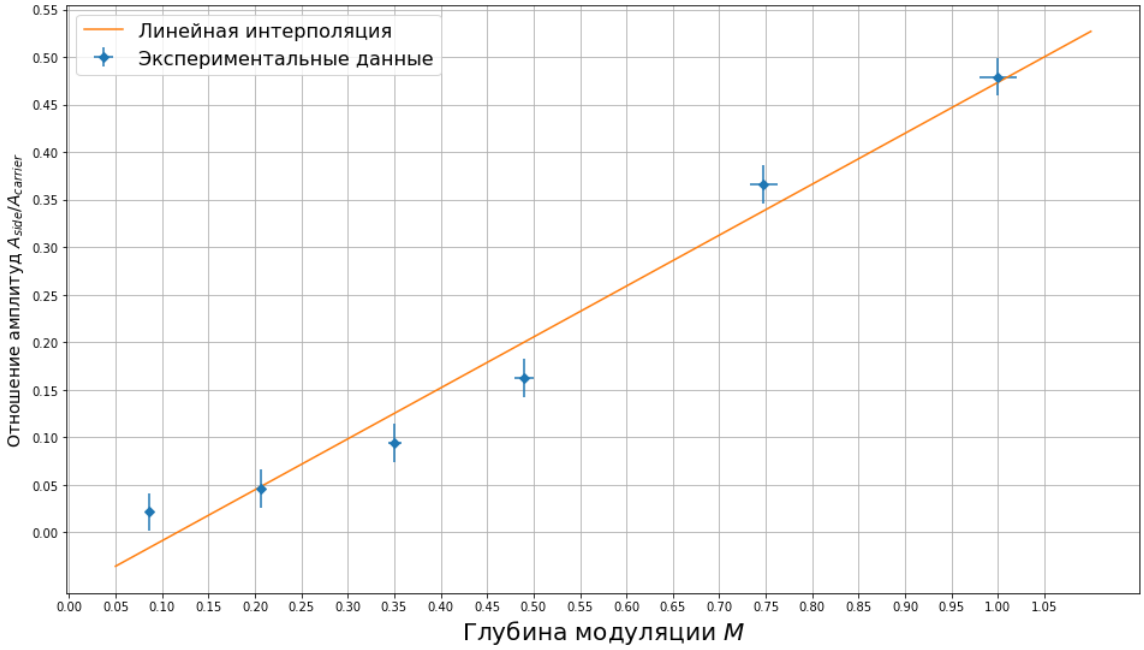
Амплитудная модуляция

Исследуем результат амплитудной модуляции синусоидального сигнала частототой $25\ kHz$, синусоидальным сигналом с частотой $1\ kHz$.



Посмотрим, как изменяется спектральный состав исследуемого сигнала в зависимости от глубины модуляции(глубиной модуляции позволяет управлять парметр *Ampl* первого канала генератора).
Для каждого эксперимента рассчитаем глубну модуляции, и построим часть наблюдаемого спектра(в диапазоне от 23 до 27 килоГерц):

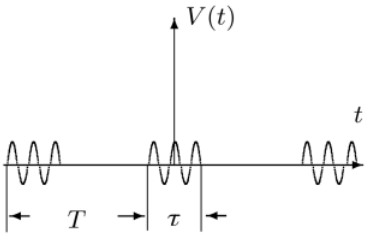
По полученным данным можем проверить формулу (2). Для этого построим график зависимости A_{side}/A_{carr} от глубины модуляции M:



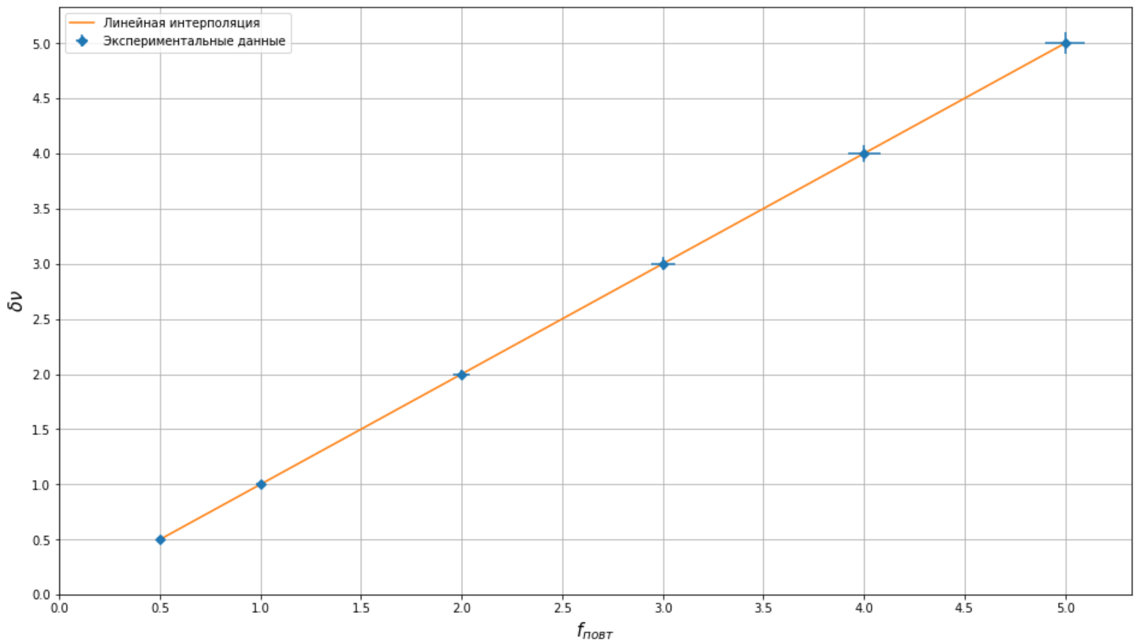
Наклон кривой аппроксимации получился равным $\alpha = 0.53 \pm 0.04$. При этом «табличное» значение составляет 0.5. Значит результат эксперимента в пределах погрешности совпадает со значением теоретической модели.

Исследование периодической последовательности цугов

Теперь выполняем амплитудную модуляцию синусоидального сигнала частотой $30\ kHz$ прямоугольным сигналом частотой $1\ kHz$. В результате получим периодическую последовательность цугов:



Спектр данного сигнала изменяется при разных значениях $f_{повт}$ - частоты прямоугольного сигнала. Рассмотрим, как изменяется расстояние между ближайшими пиками $\delta\nu$ в зависимости от $f_{повт}$:



Коэффициент наклона наилучшей прямой оказался равным: $\alpha = 1 \pm 0.05$. Таким образом, результат совпал с теоретической моделью.

Вывод

В работе мы ознакомились со спектральным составом периодических сигналов. А именно с прямоуголным сигналом и синусоидальным сигналом, модулированным по амплитуде.

Помимо этого удалось экспериментально проверить частный случай соотношения неопределённости.

Приложение

С рассчетами и данными можно ознакомиться в репозитории: https://github.com/ShmakovVladimir/Labs