

Магнитометр (3.1.1)

Шмаков Владимир Б04-105

МФТИ

15.09.22

Цель работы

- Определить горизонтальную составляющую магнитного поля земли
- Установить соотношение между единицами измерения тока в СИ и СГС

Оборудование

- Магнитометр
- Осветитель со шкалой
- Блок питания(диапазон напряжений - 0 – 120 Вольт)
- Вольтметр
- Конденсатор(емкость - $5 \cdot 10^9$ едениц СГС)
- Намагниченный стержень($m = 5.9$ грамм, $d = 4$ см, $r = 0.5$ см)
- Секундомер
- Рулетка
- Штангенциркуль

Теоретические данные

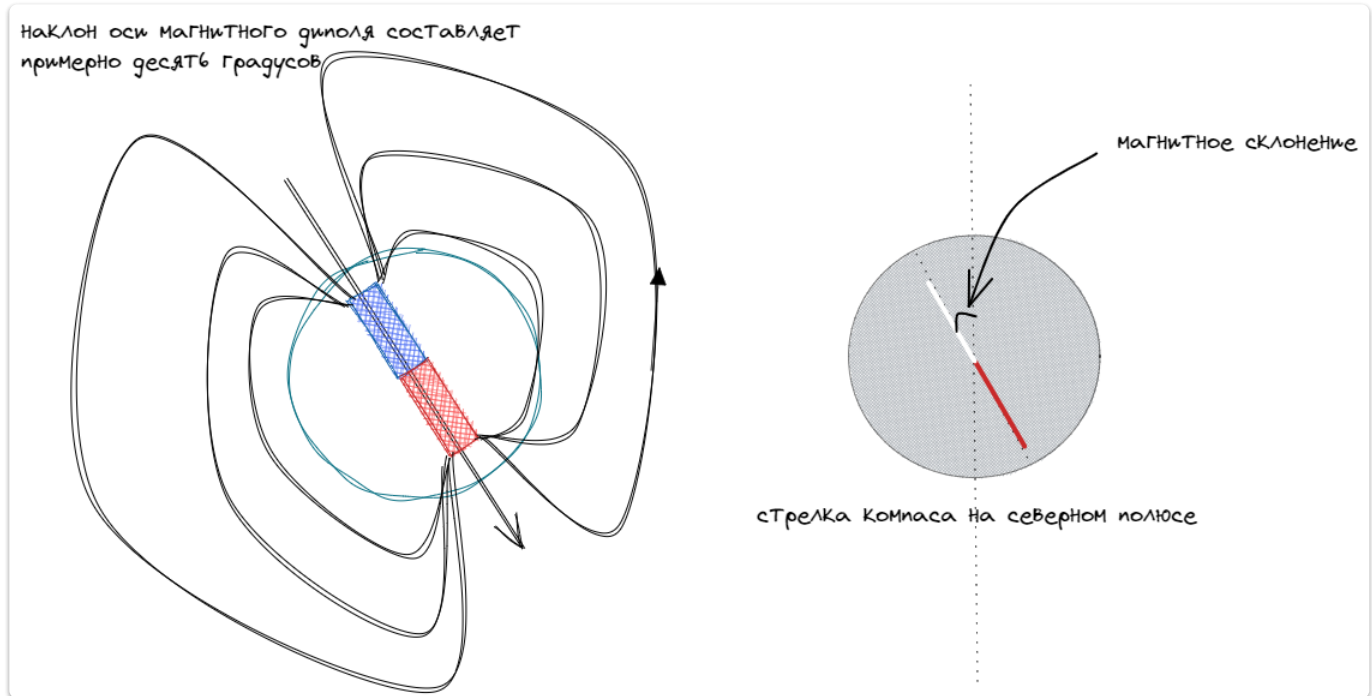
В ядре нашей планеты есть источники магнитного поля. При этом магнитное поле земли устроено достаточно сложно. Поэтому будем рассматривать лишь часть от общего поля, называемая **главным полем**.

Главное поле можно приблизить полем магнитного диполя. Данное приближение является достаточно точным(если бы не являлось, то Колумб бы не открыл Америку). Магнитный дипольный момент земли оценивают $7.2 \cdot 10^{22} \text{ А} \cdot \text{м}^2$.

Для описания магнитного поля земли введено множество терминов. Разберёмся с некоторыми из них.

- **Магнитный меридиан** - проекция силовых линий магнитного поля на поверхность земли. Обычный компас как раз показывает направление магнитного меридиана.

Экспериментально установлено, что магнитные полюса не совпадают с географическими. Стрелка компаса на северном полюсе(географическом) будет чуть отклонена от вертикального положения:

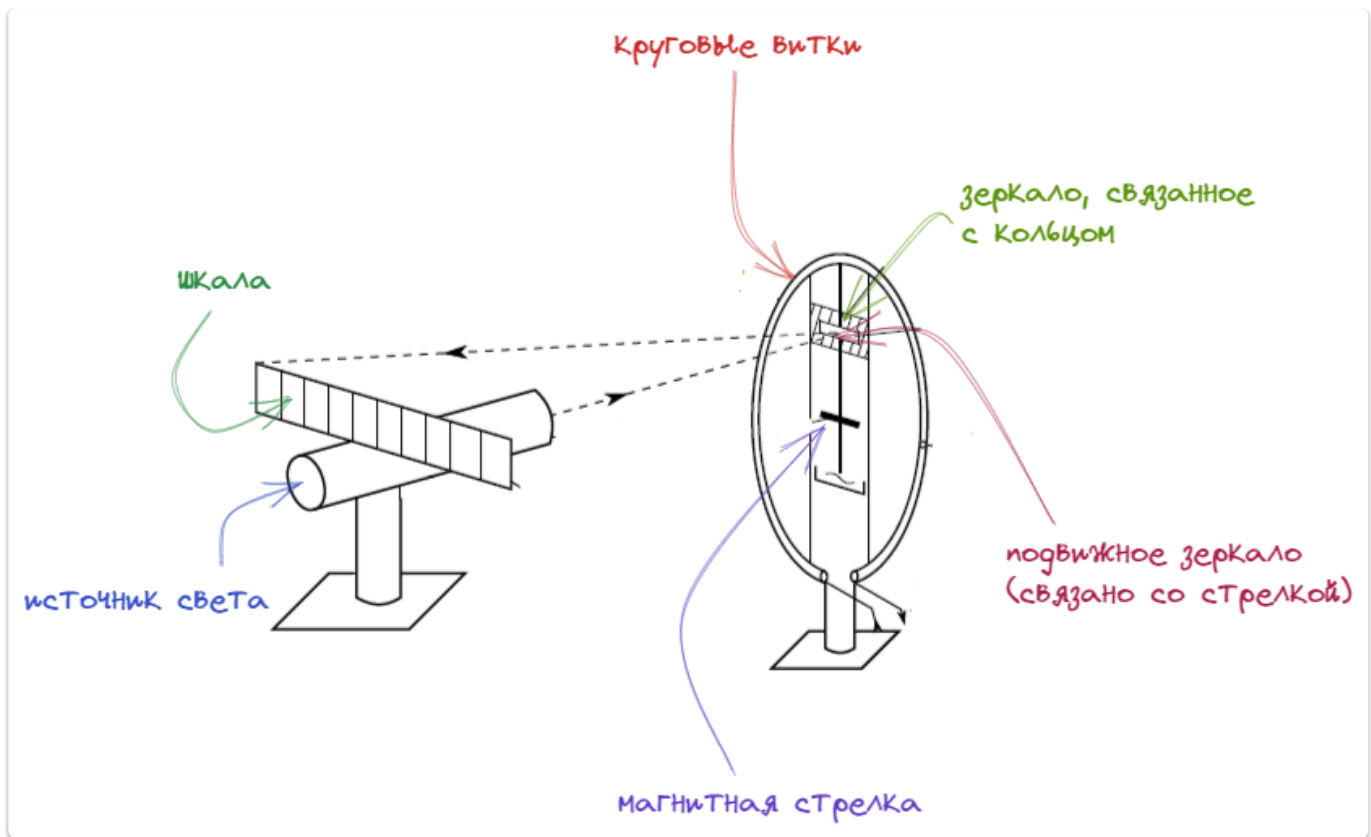


В связи с отклонением магнитного диполя земли от оси вращения, ввели термин магнитного склонения. **Магнитное склонение** - угол между направлением магнитных и географических меридианов.

Из ранее описанной теории ясно, что магнитное поле земли действует не только в горизонтальной, но и в вертикальной плоскости. Для описания данной характеристики магнитного поля земли, использует термин магнитное склонение. **Магнитное склонение** - угол между плоскостью горизонта и вектором магнитной индукции.

Стоит понимать, что из-за внешних факторов магнитное поле земли изменяется со временем. Для описания вариаций магнитного поля в данной точке пространства вводят следующую величину: $\eta = B_{cp} - B(t)$.

Экспериментальная установка



Экспериментальная установка изображена выше. Попробуем понять, как при помощи данного оборудования определить горизонтальную составляющую магнитного поля земли.

Определение горизонтальной составляющей магнитного поля земли

Сначала поместим стержень в дополнительное магнитное поле, направленное горизонтально.

Для этого используем намагниченный стержень, выполненный из ферромагнитного материала. Считаем стержень магнитным диполем, тогда:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3} \right)$$

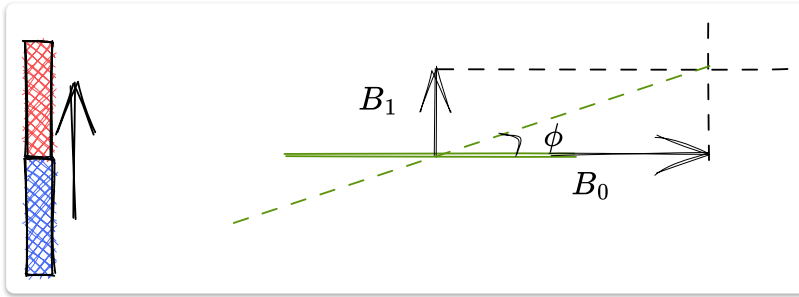
Установим стержень в отверстие на кольце. Стрелка отклонится вследствие действия магнитного поля стержня:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{R^3}$$

Связать между B_1 и B_0 можно через тангенс угла отклонения магнитной стрелки:

$$B_0 = \frac{B_1}{\tan \phi}$$

Данное соотношение очевидно, так стрелка будет направлена по равнодействующей магнитных полей:



Теперь осталось лишь исключить m из итоговой формулы для нахождения B_0 . Для этого измерим период крутильных колебаний стержня в магнитном поле земли. Период крутильных колебаний стержня определяется по формуле:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mB_0}}$$

Отсюда и выражается магнитный момент.

Определение скорости света

Согласно **закону Био и Савара** магнитное поле в центре кольца с током равно:

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2R} N$$

Можем выразить B_2 , используя результат предыдущего эксперимента. Для этого необходимо лишь узнать тангенс угла отклонения стрелки.

Таким образом, узнаём ток в цепи единицах СИ(А).

Чтобы узнать ток в единицах СГС соберём колебательный контур:

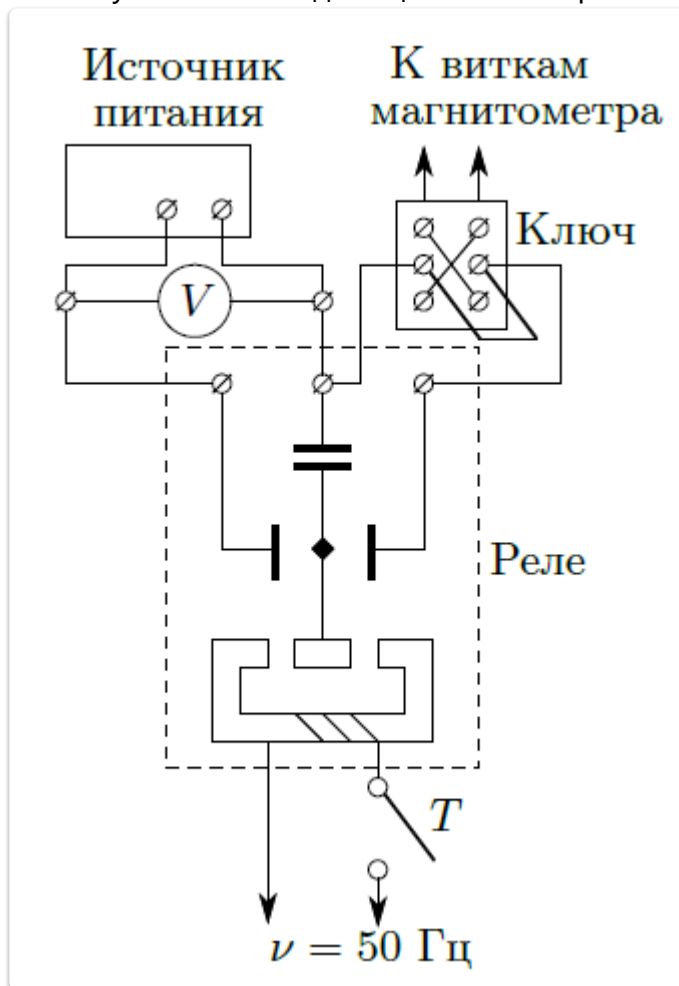


Схема предельно проста. Реле замыкает контакт с частотой $\nu = 50$ Гц, таким образом на LC цепь подаётся прямоугольный сигнал. Другими словами, конденсатор перезаряжается 50 раз в секунду (разрядка происходит благодаря контакту с катушкой магнитометра). Рассчитаем средний ток в цепи:

$$I = q\nu = CU\nu$$

Выразив C и U в системе СГС получим абсолютную величину тока.

Для выражения электродинамической постоянной (скорости света) воспользуемся формулой:

$$c \left[\frac{\text{м}}{\text{с}} \right] = \frac{1}{10} \frac{I_{[\text{СГС}]}}{I_{[\text{СИ}]}}$$

Обработка результатов эксперимента

Вычисление горизонтальной составляющей магнитного поля земли

Определение периода колебаний стрелки магнитометра

Определим период колебаний < <зайчика> > - для этого поместим намагниченный стержень в шахту и используя секундомер измерим время, необходимое для совершения пяти колебаний.

Получим следующие данные - $t_1 = 36c$, $t_2 = 36c$, $t_3 = 40c$

Усредним данные и учтём инструментальную(погрешность измерения времени + человеческий фактор) и случайную погрешности.

В результате период колебаний $T = 7.5 \pm 0.4c$. Погрешность составила пять процентов и основной вклад внесла случайная ошибка(рассчитанная методом MSE).

Рассчёт B_0

Теперь мы готовы рассчитать горизонтальную составляющую магнитного поля земли. Это можно сделать используя формулу:

$$B_0 = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{L\mu_0 m\left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4}\right)}{Rx_1}}}{RT}$$

тут уже подставлено выражение для вычисления момента инерции стержня относительно центра.

Оценить погрешность позволяет метод частных производных. Так как B_0 зависит от множества параметров, удобнее применять методы линейной алгебры для вычисления.

Для начала введём вектор, содержащий ошибки для каждой из величин от которых зависит B_0 :

$$\begin{aligned} ||B_0^{EV}|| &= [\Delta_m \quad \Delta_l \quad \Delta_r \quad \Delta_R \quad \Delta_T \quad \Delta_L \quad \Delta_{x_1}]^T = \\ &= [0.1c \quad 0.001m \quad 0.001m \quad 0.005m \quad 0.4c \quad 0.01m \quad 0.005m]^T \end{aligned}$$

EV - сокращение от error variables(непеременные - погрешности)

Затем **поэлементно** умножим данный вектор на градиент B_0 :

$$||B_0^E|| = |(B_0^{EV})_{i1} \cdot (\text{grad } B_0)_{i1}|$$

Нетрудно заметить, что евклидова норма полученного вектора $||B_0^E||$ и есть искомая погрешность(согласно методу частных производных):

$$\Delta B = |B_0^E|_2$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}
 (\Delta B_0)^2 = & \frac{9\pi \left| \frac{\Delta_R \sqrt{\frac{L\mu_0 m \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right)}{Rx_1}}}{R^2 T} \right|^2}{2} + 2\pi \left| \frac{\Delta_T \sqrt{\frac{L\mu_0 m \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right)}{Rx_1}}}{RT^2} \right|^2 + \\
 & \pi \left| \frac{\Delta_L \sqrt{\frac{L\mu_0 m \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right)}{Rx_1}}}{LRT} \right|^2 + \pi \left| \frac{\Delta_m \sqrt{\frac{L\mu_0 m \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right)}{Rx_1}}}{RTm} \right|^2 + \\
 & + \frac{\pi \left| \frac{\Delta_{x_1} \sqrt{\frac{L\mu_0 m \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right)}{Rx_1}}}{RTx_1} \right|^2}{2} + \frac{\pi \left| \frac{\Delta_l \sqrt{\frac{L\mu_0 m \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right)}{Rx_1}}}{RT \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right)} \right|^2}{72} + \frac{\pi \left| \frac{\Delta_r \sqrt{\frac{L\mu_0 m \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right)}{Rx_1}}}{RT \left(\frac{l^2}{12} + \frac{r^2}{4} \right)} \right|^2}{8}
 \end{aligned}$$

Подставим данные в полученные формулы и получим следующий результат:

$$B_0 = 13000 \pm 1000 \text{ нТл}$$

Сравним результат с <<табличным>> значением. Воспользуемся [международной моделью IGRF](#). Введя координаты и дату получим данные:

Latitude	Longitude	Altitude	Date	Version
55.93	37.521	0.00	2022-09-15	13

Comp	D	I	X	Y	H	Z	F
MF	11.841	71.772	16205	3397	16557	50276	52932
SV	8.1	2.5	-20.9	35.3	-13.3	82.6	74.3

Таким образом горизонтальная составляющая $B_{0T} = 16557 \text{ нТл}$

Расхождение экспериментального результата с <<табличным>> составляет 15.6%.

Теперь можем обратиться к [каталогу магнитных бурь](#) и понять, что расхождение нашего эксперимента с данными калькулятора достаточно велико. Максимальное отклонение горизонтальной составляющей магнитного поля зарегистрировано в 1989 году и составило 2810 нТл (что всё равно меньше нашего отклонения). 15.09 магнитных бурь не зарегистрировано -> **отклонение связано с неточностями при выполнении эксперимента.**

Вычисление электродинамической постоянной (скорости света)

Теперь сделаем эксперимент Б. Это позволит нам рассчитать ток в цепи, и выразить его в различных единицах.

Рассчитаем ток в системе СИ

В результате эксперимента получили следующие данные - $x_1 = 11.5$ см , $x_2 = 12$ см - отклонение <<зайчика>> при пропускании тока через катушку в разных направлениях. Усредним данные, вычислим случайную погрешность. К случайной погрешности добавим инструментальную, в результате получим отклонение $x = 11.7 \pm 0.5$ см.

Теперь у нас есть все необходимые данные для вычисления силы тока по формуле:

$$I_1 = \frac{B_0 R x}{L N \mu_0}$$

Оценим погрешность аналогично предыдущему пункту:

$$\Delta I_1 = \sqrt{\left| \frac{B_0 R \Delta x}{L N \mu_0} \right|^2 + \left| \frac{B_0 \Delta_R x}{L N \mu_0} \right|^2 + \left| \frac{R \Delta_{B_0} x}{L N \mu_0} \right|^2 + \left| \frac{B_0 R \Delta_L x}{L^2 N \mu_0} \right|^2}$$

В результате подстановки экспериментальных данных получим:

$$I_1 = 0.0051 \pm 0.0005 \text{ A}$$

погрешность измрения составила 9.2%, основной вклад в погрешность вносит погрешность измерения B_0

Рассчитаем ток в системе СГС

Воспользуемся формулой $I_2 = C U \Omega$. Погрешность буду оценивать по формуле:

$$\Delta I_2 = \sqrt{|C \Delta_U \Omega|^2 + |U \Delta_C \Omega|^2}.$$

Погрешность напряжения - погрешность шкалы вольтметра. Погрешность измерения ёмкости указана на установке.

Таким образом

$$I_2 = 143 \pm 3 \cdot 10^5 \text{ единиц СГС для измерения тока}$$

Посчитаем скорость света

$$c = \frac{I_2}{10 \cdot I_1}$$

Оценив погрешность методом частных производных получим:

$$c = 281406490 \pm 26657523 \text{ м/с} = 280 \pm 30 \cdot 10^6 \text{ м/с}$$

Сравним значение с табличным. Согласно источнику [википедия](#) скорость света составляет $300 \cdot 10^6$ м/с. Таким образом, экспериментальное значение совпадает с табличным(в пределах погрешности).

Вывод

Удалось оценить горизонтальную составляющую магнитного поля земли, используя незамысловатое оборудование. Однако результат работы отличается от <<табличного>>. Это может быть связано с воздействием внешних факторов.

Удалось выразить электродинамическую постоянную (скорость света), и найти связь между различными единицами измерения тока. Результат нахождения скорости света совпадает с табличным значением.