

Спектральный анализ электрических сигналов

Шмаков Владимир Б04-105

МФТИ - октябрь 2022

Введение

Целью данной работы является изучение спектрального состава периодических сигналов.

Сведения об амплитудной модуляции

Рассмотрим амплитудную модуляцию на примере гармонических сигналов:

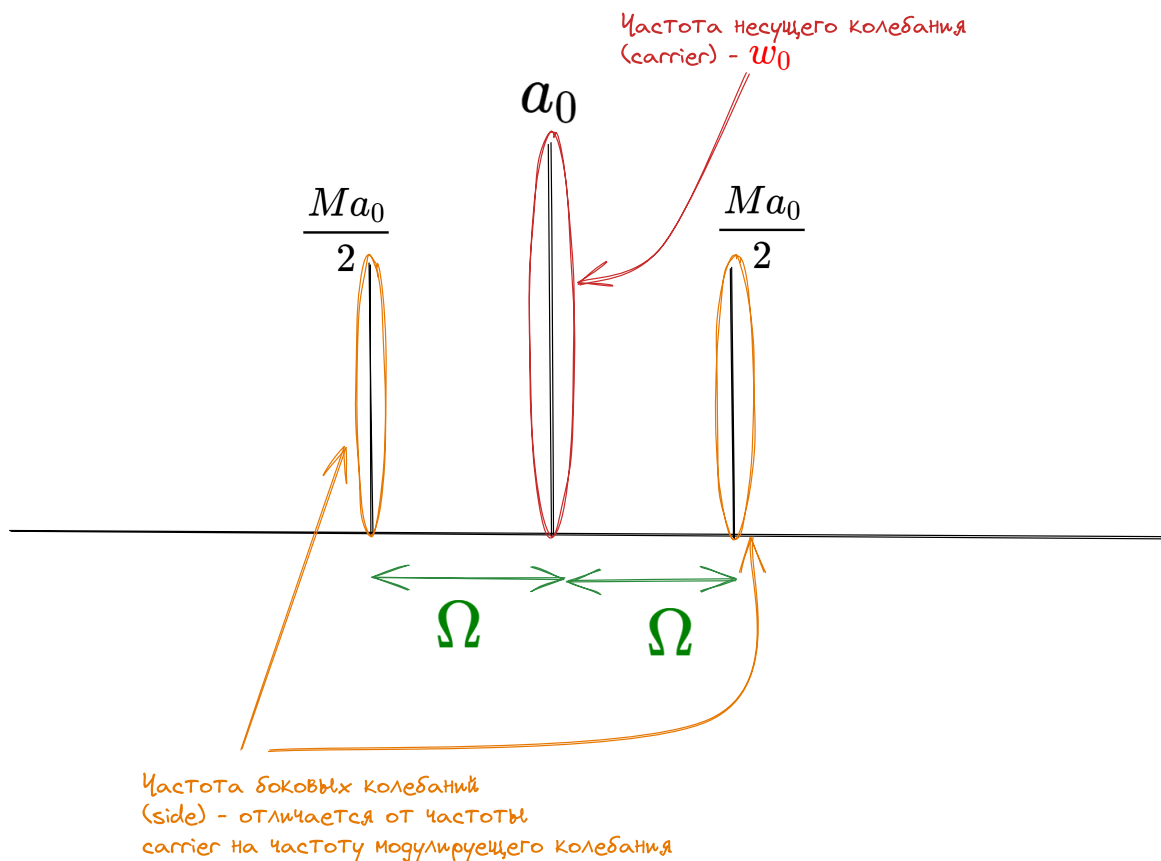
$$f(t) = a_0 \cos(w_0 t) \quad a(t) = a_0(1 + M \cos(\Omega t)) \quad (1)$$

В данном случае a_0 - сдвиг модулирующего сигнала(offset). M - отношение амплитуды модулирующего сигнала к его сдвигу. Этому параметру присвоено название **глубины модуляции**.

Глубину модуляции можем выразить через максимальную и минимальную амплитуды результирующего сигнала:

$$M = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$$

В выражении (1) раскроем скобки, и воспользуемся формулой произведения косинусов. В результате получим, что результат амплитудной модуляции есть сумма трёх гармоник:



- $f_{carrier}(t) = a_0 \cos w_0 t$ - частота несущей гармоники совпадает с частотой несущего сигнала
- $f_{sideR}(t) = \frac{Ma_0}{2} \cos(w_0 + \Omega)t$
- $f_{sideL}(t) = \frac{Ma_0}{2} \cos(w_0 - \Omega)t$

Заметим, что согласно полученным формулам:

$$\frac{A_{side}}{A_{carr}} = \frac{Ma_0}{2a_0} = \frac{M}{2} \quad (2)$$

Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

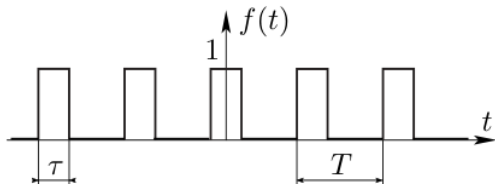
Пусть f - периодическая функция: $f(t) = f(t + T) \quad \forall t$. В курсе математического анализа доказывается, что:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(inw_0 t) \quad n \in Z \quad (3)$$

При этом составляющие спектра c_n определяются по формуле:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(inw_0 t) dt \quad (3.1)$$

Теперь можем найти спектр меандра. Пусть τ - длительность импульса, T - период сигнала:

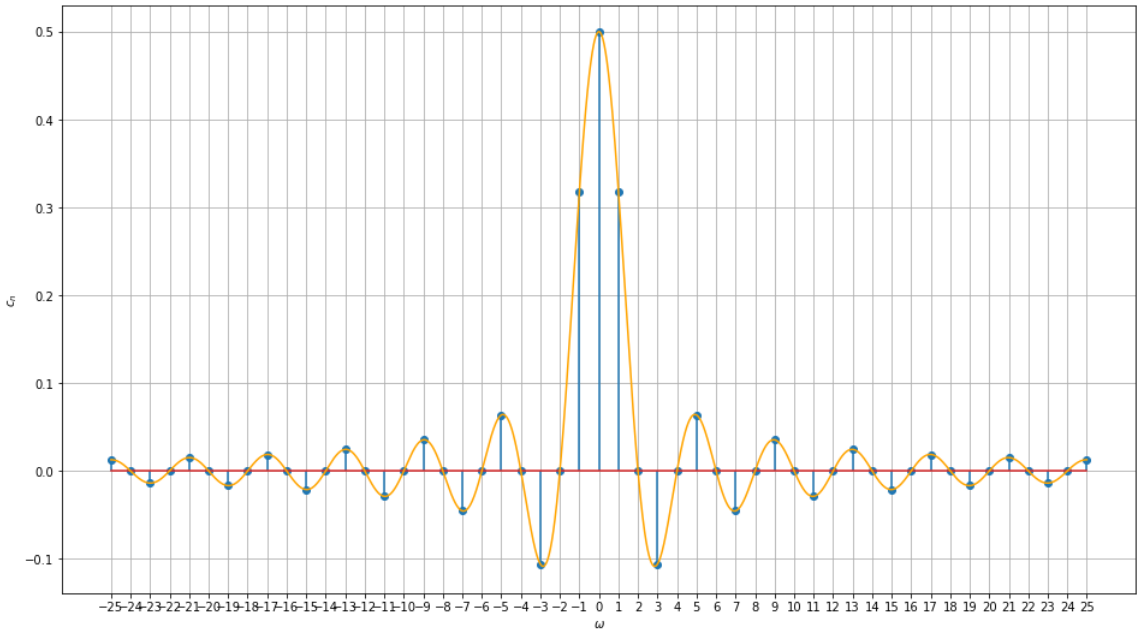


Для нахождения составляющих спектра проинтегрируем выражение (3.1) на интервале $[-T/2, T/2]$. Рассматриваемая функция f отлична от нуля только на промежутке от $[-\tau/2, \tau/2]$. Получаем:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \exp(inw_0t) dt = \frac{\sin(\pi n \tau / T)}{\pi n}$$

(4)

В качестве примера приведу спектр меандра со скважностью 2:



оранжевым обозначены линии огибающей спектра

Полуширину главного максимума огибающей функции можем найти из условия $\sin(w\tau/2) = 0$. Отсюда получаем:

$$\Delta w \tau = 2\pi$$

(5)

Данная формула называется соотношением неопределённости.

Методика

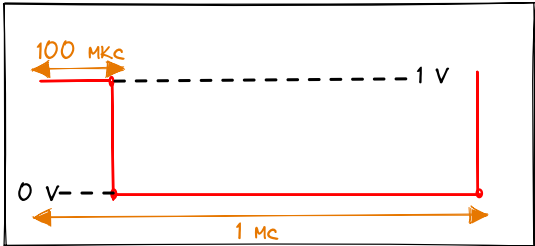
В эксперименте использовали:

- Двухканальный генератор электрических сигналов
- АЦП с частотой дискретизации 48.8 kHz.
- Компьютер с программой для анализа спектра

Обработка результатов эксперимента

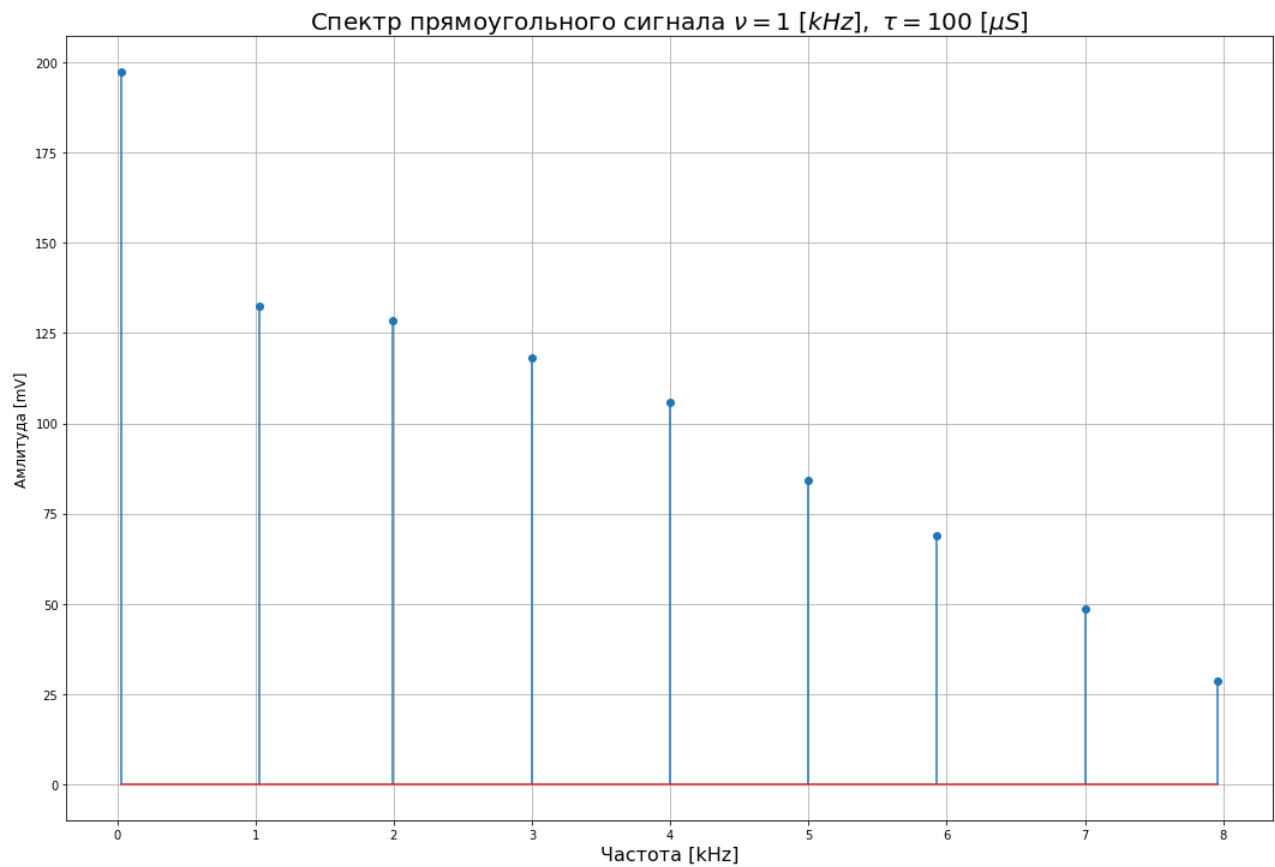
Спектр периодической последовательности прямоугольных сигналов

Исследуем спектр периодической последовательности прямоугольных сигналов. Для этого подадим на спектрометр прямоугольный сигнал с характеристиками:

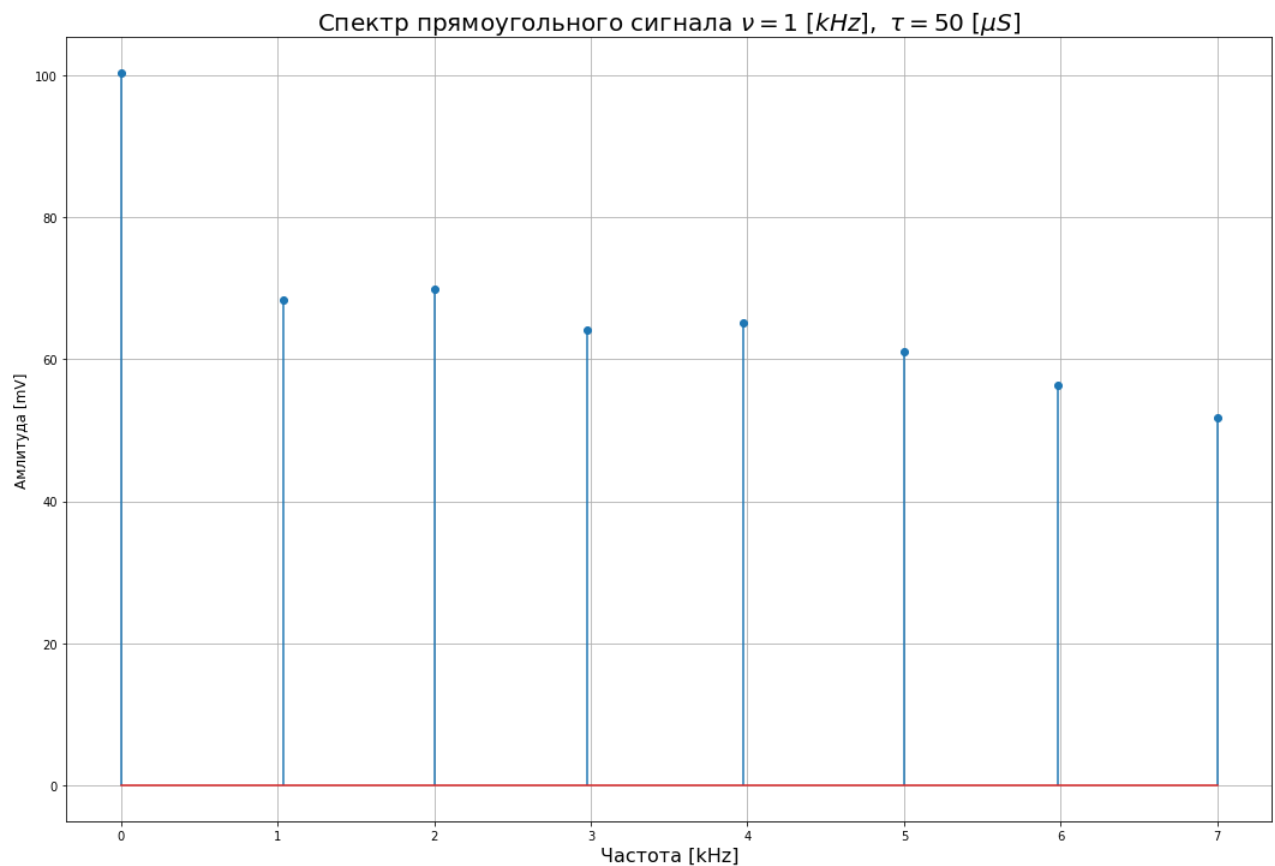


- $f = 1\text{ kHz}$
- $Ampl = 0.5V$
- $Offset = 0.5V$
- $\tau = 100\mu s$

В результате получаем следующий спектр:



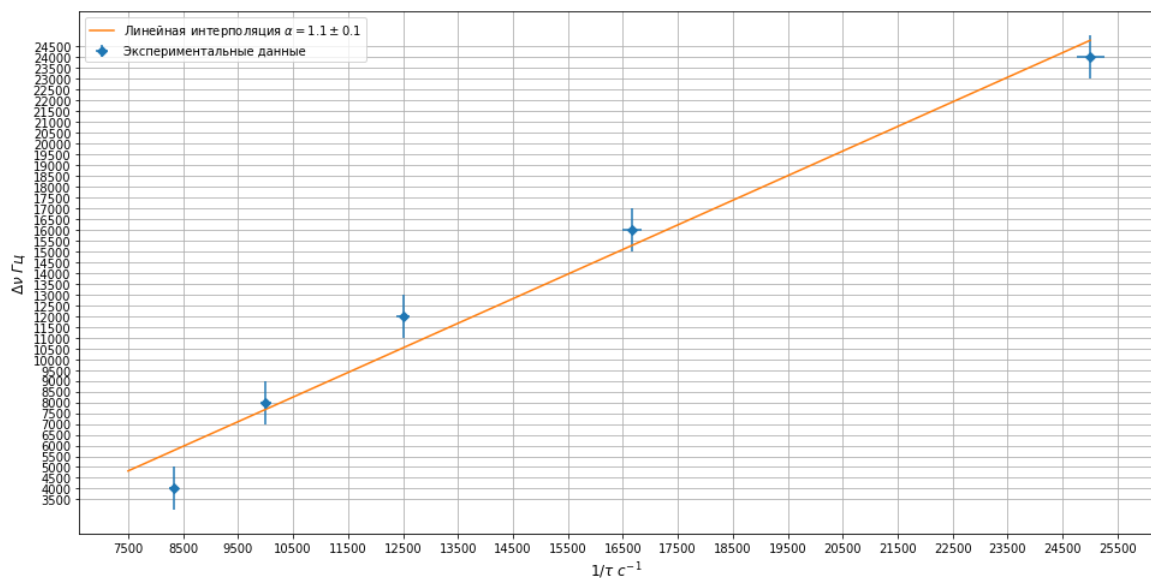
Теперь попробуем увеличить скважность сигнала вдвое. Согласно теоретической модели, ширина спектра тоже должна увеличиться. При этом частоты «пиков» спектра останутся неизменными:



Изменяя скважность сигнала (ручкой параметра τ) можем наблюдать изменение ширины спектра.

Изменим τ от 40 до 120 мкс, и запишем ширину спектра.

По полученным данным можем проверить соотношение неопределённости (5). Для этого построим график зависимости ширины спектра $\Delta\nu$ от величины, обратной длительности импульса:

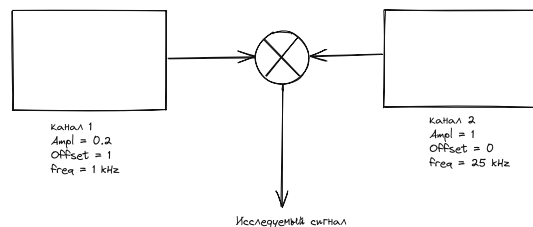


Методом наименьших квадратов вычислим наклон наилучшей кривой. Получим: $\alpha = 1.1 \pm 0.1$.

Согласно соотношению неопределённости $\Delta\nu T = 1$. Значит экспериментально полученное значение в пределах погрешности совпадает с табличным.

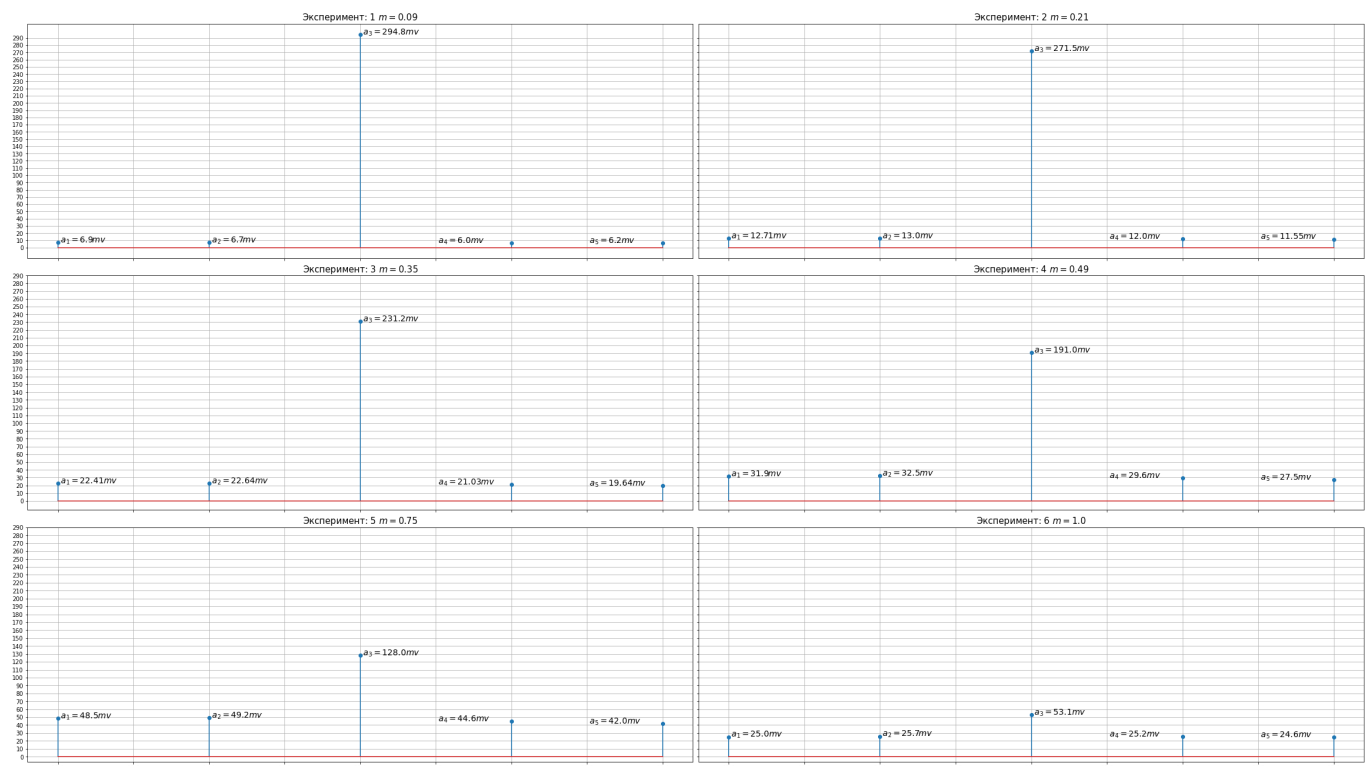
Амплитудная модуляция

Исследуем результат амплитудной модуляции синусоидального сигнала частотой 25 kHz , синусоидальным сигналом с частотой 1 kHz .

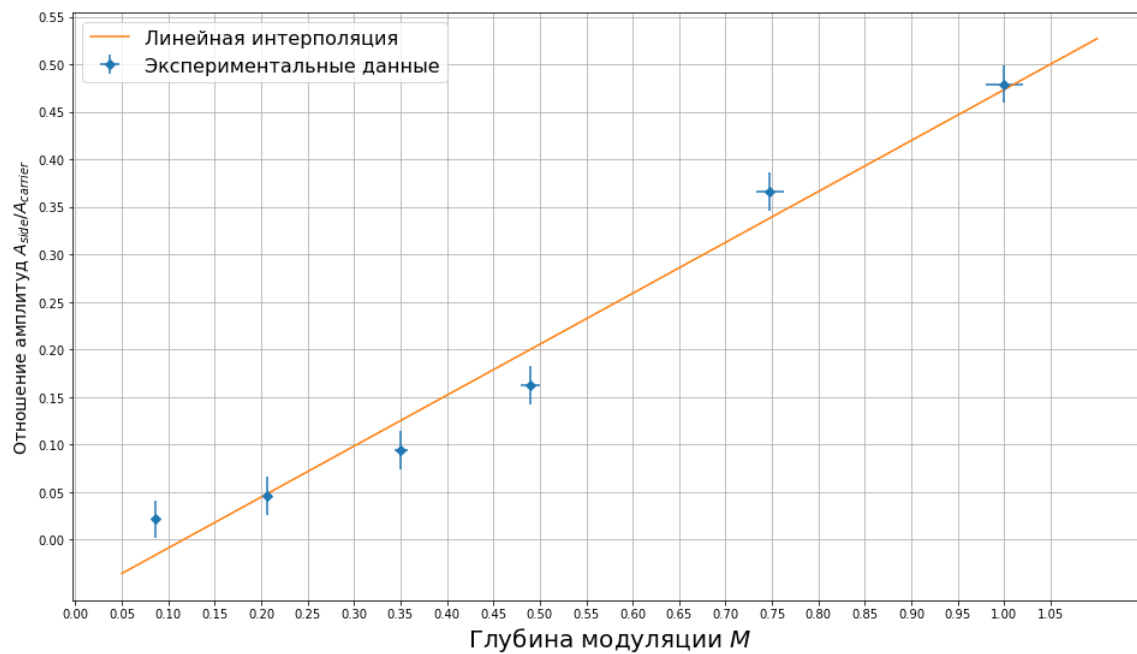


Посмотрим, как изменяется спектральный состав исследуемого сигнала в зависимости от глубины модуляции (глубиной модуляции позволяет управлять параметр *Ampl* первого канала генератора).

Для каждого эксперимента рассчитаем глубину модуляции, и построим часть наблюдаемого спектра (в диапазоне от 23 до 27 кГц):



По полученным данным можем проверить формулу (2). Для этого построим график зависимости A_{side}/A_{carr} от глубины модуляции M :



Наклон кривой аппроксимации получился равным $\alpha = 0.53 \pm 0.04$. При этом «табличное» значение составляет 0.5. Значит результат эксперимента в пределах погрешности совпадает со значением теоретической модели.

Вывод

По итогам проделанной работы удалось:

- экспериментально проверить соотношение неопределённости
- экспериментально проверить теоретическую модель амплитудной модуляции двух гармонических сигналов