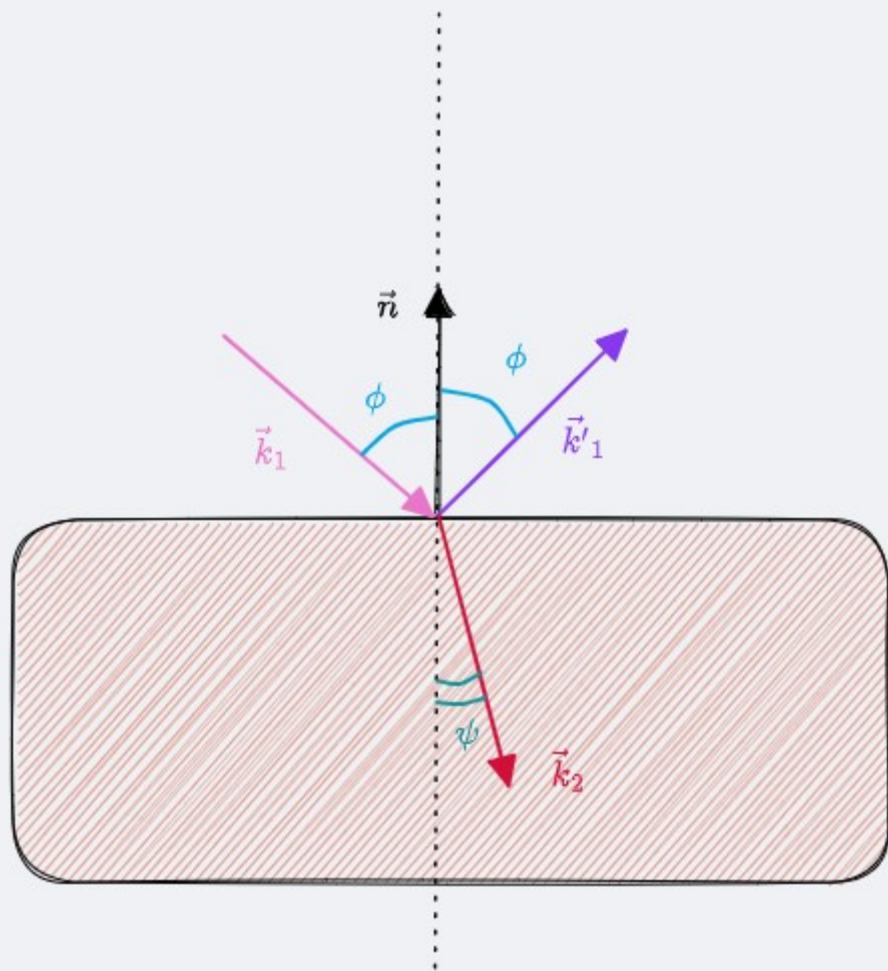


Восстановление формы поверхности по распределениям степени и угла поляризации.

Салтыкова Дарья – гр. Б04-105

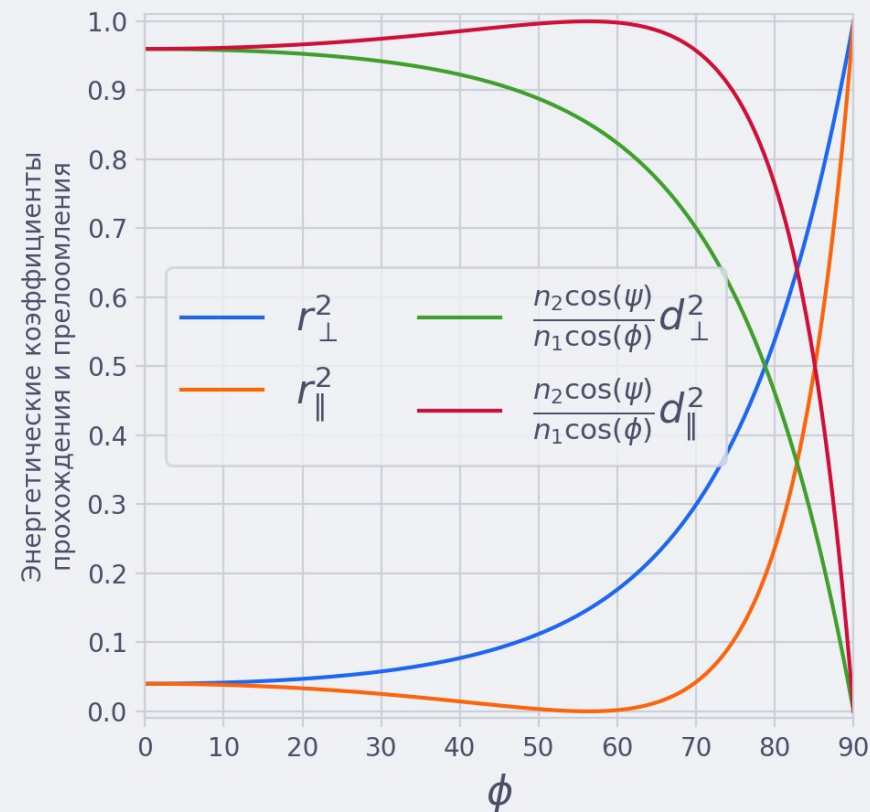
Шмаков Владимир – гр. Б04-105

Формулы Френеля

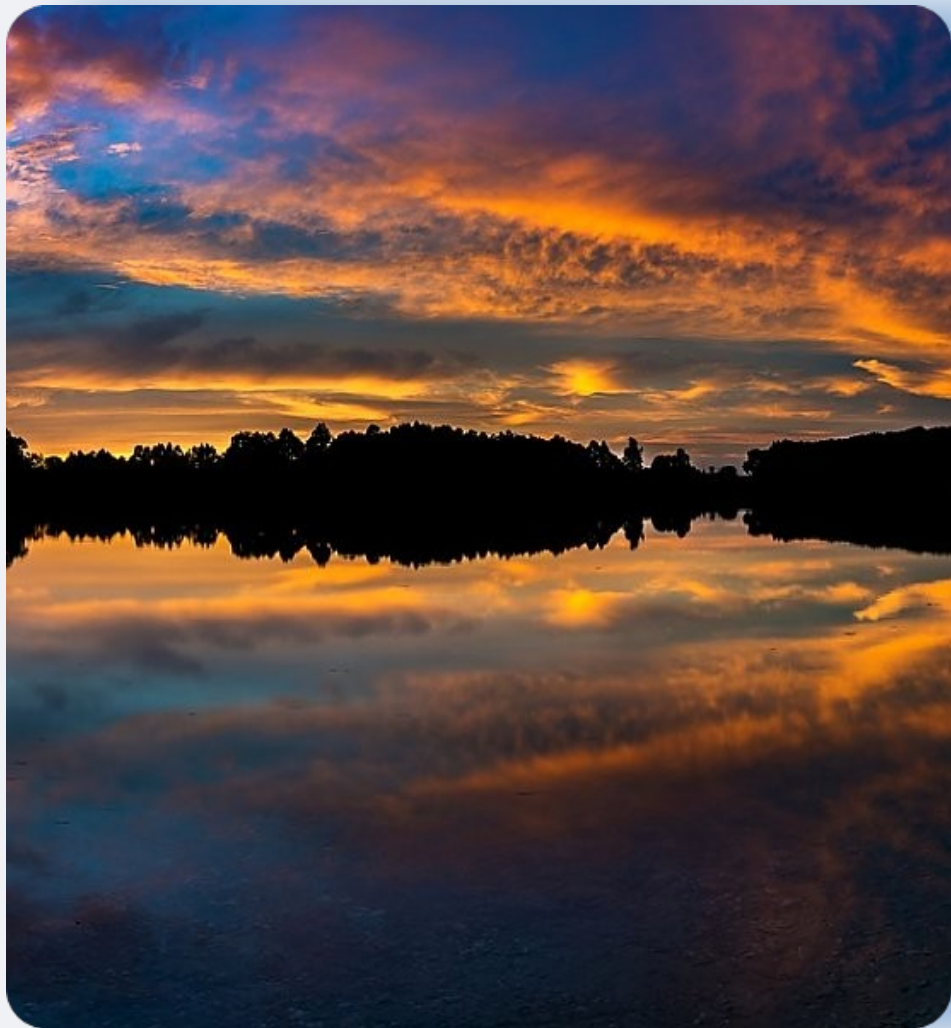


$$r_{\perp} \equiv \frac{R_{\perp}}{\mathcal{E}_{\perp}} = \frac{n_1 \cos \varphi - n_2 \cos \psi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi}, \quad d_{\perp} \equiv \frac{D_{\perp}}{\mathcal{E}_{\perp}} = \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_1 \cos \varphi + n_2 \cos \psi}$$

$$r_{\parallel} \equiv \frac{R_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} = \frac{n_2 \cos \varphi - n_1 \cos \psi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \psi}, \quad d_{\parallel} \equiv \frac{D_{\parallel}}{\mathcal{E}_{\parallel}} = \frac{2n_1 \cos \varphi}{n_2 \cos \varphi + n_1 \cos \psi}$$

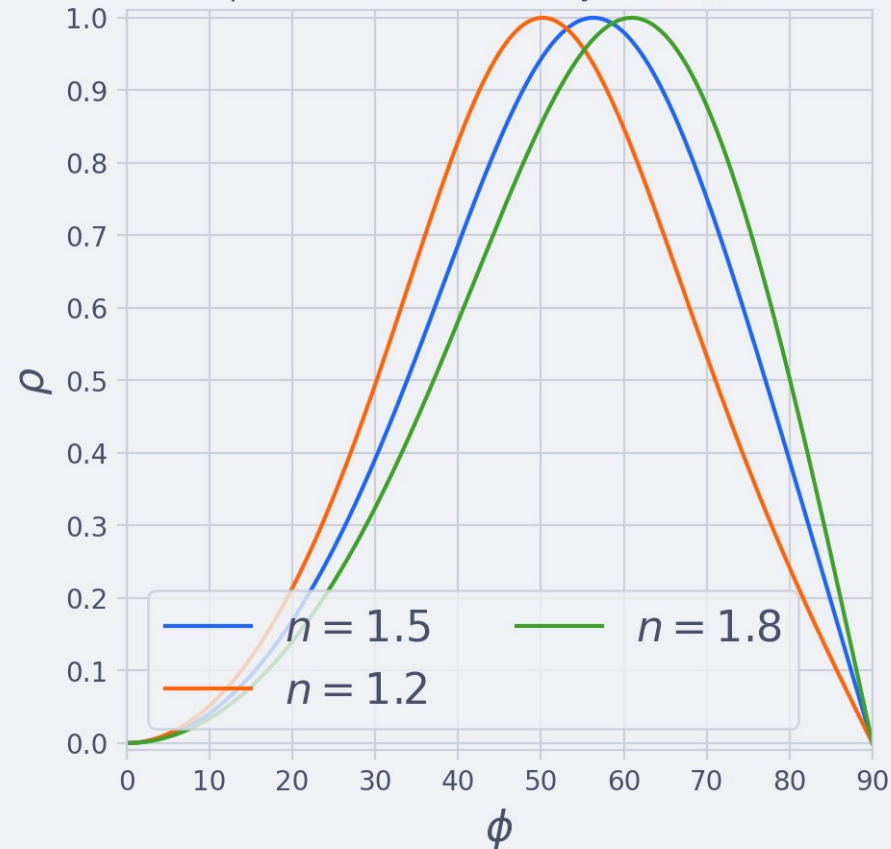


Зеркальное отражение

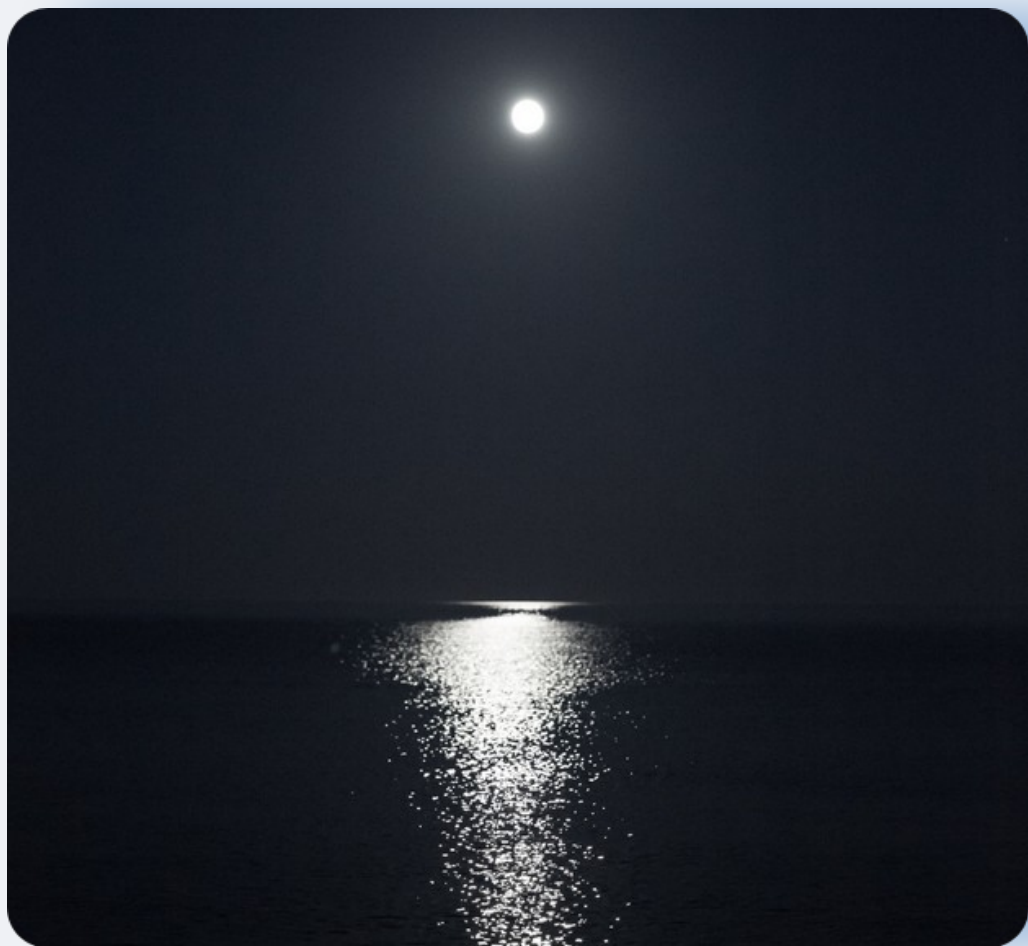


$$\rho = \frac{R_{\perp} - R_{\parallel}}{R_{\perp} + R_{\parallel}} = \frac{2 \sin^2 \phi \cos \phi \sqrt{n^2 - \sin^2 \phi}}{n^2 - \sin^2 \phi - n^2 \sin^2 \phi + 2 \sin^4 \phi}$$

Зависимость степени поляризации зеркально отраженного света от угла падения

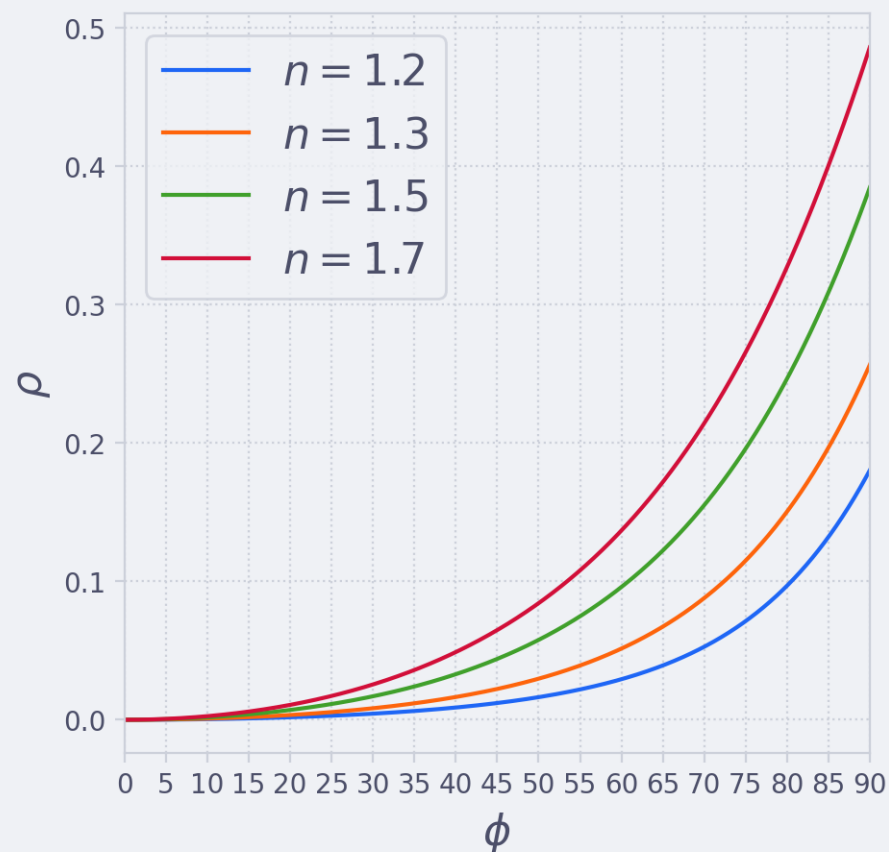


Диффузное отражение



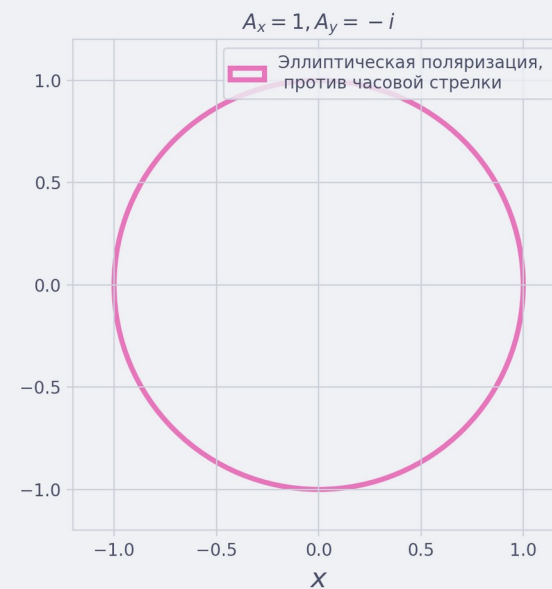
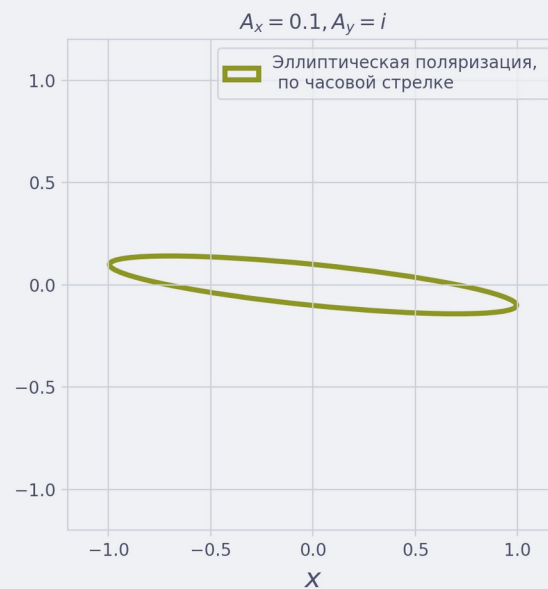
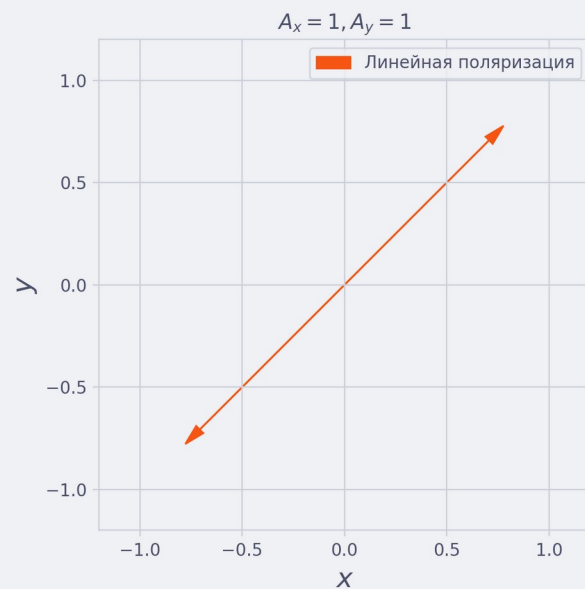
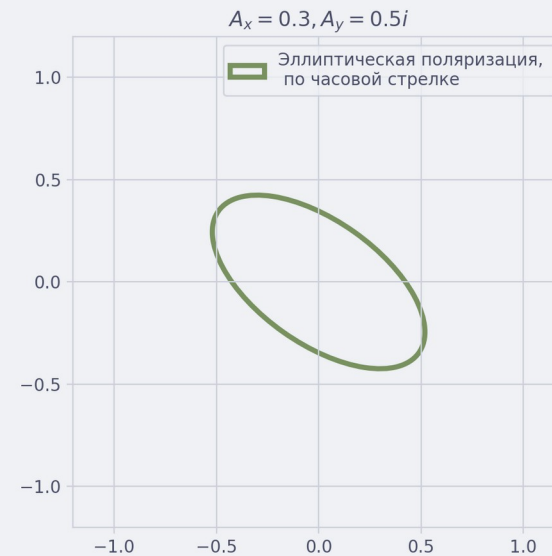
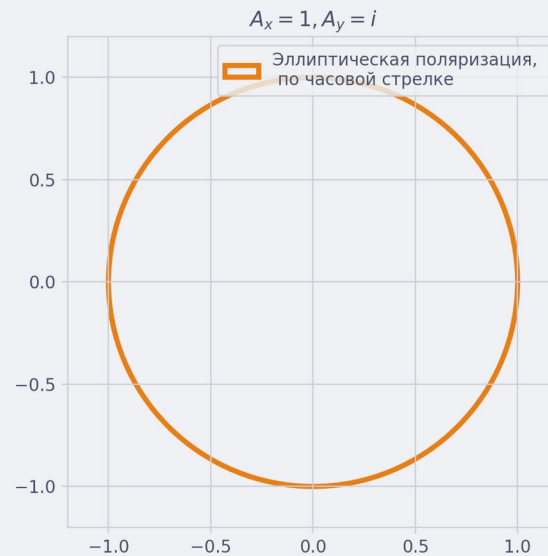
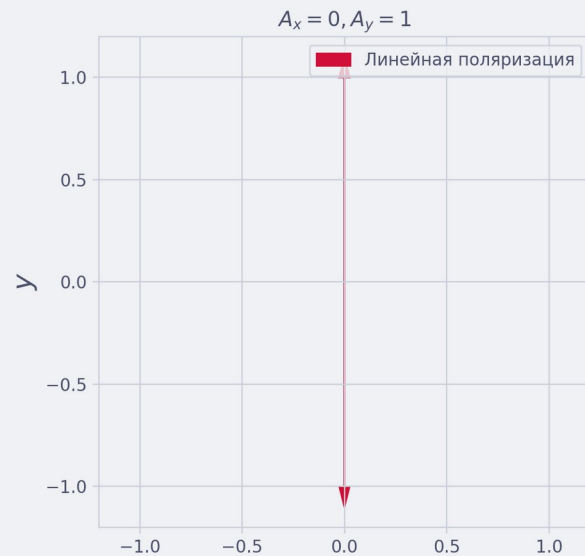
$$\rho = \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{T_{\parallel} + T_{\perp}} = \frac{(n - 1/n)^2 \sin^2 \phi}{2 + 2n^2 - (n + 1/n)^2 \sin^2 \phi + 4 \cos \phi \sqrt{n^2 - \sin^2 \phi}}$$

Зависимость степени поляризации
диффузно - отраженного света от угла падения

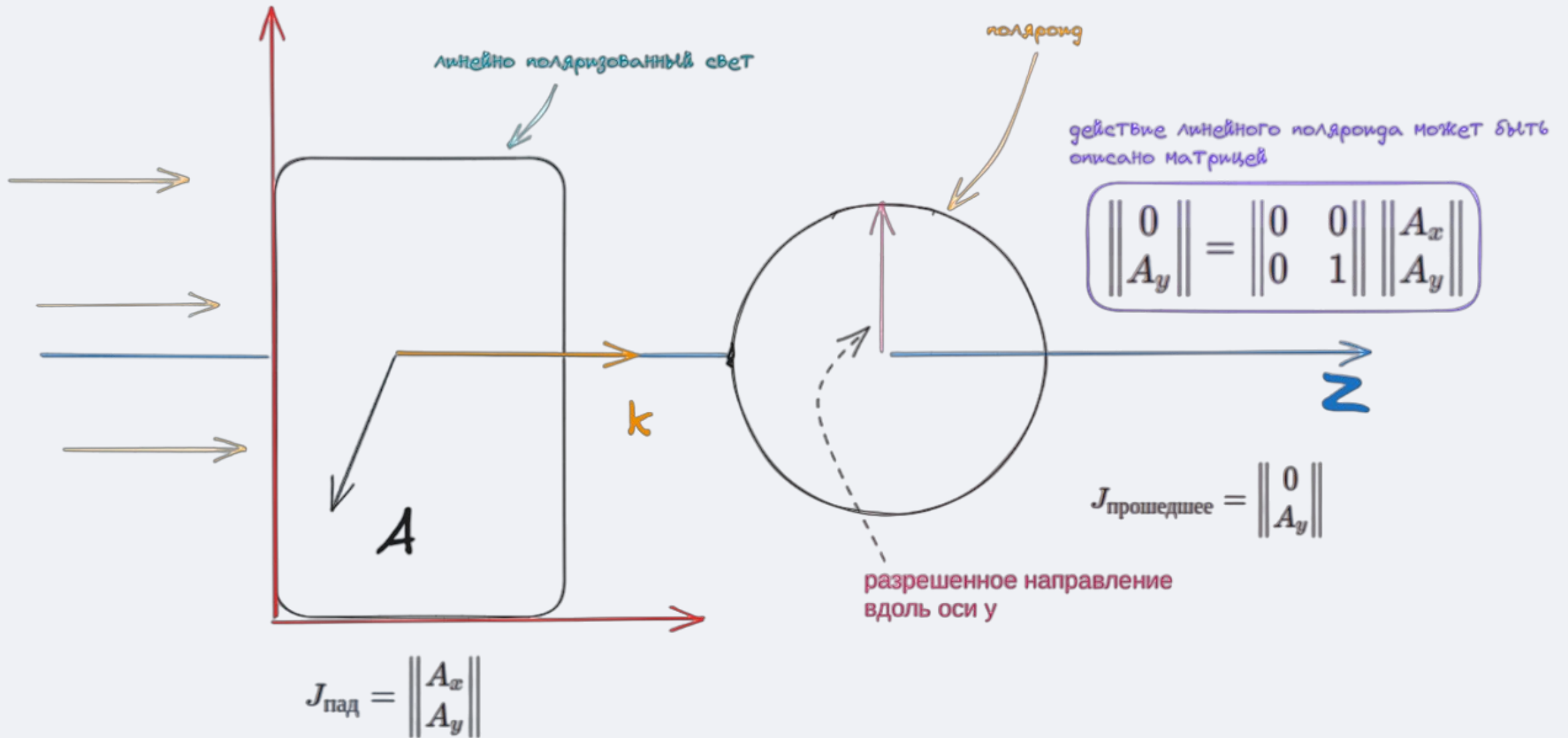


Векторы Джонса

Описание поляризации при помощи векторов Джонса



Пример матрицы Джонса для линейного поляроида



Матрицы когерентности

$$G = \begin{vmatrix} \langle |E_x|^2 \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_y E_x^* \rangle & \langle |E_y|^2 \rangle \end{vmatrix} = \left\langle \begin{vmatrix} E_x \\ E_y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} E_x^* & E_y^* \end{vmatrix} \right\rangle \quad G = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \text{естественный свет}$$

$$G = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \text{линейная поляризация вдоль оси } x$$

$$G = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \text{линейная поляризация под углом } 45^\circ$$

$$G = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -i \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & i \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{vmatrix} - \text{круговая поляризация против часовой стрелки}$$

Матрицы когерентности

Отметим важные свойства матрицы поляризации:

- $a_{ii} \in R$ - диагональные элементы матрицы являются действительными числами
- $a_{ij} = a_{ji}^*$ - транспонированная матрица поляризации является сопряженной к исходной

В силу вышеописанных свойств любая матрица поляризации может быть представлена как линейная комбинация

$$G = \frac{1}{2} \left(S_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + S_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + S_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + S_3 \begin{vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{vmatrix} \right)$$

Параметры $\|S_0 \ S_1 \ S_2 \ S_3\|^T$ называются параметрами Стокса.

Алгоритм измерения степени и угла поляризации

$$M_0 G M_0^T = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} S_0 + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} S_1 \right) \rightarrow J_0 = \frac{1}{2}(S_0 + S_1)$$

Разрешенное направление поляроида и ось камеры совпадают.

$$M_{45} G M_{45}^T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} S_0 + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} S_2 \right) \rightarrow J_{45} = \frac{1}{2}(S_0 + S_2)$$

Разрешенное направление поляроида направлена под углом 45 град. к оси камеры.

$$M_{90} G M_{90}^T = \frac{1}{2} \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} S_0 + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} S_1 \right) \rightarrow J_{90} = \frac{1}{2}(S_0 - S_1)$$

Ось камеры перпендикулярна разрешенному направлению поляроида.

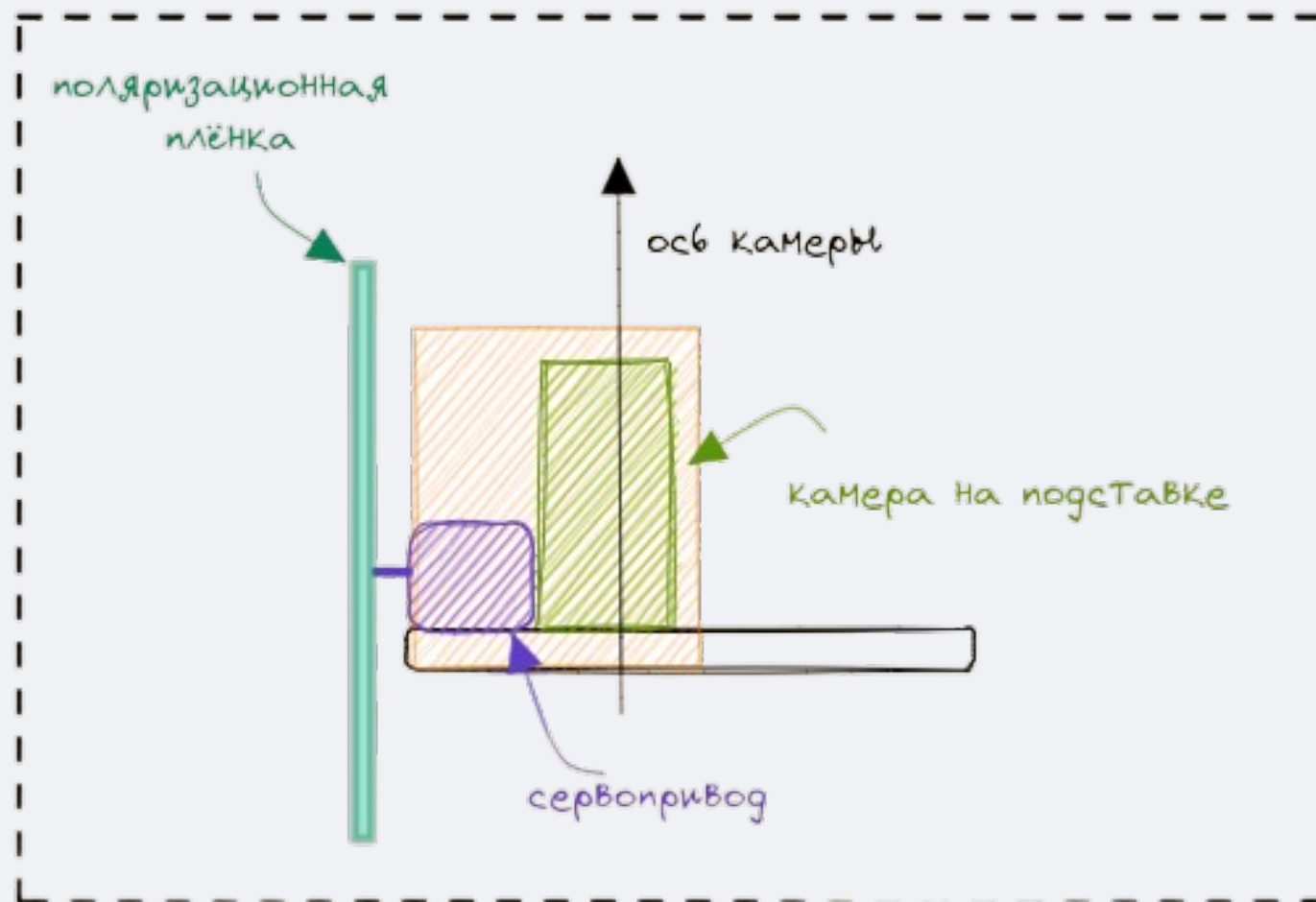
$$M_{135} G M_{135}^T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} S_0 - \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} S_2 \right) \rightarrow J_{135} = \frac{1}{2}(S_0 - S_2)$$

Угол между разрешенным направлением и осью камеры 135 град.

Экспериментальная установка



Вид сбоку



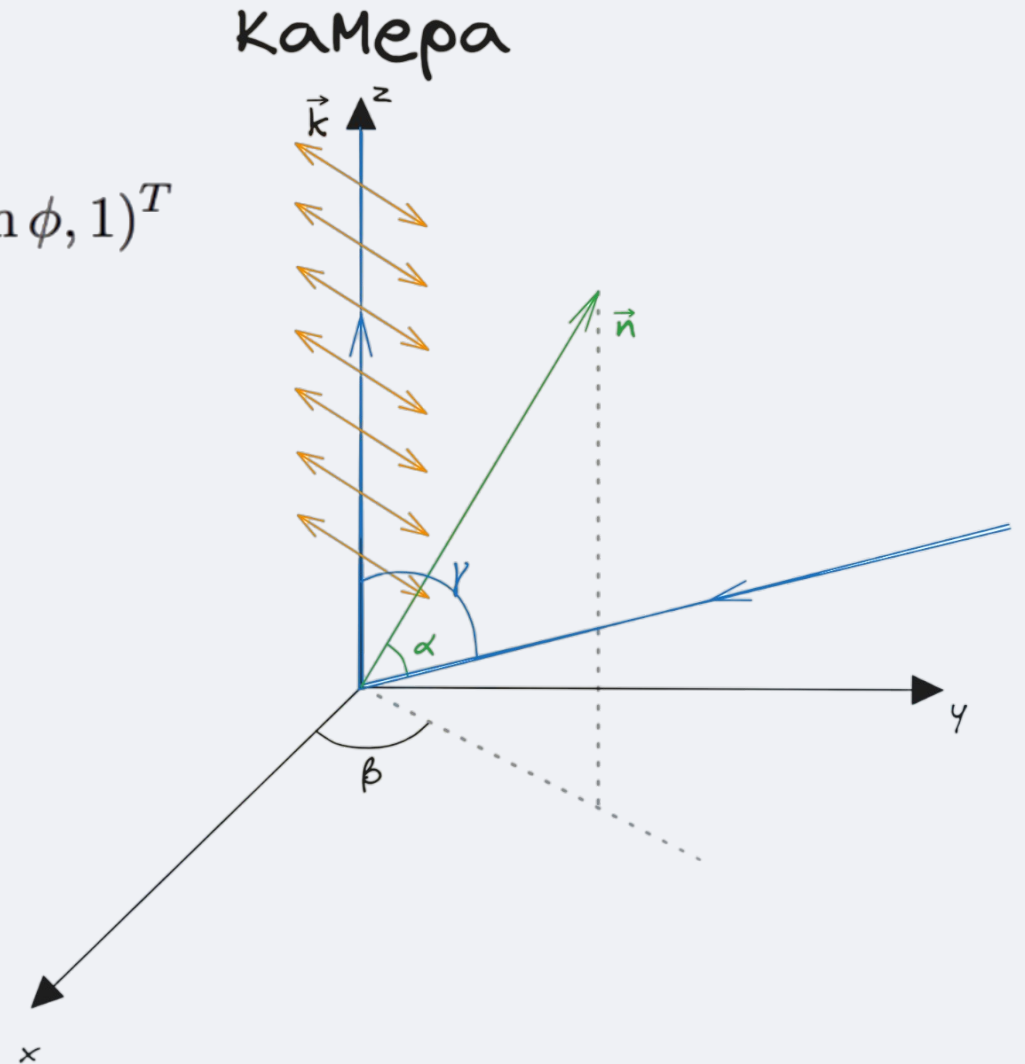
Карта нормалей из распределения степени и угла поляризации

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)^T \propto (\operatorname{tg} \theta \cos \phi, \operatorname{tg} \theta \sin \phi, 1)^T$$

$$\vec{n}(x, y) = (p(x, y), q(x, y), 1)^T$$

$$p(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad q(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$f(x, y) = C_0 + \int_{(x_0, y_0)}^{x, y} q dx - p dy$$

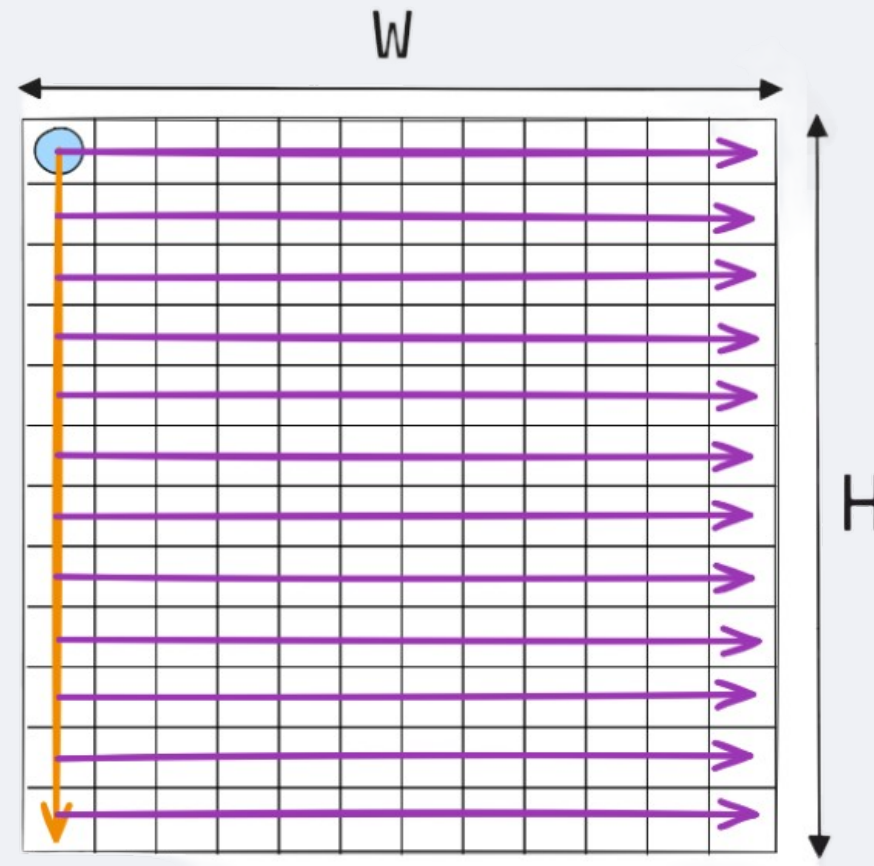


Восстановление карты высот по заданной карте нормалей

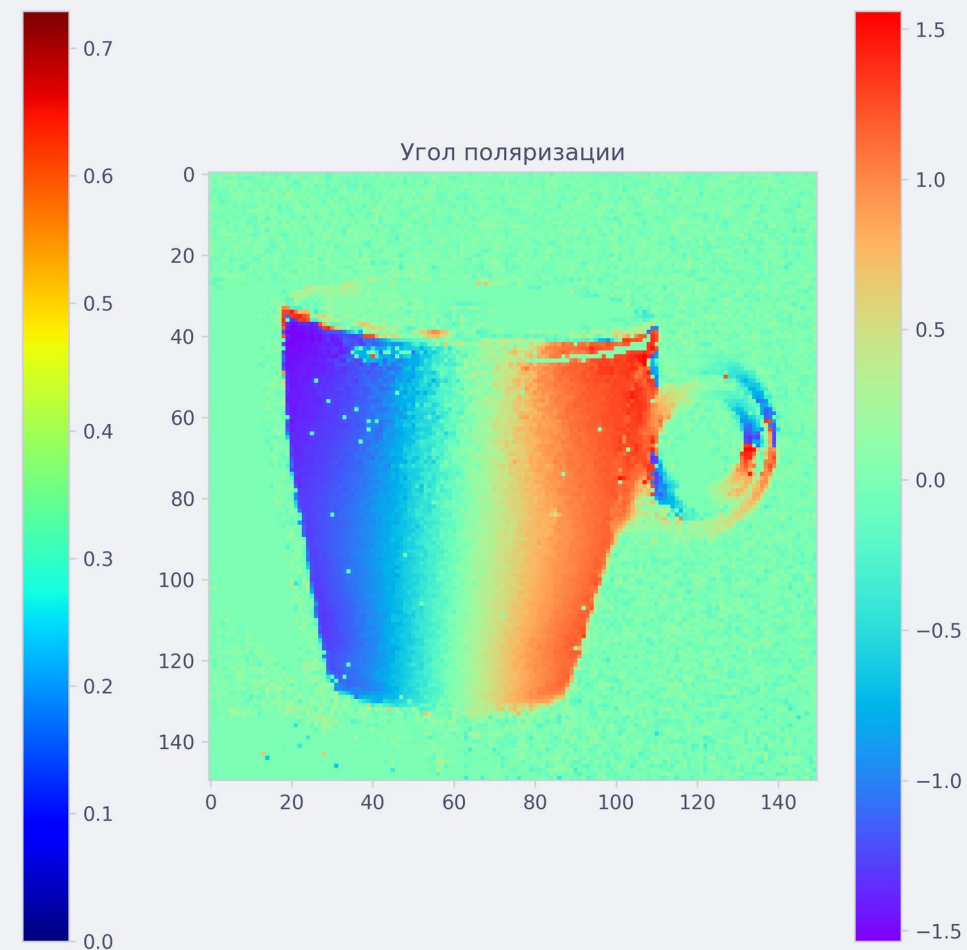
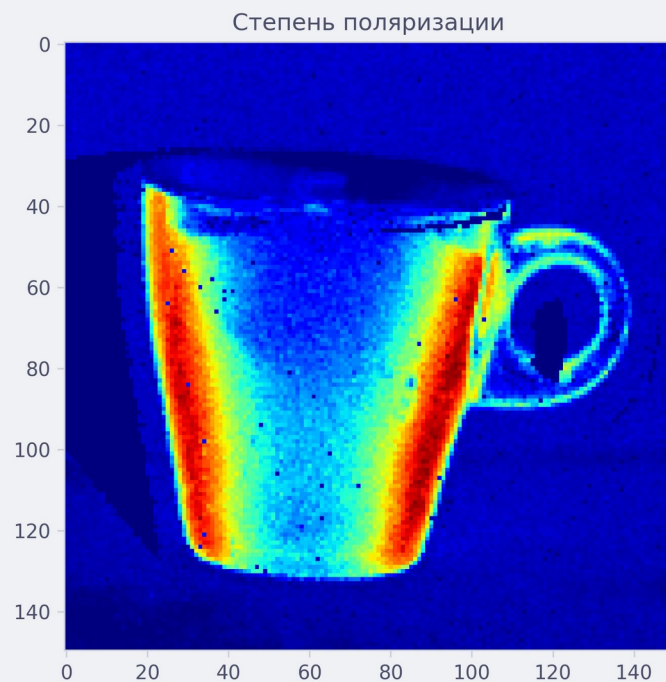
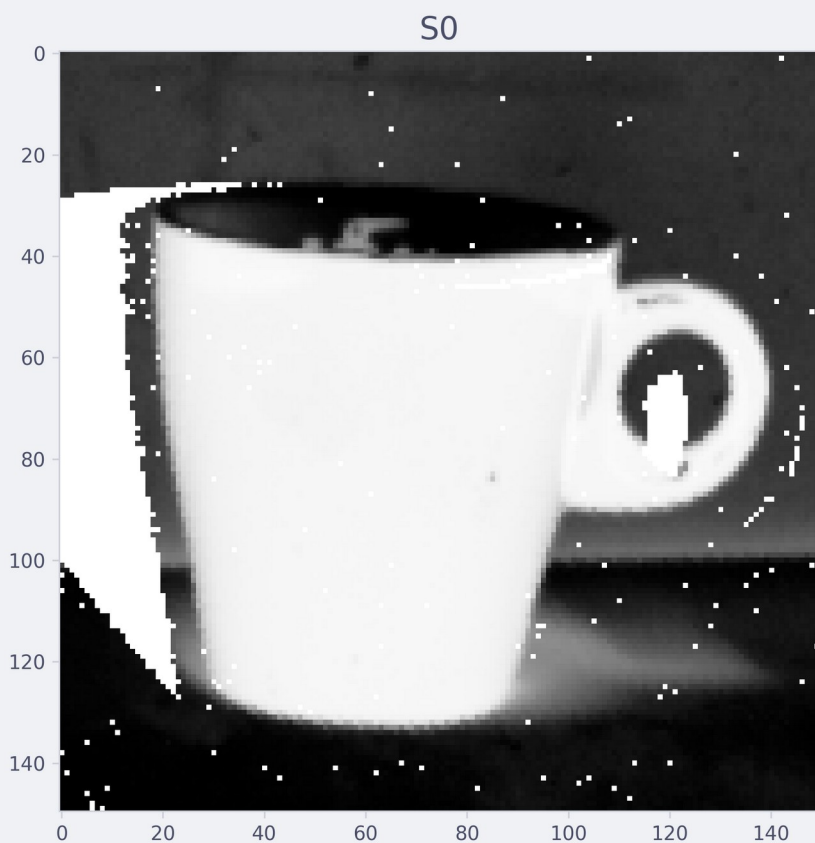
```
карта_высот[0, 0] = 0
у от 1 до Н - 1:
    карта_высот[0, у] = карта_высот[0, у - 1] - q[0, у]
у от 0 до W - 1:
    х от 1 до Н - 1:
        карта_высот[х, у] = карта_высот[х - 1, у] - p[х, у]
```

Ошибка между экспериментально найденной картой нормалей и картой нормалей полученной дифференцированием карты высот:

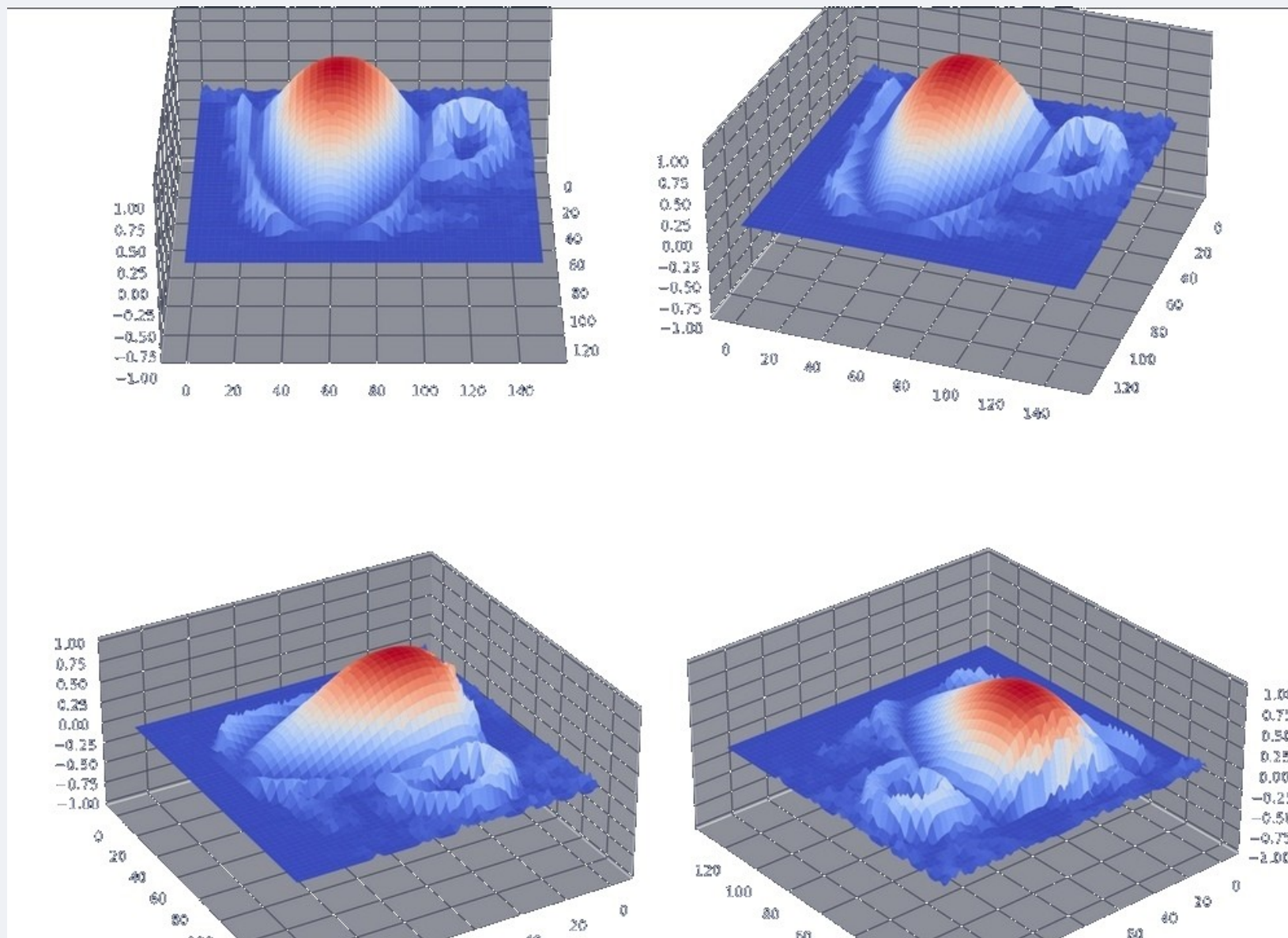
$$E = \iint_{\text{изображение}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + p(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + q(x, y) \right)^2 dx dy$$



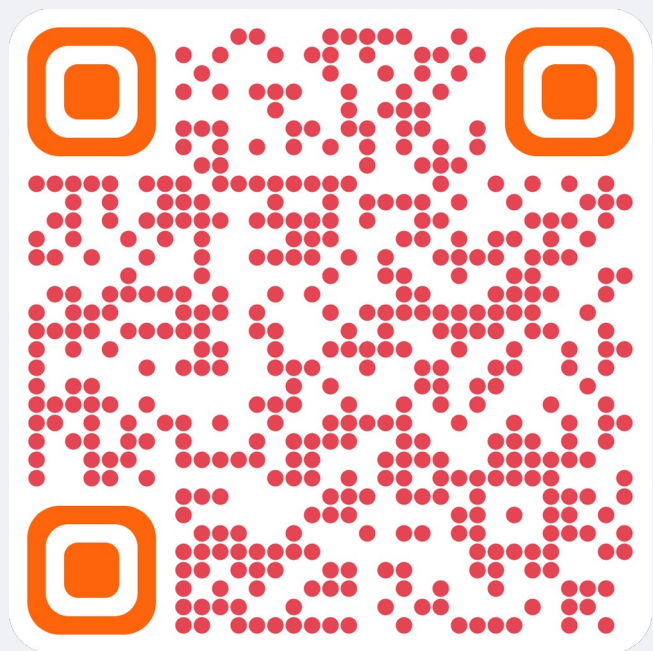
Результаты. Восстановленная форма чашки



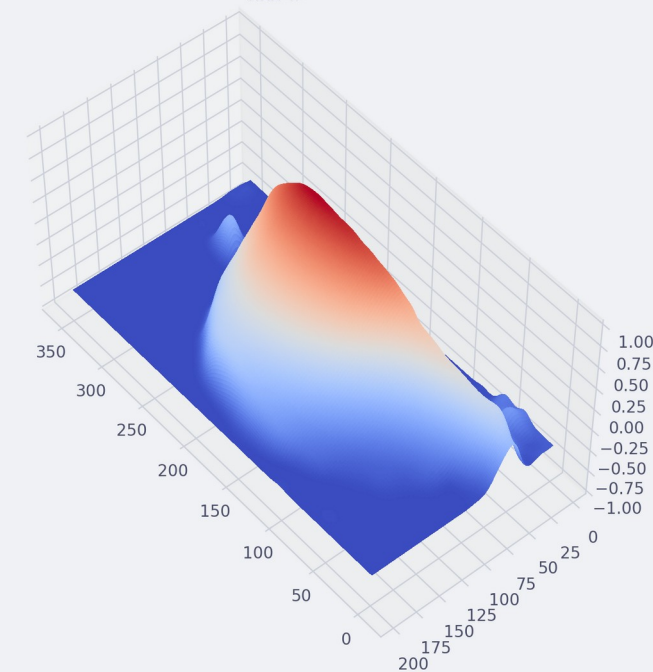
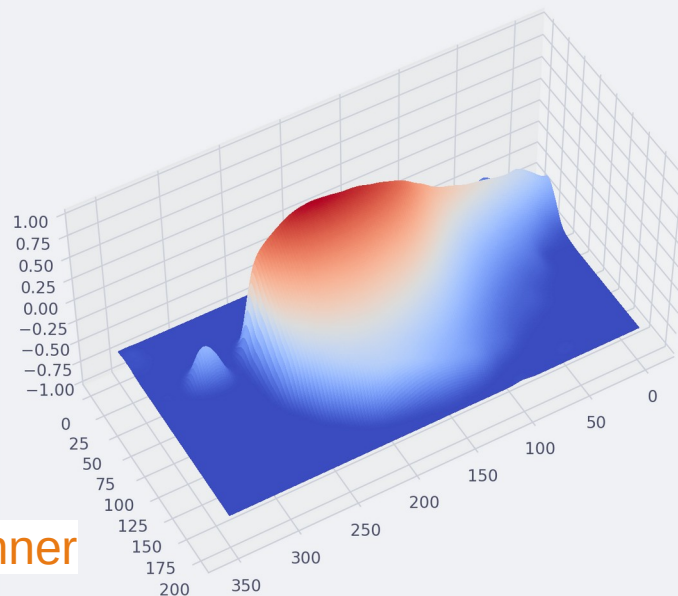
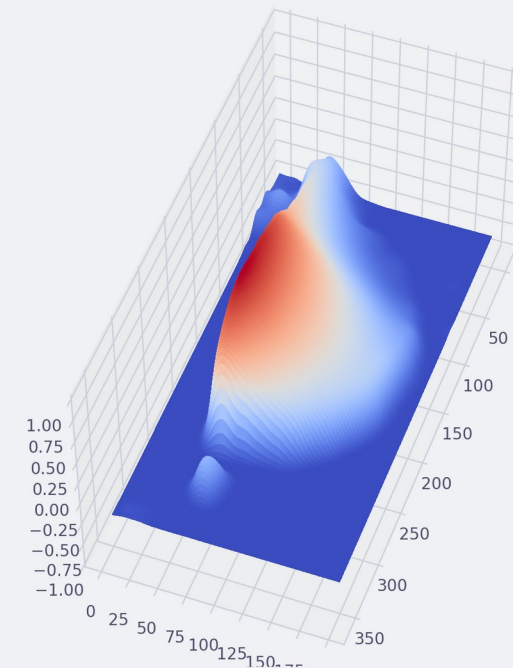
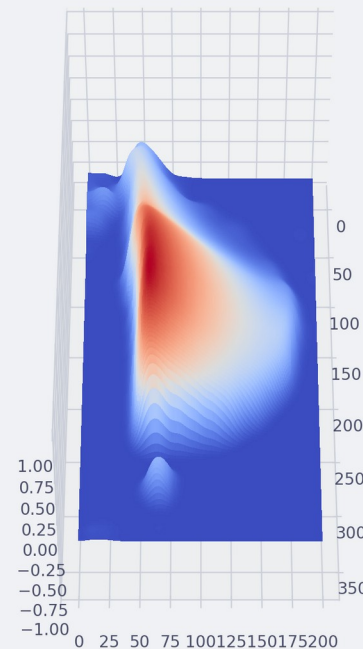
Результаты. Восстановленная форма чашки



Результаты. Восстановленная форма цветочного горшка



Восстановленная карта высот



github.com/ShmakovVladimir/3d_polarization_scanner

Благодарности

Выражаем благодарность нашему бессменному лектору и семинаристу в течение всех пяти семестров – Крымскому К.М., а также преподавателям лабораторных работ

- Кутелеву К.А. и Желтоухову А.А. (Механика)
- Зубович Н.Ю. (Термодинамика)
- Лапшину А.В. и Сенченкову С.А. (Электричество и магнетизм)
- Смирновой О.И. (Оптика)
- Салмину В.В. (Квантовая физика)