Домашнее задание 3 - Шмаков Владимир, Б04-105

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pandas as pd
import seaborn as sns
from matplotlib import cm
import scipy.stats as sts
from scipy.linalg import svd
```

Задача 1 - квартет Энскомба

Для четырех выборок из квартета Энскомба вычислите выборочные дисперсии x и y координат, а также коэффициент линейной корреляции Пирсона. Изобразите выборки на графиках. Данные можно получить в системе jupyter с помощью библиотеки seaborn, вызвав метод load_dataset('anscombe') .

```
data = sns.load_dataset('anscombe')
data.head()
```

	dataset	x	y
0	I	10.0	8.04
1	I	8.0	6.95
2	I	13.0	7.58
3	I	9.0	8.81
4	I	11.0	8.33

```
print(pd.unique(data.dataset))
```

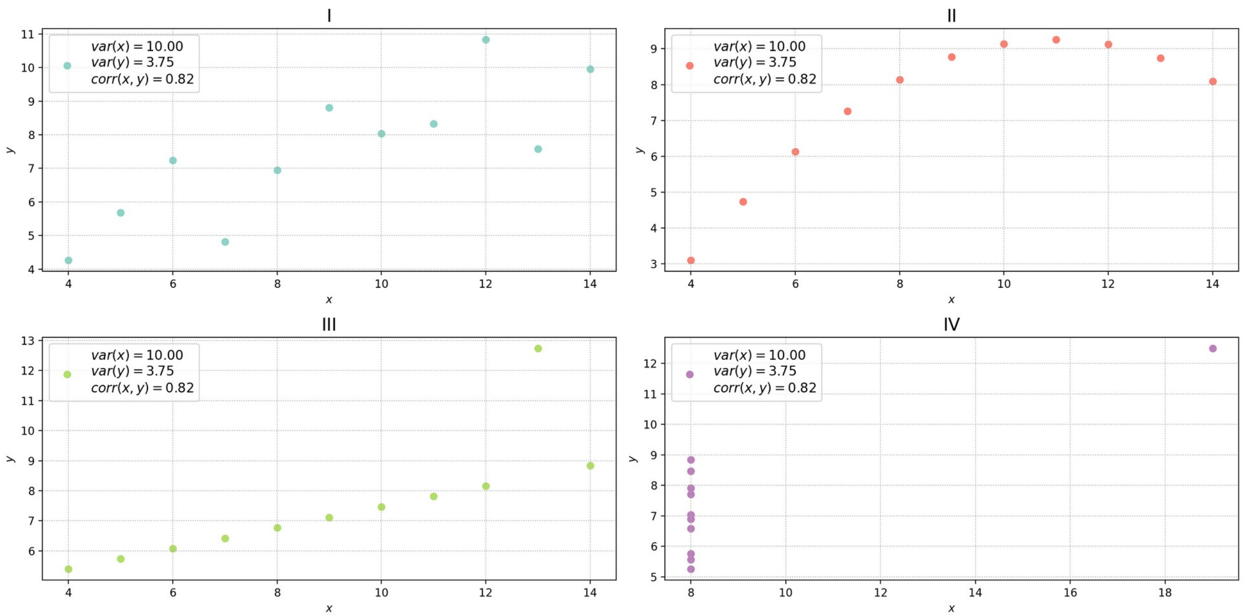
```
['I' 'II' 'III' 'IV']
```

```
fig, ax = plt.subplots(2, 2, figsize = (16, 8), dpi = 200)

for ind, dataset_name in enumerate(pd.unique(data['dataset'])):
    plotable = ax[ind // 2][ind % 2]
    plotable.grid(ls = ':')
    plotable.set_title(dataset_name, fontsize = 16)
    plotable.set_xlabel("$x$", fontsize = 10)
    plotable.set_ylabel("$y$", fontsize = 10)
    x, y = data[data['dataset'] == dataset_name]['x'].to_numpy(),
data[data['dataset'] == dataset_name]['y'].to_numpy()
    x_var, y_var = np.var(x), np.var(y)
    cov = np.mean(x * y) - np.mean(x) * np.mean(y)
    corr = cov / np.sqrt(x_var * y_var)
    plotable.scatter(x,
                     y,
```

```
                      color = cm.Set3(ind / 4),
                      label = f'$var(x) = {x_var:.2f}$\n$var(y) =
{y_var:.2f}$\n$corr(x,y)={corr:.2f}$')
    plotable.legend(fontsize = 12)

fig.tight_layout()
```



Задача 2 - Централизация признаков и МНК

Покажите, что следующие две процедуры приводят к одинаковому результату:

```
В матрице объект-признак X из каждого столбца вычитается среднее по
столбцу (централизация признаков). После этого вычисляется (XTX)−1.
К матрице X дописывается в конец столбец, состоящий из одних единиц.
Вычисляется (XTX)−1 и в получившейся матрице вычеркивается последний
столбец и последняя строка.

distributions = [sts.uniform, sts.norm, sts.expon, sts.cauchy]
distributions_names = ['U', 'N', 'Г', 'Коши']
experiments_num = 100
for distribution, name in zip(distributions, distributions_names):
    number_of_equalityes = 0
    for _ in range(experiments_num):
        l, n = np.random.randint(10, 1000), np.random.randint(2, 10)
        X = distribution.rvs(size = (l, n))
        X_m1 = X - np.mean(X, axis = 0)
        res1 = np.linalg.inv(X_m1.T @ X_m1)
        X_m2 = np.hstack([X, np.ones(l)[:, np.newaxis]])
        res2 = np.linalg.inv(X_m2.T @ X_m2)
        res2 = res2[:-1, :-1]
```

```
        number_of_equalityes += np.allclose(res1, res2)
    print(f"Процедуры эквивалентны для распределения {name}:
{number_of_equalityes == experiments_num}")
```

```
Процедуры эквивалентны для распределения U: True
Процедуры эквивалентны для распределения N: True
Процедуры эквивалентны для распределения Г: True
Процедуры эквивалентны для распределения Коши: True
```

Задача 4 - Матрица объект - признак

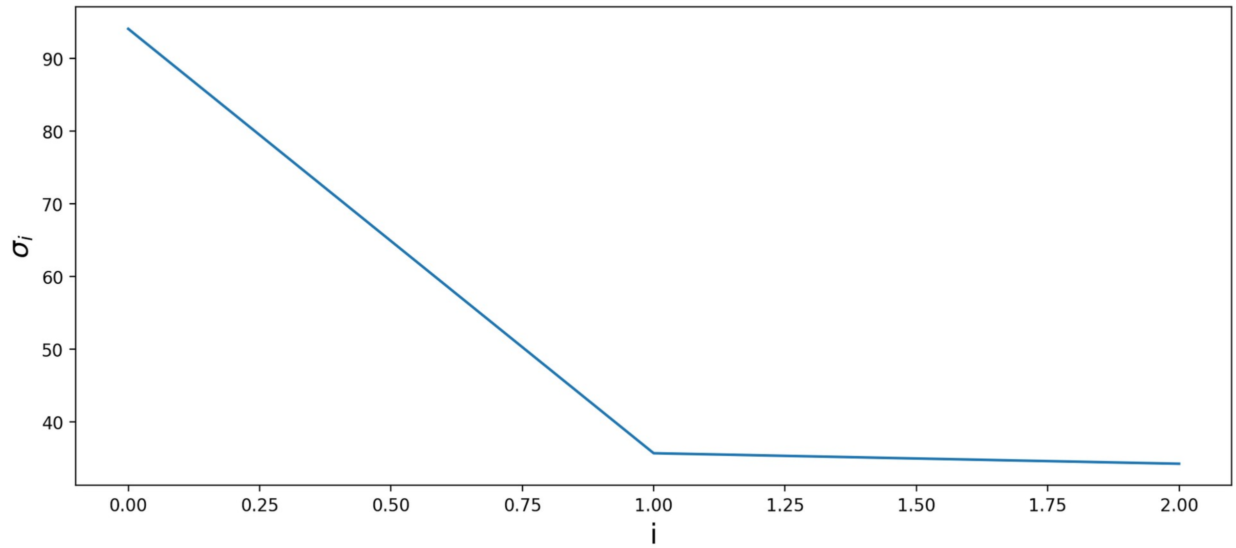
```
np.random.seed(81)

N = int(1e4)
X = [0, 0, 0]
variance = np.random.random(3)
X[0] = sts.norm(loc = 0, scale = variance[0]).rvs(size = N)
X[1] = sts.norm(loc = 0, scale = variance[1]).rvs(size = N)
X[2] = sts.norm(loc = 0, scale = variance[2]).rvs(size = N)
# X[2] = X[0] * 5
X = np.array(X).T
print("Ковариационная матрица")
print(np.cov(X.T) * 1e2)
U, sigma, VT = np.linalg.svd(X, full_matrices = False)
```

```
Ковариационная матрица
[[ 1.27309038e+01  8.37079020e-02 -2.39031065e-01]
 [ 8.37079020e-02  1.17302436e+01 -3.44089014e-02]
 [-2.39031065e-01 -3.44089014e-02  8.84748224e+01]]
```

```
plt.figure(figsize = (12, 5), dpi = 200)
plt.plot(sigma)
plt.ylabel("$\sigma_{i}$", fontsize = 16)
plt.xlabel("i", fontsize = 16)
```

```
Text(0.5, 0, 'i')
```

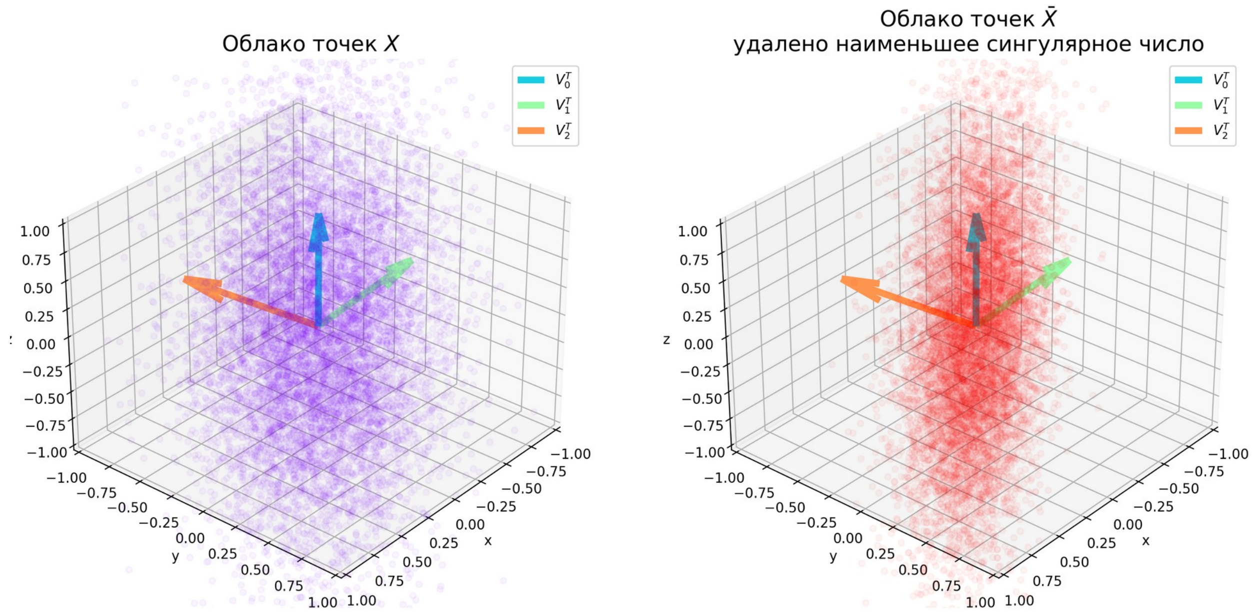



```
sigma_wave = np.copy(sigma)
sigma_wave[-1] = 0
X_wave =  np.dot(U, np.dot(np.diag(sigma_wave), VT))

fig = plt.figure(figsize = (16, 8), dpi = 200)
colorscheme = cm.rainbow
ax_X = fig.add_subplot(121, projection = '3d')
ax_X_wave = fig.add_subplot(122, projection = '3d')
ax_X.view_init(30, 40, 0)
ax_X_wave.view_init(30, 40, 0)
ax_X.scatter3D(X[:, 0], X[:, 1], X[:, 2], color = colorscheme(0),
alpha = 0.04)
ax_X_wave.scatter3D(X_wave[:, 0], X_wave[:, 1], X_wave[:, 2], color =
colorscheme(0.99), alpha = 0.04)
for i in range(3):
    ax_X.quiver(0, 0, 0, VT[i, 0], VT[i, 1], VT[i, 2], color =
colorscheme(i / 4 + 0.3), linewidth = 5, label = f'$V^T_{i}$')
    ax_X_wave.quiver(0, 0, 0, VT[i, 0], VT[i, 1], VT[i, 2], color =
colorscheme(i / 4 + 0.3), linewidth = 5, label = f'$V^T_{i}$')

for a in [ax_X, ax_X_wave]:
    a.set_xlim(np.min(X[:, 0]), np.max(X[:, 0]))
    a.set_ylim(np.min(X[:, 1]), np.max(X[:, 1]))
    a.set_zlim(np.min(X[:, 2]), np.max(X[:, 2]))
    a.legend()
    a.set_xlabel("x")
    a.set_ylabel("y")
    a.set_zlabel("z")
    a.set_xlim(-1, 1)
    a.set_ylim(-1, 1)
    a.set_zlim(-1, 1)
```

```
ax_X.set_title("Облако точек $X$", fontsize = 16)
ax_X_wave.set_title(r"Облако точек $\bar{X}$" + "\nудалено наименьшее сингулярное число", fontsize = 16);
```

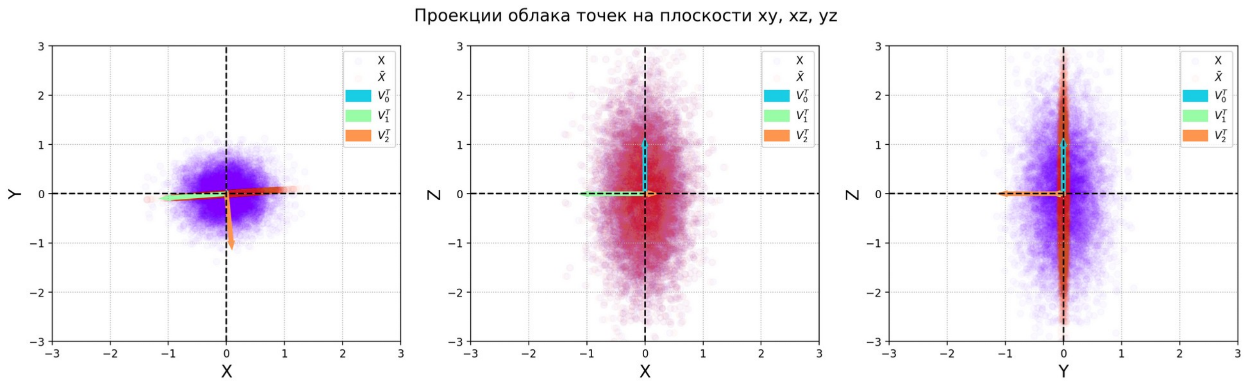



```
fig, ax = plt.subplots(1, 3, figsize = (20, 5), dpi = 200)

pairs = [(0, 1), (0, 2), (1, 2)]
names = [['X', 'Y'], ["X", "Z"], ["Y", "Z"]]

for pair, name, plotable in zip(pairs, names, ax):
    plotable.scatter(X[:, pair[0]], X[:, pair[1]], label = 'X', color = colorscheme(0), alpha = 0.02)
    plotable.scatter(X_wave[:, pair[0]], X_wave[:, pair[1]], label = r'$\bar{X}$', color = colorscheme(0.9), alpha = 0.02)
    for i in range(3):
        plotable.arrow(0, 0, VT[i, pair[0]], VT[i, pair[1]], label = f'$V^T_{i}$', color = colorscheme(i / 4 + 0.3), linewidth = 4, width = 0.009)
    plotable.set_xlabel(name[0], fontsize = 16)
    plotable.set_ylabel(name[1], fontsize = 16)
    plotable.axhline(0, linestyle = '--', color = 'black')
    plotable.axvline(0, linestyle = '--', color = 'black')
    plotable.legend()
    plotable.grid(ls = ':')
    plotable.set_xlim(-3, 3)
    plotable.set_ylim(-3, 3)

fig.suptitle("Проекции облака точек на плоскости xy, xz, yz", fontsize = 16);
```

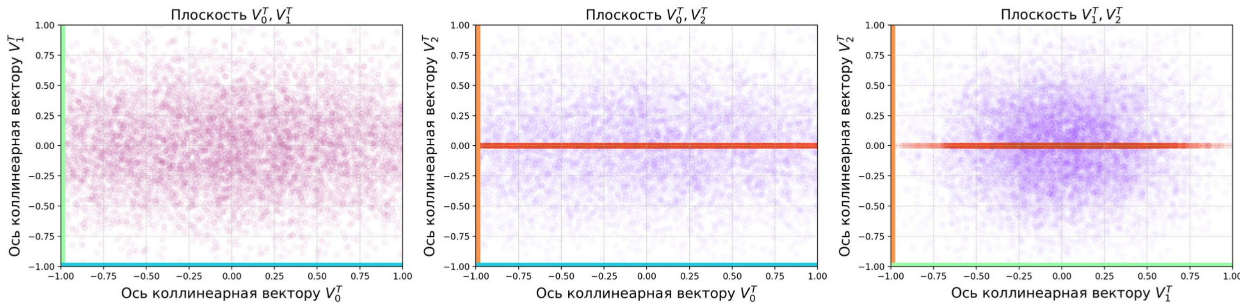



```
normal_vectors = {f"{i}{j}": np.cross(VT[i], VT[j]) for i, j in pairs}
projections = {f"{i}{j}": np.array([np.dot(p, VT[i]) * VT[i] +
np.dot(p, VT[j]) * VT[j] for p in X]) for i, j in pairs}
projections_on_basis = {f"{i}{j}": np.array([np.array([np.dot(VT[i],
p), np.dot(VT[j], p)]) for p in X]) for i, j in pairs}
projections_on_basis_wave = {f"{i}{j}":
np.array([np.array([np.dot(VT[i], p), np.dot(VT[j], p)]) for p in
X_wave]) for i, j in pairs}

fig, ax = plt.subplots(1, 3, figsize = (20, 5), dpi = 200)

for plotable, pair in zip(ax, pairs):
    i, j = pair
    plotable.scatter(projections_on_basis[f'{i}{j}'][:, 0],
projections_on_basis[f'{i}{j}'][:, 1], alpha = 0.02, color =
colorscheme(0))
    plotable.scatter(projections_on_basis_wave[f'{i}{j}'][:, 0],
projections_on_basis_wave[f'{i}{j}'][:, 1], alpha = 0.02, color =
colorscheme(0.9))
    plotable.set_title(f"Плоскость $V^T_{i}, V^T_{j}$", fontsize = 16)
    plotable.set_xlabel(f"Ось коллинеарная вектору $V^T_{i}$",
fontsize = 16)
    plotable.set_ylabel(f"Ось коллинеарная вектору $V^T_{j}$",
fontsize = 16)
    plotable.axvline(-0.99, color = colorscheme(j / 4 + 0.3),
linewidth = 6)
    plotable.axhline(-0.99, color = colorscheme(i / 4 + 0.3),
linewidth = 6)
    plotable.set_xlim(-1, 1)
    plotable.set_ylim(-1, 1)
    plotable.grid(ls = ':')

fig.tight_layout()
```



Задача 5

Пусть в SVD-разложении можно пренебречь следующими малыми сингулярными значениями: $\varepsilon > \sigma_{r+1} \geq \sigma_{r+2} \geq \cdots \geq \sigma_n$. $\left(\varepsilon = 10^{-8}\right)$. Тогда $x_{TSVD} = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i^{-1} v_i \left(u_i^T b\right) (¿)$. Параметр ε определяет версию усеченного SVD (TSVD). Решение TSVD (*) широко используется в качестве упорядоченного решения задачи. Однако решение (*) не является достаточно точным. Это может быть указано следующим образом.

Пусть матрицы левого и правого сингулярных векторов TSVD обозначены как $U_{TSVD} = \left[u_1, \ldots, u_r\right)$ и $V_{TSVD} = \left[v_1, \ldots, v_r\right)$, а их ортогональное дополнение $\widetilde{U_{add}} = \left[\widetilde{u_{r+1}}, \ldots, \widetilde{u_n}\right)$ и $\widetilde{V_{add}} = ¿ \left[\widetilde{v_{r+1}}, \ldots, \widetilde{v_n}\right)$. Тогда решение системы будет выглядеть следующим образом:

$$x = x_{TSVD} + \widetilde{V_{add}} Z_2$$

Вектор z_2 находится: $C_2 = b_2$, где $C = \widetilde{U_{add}}^T A \widetilde{V_{add}}, b_2 = ¿\ \widetilde{U_{add}}^T b$.

Рассмотрим в качестве примера СЛАУ с матрицей Гильберта, компоненты которой задаются формулой $H_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}, i, j = \overline{1,n}$. Она относится к числу плохо обусловленных матриц. Характерная особенность этой матрицы в том, что при возрастании ее порядка минимальные собственные числа (сингулярные числа) очень быстро стремятся к нулю.

Решите систему обычным стандартным методом (из библиотеки numpy) и этим методом. Оцените невязку.

$H_n x_n = b_n$, где $b_n = \{1,0,0,0,0,0,0,0\}$ для $n=8$, $b_n = \{1,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$ для $n=10$.

Число обусловленности для матрицы H_8 равно $3.387 \cdot 10^{10}$, а для H_{10} равно $3.535 \cdot 10^{13}$.

```
def get_hilbert_matrix(n: int) -> np.ndarray:
    """Возвращает матрицу Гильберта заданного размера

    Args:
        n (int): размер матрицы

    Returns:
        np.ndarray: матрица Гильберта
    """
```

```
    i, j = np.arange(n) + 1, np.arange(n) + 1
    I, J = np.meshgrid(i, j)
    H = 1 / (I + J - 1)
    return H

def strange_method(H: np.ndarray, b: np.ndarray, eps: float = 1e-8) ->
np.ndarray:
    U, sigma, VT = np.linalg.svd(H, full_matrices = False)
    sigma_wave = (sigma > eps) * sigma
    right_part = np.dot(U.T, b)
    middle_part = np.dot(np.diag(1 / sigma_wave), right_part)
    x = np.dot(VT.T, middle_part)
    return x

n = 5
H = get_hilbert_matrix(n)
b = np.hstack([[1], np.zeros(n - 1)])
numpy_linalg, tsvd = np.linalg.solve(H, b), strange_method(H, b)
numpy_linalg_normed, tsvd_normed = numpy_linalg /
np.max(numpy_linalg), tsvd / np.max(tsvd)
print(numpy_linalg_normed)
print(tsvd_normed)
print(np.allclose(numpy_linalg_normed, tsvd_normed))
```

```
[ 0.02380952 -0.28571429  1.         -1.33333333  0.6        ]
[ 0.02380952 -0.28571429  1.         -1.33333333  0.6        ]
True
```

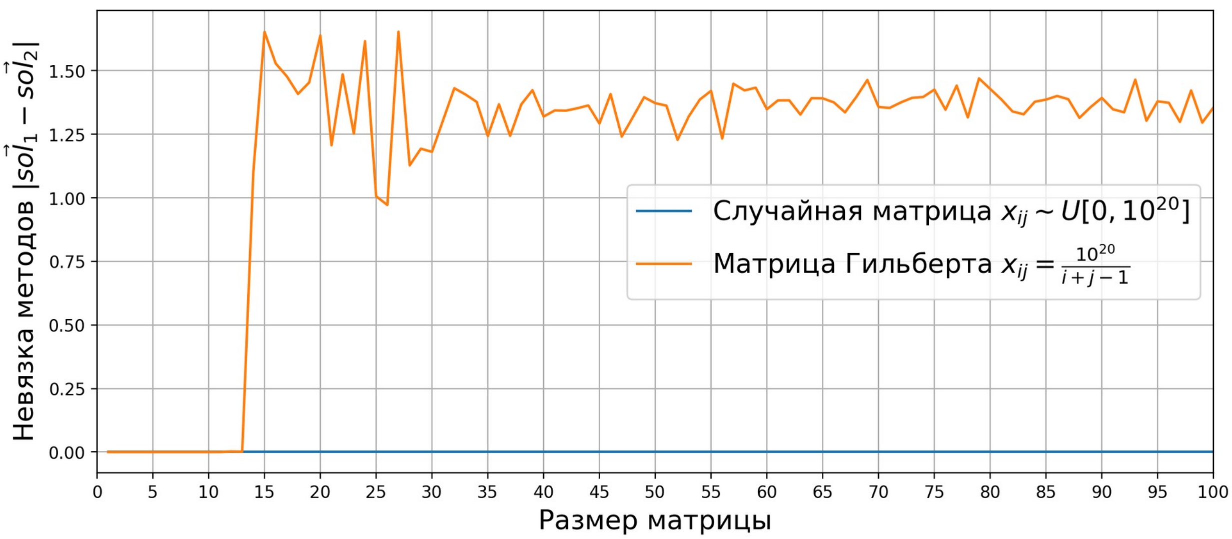
```
n_values = np.arange(100) + 1
number_of_exp = 20
method_difference_hilbert = []
method_difference_random = []
for n in n_values:
    random_matrix = 1e20 * np.random.random((n, n))
    H = 1e20 * get_hilbert_matrix(n)
    b = np.hstack([[1], np.zeros(n - 1)])
    numpy_linalg, tsvd = np.linalg.solve(H, b), strange_method(H, b)
    numpy_linalg_random,  tsvd_random = np.linalg.solve(random_matrix,
b), strange_method(random_matrix, b)
    numpy_linalg_normed, tsvd_normed = numpy_linalg /
np.linalg.norm(numpy_linalg), tsvd / np.linalg.norm(tsvd)
    numpy_linalg_random_normed, tsvd_random_normed =
numpy_linalg_random / np.linalg.norm(numpy_linalg_random), tsvd_random
/ np.linalg.norm(tsvd_random)

method_difference_hilbert.append(np.linalg.norm(numpy_linalg_normed -
tsvd_normed))

method_difference_random.append(np.linalg.norm(numpy_linalg_random_nor
med - tsvd_random_normed))
```

```
plt.figure(figsize = (12, 5), dpi = 200)

plt.plot(n_values, method_difference_random, label = r"Случайная матрица $x_{ij} \sim U[0, 10^{20}]$")
plt.plot(n_values, method_difference_hilbert, label = r"Матрица Гильберта $x_{ij} = \frac{10^{20}}{i + j - 1}$")
plt.grid()
plt.xlabel("Размер матрицы", fontsize = 16)
plt.ylabel(r"Невязка методов $|\vec{sol_{1}} - \vec{sol_{2}}$|", fontsize = 16)
plt.xticks(np.arange(0, 120, 5))
plt.xlim(0, 100)
plt.legend(fontsize = 16);
```



Задача 6 - Преобразование Прокруста

```
data = pd.read_csv("signatureData.csv")
data.head()
```

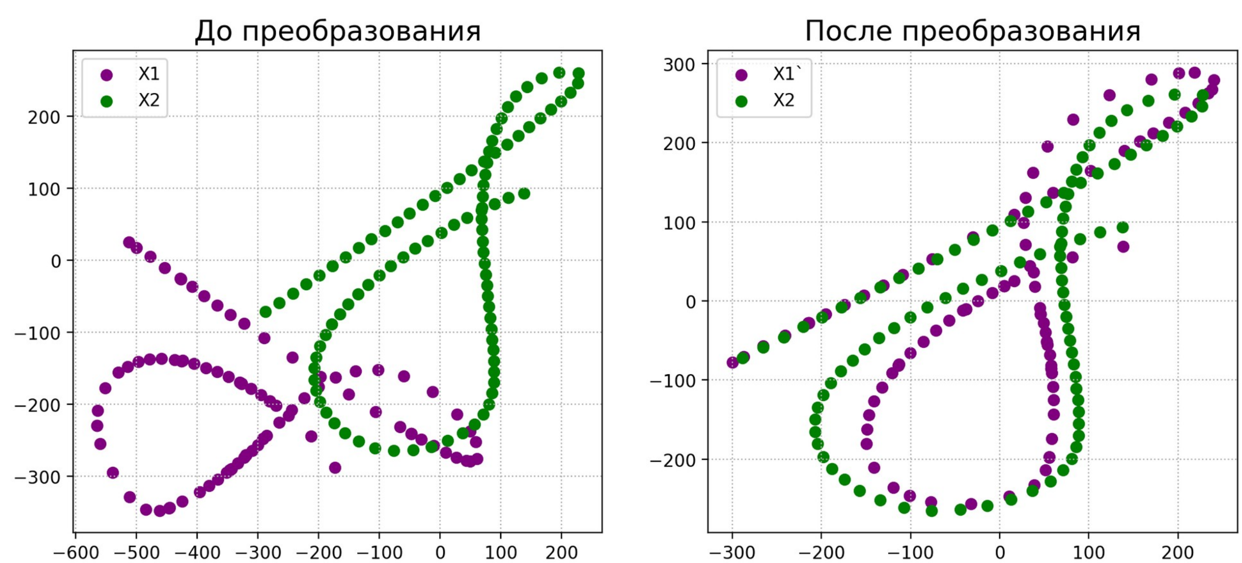
	x1	x2	y1	y2
0	-512.46	25.3830	-288.31	-71.76
1	-499.90	17.6250	-265.31	-58.76
2	-477.64	5.0726	-242.31	-45.76
3	-453.88	-10.0780	-220.31	-32.76
4	-427.89	-25.0950	-199.31	-20.76

```
def plot_transform(data: pd.DataFrame):
    fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize = (12, 5), dpi = 200)

    ax[0].scatter(data.x1, data.x2, label = 'X1', color  = 'purple')
    ax[0].scatter(data.y1, data.y2, label = 'X2', color = 'green')
    X1_mean = np.array([np.mean(data.x1), np.mean(data.x2)])
    X2_mean = np.array([np.mean(data.y1), np.mean(data.y2)])
```

```
    X1 = np.hstack([data.x1.to_numpy()[:, np.newaxis],
data.x2.to_numpy()[:, np.newaxis]])
    X2 = np.hstack([data.y1.to_numpy()[:, np.newaxis],
data.y2.to_numpy()[:, np.newaxis]])
    X1_centralized = np.hstack([(data.x1 -
np.mean(data.x1)).to_numpy()[:, np.newaxis],
                                (data.x2 -
np.mean(data.x2)).to_numpy()[:, np.newaxis]])
    X2_centralized = np.hstack([(data.y1 -
np.mean(data.y1)).to_numpy()[:, np.newaxis],
                                (data.y2 -
np.mean(data.y2)).to_numpy()[:, np.newaxis]])
    U, D, Vt = svd(X1_centralized.T @ X2_centralized)
    Rotation = U @ Vt
    Translation = X2_mean - Rotation.T @ X1_mean
    Translation = np.repeat(Translation[:, np.newaxis], X1.shape[0],
axis = 1).T
    X1_new = Translation + X1 @ Rotation
    ax[1].scatter(X1_new[:,0], X1_new[:,1], label = 'X1`', color =
'purple')
    ax[1].scatter(X2[:,0], X2[:,1], label = 'X2', color = 'green')
    ax[0].set_title("До преобразования", fontsize = 16)
    ax[1].set_title("После преобразования", fontsize = 16)
    for a in ax:
        a.grid(ls = ':')
        a.legend()

plot_transform(data)
```




```
two_lines_dataset = {
"x1": [
    1.2, 2.5, 3.1, 4.2, 5.6, 6.3, 7.8, 8.7, 9.4, 10.2,
```

```
    11.1, 12.5, 13.3, 14.8, 15.7, 16.4, 17.2, 18.6, 19.3, 20.0
],
"x2": [
    0.8, 2.2, 3.6, 4.9, 6.4, 7.9, 8.6, 9.8, 11.2, 12.7,
    14.0, 15.5, 16.9, 18.2, 19.6, 20.3, 21.8, 23.2, 24.4, 25.9
],
"y1": [
    2.1, 3.4, 4.8, 5.9, 6.6, 7.9, 8.5, 9.9, 11.2, 12.6,
    13.7, 14.9, 16.3, 17.6, 18.9, 20.2, 21.5, 22.7, 23.9, 25.3
],
"y2": [
    1.9, 3.2, 4.6, 5.7, 7.2, 8.7, 9.3, 10.8, 12.1, 13.4,
    14.5, 15.9, 17.2, 18.6, 19.9, 21.2, 22.6, 23.8, 25.0, 26.4
]
}
two_lines_dataset = pd.DataFrame(two_lines_dataset)

plot_transform(two_lines_dataset)
```