Домашнее задание 5 - Шмаков В.Е. ФФКЭ - гр. Б04-105

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
from sklearn import linear_model
from sklearn.datasets import load_diabetes
from sklearn.model_selection import train_test_split
from sklearn.model_selection import KFold
from matplotlib import cm
from sklearn import preprocessing
from sklearn.metrics import mean_squared_error
import seaborn as sns
import scipy.stats as sts
import pandas as pd
```

Задача 1. Апостериорное распределение для параметра распределения Пуассона.

Количество срабатываний счетчика Гейгера за минуту n подчиняется распределению Пуассона:

$$P_\lambda(n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}.$$

1. В ходе эксперимента счетчик Гейгера сработал за минуту m раз. С помощью теоремы Байеса определите апостериорное распределение на λ. Указание: априорную плотность вероятности λ можно считать постоянной (так как мы изначально ничего не знаем про λ).
2. Эксперимент повторили еще раз, в этот раз счетчик Гейгера сработал за минуту m' раз. Как обновилось апостериорное распределение на λ ?
1. Пусть событие A заключается в том, что счетчик Гейгера сработал m раз.

Согласно теореме Байеса:

$$P(\lambda \vee A) = \frac{P(A \vee \lambda) p_0(\lambda)}{P(A)}$$

Вероятность события A при фиксированном α

$$P(A \vee \lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

А значит

$$P(\lambda \vee A) \sim \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

Исходное априорное распределение сократилось при нормировке

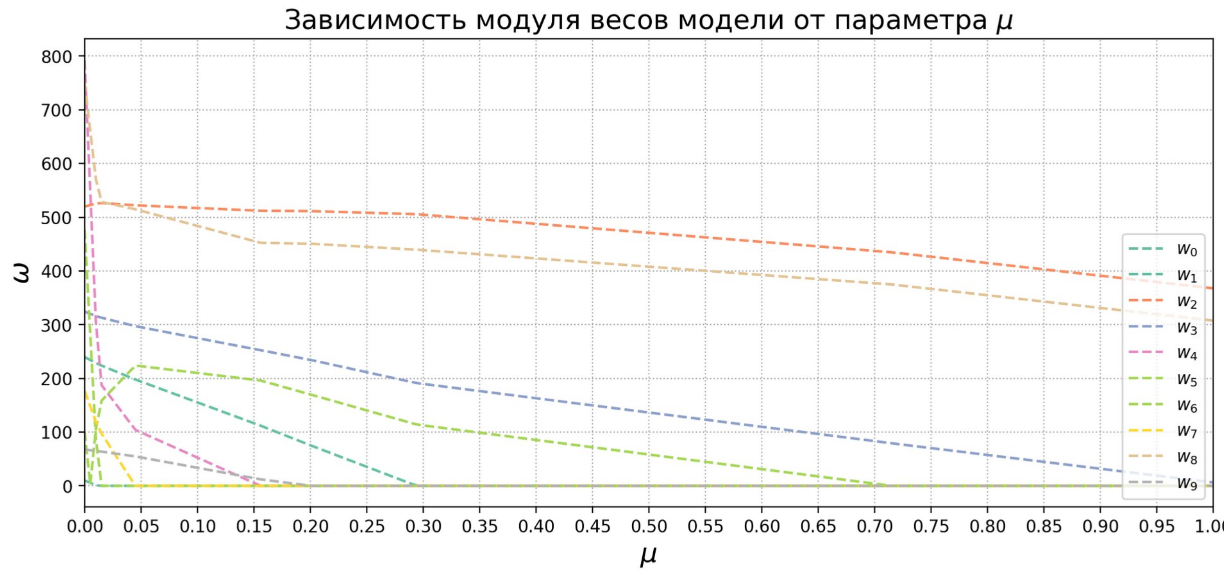
1. Считаем $P(\lambda \vee A)$ новым априорным распределением

$$P_1(\lambda \vee A) = \frac{P(A \vee \lambda) P(\lambda \vee A)}{P(A)} \sim \frac{\lambda^{m+m'}}{m! m'!} e^{-2\lambda}$$

Задача 3

Для стандартного набора данных для задачи регрессии (см. например load_diabetes из sklearn.datasets) продемонстрируйте, как веса обращаются в ноль по мере увеличения коэффициента μ L_1-регуляризации. Разрешается использовать библиотечную реализацию регрессии, как в примере ниже:

```
data, target = load_diabetes(return_X_y = True)
a = 1e-6
alpha_linspace = np.linspace(a, 1, 200)
coeff = []
for mu in alpha_linspace:
    model = linear_model.Lasso(alpha = mu).fit(data, target)
    coeff.append(model.coef_)

coeff = np.array(coeff)

plt.figure(figsize = (12, 5), dpi = 200)
for ind, c in enumerate(coeff.T):
    plt.plot(alpha_linspace, np.abs(c), label = f'$w_{ind}$', color = 
cm.Set2(ind / 10), linestyle = '--')

plt.legend(loc = 'lower right')
plt.grid(ls = ':')
plt.xticks(np.arange(0, 1.1, 0.05))
plt.xlim(0, 1)
plt.xlabel("$\mu$", fontsize = 16)
plt.ylabel("$\omega$", fontsize = 16)
plt.title("Зависимость модуля весов модели от параметра $\mu$", 
fontsize = 16);
```



Задача 4

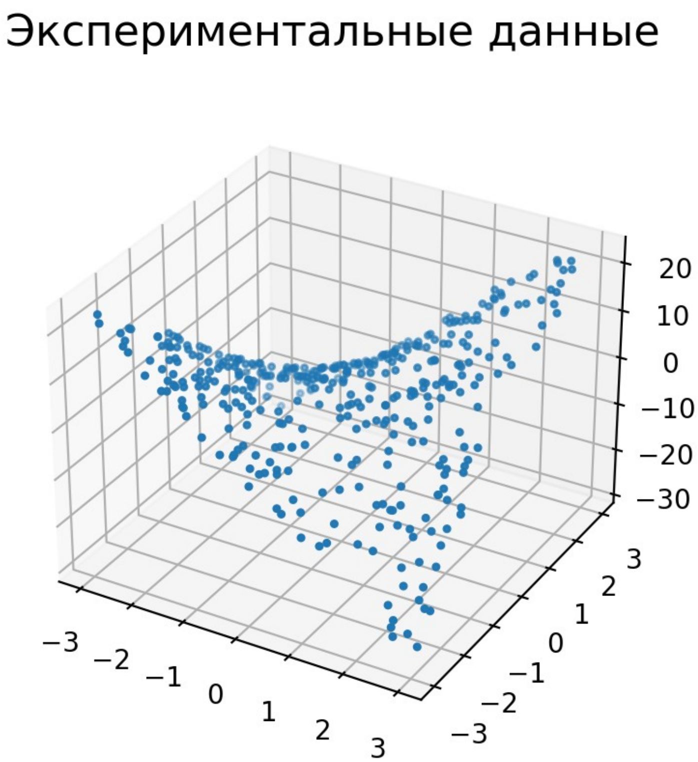
На семинаре обсуждалось решение задачи регрессии с L1-регуляризацией с помощью метода градиентного спуска. С помощью K-Fold кроссвалидаций (K=3) осуществите для этого метода подбор параметров: коэффициент перед регуляризатором и параметр градиентного спуска (learning rate). В качестве данных возьмите значения какой-нибудь неполиномиальной функции на равномерной или случайной сетке (на выбор семинариста) с добавленным гауссовым шумом. Насколько стабильно по отношению к запуску работает градиентный спуск?

```
x, y = (np.random.rand(400) - 0.5) * 6, (np.random.rand(400) - 0.5) *
6
some_func = lambda a, b, c, x, y: a * np.sin(x) + b * np.cos(y) + c *
x * y

data = pd.DataFrame({'x': x,
                     'y': y,
                     'f': some_func(1, 2, 3,x, y) + sts.norm(0,
0.1).rvs(len(x))})
data.head()
```

	x	y	f
0	2.554342	-1.553753	-11.345536
1	-2.098005	0.176770	-0.063886
2	-2.981859	0.974197	-7.856445
3	2.432404	-1.126611	-6.670676
4	-0.457732	-1.252454	1.940561

```
fig = plt.figure(figsize = (4, 4), dpi = 200)
ax = fig.add_subplot(111, projection = '3d')

ax.scatter3D(data.x, data.y, data.f, s = 5)
```

```
fig.suptitle('Экспериментальные данные', fontsize = 16)
fig.tight_layout();
```



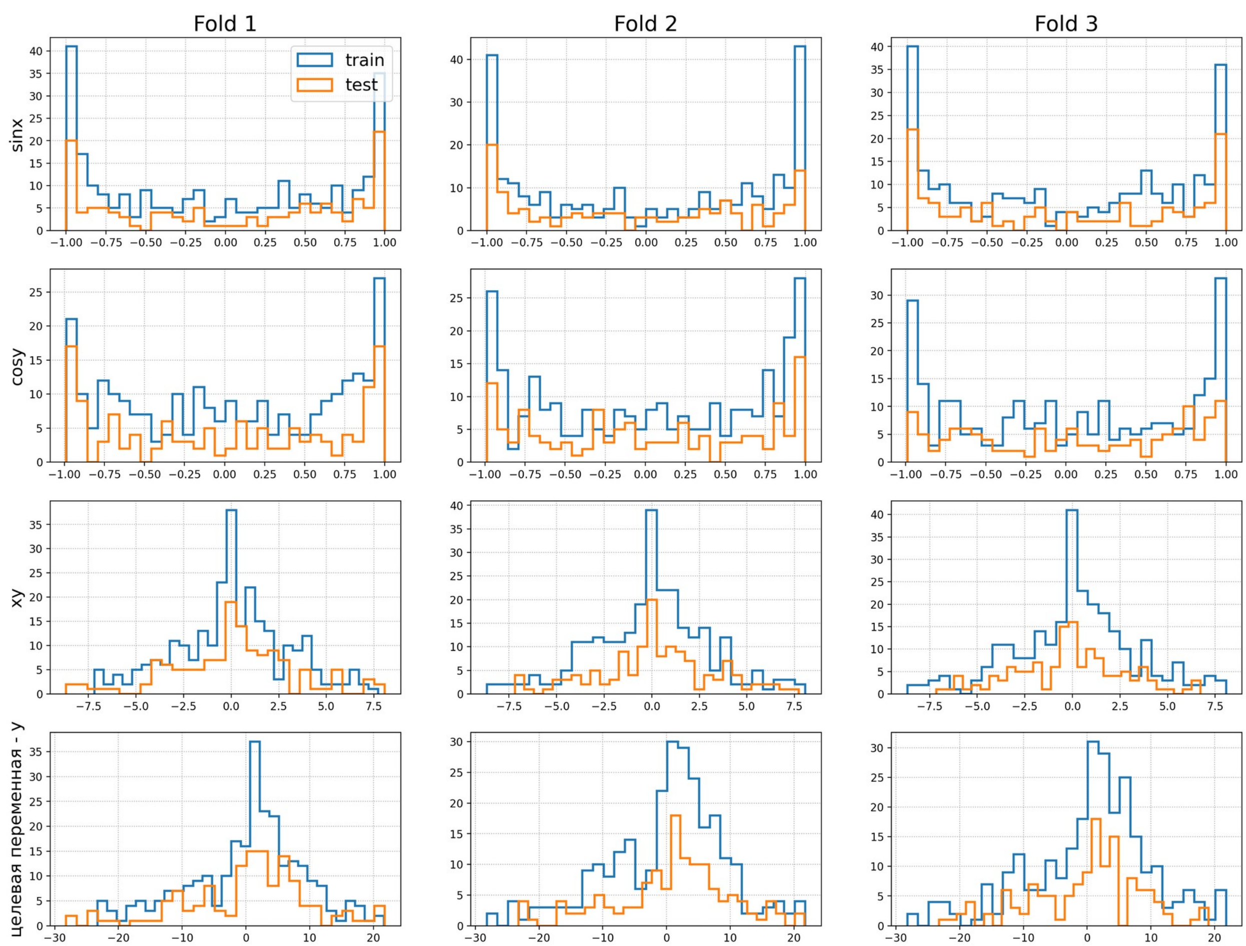
Пусть сгенерерированные точки являются результатом некоторого эксперимента. Найдём наилучшие параметры α, β, γ, в предположении что модельная функция имеет вид: $\alpha \sin(x) + \beta \cos(y) + \gamma x y$.

```
data['sinx'] = np.sin(data.x)
data['cosy'] = np.cos(data.y)
data['xy'] = data.x * data.y

X, y = data[['sinx', 'cosy', 'xy']], data.f
```

Разобъём датасет на несколько частей и убедимся что распределения тестовой и тренировочной частей совпадают.

```
kf = KFold(n_splits = 3, shuffle = True)

fig, ax = plt.subplots(len(X.keys()) + 1, 3, figsize = (20, 15), dpi = 
200)

for ind, (train, test) in enumerate(kf.split(X)):
    for a, key in enumerate(X.keys()):
        ax[a][ind].hist(X[key][train], label = f'train', histtype = 
'step', linewidth = 2, bins = 30)
```

```
        ax[a][ind].hist(X[key][test], label = f'test', histtype = 
'step', linewidth = 2, bins = 30)
        ax[a][0].set_ylabel(f'{key}', fontsize = 16)
    ax[len(X.keys())][ind].hist(y[train], label = f'y train', histtype 
= 'step', linewidth = 2, bins = 30)
    ax[len(X.keys())][ind].hist(y[test], label = f'y test', histtype = 
'step', linewidth = 2, bins = 30)

ax[0][0].legend(loc = 'upper right', fontsize = 16)
ax[-1][0].set_ylabel('целевая переменная - y', fontsize = 16)
for i, a in enumerate(ax[0]):
    a.set_title(f'Fold {i + 1}', fontsize = 20)
for a in ax:
    for b in a: b.grid(ls = ':')
```



В качестве модели будем использовать реализованный ниже класс:

```
class Model_L1:
    def __init__(self, lr, alpha, max_iteration = 1000):
        self.lr, self.alpha = lr, alpha
        self.max_iteration = max_iteration
```

```
    def fit(self, X, y):
        self.w = np.random.rand(X.shape[1]) + 1
        i = 0
        prev_omega = np.inf
        while i < self.max_iteration and np.linalg.norm(prev_omega - 
self.w) > 1e-4:
            prev_omega = np.copy(self.w)
            self.__make_L1_regression_grad_descent_iteration__(X, y)
            i += 1
    def predict(self, X):
        return X @ self.w
    def __make_L1_regression_grad_descent_iteration__(self, X, y):
        grad = 2 * (X @ self.w - y) @ X + 2 * self.alpha * 
np.sign(self.w)
        self.w -= self.lr * grad
```

Для подбора наилучших параметров модели(`lr`, `alpha`). Будем использовать метод `GridSearch`:

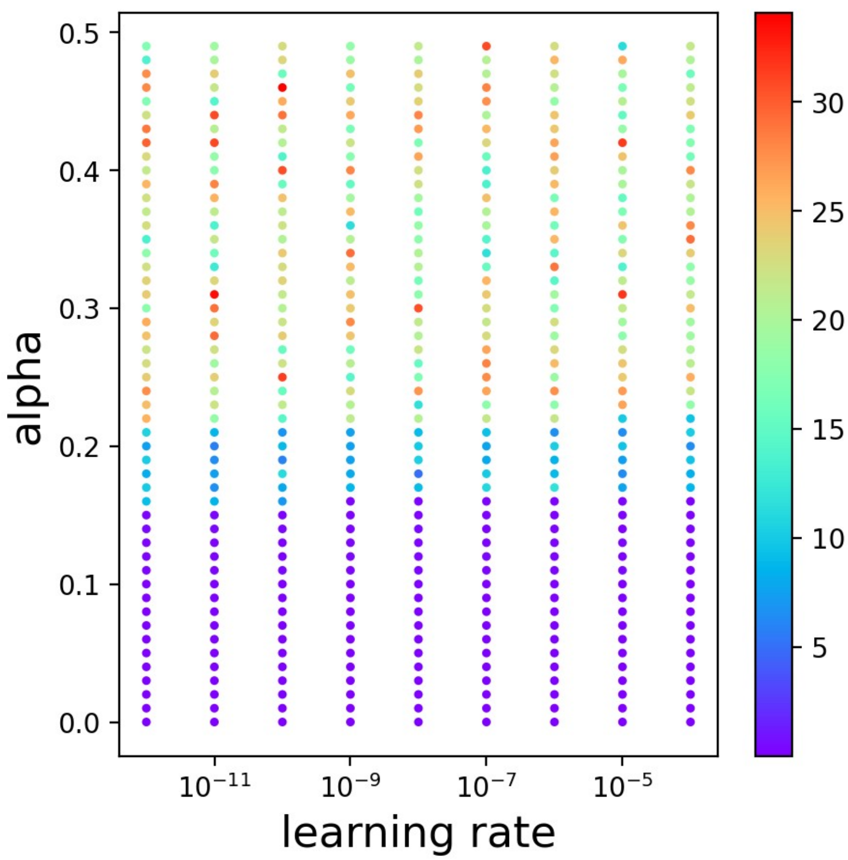
- Фиксируем сетку значений гиперпараметров.
- Для каждой пары гиперпараметров оцениваем точность модели используя кросс - валидацию.

```
def get_mse(lr, alpha, X, y):
    model = Model_L1(lr, alpha)
    mse = []
    for train, test in kf.split(X):
        model.fit(X[ train], y[train])
        mse.append(mean_squared_error(y[test], 
model.predict(X[ test])))
    return np.mean(mse)

lr_values, alpha_values = np.logspace(-4, -12, 9), np.arange(0, 0.5, 
0.01)

mse = np.zeros(shape = (len(lr_values), len(alpha_values)))

for ind_1, lr in enumerate(lr_values):
     for ind_2, alpha in enumerate(alpha_values):
         mse[ind_1][ind_2] = get_mse(lr, alpha, X.to_numpy(), 
y.to_numpy())

LR, A = np.meshgrid(lr_values, alpha_values)
best_param_ind = np.unravel_index(mse.argmin(), mse.shape)
a_best = alpha_values[best_param_ind[1]]
lr_best = lr_values[best_param_ind[0]]

print(f"Наилучшее значение alpha: {a_best}")
print(f"Наилучшее значение lr: {lr_best}")
```

```
plt.figure(figsize = (5, 5), dpi = 200)
plt.xscale('log')
plt.scatter(LR, A, c = mse, cmap = 'rainbow', s = 5)
plt.colorbar()
plt.xlabel('learning rate', fontsize = 16)
plt.ylabel('alpha', fontsize = 16)
```

```
Наилучшее значение alpha: 0.07
Наилучшее значение lr: 0.0001
```

```
Text(0, 0.5, 'alpha')
```

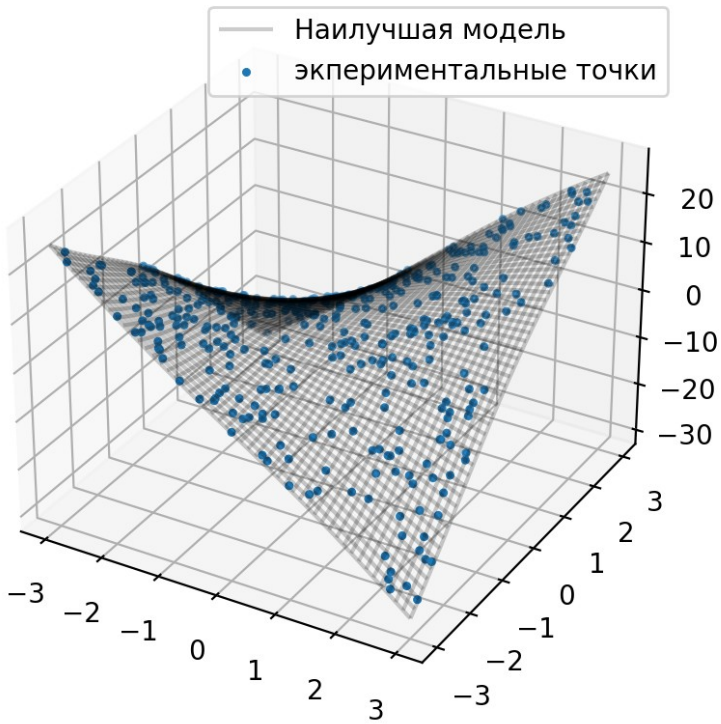



```
model = Model_L1(alpha = a_best, lr = lr_best)
model.fit(X.to_numpy(), y.to_numpy())
print(model.w)
```

```
[0.9993275  1.99019567 3.00144722]
```

```
fig = plt.figure(figsize = (4, 4), dpi = 200)
ax = fig.add_subplot(111, projection = '3d')
x, y = np.linspace(-3, 3, 50), np.linspace(-3, 3, 50)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
ax.plot_wireframe(X, Y, some_func(*model.w, X, Y), alpha = 0.2, label
```

```
= 'Наилучшая модель', color = 'black')
ax.scatter3D(data.x, data.y, data.f, s = 5, label = 'экпериментальные
точки')
ax.legend()
fig.tight_layout();
```



Задача 5

Покажите, что задача минимизации квадратичной функции потерь с дополнительным ограничением (лассо Тибширани):

$$L = \| Xw - y \|^2 \to \min_w, \sum_\alpha |w_\alpha| < C$$

эквивалентна L1-регуляризации. Указание: можно воспользоваться условиями Каруша - Куна — Таккера (обобщение метода Лагранжа). Link .

Введем ошибку

$$L' = |) Xw - y|)^2 + \mu \left(\sum_\alpha |w_\alpha| + C \right)$$

Обычная ошибка при L_1 регуляризации

Согласно условиям Каруша — Куна — Таккера минимальный вектор ω, минимизирующий ошибку найдётся и будет удовлетворять условию жесткости:

$$\mu\left(\sum_{\alpha}\left|w_{\alpha}\right)+C\right)=0 \rightarrow \sum_{\alpha}\left|w_{\alpha}\right)<C$$