Упражнение 4.

$x^2 - 2x + b = 0$ $\Delta x = 10^{-5}$

$b = 0{,}999993751$

$$2x\Delta x + 2\Delta x = +\Delta b$$

$$\Delta b = 2\Delta x(x+1)$$

$$\Delta b = \min\left\{2\Delta x\left(\frac{1-\sqrt{1-2b}}{2}+1\right),\ 2\Delta x\left(\frac{1+\sqrt{1-2b}}{2}+1\right)\right\} =$$

$$= \cancel{\min}\{\ \Delta x - \Delta x\sqrt{1-2b} + 2\Delta x$$

$$\Delta b_{opt} = \Delta x\big(3 - \underbrace{\sqrt{1-2b}}_{\sim 0}\big)$$

$\Delta b \sim 10^{-5}$ b должен быть известен до пяти верных знаков

Упражнение 3.

3.1.

$$ay^3 + d = 0 \qquad \Delta a = 10^{-2}$$
$$\Delta d = 10^{-3}$$

$$\Downarrow$$

$$y^3 = -\frac{d}{a} \Rightarrow y = -\sqrt[3]{\frac{d}{a}}$$

Методом частных производных:

$$\left|\frac{\partial y}{\partial d}\right| = \frac{1}{3}\frac{d^{-2/3}}{a^{1/3}} \qquad \left|\frac{\partial y}{\partial a}\right| = \frac{1}{3}\frac{d^{1/3}}{a^{4/3}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta y = \frac{1}{3}\left(\frac{d^{-2/3}}{a^{1/3}}\Delta d + \frac{d^{1/3}}{a^{4/3}}\Delta a\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{d^{-2/3} a \Delta d + d^{1/3}\Delta a}{a^{4/3}}\right)$$

Посчитаем погрешность в точке $(1, 8)$:

$$\Delta y \Big|_{\substack{a=1 \\ d=8}} = \frac{10^{-3}}{3}\left(\frac{1/4 + 2}{1}\right) =$$

$$= \frac{10^{-3} \cdot \cancel{9}3}{\cancel{3} \cdot 4} = \frac{3}{4} \cdot 10^{-3}$$

3.2.

$$u'(x) \approx \frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h}$$

I. Ошибка округления

$$\varepsilon_{round} = \frac{18 \Delta u}{12h}$$

II Ошибка метода

$$\varepsilon_{method} =$$

$$u(x-2h) = u' \cdot 2h + u +$$

$$+ \frac{u''}{2} 4h^2 + \frac{u'''}{6} 8h^3 + \frac{u''''}{24} 16h^4 +$$

$$+ \frac{u^{V}}{120} 32h^5$$

3.2.

$$u'(x) \approx \frac{u(x-2h) - 8u(x-h) + 8u(x+h) - u(x+2h)}{12h}$$

I. Ошибка округления

$$\varepsilon_{round} = \frac{3}{2}\frac{\Delta u}{h}$$

II. Ошибка метода

$$u(x-2h) - u(x+2h) =$$

$$= -4hu' - 2\cdot 8h^3 \frac{u'''}{\cancel{6}\,3} - 2\cdot \cancel{32}^{4} h^5 \cdot \frac{u^{V}}{\cancel{120}_{15}}$$

$$u(x+h) - u(x-h) =$$

$$= 2hu' + 2h^3\frac{u'''}{6} + 2h^5\frac{u^{V}}{120}$$

$$u'(x) \sim \frac{1}{12h}\Big(-4hu' - \cancel{8h^3\frac{u'''}{3}} -$$

$$- \frac{8h^5}{15}u^{V} + 16hu' + \cancel{\frac{8h^3u'''}{3}} + \frac{\cancel{8}^{2}h^5u^{V}}{\cancel{60}_{15}}\Big) \ominus$$

$$= u' - \frac{1}{\cancel{12h}_{\,2}} \cdot \frac{\cancel{6} h^{\cancel{5}\,4} u^{V}}{15} =$$

$$u' - \frac{h^4 u^{V}}{30} \longrightarrow \mathcal{E}rr_{method}$$

$$\mathcal{E}_{method} = \frac{h^4 u^{V}}{30} \le \frac{h^4}{30} M_5$$

III Результирующая ошибка:

$$\mathcal{E} = \frac{3\Delta u}{2h} + \frac{h^4 M_5}{30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial h} = -\frac{3\Delta u}{2h^2} + \frac{2h^3 M_5}{15} = 0$$

$$-15 \cdot 3\Delta u + 4h^5 M_5 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$h_{opt}^5 = \frac{45}{4}\cancel{M_5} \cdot \frac{\Delta u}{M_5}$$

$$h_{opt} = \sqrt[5]{\frac{45\Delta u}{4M_5}}$$

Упражнение 5

$$5x_{n+1} - x_n = 4$$

$$\Downarrow$$

$$5\Delta x_{n+1} + \Delta x_n = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta x_{n+1} = \Delta x_n / 5 \quad \Rightarrow \quad \Delta x_n = \frac{\Delta x_0}{5^n}$$

$$x_n = 1 + \frac{x_0 - 1}{5^n} = \frac{5^n + x_0 - 1}{5^n}$$

$$\Downarrow$$

$$\cancel{\Delta x_{n+1} = 1} \qquad \delta_n = \frac{\Delta x_0}{\cancel{5^n}} \cdot \frac{\cancel{5^n}}{5^n + x_0 - 1} =$$

$$= \frac{|\delta x_0|}{5^n + x_0 - 1}$$

$$\frac{\partial(\delta_n)}{\partial x_0} = \frac{\delta \cdot (5^n + x_0 - 1)' - \delta x_0 (5^n + \cancel{x_0} - 1)'}{(5^n + x_0 - 1)^2}$$

$$= \delta \frac{5^n + x_0 - 1 - 5^n x_0 - \cancel{1 \cdot x_0}}{(5^n + x_0 - 1)^2}$$

$$5^n x_0 < 5^n - 1$$

$$5^n - 1 - 5^n x_0 > 0$$

$$x_0 < \frac{5^n - 1}{5^n}$$

$$\cancel{x_0 < 1 - \frac{1}{5^n}}$$

$$\frac{\partial(\delta_n)}{\partial n} = \frac{0 - |\delta x_0|(n 5^{n-1})}{(5^n + x_0 - 1)^2} < 0$$

$$\forall x_0$$

$$\Downarrow$$

Относительная погрешность всегда убывает вне зависимости от x_0

Упражнение 4.

$$x^2 - 2x + b = 0 \qquad \Delta x = 10^{-5}$$

$$b = 0{,}99993751 = 0{,}1111 + 1 \cdot 10^{-5}$$
$$= 99999{,}3751 \cdot 10^{-5}$$

$$D = 4 - 4b \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{D}}{2} =$$
$$= 1 \pm \sqrt{1-b}$$

$$2x\Delta x + 2\Delta x = \Delta b = 2\Delta x(x+1)$$

$$\Delta b_{opt} = \min\{2\Delta x(2+\sqrt{1-b}),$$
$$2\Delta x(2-\sqrt{1-b})\}$$

$$\sim (1 - b/2)$$

$$\Delta b_{opt} = \underbrace{4\Delta x}_{4\cdot 10^{-5}} - 2\underbrace{\sqrt{1-b}}_{6{,}249\cdot 10^{-6}} =$$

$$c = \sqrt{0{,}2\ldots}$$

$$= \cancel{4 \cdot 10^{-5} - 1 \cdot 2 + b} \qquad = 4\cdot 10^{-5} - 2c \cdot 1\ldots$$

$$0{,}04 \cdot 10^{-3-2}$$

$$= \cancel{4 \cdot 10^{-5} + 99999{,}\ldots \cdot 10^{-5} - 2}$$

$$= 10^{-3}(0{,}04 - 2c) = 10^{-3}(0{,}04 - 5\ldots$$

$$x^2 - 2x + 1 - b = 0$$

Упражнение 4.

$$x^2 - 2x + b = 0 \quad \Delta x = 10^{-5}$$

$$D = 4 - 4b \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{1-b}$$

$$2x\Delta x + 2\Delta x = \Delta b = 2\Delta x(x+1)$$

$$\Delta b = \min\{2\Delta x(2+\sqrt{1-b}),\ 2\Delta x(2-\sqrt{1-b})\}$$

$$\Delta b = 2\Delta x \cdot 2 - 2\Delta x \underbrace{\sqrt{1-b}}_{6{,}249 \cdot 10^{-6}} =$$

$$= 4 \cdot 10^{-5} - \underbrace{2 \cdot c \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-3}}_{\gamma \cdot 10^{-5}} = \quad \gamma << 1$$

$$\underbrace{= (4-\gamma) \cdot 10^{-5}}_{10^{-5} <}$$

$\rightarrow$ Необходимо 5 знаков

Неделя 2

Задача 3

$$C_1 \|x\|_2 \le \|x_p\|_1 \le C_2 \|x\|_2$$

$$\frac{\sum |x_i|}{n} \le \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

$$\frac{\|x\|_1}{n} \le \frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} \Rightarrow C_2 = \sqrt{n}$$

$$\|x\|_1^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 + 2\sum_{i<j} |x_i||x_j| \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|x\|_2^2$$

$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\|x\|_2$$

Задача 4.

(1) $\|x\|_2 \le \sqrt{m}\,\|x\|_\infty$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} x_i^2} \le \sqrt{m\,(\max_i |x_i|)^2} =$$

$$= \sqrt{m}\,\|x\|_\infty \ \checkmark$$

= 4

● $\|A\|_\infty \le \sqrt{n}\,\|A\|_2$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$\|A\|_\infty = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \le$$

$$\le \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_2} \le \sqrt{n}\,\frac{\|Ax\|_2}{\|x_2\|} \le$$

$$\le \sqrt{n}\,\|A\|_2$$

Задача 3

$\forall U$ - унитарной

$\forall A$ - произв

$$\|UA\|_F = \|AU\|_F = \|A\|_F$$

$\|A\|_F^2 = \operatorname{tr} A^T A$ ↑ Σ - в силу унитарная

$$\|UA\|_F^2 = \operatorname{tr} A^T U^T U A =$$

$$= \operatorname{tr} A^T A$$ ▨

Неделя 3.

Теор 1.

Решить МНК:

$$L_\ell = \sum_{i=1}^{\ell}(y_i - \tilde{y})^2$$

$\tilde{y} \equiv const.$

I. $$\frac{\partial L_\ell}{\partial \tilde{y}} = -2\sum_{i=1}^{\ell}(y_i - \tilde{y}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} y_i - \ell\tilde{y} = 0 \Rightarrow \tilde{y} = \bar{y}$$

Теор 2.

Прямая МНК проходит через $(\bar{x}_\ell, \bar{y})$

$$\hat{y} = \hat{w} x_0 + \hat{b} = \frac{\widehat{cov}(x,y)}{\widehat{var}(x_\ell)} x_0 + \bar{y} - \bar{x}_\ell \frac{\widehat{cov}(x,y)}{\widehat{var}(x)}$$

Проверим верно ли ра

венство для нашей точки:

$$\bar{y} = \cancel{\hat{\omega}\bar{x}_e} + \bar{y} - \cancel{\hat{\omega}\bar{x}_e}$$

$$\bar{y} = \bar{y} \checkmark$$

Упражнение 2

I. Централизация признаков

$$\tilde{x}_{e_{ij}} = x_{e_{ij}} - \sum_{j'=1}^{\ell} x_{e_{ij'}}$$

$$\cancel{(x_{e_{ij}}) - \sum}$$

II. $\left(x_e \;\vdots\; 1 \right) \xrightarrow{X'} \to (X'^T X')^{-1} \to \left(\quad \right)$

Если совпадают обратные матрицы =>

Задача 3.

$$Xw = y \qquad X \in \mathbb{R}^{l\times n}$$
$$w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$$
$$y \in \mathbb{R}^{l\times 1}$$

Поиск решения с минимальной l_2-нормой $\|w\|^2 = w^T w$

I. Loss $= L_e = \|Xw - y\|^2 \to \min\limits_{w}$

При этом $\|w\|^2 \to \min$

$$L_e = (Xw - y)^T (Xw - y)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial w} = X^T(Xw - y) + (Xw - y)^T X =$$
$$= X^T(Xw - y) + X^T(Xw - y) =$$
$$= 2X^T(Xw - y) = 0$$

$$X^T X w = X^T y$$

$$w = (X^T X)^{-1} X^T y$$ (обычный МНК)

Возможно следует исполь-
зовать регуляризацию?

$$L_e = \|Xw - y\|^2 + \|w\|^2 \to \min$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial w} = 2X^T(Xw - y) + 2w =$$

$$= (2X^TX + 2)w - 2X^Ty = 0$$

$$\Downarrow$$

$$X^TXw + w = X^Ty$$

$$(X^TX + E)w = X^Ty$$

$$w = (X^TX + E)^{-1}X^Ty$$

$$(X^TX + E)^{-1} = (E + (X^TX)^{-1}E)^{-1}(X^TX)^{-1}$$

$$w = (E + (X^TX)^{-1})^{-1} Q y$$

Задача 4.

Теоретический вопрос 1

$$X = V\sqrt{\Lambda}\,U^T \in \mathbb{R}^{l \times f}$$

$$\tilde{X} = V\sqrt{\tilde{\Lambda}}\,U^T$$

$$\tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & & 0 & \lambda_{f+1} & & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_f \end{pmatrix}$$

Решение понятно для нормы Фробениуса

Задача 4 - теоретический вопрос 2

Д-ть $\bar{u}_1 = \underset{\|K\|=1}{\arg\max} (X\bar{K})^2$

$\bar{u}_1$ - сингулярный вектор соответствующий наибольшему λ

$$X = V\sqrt{\Lambda}\,U^T \qquad \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_F} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^T & u_2^T & \dots \end{pmatrix}$$

$$(X\bar{K})^2 = (\underbrace{V}_{\ell\times F}\overbrace{\underbrace{\sqrt{\Lambda}}_{F\times F}\,\underbrace{U^T}_{F\times F}\underbrace{\bar{K}}_{F\times 1}}^{F\times 1})^2$$

V - унитарная $\Rightarrow$ не меняет нормы

$$(X\bar{K})^2 = (\sqrt{\Lambda}\,U^T\bar{K})^T(\sqrt{\Lambda}\,U^T\bar{K}) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{F} \sqrt{\lambda_i}\,(u_i^T\bar{K})\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{F} \sqrt{\lambda_i}\,\|u_i^T\|\,\|K\|\cos\alpha_i\right)^2$$

α_i - угол между u_i^T и K

При этом U^T - унитарна

$\cancel{\Rightarrow \|u^T K\| \le \|u^T\| \|K\| \le \|K\|}$

$\cancel{\|K\| \le \|u^T\| \|K\|}$

Т.к. максимальное λ стоит на первой позиции, то сумма достигает максимума при $K \parallel u_1^T$

$$\Downarrow$$

$$K = u_1^T$$

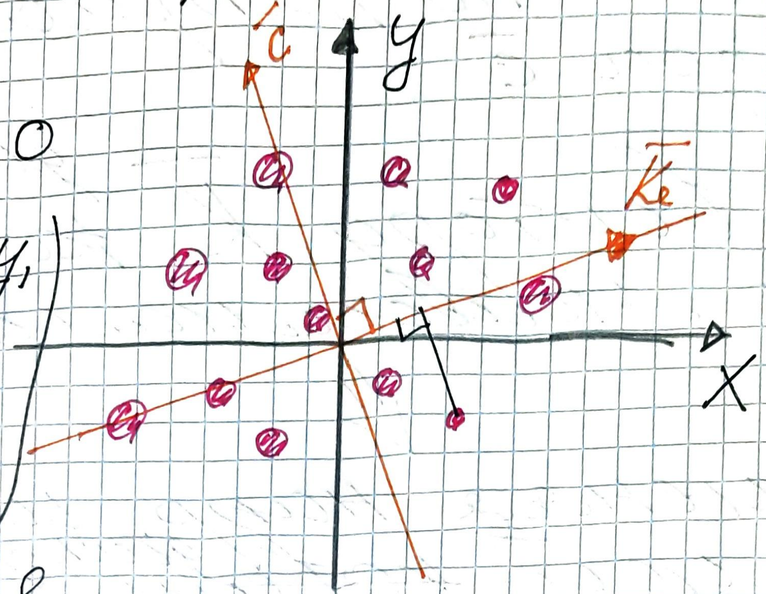
(т.к. $\|K\| = \|u_1^T\| = 1$)

Задача 5е

Теор. вопрос 2.

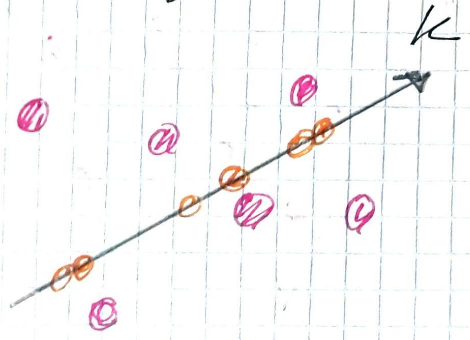
$\bar{X} = \bar{y} = 0$

$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \dots & \\ x_n & y_n \end{pmatrix}$



$$L' = \sum_{i=1}^{N_e} \left| -(r_i, k_e) k_e + r_i \right| \to \min_e$$

Пусть $\tilde{X}$ получено методом главных компонент → новый набор точек спроецируется на $\bar{K}$



При преобразовании

$$\sum_{i=1} |\tilde{r}_i - r_i| = \sum_{i=1}^{N_e} \sqrt{(\tilde{x}_i - x_i)^2 + (\tilde{y}_i - y_i)^2} =$$

$$= \sum \sqrt{\tilde{x}_i^2 + x_i^2 - 2\tilde{x}_i x_i \dots}$$

- метод гл. компонент

- старый набор

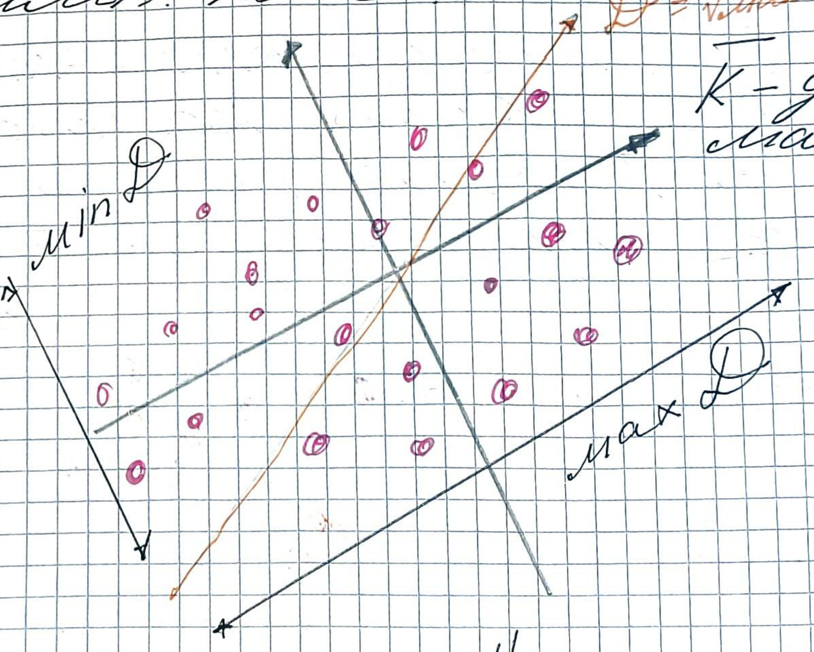
Расстояние от старых точек до новых проп. ~~ковариации~~ исходного облака дисп по направлению вектора $\bar{c}$

По вектору $\bar{K}$ дисп ~~ковариация~~ максимальна

$\Downarrow$

Изменяя D напр искомой прямой дисперсия ~~ковариация~~ по вектору $\perp$ прямой возрастает $\Rightarrow$ возрастает сумм. полей

$D = \sqrt{\max D^2 + \min D^2}$



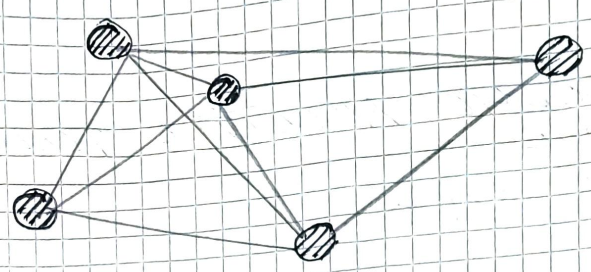
$\bar{K}$ – дисп. макс

$\Downarrow$

$\bar{K}$ – наилучший вектор

Задача 5 - Теор 2.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$$



$$\hat{J} = \begin{Vmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{Vmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & \sum_{i=1}^{N} x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} x_i z_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i & \sum_{i=1}^{N} y_i^2 & \sum y_i z_i \\ \sum x_i z_i & \sum z_i y_i & \sum z_i^2 \end{pmatrix}$$

Недиаг. элементы по модулю совп. с соотв. элементами тензора инерции

$$\hat{J}' = U^T \hat{J} U = U^T(-A + X^T X)U$$

где
$$A = \begin{pmatrix} \sum x_i^2+y_i^2+z_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sum x_i^2+y_i^2+z_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum x_i^2+y_i^2+z_i^2 \end{pmatrix}$$

$$J' = U^T A U + U^T X^T X U$$

$$J' = C_1 + U^T X^T X U$$

Необходимо найти такое опр-е $U^T X^T X U$ что

$$U^T X^T X U = H \Lambda H^T$$

Таким образом найдем собс. базис и главные моменты инерции твердого тела с „тензором инерции" $X^T X$

Чтобы найти тензор инерции заданного тела нужно вычесть пр-ую матрицу A

Неделя 4.

Задача 3

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\ln(L) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - n\ln(\sigma) -$$

$$- \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \cancel{a}\mu)^2$$

$a = \mu = \bar{x}$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \mu} = \frac{n\bar{x} - na}{\sigma^2} = 0$$

$x_i^2 - ax_i + na^2$

$$\frac{\partial \ln(L)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{2\sigma^4}$$

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{\sum x_i^2 - x_i \cdot \bar{x} + na^2}{2\sigma^4} = 0$$

$$\sigma = \frac{1}{n}\sum x_i^2 - \bar{x}^2$$

Преобразование Прокруста

$$\tilde{X}_1 = X_1 - \mathbb{1}\cdot\tilde{x}_1^T$$

$$\tilde{X}_2 = X_2 - \mathbb{1}\,\tilde{x}_2^T$$

$$\tilde{X}_1^T\tilde{X}_2 = UDV^T$$

$$\bar{\mu} = \bar{x}_2 - R_e^T\bar{x}_1 \qquad R_e = UV^T$$

$$\Downarrow$$

$$\min_{\bar{\mu}, R} \| X_2 - (X_1R - \mathbb{1}\bar{\mu}^T) \|_F$$

I. Прод. диф. по μ

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \| X_2 - X_1R + \mathbb{1}\mu^T \|_F =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \mu} tr\left((X_2 - X_1R + \mathbb{1}\mu^T)^T (X_2 - X_1R + \mathbb{1}\mu^T)\right) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{1}(X_2 - X_1R + \mathbb{1}\mu) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\mu = (X_1R - X_2) = \frac{(X_1R - X_2)\mathbb{1}}{n}$$

II. По R

$$\frac{\partial}{\partial R} tr\left(\left(X_2 - X_1 R + \bar{1}\mu^T\right)^T \left(X_2 - X_1 R + \mu^T\right)\right) =$$

$$= -2\left(X_2 - X_1 R + \bar{1}\bar{\mu}^T\right)X_1^T = 0$$

$$-2 X_2 X_1^T - X_1 R X_1^T + \bar{1}\bar{\mu}^T X_1^T = 0$$

$$X_1 R X_1^T = \bar{1}\bar{\mu}^T X_1^T - 2 X_2 X_1^T$$

$$R = X_1^{-1}\left(X_2 - 1\mu^T\right)$$