Домашнее задание 6. Шмаков В.Е. ФФКЭ - гр. Б04-105

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import scipy.stats as sts
import scipy.optimize as opt
import typing as tp
from numba import njit
from matplotlib import cm
```

Задача 1

```
x=[0.1,0.10808081,0.11616162,0.12424242,0.13232323,0.14040404,
   0.14848485,0.15656566,0.16464646,0.17272727,0.18080808,
   0.18888889,0.1969697,0.20505051,0.21313131,0.22121212,
   0.22929293,0.23737374,0.24545455,0.25353535,0.26161616,
   0.26969697,0.27777778,0.28585859,0.29393939,0.3020202,
   0.31010101,0.31818182,0.32626263,0.33434343,0.34242424,
   0.35050505,0.35858586,0.36666667,0.37474747,0.38282828,
   0.39090909,0.3989899,0.40707071,0.41515152,0.42323232,
   0.43131313,0.43939394,0.44747475,0.45555556,0.46363636,
   0.47171717,0.47979798,0.48787879,0.4959596,0.5040404,
   0.51212121,0.52020202,0.52828283,0.53636364,0.54444444,
   0.55252525,0.56060606,0.56868687,0.57676768,0.58484848,
   0.59292929,0.6010101,0.60909091,0.61717172,0.62525253,
   0.63333333,0.64141414,0.64949495,0.65757576,0.66565657,
   0.67373737,0.68181818,0.68989899,0.6979798,0.70606061,
   0.71414141,0.72222222,0.73030303,0.73838384,0.74646465,
   0.75454545,0.76262626,0.77070707,0.77878788,0.78686869,
   0.79494949,0.8030303,0.81111111,0.81919192,0.82727273,
   0.83535354,0.84343434,0.85151515,0.85959596,0.86767677,
   0.87575758,0.88383838,0.89191919,0.9]

y = [-2.24812911, -2.30215341, -2.34463875, -2.38651064,
     -2.43190693, -2.44713884, -2.49003176, -2.51006098,
     -2.55831541, -2.57056931, -2.59340317, -2.64026441,
     -2.65975636, -2.69517476, -2.71046599, -2.74422696,
     -2.76251291, -2.79505506, -2.79301352, -2.82852207,
     -2.854651, -2.88654236, -2.92345136, -2.91943321,
     -2.94240833, -2.9487781, -2.97926813, -2.99198343,
     -3.03396292, -3.03814694, -3.04944858, -3.07196161,
     -3.09883706, -3.11338258, -3.11898122, -3.14254571,
     -3.18330957, -3.17453301, -3.20021237, -3.21213539,
     -3.23715191, -3.24017664, -3.23640684, -3.26147762,
```

```
       -3.28208909, -3.29453546, -3.31160478, -3.33188752,
       -3.33320305, -3.35238927, -3.34176317, -3.37471911,
       -3.37543159, -3.40452694, -3.40505804, -3.43358858,
       -3.43596139, -3.43705603, -3.45264647, -3.46029402,
       -3.45723979, -3.4720453, -3.47597438, -3.4795529,
       -3.50118552, -3.5031452, -3.5097196, -3.51083668,
       -3.51128397, -3.52708836, -3.5222885, -3.53317295,
       -3.50965143, -3.51939652, -3.51659198, -3.50734187,
       -3.50882329, -3.48129755, -3.49384658, -3.48813707,
       -3.48345018, -3.46180698, -3.44784696, -3.42372263,
       -3.39080674, -3.37867045, -3.35281766, -3.32575498,
       -3.28934964, -3.26814804, -3.23547615, -3.1707224,
       -3.12910072, -3.09300443, -3.02523152, -2.9453774,
       -2.89454317, -2.83662685, -2.75433056, -2.68946573]
```

```
func = lambda x, w1, w2, w3, w4: np.power(x, w2) * w1 + np.power(x,
w4) * w3
param_curve_fit, cov_matrix = opt.curve_fit(func, x, y, p0 = [20, 4, -
30, 3])
print(param_curve_fit)
print(cov_matrix)
```

```
[ 3.00860854  8.5844716  -3.9962949   0.24936605]
[[ 8.85070526e-04  2.15568654e-03  5.48151892e-05 -9.31717896e-06]
 [ 2.15568654e-03  6.50965592e-03  2.46223952e-04 -4.46944024e-05]
 [ 5.48151892e-05  2.46223952e-04  1.68896778e-05 -3.34831788e-06]
 [-9.31717896e-06 -4.46944024e-05 -3.34831788e-06  7.74351930e-07]]
```

```
param_polynom = np.polyfit(x, y, 4)
print(param_polynom)
```

```
[ 22.31513595 -37.72653678  24.99906654  -9.54808903  -1.50612742]
```

```
plt.figure(figsize = (12, 5), dpi = 200)

x_line = np.linspace(0, 1, 100)
plt.scatter(x, y, s = 30, edgecolor = 'k', label = 'Исходные данные')
plt.plot(x_line, np.poly1d(param_polynom)(x_line), color = 'orange',
linewidth = 2, label = '$P(x) = a x^4 + b x^3 \dots$\na=%5.3f, b=
%5.3f, c=%5.3f, d=%5.3f, e=%5.3f' % tuple(param_polynom))
plt.plot(x_line, func(x_line, *param_curve_fit), color = 'purple',
linewidth  = 2, linestyle = '--', label = r'$w_1 \cdot x^{w_2} + w_3 \
cdot x^{w_4}$')
plt.xlim(np.min(x) - 0.1, np.max(x) + 0.1)
plt.ylim(np.min(y) - 0.1, np.max(y) + 0.1)
plt.title("Приближение данных полномом степени не выше четырёх",
fontsize = 16)
plt.legend()
plt.grid(ls = ":")
```

Задача 2

Найти точку локального минимума функции $f(x) = 2x^2 - \ln(x)$ и функции $f(t) = (t^2 - 3)/(t + 2)$

```
@njit
def fibbonaci_count(N: int) -> np.ndarray:
    numeron = np.ascontiguousarray(np.zeros(N, dtype = np.ulonglong))
    numeron[0] = np.ulonglong(1)
    numeron[1] = np.ulonglong(1)
    for i in np.arange(2, N, 1):
        numeron[i] = numeron[i - 1] + numeron[i - 2]
    return numeron

fibbonaci_numbers = fibbonaci_count(70)

print(fibbonaci_numbers[-1])
```

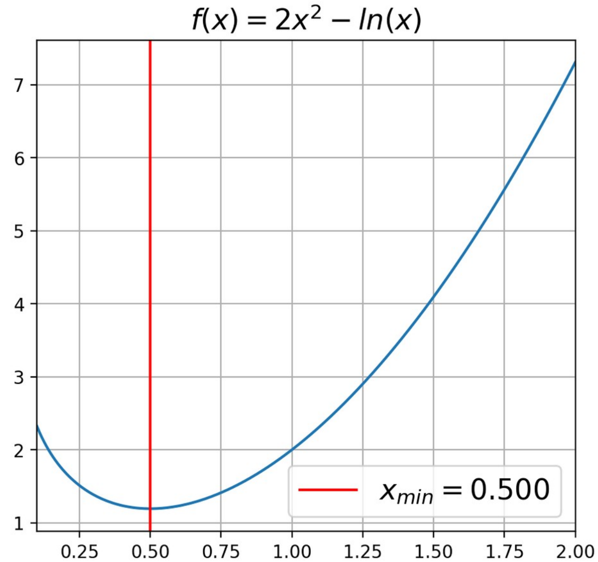
```
190392490709135
```

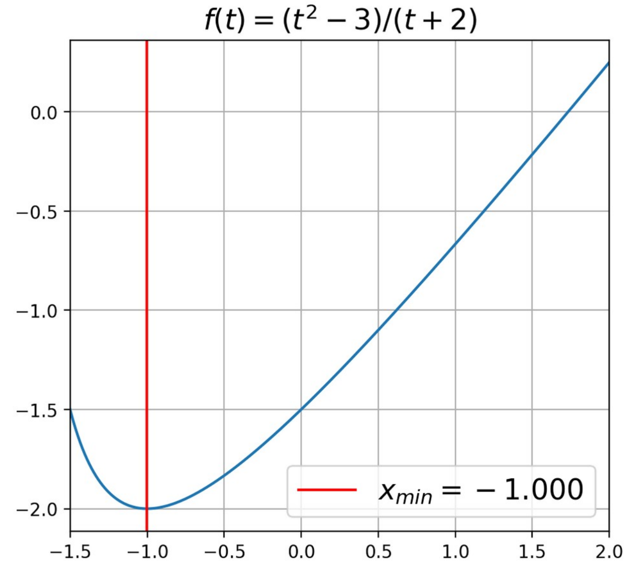
```
def fibbonaci_minimization(func: tp.Callable, left_boubd: float = -
1.6, right_bound: float = 1.6, N: int = 70):
    """Минимизация функции методом фиббоначи

    Args:
        func (tp.Callable): Минимизируемая функция
        left_boubd (float, optional): Левая граница отрезка на котором
минимизируется функция
        right_bound (float, optional): Правая граница отрезка на
котром минимизируется функция
        N (int, optional): Число итераций. Defaults to 100.
    """
    history = {"a": [], "b": [], "x1": [], "x2": []}
```

```
    a, b = left_boubd, right_bound
    for n in np.arange(N - 1, 1, -1, dtype = np.int64):
        x1 = a + (b - a) * fibbonaci_numbers[n - 2] /
fibbonaci_numbers[n]
        x2 = a + (b - a) * fibbonaci_numbers[n - 1] /
fibbonaci_numbers[n]
        history["a"].append(a)
        history["b"].append(b)
        history["x2"].append(x2)
        history["x1"].append(x1)
        if func(x1) > func(x2):
            a = x1
        else:
            b = x2

    return (x1 + x2) / 2, history



f1 = lambda x: 2 * np.power(x, 2) - np.log(np.abs(x) + 1e-6)
f2 = lambda t: (np.power(t, 2) - 3) / ((t + 2))

min_f1, _ = fibbonaci_minimization(f1, N = 50)
min_f2, history = fibbonaci_minimization(f2, N = 20)
print(min_f1, min_f2)
```

```
0.4999994964274175 -1.0002069475240205
```

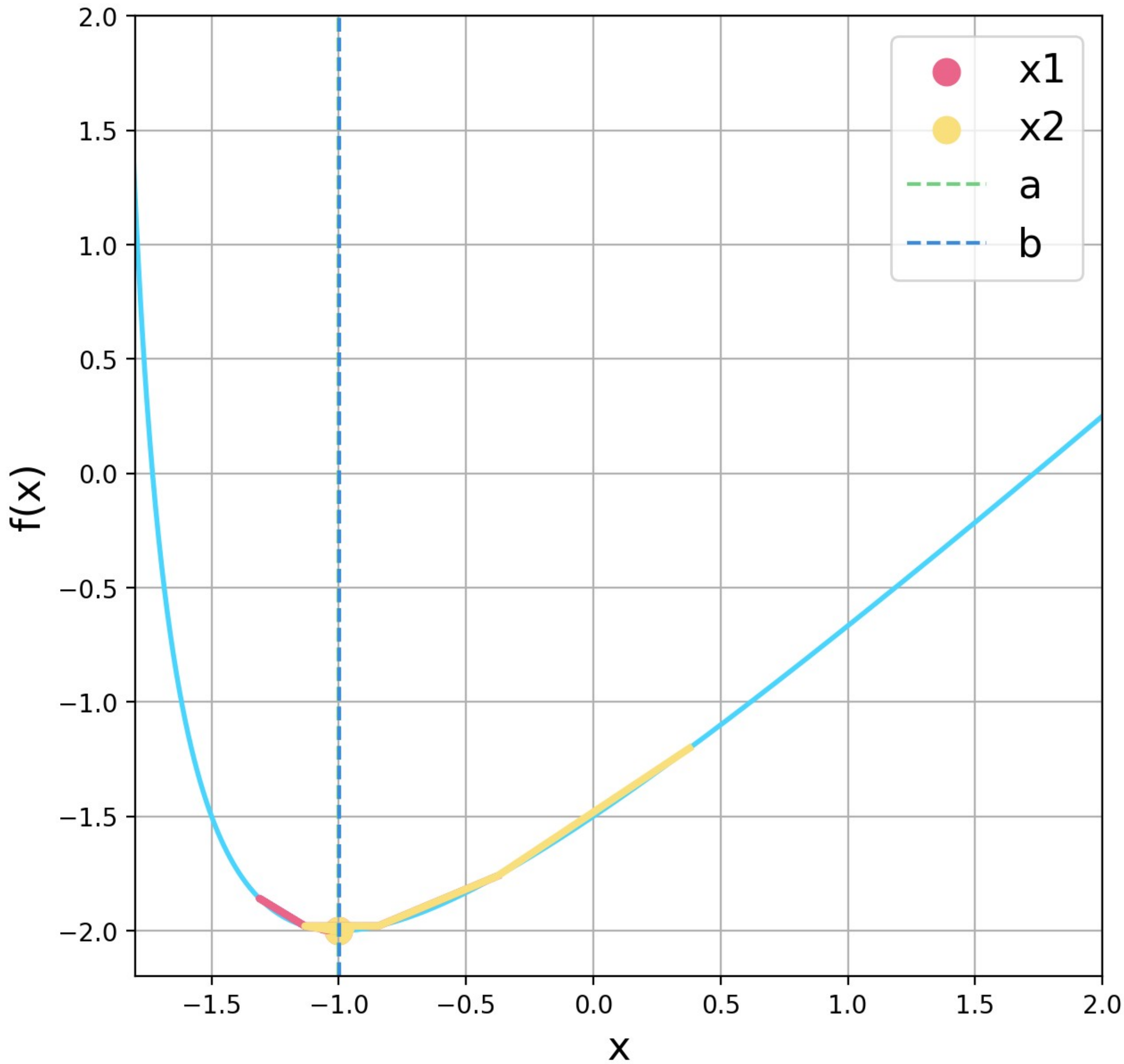
```
fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize = (12, 5), dpi = 200)

x_line_1 = np.linspace(0.1, 2, 1000)
ax[0].plot(x_line_1, f1(x_line_1))
ax[0].axvline(min_f1, color = 'red', label = r'$x_{min} = %5.3f$' %
min_f1)
ax[0].set_xlim(0.1, 2)
ax[0].set_title(r"$f(x) = 2x^{2} - ln(x)$", fontsize = 16)

x_line_2 = np.linspace(-1.5, 2, 1000)
ax[1].plot(x_line_2, f2(x_line_2))
ax[1].axvline(min_f2, color = 'red', label = r'$x_{min} = %5.3f$' %
min_f2)
ax[1].set_xlim(-1.5, 2)
ax[1].set_title(r"$f(t) = (t^{2} - 3) / (t + 2)$", fontsize = 16)

for a in ax:
    a.legend(fontsize = 16)
    a.grid()
```






```
from matplotlib.animation import FuncAnimation


fig, ax = plt.subplots(figsize = (7, 7), dpi = 200)
x = np.linspace(-1.9, 2, 1000)
line, = ax.plot(x, f2(x), lw=2)

def init():
    line.set_ydata(np.ma.array(x, mask=True))
    ax.set_xticks(np.arange(-2, 2.5, 0.5))
    ax.set_xlim(-1.8, 2)
    ax.grid()
    ax.set_xlabel('x', fontsize = 16)
    ax.set_ylabel('f(x)', fontsize = 16)
    ax.set_ylim(-2.2, 2)
    return line,


def update(frame):
    ax.clear()
    ax.set_xticks(np.arange(-2, 2.5, 0.5))
    ax.set_xlim(-1.8, 2)
    ax.grid()
    ax.plot(x, f2(x), lw = 2, color = '#4ad5ff')
    ax.plot(history['x1'][:frame + 1], f2(np.array(history['x1']
[:frame + 1])), color = '#eb6489', lw = 3)
    ax.plot(history['x2'][:frame + 1], f2(np.array(history['x2']
[:frame + 1])), color = '#f9e07d', lw = 3)
    ax.scatter(history['x1'][frame], f2(history['x1'][frame]), color =
'#eb6489', label = 'x1', s = 110)
    ax.scatter(history['x2'][frame], f2(history['x2'][frame]), color =
'#f9e07d', label = 'x2', s = 110)
```

```
    ax.axvline(x = history['a'][frame], linestyle='--',
color='#70d280', label='a')
    ax.axvline(x = history['b'][frame], linestyle='--',
color='#3c8cde', label='b')
    ax.legend(loc = 'upper right', fontsize = 16)
    ax.set_xlabel('x', fontsize = 16)
    ax.set_ylabel('f(x)', fontsize = 16)
    ax.set_ylim(-2.2, 2)
    return line,

ani = FuncAnimation(fig, update, frames = len(history['x1']),
init_func = init, blit = True)
ani.save("f2_minimization_fibb.mp4", fps = 2, extra_args=['-vcodec',
'libx264'])
```



Задача 3

```
rastrigin_f_min = lambda x: 20 + np.power(x[0], 2) + np.power(x[1], 2)
- 10 * np.cos(np.pi * x[0] * 2) - 10 * np.cos(np.pi * x[1] * 2)
rastrigin_f = lambda x1, x2: 20 + np.power(x1, 2) + np.power(x2, 2) -
10 * np.cos(np.pi * x1 * 2) - 10 * np.cos(np.pi * x2 * 2)
x1_line = np.linspace(-2, 2, 1000)
x2_line = np.linspace(-2, 2, 1000)
X, Y = np.meshgrid(x1_line, x2_line)
X0, Y0 = np.meshgrid(x1_line[::20], x2_line[::20])

grid = np.vstack([X0.flatten(), Y0.flatten()]).T
minimums = []
for x0 in grid:
    minimums_scipy_obj = opt.minimize(rastrigin_f_min, x0 = x0)
    minimums.append(minimums_scipy_obj.x)

minimums = np.array(minimums)
```

```
(50, 50)
(2500, 2)
```

```
print(minimums.shape)
```

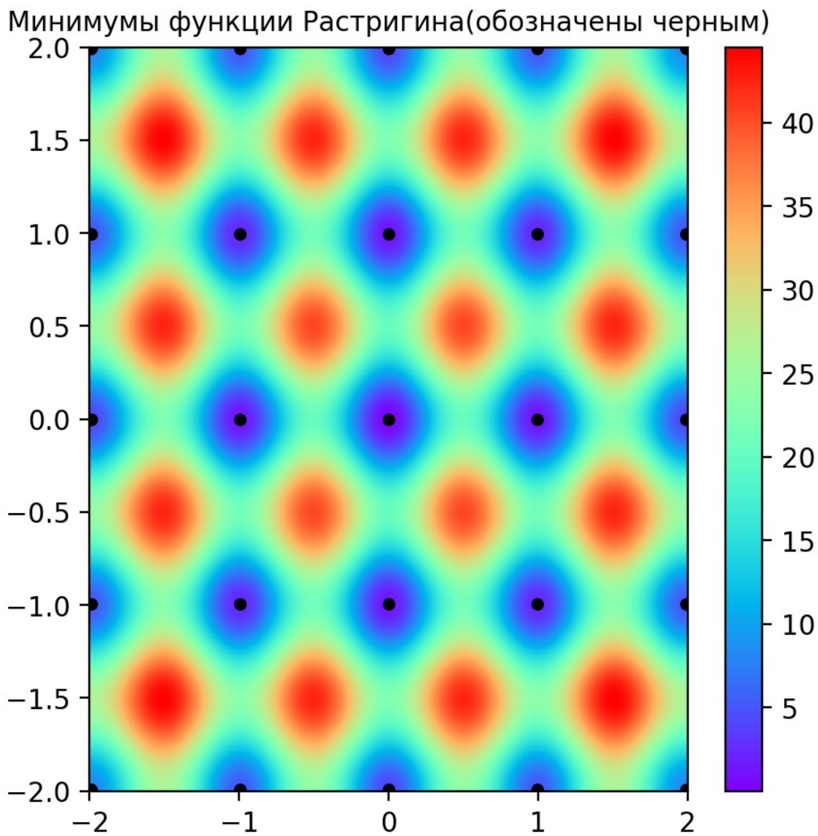
```
(2500, 2)
```

```
print(minimums[0,:].shape)
```

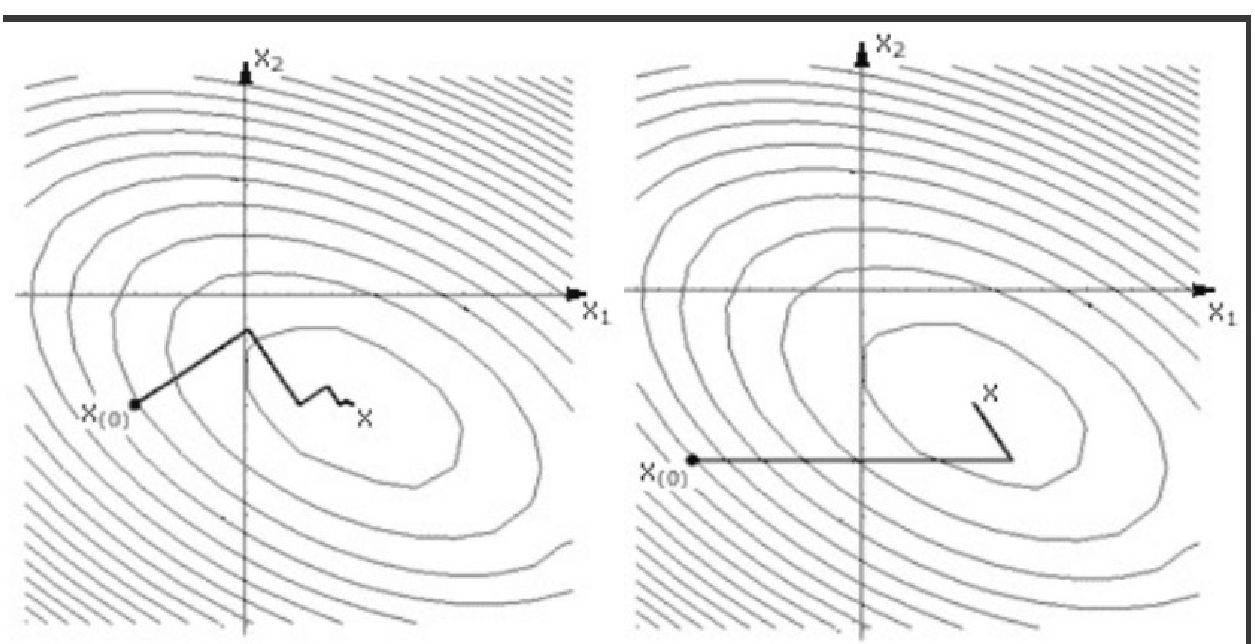
```
(2,)
```

```
plt.figure(figsize = (5, 5), dpi = 200)
im = plt.pcolormesh(X, Y, rastrigin_f(X, Y), cmap = 'rainbow')
plt.scatter(minimums[:,0], minimums[:, 1], color = 'black', s = 10)
plt.colorbar(im)
plt.xlim(-2, 2)
plt.ylim(-2, 2)
plt.title("Минимумы функции Растригина(обозначены черным)", fontsize =
10)
```

```
Text(0.5, 1.0, 'Минимумы функции Растригина(обозначены черным)')
```



Задача 4



На картинке слева изображен алгоритм наискорейшего спуска. Справа - алгоритм минимизации методом сопряженных градиентов.

Обоснование

- На левом рисунке движение строго перпендикулярно линиям уровней(в ортогональных направлениях).
- На правом рисунке отчетливо видно что алгоритм сходится в точке 2, и начинает движение в новом направлении.

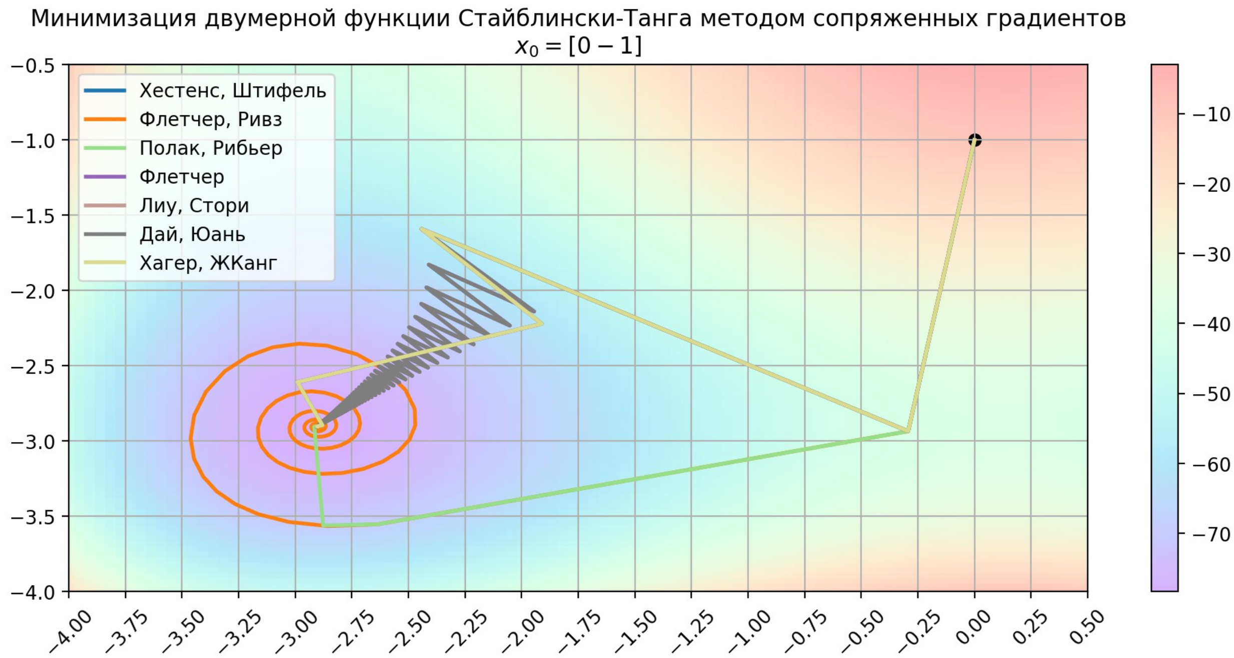
Задача 6*

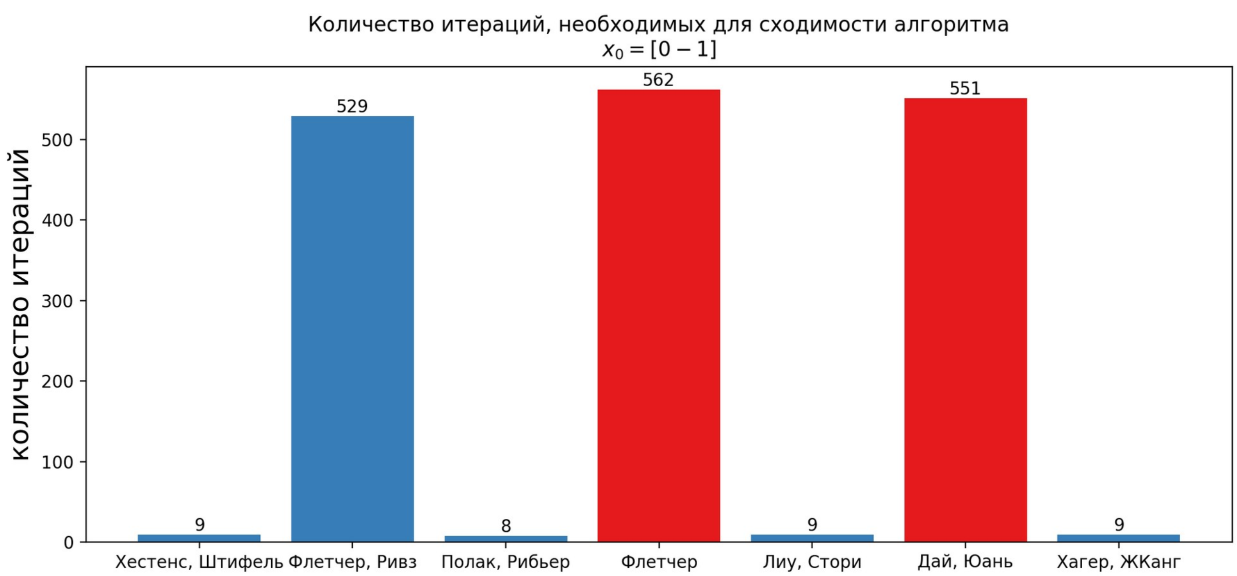
```
def minimize(f: tp.Callable,
             grad_f: tp.Callable,
             x0: np.ndarray,
             Bk: tp.Callable,
             phi_minimization: tp.Callable,
             max_iter: int = int(1e3),
             eps = 1e-6):
    """Минимизация методом сопряженных градиентов

    Args:
        f (tp.Callable): Минимизируемая функция: Rn -> R
        grad_f (tp.Callable): Градиент минимизируемой функции Rn -> Rn
        x0 (np.ndarray): Начальное приближение точки минимума
        Bk (tp.Callable): Метод для выбора константы Bk на k-ой
итерации
        phi_minimization (tp.Callable, optional): Метод минимизации
функции вдоль выбранного направления.
        max_iter (int, optional): Максимальное число итераций.
Defaults to int(1e4).
        eps (_type_, optional): условие остановки на градиент.
Defaults to 1e-6.
    """
    x = x0
    S = -grad_f(x0)
    history = [x0]
    while len(history) < max_iter and np.linalg.norm(grad_f(x)) > eps
and np.isfinite(np.linalg.norm(x)):
        alpha_min = phi_minimization(lambda alpha: f(x + alpha * S))
        x_new = x + alpha_min * S
        Beta = Bk(rk = -grad_f(x_new), rk_prev = -grad_f(x), Sk = S)
        S = -grad_f(x_new) + Beta * S
        x = x_new
        history.append(x)
    return x, history

import numpy as np

Fletcher_Rievs = lambda rk, rk_prev, Sk: np.linalg.norm(rk) ** 2 /
np.linalg.norm(rk_prev) ** 2
Hestenes_Stiefel = lambda rk, rk_prev, Sk: np.dot(rk, rk - rk_prev) /
np.dot(Sk, rk - rk_prev)
Polak_Ribier = lambda rk, rk_prev, Sk: np.dot(rk, rk - rk_prev) /
```

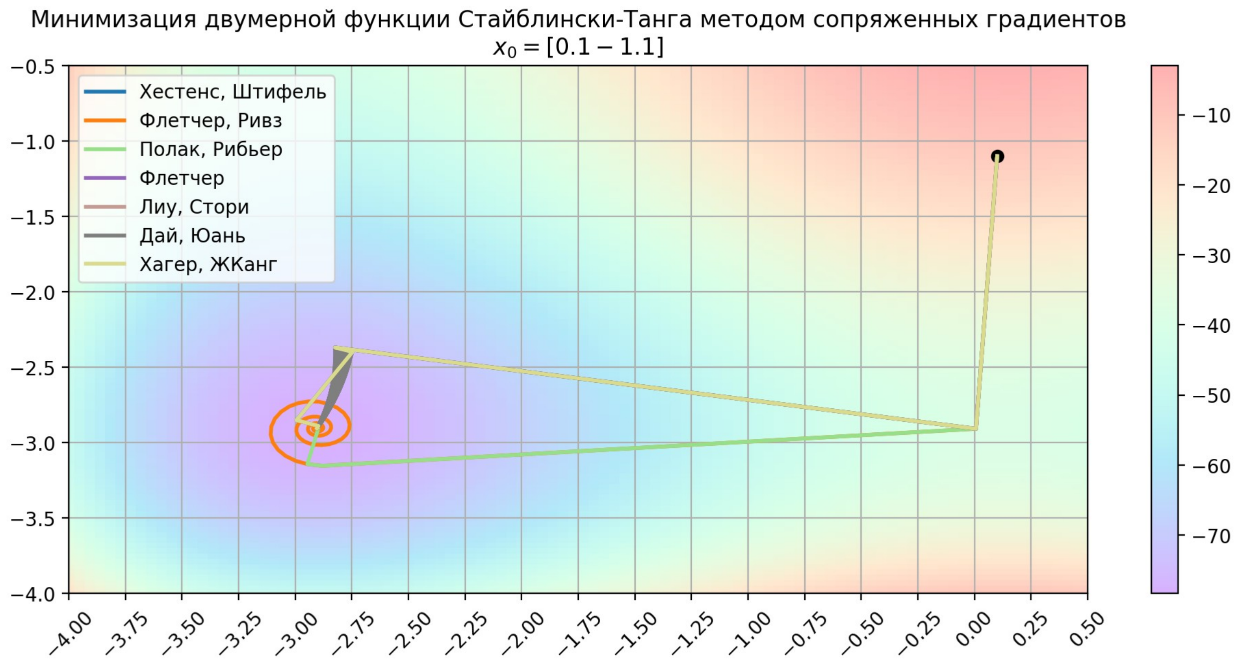
```
np.linalg.norm(rk_prev) ** 2
Fletcher = lambda rk, rk_prev, Sk: np.linalg.norm(rk) ** 2 / np.dot(-
Sk, rk_prev)
Liu_Stei = lambda rk, rk_prev, Sk: np.dot(rk, rk - rk_prev) / np.dot(-
Sk, rk_prev)
Dai_Yuan = lambda rk, rk_prev, Sk: np.linalg.norm(rk) ** 2 /
np.dot(Sk, rk - rk_prev)
Hager_Zhang = lambda rk, rk_prev, Sk: np.dot(rk - rk_prev - 2 * Sk *
(np.linalg.norm(rk - rk_prev) ** 2) / np.dot(Sk, rk - rk_prev), rk /
np.dot(Sk, rk - rk_prev))



def f(x: np.ndarray):
    return 0.5 * np.sum(np.power(x, 4) - 16 * np.power(x, 2) + 5 * x,
axis = 0)
def grad_f(x: np.ndarray):
    return 2 * np.power(x, 3) - 16 * x + 2.5

def plot_iteration_bar(Bk_name, Bk_history, x_start, nice_res):
    fig, ax = plt.subplots(figsize = (12, 5), dpi = 200)

    ax.bar(x = Bk_name, height = [h.shape[0] - 1 for h in Bk_history],
color = cm.Set1(nice_res))
    ax.bar_label(ax.containers[0], label_type='edge')
    ax.set_title(f"Количество итераций, необходимых для сходимости
алгоритма\n$x_0 = {x_start}$")
    ax.set_ylabel("количество итераций", fontsize = 16)

def plot_curves(Bk_name, Bk_history, x_start, lim_x = 0.5, lim_y = -
0.5):
    x_line, y_line = np.linspace(-4, lim_x, 100), np.linspace(-4,
lim_y, 100)
    X, Y = np.meshgrid(x_line, y_line)
    fig, ax = plt.subplots(figsize = (12, 5), dpi = 200)
    im = plt.pcolormesh(X, Y, f(np.array([X, Y])), cmap = 'rainbow',
alpha = 0.3)
    plt.colorbar(im)
    plt.xticks(np.arange(-4, 5, 0.25))
    plt.xlim(-4, lim_x)
    plt.ylim(-4, lim_y)
    ax.xaxis.set_tick_params(rotation = 45)
    plt.scatter([x_start[0]], [x_start[1]], color = 'black')


    for ind, (name, hist) in enumerate(zip(Bk_name, Bk_history)):
        plt.plot(hist[:, 0], hist[:, 1], label = name, color =
cm.tab20(ind / len(Bk_name)), linewidth = 2)

    plt.grid()
```

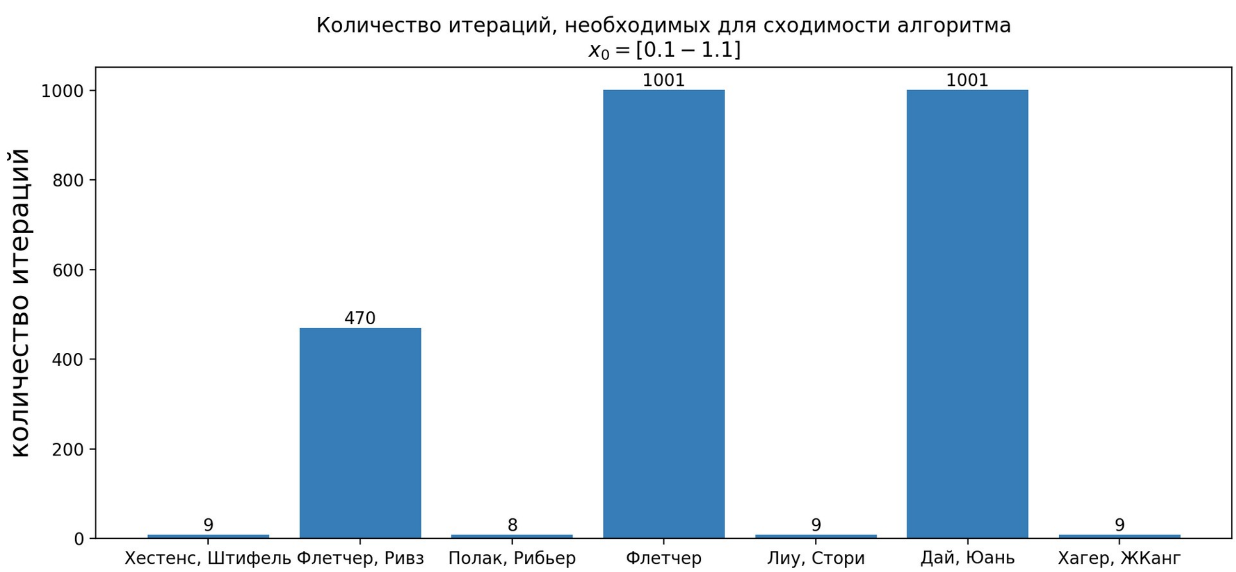
```
    plt.legend()
    plt.title(f"Минимизация двумерной функции Стайблински-Танга
методом сопряженных градиентов\n$x_0 = {x_start}$");

phi_minimization_method = lambda func: opt.minimize_scalar(func).x

Bk_callable = [Hestenes_Stiefel, Fletcher_Rievs, Polak_Ribier,
Fletcher, Liu_Stei, Dai_Yuan, Hager_Zhang]
Bk_name = ['Хестенс, Штифель', 'Флетчер, Ривз', 'Полак, Рибьер',
'Флетчер', 'Лиу, Стори', 'Дай, Юань', 'Хагер, ЖКанг']


x_start_values = [np.array([0, -1]), np.array([0.1, -1.1]),
np.array([0.1, -1]), np.array([1, -2]),  np.array([-2, 1])]

for global_iteration, x_start in enumerate(x_start_values):
    Bk_history, nice_res = [], []
    for Bk_method, name in zip(Bk_callable, Bk_name):
        x, history = minimize(f, grad_f, x0 = x_start, Bk = Bk_method,
phi_minimization = phi_minimization_method)
        x, history2 = minimize(f, grad_f, x0 = x, Bk = Bk_method,
phi_minimization = phi_minimization_method)
        history = np.vstack([history, history2])
        Bk_history.append(history)
        nice_res.append(np.allclose(x, [-2.904, -2.904], rtol =
0.0025))
    if global_iteration in [len(x_start_values) - 1,
len(x_start_values) - 2]: plot_curves(Bk_name, Bk_history, x_start, 4,
4)
    else:   plot_curves(Bk_name, Bk_history, x_start)
    plt.savefig(f'curves_{global_iteration}.png')
    plot_iteration_bar(Bk_name, Bk_history, x_start, nice_res)
    plt.savefig(f'bars_{global_iteration}.png')


/tmp/ipykernel_3626/191118262.py:6: RuntimeWarning: divide by zero
encountered in scalar divide
  Fletcher = lambda rk, rk_prev, Sk: np.linalg.norm(rk) ** 2 /
np.dot(-Sk, rk_prev)
/tmp/ipykernel_3626/2975547146.py:23: RuntimeWarning: invalid value
encountered in multiply
  alpha_min = phi_minimization(lambda alpha: f(x + alpha * S))
/tmp/ipykernel_3626/133927662.py:2: RuntimeWarning: invalid value
encountered in subtract
  return 0.5 * np.sum(np.power(x, 4) - 16 * np.power(x, 2) + 5 * x,
axis = 0)
/tmp/ipykernel_3626/133927662.py:4: RuntimeWarning: invalid value
encountered in subtract
  return 2 * np.power(x, 3) - 16 * x + 2.5
/tmp/ipykernel_3626/191118262.py:8: RuntimeWarning: divide by zero
```

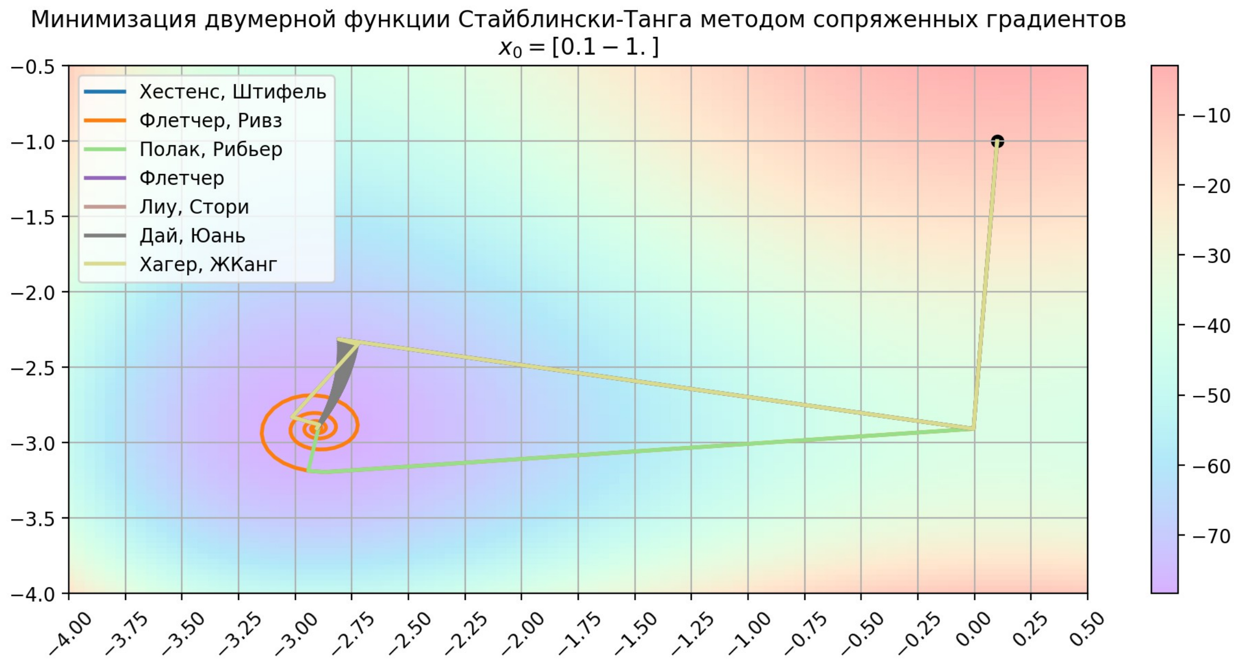
```
encountered in scalar divide
  Dai_Yuan = lambda rk, rk_prev, Sk: np.linalg.norm(rk) ** 2 /
np.dot(Sk, rk - rk_prev)
```

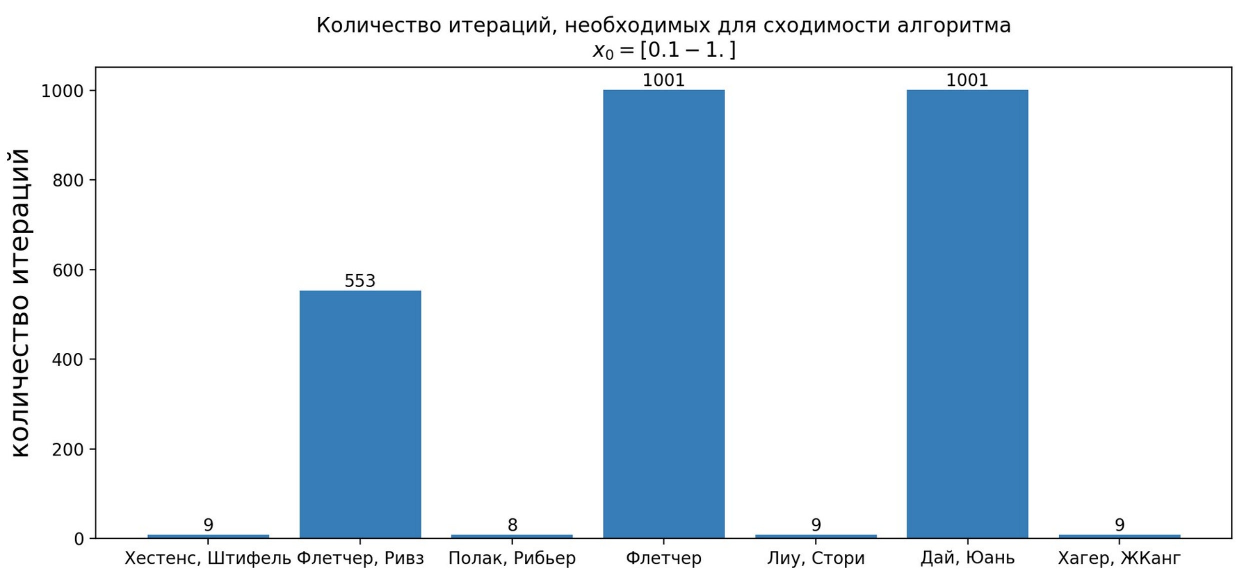


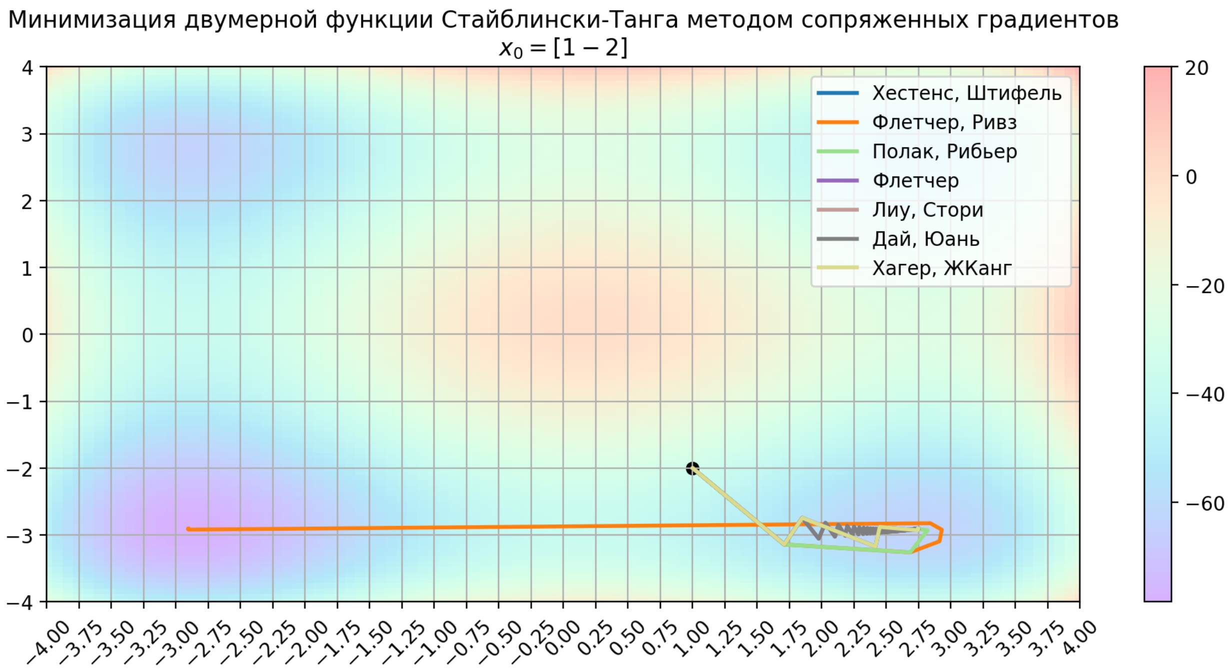



Минимизация двумерной функции Стайблински-Танга методом сопряженных градиентов
$x_0 = [0.1 - 1.1]$
Хестенс, Штифель
Флетчер, Ривз
Полак, Рибьер
Флетчер
Лиу, Стори
Дай, Юань
Хагер, ЖКанг
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.5
−3.0
−3.5
−4.0
−4.00
−3.75
−3.50
−3.25
−3.00
−2.75
−2.50
−2.25
−2.00
−1.75
−1.50
−1.25
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
−10
−20
−30
−40
−50
−60
−70


Количество итераций, необходимых для сходимости алгоритма
$x_0 = [0.1 - 1.1]$
количество итераций
0
200
400
600
800
1000
9
470
8
1001
9
1001
9
Хестенс, Штифель
Флетчер, Ривз
Полак, Рибьер
Флетчер
Лиу, Стори
Дай, Юань
Хагер, ЖКанг

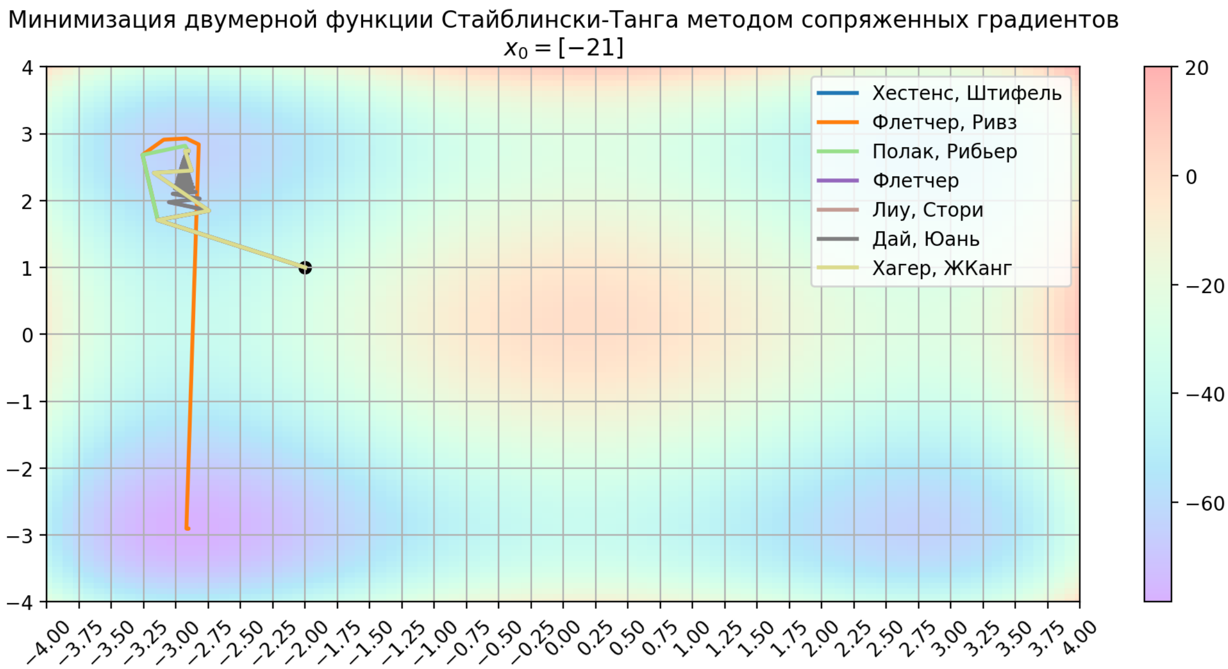

Минимизация двумерной функции Стайблински-Танга методом сопряженных градиентов
$x_0 = [0.1 -1.]$
Хестенс, Штифель
Флетчер, Ривз
Полак, Рибьер
Флетчер
Лиу, Стори
Дай, Юань
Хагер, ЖКанг


Количество итераций, необходимых для сходимости алгоритма
$x_0 = [0.1 -1.]$
количество итераций
9
553
8
1001
9
1001
9
Хестенс, Штифель
Флетчер, Ривз
Полак, Рибьер
Флетчер
Лиу, Стори
Дай, Юань
Хагер, ЖКанг



Минимизация двумерной функции Стайблински-Танга методом сопряженных градиентов
$x_0 = [1 - 2]$
Хестенс, Штифель
Флетчер, Ривз
Полак, Рибьер
Флетчер
Лиу, Стори
Дай, Юань
Хагер, ЖКанг

Количество итераций, необходимых для сходимости алгоритма
$x_0 = [1 - 2]$
количество итераций
11
15
8
1009
11
1008
11
Хестенс, Штифель
Флетчер, Ривз
Полак, Рибьер
Флетчер
Лиу, Стори
Дай, Юань
Хагер, ЖКанг


Минимизация двумерной функции Стайблински-Танга методом сопряженных градиентов
$x_0 = [-2 1]$
Хестенс, Штифель
Флетчер, Ривз
Полак, Рибьер
Флетчер
Лиу, Стори
Дай, Юань
Хагер, ЖКанг


Количество итераций, необходимых для сходимости алгоритма
$x_0 = [-2 1]$
количество итераций
11
15
8
1009
11
1008
11
Хестенс, Штифель
Флетчер, Ривз
Полак, Рибьер
Флетчер
Лиу, Стори
Дай, Юань
Хагер, ЖКанг