Упражнения

Пример 1

Предложить разностную схему для решения смешанной задачи:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+f(t,x,y); \quad a,b=\text{const}>0;\\ &u(0,x,y)=\varphi(x,y); u(t,0,y)=\psi(t,y); 0\le t,x,y\le 1;\\ &u(t,x,0)=\chi_1(t,x); \quad u(t,x,1)=\chi_2(t,x) \end{aligned}\right\} \qquad (10.1.3)$$

на сетках $D_h=\{(t^n,x_l,y_m): t^n=n\tau, \tau N=1, n=0\div N; x_l=lh_x, h_xL=1, l=0\div L;$ $y_m=mh_y, h_yM=1, m=0\div M\}$ и исследовать её на аппроксимацию.

Решение

Заменим частные производные во внутренних узлах сетки конечно-разностными отношениями, например,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{l,m}^n \approx \frac{u_{l,m}^{n+1}-(u_{l+1,m}^n+u_{l-1,m}^n)/2}{\tau}; \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{l,m}^n \approx \frac{u_{l+1,m}^n-u_{l-1,m}^n}{2h_x};$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{l,m}^n \approx \frac{u_{l,m+1}^{n+1}-2u_{l,m}^{n+1}+u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2};$$

а на границе $x=1$, $0<y<1$ –

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{L,m}^n \approx \frac{u_{L,m}^{n+1}-u_{L,m}^n}{\tau}; \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{L,m}^n \approx \frac{u_{L,m}^n-u_{L-1,m}^n}{h_x}; \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{L,m}^n \approx \frac{u_{L,m+1}^{n+1}-2u_{L,m}^{n+1}+u_{L,m-1}^{n+1}}{h_y^2}$$

и после подстановки в дифференциальное уравнение задачи (10.1.3) получим разностную схему:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{u_{l,m}^{n+1}-(u_{l+1,m}^n+u_{l-1,m}^n)/2}{\tau}+a\frac{u_{l+1,m}^n-u_{l-1,m}^n}{2h_x}=b\frac{u_{l,m+1}^{n+1}-2u_{l,m}^{n+1}+u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2}+f_{l,m}^n;\\ &n=\overline{0,N-1}; l=\overline{1,L-1}; m=\overline{1,M-1};\\ &u_{l,m}^0=\varphi_{l,m}; l=\overline{0,L}; m=\overline{0,M};\\ &u_{0,m}^n=\psi_m^n; n=\overline{1,N}; m=\overline{0,M};\\ &u_{L,0}^n=(\chi_1)_L^n; n=\overline{1,N};\\ &\frac{u_{L,m}^{n+1}-u_{L,m}^n}{\tau}+a\frac{u_{L,m}^n-u_{L-1,m}^n}{h_x}=b\frac{u_{L,m+1}^{n+1}-2u_{L,m}^{n+1}+u_{L,m-1}^{n+1}}{h_y^2}+f_{L,m}^n; n=\overline{0,N-1}; m=\overline{1,M-1}\\ &u_{L,M}^n=(\chi_2)_L^n; n=\overline{1,N};\\ &u_{l,0}^n=(\chi_1)_l^n; n=\overline{1,N}; l=\overline{1,L-1};\\ &u_{l,M}^n=(\chi_2)_l^n; n=\overline{1,N}; l=\overline{1,L-1}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.1.4)$$

Для проверки корректности постановки разностных задач (10.1.4) сравним число уравнений $N(L-1)(M-1)+(L+1)(M+1)+N(M+1)+N+N(M-1)+$ $+N+N(L-1)+N(L-1)$ $=(N+1)(L+1)(M+1)$ с числом неизвестных значений сеточных функций $(N+1)(L+1)(M+1)$. Эти числа равны, и если уравнения системы (10.1.4) линейно независимы, то существует единственное решение разностной задачи. Определим невязку, заменив значения сеточной функции в (10.1.4) на соответствующие значения следа и вычтя из левых частей разностных уравнений правые части:

$$\delta f^{(h)}=\begin{cases}\dfrac{[u]_{l,m}^{n+1}-([u]_{l+1,m}^{n}+[u]_{l-1,m}^{n})/2}{\tau}+a\dfrac{[u]_{l+1,m}^{n}-[u]_{l-1,m}^{n}}{2h_x}-\\ -b\dfrac{[u]_{l,m+1}^{n+1}-2[u]_{l,m}^{n+1}+[u]_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2}-f_{l,m}^{n};\ n=\overline{0,N-1};l=\overline{1,L-1};\ m=\overline{1,M-1};\\ [u]_{l,m}^{0}-\varphi_{l,m};\ l=\overline{0,L};\ m=\overline{0,M};\\ [u]_{0,m}^{n}-\psi_{m}^{n};\ n=\overline{1,N};\ m=\overline{0,M};\\ [u]_{L,0}^{n}-(\chi_1)_{L}^{n};\ n=\overline{1,N};\\ \dfrac{[u]_{L,m}^{n+1}-[u]_{L,m}^{n}}{\tau}+a\dfrac{[u]_{L,m}^{n}-[u]_{L-1,m}^{n}}{h_x}-b\dfrac{[u]_{L,m+1}^{n+1}-2[u]_{L,m}^{n+1}+[u]_{L,m-1}^{n+1}}{h_y^2}-f_{L,m}^{n}\\ n=\overline{0,N-1};\ m=\overline{1,M-1};\\ [u]_{L,M}^{n}-(\chi_2)_{L}^{n};\ n=\overline{1,N};\\ [u]_{l,0}^{n}-(\chi_1)_{l}^{n};\ n=\overline{1,N};\ l=\overline{1,L-1};\\ [u]_{l,M}^{n}-(\chi_2)_{l}^{n};\ n=\overline{1,N};\ l=\overline{1,L-1}.\end{cases}\tag{10.1.5}$$

Воспользуемся разложениями значений следа в ряды Тейлора относительно узлов (n,l,m) и (n,L,m):

$$[u]_{l,m}^{n+1}=[u]_{l,m}^{n}+[\dot{u}_t]_{l,m}^{n}\tau+[\ddot{u}_{tt}]_{l,m}^{n}\frac{\tau^2}{2}+\underline{\underline{O}}(\tau^3),$$

$$[u]_{l\pm1,m}^{n}=[u]_{l,m}^{n}\pm[u'_x]_{l,m}^{n}h_x+[u''_{xx}]_{l,m}^{n}\frac{h_x^2}{2}\pm[u'''_{xxx}]_{l,m}^{n}\frac{h_x^3}{6}+\underline{\underline{O}}(h_x^4),$$

$$[u]_{l,m\pm1}^{n+1}=[u]_{l,m}^{n}+[\dot{u}_t]_{l,m}^{n}\tau\pm[u'_y]_{l,m}^{n}h_y+[\ddot{u}_{tt}]_{l,m}^{n}\frac{\tau^2}{2}+[u''_{yy}]_{l,m}^{n}\frac{h_y^2}{2}\pm[u'''_{yyy}]_{l,m}^{n}\frac{h_y^3}{6}+$$
$$+\underline{\underline{O}}(\tau^3+h_y^4),$$

$$[u]_{L,m}^{n+1}=[u]_{L,m}^{n}+[\dot{u}_t]_{L,m}^{n}\tau+[\ddot{u}_{tt}]_{L,m}^{n}\frac{\tau^2}{2}+\underline{\underline{O}}(\tau^3),$$

$$[u]_{L-1,m}^{n}=[u]_{L,m}^{n}-[u'_x]_{L,m}^{n}h_x+[u''_{xx}]_{L,m}^{n}\frac{h_x^2}{2}+\underline{\underline{O}}(h_x^3),$$

$$[u]_{L,m\pm1}^{n+1}=[u]_{L,m}^{n}+[\dot{u}_t]_{L,m}^{n}\tau\pm[u'_y]_{L,m}^{n}h_y+[\ddot{u}_{tt}]_{L,m}^{n}\frac{\tau^2}{2}+[u''_{yy}]_{L,m}^{n}\frac{h_y^2}{2}\pm[u'''_{yyy}]_{L,m}^{n}\frac{h_y^3}{6}+$$
$$+\underline{\underline{O}}(\tau^3+h_y^4)$$

и подставим их в (10.1.5), приведя подобные члены и учитывая, что след удовлетворяет дифференциальному уравнению (10.1.3):

$$\delta f^{(h)}=\begin{cases} C^n_{l,m}\dfrac{h^2}{\tau}+D^n_{l,m}\tau+E^n_{l,m}h^2;\, n=\overline{0,N-1};\, l=\overline{1,L-1};\, m=\overline{1,M-1};\\ 0;\, l=\overline{0,L};\, m=\overline{0,M};\\ 0;\, n=\overline{1,N};\, m=\overline{0,M};\\ 0;\, n=\overline{1,N};\\ C^n_{L,m}\tau+D^n_{L,m}h;\, n=\overline{0,N-1};\, m=\overline{1,M-1};\\ 0;\, n=\overline{1,N};\\ 0;\, n=\overline{1,N};\ l=\overline{1,L-1};\\ 0;\, n=\overline{1,N};\, l=\overline{1,L-1}. \end{cases}$$

Следовательно, $\left\|\delta f^{(h)}\right\|_{F_h}\le C_\tau\tau+C_h h+C\dfrac{h^2}{\tau}$ и разностная схема аппроксимирует на решении u дифференциальную задачу с порядком $\underline{\underline{O}}\left(\tau+\ h+\dfrac{h^2}{\tau}\right)$.

Задачи

10.1.1. Для решения задачи Коши уравнения
$\partial^2 u/\partial t^2+a\,\partial^2 u/(\partial t\partial x)=f(t,x);u(0,x)=\varphi(x);\partial u(0,x)/\partial t=\psi(x);a=\text{const};$
$0\le t\le 1;\ -\infty<x<+\infty$ на сетке $D_h=\{(t^n,x_l):t^n=n\tau,\tau N=1,n=0\div N;$
$x_l=lh,h=\text{const}>0,l=0;\pm1;...;\pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1}-2u_l^n+u_l^{n-1})/\tau^2+a(u_{l+1}^{n+1}-u_{l-1}^{n+1}-u_{l+1}^{n-1}+u_{l-1}^{n-1})/(4\tau h)=f_l^n;n=\overline{1,N-1};$$

$$l=0;\pm1;...;\pm L\gg 1;u_l^0=\varphi_l;-3u_l^0+4u_l^1-u_l^2=2\tau\psi_l;l=0;\pm1;...;\pm L\gg 1\,.$$

Исследовать её на аппроксимацию.

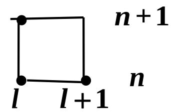
10.1.2. Для решения задачи Коши уравнения
$\partial^2 u/\partial t^2+a\,\partial^2 u/(\partial t\partial x)=f(t,x);u(0,x)=\varphi(x);\partial u(0,x)/\partial t=\psi(x);a=\text{const};$
$0\le t\le 1;\ -\infty<x<+\infty$ на сетке $D_h=\{(t^n,x_l):t^n=n\tau,\tau N=1,n=0\div N;$
$x_l=lh,h=\text{const}>0,l=0;\pm1;...;\pm L\}$ предложена разностная схема:

$$(u_l^{n+1}-2u_l^n+u_l^{n-1})/\tau^2+a(u_l^{n+1}-u_{l-1}^{n+1}-u_l^{n-1}+u_{l-1}^{n-1})/(2\tau h)=f_l^n;n=\overline{1,N-1};$$

$$l=0;\pm1;...;\pm L\gg 1;u_l^0=\varphi_l;-3u_l^0+4u_l^1-u_l^2=2\tau\psi_l;l=0;\pm1;...;\pm L\gg 1\,.$$

Исследовать её на аппроксимацию.

на сетках $D_h = \left\{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0, \pm 1, \ldots, \pm L\right\}$,
используя шаблон



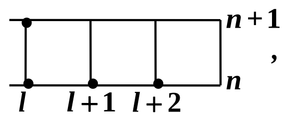
,

и исследовать её на аппроксимацию.

10.1.22. Предложить с помощью интерполяционно-характеристического метода разностную схему для решения задачи Коши:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a\dfrac{\partial u}{\partial x} = f(t,x); \quad a = \text{const} > 0; \\ u(0,x) = \varphi(x);\ 0 < t < 1; -\infty < x < +\infty \end{array}\right\}$$

на сетках $D_h = \left\{(t^n, x_l) : t^n = n\tau, \tau N = 1, n = 0 \div N; x_l = lh, h = \text{const} > 0, l = 0, \pm 1, \ldots, \pm L\right\}$,
используя шаблон



,

и исследовать её на аппроксимацию.

10.2. Спектральный признак устойчивости

Рассмотрим разностную задачу (10.1.13) и допустим, что полученное решение содержит погрешность, связанную с неточностью самих вычислений и округлениями. Представим решение в виде $u^{(h)} = (u)^{(h)} + \Delta^{(h)}$, где $(u)^{(h)}$ – точное решение разностной задачи, $\Delta^{(h)}$ – погрешность, и подставим его в (10.1.13) . В результате имеем

$$L_h \Delta^{(h)} = 0. \tag{10.2.1}$$

Отобразим отрезок $x \in [0, hL]$ на отрезок $y \in [0, 2\pi L/(L+1)]$. Точки x_l и y_l связаны соотношением $y_l = 2\pi x_l / [h(L+1)]$, $y_l = 2\pi l/(L+1)$, $x_l = hl, l = \overline{0, L}$.

Введём на сетке $D_y = \left\{y_l : y_l = 2\pi l/(L+1),\ l = \overline{0, L}\right\}$ скалярное произведение сеточных функций $u^{(h)}, v^{(h)}$, определённых на ней как $\left(u^{(h)}, v^{(h)}\right) = \dfrac{1}{L+1}\sum_{l=0}^{L} u_l \bar{v}_l$, и обратим внимание на то, что функции

$\psi_l^{(k)} = \exp\{i2\pi kl/[L+1]\}, l=\overline{0,L},\ k=\overline{-m,m},\ 2m=L$ образуют ортонормированный базис $(\psi^{(k)},\psi^{(p)}) = \dfrac{\sum_{l=0}^{L}\exp\{i2\pi(k-p)l/[L+1]\}}{L+1} = \dfrac{1-e^{i2\pi(k-p)}}{1-e^{i2\pi(k-p)/(L+1)}} =$ $= \begin{cases} 1, \text{если } k=p \\ 0, \text{если } k\neq p \end{cases}$. Обозначим через $\Delta^{(n)}$ сеточную функцию, определённую на сетке D_y и совпадающую с ней $\Delta^{(h)}$ на n- временном слое. Представим $\Delta^{(n)}$ в виде разложения по ортонормированному базису

$\Delta_l^n = \sum_{k=-m}^{m}\lambda_k^n \exp\{i2\pi kl/[L+1]\}, l=\overline{0,L}, \lambda_k^n = \dfrac{\sum_{l=0}^{L}\Delta_l^n\exp\{i2\pi kl/[L+1]\}}{L+1}$. Следовательно, справедливо $\Delta_l^{n+1} = \sum_{k=-m}^{m}\lambda_k^{n+1}\exp\{i2\pi kl/[L+1]\},\quad l=\overline{0,L}$. Подставим эти выражения в (10.2.1):

$$\sum_{k=-m}^{m}\left[\frac{\lambda_k^{n+1}/\lambda_k^n - 1}{\tau} + a\frac{i\cdot\sin\dfrac{2\pi k}{L+1}}{h} + a^2\frac{2\tau\cdot\sin^2\dfrac{\pi k}{L+1}}{h^2}\right]\cdot\lambda_k^n e^{\frac{i2\pi kl}{L+1}} = 0. \qquad (10.2.2)$$

Сделаем замены $\lambda_\kappa = \lambda_\kappa^{n+1}/\lambda_\kappa^n;\ \alpha_\kappa = 2\pi k/[L+1]$ и скалярно умножим (10.2.2) на базисную функцию $\psi^{(p)} = \exp\{i2\pi pl/[L+1]\}, l=\overline{0,L},\ p=\overline{-m,m}$. В результате ортонормированности базисных функций получаем

$\left[\dfrac{\lambda_p - 1}{\tau} + a\dfrac{i\sin\alpha_p}{h} + a^2\dfrac{2\tau\sin^2(\alpha_p/2)}{h^2}\right] = 0,\ p=\overline{-m,m}$ или, разрешая относительно λ_p, имеем

$$\lambda_p = 1 - a\frac{i\tau\sin\alpha_p}{h} - a^2\frac{2\tau^2\sin^2(\alpha_p/2)}{h^2},\ p=\overline{-m,m}. \qquad (10.2.3)$$

Для получения любой сколь угодно малой погрешности необходимо устремлять $L\to\infty, N\to\infty$, а следовательно, и $m\to\infty$. Поэтому заменим $\alpha_p, p=\overline{-m,m} \Rightarrow \alpha, -\infty<\alpha<+\infty;\ \lambda_p \Rightarrow \lambda_\alpha$ и подставим в (10.2.3):

$$\lambda_\alpha = 1 - a\frac{i\tau\sin\alpha}{h} - a^2\frac{2\tau^2\sin^2(\alpha/2)}{h^2}, -\infty<\alpha<+\infty. \qquad (10.2.4)$$

Для того чтобы не происходило неограниченного роста погрешности при $N\to\infty$, нужно потребовать $|\lambda_\alpha|\le 1, -\infty<\alpha<+\infty$. Условие $|\lambda_\alpha|\le 1$ эквивалентно $|\lambda_\alpha|^2 = \lambda_\alpha\overline{\lambda}_\alpha \le 1, -\infty<\alpha<+\infty$, или с учётом (10.2.4):

$$|\lambda_\alpha|^2=\left[1-a\frac{i\tau\sin\alpha}{h}-a^2\frac{2\tau^2\sin^2(\alpha/2)}{h^2}\right]\left[1+a\frac{i\tau\sin\alpha}{h}-a^2\frac{2\tau^2\sin^2(\alpha/2)}{h^2}\right]=$$

$$=1-a^2\frac{4\tau^2\sin^2(\alpha/2)}{h^2}+a^4\frac{4\tau^4\sin^4(\alpha/2)}{h^4}+a^2\frac{4\tau^2\sin^2(\alpha/2)\cos^2(\alpha/2)}{h^2}\le 1.$$

Решая это неравенство и принимая во внимание $-\infty<\alpha<+\infty$, находим

$$-1+a^2\frac{\tau^2}{h^2}\le 0\Rightarrow \tau\le\frac{h}{a}. \qquad (10.2.5)$$

Следовательно, спектральным условием устойчивости для разностной схемы (10.1.13) является неравенство (10.2.5).

Спектральный признак устойчивости

Модуль отношения амплитуд одной и той же гармоники при переходе с одного вычислительного слоя на другой не должен быть больше единицы $|\lambda_\alpha|\le 1$ *для всех возможных номеров гармоник разложения сеточной функции ошибки в конечный ряд Фурье.*

Упражнения

Пример 1

В примере 1 главы 10.1. была предложена разностная схема:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{u_{l,m}^{n+1}-(u_{l+1,m}^{n}+u_{l-1,m}^{n})/2}{\tau}+a\dfrac{u_{l+1,m}^{n}-u_{l-1,m}^{n}}{2h_x}=b\dfrac{u_{l,m+1}^{n+1}-2u_{l,m}^{n+1}+u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2}+f_{l,m}^{n};\\
n=\overline{0,N-1};l=\overline{1,L-1};m=\overline{1,M-1};\\
u_{l,m}^{0}=\varphi_{l,m};l=\overline{0,L};m=\overline{0,M};\\
u_{0,m}^{n}=\psi_{m}^{n};n=\overline{1,N};m=\overline{0,M};\\
u_{L,0}^{n}=(\chi_1)_L^n;n=\overline{1,N};\\
\dfrac{u_{L,m}^{n+1}-u_{L,m}^{n}}{\tau}+a\dfrac{u_{L,m}^{n}-u_{L-1,m}^{n}}{h_x}=b\dfrac{u_{L,m+1}^{n+1}-2u_{L,m}^{n+1}+u_{L,m-1}^{n+1}}{h_y^2}+f_{L,m}^{n};n=\overline{0,N-1};m=\overline{1,M-1}\\
u_{L,M}^{n}=(\chi_2)_L^n;n=\overline{1,N};\\
u_{l,0}^{n}=(\chi_1)_l^n;n=\overline{1,N};l=\overline{1,L-1};\\
u_{l,M}^{n}=(\chi_2)_l^n;n=\overline{1,N};l=\overline{1,L-1}
\end{array}\right\}$$

для решения смешанной задачи

$$\left.\begin{array}{c}
\partial u/\partial t+a\partial u/\partial x=b\partial^2u/\partial y^2+f(t,x,y);\quad a,b=\text{const}>0;\\
u(0,x,y)=\varphi(x,y);u(t,0,y)=\psi(t,y);0\le t,x,y\le 1;\\
u(t,x,0)=\chi_1(t,x);\quad u(t,x,1)=\chi_2(t,x)
\end{array}\right\}$$

на сетках $D_h=\{(t^n,x_l,y_m):t^n=n\tau,\tau N=1,n=0\div N;x_l=lh_x,\,l=0\div L;$

$h_x L = 1, y_m = mh_y, h_y M = 1, m = 0 \div M \}$. Исследовать её на спектральную устойчивость.

Решение

При выполнении практических исследований на спектральную устойчивость, имея в виду ранее приведённые рассуждения о преобразованиях области интегрирования и конечных рядах Фурье для погрешностей, поступают следующим образом. Заменяют в основной однородной подсистеме уравнений разностной схемы, у которой правая часть равняется нулю, например, в данном случае

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{u_{l,m}^{n+1}-(u_{l+1,m}^{n}+u_{l-1,m}^{n})/2}{\tau}+a\dfrac{u_{l+1,m}^{n}-u_{l-1,m}^{n}}{2h_x}-b\dfrac{u_{l,m+1}^{n+1}-2u_{l,m}^{n+1}+u_{l,m-1}^{n+1}}{h_y^2}=0;\\ n=\overline{0,N-1}; l=\overline{1,L-1}; m=\overline{1,M-1},\end{array}\right\}$$

значения $u_{l,m}^n$ на величины $\lambda_{\alpha,\beta}^n e^{i(\alpha l+\beta m)}, -\infty < \alpha,\beta < +\infty$ и требуют, чтобы выполнялось спектральное условие устойчивости $\left|\lambda_{\alpha,\beta} = \lambda_{\alpha,\beta}^{n+1} \big/ \lambda_{\alpha,\beta}^{n}\right| \le 1, -\infty < \alpha,\beta < +\infty$. Тогда после преобразований получаем $\dfrac{\lambda_{\alpha,\beta}-\cos\alpha}{\tau}+a\dfrac{i\sin\alpha}{h_x}+\dfrac{i4b\lambda_{\alpha,\beta}\sin^2(\beta/2)}{h_y^2}=0, -\infty<\alpha,\beta<+\infty$ или, разрешая относительно $\lambda_{\alpha,\beta}=\dfrac{\cos\alpha-a\dfrac{i\tau\sin\alpha}{h_x}}{1+\dfrac{i4b\tau\sin^2(\beta/2)}{h_y^2}}, \quad -\infty<\alpha,\beta<+\infty$. Пользуясь тем, что условие $\left|\lambda_{\alpha,\beta}\right| \le 1$ эквивалентно $\left|\lambda_{\alpha,\beta}\right|^2=\lambda_{\alpha,\beta}\bar{\lambda}_{\alpha,\beta}\le 1, -\infty<\alpha,\beta<+\infty$, умножая на комплексно-сопряжённое значение к величине $\lambda_{\alpha,\beta}$, получаем $\cos^2\alpha+a^2\dfrac{\tau^2\sin^2\alpha}{h_x^2}\le 1+\dfrac{16b^2\tau^2\sin^4(\beta/2)}{h_y^4}, -\infty<\alpha,\beta<+\infty$ или окончательно $-\sin^2\alpha\left(1-a^2\dfrac{\tau^2}{h_x^2}\right)\le\dfrac{16b^2\tau^2\sin^4(\beta/2)}{h_y^4}, -\infty<\alpha,\beta<+\infty$.

Это неравенство выполняется при любых $-\infty<\alpha,\beta<+\infty$, если справедливо соотношение $\tau\le\dfrac{h_x}{a}$, которое и будет спектральным условием устойчивости для рассматриваемой задачи.