$\frac{1-x^2}{1+x^2}y''(x)+x^2y'(x)+\frac{1+x}{1+x^2}y(x)=1-x$, $x\in[0,1]$, $y'(0)=0$, $y'(1)+y(1)=1$.

8.2.12. На сетке $D_h=\left\{x_l: x_l=lh, hL=1, l=\overline{0,L}\right\}$ построить аппроксимации второго порядка по двум точкам граничных условий краевой задачи:

$\frac{1}{1+x}y''(x)+(1-x)y'(x)-\ln(1+x)y(x)=\ln(1+x)$, $x\in[0,1]$, $y'(0)+y(0)=1$, $y'(1)=0$.

8.3. Нелинейные краевые задачи. Метод стрельбы

Пусть требуется решить нелинейную краевую задачу

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'),\ x\in[0,X], \\ y(0)=Y_0,\ y(X)=Y_L. \end{cases} \tag{8.3.1}$$

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши:

$$\begin{cases} y''=f(x,y,y'),\ x\in[0,X], \\ y(0)=Y_0,\ y'(0)=Z_0, \end{cases} \tag{8.3.2}$$

где Z_0 задаётся произвольно, используя всю предварительно имеющуюся информацию о решении. Введём в области интегрирования сетку $D_h=\{x_l: x_l=hl, hL=X, l=\overline{0,L}\}$ и решим задачу Коши (8.3.2) каким-либо из ранее рассмотренных в главах 6, 7 разностных методов. В результате найдём $y_L=y(Z_0)$ и определим $F(Z_0)=y_L-Y_L$ как функцию, зависящую от параметра Z_0. Не ограничивая общности, можно положить, что $F(Z_0)>0$. Выберем другое Z_1 и заменим им Z_0 в задаче (8.3.2). Затем решим задачу тем же разностным методом на той же сетке, что и ранее. Пусть окажется, что $F(Z_1)<0$. Если это не так, то, анализируя доступную информацию о решении задачи (8.3.1), нужно подобрать Z_1 так, чтобы это неравенство выполнялось. Далее воспользуемся методом половинного деления для нахождения корня уравнения $F(Z)=0$. Для этого выберем $Z_2=(Z_1+Z_0)/2$, заменим параметр Z_0 значением Z_2 в (8.3.2), и снова решим эту задачу. В дальнейшем будем рассматривать ту половину отрезка $[Z_0,Z_1]$, для которой выполнено условие $F(Z_j)F(Z_2)<0$, $j=0,1$. Положим $Z_3=(Z_j+Z_2)/2$, $j=0,1$, и повторим решение задачи (8.3.2). Так будем поступать до тех пор, пока не будет выполнено условие $\left|F(Z_k)\right|\le\varepsilon$, $k=0,1,2,\ldots$, где ε – требуемая точность решения задачи (8.3.1). Полученное решение разностной задачи будет содержать погрешность, связанную с аппроксимацией дифференциальной задачи. Поэтому для оценки точности нужно произвести контрольный расчёт на более мелкой сетке и оценить погрешность этих решений в норме одного из выбранных конечномерных пространств.

Упражнения

Пример 1

Методом стрельбы решить нелинейную краевую задачу $y'' = 2y^3$, $x \in [0,1]$, $y(0) = 1$, $y(1) = 1/2$, на заданной сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh,\ l = \overline{0,L},\ Lh = 1,\ L = 2\}$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(1) - y_L| \le 0.1$.

Решение

Первый способ. Сведем уравнение второго порядка к системе уравнений первого порядка. Пусть $Y_1(x) = y(x)$, $Y_2(x) = y'(x)$, тогда

$$\begin{cases} Y_1'(x) = Y_2(x), \\ Y_2'(x) = 2\left(Y_1(x)\right)^3 \end{cases}; \quad \begin{cases} Y_1(0) = 1, \\ Y_2(0) = \alpha. \end{cases}$$

Решение неоднозначно и зависит от метода построения численного решения этой задачи. Применим, например, явный метод Эйлера первого порядка для построения численного решения $\left(Y_1\right)_k, \left(Y_2\right)_k$, $k = 0,1,2$, $\left(Y_1\right)_0 = 1$, $\left(Y_2\right)_0 = \alpha$, и подберем параметр α, чтобы удовлетворить правому граничному условию. Получаем

$$\begin{cases} \left(Y_1\right)_1 = \left(Y_1\right)_0 + \left(Y_2\right)_0 \cdot h = 1 + \alpha/2, \\ \left(Y_2\right)_1 = \left(Y_2\right)_0 + 2\left(Y_1\right)_0^3 \cdot h = \alpha + 2 \cdot h = \alpha + 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(Y_1\right)_2 = \left(Y_1\right)_1 + \left(Y_2\right)_1 \cdot h = 1 + \alpha/2 + (\alpha+1)/2 = \alpha + 3/2, \\ \left(Y_2\right)_2 = \left(Y_2\right)_1 + 2\left(Y_1\right)_1^3 \cdot h = \alpha + 1 + (1 + \alpha/2)^3. \end{cases}$$

Теперь находим α из условия $\left(Y_1\right)_2 = \alpha + 3/2 = 1/2$, $\alpha = -1$. Значит, $\vec{Y} = (1, 1/2, 1/2)^T$. В этом простом случае получилось удовлетворить правому краевому условию точно. При увеличении числа узлов сетки уравнение на α стало бы нелинейным.

Второй способ. Запишем вспомогательную задачу Коши (8.3.2):

$$\begin{cases} y'' = 2y^3, \ x \in [0,1], \\ y(0) = 1, \ y'(0) = \alpha. \end{cases}$$

Приблизим вторую производную в дифференциальном уравнении и первую производную в начальном условии конечными разностями (это тоже можно сделать по-разному). На заданной сетке получим систему нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = 1, \\ \dfrac{y_1 - y_0}{1/2} = \alpha, \\ \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{1/4} = 2y_1^3. \end{cases}$$

Отсюда легко находим: $y_2(\alpha) = 1 + \alpha + (2+\alpha)^3/16$. Нужно подобрать $\alpha : |y_2(\alpha) - 1/2| \le 0.1$. Применим метод половинного деления. Возьмем, например, $\alpha_0 = -1$. Тогда $y_2(-1) = 1/16 < 1/2$. При $\alpha_1 = -1/2$ имеем: $y_2(-1/2) = 1/2 + 27/128 > 1/2$. Следующее значение выберем $\alpha_2 = -3/4$: $y_2(-3/4) = 1/4 + 125/1024 < 1/2$. Наконец, при $\alpha_3 = -5/8$ имеем: $y_2(-5/8) = 0.537476$, что удовлетворяет требованию для погрешности.

Задачи

8.3.1. Методом стрельбы решить краевую задачу $y'' - y^2 = 1$, $x \in [0,1]$, $y(0) = 2$, $y(1) = 6.25$, на сетке $D_h = \{x_l : x_l = lh, \ l = \overline{0,L}, Lh = 1, L = 2\}$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(1) - y_L| \le 0.2.$

8.3.2. Методом стрельбы решить нелинейную краевую задачу $y'' = x + y^3/2$, $x \in [0,2]$, $y(0) = 1$, $y(2) = 1/2$ на сетке, $D_h = \{x_l : x_l = lh, \ l = \overline{0,L}, Lh = 2, L = 2\}$, удовлетворив краевому условию с погрешностью $\Delta = |y(2) - y_L| \le 0.2$.

8.3.3. Методом стрельбы решить нелинейную краевую задачу $y'' = -y^3/8$, $x \in [0,2]$, $y(0) = 2$, $y(2) = 1$, на сетке