Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
Факультет инноваций и высоких технологий
Кафедра анализа данных

Магистерская диссертация

Тема: **Название моей работы (TODO)**

Направление: 010400
Прикладные математика и информатика

Выполнил:
студент 093 группы ____________ Попов М.В.

Научный руководитель:
д.физ.-мат.н., проф.(todo) ____________ Ромащенко А.Е.

г. Москва 2016

Содержание

Введение

(ToDo) Актуальность, новизна, краткая выжимка.

Коммуникационная сложность

1.1 Постановка задачи

Мы будем рассматривать задачи следующего вида: пусть имеется два человека, которые хотят совместно вычислить значение некоторой функции от двух переменных $f(x, y)$. По традиции мы будем называть первого участника игры Алисой, а второго Бобом. Сложность у этой задачи в том, что Алиса знает только значение аргумента x, а Боб значение аргумента y. Алиса и Боб могут обмениваться сообщениями по каналу связи. Требуется вычислить значение $f(x, y)$, переслав по каналу связи минимальное количество информации.

Мы предполагаем, что Алиса и Боб заранее (до того, как им станут известны значения x и y) договариваются о коммуникационном протоколе — о наборе соглашений, какие именно данные и в каком порядке они будут пересылать друг другу при тех или иных значениях x и y.

Опишем теперь всю задачу более формально. Пусть имеются конечные множества X, Y, Z и задана некоторая функция $f : X \times Y \to Z$.

Определение. *Коммуникационным протоколом для вычисления некоторой функции $f : X \times Y \to Z$ называется ориентированное двоичное дерево со следующей разметкой на вершинах и ребрах:*

- *каждая нелистовая вершина помечена буквой A или B;*
  - *у вершин с пометкой A определена функция $g_i : X \to \{0, 1\}$;*
  - *у вершин с пометкой B определена функция $f_j : Y \to \{0, 1\}$;*
- *каждой листовой вершине сопоставлен элемент множеста Z;*
- *каждое ребро помечено 0 или 1.*

Пусть Алиса и Боб договорились, что будут действовать по некоторому протоколу $\mathcal{P}$. Затем Алиса получила $x \in X$, а Боб получил $y \in Y$.

Поместим фишку в корневую вершину нашего протокола $\mathcal{P}$ и будем перемещать ее вниз по дереву, последовательно удаляясь от корня, пока она не попадём в один из листьев. Перемещение фишки выполняется следующим образом. Если текущая вершина помечена буквой A это значит, что сейчас очередь Алисы. Она применяет функцию g_i текущей вершины к своему значению x. Алиса отправляет по каналу связи бит равный $g_i(x)$ и перемещает фишку по ребру, помеченному как $g_i(x)$. Боб получает отправленный бит и понимает куда была сдвинута фишка. Для вершин помеченных буквой B поступают аналогично. Когда фишка попадает в лист дерева, записанное там значение $z \in Z$ объявляется результатом выполнения протокола.

Мы говорим, что протокол $\mathcal{P}$ вычисляет функцию $f : X \times Y \to Z$, если для любого $x \in X$ и любого $y \in Y$ при движении из корня по пути, соответствующему заданным x и y, мы попадаем в лист, помеченный $z = f(x, y)$.

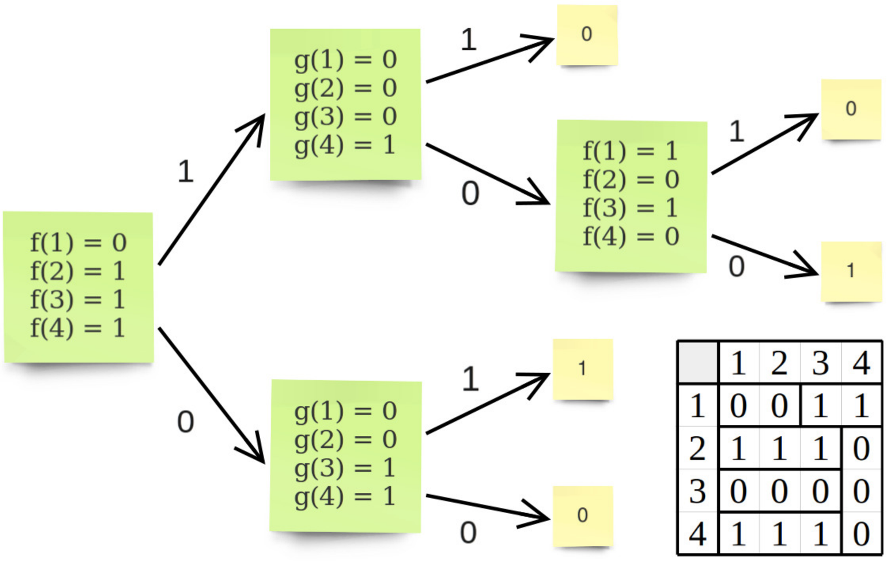
Определение. *Сложностью коммуникационного протокола называется его глубина. Коммуникационной сложностью функции f называется минимальная сложность протокола, вычисляющего f. Мы будем обозначать её $CC(f)$.*

1.2 Одноцветные комбинаторные прямоугольники

Определение. *Множество $S \subset X \times Y$ называется комбинаторным прямоугольником (или просто прямоугольным множеством), если существуют такие $A \subset X$ и $B \subset Y$, что $S = A \times B$.*

Пусть $\mathcal{P}$ некоторый коммуникационный протокол для вычисления функции $f : X \times Y \to Z$ и l один из листьев протокола. Определим S_l, как множество пар $(x, y) \in X \times Y$ таких, что на входе (x, y) Алиса и Боб, следуя протоколу $\mathcal{P}$, приходят в лист l.

Утверждение. *Для всякого коммуникационного протокола $\mathcal{P}$ и для всякого листа l множество S_l является комбинаторным прямоугольником.*



	1	2	3	4
1	0	0	1	1
2	1	1	1	0
3	0	0	0	0
4	1	1	1	0

Рис. 1: Пример протокола и разбиения таблицы значений.

Доказательсво этого утверждения можно прочитать например в [1]. В итоге мы получаем, что коммуникационный протокол для вычисления функции f задаёт разбиение $X \times Y$ - таблицы значений f на прямоугольные множества, соответствующие листьям. Поскольку каждому листу протокола приписано одно значение функции f, эти прямоугольные множества являются одноцветными, то есть во всех точках такого прямоугольного множества функция f принимает одно и то же значение. Например, для $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $Z = \{0, 1\}$ и протокола $\mathcal{P}$ (рис 1.) получаем разбиение на 5 одноцветных прямоугольных множества.

Подведем промежуточные итоги: всякий протокол с l листьями (вычисляющий функцию f) задаёт разбиение таблицы значений f на l одноцветных прямоугольных множества. Значит, чтобы доказать, что коммуникационная сложность $CC(f)$ не меньше n, достаточно показать, что таблицу значений невозможно разбить на менее, чем 2^n одноцветных прямоугольных множества.

1.3 Графовая интерпретация

Давайте теперь посмотрим на другое представление множества значений функции f. Рассмотрим полный двудольный граф $G = (X, Y, E)$, ребра которого раскрашены в $|Z|$ цветов. Вершины левой доли соот-

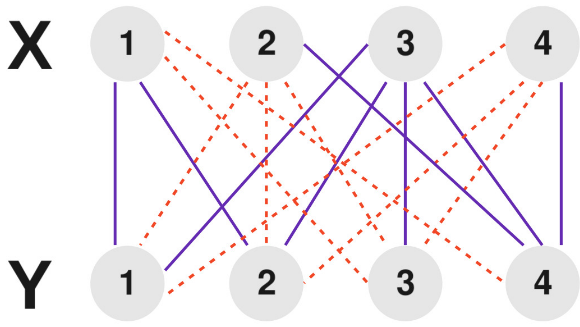


Рис. 2: Графовая интерпретация: синие – 0, красные – 1.

ветствуют элементам множества X, вершины правой доли - элементам множества Y. Ребро $(x, y) \in X \times Y$ имеет цвет $z \in Z$, если $f(x, y) = z$.

Из определения комбинаторного прямоугольника видно, что в графовой интерпертации он является ничем иным, как полным двудольным подграфом. А разбиение таблицы значений f на одноцветные прямоугольные множества это разбиение нашего полного двудольного графа G на одноцветные непересекающиеся биклики (полные двудольные подграфы). Для нашего примера графовую интерпретацию можно посмотреть на рис.2.

Определение. *Бикликовым числом $bcc(G)$ двудольного графа G будем называть наименьшее число биклик, которыми можно покрыть все ребра графа G (Биклики могут пересекаться).*

Для каждого $z \in Z$ определим двудольный граф $G_z = (X, Y, E_z)$, как граф, получающийся из G выкидыванием всех ребер цвета отличного от z, иначе говоря $E_z = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x, y) = z\}$.

Величины $bbc(G_z)$ дают некоторую нижнюю оценку на величину минимального покрытия непересекающимися бикликами, поэтому:

$$2^{CC(f)} \geq \sum_{z \in Z} bcc(G_z)$$

Замечание. *На самом деле величины $bbc(G_z)$ тесно связаны с недетерминированной коммуникационной сложностью $NCC(f)$. Для произво-*

вльного множества Z верно:

$$NCC(f) \leq \lceil log_2(\sum_{z \in Z} bcc(G_z)) \rceil + 1$$

а для $Z = \{0, 1\}$:

$$NCC(f) = \lceil log_2(bcc(G_1)) \rceil$$

Подробнее про это можно прочитать, например в [2].

В итоге мы получили мощный иструмент для доказательства нижних оценок коммуникационной сложности. К сожалению задача нахождения величины $bcc(G)$ является PSPACE-полной [3], а точное значение известно только для очень скудного класса графов (например для "Crown graphs"), поэтому напрямую мы не можем использовать эту оценку. В следующей главе я рассмотрю несколько методов, позволяющих для произвольного двудольного графа оценивать снизу величину $bcc(G)$.

Оценивание $bcc(G)$

В этой главе я опишу три различных метода оценивания бикликового покрытия:

- метод трудного множества ("Fooling Set");
- метод Куликова-Юкны;
- метод энтропийных неравенств.

Первые два метода работают для произвольных графов (необязательно двудольных), а третий применим к большому классу двудольных графов.

2.1 Метод трудного множества

Данный метод тесно связан с одноцветными прямоугольными множествами. Классическое определение трудного множества выглядит следующим образом:

Определение. *Для функции* $f : X \times Y \to Z$ *и элемента* $z \in Z$ *будем называть множество* $S_z \subset X \times Y$ *трудным (в англоязычной литературе fooling set), если верно:*

- *для всякой пары* $(x, y) \in S_z$ *имеем* $f(x, y) = z$*;*
- *для любых двух несовпадающих пар* $(x, y) \in S_z$ *и* $(x', y') \in S_Z$ *имеем* $f(x, y') \neq z$ *или* $f(x', y) \neq z$*.*

Нас будет интересовать немного более общее определение трудного множества (графовая интерпретация):

Определение. *Пусть* $G = (V, E)$ *произвольный неориентированный граф. Будем называть подмножество ребер* $S \subseteq E$ *трудным, если для любых двух различных ребер* $(x, y) \in S$ *и* $(x', y') \in S$ *имеем* $(x, y') \notin E$ *или* $(x', y) \notin E$*.*

Замечание. *Классическое определение получается из графового, применением к двудольному графу* $G_z = (X, Y, E_z)$*, который строится по функции* $f : X \times Y \to Z$*.*

Теорема. *Для произвольного неориентированного графа* $G = (V, E)$*, если подмножество ребер* $S \subseteq E$ *является трудным, то* $bcc(G) \geq |S|$*.*

Доказательство. *Достаточно доказать, что два ребра, лежащие одновременно в одном трудном множестве, не могут попасть в одну биклику. Пусть не так, значит существуют два ребра* $(x, y) \in B \cap S$ *и* $(x', y') \in B \cap S$*, где* B *- биклика, а* S *- трудное подмножество ребер. Но тогда ребра* (x, y') *и* (x', y) *также принадлежат биклике* B*, а значит лежат и в нашем множестве ребер* E*. Противоречие.* ■

Замечание. *На практике нахождение максимального по мощности трудного множества применяют редко, потому что эта задача является* $PSPACE$*-полной [3]. Часто рассматривают "нечестный" метод, а именно доказывают, что определенного размера трудное множество обязательно найдется.*

Теорема. *Для произвольного неориентированного графа* $G = (V, E)$ *обозначим за* $v(G)$ *- размер максимального паросочетания, а за* $cl(G)$

такое максимальное число r, что в нашем графе содержится биклика $K_{r,r}$. Тогда среди ребер этого паросочетания можно найти трудное множество размера $\left\lceil \frac{v(G)}{cl(G)} \right\rceil$.

На самом деле намного проще доказать, что $bcc(G) \geq \left\lceil \frac{v(G)}{cl(G)} \right\rceil$ без участия трудного множества. Этот факт сразу следует из того, что любая биклика $K_{r,s}$ содержит как максимум $min\{r, s\}$ ребер максимального паросочетания. Сама теорема будет доказана в одной из последующих глав.

2.2 Метод Куликова-Юкны

Следующий метод был впервые описан в статье [4] и работает он для произвольного неориентированного графа.

Теорема. *Для произвольного неориентированного графа $G = (V, E)$ верно:*

$$bcc(G) \geq \left\lceil \frac{v(G)^2}{|E|} \right\rceil$$

Доказательство. *Пусть $M \subseteq E$ - это максимальное паросочетание, тогда рассмотрим бикликовое покрытие, на котором достигается минимум $E = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{bcc(G)}$. Определим отображение $g : M \to \{1, \ \ldots, \ bcc(G)\}$, как $g(e) = min\{i \mid e \in B_i\}$ и пусть $M_i = \{e \in M \mid g(e) = i\}$. Иначе говоря M_i содержит только те ребра максимального паросочетания M, которые покрываются бикликой B_i впервый раз.*

Пусть $F_i \subseteq B_i$ биклика, индуцированная вершинами ребер из M_i. Пусть $F = F_1 \sqcup F_2 \sqcup \ldots \sqcup F_{bcc(G)}$ (биклики F_i не пересекаются по построению).

Очевидно, что F_i - биклика размера $r_i \times r_i$, где $r_i = |M_i|$. Получаем следующие соотношения:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_{bcc(G)} = |M| = v(G)$$

и

$$r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_{bcc(G)}^2 = |F|$$

Из неравенства Коши-Буняковского получаем

$$v(G)^2 = (r_1 + r_2 + \ldots + r_{bcc(G)})^2 \leq bcc(G) \cdot (r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_{bcc(G)}^2) = bcc(G) \cdot |F|$$

А так как $F \subseteq E$, *то* $v(G)^2 \leq bcc(G) \cdot |F| \leq bcc(G) \cdot |E|$. ■

На некоторых графах данная оценка превосходит $\left\lceil \frac{v(G)}{cl(G)} \right\rceil$, а на некоторых уступает:

- пусть двудольный граф $G = (L, R, E)$ состоит из совершенного паросочетания размера $n = |L| = |R|$ и еще некоторого константного числа непересекающихся биклик $K_{r,r}$. К тому же, пусть $r = \Theta(\sqrt{n})$, тогда
$$\frac{v(G)^2}{|E|} = \frac{n^2}{cr^2 + n} = \Theta(n) \gtrsim \Theta(\sqrt{n}) = \frac{n}{r} = \frac{v(G)}{cl(G)}$$

- рассмотрим двудольный граф Леви, построенный при помощи конечной проективной плоскости порядка $p \in \mathbb{P}$. В каждой доле этого графа содержится $n = p^2 + p + 1$ вершин, причем степень каждой $p + 1$. Этот граф не содержит $K_{2,2}$ (любые две прямые пересекаются максимум в одной точке). А так как в регулярных двудольных графах обязательно найдется совершенное паросочетание, то

$$\frac{v(G)^2}{|E|} = \frac{(p^2 + p + 1)^2}{(p^2 + p + 1)(p + 1)} = \Theta(\sqrt{n}) \lesssim \Theta(n) = \frac{p^2 + p + 1}{1} = \frac{v(G)}{cl(G)}$$

2.3 Метод энтропийных неравенств

Следующий метод оценивания бикликового покрытия был описан в статье [5] как результат применения энтропийного неравенства:

$$H(A|B, X) + H(A|B, Y) \leq H(A|B)$$

К сожалению, это неравенство выполняется не для произвольного совместного распределения случайных величин A, B, X, Y и соответственно на двудольный граф будет накладываться дополнительное условие (*).

Теорема. *Пусть ребра двудольного графа* $G = (L, R, E)$ *раскрашены следующим образом:*

(*) для произвольной биклики $C \subseteq E$ и для произвольной пары ребер (x, y') и (x', y) из C, покрашеных в цвет a, цвет ребер (x, y) и (x', y') тоже a.
Пусть также на ребрах этого графа задано произвольное вероятностное распределение. Определим случайные величины (X, Y, A) следующим образом:

- $X =$ [*левый конец ребра*],
- $Y =$ [*правый конец ребра*],
- $A =$ [*цвет ребра*].

Тогда выполняется неравенство:

$$bcc(G) \geq 2^{\frac{1}{2}(H(A|X)+H(A|Y)-H(A))}$$

Пример. *Определим двудольный граф $G_{n,k} = (L, R, E)$ следующим образом:*

- *L и R всевозможные k-элементные подмножества $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$,*
- *$E \subseteq L \times R$ состоит из пар непересекающихся множеств.*

Определим цвет ребра $(x, y) \in E$ как $x \sqcup y$ и пусть на ребрах задано равномерное распределение. Условие (*) выполнено, потому что любые два одноцветных ребра не могут лежать в одной биклике. А так как $H(A|X) = H(A|Y) = \log_2 \binom{n-k}{k}$ и $H(A) = \log_2 \binom{n}{2k}$, то

$$bcc(G_{n,k}) \geq \sqrt{\binom{n-k}{k}^2 \Big/ \binom{n}{2k}}$$

Если $n \gg k$, то $\binom{n-k}{k}^2 / \binom{n}{2k}$ близко к $\binom{2k}{k} \approx 2^{2k}$ и мы получаем нижнюю оценку $bcc(G_{n,k}) \geq 2^k$.

Геометрические конфигурации

В этой главе мы приведем класс двудольных графов, построенных при помощи некоторой геометрической конфигурации Г. Далее мы увидим, что к этим двудольным графам применимы все наши оценки и поэтому, изменяя Γ, мы можем сравнить какие методы работают лучше, а какие хуже.

3.1 Описание двудольного графа

Определение. *Геометрической конфигурацией* Γ *(Partial Linear Space) будем называть конечное множество прямых* A *и конечное множество точек* V *на них, что выполняются следующие две аксиомы:*

- *Любые две точки лежат как максимум на одной прямой.*
- *На каждой прямой лежит хотя бы две точки.*

Определение. *Проективной плоскостью с параметрами* (p_γ, l_π) *называется геометрическая конфигурация, состоящая из* p *точек и* l *прямых, причем через каждую точку проходит ровно* γ *прямых и на каждой прямой лежит ровно* π *точек.*

Пусть у нас имеется некоторая геометрическая конфигурация $\Gamma = (V, A)$, тогда определим двудольный граф $G_{n,\Gamma} = (L, R, E)$ следующим образом:

- $L = R = V^n$
- $E = \{(x, y) \in L \times R \mid \forall i : x_i \neq y_i$ и лежат на одной прямой из $A\}$

3.2 Оценки для проективных плоскостей

Для произвольной проективной плоскости Γ с параметрами (p_γ, l_π) найдем какие оценки на $bcc(G_{n,\Gamma})$ дают наши методы:

– Метод трудного множества:

Лемма. *Если в* Γ *имеется цикл нечетный длины, то в* $G_{1,\Gamma}$ *можно найти трудное множество размера 3.*

Доказательство. *Рассмотрим нечетный цикл минимальной длины* $\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{2k+1}\}$, *где* $k \geq 1$. *Заметим, что прямые могут проходить только через соседние точки этого цикла, иначе бы мы* *нашли нечетный цикл меньшей длины. Тогда если $k > 1$, то множество ребер $\{(v_1, v_2),\ (v_2, v_3),\ (v_3, v_4)\}$ образует трудное множество, а если $k = 1$, то $\{(v_1, v_2),\ (v_2, v_3),\ (v_3, v_1)\}$ образует трудное множество.* $\square$

Замечание. *Если на какой-нибудь прямой лежит по крайне мере три точки, то мы уже имеем цикл длины 3.*

Если нечетных циклов в Γ нет, то мы получаем геометрическую конфигурацию аналогичную двудольному графу. Если этот двудольный граф полный, то наибольшее трудное множество имеет размер 2, а если неполный, то мы можем найти трудное множество размера 3.

Лемма. *Если в $G_{1,\Gamma}$ существует трудное множество размера k, то в $G_{n,\Gamma}$ существует трудное множество размера k^n*

Доказательство. *Докажем вначале, что если в графе G_1 имеется трудное множество размера n_1, а в графе G_2 – трудное множество размера n_2, тогда в $G_1 \otimes G_2$ можно найти трудное множество размера $n_1 n_2$. (где $\otimes$ - произведение Кронекера). Пусть $\{v_{i,j}\}$ трудное множество в графе G_1, тогда в каждой подматрице $v_{i,j} \cdot G_2$ матрицы графа $G_1 \otimes G_2$ рассмотрим клетки, соответствующие трудному множеству графа G_2. Всего мы получили $n_1 n_2$ клеток, образующие трудное множество графа $G_1 \otimes G_2$ по построению.*

Вернемся к доказательству леммы. Так как матрица графа $G_{n,\Gamma}$, есть не что иное, как Кронекерово произведение n матриц графа $G_{1,\Gamma}$, то мы можем найти трудное множество размера k^n. $\square$

В итоге мы получили, что если Γ является аналогом полного двудольного графа, то

$$bcc(G_{n,\Gamma}) \geq 2^n$$

иначе

$$bcc(G_{n,\Gamma}) \geq 3^n$$

– Метод Куликова-Юкны:

Так как Γ имеет параметры (p_γ, l_π), то каждая вершина графа $G_{1,\Gamma}$ соединена с $\gamma(\pi-1)$ другими, а значит всего ребер $\gamma(\pi-1)p$. Тогда в графе $G_{n,\Gamma}$ всего ребер $\gamma^n(\pi-1)^n p^n$. Так как у нас однородный двудольный граф, то у нас имеется совершенное паросочетание, а значит $v(G_{n,\Gamma}) = p^n$. В итоге получаем очценку:

$$bcc(G_{n,\Gamma}) \geq \frac{p^{2n}}{\gamma^n(\pi-1)^n p^n} = \left(\frac{p}{\gamma(\pi-1)}\right)^n$$

– Метод энтропийных неравенств:

Определим раскраску ребер нашего графа $G_{n,\Gamma} = (L, R, E)$: сопоставим каждой прямой конфигурации Γ свой цвет, тогда цвет ребра $(x, y) \in E$ равен n-мерному вектору цветов прямых проходящих через x_i и y_i.

Проверим свойство (*): пусть (x, y') и (x', y) одного цвета и лежат в одной биклике C, значит для любого i точки x_i, y'_i, x'_i, y_i лежат на одной прямой (некоторые точки могут совпадать), но тогда очевидно, что ребро (x, y) такого же цвета.

Пусть на ребрах графа задано равномерное распределение, тогда $H(A) = \log_2 l^n = n \log_2 l$ и $H(A|X) = H(A|Y) = \log_2 \gamma^n = n \log_2 \gamma$. В итоге получаем оценку:

$$bcc(G_{n,\Gamma}) \geq 2^{n \log_2 \gamma - \frac{1}{2} n \log_2 l} = \left(\frac{\gamma}{\sqrt{l}}\right)^n$$

3.3 Сравнение методов оценивания

Список литературы

[1] Kushilevitz Eyal, Nisan Noam. Communication Complexity. Cambridge University press, 2006.

[2] Razborov Alexander. Communication Complexity. In: An Invitation to Mathematics: from Competitions to Research. Springer, 2011.

[3] Gruber H., Holzer M. Finding lower bounds for nondeterministic state complexity is hard. Springer, 2006.

[4] Jukna S., Kulikov A. S. On covering graphs by complete bipartite subgraphs. Discrete Math, 2009.

[5] Kaced Tarik, Romashchenko A. E., Vereshchagin N. K. Conditional Information Inequalities and Combinatorial Applications. CoRR, 2015.