

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт (государственный  
университет)»  
Факультет инноваций и высоких технологий  
Кафедра анализа данных

## Магистерская диссертация

Тема: **Название моей работы (TODO)**

Направление: 010400  
Прикладные математика и информатика

Выполнил:  
студент 093 группы \_\_\_\_\_ Попов М.В.

Научный руководитель:  
д.физ.-мат.н., проф.(todo) \_\_\_\_\_ Ромашенко А.Е.

г. Москва 2016

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>Коммуникационная сложность</b>	<b>3</b>
1.1 Постановка задачи	3
1.2 Одноцветные комбинаторные прямоугольники	4
1.3 Графовая интерпретация	5
<b>Оценивание <math>bcc(G)</math></b>	<b>7</b>
2.1 Метод трудного множества	8
2.2 Метод Куликова-Юкны	9
2.3 Метод энтропийных неравенств	10
<b>Геометрические конфигурации</b>	<b>12</b>
3.1 Описание двудольного графа	12
3.2 Оценки для $(p_\gamma, l_\pi)$	12
3.3 Сравнение методов оценивания	15
<b>Теорема Турана и граф четырехсторонников</b>	<b>17</b>
4.1 Теорема Турана и ее следствие	17
4.2 Граф четырехсторонников	19
<b>Случайные графы</b>	<b>21</b>
5.1 Случайные двудольные графы Эрдеша-Реньи	21
5.2 Неравенство Хефдинга	22
5.3 Размер максимального паросочетания	24
5.4 Трудное множество и оценка Куликова-Юкны на случайных графах	26
5.5 Количество трудных множеств размера $k$	29
<b>Обобщение методов оценивания</b>	<b>33</b>
6.1 $m$ -Мерная коммуникационная сложность	33
6.2 Одноцветные комбинаторные параллелепипеды	34
6.3 Метод трудного множества	35
6.4 Метод энтропийных неравенств	36
6.5 Предикат $\text{DISJOINT}(m, k, n)$	41

Список литературы . . . . .	43
-----------------------------	----

# Введение

(ToDo) Актуальность, новизна, краткая выжимка.

## Коммуникационная сложность

### 1.1 Постановка задачи

Мы будем рассматривать задачи следующего вида: пусть имеются два человека, которые хотят совместно вычислить значение некоторой функции от двух переменных  $f(x, y)$ . По традиции мы будем называть первого участника игры Алисой, а второго – Бобом. Сложность у этой задачи в том, что Алиса знает только значение аргумента  $x$ , а Боб значение аргумента  $y$ . Алиса и Боб могут обмениваться сообщениями по каналу связи. Требуется вычислить значение  $f(x, y)$ , переслав по каналу связи минимальное количество информации.

Мы предполагаем, что Алиса и Боб заранее (до того, как им станут известны значения  $x$  и  $y$ ) договариваются о коммуникационном протоколе — о наборе соглашений, какие именно данные и в каком порядке они будут пересылать друг другу при тех или иных значениях  $x$  и  $y$ .

Опишем теперь всю задачу более формально. Пусть имеются конечные множества  $X, Y, Z$  и задана некоторая функция  $f : X \times Y \rightarrow Z$ .

**Определение.** *Коммуникационным протоколом для вычисления некоторой функции  $f : X \times Y \rightarrow Z$  называется ориентированное двоичное дерево со следующей разметкой на вершинах и ребрах:*

- *каждая нелистовая вершина помечена буквой  $A$  или  $B$ ;*
  - *у вершин с пометкой  $A$  определена функция  $g_i : X \rightarrow \{0, 1\}$ ;*
  - *у вершин с пометкой  $B$  определена функция  $f_j : Y \rightarrow \{0, 1\}$ ;*
- *каждой листовой вершине сопоставлен элемент множества  $Z$ ;*
- *каждое ребро помечено 0 или 1.*

Пусть Алиса и Боб договорились, что будут действовать по некоторому протоколу  $\mathcal{P}$ . Затем Алиса получила  $x \in X$ , а Боб получил  $y \in Y$ .

Поместим фишку в корневую вершину нашего протокола  $\mathcal{P}$  и будем перемещать ее вниз по дереву, последовательно удаляясь от корня, пока она не попадет в один из листьев. Перемещение фишки выполняется следующим образом. Если текущая вершина помечена буквой  $A$ , то это означает, что сейчас очередь Алисы. Она применяет функцию  $g_i$  текущей вершины к своему значению  $x$ . Алиса отправляет по каналу связи бит равный  $g_i(x)$  и перемещает фишку по ребру, помеченному как  $g_i(x)$ . Боб получает отправленный бит и понимает куда была сдвинута фишка. Для вершин помеченных буквой  $B$  эту же процедуру выполняет Боб. Когда фишка попадает в лист дерева, записанное там значение  $z \in Z$ , объявляется результатом выполнения протокола.

Мы говорим, что протокол  $\mathcal{P}$  вычисляет функцию  $f : X \times Y \rightarrow Z$ , если для любого  $x \in X$  и любого  $y \in Y$  при движении из корня по пути, соответствующему заданным  $x$  и  $y$ , мы попадаем в лист, помеченный  $z = f(x, y)$ .

**Определение.** *Сложностью коммуникационного протокола называется его глубина. Коммуникационной сложностью функции  $f$  называется минимальная сложность протокола, вычисляющего  $f$ . Мы будем обозначать её  $CC(f)$ .*

## 1.2 Одноцветные комбинаторные прямоугольники

**Определение.** *Множество  $S \subseteq X \times Y$  называется комбинаторным прямоугольником (или просто прямоугольным множеством), если существуют такие  $A \subseteq X$  и  $B \subseteq Y$ , что  $S = A \times B$ .*

Пусть  $\mathcal{P}$  – некоторый коммуникационный протокол для вычисления функции  $f : X \times Y \rightarrow Z$  и  $l$  – один из листьев протокола. Определим  $S_l$  как множество пар  $(x, y) \in X \times Y$  таких, что на входе  $(x, y)$  Алиса и Боб, следуя протоколу  $\mathcal{P}$ , приходят в лист  $l$ .

**Утверждение 1.1.** *Для всякого коммуникационного протокола  $\mathcal{P}$  и для всякого листа  $l$  множество  $S_l$  является комбинаторным прямоугольником.*

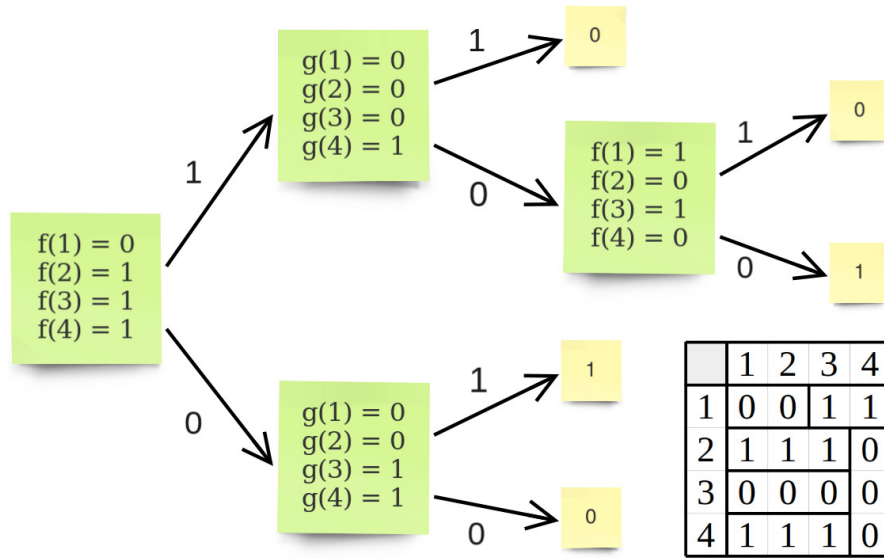


Рис. 1: Пример протокола и разбиения таблицы значений.

Доказательство этого утверждения можно прочитать, например, в [1]. В итоге мы получаем, что коммуникационный протокол для вычисления функции  $f$  задаёт разбиение  $X \times Y$  - таблицы значений  $f$  на прямоугольные множества, соответствующие листьям. Поскольку каждому листу протокола приписано одно значение функции  $f$ , эти прямоугольные множества являются одноцветными, то есть во всех точках такого прямоугольного множества функция  $f$  принимает одно и то же значение. Например, для  $X = Y = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $Z = \{0, 1\}$  и протокола  $\mathcal{P}$  (рис. 1) получаем разбиение на 5 одноцветных прямоугольных множеств.

Подведем промежуточные итоги: всякий протокол с  $l$  листьями (вычисляющий функцию  $f$ ) задаёт разбиение таблицы значений  $f$  на  $l$  одноцветных прямоугольных множеств. Значит, чтобы доказать, что коммуникационная сложность  $CC(f)$  не меньше  $n$ , достаточно показать, что таблицу значений невозможно разбить на менее, чем  $2^n$  одноцветных прямоугольных множеств.

### 1.3 Графовая интерпретация

Давайте теперь посмотрим на другое представление множества значений функции  $f$ . Рассмотрим полный двудольный граф  $G = (X, Y, E)$ , ребра которого раскрашены в  $|Z|$  цветов. Вершины левой доли соот-

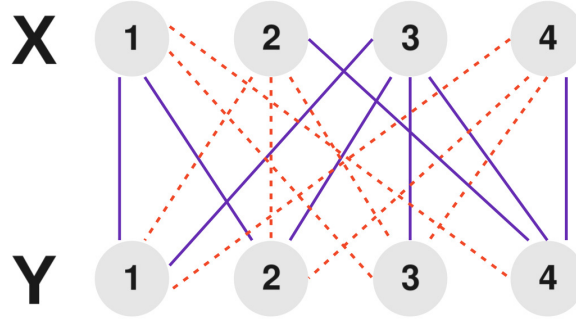


Рис. 2: Графовая интерпретация: синие – 0, красные – 1.

ветствуют элементам множества  $X$ , вершины правой доли – элементам множества  $Y$ . Ребро  $(x, y) \in X \times Y$  имеет цвет  $z \in Z$ , если  $f(x, y) = z$ .

Из определения комбинаторного прямоугольника видно, что в графовой интерпретации он является ничем иным, как полным двудольным подграфом. А разбиение таблицы значений  $f$  на одноцветные прямоугольные множества – это разбиение нашего полного двудольного графа  $G$  на одноцветные непересекающиеся биклики (полные двудольные подграфы). Для нашего примера графовую интерпретацию можно посмотреть на рис. 2.

**Определение.** Бикликовым разбиением  $bcp(G)$  двудольного графа  $G$  будем называть наименьшее число непересекающихся биклик, которыми можно покрыть все ребра графа  $G$ .

**Определение.** Бикликовым покрытием  $bcc(G)$  двудольного графа  $G$  будем называть наименьшее число, возможно, пересекающихся биклик, которыми можно покрыть все ребра графа  $G$ .

**Утверждение 1.2.** Для произвольного двудольного графа  $G$  верно

$$bcp(G) \geq bcc(G)$$

Для каждого  $z \in Z$  определим двудольный граф  $G_z = (X, Y, E_z)$ , как граф, получающийся из  $G$  выкидыванием всех ребер цвета, отличного от  $z$ . Иначе говоря  $E_z = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x, y) = z\}$ .

Величины  $bcp(G_z)$  и  $bcc(G_z)$  дают некоторую нижнюю оценку на коммуникационную сложность функции  $f$ , с которой намного удобнее рабо-

тать:

$$2^{CC(f)} \geq \sum_{z \in Z} bcp(G_z) \geq \sum_{z \in Z} bcc(G_z)$$

**Замечание.** На самом деле величины  $bcc(G_z)$  тесно связаны с неопределенной коммуникационной сложностью  $NCC(f)$ . Для произвольного множества  $Z$  верно:

- $2^{NCC(f)} \geq \sum_{z \in Z} bcc(G_z)$ ,
- $NCC(f) \leq \lceil \log_2(\sum_{z \in Z} bcc(G_z)) \rceil + 1$

Иначе говоря, величины  $bcc(G_z)$  и  $NCC(f)$  по существу задают одну и ту же меру "сложности" функции  $f$ . Подробнее про это можно прочитать, например, в [2].

В итоге мы получили мощный инструмент для доказательства нижних оценок коммуникационной сложности. К сожалению, задача нахождения величины  $bcc(G)$  является PSPACE-полной [3], а точное значение известно только для очень скудного класса графов (например, для "crown graphs" [4]), поэтому напрямую мы не можем использовать эту оценку. В следующей главе я рассмотрю несколько методов, позволяющих для произвольного двудольного графа оценивать снизу величину  $bcc(G)$ .

## Оценивание $bcc(G)$

В этом разделе я опишу три различных метода оценивания бикликового покрытия:

- метод трудного множества ("fooling set");
- метод Куликова-Юкны;
- метод энтропийных неравенств.

Первые два метода работают для произвольных графов (необязательно двудольных), а третий применим к большому классу двудольных графов.



## 2.1 Метод трудного множества

Данный метод тесно связан с одноцветными прямоугольными множествами. Классическое определение трудного множества выглядит следующим образом:

**Определение.** Для функции  $f : X \times Y \rightarrow Z$  и элемента  $z \in Z$  будем называть множество  $S_z \subset X \times Y$  трудным (в англоязычной литературе *fooling set*), если верно:

- для всякой пары  $(x, y) \in S_z$  имеем  $f(x, y) = z$ ;
- для любых двух несовпадающих пар  $(x, y) \in S_z$  и  $(x', y') \in S_z$  имеем  $f(x, y') \neq z$  или  $f(x', y) \neq z$ .

Нас будет интересовать немного более общее определение трудного множества (графовая интерпретация):

**Определение.** Пусть  $G = (V, E)$  произвольный неориентированный граф. Будем называть подмножество ребер  $S \subseteq E$  трудным, если для любых двух различных ребер  $(x, y) \in S$  и  $(x', y') \in S$  имеем  $(x, y') \notin E$  или  $(x', y) \notin E$ . Обозначение  $\text{fool}(G)$  - размер максимального по мощности трудного множества.

**Замечание.** Классическое определение получается из графового, применением к двудольному графу  $G_z = (X, Y, E_z)$ , который строится по функции  $f : X \times Y \rightarrow Z$ .

**Теорема 2.1.** Для произвольного неориентированного графа  $G = (V, E)$ , если подмножество ребер  $S \subseteq E$  является трудным, то  $\text{bcs}(G) \geq |S|$ .

**Доказательство.** Достаточно доказать, что два ребра, лежащие одновременно в одном трудном множестве, не могут попасть в одну биклику. Пусть не так, значит существуют два ребра  $(x, y) \in B \cap S$  и  $(x', y') \in B \cap S$ , где  $B$  - биклика, а  $S$  - трудное подмножество ребер. Но тогда ребра  $(x, y')$  и  $(x', y)$  также принадлежат биклике  $B$ , а значит лежат и в нашем множестве ребер  $E$ . Противоречие. ■

## 2.2 Метод Куликова-Юкны

Следующий метод был впервые описан в статье [5], и работает он для произвольного неориентированного графа.

**Теорема 2.2.** *Для произвольного неориентированного графа  $G = (V, E)$  верно:*

$$bcc(G) \geq \left\lceil \frac{v(G)^2}{|E|} \right\rceil$$

где  $v(G)$  – размер максимального паросочетания графа  $G$ .

**Доказательство.** Пусть  $M \subseteq E$  – это максимальное паросочетание, тогда рассмотрим бикликовое покрытие, на котором достигается минимум  $E = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_{bcc(G)}$ . Определим отображение  $g : M \rightarrow \{1, \dots, bcc(G)\}$ , как  $g(e) = \min\{i \mid e \in B_i\}$  и пусть  $M_i = \{e \in M \mid g(e) = i\}$ . Иначе говоря  $M_i$  содержит только те ребра максимального паросочетания  $M$ , которые покрываются бикликой  $B_i$  в первый раз.

Пусть  $F_i \subseteq B_i$  биклика, индуцированная вершинами ребер из  $M_i$ . Пусть  $F = F_1 \sqcup F_2 \sqcup \dots \sqcup F_{bcc(G)}$  (биклики  $F_i$  не пересекаются по построению).

Очевидно, что  $F_i$  – биклика размера  $r_i \times r_i$ , где  $r_i = |M_i|$ . Получаем следующие соотношения:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_{bcc(G)} = |M| = v(G)$$

и

$$r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{bcc(G)}^2 = |F|$$

Из неравенства Коши-Буняковского получаем

$$v(G)^2 = (r_1 + r_2 + \dots + r_{bcc(G)})^2 \leq bcc(G) \cdot (r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_{bcc(G)}^2) = bcc(G) \cdot |F|$$

А так как  $F \subseteq E$ , то

$$v(G)^2 \leq bcc(G) \cdot |F| \leq bcc(G) \cdot |E| \blacksquare$$

В этой же статье [5] этот метод сравнивался с другой оценкой: пусть

$bcl(G) = \max_{K_{r,r} \subseteq G} \{r\}$ , тогда

$$bcc(G) \geq \left\lceil \frac{v(G)}{bcl(G)} \right\rceil \quad (*)$$

Данная оценка очевидным образом следует из того, что любая биклика  $K_{r,s}$  содержит как максимум  $\min\{r, s\}$  ребер максимального паросочетания.

Приведем примеры графов, на которых метод Куликова-Юкны работает намного лучше, чем оценка (\*), и наоборот:

- пусть двудольный граф  $G = (L, R, E)$  состоит из совершенного паросочетания размера  $n = |L| = |R|$  и еще некоторого константного числа непересекающихся биклик  $K_{r,r}$ . К тому же, пусть  $r = \Theta(\sqrt{n})$ , тогда

$$\left\lceil \frac{v(G)^2}{|E|} \right\rceil = \left\lceil \frac{n^2}{cr^2 + n} \right\rceil = \Theta(n) \gg \Theta(\sqrt{n}) = \left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil = \left\lceil \frac{v(G)}{bcl(G)} \right\rceil$$

- рассмотрим двудольный граф Леви, построенный при помощи конечной проективной плоскости порядка  $p \in \mathbb{P}$ . В каждой доле этого графа содержится  $n = p^2 + p + 1$  вершин, причем степень каждой  $p + 1$ . Этот граф не содержит  $K_{2,2}$  (любые две прямые пересекаются максимум в одной точке). А так как в регулярных двудольных графах обязательно найдется совершенное паросочетание, то

$$\begin{aligned} \left\lceil \frac{v(G)^2}{|E|} \right\rceil &= \left\lceil \frac{(p^2 + p + 1)^2}{(p^2 + p + 1)(p + 1)} \right\rceil = \Theta(\sqrt{n}) \ll \\ &\ll \Theta(n) = \left\lceil \frac{p^2 + p + 1}{1} \right\rceil = \left\lceil \frac{v(G)}{bcl(G)} \right\rceil \end{aligned}$$

## 2.3 Метод энтропийных неравенств

Следующий метод оценивания бикликового покрытия был описан в статье [6], как результат применения энтропийного неравенства:

$$H(A|B, X) + H(A|B, Y) \leq H(A|B)$$

К сожалению, это неравенство выполняется не для произвольного совместного распределения случайных величин  $A, B, X, Y$ , и соответственно на двудольный граф будет накладываться дополнительное условие (\*\*).

**Теорема 2.3.** Пусть ребра двудольного графа  $G = (L, R, E)$  раскрашены следующим образом:

(\*\*) для произвольной биклики  $C \subseteq G$  и для произвольной пары ребер  $(x, y')$  и  $(x', y)$  из  $C$ , покрашенных в цвет  $a$ , цвет ребер  $(x, y)$  и  $(x', y')$  тоже  $a$ .

Пусть также на ребрах этого графа задано произвольное вероятностное распределение. Определим случайные величины  $(X, Y, A)$  следующим образом:

- $X = [\text{левый конец ребра}]$ ,
- $Y = [\text{правый конец ребра}]$ ,
- $A = [\text{цвет ребра}]$ .

Тогда выполняется неравенство:

$$b_{cc}(G) \geq 2^{\frac{1}{2}(H(A|X)+H(A|Y)-H(A))}$$

**Пример.** Определим двудольный граф  $G_{n,k} = (L, R, E)$  следующим образом:

- $L$  и  $R$  всевозможные  $k$ -элементные подмножества  $\{1, 2, \dots, n\}$ ,
- $E \subseteq L \times R$  состоит из пар непересекающихся множеств.

Определим цвет ребра  $(x, y) \in E$ , как  $x \sqcup y$ , и пусть на ребрах задано равномерное распределение. Условие (\*\*) выполнено, потому что любые два одноцветных ребра не могут лежать в одной биклике. А так как  $H(A|X) = H(A|Y) = \log_2 \binom{n-k}{k}$  и  $H(A) = \log_2 \binom{n}{2k}$ , то

$$b_{cc}(G_{n,k}) \geq \sqrt{\binom{n-k}{k}^2 / \binom{n}{2k}}$$

Если  $n \gg k$ , то  $\binom{n-k}{k}^2 / \binom{n}{2k}$  близко к  $\binom{2k}{k} \approx 2^{2k}$  и мы получаем нижнюю оценку  $b_{cc}(G_{n,k}) \geq 2^k$ .

# Геометрические конфигурации

В этом разделе мы приведем класс двудольных графов, построенных при помощи некоторой геометрической конфигурации  $\Gamma$ . Мы увидим, что к этим двудольным графам применимы все наши оценки, и поэтому, изменяя  $\Gamma$ , мы можем сравнить какие методы работают лучше, а какие хуже.

## 3.1 Описание двудольного графа

**Определение.** Геометрической конфигурацией  $\Gamma$  (*Partial Linear Space*) будем называть конечное множество прямых  $A$  и конечное множество точек  $V$  на них, что выполняются следующие две аксиомы:

- Любые две точки лежат как максимум на одной прямой.
- На каждой прямой лежит хотя бы две точки.

**Определение.** Геометрической конфигурацией с параметрами  $(p_\gamma, l_\pi)$  будем называть такую конфигурацию, которая состоит из  $p$  точек и  $l$  прямых, причем через каждую точку проходит ровно  $\gamma$  прямых и на каждой прямой лежит ровно  $\pi$  точек.

Пусть у нас имеется некоторая геометрическая конфигурация  $\Gamma = (V, A)$ , тогда определим двудольный граф  $G_{n,\Gamma} = (L, R, E)$  следующим образом:

- $L = R = V^n$
- $E = \{(x, y) \in L \times R \mid \forall i : x_i \neq y_i \text{ и лежат на одной прямой из } A\}$

## 3.2 Оценки для $(p_\gamma, l_\pi)$

Для геометрической конфигурации  $\Gamma$  с параметрами  $(p_\gamma, l_\pi)$  (предполагаем, что  $l \geq 3$ ) найдем какие оценки на  $bcc(G_{n,\Gamma})$  дают наши методы:

– Метод трудного множества:

**Лемма 3.1.** Если в  $\Gamma$  имеется цикл нечетной длины, то в  $G_{1,\Gamma}$  можно найти трудное множество размера 3.

**Доказательство.** Рассмотрим нечетный цикл минимальной длины  $\{v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}\}$ , где  $k \geq 1$ . Заметим, что прямые могут проходить только через соседние точки этого цикла, иначе бы мы нашли нечетный цикл меньшей длины. Тогда, если  $k > 1$ , то множество ребер  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$  образует трудное множество, а если  $k = 1$ , то  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\}$  образует трудное множество.  $\square$

**Замечание.** Если на какой-нибудь прямой лежит по крайней мере три точки  $v_1, v_2, v_3$ , то мы можем найти трудное множество  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)\}$  размера 3.

Если в  $\Gamma$  нет нечетных циклов и на каждой прямой лежит ровно 2 точки, то мы получаем геометрическую конфигурацию, аналогичную двудольному графу. Если этот двудольный граф полный, то наибольшее трудное множество имеет размер 2, а если неполный, то рассмотрим два случая:

- 1) Если  $\gamma = 1$ , то  $\Gamma$  является паросочетанием, а значит все ребра графа  $G_{1,\Gamma}$  образуют трудное множество (ребер ровно  $l \geq 3$ ).
- 2) Если  $\gamma \geq 2$  и нет прямой проходящей через точки  $v_1$  и  $v_2$  из разных долей, то существуют точки  $v_3, v_4, v_5, v_6$  такие, что прямые проходят через пары точек  $(v_1, v_4), (v_2, v_3)$  и  $(v_2, v_5)$ . Но тогда множество ребер  $\{(v_1, v_4), (v_3, v_2), (v_2, v_5)\}$  образуют трудное множество размера 3.

Иначе говоря, мы показали, что если  $\Gamma$  аналог не полного двудольного графа, то мы можем найти трудное множество размера 3.

**Лемма 3.2.** Если в  $G_{1,\Gamma}$  существует трудное множество размера  $k$ , то в  $G_{n,\Gamma}$  существует трудное множество размера  $k^n$

**Доказательство.** Докажем вначале, что если в графе  $G_1$  имеется трудное множество размера  $n_1$ , а в графе  $G_2$  – трудное множество размера  $n_2$ , тогда в  $G_1 \otimes G_2$  можно найти трудное множество размера  $n_1 \cdot n_2$  (где  $\otimes$  – произведение Кронекера). Пусть  $\{v_{i,j}\}$  трудное множество в графе  $G_1$ , тогда в каждой подматрице  $v_{i,j} \cdot G_2$  матрицы графа  $G_1 \otimes G_2$  рассмотрим клетки, соответствующие

трудному множеству графа  $G_2$ . Всего мы получили  $n_1 \cdot n_2$  клеток, образующих трудное множество графа  $G_1 \otimes G_2$  по построению. Вернемся к доказательству леммы. Так как матрица графа  $G_{n,\Gamma}$  есть не что иное, как Кронекерово произведение  $n$  матриц графа  $G_{1,\Gamma}$ , то мы можем найти трудное множество размера  $k^n$ .  $\square$

В итоге мы получили, что если  $\Gamma$  является аналогом полного двудольного графа, то

$$bcc(G_{n,\Gamma}) \geq 2^n$$

иначе

$$bcc(G_{n,\Gamma}) \geq 3^n$$

– Метод Куликова-Юкны:

Так как  $\Gamma$  имеет параметры  $(p_\gamma, l_\pi)$ , то каждая вершина графа  $G_{1,\Gamma}$  соединена с  $\gamma \cdot (\pi - 1)$  другими, а значит всего ребер  $\gamma \cdot (\pi - 1) \cdot p$ . Тогда в графе  $G_{n,\Gamma}$  всего ребер  $\gamma^n \cdot (\pi - 1)^n \cdot p^n$ . Так как у нас однородный двудольный граф, то имеется совершенное паросочетание, а значит  $v(G_{n,\Gamma}) = p^n$ . В итоге получаем оценку:

$$bcc(G_{n,\Gamma}) \geq \frac{p^{2n}}{\gamma^n \cdot (\pi - 1)^n \cdot p^n} = \left( \frac{p}{\gamma \cdot (\pi - 1)} \right)^n$$

– Метод энтропийных неравенств:

Определим раскраску ребер нашего графа  $G_{n,\Gamma} = (L, R, E)$ : сопоставим каждой прямой из конфигурации  $\Gamma$  свой цвет, тогда цвет ребра  $(x, y) \in E$  равен  $n$ -мерному вектору цветов прямых, проходящих через  $x_i$  и  $y_i$ .

Проверим свойство (\*\*): пусть  $(x, y')$  и  $(x', y)$  одного цвета и лежат в одной биклике  $C$ , значит для любого  $i$  точки  $x_i, y'_i, x'_i, y_i$  лежат на одной прямой (некоторые точки могут совпадать), но тогда очевидно, что ребро  $(x, y)$  такого же цвета.

Пусть на ребрах графа задано равномерное распределение, тогда  $H(A) = \log_2 l^n = n \cdot \log_2 l$  и  $H(A|X) = H(A|Y) = \log_2 \gamma^n = n \cdot \log_2 \gamma$ .

В итоге получаем оценку:

$$bcc(G_{n,\Gamma}) \geq 2^{n \cdot \log_2 \gamma - \frac{n}{2} \cdot \log_2 l} = \left( \frac{\gamma}{\sqrt{l}} \right)^n$$

### 3.3 Сравнение методов оценивания

Рассмотрим какие оценки получаются на известных геометрических конфигурациях. Симметричные конфигурации ( $p = l$  и  $\gamma = \pi$ ) будем обозначать сокращенно  $(p_\gamma)$ .

Название	FS	KJ	EI	Результат
Треугольник (3 <sub>2</sub> )	$\geq 3^n$	$\left(\frac{3}{2}\right)^n$	$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$	$FS > KJ > EI$
Полный четырех- сторонник (4 <sub>3</sub> , 6 <sub>2</sub> )	$\geq 3^n$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$	$\left(\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^n$	$FS > KJ > EI$
$K_m$ при $m > 4$ $(m_{m-1}, \binom{m}{2}_2)$	$\geq 3^n$	$\left(\frac{m}{m-1}\right)^n$	$\left(\sqrt{\frac{2(m-1)}{m}}\right)^n$	$FS > EI > KJ$
$K_{m,m}$ при $m > 0$ $(2m_m, m_2^2)$	$\geq 2^n$	$2^n$	$1^n$	$FS = KJ > EI$
Плоскость Фано (7 <sub>3</sub> )	$\geq 3^n$	$\left(\frac{7}{6}\right)^n$	$\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^n$	$FS > KJ > EI$
Конфигурация Мёбиуса-Кантора (8 <sub>3</sub> )	$\geq 3^n$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$	$\left(\frac{3}{\sqrt{8}}\right)^n$	$FS > KJ > EI$
Конфигурация Дезарга (10 <sub>3</sub> )	$\geq 3^n$	$\left(\frac{5}{3}\right)^n$	$\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^n$	$FS > KJ > EI$
Конфигурация Гессе (9 <sub>4</sub> , 12 <sub>3</sub> )	$\geq 3^n$	$\left(\frac{9}{8}\right)^n$	$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n$	$FS > EI > KJ$
Конфигурация Шлефли (12 <sub>5</sub> , 30 <sub>2</sub> )	$\geq 3^n$	$\left(\frac{12}{5}\right)^n$	$\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right)^n$	$FS > KJ > EI$
Проективная плоскость $((m^2 + m + 1)_{m+1})$	$\geq 3^n$	$\left(\frac{m^2+m+1}{m(m+1)}\right)^n$	$\left(\frac{m+1}{\sqrt{m^2+m+1}}\right)^n$	$FS > EI > KJ$
Конфигурация Кокса $((2^{m-1})_m)$	$\geq 3^n$	$\left(\frac{2^{m-1}}{m(m-1)}\right)^n$	$\left(\frac{m}{\sqrt{2^{m-1}}}\right)^n$	$FS > KJ > EI$

Из таблицы видно, что метод трудного множества всегда работает лучше, чем остальные. Почти во всех примерах мы нашли трудное множество размера  $3^n$ , но максимальное трудное множество может иметь очень большой размер. Оценки  $3^n$  не достаточно, чтобы доказать, что на геометрических конфигурациях метод трудного множества всегда работает лучше, чем оценка Куликова-Юкны, но зато достаточно для метода



энтропийных неравенств:

**Утверждение 3.1.** *Для произвольной геометрической конфигурации  $(p_\gamma, l_\pi)$  оценка, получаемая по методу трудного множества, превосходит оценку метода энтропийных неравенств. Иначе говоря*

$$2 \geq \frac{\gamma}{\sqrt{l}}$$

**Доказательство.** *Условия*

$$\begin{cases} p \cdot \gamma = l \cdot \pi, \\ p \geq \gamma \cdot (\pi - 1) + 1. \end{cases}$$

*должны обязательно выполняться для того, чтобы геометрическая конфигурация была корректно определена.*

*Используя эти ограничения, получаем*

$$\frac{\gamma^2}{l} = \frac{\pi \cdot \gamma}{p} \leq \frac{p + \gamma - 1}{p} = 1 + \frac{\gamma - 1}{p} < 4$$

*Что и требовалось доказать.  $\square$*

Теперь давайте сравним метод Куликова-Юкны и метод энтропийных неравенств. Рассмотрим два случая:

- Пусть выполняется условие  $l \geq \gamma^2$ , тогда

$$\gamma^2 \cdot (\pi - 1) \leq l \cdot (\pi - 1) < p \cdot \gamma \leq p \cdot \sqrt{l}$$

То есть получаем, что  $KJ > EI$ .

- Пусть теперь верно  $l \leq \gamma^2$ , тогда

$$\gamma^2 \cdot (\pi - 1) \geq l \cdot (\pi - 1) = p \cdot \gamma - l \geq p \cdot \sqrt{l} - l$$

Поделив обе части на  $\sqrt{l} \cdot \gamma \cdot (\pi - 1)$ , получаем

$$\frac{\gamma}{\sqrt{l}} \geq \frac{p}{\gamma \cdot (\pi - 1)} - \frac{\sqrt{l}}{\gamma \cdot (\pi - 1)}$$

В итоге получаем, что с небольшой погрешностью  $EI \gtrsim KJ$

# Теорема Турана и граф четырехсторонников

В этом разделе мы докажем, что метод трудного множества всегда дает оценку лучше, чем метод Куликова-Юкны. Также мы сведем задачу нахождения  $bcc(G)$  к задаче поиска хроматического числа графа, что позволит нам получить переформулированный метод трудного множества и обобщение оценки (\*).

## 4.1 Теорема Турана и ее следствие

Как уже видно из названия, для дальнейших изысканий нам потребуется классическая теорема Турана:

**Теорема 4.1. (Туран)** Пусть дан неориентированный граф  $G = (V, E)$ , где  $|V| = n$  и число независимости равно  $\alpha$ . Тогда в графе выполняется следующая оценка

$$|E| \geq n \cdot \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor - \alpha \cdot \frac{\left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \cdot \left( \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor + 1 \right)}{2}$$

Доказательство этой теоремы можно найти в книге [7]. Используя эту теорему, мы можем доказать следующее:

**Теорема 4.2.** Пусть имеется неориентированный граф  $G = (V, E)$ , тогда среди ребер максимального паросочетания можно найти трудное множество размера

$$\left\lceil \frac{v(G)^2}{|E|} \right\rceil$$

**Доказательство.** Давайте вместо графа  $G = (V, E)$  рассмотрим граф  $\hat{G} = (\hat{V}, \hat{E})$ , в котором останутся только вершины из максимального паросочетания. Так как  $|E| \geq |\hat{E}|$ , то достаточно найти трудное множество размера

$$\left\lceil \frac{v(G)^2}{|\hat{E}|} \right\rceil$$

Пусть  $(v_1, v'_1), (v_2, v'_2), \dots, (v_m, v'_m)$  – ребра максимального паросочетания. Построим граф  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  такой, что вершин в нем ровно  $m$ .

Обозначим вершины  $\{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_m\}$ , причем  $\tilde{v}_i \leftrightarrow (v_i, v'_i)$ . Определим множество ребер  $\tilde{E}$  следующим образом

$$(\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) \in \tilde{E} \text{ если } (v_i, v'_i) \notin \hat{E} \text{ или } (v_j, v'_j) \notin \hat{E}$$

Очевидно, что трудное множество на ребрах максимального паросочетания соответствует клике в  $\tilde{G}$  такого же размера. Пусть число независимости дополнения графа  $\tilde{G}$  равно  $\alpha$ , тогда мы можем предъявить трудное множество размера  $\alpha$ . Используя теорему Турана для дополнения графа  $\tilde{G}$ , получаем

$$|\tilde{E}| \geq m \cdot \left\lfloor \frac{m}{\alpha} \right\rfloor - \alpha \cdot \frac{\left\lfloor \frac{m}{\alpha} \right\rfloor \cdot \left(\left\lfloor \frac{m}{\alpha} \right\rfloor + 1\right)}{2} =$$

Пусть  $m = k \cdot \alpha + r$ , где  $r < \alpha$

$$= (k \cdot \alpha + r) \cdot k - \alpha \cdot \frac{k \cdot (k + 1)}{2} = \frac{\alpha \cdot k^2}{2} + r \cdot k - \frac{\alpha \cdot k}{2}$$

Так как каждое ребро из дополнения графа  $\tilde{G}$  порождает два ребра в  $\hat{G}$ , а также еще имеется  $m$  ребер самого паросочетания, то получаем

$$\begin{aligned} |\hat{E}| &\geq m + 2 \cdot \left( \frac{\alpha \cdot k^2}{2} + r \cdot k - \frac{\alpha \cdot k}{2} \right) = \\ &= \alpha \cdot k^2 + 2r \cdot k + r \geq \alpha \cdot k^2 + 2r \cdot k + \left\lfloor \frac{r^2}{\alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m^2}{\alpha} \right\rfloor \end{aligned}$$

В итоге получили, что

$$|\hat{E}| \geq \left\lfloor \frac{m^2}{\alpha} \right\rfloor \iff \alpha \geq \left\lfloor \frac{m^2}{|\hat{E}|} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{v(G)^2}{|\hat{E}|} \right\rfloor \blacksquare$$

Эта теорема говорит нам о том, что на любом неориентированном графе точная оценка по методу трудного множества лучше, чем оценка Куликова-Юкны.

## 4.2 Граф четырехсторонников

При доказательстве предыдущей теоремы мы использовали некоторый модифицированный граф  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ . По аналогии можно рассмотреть более общую конструкцию, которую мы будем называть графом четырехсторонников.

**Определение.** Пусть имеется двудольный неориентированный граф  $G = (L, R, E)$ . Определим граф четырехсторонников  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  следующим образом:

- $e_{i,j} \in E \leftrightarrow v_{i,j} \in \tilde{V}$ , значит  $|E| = |\tilde{V}|$ .
- $(v_{i,j}, v_{k,l}) \in \tilde{E}$  тогда и только тогда, когда  $v_{i,l} \notin \tilde{E}$  или  $v_{k,j} \notin \tilde{E}$

Введем также понятия хроматического, кликового и антикликового чисел:

**Определение.** Хроматическое число графа  $G$  – минимальное число  $k$  такое, что множество вершин графа можно покрасить в  $k$  цветов, причем любое ребро графа соединяет разноцветные вершины. Обозначение  $\chi(G)$ .

**Определение.** Кликовое число графа  $G$  – максимальное число  $k$  такое, что в нашем графе содержится полный граф на  $k$  вершинах ( $k$ -клика). Обозначение  $w(G)$ .

**Определение.** Антикликовое число графа  $G$  – максимальное число  $k$  такое, что в графе дополнения содержится полный граф на  $k$  вершинах ( $k$ -антиклика). Обозначение  $\alpha(G)$ .

Используя конструкцию графа четырехсторонников, мы можем сформулировать следующую теорему:

**Теорема 4.3.** Для любого двудольного графа  $G = (L, R, E)$  верно:

- 1)  $fool(G) = w(\tilde{G})$
- 2)  $\max_{K_{r,s} \subseteq G} \{r \cdot s\} = \alpha(\tilde{G})$
- 3)  $bcc(G) = \chi(\tilde{G})$

**Доказательство.** Так как каждому трудному множеству размера  $k$  в  $G$  соответствует  $k$ -клика в  $\tilde{G}$  и наоборот, то  $\text{fool}(G) = w(\tilde{G})$ .

Очевидно, что биклике  $K_{r,s}$  в  $G$ , соответствует антиклика размера  $r \cdot s$  в  $\tilde{G}$ . Обратно, если  $(v_{i,j}, v_{k,l}) \notin \tilde{E}$ , то вершины  $v_{i,l}$  и  $v_{k,j}$  определены, и между ними нет ребра. И следовательно, если рассмотреть какую-нибудь антиклику в  $\tilde{G}$ , то ее можно расширить до "прямоугольной" антиклики, которой будет соответствовать биклика в  $G$ .

Последняя часть теоремы сразу следует из того, что все вершины антиклики мы можем красить в один цвет. Имея произвольное покрытие  $\text{bcc}(G)$ , мы получаем покрытие вершин графа  $\tilde{G}$  антикליками. Пусть каждой биклике из  $\text{bcc}(G)$  сопоставлен свой цвет. Красим вершину в тот цвет, который соответствует покрывающей ее биклике (если таких биклик несколько, то в любой из них). В итоге получаем правильную раскраску графа в  $\text{bcc}(G)$  цветов. Обратно, правильная покраска графа  $\tilde{G}$  порождает покрытие антикליками, которые мы расширяем до "прямоугольных". А так как эти антиклики соответствуют бикликам в  $G$ , то мы получили покрытие бикликами (возможно пересекающимися) размера  $\chi(\tilde{G})$ . ■

Эта теорема позволяет нам переформулировать известные оценки для хроматического числа нового графа  $\tilde{G}$  в виде оценок для величины трудного множества исходного графа  $G$

$$\chi(\tilde{G}) \geq w(\tilde{G}) \iff \text{bcc}(G) \geq \text{fool}(G)$$

и

$$\chi(\tilde{G}) \geq \left\lceil \max_{U \subseteq \tilde{V}} \frac{|U|}{\alpha(\tilde{G}(U))} \right\rceil \iff \text{bcc}(G) \geq \left\lceil \max_{\mathcal{E} \subseteq E} \frac{|\mathcal{E}|}{\max_{K_{r,s} \subseteq G(\mathcal{E})} |K_{r,s} \cap \mathcal{E}|} \right\rceil$$

где  $G(\mathcal{E})$  наименьший подграф  $G$ , содержащий все ребра  $\mathcal{E}$ .

Если в качестве  $\mathcal{E}$  рассмотреть максимальное паросочетание, тогда

$$\max_{K_{r,s} \subseteq G(\mathcal{E})} |K_{r,s} \cap \mathcal{E}| = \max_{K_{r,r} \subseteq G(\mathcal{E})} |K_{r,r} \cap \mathcal{E}| = \max_{K_{r,r} \subseteq G(\mathcal{E})} \{r\} \leq \max_{K_{r,r} \subseteq G} \{r\} = \text{bcl}(G).$$

В итоге получаем оценку, которую мы уже раньше встречали:

$$bcc(G) \geq \left\lceil \max_{\mathcal{E} \subseteq E} \frac{|\mathcal{E}|}{\max_{K_{r,s} \subseteq G(\mathcal{E})} |K_{r,s} \cap \mathcal{E}|} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{v(G)}{bcl(G)} \right\rceil$$

Если же в качестве  $\mathcal{E}$  взять вообще все ребра, то

$$bcc(G) \geq \left\lceil \max_{\mathcal{E} \subseteq E} \frac{|\mathcal{E}|}{\max_{K_{r,s} \subseteq G(\mathcal{E})} |K_{r,s} \cap \mathcal{E}|} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{|E|}{\max_{K_{r,s} \subseteq G} \{r \cdot s\}} \right\rceil$$

## Случайные графы

В этом разделе мы докажем существование двудольных графов, у которых оценки по методу трудного множества и по методу Куликова-Юкны очень сильно отличаются. Доказывать этот факт мы будем вероятностным методом, причем будем использовать модель Эрдеша-Реньи.

### 5.1 Случайные двудольные графы Эрдеша-Реньи

Пусть у нас имеются два  $n$ -элементных множества  $L$  и  $R$ , элементы которого будем называть вершинами левой и правой долей графа. Понятно, что случайным будет множество ребер графа. Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных рёбер, поэтому потенциальных ребер не больше, чем  $n^2$  штук. Будем соединять любые две вершины  $i \in L$  и  $j \in R$  ребром с некоторой вероятностью  $p \in [0, 1]$  независимо от всех остальных  $n^2 - 1$  пар вершин. Иными словами, ребра появляются в соответствии со стандартной схемой Бернулли, в которой  $n^2$  испытаний и "вероятность успеха"  $p$ . Обозначим через  $E$  случайное множество ребер, которое возникает в результате реализации такой схемы. Положим  $G = (L, R, E)$ . Это и есть случайный двудольный граф в модели Эрдеша – Реньи.

Если записывать приведенное только что определение в формате аксиоматики Колмогорова, то мы имеем вероятностное пространство

$$G(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{F}_n, P_{n,p})$$

в котором

$$\Omega_n = \{G = (L, R, E)\}, \mathcal{F}_n = 2^{\Omega_n}, P_{n,p}(G) = p^{|E|} \cdot (1-p)^{n^2-|E|}$$

Если нам хочется найти вероятность, с которой двудольный граф на  $2n$  вершинах обладает данным свойством  $A$ , то мы просто берем множество  $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_n$ , состоящее из всех графов, для которых выполнено свойство  $A$ , и вычисляем

$$P_{n,p}(\mathcal{A}) = \sum_{G \in \mathcal{A}} P_{n,p}(G)$$

Далее будем рассматривать не фиксированное  $p$ , а некоторую функцию  $p(n)$ , заключенную между нулем и единицей. Скажем, наконец, что свойство выполнено почти всегда, если его вероятность стремится к единице при  $n \rightarrow \infty$ .

## 5.2 Неравенство Хефдинга

Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — последовательность независимых случайных величин таких, что для любого  $i = 1, 2, \dots, n$  верно  $\xi_i \in [a_i, b_i]$  с вероятностью 1 для некоторых  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ . Введем обозначение  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ . Мы хотим изучать отклонение случайной величины  $S_n$  от ее среднего значения  $\mathbb{E}[S_n]$ . Иначе говоря, получить неравенство концентрации для  $\xi = S_n - \mathbb{E}[S_n]$ . Воспользовавшись для этого неравенством Чернова получим, что для любого  $\lambda > 0$  верно

$$\begin{aligned} P\{S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq \varepsilon\} &= P\{e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}[S_n])} \geq e^{\lambda\varepsilon}\} \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda(S_n - \mathbb{E}[S_n])}]}{e^{\lambda\varepsilon}} = \\ &= \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda \sum_{i=1}^n (\xi_i - \mathbb{E}[\xi_i])}]}{e^{\lambda\varepsilon}} = \frac{\mathbb{E}[\prod_{i=1}^n e^{\lambda(\xi_i - \mathbb{E}[\xi_i])}]}{e^{\lambda\varepsilon}} = \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{\lambda(\xi_i - \mathbb{E}[\xi_i])}]}{e^{\lambda\varepsilon}} \end{aligned}$$

Нам остается построить верхние оценки для производящих функций  $\varphi_{\xi_i}(\lambda)$ . Следующий результат дает нам такие оценки в тех случаях, когда случайные величины  $\xi_i$  принимают значения из ограниченных интервалов.

**Лемма 5.1. (Хефдинг)** *Для произвольной случайной величины  $\xi$  та-*

кой, что  $\mathbb{E}[\xi] = 0$  и  $\xi \in [a, b]$  с вероятностью 1 для любого  $\lambda > 0$  справедливо

$$\mathbb{E}[e^{\lambda\xi}] \leq e^{\frac{\lambda^2(b-a)^2}{8}}$$

Доказательство основано на выпуклости экспоненты.

Применив эту лемму к нашей цепочке неравенств для случайных величин  $\xi_i - \mathbb{E}[\xi_i]$ , которые почти наверное лежат в интервалах  $[a_i - \mathbb{E}[\xi_i], b_i - \mathbb{E}[\xi_i]]$ , мы получаем

$$P\{S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq \varepsilon\} \leq \frac{\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[e^{\lambda(\xi_i - \mathbb{E}[\xi_i])}]}{e^{\lambda\varepsilon}} \leq \frac{\prod_{i=1}^n e^{\lambda^2(b_i - a_i)^2/8}}{e^{\lambda\varepsilon}} = \frac{e^{\lambda^2 \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2/8}}{e^{\lambda\varepsilon}}$$

Остается минимизировать правую часть по  $\lambda \geq 0$ . Выбирая

$$\lambda = \frac{4\varepsilon}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}$$

мы получаем следующий результат

**Теорема 5.1. (Неравенство Хефдинга)** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — последовательность независимых случайных величин, таких что для любого  $i = 1, 2, \dots, n$  верно  $\xi_i \in [a_i, b_i]$  с вероятностью 1 для некоторых  $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  верно

$$P\{S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq \varepsilon\} \leq \exp\left(\frac{-2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

Аналогичное неравенство верно для  $P\{\mathbb{E}[S_n] - S_n \geq \varepsilon\}$ , поскольку условия теоремы инвариантны относительно замены знака слагаемых. Применив дважды неравенство Хефдинга, мы получаем

$$\begin{aligned} P\{|S_n - \mathbb{E}[S_n]| \geq \varepsilon\} &\leq P\{S_n - \mathbb{E}[S_n] \geq \varepsilon\} + P\{\mathbb{E}[S_n] - S_n \geq \varepsilon\} \leq \\ &\leq 2 \cdot \exp\left(\frac{-2\varepsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right) \end{aligned}$$



Воспользуемся этим неравенством для того, чтобы изучить отклонение числа ребер в случайном двудольном графе Эрдеша-Реньи. Определим индикаторные случайные величины  $X_{i,j} = I\{e_{i,j} \in E\}$ . Так как случайная величина  $|E| = \sum_{i,j} X_{i,j}$ , то получаем

$$\mathbb{E}[|E|] = \sum_{i,j} \mathbb{E}[X_{i,j}] = \sum_{i,j} P\{e_{i,j} \in E\} = n^2 \cdot p$$

Наконец, воспользуемся неравенством Хефдинга для  $\varepsilon = n^{1+\delta}$

$$P\{||E| - \mathbb{E}[|E|]| \geq n^{1+\delta}\} \leq 2 \cdot e^{-\frac{2n^{2+2\delta}}{n^2}} = 2 \cdot e^{-2n^{2\delta}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

В итоге мы получили, что почти наверное число ребер в графе не сильно отличается от его матожидания:

$$n^2 \cdot p - n^{1+\delta} \leq |E| \leq n^2 \cdot p + n^{1+\delta}$$

.

### 5.3 Размер максимального паросочетания

Для изучения отклонения величины максимального паросочетания нам потребуется теорема Холла.

**Теорема 5.2. (Холл)** Пусть имеется неориентированный двудольный граф  $G = (L, R, E)$ . Для произвольного  $A \subseteq L$  определим множество соседей

$$N(A) = \{y \in R \mid (x, y) \in E, x \in A\}$$

В двудольном графе существует совершенное паросочетание тогда и только тогда, когда для любого  $A \subseteq L$  выполнено  $|A| \leq |N(A)|$ .

Пусть имеется двудольный граф Эрдеша-Реньи  $G = (L, R, E)$ , где  $|L| = |R| = n$ . Множество  $S \subseteq L$  не удовлетворяет условию теоремы Холла, если существует множество  $T \subseteq R$  такое, что  $|S| + |T| = n + 1$  и  $N(S) \cap T = \emptyset$  (нет ребер между множествами  $S$  и  $T$ ).

Очевидно, что

$$P\{N(S) \cap T = \emptyset\} = (1 - p)^{|S| \cdot |T|}$$

тогда

$$\begin{aligned} P\{\text{нет совершенного паросочетания}\} &\leq \sum_S \sum_T (1 - p)^{|S| \cdot |T|} = \\ &= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k+1} (1 - p)^{k(n-k+1)} \leq \sum_{k=1}^{(n+1)/2} \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} (1 - p)^{kn/2} \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{(n+1)/2} n^{2k} (1 - p)^{kn/2} \end{aligned}$$

Если предположить, что  $p = p(n) = n^{-\alpha}$  при  $\alpha < 1$ , то получаем

$$\begin{aligned} P\{\text{нет совершенного паросочетания}\} &\leq \sum_{k=1}^{(n+1)/2} n^{2k} (1 - p)^{kn/2} = \\ &= \sum_{k=1}^{(n+1)/2} n^{2k} e^{-\frac{kn}{2} \cdot n^{-\alpha} + O(n^{1-2\alpha}) \cdot k} = \sum_{k=1}^{(n+1)/2} \left( n^2 e^{-\frac{1}{2} n^{1-\alpha} + O(n^{1-2\alpha})} \right)^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Последнее утверждение верно потому, что с некоторого момента величина стоящая под степенью будет меньше 1, а значит первое слагаемое будет больше всех остальных

$$\sum_{k=1}^{(n+1)/2} \left( n^2 e^{-\frac{1}{2} n^{1-\alpha} + O(n^{1-2\alpha})} \right)^k \leq \frac{n+1}{2} \left( n^2 e^{-\frac{1}{2} n^{1-\alpha} + O(n^{1-2\alpha})} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

В итоге мы получили, что почти наверное (при  $n \rightarrow \infty$ ) в нашем графе будет совершенное паросочетание.

## 5.4 Трудное множество и оценка Куликова-Юкны на случайных графах

Если предположить, что  $p = p(n) = n^{-\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1$ ), то можно доказать следующее утверждение:

**Утверждение 5.1.** *Для произвольного  $\delta$  такого, что  $0 < \delta < 1 - \alpha$  верно:*

$$n^\alpha - O(n^{2\alpha+\delta-1}) \leq \frac{v(G)^2}{|E|} \leq n^\alpha + O(n^{2\alpha+\delta-1})$$

**Доказательство.** Рассмотрим вероятность

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{n^2}{n^{2-\alpha} + n^{1+\delta}} \leq \frac{v(G)^2}{|E|} \leq \frac{n^2}{n^{2-\alpha} - n^{1+\delta}} \right\} &\geq \\ &\geq 1 - P \{v(G) \neq n\} - P \{|E| - n^{2-\alpha}| \geq n^{1+\delta}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \end{aligned}$$

В параграфах 4.4 и 4.5 мы доказали, что соответствующие вероятности стремятся к 0 при  $n \rightarrow \infty$ , поэтому итоговая вероятность стремится к 1. Поделив числители и знаменатели на  $n^{2-\alpha}$ , получаем

$$\frac{n^\alpha}{1 + n^{\alpha+\delta-1}} \leq \frac{v(G)^2}{|E|} \leq \frac{n^\alpha}{1 - n^{\alpha+\delta-1}}$$

а так как  $\alpha + \delta < 1$ , то можно применить разложение в ряд Тейлора

$$n^\alpha (1 - O(n^{\alpha+\delta-1})) \leq \frac{v(G)^2}{|E|} \leq n^\alpha (1 + O(n^{\alpha+\delta-1})) \quad \square$$

Теперь посчитаем вероятность того, что в случайном графе найдется трудное множество размера  $k$ . Обозначим  $f_k(G)$  - число различных трудных множеств размера  $k$  в графе  $G$ . Нас интересует вероятность  $P\{f_k(G) > 0\}$ , которая превосходит вероятность того, что фиксированные  $k$  пар вершин образуют трудное множество. Иначе говоря

$$P\{f_k(G) > 0\} \geq p^k (1 - p^2)^{\binom{k}{2}}$$

Предположим теперь, что  $p = p(n) = n^{-\alpha}$  ( $0 < \alpha < 1$ ) и величина

$k = k(n) = n^\beta$  ( $0 < \beta < 2$ ), тогда

$$P\{f_k(G) > 0\} \geq n^{-\alpha k} e^{\binom{k}{2} \cdot (-n^{-2\alpha} + O(n^{-4\alpha}))} = n^{-\alpha n^\beta} e^{-\frac{1}{2}n^{2\beta-2\alpha} + \frac{1}{2}n^{\beta-2\alpha} + O(n^{2\beta-4\alpha})}$$

К тому же, если  $0 < \delta < 1 - \alpha$  и мы докажем, что при  $n \rightarrow \infty$

$$P\{f_k(G) > 0\} > P\{v(G) \neq n\} + P\{|E| - n^{2-\alpha} \geq n^{1+\delta}\}$$

то получим, что существует граф, у которого имеется трудное множество размера  $n^\beta$  и оценка Куликова-Юкны не превосходит  $n^\alpha + O(n^{2\alpha+\delta-1})$ . Чтобы это было верно, достаточно показать, что

$$n^{-\alpha n^\beta} e^{-\frac{1}{2}n^{2\beta-2\alpha} + \frac{1}{2}n^{\beta-2\alpha} + O(n^{2\beta-4\alpha})} > 2 \cdot e^{-2n^{2\delta}} + \sum_{i=1}^{(n+1)/2} \left( n^2 e^{-\frac{1}{2}n^{1-\alpha} + O(n^{1-2\alpha})} \right)^i$$

Сравним левую часть с каждым слагаемым из правой части по отдельности:

1) Если  $2\delta > \beta > \alpha$  и  $2\delta > 2\beta - 2\alpha$ , то

$$-\alpha \cdot \ln n \cdot n^\beta - \frac{1}{2} \cdot n^{2\beta-2\alpha} \gg -2 \ln 2 \cdot n^{2\delta}$$

2) Поделим левую часть на  $n$  и сравним с первым членом суммы, заранее прологарифмировав. При  $1 - \alpha > \beta > \alpha$  и  $1 + \alpha > 2\beta$  верно

$$-\alpha \cdot \ln n \cdot n^\beta - 1 - \frac{1}{2} \cdot n^{2\beta-2\alpha} \gg 2 \ln n - \frac{1}{2} n^{1-\alpha}$$

что верно, так как

$$n^{1-\alpha} \gg \ln n, \quad n^{1-\alpha} \gg \ln n \cdot n^\beta, \quad n^{1-\alpha} \gg n^{2\beta-2\alpha}$$

**Пример.** Если взять  $\alpha = 0.05$ ,  $\beta = 0.5$  и  $\delta = 0.5$ , тогда все требуемые неравенства выполняются. А значит существует двудольный граф, на котором метод трудного множества дает оценку хотя бы  $n^{0.5}$ , а оценка Куликова-Юкны не превосходит  $n^{0.05} + O(n^{-0.4})$ .

Ограничение, которое накладываются только на  $\alpha$  и  $\beta$  имеет вид

$\min \left\{ \frac{1+\alpha}{2}, 1-\alpha \right\} > \beta > \alpha$ , а значит  $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$ . Далее рассмотрим два случая:

1) Пусть  $0 \leq \alpha < \frac{1}{3}$ , тогда  $\frac{1+\alpha}{2} < 1-\alpha$ . А значит можно доказать следующую теорему:

**Теорема 5.3.** Для произвольных  $\alpha \in [0, \frac{1}{3})$  и  $\beta \in (\alpha, \frac{1+\alpha}{2})$  существует двудольный граф  $G = (L, R, E)$  ( $|L| = |R| = n$ ), на котором метод трудного множества дает оценку хотя бы  $n^\beta$ , а оценка Куликова-Юкны не превосходит  $n^\alpha + o(1)$ .

**Доказательство.** Пусть  $\delta = \frac{1-\alpha}{2}$ , тогда все неравенства, в которых участвует  $\delta$ , выполняются:

- $\delta + \alpha = \frac{1-\alpha}{2} + \alpha = \frac{1+\alpha}{2} < 1$
- $2\delta = 1-\alpha > \frac{1+\alpha}{2} > \beta > \alpha$
- $\delta = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2} - \alpha > \beta - \alpha$

а значит существует граф, у которого метод трудного множества дает оценку  $n^\beta$ , а оценка по методу Куликова-Юкны не превосходит  $n^\alpha + O(n^{2\alpha+\delta-1}) = n^\alpha + O(n^{2\alpha+\frac{1-\alpha}{2}-1}) = n^\alpha + O(n^{\frac{3\alpha-1}{2}}) = n^\alpha + o(1)$ . ■

2) Пусть  $\frac{1}{3} \leq \alpha < \frac{1}{2}$ , тогда  $\frac{1+\alpha}{2} \geq 1-\alpha$ . А значит можно доказать следующую теорему:

**Теорема 5.4.** Для произвольных  $\alpha \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  и  $\beta \in (\alpha, 1-\alpha)$  существует двудольный граф  $G = (L, R, E)$  ( $|L| = |R| = n$ ), на котором метод трудного множества дает оценку хотя бы  $n^\beta$ , а оценка Куликова-Юкны не превосходит  $n^\alpha + o(n^{\frac{\alpha}{2}})$ .

**Доказательство.** Пусть  $\delta = \frac{1-\alpha}{2}$ , тогда все неравенства, в которых участвует  $\delta$ , выполняются:

- $\delta + \alpha = \frac{1-\alpha}{2} + \alpha = \frac{1+\alpha}{2} < 1$
- $2\delta = 1-\alpha > \beta > \alpha$
- $\delta = \frac{1-\alpha}{2} = \frac{1+\alpha}{2} - \alpha > (1-\alpha) - \alpha > \beta - \alpha$

а значит существует граф, у которого метод трудного множества дает оценку  $n^\beta$ , а оценка по методу Куликова-Юкны не превосходит  $n^\alpha + O(n^{2\alpha+\delta-1}) = n^\alpha + O(n^{2\alpha+\frac{1-\alpha}{2}-1}) = n^\alpha + o(n^{\frac{\alpha}{2}})$ . ■

К сожалению, мы смогли показать лишь существование такого графа, но не смогли доказать, что это верно для почти всех графов. Чтобы преодолеть эту трудность, нужно исследовать отклонение числа трудных множеств размера  $k$ .

## 5.5 Количество трудных множеств размера $k$

Вспомним, что  $f_k(G)$  – число трудных множеств размера  $k$  в графе  $G$ . Давайте оценим матожидание этой случайной величины

$$\mathbb{E}[f_k(G)] = \binom{n}{k}^2 \cdot k! \cdot \mathbb{E}[I_k(G)] = \binom{n}{k}^2 \cdot k! \cdot p^k (1 - p^2)^{\binom{k}{2}}$$

**Лемма 5.2.** Если  $k = o(\sqrt{n})$ , то  $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ , к тому же, если  $k \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $\binom{n}{k} \sim n^k k^{-k-\frac{1}{2}} e^k$ .

**Доказательство.** Применим неравенство  $\ln(1 - x) < -x$

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n^k}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \\ &= \frac{n^k}{k!} e^{\ln(1-\frac{1}{n}) + \ln(1-\frac{2}{n}) + \cdots + \ln(1-\frac{k-1}{n})} < \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \cdots - \frac{k-1}{n}} = \\ &= \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k(k-1)}{2n}} = \frac{n^k}{k!} e^{-O(\frac{k^2}{n})} \end{aligned}$$

Если использовать неравенство  $\ln(1 - x) > -x - \frac{1}{2}x^2$ , то получаем

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &> \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{1}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1^2}{n^2} - \frac{2}{n} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2^2}{n^2} - \cdots - \frac{1}{n} - \frac{k-1}{2} \cdot \frac{(k-1)^2}{n^2}} = \\ &= \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k(k-1)}{2n} - \frac{1}{2n} \sum_{i < k} i^2} > \frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k^2}{2n} - O(\frac{k^3}{n^2})} \end{aligned}$$

В итоге мы получили, что

$$\frac{n^k}{k!} e^{-\frac{k^2}{2n} - O(\frac{k^3}{n^2})} < \binom{n}{k} < \frac{n^k}{k!} e^{-O(\frac{k^2}{n})}$$

При  $k = o(\sqrt{n})$  мы получаем  $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ . Применяя формулу Стирлинга к  $k!$ , получаем второе утверждение леммы.  $\square$

Эта лемма позволяет найти точный порядок величины  $\mathbb{E}[f_k(G)]$  в предположении, что  $p = n^\alpha$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[I_k(G)] &= p^k(1-p^2)^{\binom{k}{2}} = n^{-\alpha k} e^{\binom{k}{2} \cdot \ln(1-\frac{1}{n^{2\alpha}})} = \\ &= n^{-\alpha k} e^{-\binom{k}{2} \cdot \frac{1}{n^{2\alpha}} + \binom{k}{2} \cdot \frac{1}{2n^{4\alpha}} + O\left(\frac{k^2}{n^{6\alpha}}\right)} = n^{-\alpha k} e^{-\frac{k^2}{2n^{2\alpha}} + \frac{k^2}{4n^{4\alpha}} + O\left(\frac{k^2}{n^{6\alpha}}\right)}\end{aligned}$$

Если предположить, что  $k = n^{2\alpha+\varepsilon}$ , то

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f_k(G)] &\sim n^{2n^{2\alpha+\varepsilon} - (2\alpha+\varepsilon)(n^{2\alpha+\varepsilon} + \frac{1}{2})} \cdot e^{n^{2\alpha+\varepsilon}} \cdot n^{-\alpha n^{2\alpha+\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{1}{2}n^{2\alpha+2\varepsilon} + O(n^{2\varepsilon})} = \\ &= n^{n^{2\alpha+\varepsilon}(2-3\alpha-\varepsilon) - \alpha - \frac{\varepsilon}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}n^{2\alpha+2\varepsilon} + O(n^{2\alpha+\varepsilon})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\end{aligned}$$

А если  $k = n^{2\alpha-\varepsilon}$ , то

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f_k(G)] &\sim n^{2n^{2\alpha-\varepsilon} - (2\alpha-\varepsilon)(n^{2\alpha-\varepsilon} + \frac{1}{2})} \cdot e^{n^{2\alpha-\varepsilon}} \cdot n^{-\alpha n^{2\alpha-\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{1}{2}n^{2\alpha-2\varepsilon} + O(n^{-\varepsilon})} = \\ &= n^{n^{2\alpha-\varepsilon}(2-3\alpha+\varepsilon) - \alpha + \frac{\varepsilon}{2}} \cdot e^{n^{2\alpha-\varepsilon} + O(n^{2\alpha-2\varepsilon})} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty\end{aligned}$$

В итоге мы доказали следующую теорему:

**Теорема 5.5.** Пусть  $p = n^{-\alpha}$ , тогда

- $k = n^{2\alpha-\varepsilon}$  и  $2\alpha - \varepsilon < \frac{1}{2} \implies \mathbb{E}[f_k(G)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$
- $k = n^{2\alpha+\varepsilon}$  и  $2\alpha + \varepsilon < \frac{1}{2} \implies \mathbb{E}[f_k(G)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Используя теорему при  $k = n^{2\alpha+\varepsilon}$  и неравенство Маркова мы получаем

$$P\{f_k(G) > 0\} = P\{f_k(G) \geq 1\} \leq \mathbb{E}[f_k(G)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Иначе говоря, размер максимального трудного множества почти наверное меньше  $k = n^{2\alpha+\varepsilon}$ . Обратно, для того чтобы доказать, что мы почти наверное найдем трудное множество размера  $k = n^{2\alpha-\varepsilon}$  рассматривают неравенство Чебышева:

$$P\{f_k(G) = 0\} \leq P\{|f_k(G) - \mathbb{E}[f_k(G)]| \geq \mathbb{E}[f_k(G)]\} \leq \frac{\mathbb{D}[f_k(G)]}{\mathbb{E}[f_k(G)]^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Для того, чтобы доказать сходимость к 0 обычно рассматривают ин-

дикаторные случайные величины:

$$I_k(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \text{ - образует трудное множество;} \\ 0, & \text{если } S \text{ - не образует трудное множество.} \end{cases}$$

где  $S$  – фиксированные  $k$ -пар вершин. Далее используя  $f_k(G) = \sum_S I_k(S)$ , получают

$$\mathbb{D}[f_k(G)] = \mathbb{D}\left[\sum_S I_k(S)\right] = \sum_S \mathbb{D}[I_k(S)] + \sum_{S \neq T} \text{cov}(I_k(S), I_k(T))$$

Далее мы будем писать  $S \sim T$ , если  $I_k(S)$  и  $I_k(T)$  зависимы, то есть  $S \neq T$  и эти два множества имеют хотя бы одной совпадающей вершине из каждой доли.

$$\begin{aligned} \mathbb{D}[f_k(G)] &= \sum_S \mathbb{D}[I_k(S)] + \sum_{S \sim T} \text{cov}(I_k(S), I_k(T)) \leq \\ &\leq \sum_S \mathbb{E}[I_k(S)^2] + \sum_{S \sim T} \mathbb{E}[I_k(S) \cdot I_k(T)] = \\ &= \sum_S \mathbb{E}[I_k(S)] + \sum_{S \sim T} \mathbb{E}[I_k(S) \cdot I_k(T)] = \\ &= \mathbb{E}[f_k(G)] + \sum_{S \sim T} \mathbb{E}[I_k(S) \cdot I_k(T)] \end{aligned}$$

В цепочке равенств мы использовали  $I_k(S) = I_k(S)^2$  и в итоге получили

$$\frac{\mathbb{D}[f_k(G)]}{\mathbb{E}[f_k(G)]^2} \leq \frac{1}{\mathbb{E}[f_k(G)]} + \frac{1}{\mathbb{E}[f_k(G)]^2} \cdot \sum_{S \sim T} \mathbb{E}[I_k(S) \cdot I_k(T)]$$

а так как  $\mathbb{E}[f_k(G)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , то достаточно показать

$$\sum_{S \sim T} \mathbb{E}[I_k(S) \cdot I_k(T)] = o(\mathbb{E}[f_k(G)]^2)$$

На самом деле используя тот факт, что все множества  $S$  симметричны



друг относительно друга, можно показать

$$\begin{aligned}
\sum_{S \sim T} \mathbb{E}[I_k(S) \cdot I_k(T)] &= \sum_{S \sim T} P\{I_k(S) = 1 \wedge I_k(T) = 1\} = \\
&= \sum_{S \sim T} P\{I_k(S) = 1\} \cdot P\{I_k(T) = 1 \mid I_k(S) = 1\} = \\
&= \sum_S \left( P\{I_k(S) = 1\} \sum_{T: T \sim S} P\{I_k(T) = 1 \mid I_k(S) = 1\} \right) = \\
&= \sum_{T: T \sim S_0} P\{I_k(T) = 1 \mid I_k(S_0) = 1\} \sum_S P\{I_k(S) = 1\} = \\
&= \mathbb{E}[f_k(G)] \sum_{T: T \sim S_0} P\{I_k(T) = 1 \mid I_k(S_0) = 1\}
\end{aligned}$$

А значит мы получили

$$\frac{\mathbb{D}[f_k(G)]}{\mathbb{E}[f_k(G)]^2} \leq \frac{1}{\mathbb{E}[f_k(G)]} + \frac{1}{\mathbb{E}[f_k(G)]} \cdot \sum_{T: T \sim S_0} P\{I_k(T) = 1 \mid I_k(S_0) = 1\}$$

а так как  $\mathbb{E}[f_k(G)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , то достаточно показать

$$\sum_{T: T \sim S_0} P\{I_k(T) = 1 \mid I_k(S_0) = 1\} = o(\mathbb{E}[f_k(G)]) \quad (***)$$

К сожалению, для  $f_{ool}(G)$  данное утверждение не столь тривиально, как, например, для кликового числа  $w(G)$ . И если бы мы смогли показать это, то было бы верно

**Утверждение 5.2.** Пусть  $\alpha \leq \frac{1}{4}$  и  $\varepsilon > 0$ , тогда почти наверное метод трудного множества дает оценку хотя бы  $n^{2\alpha-\varepsilon}$ , а оценка Куликова-Юкны не превосходит  $n^\alpha + o(1)$ .

**Доказательство.** Так как  $\alpha \leq \frac{1}{4}$ , то  $k = n^{2\alpha-\varepsilon} = o(\sqrt{n})$ . Следовательно, из теоремы 5.5 и выполнимости условия  $(***)$  мы получаем

$$P\{f_k(G) > 0\} = 1 - P\{f_k(G) = 0\} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Оценка Куликова-Юкны следует из утверждения 5.1 при  $\delta = \frac{1}{2}$ :

$$\frac{v(G)^2}{|E|} \leq n^\alpha + o(1) \quad \square$$

## Обобщение методов оценивания

Существует несколько классических обобщений коммуникационной задачи с двумя игроками. Одним из самых популярных обобщений является модель "number-in-hand": имеется  $m$  игроков, которые хотят вычислить некоторую функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , причем  $i$ -ый игрок знает только аргумент  $x_i$ . В данной модели общение будет происходить по принципу широковещания: каждое пересылаемое сообщение видно всем игрокам.

В этом разделе мы формализуем модель "number-in-hand", определим коммуникационную сложность, а также обобщим метод трудного множества и метод энтропийных неравенств.

### 6.1 $m$ -Мерная коммуникационная сложность

Опишем модель более формально. Пусть имеются конечные множества  $X_1, X_2, \dots, X_m, Z$  и задана некоторая функция от  $m$  переменных  $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \rightarrow Z$ .

**Определение.**  $m$ -Мерным коммуникационным протоколом для вычисления некоторой функции  $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \rightarrow Z$  называется ориентированное двоичное дерево со следующей разметкой на вершинах и ребрах:

- каждая нелистовая вершина помечена индексом игрока  $i$ ;
- в  $j$ -ой вершине (в произвольной нумерации) с меткой  $i$  записана функция  $g_{i,j} : X_i \rightarrow \{0, 1\}$
- каждой листовой вершине сопоставлен элемент множества  $Z$ ;
- каждое ребро помечено 0 или 1.

Все игроки договариваются, что будут действовать по некоторому протоколу  $\mathcal{P}$ , после чего они получают по аргументу  $x_i \in X_i$ . Поместим

фишку в корневую вершину нашего протокола  $\mathcal{P}$  и будем перемещать ее вниз по дереву, последовательно удаляясь от корня, пока она не попадет в один из листьев. Перемещение фишки выполняется следующим образом. Если текущая вершина помечена индексом  $i$ , то это означает, что сейчас очередь  $i$ -ого игрока. Он применяет функцию  $g_{i,j}$  текущей вершины к своему значению  $x_i$ , отправляет по каналу связи бит равный  $g_{i,j}(x_i)$  и перемещает фишку по ребру, помеченному как  $g_{i,j}(x_i)$ . Все остальные игроки видят отправленный бит и понимают куда была сдвинута фишка по дереву протокола. Данная процедура заканчивается в тот момент, когда фишка попадает в лист дерева, а записанное там значение  $z \in Z$ , объявляется результатом выполнения протокола.

Мы говорим, что протокол  $\mathcal{P}$  вычисляет  $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \rightarrow Z$ , если для любого набора  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$  при движении из корня по пути, соответствующему заданным  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , мы попадаем в лист, помеченный  $z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ .

**Определение.** *Сложностью  $t$ -мерного коммуникационного протокола называется его глубина. Коммуникационной сложностью функции  $f$  называется минимальная сложность протокола, вычисляющего  $f$ . Как и для случая с двумя игроками мы будем обозначать её  $CC(f)$ .*

## 6.2 Одноцветные комбинаторные параллелепипеды

**Определение.** *Множество  $S \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$  называется комбинаторным параллелепипедом (или просто параллелепипедальным множеством), если существуют такие  $Y_1 \subseteq X_1, Y_2 \subseteq X_2, \dots, Y_m \subseteq X_m$ , что  $S = Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_m$ .*

Пусть  $\mathcal{P}$  – некоторый коммуникационный протокол для вычисления функции  $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \rightarrow Z$  и  $l$  – один из листьев протокола. Определим  $S_l$  как множество  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$  таких, что на входе  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  игроки, следуя протоколу  $\mathcal{P}$ , приходят в  $l$ .

**Утверждение 6.1.** *Для всякого  $t$ -мерного коммуникационного протокола  $\mathcal{P}$  и для всякого листа  $l$  множество  $S_l$  является комбинаторным параллелепипедом.*

**Доказательство.** Докажем, что это верно не только для листьев, но и для произвольной вершины протокола. Будем доказывать при помощи математической индукции по глубине вершины  $v$ . Для корня это очевидно  $S_{root} = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$ . Пусть у нас в дереве протокола имеется переход  $w \rightarrow v$  по биту  $b$  и вершина  $w$  помечена индексом  $i$ . Тогда верно

$$S_v = S_w \cap \{(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m) \mid f_{i,w}(x_i) = b\}$$

По предположению индукции  $S_w = Y_{1,w} \times Y_{2,w} \times \dots \times Y_{m,w}$ , а значит верно

$$S_v = Y_{1,w} \times \dots \times (Y_{i,w} \cap \{x_i \mid f_{i,w}(x_i) = b\}) \times \dots \times Y_{m,w}$$

Переход доказан.  $\square$

### 6.3 Метод трудного множества

Данный метод тесно связан с одноцветными параллелепипедальными множествами.

**Определение.** Для функции  $f : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \rightarrow Z$  и элемента  $z \in Z$  будем называть множество  $S_z \subset X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$  трудным (в англоязычной литературе *fooling set*), если верно:

- для всякого  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S_z$  имеем  $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = z$ ;
- для любых двух несовпадающих векторов  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in S_z$  и  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m) \in S_z$  существует вектор  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  такой, что  $f(y_1, y_2, \dots, y_m) \neq z$  и для любого  $i$  верно  $y_i \in \{x_i, x'_i\}$ .

По аналогии с коммуникационным протоколом для двух игроков можно определить гиперграф  $G_z = (X_1 \sqcup \dots \sqcup X_m, E_z)$ , ребрами которого являются вектора  $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m$  такие, что  $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = z$ . Из определения комбинаторного параллелепипеда видно, что в гиперграфовой интерпретации он является полным  $m$ -мерным гиперграфом. Понятия  $m$ -мерных  $bcr(G)$  и  $bcc(G)$  определяются естественным образом, а трудное множество есть не что иное, как

множество ребер гиперграфа такое, что любые два ребра не могут лежать в одном полном  $m$ -дольном гиперграфе.

**Теорема 6.1.** *Для произвольного неориентированного  $m$ -дольного гиперграфа  $G = (X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_m, E)$ , если подмножество ребер  $S \subseteq E$  является трудным, то  $bcc(G) \geq |S|$ .*

## 6.4 Метод энтропийных неравенств

Далее везде мы будем случайные величины обозначать заглавными буквами, а их значение строчными. Для упрощения формул мы будем использовать следующие обозначения маргинальных распределений (как обычных, так и условных):

$$p(a, b) = P\{A = a, B = b\}, \quad p(a|b) = P\{A = a|B = b\}$$

Для начала докажем следующую лемму:

**Лемма 6.1.** *Для произвольных случайных величин  $X_1, X_2, \dots, X_m$  и  $F, G$  выполняется неравенство:*

$$H(F|X_1, G) + H(F|X_2, G) + \dots + H(F|X_m, G) \leq (m-1)H(F|G) + \Delta$$

где

$$\Delta = \log_2 \left( \sum_{\substack{(f, x_1, \dots, x_m, g) \\ \forall i: p(f, x_i, g) > 0}} \frac{p(x_1, g) \cdot \dots \cdot p(x_m, g)}{p(g)^{m-1}} \right)$$

**Доказательство.** Рассмотрим распределение

$$p'(f, x_1, \dots, x_m, g) = \begin{cases} \frac{p(f, x_1, g) \cdot \dots \cdot p(f, x_m, g)}{p(f, g)^{m-1}} & \text{если } p(f, g) > 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Если  $p(f, g) = 0$ , то  $p(f, x_i, g) = p'(f, x_i, g) = 0$ . А если  $p(f, g) \neq 0$ , то

$$p'(f, x_i, g) = \sum_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)} \frac{p(f, x_1, g) \cdot \dots \cdot p(f, x_m, g)}{p(f, g)^{m-1}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sum_{x_1} \frac{p(f, x_1, g)}{p(f, g)} \right) \cdot \dots \cdot \left( \sum_{x_{i-1}} \frac{p(f, x_{i-1}, g)}{p(f, g)} \right) \cdot p(f, x_i, g) \cdot \\
&\cdot \left( \sum_{x_{i+1}} \frac{p(f, x_{i+1}, g)}{p(f, g)} \right) \cdot \dots \cdot \left( \sum_{x_m} \frac{p(f, x_m, g)}{p(f, g)} \right) = p(f, x_i, g)
\end{aligned}$$

В итоге мы получили, что для любого натурального  $i \in \{1, \dots, m\}$  выполняется  $p'(f, x_i, g) = p(f, x_i, g)$ , а значит и  $p'(f, g) = p(f, g)$ . Но тогда сумма

$$\begin{aligned}
&H(F|X_1, G) + H(F|X_1, G) + \dots + H(F|X_m, G) - (m-1)H(F|G) = \\
&= \sum_{(f, x_1, \dots, x_m, g)} p(f, x_1, \dots, x_m, g) \cdot \log_2 \left( \frac{p(f|g)^{m-1}}{p(f|x_1, g) \cdot \dots \cdot p(f|x_m, g)} \right) = \\
&= (m-1) \cdot \sum_{(f, g)} p(f, g) \log_2 \frac{p(f, g)}{p(g)} + \sum_{i=1}^m \sum_{(f, x_i, g)} p(f, x_i, g) \log_2 \frac{p(f, x_i, g)}{p(f, g)} = \\
&= (m-1) \cdot \sum_{(f, g)} p'(f, g) \log_2 \frac{p(f, g)}{p(g)} + \sum_{i=1}^m \sum_{(f, x_i, g)} p'(f, x_i, g) \log_2 \frac{p(f, x_i, g)}{p(f, g)} = \\
&= \sum_{(f, x_1, \dots, x_m, g)} p'(f, x_1, \dots, x_m, g) \cdot \log_2 \left( \frac{p(f|g)^{m-1}}{p(f|x_1, g) \cdot \dots \cdot p(f|x_m, g)} \right) \leq
\end{aligned}$$

Далее мы применяем неравенство Йенсена:

$$\alpha_1 \log_2 \beta_1 + \dots + \alpha_k \log_2 \beta_k \leq \log_2(\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_k \beta_k)$$

и получаем

$$\begin{aligned}
&\leq \log_2 \left( \sum_{\substack{(f, x_1, \dots, x_m, g) \\ p'(f, x_1, \dots, x_m, g) > 0}} \frac{p(x_1, g) \cdot \dots \cdot p(x_m, g)}{p(g)^{m-1}} \right) = \\
&= \log_2 \left( \sum_{\substack{(f, x_1, \dots, x_m, g) \\ \forall i: p(f, x_i, g) > 0}} \frac{p(x_1, g) \cdot \dots \cdot p(x_m, g)}{p(g)^{m-1}} \right)
\end{aligned}$$

Лемма доказана.  $\square$

**Определение.** Будем говорить, что случайные величины  $X_1, \dots, X_m$  и  $F$  удовлетворяют условию регулярности  $(R)$ , если для любого набора  $(f, f', x_1, \dots, x_m)$  верно:

$$\begin{cases} p(f, x_1) > 0, \dots, p(f, x_m) > 0 \\ p(f', x_1) > 0, \dots, p(f', x_m) > 0 \end{cases} \implies f = f'$$

**Утверждение 6.2.** Если  $F$  – детерминированная функция от  $X_1, \dots, X_m$  (н.н.) и  $X_1, X_2, \dots, X_m$  независимы в совокупности относительно  $F$ , тогда выполняется условию регулярности  $(R)$ .

**Доказательство.** Пусть условие регулярности  $(R)$  не выполняется, значит существуют  $f, f', x_1, \dots, x_m$  такие, что

$$\begin{cases} p(f, x_1) > 0, \dots, p(f, x_m) > 0 \\ p(f', x_1) > 0, \dots, p(f', x_m) > 0 \end{cases} \text{ и } f \neq f'$$

Так как  $p(f, x_1) > 0$  и  $p(f', x_1) > 0$ , то  $p(f) > 0$  и  $p(f') > 0$ . Но тогда используя независимость случайных величин, мы получаем

$$\begin{aligned} p(x_1, \dots, x_m | f) &= p(x_1 | f) \cdot \dots \cdot p(x_m | f) \implies \\ \implies p(f)^{m-1} \cdot p(f, x_1, \dots, x_m) &= p(f, x_1) \cdot \dots \cdot p(f, x_m) > 0 \end{aligned}$$

То есть получаем, что  $p(f, x_1, \dots, x_m) > 0$ . Аналогично доказываем, что  $p(f', x_1, \dots, x_m) > 0$ . В итоге приходим к противоречию с тем, что  $F$  – детерминированная функция от  $X_1, \dots, X_m$  (н.н.).  $\square$

Посмотрим какие значения может принимать  $\Delta$ , если выполняется условие регулярности  $(R)$ . В  $\Delta$  суммирование ведется по таким наборам  $(f, x_1, \dots, x_m, g)$ , что  $\forall i : p(f, x_i, g) > 0$ , а значит и  $\forall i : p(f, x_i) > 0$ . В данном случае условие регулярности говорит нам о том, что не существует двух различных наборов  $(f, x_1, \dots, x_m, g)$  и  $(f', x_1, \dots, x_m, g)$ ,

дающих ненулевой вклад в суммирование, а значит

$$\begin{aligned}
\Delta &= \log_2 \left( \sum_{\substack{(f, x_1, \dots, x_m, g) \\ \forall i: p(f, x_i, g) > 0}} \frac{p(x_1, g) \cdot \dots \cdot p(x_m, g)}{p(g)^{m-1}} \right) = \\
&= \log_2 \left( \sum_{\substack{(x_1, \dots, x_m, g) \\ \forall i: p(x_i, g) > 0}} \frac{p(x_1, g) \cdot \dots \cdot p(x_m, g)}{p(g)^{m-1}} \right) = \\
&= \log_2 \left( \sum_{g: p(g) > 0} p(g) \cdot \left( \sum_{x_1: p(x_1, g) > 0} \frac{p(x_1, g)}{p(g)} \right) \cdot \dots \cdot \left( \sum_{x_m: p(x_m, g) > 0} \frac{p(x_m, g)}{p(g)} \right) \right) = \\
&= \log_2 \left( \sum_{g: p(g) > 0} p(g) \right) = \log_2 1 = 0
\end{aligned}$$

А значит мы доказали следующую теорему:

**Теорема 6.2.** *Если случайные величины  $X_1, X_2, \dots, X_m$  и  $F$  удовлетворяют условию регулярности  $(R)$ , тогда*

$$H(F|X_1, G) + H(F|X_2, G) + \dots + H(F|X_m, G) \leq (m-1) \cdot H(F|G)$$

а если  $G = g$  почти наверное, тогда

$$H(F|X_1) + H(F|X_2) + \dots + H(F|X_m) \leq (m-1) \cdot H(F)$$

Последнее неравенство позволяет нам получить нижнюю оценку  $m$ -мерной величины  $bcc(G)$ .

**Теорема 6.3.** *Пусть ребра гиперграфа  $G = (X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_m, E)$  раскрашены следующим образом:*

*(\*\*) для произвольного полного  $m$ -дольного гиперграфа  $C \subseteq G$  и для произвольного набора ребер  $(x_{1,1}, \dots, x_{1,m}) (x_{2,1}, \dots, x_{2,m}) \dots (x_{m,1}, \dots, x_{m,m})$  из  $C$ , покрашенных в цвет  $a$ , цвет ребра  $(x_{1,1}, x_{2,2}, \dots, x_{m,m})$  тоже  $a$ .*

*Пусть также на ребрах этого графа задано произвольное вероятностное распределение. Определим случайные величины  $(X_1, \dots, X_m, A)$  сле-*



дующим образом:

- $X_i = [i\text{-ая вершина ребра}]$ ,
- $A = [\text{цвет ребра}]$ .

Тогда выполняется неравенство:

$$bcs(G) \geq 2^{\frac{1}{m}(H(A|X_1)+\dots+H(A|X_m)-(m-1)\cdot H(A))}$$

**Доказательство.** Пусть все ребра нашего гиперграфа  $G$  покрываются параллелепипедальными множествами  $C_1, C_2, \dots, C_t$ . Расширим наше распределение  $(X_1, \dots, X_m, A)$  добавив еще одну случайную величину: мы определяем  $T$  как индекс параллелепипедального множества  $C_i$ , покрывающего ребро  $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  (если это ребро покрывается несколькими параллелепипедальными множествами, то мы выбираем любое из них равновероятно). А так как  $T$  принимает значения из множества  $\{1, 2, \dots, t\}$ , то  $H(T) \leq \log_2 t$ .

Рассмотрим распределение  $(X_1, X_2, \dots, X_m, A \mid T = i)$ . Очевидно, что  $A$  детерминированная функция от  $X_1, X_2, \dots, X_m$  (цвет ребра однозначно определяется ребром). И если

$$p(a, x_1 \mid T = i) > 0, \dots, p(a, x_m \mid T = i) > 0$$

то в множестве  $C_i$  найдутся ребра  $(x_1, x_{1,2}, \dots, x_{1,m})$   $(x_{2,1}, x_2, \dots, x_{2,m})$   $\dots$   $(x_{m,1}, \dots, x_{m,m-1}, x_m)$  цвета  $a$ . Но тогда из  $(**)$  ребро  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  тоже цвета  $a$ . Отсюда мы делаем вывод, что значение  $a$  уникально, следовательно, выполняется условие регулярности  $(R)$ . Из теоремы 6.2 мы получаем

$$H(A|X_1, T = i) + \dots + H(A|X_m, T = i) \leq (m - 1) \cdot H(A|T = i)$$

Теперь если рассмотреть матожидание правой и левой части по распределению величины  $T$ , то мы получим

$$H(A|X_1, T) + \dots + H(A|X_m, T) \leq (m - 1) \cdot H(A|T)$$

А так как  $H(A|T) \leq H(A)$  и

$$H(A|X_i, T) = H(A, T|X_i) - H(T) \geq H(A|X_i) - H(T)$$

то

$$H(T) \geq \frac{1}{m}(H(A|X_1) + \dots + H(A|X_m) - (m-1) \cdot H(A))$$

В итоге мы получили

$$t \geq 2^{H(T)} \geq 2^{\frac{1}{m}(H(A|X_1) + \dots + H(A|X_m) - (m-1) \cdot H(A))} \blacksquare$$

## 6.5 Предикат DISJOINT( $m, k, n$ )

Пусть имеется  $m$  участников и каждому выдается по  $k$ -элементному подмножеству множества  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Участники хотят выяснить пересекаются ли у кого-нибудь из них эти множества. Если  $n < mk$ , то ответ на задачу всегда положителен, поэтому нас будет интересовать только случай  $n \geq mk$ .

В данном случае вершинами каждой доли гиперграфа  $G$  будут являться все возможные  $k$ -элементные подмножества. Так как ответ на предикат либо положительный, либо отрицательный, то все ребра красятся в два цвета 0 и 1. Мы рассмотрим только граф  $G_1$ , ребра которого покрашены в цвет 1.

Посмотрим какие оценки мы можем получить, используя методы трудного множества и энтропийных неравенств:

1) Метод трудного множества: так как  $n \geq mk$ , то можно рассмотреть множество  $\{1, 2, \dots, mk\}$ . Используя его, мы можем построить всего  $\frac{(mk)!}{(k!)^m}$  различных ребер графа  $G_1$ .

Теперь докажем, что эти ребра образуют трудное множество. Пусть это не так, а значит существуют два разбиения множества  $\{1, 2, \dots, mk\}$  на  $k$ -элементные подмножества, которые лежат в одном комбинаторном параллелепипеде графа  $G_1$ . Обозначим эти разбиения  $\{U_1, U_2, \dots, U_m\}$  и  $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ . Из-за того, что эти разбиения различны, то  $U_i \neq V_i$  для некоторого  $i$ . Так как эти два разбиения лежат в одном комбинаторном параллелепипеде, то и ребро  $\{U_1, \dots, U_{i-1}, V_i, U_{i+1}, \dots, U_m\}$  ему

принадлежит. Следовательно, должно выполняться

$$V_i \cap (U_1 \sqcup \dots \sqcup U_{i-1} \sqcup U_{i+1} \sqcup \dots \sqcup U_m) = \emptyset$$

Но такого не может быть, так как  $U_i \neq V_i$ . Противоречие.

В итоге мы доказали, что в графе  $G_1$  можно найти трудное множество размера  $\frac{(mk)!}{(k!)^m}$ , следовательно, получили оценку

$$\log_2(bcc(G_1)) \geq \log_2(mk)! - m \log_2 k!$$

2) Метод энтропийных неравенств: пусть на ребрах графа  $G_1$  задано равномерное распределение. Зададим раскраску ребер:  $\{U_1, U_2, \dots, U_m\}$  красим в цвет, соответствующий множеству  $U_1 \sqcup U_2 \sqcup \dots \sqcup U_m$ . По аналогии с рассуждением про трудное множество легко показать, что в нашей раскраске все одноцветные ребра лежат в разных параллелепипедальных множествах. Иначе говоря, для нашей раскраски свойство  $(**)$  тривиально.

Так как на ребрах задано равномерное распределение, то  $H(A) = \log_2 \binom{n}{mk}$  и  $H(A|X_i) = \log_2 \binom{n-k}{mk-k}$ . В итоге получаем оценку

$$\begin{aligned} \log_2(bcc(G_1)) &\geq \log_2 \binom{n-k}{mk-k} - \frac{m-1}{m} \log_2 \binom{n}{mk} = \frac{1}{m} \log_2 \frac{\binom{n-k}{mk-k}^m}{\binom{n}{mk}^{m-1}} = \\ &= \frac{1}{m} \log_2 \left( \frac{((n-k)!)^m}{(n!)^{m-1} (n-mk)!} \right) + \frac{1}{m} \log_2 \left( \frac{((mk)!)^{m-1}}{((mk-k)!)^m} \right) \end{aligned}$$

Если  $n \gg mk$ , то первое слагаемое близко к 0, следовательно

$$\log_2(bcc(G_1)) \gtrsim \frac{m-1}{m} \log_2(mk)! - \log_2((m-1)k)!$$

Сравним эти две оценки: так как  $(lk)! \geq (k!)^l$  для любого натурального  $l$ , то

$$\begin{aligned} \log_2(mk)! - m \log_2 k! &= \frac{m-1}{m} \log_2(mk)! + \frac{1}{m} \log_2(mk)! - m \log_2 k! \geq \\ &\geq \frac{m-1}{m} \log_2(mk)! + \log_2 k! - m \log_2 k! = \frac{m-1}{m} \log_2(mk)! - (m-1) \log_2 k! \geq \end{aligned}$$

$$\geq \frac{m-1}{m} \log_2(mk)! - \log_2((m-1)k)!$$

Предикат  $\text{DISJOINT}(m, k, n)$  демонстрирует, что обобщенные методы трудного множества и энтропийных неравенств применимы, причем в данном случае первый метод работает лучше.

## Список литературы

- [1] Kushilevitz Eyal, Nisan Noam. Communication Complexity. Cambridge University press, 2006.
- [2] Razborov Alexander. Communication Complexity. In: An Invitation to Mathematics: from Competitions to Research. Springer, 2011.
- [3] Gruber H., Holzer M. Finding lower bounds for nondeterministic state complexity is hard. Springer, 2006.
- [4] D. Caen D. A. Gregory, Pullman N. J. The Boolean rank of zero-one matrices. Department of Mathematics, University of the West Indies, 1981.
- [5] Jukna S., Kulikov A. S. On covering graphs by complete bipartite subgraphs. Discrete Math, 2009.
- [6] Kaced Tarik, Romashchenko A. E., Vereshchagin N. K. Conditional Information Inequalities and Combinatorial Applications. CoRR, 2015.
- [7] Оре Ойстин. Теория графов. Наука, 1968.