Неравенства. Системы и совокупности неравенств.

Решите неравенства:

1. $2(x+1) < 2x+3$.

2. $x^2 \leqslant x$.

3. $x^2 - x + 1 < 0$.

4. $4x^2 + 8x + 4 \geqslant 1$.

5. $(x+2015)(x-2016) \leqslant 0$.

6. $-\dfrac{1}{8} \leqslant \dfrac{2x+3}{4} \leqslant -0,25$.

7. $\dfrac{4}{7} \leqslant \dfrac{1-3x}{4} \leqslant 1,15$.

8. $\dfrac{x}{x-3} \leqslant 0$.

9. $\dfrac{2x+3}{x} \leqslant 1$.

10. $\dfrac{3x}{x^2-x+2} \leqslant 0$.

11. $\dfrac{(x-3)^5(x^2-6x+8)}{(x-2)^2(3-x)} \leqslant 0$.

12. $\begin{cases} 2x-1 < 2, \\ 3x+1 > 7. \end{cases}$

13. $\left[\begin{array}{l} 7x+3 > 2, \\ 3 > 2x-4. \end{array}\right.$

14. $\begin{cases} (x+2)(2-x) < (x+4)(3-x), \\ 3(3+x)+2(1-2x) \geqslant 12, \\ (x+2)^2 > 0. \end{cases}$

15. $x \leqslant 3 - \dfrac{1}{x-1}$.

16. $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-1} \geqslant 1$.

17. $\dfrac{2}{x-2} > \dfrac{6}{x} - 1$.

18. $\begin{cases} \dfrac{(3x+1)^2}{2-3x} \leqslant 0, \\ 1 \leqslant \dfrac{5x^2-3x+1}{2+x^2} \leqslant 3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{(2x^2-5x+3)(3-x^3)}{x-21} \leqslant 0, \\ \dfrac{1}{x-8} - \dfrac{1}{x-1} \leqslant 1. \end{cases}$

20. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-12x \leqslant 0, \\ 8 < x^2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 3x^2-4x+1 \geqslant 0, \\ \dfrac{x+2}{x-3} > 0. \end{array}\right. \end{cases}$

21. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+4x-5 \geqslant 0, \\ 6-x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-49 < 0, \\ 2+x \leqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $3(x+1)^2 - 1 \geqslant 3x^2 + 6x + 2$.

2. $x^2 > 4$.

3. $x^2 + x + 1 > 0$.

4. $9x^2 - 6x + 1 < 0$.

5. $(x-2016)(2015-x) > 0$.

6. $-\dfrac{7}{6} \leqslant \dfrac{4x-5}{9} < -0,24$.

7. $\dfrac{4x+3}{2-0,5x} > 0$.

8. $\dfrac{x+2}{x+1} < 2$.

9. $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-1} \leqslant 0$.

10. $\dfrac{x^2-x-6}{3-x} \geqslant 0$.

11. $\dfrac{(x^2-7x-8)(x-8)^3}{(x+1)^2(5-x)} \geqslant 0$.

12. $\begin{cases} 7x+3 > 2, \\ 3 > 2x-4. \end{cases}$

13. $\left[\begin{array}{l} 2x-1 < 2, \\ 3x+1 > 7. \end{array}\right.$

14. $\begin{cases} x(9x+5) > (1-3x)^2, \\ 2(5x-3)+3(7-2x) \leqslant 32, \\ (3x-1)^2 > 0. \end{cases}$

15. $\dfrac{x^2-8x+7}{x^2+9x-10} \leqslant 1$.

16. $\dfrac{7}{(x-2)(x-3)} + \dfrac{9}{x-3} + 1 < 0$.

17. $\begin{cases} \dfrac{x^2+10x+25}{4x-4} \geqslant 0, \\ (x-2)(x^2-6x+9) \leqslant 0, \\ \dfrac{9-x}{8x} \leqslant 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2+9x \leqslant 0, \\ x^2 > 6, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-3x+1 \geqslant 0, \\ \dfrac{x-1}{x+2} > 0. \end{array}\right. \end{cases}$

19. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+5x-6 \geqslant 0, \\ 7+x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-64 < 0, \\ 3-x \geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Дробно - рациональные неравенства.

Решите неравенства:

1. $\dfrac{(x^2+2x-3)(x^2-16)}{(x^2-1)(x^2-9)} \geqslant 0.$

2. $\dfrac{7}{x} > \dfrac{x}{7}.$

3. $\dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{3-x} < 0.$

4. $\dfrac{3x+2}{x^2+x-2} < -1.$

5. $\dfrac{x^2+4x-1}{x^2+4x+3} \leqslant \dfrac{1}{x+1}.$

6. $\dfrac{x^3-8}{x^3-1} \leqslant \dfrac{x-2}{x-1}.$

7. $\dfrac{1}{2x^2-5x} + \dfrac{4}{25-4x^2} \geqslant \dfrac{2}{25+10x}.$

8. $\dfrac{x^2-4x+3}{x-2} - \dfrac{x-3}{x^2-3x+2} \leqslant 0.$

9. $x+7+\dfrac{14x-24}{x^2-4x+3} \geqslant \dfrac{5}{x-1}.$

10. $\dfrac{x^5-x^2}{x^2} \geqslant \dfrac{x^3-1}{4x^2}.$

11. $\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-1} \leqslant \dfrac{x-9}{x-1} + \dfrac{2}{x-3}.$

12. $\dfrac{2-(x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1}-1} \leqslant -0,2.$

13. $(x^2-3x-2)(x^2-3x+1) < 10.$

14. $(x^2+x+1)^2 < 5x^2+5x-1.$

15. $x(x+1)(x+2)(x+3) \leqslant 24.$

Задачи для самостоятельного решения.

1. $(x^2-3x-4)x > 0.$

2. $x^4-13x^2+36 < 0.$

3. $\dfrac{2-3x}{2x+5} \leqslant 0.$

4. $\dfrac{9}{x} > \dfrac{x}{4}.$

5. $\dfrac{(x+1)(x^2+1)}{(2x-1)(x^2+x+1)} \leqslant 0.$

6. $\dfrac{9-x^2}{4x^4-25} \geqslant 0.$

7. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x+2} < 0.$

8. $\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-4x+3} > -3.$

9. $x^3+8x^2+\dfrac{50x^2+x-7}{x-7} \leqslant 1.$

10. $(x^2-x-1)(x^2-x-7) < -5.$

11. $x^2+\dfrac{1}{x^2} \geqslant 1,7\left(x+\dfrac{1}{x}\right).$

12. $\dfrac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-3x} \leqslant x+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x}.$

Неравенства с модулями.

Это должен знать каждый:

- $|A| < B \iff -B < A < B$;
- $|A| > B \iff \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < -B \end{array}\right.$
- $|A| < |B| \iff A^2 < B^2$;

Решите неравенства:

1. $|x-2| > 2$.

2. $|x+1| > -3$.

3. $|x-1| \leqslant -4$.

4. $|x-3| < 2$.

5. $|x^2-1| > 0$.

6. $||x-4|-2| < 1$.

7. $\dfrac{1}{|2-x|} > 1$.

8. $|x+2| - |x| > 0$.

9. $|x^2-2x| \geqslant x$.

10. $|x^2+2x| \leqslant -x$.

11. $|x^2+2x-1| < 2x+3$.

12. $|2x^2-9x+15| \geqslant 20$.

13. $1+x+|x^2-x-3| < 0$.

14. $|x-2x^2| > 2x^2-x$.

15. $|2x-|x-2|| < 3$.

16. $|2x+1-|3x+1|| \leqslant x+2$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. $|x+1| > 5$.

2. $|x^2-2x| \leqslant -1$.

3. $|2x-1| \leqslant 7$.

4. $|x^2-25| \leqslant 0$.

5. $||x-5|-3| \geqslant 2$.

6. $|x^2+5x| < 6$.

7. $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right| \leqslant 4$.

8. $|x^2+6x+8| \leqslant -x^2-6x-8$.

9. $|x^2-3x+2| \geqslant |x-1|$.

10. $||3x+1|+x+1| \geqslant 2$.

Иррациональные неравенства.

$$1)\sqrt{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant f(x) < g^2(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases};$$

$$2)\sqrt{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Решите неравенства:

1. $\sqrt{x-8} > 3.$

2. $\sqrt{2-4x} < 4.$

3. $\sqrt{3x-6} < 3.$

4. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1.$

5. $\sqrt{2-x} < -x.$

6. $\sqrt{x+1} > x-1.$

7. $\sqrt{2x-1} < x.$

8. $\sqrt{x^2+3x+2} > 3-x.$

9. $\sqrt{x+9} > 3-x.$

10. $x-3 \geqslant \sqrt{9-x^2}.$

11. $\sqrt{3+4x} \geqslant \sqrt{6x-9}.$

12. $\sqrt{22+x} - \sqrt{3-x} < 5.$

13. $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} < 3.$

14. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \geqslant 3.$

15. $\sqrt{2-\sqrt{x+3}} < \sqrt{x+4}.$

16. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}} \leqslant x+1.$

17. $(9-x^2)\sqrt{x+4} \geqslant 0.$

18. $(x+10)\sqrt{x-4} \leqslant 0.$

19. $(x-12)\sqrt{x-3} \leqslant 0.$

20. $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geqslant 0.$

Логарифмические преобразования и вычисления.

Основные формулы $(a>0, a\neq 1, b>0, c>0)$**:**

1) $a^{\log_a b}=b$, 2) $\log_a a=1$; 3) $\log_a 1=0$;

4) $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$; 5) $\log_a b-\log_a c=\log_a \dfrac{b}{c}$; 6) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$

7) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}\quad (b\neq 1)$; 8) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}\quad (c\neq 1)$; 9) $b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$.

Вычислите:

1. $\log_2 16$; $\log_2 \dfrac{1}{8}$; $\log_2 1024$; $\log_2 1$.

2. $\log_{\frac{7}{3}} \dfrac{3}{7}$; $\log_{0,2} \dfrac{1}{25}$; $\log_{2,5} 6\dfrac{1}{4}$; $\log_{\frac{1}{7}} 343$.

3. $\lg 1$; $\lg 10000$; $\lg 0,001$ $\lg 100^{100}$.

4. $\log_{16} 32$; $\log_{625} 125$; $\log_7 7\sqrt{7}$; $\log_{4\sqrt{2}} \sqrt[5]{16}$.

5. $8^{\log_8 32}$; $4^{\log_2 7}$; $0,5^{\log_4 \frac{1}{25}}$; $5^{\log_{\frac{1}{5}} 4}$.

6. $\log_{\frac{16}{9}} \log_{81} 27$; $\log^2_{125} 5\sqrt{5}$.

7. $100^{\lg 9}$; $7^{\log_{\sqrt[3]{7}} \lg 1000}$; $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_{27} 7\sqrt{7}}$; $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{\log_{64} 625}$.

8. $3^{2+\log_3 15}$; $4^{3+\log_4 3}$; $5^{3+\log_5 2}$; $9^{\log_3 4+1}$.

9. $\lg(49^{\log_7 0,8}+25^{\log_5 0,6})$; $6^{\log_6 3+1}-3^{\log_3 6+1}$.

10. $\log_{36} 2+\log_{36} 18$; $\lg 8+\lg 125$; $\log_2 3,2+\log_2 5$; $\log_3 20,25+\log_3 4$.

11. $\log_3 54-\log_3 6$; $\log_2 72-\log_2 9$; $\log_{\sqrt{2}} 14-\log_{\sqrt{2}} 7\sqrt{2}$; $\log_7 \log_2 16-\log_7 28$.

12. $\log_5 0,25-2\log_5 \dfrac{2}{3}+\log_5 \dfrac{16}{9}$; $\log_3 8-2\log_3 2+\log_3 \dfrac{9}{2}$.

13. $\dfrac{\log_2 27}{\log_2 9}$; $\dfrac{\log_7 9}{\log_{\sqrt{7}} 9}$; $\dfrac{\log_5 2+\log_5 3}{\log_5 36}$; $\dfrac{\log_5 49}{\log_5 21-\log_{25} 9}$.

14. $\dfrac{\log_8 20}{\log_8 5}+\log_5 0,05$; $\dfrac{\log_2 600}{\log_2 12}+\log_{12} 0,02$.

15. $\log_5 3\cdot\log_3 5$; $\log_5 128\cdot\log_2 125$; $49^{\frac{1}{2\log_9 7}}$; $27^{\frac{1}{\log_2 3}}+9^{\frac{1}{\log_5 3}}$.

16. $\log_2(\log_{\sqrt{2}} 9\cdot\log_{\sqrt{3}} 2)$; $\dfrac{\log_3 37}{\log_{21} 37}-\log_3 7$; $\dfrac{\log_{12} 30}{\log_3 30}+\log_{12} 4$; $\log_3 \sqrt{\log_5 4}+\log_9 \log_{64} 5$.

17. $\dfrac{\log^2_2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log^2_2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}$; $\dfrac{\log_4(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2+\log_2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4}+2^{\frac{1}{\log_8 0,5}}}$.

18. $2^{\frac{\log_2 5}{\log_5 2}}-5^{\log_2 5}$; $3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}}-9\cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}}+4^{1+\log_4 25}$.

Найдите значение выражения:

19. $\log_6(18a)$, если $\log_6 3a=0,3$.

20. $2\lg a+\lg b$, если $\lg(0,001a^2b)=2,5$.

21. $\log^2_{\sqrt[3]{a}} b+\log_{\sqrt[3]{b}} a$, если $\log_b a=3$.

22. $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}+\dfrac{1}{4}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} b\sqrt{a}$, если $\log_a b=14$.

23. $\log_a b$, если $\log^2_{a^2b} ab^2=4$.

24. $\log_{ab} \dfrac{\sqrt{b}}{a}+\log_{\sqrt{ab}} b+\log_a \sqrt[3]{b}$, если $\log_{b\sqrt{a}} \dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{5}$.

25. $(\log_4 6+\log_6 4+2)(\log_4 6-\log_{24} 6)\log_6 4-\log_4 6$.

Показательные неравенства.

1. $8^{5-\frac{x}{3}} > 4.$

2. $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x(2-x)} > 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}.$

3. $\frac{(\sqrt{5})^{x-10}}{4^{x-10}} > \frac{5\sqrt{5}}{64}.$

4. $\frac{0,2^{x+0,5}}{\sqrt{5}} > \frac{0,04^{x}}{25}.$

5. $4^{x} - 4^{x-1} < 3.$

6. $\frac{7^{x} - 35}{7^{x-1} + 1} \leqslant -14.$

7. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$

8. $9 \cdot 3^{2x+2} + 3 \cdot 3^{2x+1} - 9^{x} \leqslant 89.$

9. $3^{1+x} \cdot 2^{1-x} + 3^{x} \cdot 2^{-x} < 10,5.$

10. $3^{x+2} \cdot 2^{1-2x} \leqslant 20.$

11. $3^{2x-1} < 11^{3-x}.$

12. $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 < 0.$

13. $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geqslant 0.$

14. $2 \cdot 3^{2x^2} + 4 \leqslant 3^{x^2+2}.$

15. $0,25^{\sqrt{x}} < 2^{3-\sqrt{x}} + 25^{\log_3^{-1} 5}.$

16. $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} \leqslant \frac{26}{3}.$

17. $4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}+1} < 2^{\sqrt{x}+4} - 32.$

18. $15 \cdot 2^{2-2x} + 19 \cdot 2^{-x} > 2.$

19. $4 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+2} \leqslant 5^{x+3} - 3^{x+3}.$

20. $5 \cdot 9^{x} - 18 \cdot 15^{x} + 9 \cdot 25^{x} > 0.$

21. $16^{x} - 2 \cdot 12^{x} \leqslant 3^{2x+1}.$

22. $4^{x^2-x} - 10 \cdot 2^{x^2} + 2^{2x+4} \geqslant 0.$

23. $3^{x-1} \geqslant \frac{2 - 3^{x}}{3^{x} - 4}.$

24. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{3-x} \leqslant (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\sqrt{x+3}}.$

25. $\big||3^{x} + 4x - 9| - 8\big| \leqslant 3^{x} - 4x - 1.$

Логарифмические неравенства.

Свойства логарифмической функции $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1):$

(1) Область определения функции — множество всех положительных действительных чисел ($x > 0$).

(2) Область значений функции — множество всех действительных чисел.

(3) При $a > 1$ функция возрастает: $0 < x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

(4) При $0 < a < 1$ функция убывает: $0 < x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

1. $\log_{0,7}(2x-3) > \log_{0,7}(6-x)$.

2. $10^{\lg \log_2 x} + \log_2 x \leqslant 4$.

3. $\log_7 x \cdot \log_3 7 < 5$.

4. $\log_5 x \cdot \log_{0,3} 5 < \log_{0,3} 4$.

5. $\log_{1/\sqrt{5}}(x^2 - 0,8x) \geqslant 2$.

6. $\log_4(x-3) + \log_2(x-3) < \dfrac{3}{2}$.

7. $\log_5 x + \log_{25} x < \log_{1/5}\sqrt{125}$.

8. $\log_{\log_3 2}(2x-3) > 0$.

9. $\log_2 \dfrac{3x-2}{x-1} + 3\log_8 \dfrac{(x-1)^3}{3x-2} < 1$.

10. $\log_2^2(5-x) - 6\log_2(5-x) + 9 \leqslant 0$.

11. $\dfrac{1}{\log_2 x - 4} > \dfrac{1}{\log_2 x}$.

12. $\dfrac{4}{\lg 10x} - \dfrac{5}{\lg 100x} \geqslant 0$.

13. $\dfrac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geqslant 2\log_2 x$.

14. $\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x + 2 \leqslant 0$.

15. $\log_{0,5}^2 x - 3 > 2|\log_{0,5} x|$.

16. $\log_9 x^2 + \log_3^2(-x) < 2$.

17. $\log_{x-4}(2x-9) \cdot \log_{2x-9}\pi \leqslant \log_{x-4}(x-3,8) \cdot \log_{x-3,8} 3$.

18. $\log_7 x \cdot \log_3 x - \log_7 3 \cdot \log_3 x \leqslant 12\log_7 3$.

19. $\log_3 x \cdot \log_{0,3} x + \log_3 0,3 \cdot \log_{0,3} x > 6\log_3 0,3$.

20. $\log_{1-x^2}(5x+5) < 1$.

21. $\log_{x^2} 5 > \log_{x^2} 7$.

22. $\dfrac{\log_{27} x}{\log_3(1+2x)} \leqslant \dfrac{\log_3 \sqrt[3]{2x+1}}{\log_3 x}$.

23. $\log_x 3 < 1$.

24. $\log_{0,5}(2^x - 1) > x - 1$.

25. $\log_{9x} 3 \geqslant \log_x^2 3$.

26. $\sqrt{\log_3(9x+27)} \geqslant \log_3(x+3)$.

27. $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2 + \log_{1/2}(x+1)} \geqslant 0$.

28. $x^{\lg x} < 1000x^2$.

29. $x \cdot 2^{\log_x 5} \geqslant 10$.

30. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} \leqslant 162$.

Метод рационализации 1.

Если функция $f(x)$ возрастает, то выражение $f(A)-f(B)$ имеет такой же знак, что и выражение $A-B$. В частности, при $A \geqslant 0$ и $B \geqslant 0$ знаки выражений $A-B$ и A^2-B^2 совпадают, т.е. $sign(|A|-|B|)=sign(A^2-B^2)$, и $sign(\sqrt{A}-\sqrt{B})=sign(A-B)$.

Решите неравенства:

1. $(|x-1|-1)(|x-3|-2)<0.$

2. $\dfrac{|x+3|+3}{|x-2|-2}>0.$

3. $\dfrac{1}{|x+1|-1} \geqslant \dfrac{2}{|x+1|-2}.$

4. $\dfrac{|x-1|-|2x+1|}{|x-2|-|2x+2|} \geqslant 0.$

5. $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|}-|x-2| \leqslant 0.$

6. $\dfrac{|x-4|-2-x^2}{|2+x|-|x-6|}>0.$

7. $\dfrac{|4x-3|-|3x-4|}{|x^2-x-18|-|x^2+x|} \leqslant 0.$

8. $\dfrac{||x^2+x|-3|-3}{||3x+4|-2|-1} \geqslant 0.$

9. $|x^2-5|x|+4| \leqslant |2x^2-3|x|+1|.$

10. $\dfrac{|2x^2-5x|-x^2}{|3x^2-5x|-x^2} \leqslant 0.$

11. $\dfrac{|2x^2-x-3|-x^2-2x-1}{|3x^2+x-2|-x^2-2x-1} \leqslant 0.$

12. $\dfrac{(x-2)^2-3|x-2|-10}{(|x-4|-5)(|3-x^2|-6)} \geqslant 0.$

13. $\dfrac{(|x^2-4|-5)(|x+5|-8)}{(|x-3|-|x-1|)|x|} \geqslant 0.$

14. $\dfrac{|x-3|-2}{|x|-1} \leqslant 2.$

15. $\dfrac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \leqslant 0.$

16. $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geqslant \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$

17. $\dfrac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{2(5x+1)}}{\sqrt{x+3}-2} \leqslant 0.$

18. $\dfrac{\sqrt{2x+3}+x-6}{x-5} \geqslant 3.$

19. $\dfrac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \leqslant 1.$

20. $\dfrac{|x+5|-\sqrt{2x+18}}{|x-4|-\sqrt{12-3x}} \geqslant 0.$

21. $(\sqrt{3x+5}-\sqrt{x+3})(|x-4|-x^2-2)<0.$

22. $\dfrac{\sqrt{3x^2-5x+3}-\sqrt{x^2+x+1}}{|2x^2-x-1|-|12x^2+7x+1|} \geqslant 0.$

23.

$$|\sqrt{x^2+x+1}-2x-1|-|\sqrt{x^2+x+1}+2x+2|>0.$$

24.

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{3x-2}}-\sqrt{x+\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}} \leqslant 0.$$

25. $\dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}+\sqrt[3]{3x^2+x-4}} \geqslant 0.$

26. $\dfrac{|x+1|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x} \leqslant 0.$

27.

$$\frac{(\sqrt{1+2x^2}-1-x^2)\cdot(|2x+3|-|3x+2|)}{(x^2-5x+4)\cdot(\sqrt{x+5}+1-x)\cdot(x^{99}-1)} \leqslant 0.$$

28.

$$\frac{((2x-1)^5-(x+1)^5)\cdot(\sqrt[3]{x^2-6}+\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2}} \leqslant 0.$$

29. $\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x-1}-2}{|x+3|-\sqrt{x^2-2x-3}} \leqslant 0.$

30.

$$\frac{(\sqrt{7-x}-x-5)\cdot(\sqrt{11-4x}-x-2,5)}{\sqrt{5+3x-2x^2}\cdot(|4x-3|-|6x+1|)} \leqslant 0.$$

Метод рационализации 2.

При всех допустимых значениях переменных a, b и c

- $\log_a b$ имеет такой же знак, что и выражение $(a-1)(b-1)$;
- $\log_a b - \log_a c$ имеет такой же знак, что и выражение $(a-1)(b-c)$;
- $a^b - a^c$ имеет такой же знак, что и выражение $(a-1)(b-c)$.

1. $\dfrac{\log_2(2x)\cdot\log_{0,5x} x^2}{\log_{0,125x} 8} \leqslant 0.$

2. $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x) \leqslant 0.$

3. $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\dfrac{x}{3}\right) > 0.$

4. $\log_{\log_2(x/2)}(x^2-10x+22) > 0.$

5. $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1) \geqslant \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2).$

6. $\log_{\frac{2x-1}{x}} 5 < \log_{\frac{2x-1}{x}} x.$

7. $\log_{6x^2-5x+1} 2 > \log_{\sqrt{6x^2-5x+1}} 2.$

8. $\log_{x^2}(9-8x) \geqslant 1.$

9. $\log_{2x+3} x^2 < 1.$

10. $\dfrac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)} \leqslant \dfrac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}.$

11. $\dfrac{\log_2(2x^2-13x+20)-1}{\log_3(x+7)} \leqslant 0.$

12. $\dfrac{2\log_3(x^2-4x)}{\log_3 x^2} \leqslant 1.$

13. $\log_{\frac{1}{36}}(22-3x)\cdot\log_{8-x}\dfrac{1}{6} \geqslant 1.$

14. $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leqslant 2.$

15. $\dfrac{9}{\log_{1,9} x\log_{2,1}(x-10)^2} \geqslant \dfrac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\log_{1,9} x\log_{2,1}(x-10)^2}.$

16. $\dfrac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x} \geqslant 1.$

17. $\dfrac{12^x-4^{x+1}-3^{x+1}+12}{x^2-2x+1} < 0.$

18. $|x|^{x^2-x-2} > 1.$

19. $|x+1|^{x^2+5x} \geqslant 1.$

20. $6^x \geqslant 3\sqrt{3}\cdot 2^x + 32\cdot 2^2\cdot 3^x - 64\sqrt{108}.$

21. $x^2\cdot 2^{x+2} - 12x^2\cdot 3^x + 3^{x+1} > 2^x.$

22. $\sqrt{6-x}\cdot(2\cdot 9^{2x}-53\cdot 3^{2x}-27) \geqslant 0.$

23. $\dfrac{x+1-\log_3 9x}{1-\log_3 x} \geqslant 1.$

24. $\dfrac{(7x-x^2+98)\sqrt{x+6}}{\log_2|x-12|-4} \geqslant 0.$

25. $\log_{0,5x-2}\left(\log_4\left(\dfrac{12}{\sqrt{3x-12}}\right)\right) \leqslant 0.$

26. $\log_{3x-5} 2 \leqslant \log_{x-1}\sqrt{2}.$

27. $\lg^2\dfrac{(x-3)^2\cdot(x-2)}{18} > \lg^2\dfrac{(x-2)}{2}.$

Задания типа С3.

1. (ЕГЭ2010) $\log_5((7^{-x^2}-6)(7^{-x^2+16}-1))+\log_5\dfrac{(7^{-x^2}-6)}{7^{-x^2+16}-1}>\log_5(7^{2-x^2}-5)^2.$

2. (ЕГЭ2011) $11\cdot\lg(x^2+11x+30)\leqslant 12+\lg\dfrac{(x+6)^{11}}{x+5}.$

3. (ЕГЭ2011) $3\log_{11}(x^2+8x-9)\leqslant 4+\log_{11}\dfrac{(x-1)^3}{x+9}.$

4. (ЕГЭ2011) $\log_4(x+5)^4\cdot\log_{16}(x+4)^2+\log_2\dfrac{(x+4)^3}{x+5}-3>0.$

5. (ЕГЭ2011) $\log_8(x-3)^2\cdot\log_{16}(x-7)^6+\log_2\dfrac{(x-3)^5}{x-7}-5>0.$

6. (ЕГЭ2011) $2\log_{1-0,5x}(x-1)^2+\log_{|x-1|}(1-0,5x)\leqslant 4.$

7. (ЕГЭ2011) $\log_{x+1}(19+18x-x^2)-\dfrac{1}{16}\log^2_{x+1}(x-19)^2\geqslant 2.$

8. (ЕГЭ2011) $\dfrac{1}{2}\log_{x+4}(x^2+2x+1)+\log^2_{-x-1}(-x^2-5x-4)\leqslant -1.$

9. (ЕГЭ 2012) $\begin{cases}\dfrac{160-4^x}{32-2^x}\geqslant 5,\\ \log_{0,25x^2}\left(\dfrac{6-x}{4}\right)\leqslant 1.\end{cases}$

10. (ЕГЭ 2012) $\begin{cases}11^{x+1}+3\cdot 11^{-x}\leqslant 34,\\ \log_{2x}0,25\leqslant\log_2 32x-1.\end{cases}$

11. (ЕГЭ 2013) $\begin{cases}x+7+\dfrac{14x-24}{x^2-4x+3}\geqslant\dfrac{5}{x-1},\\ \log_{4-x}(28-3x-x^2)\leqslant 1.\end{cases}$

12. (ЕГЭ 2013) $\begin{cases}x^3+8x^2+\dfrac{50x^2+x-7}{x-7}\leqslant 1,\\ \log_{5-x}\dfrac{x+4}{(x-5)^{10}}\geqslant -10.\end{cases}$

13. (ЕГЭ 2014) $\begin{cases}\log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x)\leqslant 0,\\ 64^{x^2-3x+20}-0,125^{2x^2-6x-200}\leqslant 0.\end{cases}$

14. (ЕГЭ 2014) $\begin{cases}32\cdot 9^x\leqslant 60\cdot 3^x-7,\\ \log_{7-x}(x+2)\leqslant\log_{7-x}(3-x).\end{cases}$

15. (ЕГЭ 2015) $\dfrac{105}{\left(2^{4-x^2}-1\right)^2}-\dfrac{22}{2^{4-x^2}-1}+1\geqslant 0.$

16. (ЕГЭ 2015) $\lg^4 x-4\lg^3 x+5\lg^2 x-2\lg x\geqslant 0.$

17. (ЕГЭ 2015) $\left(\log^2_2 x-2\log_2 x\right)^2<11\log^2_2 x-22\log_2 x-24.$

18. (ЕГЭ 2015) $\dfrac{31-5\cdot 2^x}{4^x-24\cdot 2^x+128}\geqslant 0,25.$

Тригонометрические уравнения.

Решите уравнения:

1. $\sin x = 0.$ **2.** $\cos x = 0.$ **3.** $\operatorname{tg} x = 0.$

4. $\operatorname{ctg} x = 0.$ **5.** $\sin x = 1.$ **6.** $\cos x = -1.$

7. $\sin x = -\dfrac{1}{2}.$ **8.** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}.$ **9.** $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

10. $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **11.** $\operatorname{tg} \dfrac{2x}{5} = 1.$ **12.** $2\cos(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}) = \sqrt{3}.$

13. $2\sin(3x - \dfrac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}.$ **14.** $\sqrt{3}\operatorname{tg}(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{3}) = 3.$ **15.** $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi x - \pi}{4} = 1.$

16. $\sqrt{3} + 2\cos\dfrac{\pi x}{9} = 0$ на промежутке $8 < x < 30.$

17. $1 - \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi x}{4} = 0$ на промежутке $1 < x < 10.$

Решите системы:

18. $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi n}{3}, & n \in \mathbb{Z}; \\ x = \pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, & n \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^k\dfrac{\pi}{4} + \pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}; \\ x \neq (-1)^k\dfrac{\pi}{3} + \pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} \neq 0. \end{cases}$

Решите уравнения:

22. $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = 0.$ **23.** $\dfrac{\sin(x - \frac{\pi}{4})}{\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 0.$

24. $\dfrac{\cos x - 0,5}{\cos(x + \frac{\pi}{6})} = 0.$ **25.** $\dfrac{\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin x - 0,5} = 0.$

26. $\dfrac{2\cos^2 x - 1}{\operatorname{tg} x + 1} = 0.$ **27.** $\cos x(\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{1}{3}) = 0.$

28. $\dfrac{4\sin^2 x - 3}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0.$ **29.** $\dfrac{4\cos^3 x - \cos x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0.$

30. Найдите все корни уравнения $(2\sin x + 1)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x > 0$.

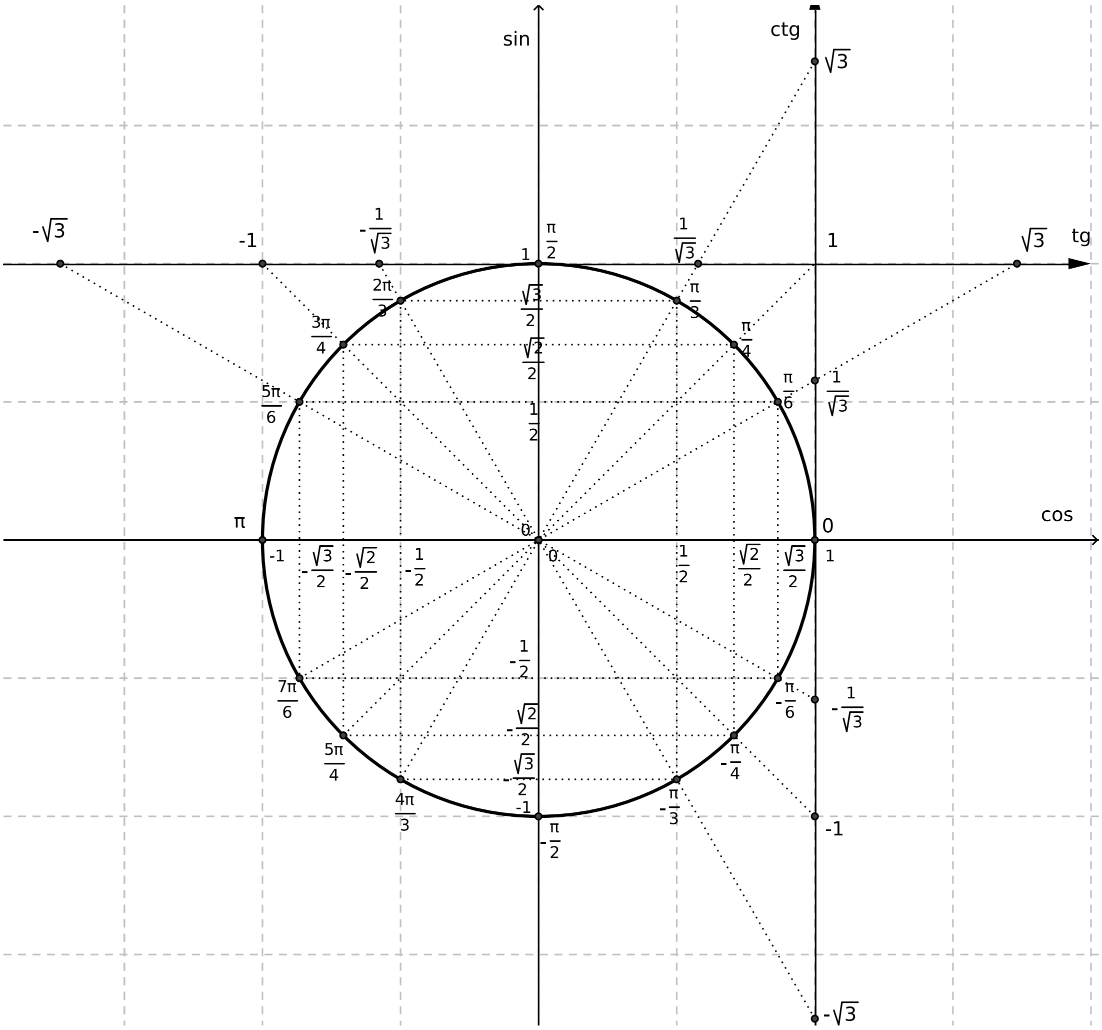
31. Найдите все корни уравнения $(\sqrt{2}\sin x + 1)(2\sin x - 3) = 0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x < 0$.

32. Найдите все корни уравнения $(\sqrt{2}\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x < 0$.

33. Найдите все корни уравнения $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x < 0$.

34. Найдите все корни уравнения $\operatorname{tg}^2 x = \sqrt{3}\operatorname{tg} x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x < 0$.

35. Найдите все корни уравнения $3\operatorname{tg}^2 x = 1$, удовлетворяющие неравенству $\sin x < 0$.



sin
ctg
tg
cos
π
0
1
-1
-√3
√3
π/2
-π/2
π/3
π/4
π/6
2π/3
3π/4
5π/6
7π/6
5π/4
4π/3
-π/6
-π/4
-π/3
1/√3
-1/√3
√3/2
√2/2
1/2
-1/2
-√2/2
-√3/2

Тригонометрические уравнения ЕГЭ.

а) Решите уравнение.

б) Укажите все корни из данного промежутка.

1. а) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0.$ б) $[-2\pi; -\pi].$

2. а) $\sqrt{2}\sin^2 x = \sin x.$ б) $[-2,5\pi; -1,5\pi].$

3. а) $3\operatorname{tg}^2 x = 1.$ б) $[0,5\pi; 3\pi].$

4. а) $\cos^2 x = 1 - \sin x.$ б) $[2\pi; 3,5\pi].$

5. а) $\sin 2x = \sin x.$ б) $[-\pi; 1,5\pi].$

6. а) $\sin x = \cos \frac{x}{2}.$ б) $[-4\pi; -\pi].$

7. а) $\cos x = \cos \frac{x}{2}.$ б) $[3\pi; 6\pi].$

8. а) $\cos x = \sin \frac{x}{2}.$ б) $[\pi; 5\pi].$

9. а) $\dfrac{4\cos^3 x - \cos x}{\operatorname{tg} x - \sqrt{3}} = 0.$ б) $[-3\pi; -\pi].$

10. а) $4\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \sin x + \sin 2x.$ б) $[-1,5\pi; 0,5\pi].$

11. а) $0,5\sin^2 x = \cos(1,5\pi + x).$ б) $[\pi; 3\pi].$

12. а) $6\operatorname{tg}^2 x + \dfrac{5}{\cos x} = 0.$ б) $[-3,5\pi; -0,5\pi].$

13. а) $3\cos 2x + 13\sin x - 9 = 0.$ б) $[0,5\pi; 3\pi].$

14. а) $\cos 2x - 3\sin 2x = \cos^2 x.$ б) $[-5\pi; -1,5\pi].$

15. а) $(1 + \operatorname{tg}^2 x)\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0.$ б) $[1,5\pi; 3\pi].$

16. а) $6\sin x\cos 2x + 4 = 8\sin x + 3\cos 2x.$ б) $[-2\pi; \pi].$

17. а) $(2\cos x - 1)\sqrt{\sin(x + 1,5\pi)} = 0.$ б) $[2\pi; 5\pi].$

18. а) $\sqrt{3}\cos x + 2\sin^2 x + 1 = 0.$ б) $[-2\pi; 0].$

19. а) $\sqrt{3}\sin 2x - 2 = 4\sin x - \sqrt{3}\cos x.$ б) $[3\pi; 5\pi].$

20. а) $\sin 2x - 2\cos^2 x = \cos 2x.$ б) $[13\pi; 15\pi].$

21. а) $(\sin x - \sin 3)(\cos x - \cos 3) = 0.$ б) $[1,5\pi; 2,5\pi].$

22. а) $\dfrac{4\operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{ctg} x}{5\cos^2 x - 3\cos x} = 0,$ б) $[2\pi; 4\pi].$

23. а) $\dfrac{(41\sin^2 x - 16)(5\operatorname{tg} x + 4)}{\sqrt{41}\cos^2 x - 5\cos x} = 0,$ б) $[2\pi; 4\pi].$

24. а) $\dfrac{24\operatorname{ctg} 2x + 7}{50\cos^2 x - 32} = 0,$ б) $[7\pi; 10\pi].$

Задачи типа С1.

а) Решите уравнение.

б) Укажите все корни из данного промежутка.

1. а) $2\sin^2 x - 3\cos x - 3 = 0.$ б) $[\pi; 3\pi].$

2. а) $\cos 2x + \sin^2 x = 0,25.$ б) $[3\pi; 4,5\pi].$

3. а) $\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \dfrac{2}{\operatorname{tg} x} - 3 = 0.$ б) $[2\pi; 3,5\pi].$

4. а) $\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0.$ б) $[-\pi; 0,5\pi].$

5. а) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2.$ б) $[-3\pi; -\pi].$

6. а) $4\operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg} x = 1.$ б) $[2\pi; 3\pi].$

7. а) $36^{\sin 2x} = 6^{2\sin x}.$ б) $[-3,5\pi; -2,5\pi].$

8. а) $\dfrac{4^{\cos^2 \frac{x}{2}}}{(\sqrt{2})^{\sin x}} = \left(2^{\sin \frac{x}{2}}\right)^{\sin \frac{x}{2}}.$ б) $[-1,5\pi; 0,5\pi].$

9. а) $\sin x \cdot \sin 5x = \cos 4x.$ б) $[-2\pi; -0,3\pi].$

10. а) $\cos x \cdot \cos 5x = \cos 6x.$ б) $[-1,2\pi; 0,2\pi].$

11. а) $\sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 0.$ б) $[-1,5\pi; 1,5\pi].$

12. а) $4\sin^3 x = 3\cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right).$ б) $[3,5\pi; 4,5\pi].$

13. а) $4\cos^2 \dfrac{x}{2} - 1 = \sin x + \sin 2x.$ б) $[-1,5\pi; 0,5\pi].$

14. а) $5\sin^2 x = \cos(1,5\pi + x).$ б) $[\pi; 3\pi].$

15. а) $6\operatorname{tg}^2 x + \dfrac{5}{\cos x} = 0.$ б) $[-3,5\pi; -0,5\pi].$

16. а) $3\cos 2x + 13\sin x - 9 = 0.$ б) $[0,5\pi; 3\pi].$

17. а) $6\sin x\cos 2x + 4 = 8\sin x + 3\cos 2x.$ б) $[-2\pi; \pi].$

18. а) $(2\cos x - 1)\sqrt{\sin(x + 1,5\pi)} = 0.$ б) $[2\pi; 5\pi].$

19. а) $\sqrt{3}\cos x + 2\sin^2 x + 1 = 0.$ б) $[-2\pi; 0].$

20. а) $\sqrt{3}\sin 2x - 2 = 4\sin x - \sqrt{3}\cos x.$ б) $[3\pi; 5\pi].$

21. а) $\sin 2x - 2\cos^2 x = \cos 2x.$ б) $[13\pi; 15\pi].$

22. а) $\operatorname{tg}(x + 0,25\pi) + 1 = 2(\sqrt{2} + 1)\operatorname{ctg} x.$ б) $[-0,25\pi; 1,75\pi].$

23. а) $\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right).$ б) $[-1,5\pi; 3\pi].$

24. а) $(3\cos x + 2)(\sqrt{-\sin x} - 1) = 0.$ б) $[\pi; 5\pi].$

25. а) $\sqrt{\sin 3x} = \sqrt{1 + 2\sin 4x\cos x}.$ б) $[-\pi; 3\pi].$

26. а) $\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{2}\cos(x + \frac{\pi}{2}).$ б) $[-1,5\pi; \pi].$

27. а) $\dfrac{2\sin^2 x - \sin(1,5\pi + x) - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0.$ б) $[-3\pi; 0].$

28. а) $\log_{\sin x}\sqrt{3}\cos x = 1.$ б) $[-0,5\pi; 2,5\pi].$

29. а) $\dfrac{\log_7(\sqrt{3}\operatorname{tg} x)}{\sqrt{-7\sin x}} = 0.$ б) $[-\pi; 1,5\pi].$

30. а) $\dfrac{(\operatorname{tg} x + \sqrt{3})\log_7(2\sin^2 x)}{\log_7(\sqrt{2}\cos x)} = 0.$ б) $[0; 3\pi].$

Метод координат в пространстве.

1. Введите систему координат и определите координаты всех вершин многогранника, если многогранник

а) куб с ребром 1;

б) правильная треугольная призма, все ребра которой равны 1;

в) правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 1;

г) правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 1;

д) правильная треугольная пирамида, стороны основания которой равны $4\sqrt{3}$, а боковое ребро равно 5.

2. Даны точки $A(-3;5;4)$ и $B(4;-2;4)$. Найдите: а) координаты середины отрезка AB; б) координаты вектора $\overrightarrow{AB}$; в) длину отрезка AB; г) координаты точки, делящего отрезок AB в отношении $3:4$.

3. Даны точки $A(-8;13;-7)$ и $B(7;-2;-37)$. Найдите: а) координаты середины отрезка AB; б) координаты вектора $\overrightarrow{BA}$; в) длину отрезка AB; г) координаты точки, делящего отрезок AB в отношении $11:4$.

4. Пусть даны точки $A(-3;2;0)$, $B(2;4;-1)$ и $C(7;-3;1)$. Найдите координаты точки пересечения медиан треугольника ABC.

5. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на диагоналях граней AD_1 и D_1B_1 взяты точки E и F так, что $D_1E = \frac{1}{3}AD_1$, $D_1F = \frac{2}{3}D_1B_1$. Найдите длину отрезка EF.

6. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 4. На отрезке A_1B отмечена точка E так, что $EC_1 = 3$. Найдите AE.

7. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $CB = CA = 5$, $AB = 6$. Высота призмы равна 24. Точка M — середина ребра AA_1, точка K делит ребро B_1C_1 в отношении $2:3$ считая от вершины B_1. Найдите KM.

8. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 20$, $BC = 10$ и боковой стороной $AB = 13$. Высота призмы равна 9. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения прямых AC_1 и B_1D.

9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна $\sqrt{7}$, а сторона основания равна 6. Найдите расстояние от точки A до точки пересечения медиан треугольника SBC.

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ каждое ребро равно $2\sqrt{3}$. Определите расстояние между серединами AB_1 и CE.

Метод координат в пространстве. Углы между векторами.

1. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}\{2;3;4\}$ и $\overrightarrow{b}\{3;-2;1\}$.

2. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{a}\{2;3;4\}$ и $\overrightarrow{b}\{3;-2;0\}$.

3. Найдите угол между векторами $\{1;0;1\}$ и $\{2;2;0\}$.

4. Найдите угол между векторами $\{1;0;1\}$ и $\{-3;7;3\}$.

5. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми A_1D и D_1E, где E — середина ребра CC_1.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

7. Напишите уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\{1;2;3\}$.

8. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $P(-2;5;3)$ и перпендикулярной вектору $\{1;2;3\}$.

9. Составьте уравнение плоскости, параллельной плоскости $6x+3y-z=0$ и проходящей через точку $A(3;-2;1)$.

10. Найдите координаты вектора единичной длины, перпендикулярной плоскости $x+2y+2z=5$.

11. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $(3;0;0)$, $(0;4;0)$ и $(0;0;5)$.

12. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $(1;0;2)$, $(2;1;0)$ и $(-1;0;1)$.

13. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $(-1;0;2)$, $(-2;1;0)$ и $(0;1;-2)$.

14. Найдите угол между плоскостями, заданными уравнениями $x+y+3=0$ и $2x+2z-13=0$.

15. Найдите угол между плоскостями, заданными уравнениями $3x+2y-z+3=0$ и $6x+4y-2z-13=0$.

16. Найдите угол между плоскостью $9x-12y-20z+14=0$ и вектором $\{2;-1;2\}$.

17. Найдите угол между плоскостью $-x+y-z+1=0$ и вектором $\{1;-2;0\}$.

18. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями ABC_1 и BDD_1.

19. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка E — середина ребра A_1B_1. Найдите синус угла между прямой AE и плоскостью BDD_1.

20. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между прямой AA_1 и плоскостью BC_1D.

Вычисление углов.

1. (ЕГЭ 2012) Точка E — середина ребра DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между прямыми CE и AC_1.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = AA_1 = 4$, $AD = 3$.
Найдите тангенс угла, который образует плоскость ACB_1 с гранью CDD_1C_1.

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1D_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$ найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

5. (ЕГЭ 2012) В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

6. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер: $AA_1 = 5$, $AB = 12$, $AD = 8$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC и плоскостью, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AK, если K — середина ребра C_1D_1.

7. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями ACB_1 и A_1C_1B.

8. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью AA_1C_1C.

9. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 1. Найдите косинус угла между прямыми а) AB_1 и BC_1; б) AB_1 и BD_1.

10. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, точка G — середина ребра A_1B_1. Найдите угол между:

а) прямой AG и плоскостью BCC_1;

б) прямой FG и плоскостью ACD_1.

11. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = 10$, $BC = 16$. Высота призмы равна 3. Точка M — середина ребра A_1B_1. Найдите тангенс угла между прямой MB и плоскостью BCC_1.

12. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите двугранный угол $ABSC$.

13. (ЕГЭ 2010) В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 12\sqrt{3}$, $SC = 13$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой AM, где M — точка пересечения медиан грани SBC.

Расстояния.

Расстояние от точки до прямой

1. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до прямой:

а) B_1D_1; б) BD_1.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой:

а) DE; б) D_1E_1; в) B_1C_1; г) BE_1; д) BC_1; е) CE_1; ж) CF_1; з) CB_1.

3. В тетраэдре $ABCD$, все ребра которого равны 1 , найти расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD.

Расстояние от точки до плоскости

4. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до плоскости A_1BC_1.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние от точки A до плоскости:

а) BCC_1; б) BDC_1; в) B_1C_1F; г) BE_1F; д) A_1B_1C.

7. Найдите высоту правильного тетраэдра с ребром $\sqrt{6}$.

8. Ребро AD пирамиды $DABC$ перпендикулярно плоскости основания ABC. Найдите расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через середины ребер AB, AC и AD, если $AD = 2\sqrt{5}$, $AB = AC = 10$, $BC = 4\sqrt{5}$.

Расстояние между прямыми

9. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми BD и SA.

10. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 2 точки E и F — середины ребер A_1B_1 и B_1C_1. Найдите расстояния между прямыми:

а) AE и BF; б) AF и BE; в) CE и D_1F.

Разное

11. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ длина стороны основания $AB = 3\sqrt{2}$, а боковое ребро равно 5. Медианы грани SAD пересекаются в точке M. Найдите расстояния между:

а) M и AC; б) M и BCS; в)M и ABS; г) BM и CS; д) BM и DS.

12. В пирамиде $DABC$ известны длины ребер: $AB = AC = DB = DC = 10$, $BC = DA = 12$. Найдите расстояние между прямыми DA и BC.

Площади сечений.

1. (ЕГЭ2012) Точка E — середина ребра AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью C_1DE, если рёбра куба равны 2.

2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 4. Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через середины ребер AB, AD и B_1C_1.

3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 3. На ребре AB взята точка M так, что $AM : MB = 1 : 2$ Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки M, B_1 и середину ребра AD.

4. Через середину диагонали куба проведена плоскость перпендикулярно этой диагонали. Найти отношение площади сечения куба данной плоскостью к площади полной поверхности куба.

5. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые ребра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 3 : 2$. Найдите площадь сечения призмы плоскостью BED_1.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все ребра которой равны 1, точки D, E — середины ребер соответственно A_1B_1 и A_1C_1. Найдите площадь треугольника ADE.

7. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 2. Найдите площадь сечения призмы плоскостью ABC_1.

8. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны 2. Найдите площадь сечения призмы плоскостью ABD_1.

9. В пирамиде $DABC$ известны длины ребер: $AB = AC = DB = DC = 10$, $BC = DA = 8\sqrt{2}$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки A, D и середину BC.

10. (ЕГЭ 2013) В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 3, а боковые ребра равны 6. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и AC параллельно прямой MA.

11. (ЕГЭ 2013) В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

12. Через середину высоты правильной четырехугольной пирамиды проведено сечение, перпендикулярное боковому ребру. Найдите площадь этого сечения, если длина бокового ребра равна 4, а угол между боковыми ребрами, лежащими в одной грани, равен $60°$.

13. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра: $AB = 12\sqrt{3}$, $SC = 12\sqrt{10}$. M — точка пересечения медиан грани SBC. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через прямую AM параллельно прямой BC.

14. (ЕГЭ 2013) Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 7. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

15. (ЕГЭ 2013) Две параллельные плоскости, расстояние между которыми 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84. Найдите радиус шара.

16. (ЕГЭ 2013) Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

17. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S боковая сторона равна $6\sqrt{7}$, а сторона основания $6\sqrt{6}$. Точки M и K — середины ребер AD и AB соответственно. Точка E лежит на ребре SC. Угол между плоскостью MKE и плоскостью основания равен 30° градусов. Найти площадь сечения, проходящего через точки M, K и E.

18. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S, точка M — середина ребра BS. Стороны основания пирамиды равны $6\sqrt{2}$, а высота пирамиды равна 9. Найти площадь сечения, проведенного через прямую AM параллельно BD.

19. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник с острым углом A, равным 30° градусов. Найти площадь сечения призмы, проходящего через меньший катет нижнего основания и середину гипотенузы верхнего основания, если расстояние между основаниями призмы равно расстоянию от вершины A до искомого сечения и равно 6.

20. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ со стороной основания равной $1+\sqrt{3}$ и высотой равной 2 проведено сечение через прямую BC, которое делит призму на 2 многогранника равных объемов. Найти площадь этого сечения.

21. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра равны 2, а стороны основания — 1. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки B, C и середину ребра SE.

22. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник ABC, у которого основание BC равно 3. Боковая поверхность призмы равна 32. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через CB_1 параллельно высоте основания AD, если известно, что расстояние от точки A до плоскости сечения равно 1,2.

Объемы.

1. Правильная треугольная призма вписана в шар радиуса $\sqrt{7}$. Найти объем призмы, если все ее ребра одинаковой длины.

2. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 и 4 и острым углом 60°. Большая диагональ параллелепипеда равна 5. Определить его объем.

3. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 4. Найти объем призмы, если известно, что прямые AB_1 и CA_1 перпендикулярны.

4. Точка K является серединой ребра AA_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. На боковой грани CC_1B_1B взята точка L, а на основании ABC — точка M так, что прямые A_1L и KM параллельны. Какой наибольший объем может иметь призма $ABCA_1B_1C_1$, если $A_1L = 1$, $KM = \dfrac{3}{5}$, $ML = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$?

5. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под одним углом, тангенс которого равен 0,8. Найдите объем пирамиды.

6. Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты, диагонали которых равны 8 и 5. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Определить объем усеченной пирамиды.

7. Угол между боковой гранью и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды равен 45°. Объем пирамиды равен $\dfrac{1}{3}$. Найти длину стороны основания пирамиды.

8. Правильный тетраэдр вписан в сферу радиуса $3\sqrt{3}$. Найти объем тетраэдра.

9. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием 6 и высотой 9. Каждое боковое ребро равно 13. Вычислить объем пирамиды.

10. Шар радиуса 0,5 вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с углом 30°. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найти объем пирамиды.

11. Через диагональ BD основания правильной четырехугольной пирамиды $ABCDE$ проведено сечение BDK под углом 45° к плоскости основания. Точка K делит боковое ребро AE пополам. Найти объем пирамиды $ABDK$, если ребро $AE = 15\sqrt{2}$.

12. Найти радиус сферы, описанной около правильной треугольной пирамиды, если ее объем равен $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, а высота 2.

13. Найдите наибольшее значение объема пирамиды $ABCD$, вписанной в сферу с диаметром $AB = 4$.

14. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ через сторону основания BC под углом 30° к плоскости основания ABC проведено сечение BCK. Точка K делит ребро AD так, что $AK : KD = 1 : 2$. Найти объем пирамиды $ABCK$, если сторона основания $AB = 6\sqrt{3}$.

Повторение С2.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра $AA_1 = 12$, $AB = 3$, $BC = 4$. Через середину ребра AB перпендикулярно диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите угол, образованный этой плоскостью с основанием параллелепипеда.

2. Сторона основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равна 12, а высота равна 9. Найдите расстояние от точки A до плоскости (A_1FD).

3. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $CB = CA = 5$, $AB = 6$. Высота призмы равна 24. Точка M — середина ребра AA_1, точка K — середина ребра BB_1. Найдите угол между плоскостью MKC_1 и плоскостью основания призмы.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 20$, $BC = 10$ и боковой стороной $AB = 13$. Высота призмы равна 9. Найдите расстояние от точки C до плоскости ADC_1.

5. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна $\sqrt{7}$, а сторона основания равна 6. Найдите угол между плоскостями, содержащими две соседние боковые грани этой пирамиды.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ каждое ребро равно $2\sqrt{3}$. Определите расстояние между прямыми AD_1 и CB_1.

7. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении 2:3 считая от вершины. Найти площадь сечения, зная, что оно меньше площади основания на 84.

8. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершины A, C_1 и середину ребра D_1D проведено сечение. Найти ребро куба, если площадь сечения равна $50\sqrt{6}$.

9. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $60°$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противолежащему ребру.

10. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 8, а угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $60°$. Через вершину основания параллельно противолежащей ей диагонали проведена секущая плоскость так, что высота пирамиды делится точкой пересечения с этой плоскостью в отношении $1 : 2$ считая от основания. Найти площадь сечения.

11. Каждое ребро тетраэдра $ABCD$ имеет длину $3\sqrt{2}$. На ребре AD выбрана точка M так, что $AM : MD = 2 : 1$. Вычислить площадь сечения тетраэдра плоскостью, проведенной через точку M перпендикулярно ребру AD.

Текстовые задачи.

1. Бизнесмен Баранкин получил в 2000 году прибыль в размере 1000000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 7% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Баранкин за 2002 год?

2. Смешали 9 литров 40-процентного водного раствора некоторого вещества с 11 литрами 20-процентного водного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

3. Сколько частей воды нужно взять на одну часть 80% уксусной эссенции, чтобы получить 8% уксус?

Ответ: 9.

4. Имеются два сосуда, содержащих 4 и 6 кг раствора кислоты разных концентраций. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 36% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в каждом сосуде?

Ответ: $1,64$ и $1,86$ кг.

5. В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили, и сосуд долили водой. Затем снова отлили столько же и опять долили водой. Сколько жидкости отливали каждый раз, если в сосуде оказался 25% раствор кислоты?

Ответ: 6 л.

6. Влажность сухой цементной смеси на складе составляет 18%. Во время перевозки из-за дождей влажность смеси повысилась на 2%. Найдите массу привезенной смеси, если со склада было отправлено 400 кг.

Ответ: 410 кг.

7. Аквариум частично заполнен водой. За месяц 40% воды испарилось. При этом объем воздуха увеличился на 60%. Какую часть (в процентах) объема аквариума занимала вода в конце месяца?

Ответ: 36%.

8. Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась втрое, общий доход семьи вырос бы на 108%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 2%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: 43%.

9. Зарплату повысили на p%. Затем новую зарплату повысили на $2p$%. В результате двух повышений зарплата увеличилась в 1,32 раза. На сколько процентов зарплата была повышена во второй раз?

Ответ: 20%.

10. В колбе было 200 г 80% -ного спирта. Провизор отлил из колбы некоторое количество этого спирта и затем добавил в нее столько же воды, чтобы получить 60% - ный спирт. Сколько граммов воды добавил провизор?

Ответ: 50.

11. Свежие грибы содержат 92% воды, а сухие — 8%. Сколько получится сухих грибов из 23 кг свежих?

Ответ: 2.

12. Кусок сплава меди с оловом массой 15 кг содержит 20% меди. Сколько чистой меди необходимо добавить к этому сплаву, чтобы новый сплав содержал 40% олова?

Ответ: 15.

13. Первый сплав содержит 5% меди, второй – 13% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 12% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: 4.

14. Имеются два слитка сплава золота с медью. Первый слиток содержит 230 г золота и 20 г меди, а второй слиток — 240 г золота и 60 г меди. От каждого слитка взяли по куску, сплавили их и получили 300 г сплава, в котором оказалось 84% золота. Определите массу (в граммах) куска, взятого от первого слитка.

Ответ: 100.

15. Латунь — сплав меди и цинка. Кусок латуни содержит меди на 60 кг больше, чем цинка. Этот кусок латуни сплавили со 100 кг меди и получили латунь, в которой 70% меди. Определите процент содержания меди в первоначальном куске латуни.

Ответ: 60.

16. Имеется два сплава, в одном из которых содержится 20%, а в другом 30% олова. Сколько нужно взять первого и второго сплавов, чтобы составить из них 10 кг нового сплава, содержащего 27% олова?

Ответ: 3 и 7 кг.

17. Имеются два слитка сплавов золота и меди. В первом слитке отношение золота и меди $1:2$, а во втором — $2:3$. Если сплавить $1/3$ первого слитка с $5/6$ второго, то в получившемся сплаве золота окажется столько, сколько в первом слитке было меди. Если $2/3$ первого слитка сплавить с половиной второго, то в получившемся сплаве окажется меди на 1 кг больше, чем было золота во втором слитке. Сколько золота было в каждом слитке?

Ответ: $1,2$ и $2,4$ кг.

18. Имеются три смеси, составленные из элементов A, B и C. В первую смесь входят только элементы A и B в весовом отношении $3:5$, во вторую смесь входят только элементы B и C в весовом отношении $1:2$, в третью смесь входят только элементы A и C в весовом отношении 2 : 3. В каком отношении надо взять эти смеси, чтобы во вновь полученной смеси элементы A, B и C содержались в весовом отношении 3 : 5 : 2?

Ответ: 20 : 6 : 3.

19. В январе 2000 года ставка по депозитам в банке «Возрождение» составила $x\%$ годовых, тогда как в январе 2001 года — $y\%$ годовых, причем известно, что $x + y = 30\%$. В январе 2000 года вкладчик открыл счет в банке «Возрождение», положив на него некоторую сумму. В январе 2001 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение x при котором сумма на счету вкладчика в январе 2002 года станет максимально возможной.

Ответ: 25

20. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 пунктов. К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Ответ: 60

21. Транснациональная компания Amako Inc. решила провести недружественное поглощение компании First Aluminum Company (FAC) путем скупки акций миноритарных акционеров. Известно, что Amako было сделано три предложения владельцам акций FAC, при этом цена покупки одной акции каждый раз повышалась на 1/3. В результате второго предложения Amako сумела увеличить число выкупленных акций на 20%, а в результате скупки по третьей цене — еще на 20%. Найдите цену третьего предложения и общее количество скупленных акций FAC, если начальное предложение составляло \$27 за одну акцию, а по второй цене Amako скупила 15 тысяч акций.

Ответ: \$48 и 108 000 акций

22. В конце августа 2001 года администрация Приморского края располагала некой суммой денег, которую предполагалось направить на пополнение нефтяных запасов края. Надеясь на изменение конъюнктуры рынка, руководство края, отсрочив закупку нефти, положила эту сумму 1 сентября 2001 года в банк. Далее известно, что сумма вклада в банке увеличивалась первого числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на первое число предыдущего месяца, а цена барреля сырой нефти убывала на 10% ежемесячно. На сколько процентов больше (от первоначального объема закупок) руководство края смогло пополнить нефтяные запасы края, сняв 1 ноября 2001 года всю сумму, полученную из банка вместе с процентами, и направив ее на закупку нефти?

Ответ: 96

23. За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12,5% в месяц. известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$ Определите срок хранения вклада.

Ответ: 7

24. Техническая реконструкция предприятия была проведена в 4 этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4%, на втором — $6\frac{2}{3}\%$, на третьем — $6\frac{1}{4}\%$ и на четвертом — $14\frac{2}{7}\%$ в месяц. По оканчанию реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 37%. Определить продолжительность периода реконструкции.

Ответ: 6 месяцев.

25. По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

Ответ: 8

26. Бизнес-проект «А» предполагает в течение первых двух лет рост вложенных в него сумм на 34,56% ежегодно и на 44% ежегодно в течение следующих двух лет. Проект «Б» предполагает рост на постоянное целое число n процентов ежегодно. Найдите наименьшее значение n, при котором за первые четыре года проект «Б» будет выгоднее проекта «А».

Ответ: 40

27. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать на 5% в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наибольшее значение n, при котором за три года хранения вклад «А» окажется выгоднее вклада «Б» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Ответ: 12

28. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

Ответ: $n = 4$ и $m = 1$

29. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллион рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 150 млн рублей, а за четыре года станут больше 250 млн рублей.

Ответ: 80

30. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме того, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Ответ: 12

31. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Ответ: 2 622 050

32. 31 декабря 2014 года Ярослав взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Ярослав переводит в банк 2 132 325 рублей. Какую сумму взял Ярослав в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ: 6 409 000

33. Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24000 рублей?

Ответ: 6

34. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1300000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

На какое минимально количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 350000 рублей?

Ответ: 5

35. 1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платёж. НА какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. рублей?

Ответ: 9

36. В июле планируется взять кредит на сумму 8052000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

Ответ: 3 110 400

37. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей.

Сколько млн. рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Ответ: 4,55

38. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на a% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите число a, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 55000 руб., а во второй 69000 рублей.

Ответ: 15

39. В июле планируется взять кредит на сумму 4026000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом прошлого года.
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придется отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года) по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Ответ: 950 400

40. 1 марта 2010 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платёж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий — в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2395800 рублей?

Ответ: 1923000

41. Алексей взял в банке кредит 10 млн. рублей под 10% годовых. По договору Алексей возвращал кредит ежегодными платежами. В конце каждого года к оставшейся сумме долга добавлялось 10% этой суммы и своим ежегодным платежом Алексей погашал эти добавленные проценты и уменьшал сумму долга. Ежегодные платежи подбирались так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый год (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась 15 млн. рублей. Определите, на сколько лет Алексей брал кредит в банке.

Ответ: 9

42. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платеж по кредиту не превысил 1,8 млн рублей?

Ответ: 10

43. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

Ответ: 13

44. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн рублей?

Ответ: 8

45. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $x\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найти x, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн рублей.

Ответ: 25

46. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 40 млн рублей?

Ответ: 11

47. 15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: 1

48. Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн.руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на

180% превышающую исходную. Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За какое время в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Ответ: 150 мес

49. В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Ответ: 21 мальчик и 2 мальчика, 20 девочек.

50. Зависимость объема Q (в шт) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15000 - P$, $1000 \leqslant P \leqslant 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако ее прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Ответ: 12,5

51. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Ответ: 10

52. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. При цене тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

Ответ: 9

53. Фермер должен засеять 260 гектаров подсолнечником и кукурузой. Доход от каждой культуры в хозяйстве фермера является квадратичной функцией с аргументом, равным количеству засеянных гектаров. Каждая из квадратичных функций равна 0 при аргументе, равном 0. Максимальный доход от подсолнечника равен 9 000 000 рублей, если засеять 150 гектаров. Максимальный доход от кукурузы равен 8 000 000 рублей, если засеять 200 гектаров. Найдите, сколько гектаров подсолнечника и сколько гектаров кукурузы должен засеять фермер для получения максимального дохода?

Ответ: 120 и 140.

54. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Ответ: 5 800 000 рублей.

55. В некоторой стране решили провести всенародные выборы правительства. Две трети избирателей в этой стране — городские жители, а одна треть — сельские. Президент должен предложить на утверждение проект состава правительства из 100 человек. Известно, что за проект проголосует столько процентов городских (сельских) жителей, сколько человек из города (села) в предложенном проекте. Какое наименьшее число городских жителей надо включить в проект состава правительства, чтобы за него проголосовало более половины избирателей?

Ответ: 51.

56. Колхоз арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60 руб в день, производительность его в мягком грунте составляет 250 м^3 в день, в твердом грунте — 150 м^3 в день. Аренда второго экскаватора стоит 50 руб в день, его производительность в мягком грунте 480 м^3 в день, а в твердом — 100 м^3 в день. Первый проработал несколько полных дней и вырыл 720 м^3. Второй за несколько полных дней вырыл 330 м^3. Сколько дней работал каждый экскаватор, если колхоз заплатил за аренду не более 300 руб.

Ответ: (3;1), (3;2), (4;1).

57. Садовод привез на рынок 91 кг яблок, которые после транспортировки разделил на три сорта. Яблоки первого сорта он продавал по 40 руб., второго сорта — по 30 руб., третьего сорта — по 20 руб. за килограмм. Выручка от продажи всех яблок составила 2170 руб. Известно, что масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта. Сколько килограммов яблок второго сорта продал садовод?

Ответ: 21.

58. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте работают 20 шахтеров, каждый из которых трудится 5 часов в день. При этом один шахтер за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте работают 100 шахтеров, каждый из которых трудится 5 часов в день. При этом один шахтер за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Ответ: 1050.

59. В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

Ответ: 280.

Методы решения Диофантовых уравнений.

Решите в целых числах линейные уравнения:

1. $5x - 4y = 1$. **2.** $3x + 7y = 3$. **3.** $27y - 12x = 15$. **4.** $14x - 68y = 8$.

5. $19x + 99y = 1$. **6.** $7x + 6y = 1$. **7.** $3x - 7y = 11$. **8.** $5y - 7x = 17$.

9. $6x + 9y = 8$. **10.** $13x + 9y = 30$. **11.** $2015x + 2016y = 2017$.

Решите в целых числах нелинейные уравнения:

12. $xy = 9$. **13.** $(2x - 1)(2y + 4) = 6$. **14.** $(x - y)(x - 1) = 4$. **15.** $(y + 1)(xy - 1) = 3$.

16. $4xy - 6x + 8y = 22$. **17.** $5xy + 3x + y + 6 = 0$.

18. $3xy - 14x - 17y + 71 = 0$. **19.** $y^2 - xy - 2x^2 - 13 = 0$.

20. $x^2 + xy = 5$. **21.** $x^2 + 2x - y^2 - 2 = 0$. **22.** $x^2 - xy + 2x + 2 = 0$. **23.** $2y^2 + 2xy - 3y - 2x = 0$.

24. $x^2 - 3xy + 2y^2 = 3$. **25.** $x^2 - 47 = y^2$. **26.** $y^2 - 4x^2 - 2y + 4 = 0$. **27.** $x^2 + xy - x - y - 7 = 0$.

Задачи.

28. Остап Бендер организовал раздачу слонов населению. На раздачу явилось 28 членов профсоюза и 37 не членов. Остап раздавал слонов поровну всем членам и поровну всем не членам, причем каждый получил хотя бы по одному слону. Оказалось, что существует лишь один способ такой раздачи, при котором будут розданы все слоны. Какое наибольшее число слонов могло быть у О. Бендера?

29. Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1 = 5$, $a_2 = 8, \ldots, a_N$ и $b_1 = 9$, $b_2 = 14$, $\ldots$, b_M совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

30. Группу школьников нужно перевезти из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа А за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа В за несколько рейсов, причём в этом случае число рейсов каждого автобуса типа В будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа А. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью. Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа В входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа А?

31. Найдите все натуральные числа, представимые в виде $\dfrac{mn+1}{m+n}$, где m и n — натуральные числа.

32. Решите в натуральных числах уравнение $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{25}$, где $m > n$.

19 ЗАДАЧА ЕГЭ.

1. (2010) Каждое из чисел 13, 14, ..., 21 умножают на каждое из чисел 2, 3, ..., 7 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

2. (2010) Перед каждым из чисел 11, 12, ..., 19 и 6, 7, ..., 10 произвольным образом ставят знак плюс или минус, а затем от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, после чего все 45 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

3. (2011) На доске написано более 32, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 16, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них?

4. (2012) Каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$ по одному записывают на 10 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел $1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9, 10, -11$. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные десять сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

5. (2012) Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театр мальчиков было не более $2/11$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $2/5$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 9 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

6. (2012) Назовем кусок веревки стандартным, если длина не меньше 168 см, но не больше 175 см.

а) Некоторый моток веревки разрезали на 24 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число одинаковых стандартных кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

7. (2012) Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее возможное значение полученного результата?

8. (2012) Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 19.

а) Может ли число S быть равным 38?

б) Может ли число S быть больше 37,05?

в) Найдите максимальное возможное значение S.

9. (2012) В ряд выписаны числа: 12, 22, ..., (N-1)2, N2. Между ними произвольным образом расставляют знаки «+» и «−» и находят получившуюся сумму. Может ли такая сумма равняться:

а) 4, если N=12?

б) 0, если N=69?

в) 0, если N=64?

г) 5, если N=90?

10. (2012) Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.

а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

11. (2013) Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geqslant 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 18?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 111?

12. (2013) Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 27, 30, 32, 34, 41.

13. (2013) Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и все возможные суммы (по 2, по 3 и т.д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет записан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор $-8, -5, -4, -3, -1, 1, 4$. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 2 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

14. (2013) Каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим $S_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_{350}$; $S_2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{350}^2$; $S_3 = a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{350}^3$; $S_4 = a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_{350}^4$; Известно, что $S_1 = 569$.

а) Найдите S_4, если еще известно, что $S_2 = 1307$, $S_3 = 3953$.

б) Может ли $S_4 = 4857$?

в) Пусть $S_4 = 4785$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

15. (2013) Дано трехзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 82?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 83?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

16. (2013) Натуральный числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a + b + c + d = 16$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 32$.

б) Может ли быть $a + b + c + d = 29$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 29$?

в) Пусть $a + b + c + d = 1400$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1400$. Найдите количество возможных значений числа a.

17. (2014) Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число от 0 до 12 включительно. известно, что все эксперты выставили различные оценки. по старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасывается наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\dfrac{1}{25}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться $\dfrac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

18. (2014) На сайте проводили опрос, кого из 134 футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста — доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа.

а) Всего проголосовало 17 посетителей сайта, и рейтинг первого футболиста стал равен 41. Увидев это, Вася отдал свой голос за другого футболиста. Чему теперь равен рейтинг первого футболиста?

б) Вася проголосовал за некоторого футболиста. Могла ли после этого сумма рейтингов всех футболистов уменьшиться не менее чем на 27?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма рейтингов всех футболистов?

19. (2014) а) Можно ли число 2014 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 199 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

20. (2014) Целое число S является суммой не менее трех последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

а) Может ли S равняться 8?

б) Может ли S равняться 1?

в) Найдите все значения, которые может принимать S.

21. (2015) На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на 61)

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел.

22. (2015) На доске написано число 2045 и еще несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходящих 5000. Все написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

а) Может ли на доске быть написано ровно 1024 числа?

б) Может ли на доске быть написано ровно пять чисел?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

23. (2015) В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 800 000 рублей (размер премии каждого сотрудника - целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 250 купюр по 1000 рублей и 110 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 80 000 рублей, а остальное поделить поровну на 80 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

24. (2015) На доске написано 30 натуральных числе (не обязательно различных), каждое из которых больше 4, но не превосходит 44. Среднее арифметическое написанных чисел равнялось 11. Вместо каждого из чисел на доске написали число, в два раза меньше первоначального. Числа, которые после этого оказались меньше 3, с доски стерли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел, оставшихся на доске, больше 16?

б) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться больше 14, но меньше 15?

в) Найдите наибольшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

25. (2015) В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?

б) Путь есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?

в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

26. (2015) Три числа назовем хорошей тройкой, если они могут быть длинами сторон треугольника. Три числа назовем отличной тройкой, если они могут быть длинами сторон прямоугольного треугольника.

а) Даны 8 различных натуральных чисел. Может ли оказаться. что среди них не найдется ни одной хорошей тройки?

б) Даны 4 различных натуральных числа. Может ли оказаться, что среди них можно найти три отличных тройки?

в) Даны 12 различных чисел (необязательно натуральных). Какое наибольшее количество отличных троек могло оказаться среди них?

27. (2015) Ученики одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если набрал не менее 85 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 7 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 85, средний балл участников, не сдавших тест, составил 70. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 100, а не сдавших тест - 72. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

28. Ваня играет в игру. В начале игры на доске написано два различных натуральных числа от 1 до 9999. За один ход игры Ваня должен решить квадратное уравнение $x^2 - px + q = 0$, где p и q — взятые в выбранном Ваней порядке два числа, написанные к началу этого хода на доске, и, если это уравнение имеет два различных натуральных корня, заменить два числа на доске на эти корни. Если же это уравнение не имеет двух различных натуральных корней, Ваня не может сделать ход и игра прекращается.

а) Существуют ли такие два числа, начиная играть с которыми Ваня сможет сделать не менее двух ходов?

б) Существуют ли такие два числа, начиная играть с которыми Ваня сможет сделать десять ходов?

в) Какое наибольшее число ходов может сделать Ваня при этих условиях?

29. Партия проходит в Думу, если по результатам голосования набирает более 6% голосов избирателей. Для каждой такой партии найдутся две другие партии, каждая из которых набрала меньшее число голосов, но суммарно они набрали больше голосов.

б) Могут ли принять участие в выборах 5 партий?

а) Могут ли принять участие в выборах 6 партий?

в) Пусть m — количество партий, прошедших в Думу, n — количество партий, не прошедших в Думу. Найдите максимальное значение выражения m/n.

30. Имеются 300 яблок. Докажите, что их можно разложить в пакеты по два яблока так, чтобы любые два пакета различались по весу не более, чем в полтора раза, если любые два яблока различаются по весу не более, чем:

а) в два раза;

б) в три раза.

31. а) Школьники одного класса в сентябре ходили в два туристических похода. В первом походе мальчиков было меньше $\frac{2}{5}$ общего числа участников этого похода, во втором — тоже меньше $\frac{2}{5}$. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше $\frac{4}{7}$ общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников участвовал по крайней мере в одном походе.

б) Пусть в k-м походе, где $1 \leqslant k \leqslant n$, мальчики составляли a_k-ю часть общего количества участников этого похода. Какую наибольшую долю могут составлять мальчики на общей встрече всех туристов (всех, кто участвовал хотя бы в одном из n походов)?

32. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за проигрыш – 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m = 2$, $d = 2$?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m + d = 10$?

в) Каковы все возможные значения d, если известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

33. В последовательности 2, 0, 0, 0, 2, 2, 4, ... каждый член, начиная с пятого, равен последней цифре суммы предшествующих четырёх членов.

а) Встретятся ли в этой последовательности еще раз подряд 4 цифры 2, 0, 0, 0?

б) Встретятся ли в ней четыре подряд цифры 0, 0, 8, 2 ?

34. а) К любому ли шестизначному числу, начинающемуся с цифры 5, можно приписать справа ещё 6 цифр так, чтобы полученное число было квадратом натурального числа?

б) Тот же вопрос про число, начинающееся на 1.

в) Найдите для каждого натурального n такое наименьшее число k, что к любому n-значному числу можно так приписать справа k цифр, чтобы полученное $(n+k)$-значное число было квадратом натурального числа.

35. На листе бумаги в строчку записаны 11 единиц.

а) Докажите, что между этими единицами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 54.

б) Докажите, что если единицы, стоящие на четных местах, заменить на семерки, все равно между числами полученного набора можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 54.

в) Докажите, что между любыми 11 натуральными числами можно расставить знаки сложения, умножения и скобки так, что после выполнения действий получится число, делящееся на 54.

36. а) Представьте число 2015 в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел.

б) Найдите количество способов представления числа 2015 в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных натуральных чисел.

в) Можно ли число 2015 представить в виде суммы нескольких (не менее двух) последовательных нечетных натуральных чисел?

37. Имеется набор гирь со следующими свойствами:

1) в нем есть 5 гирь, попарно различных по весу;

2) для любых двух гирь найдутся две другие гири такого же суммарного веса.

А) Докажите, что в таком наборе обязательно найдутся две гири одинакового веса.

Б) Обязательно ли в таком наборе найдутся четыре гири одинакового веса?

В) Какое наименьшее количество гирь может быть в этом наборе?

38. а) На доске записаны три различных числа, образующие в этом порядке арифметическую прогрессию. Два числа поменяли местами. Могло ли оказаться так, что теперь эти числа стали образовывать геометрическую прогрессию?

б) На доске записаны четыре различных числа, образующие в этом порядке арифметическую прогрессию. Одно число с доски стерли. Могло ли оказаться так, что теперь три оставшихся числа стали образовывать геометрическую прогрессию?

в) На доске записаны четыре различных числа, образующие в этом порядке геометрическую прогрессию. Одно число с доски стерли. Могло ли оказаться так, что теперь три оставшихся числа стали образовывать арифметическую прогрессию?

39. а) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого является точным квадратом, а третья часть — точным кубом.

б) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого является точным кубом, а третья часть — точным квадратом.

в) Существует ли натуральное число, половина которого является точным квадратом, третья часть — точным кубом, а пятая часть — точной пятой степенью?

40. Саша вычислил произведение всех натуральных чисел от 1 до 52 включительно и записал на доске ответ. Однако две цифры (они отмечены символами x и y) он написал неразборчиво, а все стоящие в конце нули стёр. В результате на доске оказалось число

$$80658175170943878571660636856403766975289505440883277 8yx.$$

а) Сколько нулей стёр ученик?

б) Найдите цифру, отмеченную символом x.

в) Найдите цифру, отмеченную символом y.

41. Найдите наименьшее натуральное число, у которого

а) произведение всех его делителей равно 131.

б) число (количество) его делителей равно 131.

в) сумма трёх меньших и наибольшего его делителя равна 131.

42. Набор состоит из первых 22 натуральных чисел: 1; 2; 3;...; 21; 22.

А) Какое наибольшее количество чисел этого набора необходимо перемножить, чтобы получить куб натурального числа?

Б) Какое наибольшее количество чисел этого набора необходимо перемножить, чтобы получить квадрат натурального числа?

В) Какое наибольшее количество чисел этого набора необходимо перемножить, чтобы получить квадрат нечетного натурального числа?

43. А) Представьте 1 в виде суммы трех попарно различных дробей вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число.

Б) Представьте 1 в виде суммы пяти попарно различных дробей вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число.

В) Докажите, что 1 можно представить в виде суммы любого (большего двух) количества попарно различных дробей вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число.

Тригонометрические уравнения 2.

Решите уравнения.

1. $\log_{\cos x}(2\sin 2x + 5\cos^2 x) = 2.$

2. $\dfrac{\operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{\cos x}} = 0.$

3. $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\operatorname{tg}^2 2x + 1} = 0.$

4. $\sqrt{\sin 2x} + \operatorname{tg} x = 0.$

5. $\dfrac{\cos 2x + \cos x}{\sqrt{\sin x} + 1} = 0.$

6. $\dfrac{6\cos^2 x + \cos x - 2}{\sqrt{x - \dfrac{\pi}{3}}} = 0.$

7. $\sqrt{\sin(x - \dfrac{\pi}{6})} \cdot \cos 2x = \sqrt{\sin(x - \dfrac{\pi}{6})}.$

8. $1 + 6\sin x \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) + 9\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \cos^2 x.$

9. $\sin x - \cos x = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.$

10. $\cos(x - \dfrac{\pi}{6}) - \sin(x - \dfrac{\pi}{6})\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

11. $\dfrac{4\operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{ctg} x}{5\cos^2 x - 3\cos x} = 0.$

12. $\dfrac{3\operatorname{ctg}^2 x + 4\operatorname{ctg} x}{5\cos^2 x - 4\cos x} = 0.$

13. $\dfrac{5\cos^2 x + 3\cos x}{3\operatorname{tg} x + 4} = 0.$

14. $\dfrac{(41\sin^2 x - 16)(5\operatorname{tg} x + 4)}{\sqrt{41}\cos^2 x - 5\cos x} = 0.$

15. $\dfrac{24\operatorname{ctg} 2x + 7}{50\cos^2 x - 32} = 0.$

16. $(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{x}) \cdot \sqrt{10x - \sqrt{x}} = 0.$

17. $\operatorname{tg} x \cdot \log_2 x + 2 = 2\operatorname{tg} x + \log_2 x.$

18. $\sqrt{1 - \dfrac{1}{\sin x}} = \operatorname{ctg} x.$

19. $\dfrac{6\cos^3 x + \cos^2 x - \cos x}{\sqrt{-2\operatorname{ctg} x}} = 0.$

20. $\sqrt{5\cos x - \cos 2x} = -2\sin x.$

21. $\dfrac{\sin 6x}{\sin 4x} = 1.$

22. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} 4x.$

23. $\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x} = 1.$

24. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\cos x + \cos 3x} = 1.$

25. $\dfrac{5\sin^2 x + (12 - 5\sqrt{3})\sin x\cos x - 12\sqrt{3}\cos^2 x}{\sqrt{5 - 13\cos x}} = 0.$

Стереометрия.

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB = 8$, $AD = 7$, $AA_1 = 5$. Точка E принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении $1 : 4$, считая от вершины D. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C, E и A_1.

Ответ: $\sqrt{4209}$.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

3. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4 : 3$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

Ответ: б) 90.

4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной 2, а высота призмы равна 1. Точка E лежит на диагонали BD_1, причём $BE = 1$.

а) Постройте сечение призмы плоскостью A_1C_1E.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью ABC.

Ответ: б) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

5. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания AB равна 6, а боковое ребро AA_1 равно $4\sqrt{3}$. На ребрах AB, A_1D_1 и C_1D_1 отмечены точки M, N и K соответственно, причем $AM = A_1N = C_1K = 1$.

а) Пусть L — точка пересечения плоскости MNK с ребром BC. Докажите, что $MNLK$ — квадрат.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MNK.

Ответ: 55

6. В треугольной пирамиде $ABCD$ двугранные углы при ребрах AD и BC равны. Известно, что $AB = BD = DC = AC = 5$.

а) Докажите, что $AD = BC$.

б) Найдите объем пирамиды, если двугранные углы при AD и BC равны 60°.

Ответ: $\dfrac{10\sqrt{15}}{3}$

Неравенства.

Решите неравенства.

1. $243^x - 3^{5x-2} \geqslant 7$.

2. $4 \cdot 4^x - 33 \cdot 2^x + 8 \leqslant 0$.

3. $4^{x^2-x} - 10 \cdot 2^{x^2} + 2^{2x+4} \geqslant 0$.

4. $\dfrac{6}{4^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2} < 1$.

5. $2^{\frac{x}{x+1}} - 2^{\frac{5x+3}{x+1}} + 8 \leqslant 2^{\frac{2x}{x+1}}$.

6. $4^x + 4^{-x} \geqslant 1,7\left(2^x + 2^{-x}\right)$.

7. $\log_{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}(x^2 + x) \geqslant 0$.

8. $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \leqslant 256$.

9. $\log_7(x + 2) - 3\log_{x+2} 7 + 2 > 0$.

10. $\log_{x^2}(x-1)^2 \leqslant 1$.

11. $\log_{\frac{1}{x}}(2,5x - 1) \geqslant -2$.

12. $\dfrac{1}{\log_{27x} x} \geqslant \log_3 \dfrac{x}{3}$.

13. $\log_{x^2+1}(x-3)^2 \cdot \log_{x^2+1}\left(\dfrac{(x-3)^2}{(x^2+1)^3}\right) \leqslant -2$.

14. $\dfrac{2^{\log_{\frac{x}{2}} 3} - 3}{2 - \log_{\frac{x}{128}} \frac{x}{64}} \geqslant 0$.

15. $(4^{x^2-x-6} - 1) \cdot \log_{0,25}(4^{x^2+2x+2} - 3) \leqslant 0$.

16. $\log_{9x} 3x + \log_{3x^2} 9x^2 \leqslant 2,5$.

17. $\log_{x+1}(4x^2 - 4x + 1) \cdot \log_{1-2x}(6x + 6) \geqslant 2$.

18. $\left(x + \dfrac{4}{x}\right) \cdot \log^2_{6-x}(x^2 - 8x + 16) \geqslant 5 \cdot \log^2_{6-x}(x^2 - 8x + 16)$.

19. $\log_{|x+3|}(2 + 4x + x^2) \leqslant 2$.

20. $\log_{x^2}\left(\dfrac{4x-5}{x-2}\right)^2 \leqslant 1$.

21. $4^x \cdot \log_{x^2}(x+2)^6 \leqslant 14^x \cdot \log_{x^2}(x+2)^{11} + 7^{2x+1} \cdot \log_{x^2}(x+2)^5$.

22. $\log_{x^2-2}(x^4 - 4) \leqslant 2 + \dfrac{1}{\log_3(x^2-2)}$.

23. $\log_{0,5}\left(5^{1+\lg x} - 0,5^{1+\lg x}\right) \geqslant -1 + \lg x$.

24. $\left|\log_{x+1}\sqrt{(x-2)^4} + 2\right| \geqslant \log_{\frac{1}{x+1}}\sqrt{(x-2)^6} - 3$.

25. $\left|\log_{x+1} 2 + \log_2 \dfrac{x+1}{4}\right| + |\log_2(4x+4) + \log_{x+1} 2| < 5$.

26. $\dfrac{9}{\log_{1,9} x \log_{2,1}(x-10)^2} \geqslant \dfrac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\log_{1,9} x \log_{2,1}(x-10)^2}$.

27. $\dfrac{3\lg x - \log_x 10x^2}{2\lg x + \log_x 1000x^5} \leqslant \dfrac{2\lg^2 x - \lg \dfrac{x^3}{10}}{3\lg \dfrac{x}{10} \lg 10x + 7\lg 10x}$.

28. $\dfrac{\log_4(x^4 - 4x^3 + 4x^2) + \log_{0,25}(6x^2 - 12x - 9)}{x^2 - 2x - 8} \geqslant 0$.

29. $x \geqslant \log_2(101 \cdot 10^x - 10^{2+2x}) - \log_5(101 \cdot 2^x - 5^{2+x} \cdot 2^{2+2x})$.

30. $\sqrt{2x^2 + 3x - 35} + \sqrt{2x^2 + x - 36} \leqslant |2x + 1|$.

Вклады и кредиты.

1. В январе 2000 года ставка по депозитам в банке «Возрождение» составила $x\%$ годовых, тогда как в январе 2001 года — $y\%$ годовых, причем известно, что $x + y = 30\%$. В январе 2000 года вкладчик открыл счет в банке «Возрождение», положив на него некоторую сумму. В январе 2001 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение x при котором сумма на счету вкладчика в январе 2002 года станет максимально возможной.

Ответ: 25

2. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов. К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Ответ: 60

3. В конце августа 2001 года администрация Приморского края располагала некой суммой денег, которую предполагалось направить на пополнение нефтяных запасов края. Надеясь на изменение конъюнктуры рынка, руководство края, отсрочив закупку нефти, положила эту сумму 1 сентября 2001 года в банк. Далее известно, что сумма вклада в банке увеличивалась первого числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на первое число предыдущего месяца, а цена барреля сырой нефти убывала на 10% ежемесячно. На сколько процентов больше (от первоначального объема закупок) руководство края смогло пополнить нефтяные запасы края, сняв 1 ноября 2001 года всю сумму, полученную из банка вместе с процентами, и направив ее на закупку нефти?

Ответ: 96

4. Техническая реконструкция предприятия была проведена в 4 этапа. Каждый из этапов продолжался целое число месяцев и сопровождался падением производства. Ежемесячное падение производства составило на первом этапе 4%, на втором — $6\frac{2}{3}\%$, на третьем — $6\frac{1}{4}\%$ и на четвертом — $14\frac{2}{7}\%$ в месяц. По оканчанию реконструкции первоначальный объем производства на предприятии сократился на 37%. Определить продолжительность периода реконструкции.

Ответ: 6 месяцев.

5. По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

Ответ: 8

6. Бизнес-проект «А» предполагает в течение первых двух лет рост вложенных в него сумм на 34,56% ежегодно и на 44% ежегодно в течение следующих двух лет. Проект «Б» предполагает рост на постоянное целое число n процентов ежегодно. Найдите наименьшее значение n, при котором за первые четыре года проект «Б» будет выгоднее проекта «А».

Ответ: 40

7. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать на 5% в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наибольшее значение n, при котором за три года хранения вклад «А» окажется выгоднее вклада «Б» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Ответ: 12

8. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект 10 млн рублей. По итогам каждого года планируется прирост вложенных средств на 15% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: целое число n млн рублей в первый и второй годы, а также целое число m млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьшие значения n и m, при которых первоначальные вложения за два года как минимум удвоятся, а за четыре года как минимум утроятся.

Ответ: $n = 4$ и $m = 1$

9. По бизнес-плану предполагается вложить в четырёхлетний проект целое число миллион рублей. По итогам каждого года планируется прирост средств вкладчика на 20% по сравнению с началом года. Начисленные проценты остаются вложенными в проект. Кроме этого, сразу после начислений процентов нужны дополнительные вложения: по 20 млн рублей в первый и второй годы, а также по 10 млн рублей в третий и четвёртый годы. Найдите наименьший размер первоначальных вложений, при котором они за два года станут больше 150 млн рублей, а за четыре года станут больше 250 млн рублей.

Ответ: 80

10. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме того, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 3 млн рублей. Найдите наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн рублей.

Ответ: 12

11. Вклад планируется открыть на четыре года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего и четвертого годов вклад ежегодно пополняется на 1 млн рублей. Найдите наименьший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет больше 10 млн рублей.

Ответ: 6

12. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Ответ: 2 622 050

13. 31 декабря 2014 года Ярослав взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Ярослав переводит в банк 2 132 325 рублей. Какую сумму взял Ярослав в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Ответ: 6 409 000

14. Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24000 рублей?

Ответ: 6

15. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 1300000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

На какое минимально количество лет можно взять кредит при условии, что ежегодные выплаты были не более 350000 рублей?

Ответ: 5

16. 1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платёж. НА какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. рублей?

Ответ: 9

17. В июле планируется взять кредит на сумму 8052000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года)?

Ответ: 3 110 400

18. В июле планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга, равную 2,16 млн рублей.

Сколько млн. рублей было взято в банке, если известно, что он был полностью погашен тремя равными платежами (то есть за 3 года)?

Ответ: 4,55

19. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 100000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $a\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга.

Найдите число a, если известно, что кредит был полностью погашен за два года, причем в первый год было переведено 55000 руб., а во второй 69000 рублей.

Ответ: 15

20. В июле планируется взять кредит на сумму 4026000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом прошлого года.

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

На сколько рублей больше придется отдать в случае, если кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за 4 года) по сравнению со случаем, если кредит будет полностью погашен двумя равными платежами (то есть за 2 года)?

Ответ: 950 400

21. 1 марта 2010 года Аркадий взял в банке кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 1 марта каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Аркадий переводит в банк платёж. Весь долг Аркадий выплатил за 3 платежа, причем второй платеж оказался в два раза больше первого, а третий — в три раза больше первого. Сколько рублей взял в кредит Аркадий, если за три года он выплатил банку 2395800 рублей?

Ответ: 1923000

22. Алексей взял в банке кредит 10 млн. рублей под 10% годовых. По договору Алексей возвращал кредит ежегодными платежами. В конце каждого года к оставшейся сумме долга добавлялось 10% этой суммы и своим ежегодным платежом Алексей погашал эти добавленные проценты и уменьшал сумму долга. Ежегодные платежи подбирались так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый год (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась 15 млн. рублей. Определите, на сколько лет Алексей брал кредит в банке.

Ответ: 9

23. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На какой минимальный срок следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платеж по кредиту не превысил 1,8 млн рублей?

Ответ: 10

24. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 10 млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Сколько млн рублей составила общая сумма выплат после погашения кредита?

Ответ: 13

25. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 20 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 30% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 47 млн рублей?

Ответ: 8

26. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн рублей на срок 15 лет. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на x% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

Найти x, если известно, что наибольший годовой платеж по кредиту составит не более 1,9 млн рублей, а наименьший — не менее 0,5 млн рублей.

Ответ: 25

27. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

- в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года.

На сколько лет был взят кредит, если известно, что общая сумма выплат после его погашения равнялась 40 млн рублей?

Ответ: 11

28. 15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Ответ: 1

29. Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн.руб. Вася может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит Васе придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом ему придется выплатить сумму, на 180% превышающую исходную. Вместо этого, Вася может какое-то время снимать квартиру (стоимость аренды 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц на покупку квартиры сумму, которая останется от его возможного платежа банку (по первой схеме) после уплаты арендной платы за съемную квартиру. За какое время в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Ответ: 150 мес

30. В июле 2016 года планируется взять кредит в размере 4,2 млн. руб. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года.

— с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.

— в июле 2017,2018 и 2019 годов долг остается равным 4,2 млн. руб.

— суммы выплат 2020 и 2021 годов равны.

Найдите r, если долг выплачен полностью и общие выплаты составили 6,1 млн. рублей.

Ответ: 10%.

Экстремальные задачи.

1. В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Ответ: 21 мальчик и 2 мальчика, 20 девочек.

2. Зависимость объема Q (в шт) купленного у фирмы товара от цены P (в руб. за шт.) выражается формулой $Q = 15000 - P$, $1000 \leqslant P \leqslant 15000$. Доход от продажи товара составляет PQ рублей. Затраты на производство Q единиц товара составляют $3000Q + 5000000$ рублей. Прибыль равна разности дохода от продажи товара и затрат на его производство. Стремясь привлечь внимание покупателей, фирма уменьшила цену продукции на 20%, однако ее прибыль не изменилась. На сколько процентов следует увеличить сниженную цену, чтобы добиться наибольшей прибыли?

Ответ: 12,5

3. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2 + 2x + 6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px - (0,5x^2 + 2x + 6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Ответ: 10

4. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0,5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. При цене тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

Ответ: 9

5. Фермер должен засеять 260 гектаров подсолнечником и кукурузой. Доход от каждой культуры в хозяйстве фермера является квадратичной функцией с аргументом, равным количеству засеянных гектаров. Каждая из квадратичных функций равна 0 при аргументе, равном 0. Максимальный доход от подсолнечника равен 9 000 000 рублей, если засеять 150 гектаров. Максимальный доход от кукурузы равен 8 000 000 рублей, если засеять 200 гектаров. Найдите, сколько гектаров подсолнечника и сколько гектаров кукурузы должен засеять фермер для получения максимального дохода?

Ответ: 120 и 140.

6. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за за эту неделю они производят $5t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Ответ: 5 800 000 рублей.

7. В некоторой стране решили провести всенародные выборы правительства. Две трети избирателей в этой стране — городские жители, а одна треть — сельские. Президент должен предложить на утверждение проект состава правительства из 100 человек. Известно, что за проект проголосует столько процентов городских (сельских) жителей, сколько человек из города (села) в предложенном проекте. Какое наименьшее число городских жителей надо включить в проект состава правительства, чтобы за него проголосовало более половины избирателей?

Ответ: 51.

8. Колхоз арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60 руб в день, производительность его в мягком грунте составляет 250 м^3 в день, в твердом грунте — 150 м^3 в день. Аренда второго экскаватора стоит 50 руб в день, его производительность в мягком грунте 480 м^3 в день, а в твердом — 100 м^3 в день. Первый проработал несколько полных дней и вырыл 720 м^3. Второй за несколько полных дней вырыл 330 м^3. Сколько дней работал каждый экскаватор, если колхоз заплатил за аренду не более 300 руб.

Ответ: (3;1), (3;2), (4;1).

9. Садовод привез на рынок 91 кг яблок, которые после транспортировки разделил на три сорта. Яблоки первого сорта он продавал по 40 руб., второго сорта — по 30 руб., третьего сорта — по 20 руб. за килограмм. Выручка от продажи всех яблок составила 2170 руб. Известно, что масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта. Сколько килограммов яблок второго сорта продал садовод?

Ответ: 21.

10. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте работают 20 шахтеров, каждый из которых трудится 5 часов в день. При этом один шахтер за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте работают 100 шахтеров, каждый из которых трудится 5 часов в день. При этом один шахтер за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля. Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Ответ: 1050.

11. В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

Ответ: 280.

12. Завод фирмы-монополиста «Маскилон» может производить два типа крупногабаритных товаров: космические корабли и ракеты-носители. Издержки производства космических кораблей и ракет-носителей равны $TC(q_k) = q_k^2 + 2q_k$ и $TC(q_p) = 4q_p$ соответственно. «Маскилон» сбывает товар на удаленных рынках и вынужден осуществлять доставку товара. Кроме «Маскилона», доставлять его товар никто не умеет. Издержки на доставку пренебрежимо малы по сравнению с издержками на производство, но общие транспортные мощности ограничены 10 единицами. Один космический корабль требует 0,5 единицы транспортных мощностей, а одна ракета-носитель — 1 единицу. Монопольные рынки космических кораблей и ракет-носителей независимы друг от друга, а функции спроса на них описываются функциями $Q_k(p_k) = 100 - p_k$ и $Q_p(p_p) = 40 - p_p$ соответственно. Какое количество каждого товара следует произвести «Маскилону», чтобы получить максимальную прибыль?

Ответ: 0 ракет-носителей и 20 космических кораблей.