

15. а) Решите уравнение $2\cos^3 x - \cos^2 x + 2\cos x - 1 = 0$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{7\pi}{3}$

16. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ все ребра равны 5. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB=3$. Через точки K и C_1 проведена плоскость α , параллельная прямой BD_1 .

а) Докажите, что $A_1 P : P B_1 = 1 : 2$, где P – точка пересечения плоскости α с ребром $A_1 B_1$

б) Найдите объем большей из двух частей куба, на которые он делится плоскостью α

Ответ: $\frac{1075}{9}$

17. Решите неравенство:

$$\log_2^2(4 + 3x - x^2) + 7\log_{0,5}(4 + 3x - x^2) + 10 > 0$$

Ответ: $(-1; 0); (3; 4)$

18. К окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, проведена касательная, пересекающая стороны AB и AD в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что периметр треугольника AMN равен стороне квадрата.

б) Прямая MN пересекает прямую CD в точке P . В каком отношении делит сторону BC прямая, проходящая через точку P и центр окружности, если $AM:MB=1:2$?

Ответ: 1:2.

19. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Ответ: 5800000

20 Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0 \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение

Ответ: $(-\infty; -6]; \{2\}; [8; \infty)$

21. На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 2970. В каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 16 заменили на число 61)

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 3 раза меньше, сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 5 раз меньше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наименьшее возможное значение суммы получившихся чисел

Ответ: а) например, 32 раза число 92 и число 26; б) нет; в) 693