Преобразования тригонометрических выражений.

Вычислить:

1. $\cos^2 15^\circ + \cos^2 75^\circ$.

2. $9\,\mathrm{tg}^2\, 390^\circ$.

3. $2\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}(-300^\circ)$.

4. $\cos\dfrac{11\pi}{3}$.

5. $\sin(-\dfrac{7\pi}{6})$.

6. $\sqrt{3}\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

7. $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

8. $\sqrt{5}\cos\alpha$ если $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{2}$ и $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

9. $\sin\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = -\dfrac{3}{4}$, и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

10. $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$, и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

11. $\cos\alpha$, если $\mathrm{ctg}\,\alpha = -\dfrac{4}{3}$, и $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

12. $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

13. $\dfrac{3 - \sin\alpha\cos\alpha}{6\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = -2$;

14. $289\cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{8}{17}$.

15. $120\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0,6$, и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

16. $17\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$, и $-\pi < \alpha < 0$.

17. $25\sin 4\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{20}}$, и $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

18. $-\sqrt{45}\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$, и $\dfrac{5\pi}{2} < \alpha < 3\pi$.

19. $\sqrt{72}\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

20. $\sin(\pi + 2\alpha)$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$;

21. $\sin x$, если $\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2} = 0,6$;

22. $51\sin 2\alpha$ если $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{3}{5}$;

23. $\cos\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = -3$;

24. $(6 + 12\sqrt{6})\cos(\alpha - \dfrac{\pi}{3})$, если $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

25. $7\sin(\alpha + \dfrac{\pi}{6})$, если $\sin\alpha = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$, и $-\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$.

26. $2,8\cos(\dfrac{\pi}{3} + 2\alpha)$, если $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

Тригонометрические уравнения.

Решите уравнения:

1. $\sin x = 0.$ **2.** $\cos x = 0.$ **3.** $\operatorname{tg} x = 0.$

4. $\operatorname{ctg} x = 0.$ **5.** $\sin x = 1.$ **6.** $\cos x = -1.$

7. $\sin x = -\dfrac{1}{2}.$ **8.** $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}.$ **9.** $\sin 3x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

10. $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$ **11.** $\operatorname{tg} \dfrac{2x}{5} = 1.$ **12.** $2\cos(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{6}) = \sqrt{3}.$

13. $2\sin(3x - \dfrac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}.$ **14.** $\sqrt{3}\operatorname{tg}(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{3}) = 3.$ **15.** $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi x - \pi}{4} = 1.$

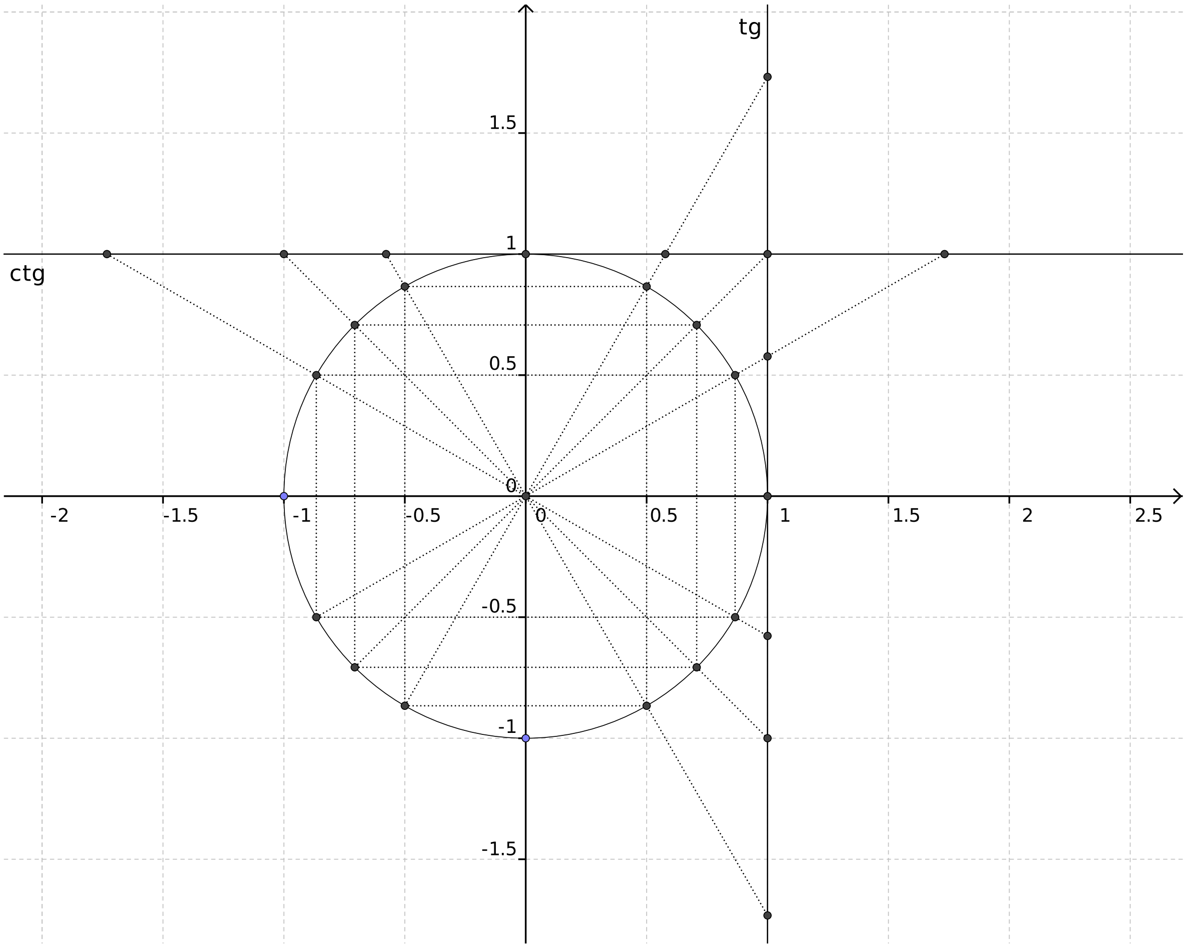
16. $\sqrt{3} + 2\cos\dfrac{\pi x}{9} = 0$ на промежутке $8 < x < 20.$

17. $1 - \sqrt{2}\sin\dfrac{\pi x}{4} = 0$ на промежутке $1 < x < 5.$

Решите системы:

18. $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi n}{3}, & n \in \mathbb{Z}; \\ x = \pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ **19.** $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, & n \in \mathbb{Z}; \\ x = (-1)^k\dfrac{\pi}{4} + \pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z}; \\ x \neq (-1)^k\dfrac{\pi}{3} + \pi k, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos\dfrac{x}{2} \neq 0. \end{cases}$



Решите уравнения:

22. $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}=0.$

23. $\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}}=0.$

24. $\dfrac{\cos x-0,5}{\cos(x+\frac{\pi}{6})}=0.$

25. $\dfrac{\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin x-0,5}=0.$

26. $\dfrac{2\cos^2 x-1}{\operatorname{tg} x+1}=0.$

27. $\cos x(\operatorname{tg}^2 x-\dfrac{1}{3})=0.$

28. $\dfrac{4\sin^2 x-3}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}=0.$

29. $\dfrac{4\cos^3 x-\cos x}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}=0.$

30. Найдите все корни уравнения $(2\sin x+1)(2\sin x-\sqrt{3})=0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x>0$.

31. Найдите все корни уравнения $(\sqrt{2}\sin x+1)(2\sin x-3)=0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x<0$.

32. Найдите все корни уравнения $(\operatorname{tg} x+\sqrt{3})(2\cos x-1)=0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x>0$.

33. Найдите все корни уравнения $(\operatorname{tg} x-1)(\sqrt{2}\sin x+1)=0$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<0$.

34. Найдите все корни уравнения $(\sqrt{2}\cos x-1)(2\cos x+1)=0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x<0$.

35. Найдите все корни уравнения $(2\cos x+\sqrt{3})(3\cos x+4)=0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x>0$.

36. Найдите все корни уравнения $2\cos^2 x+\sqrt{3}\cos x=0$, удовлетворяющие неравенству $\sin x<0$.

37. Найдите все корни уравнения $\sqrt{2}\sin^2 x=\sin x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<0$.

38. Найдите все корни уравнения $\operatorname{tg}^2 x=\sqrt{3}\operatorname{tg} x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x<0$.

39. Найдите все корни уравнения $3\operatorname{tg}^2 x=1$, удовлетворяющие неравенству $\sin x<0$.

40. Найдите все корни уравнения $\cos^2 x=1-\sin x$, удовлетворяющие неравенству $\cos x\leqslant 0$.

Тригонометрические уравнения с нетабличными решениями.

Решите уравнения и найдите корни, принадлежащие указанному промежутку:

1. $\sin x = \dfrac{1}{3}$, $[\pi; 3\pi]$.

2. $3\cos x = -1$, $[\pi; 3\pi]$.

3. $\operatorname{tg} x = -2$, $[-2\pi; \pi]$.

4. $\operatorname{ctg} x = 5$, $[3\pi; 4\pi]$.

5. $\sin 3x = \sin 3$, $[-\pi; 0]$.

6. $2\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$, $[2\pi; 3\pi]$.

7. $7\sin 4x + 3 = 0$, $[0,5\pi; 1,5\pi]$.

8. $1 - 4\cos 2x = 0$, $[4\pi; 5\pi]$.

9. $3\cos\dfrac{x}{3} = \dfrac{1}{3}$, $[\pi; 7\pi]$.

10. $\cos 5x = \cos 5$, $[2,4\pi; 3\pi]$.

11. $4\cos 4x = -3$, $[-\pi; -0,25\pi]$.

12. $\operatorname{tg} 3x = 3$, $[-3\pi; -2\pi]$.

13. $(\operatorname{tg}^2 x - 2)(\operatorname{ctg} 2x + 2) = 0$, $[3,5\pi; 5\pi]$.

14. $(-\operatorname{tg}^2 4x - 2)(4\operatorname{ctg} 4x - 12) = 0$, $[5,5\pi; 6\pi]$.

15. $(8\sin x + 7)(5\cos^3 x + 1) = 0$, $[-8\pi; -6,5\pi]$.

16. $(27\sin^6 x - 1)(27\cos^6 x - 8) = 0$, $[2\pi; 3\pi]$.

17. $\dfrac{4\operatorname{ctg}^2 x + 3\operatorname{ctg} x}{5\cos^2 x - 3\cos x} = 0$, $[2\pi; 4\pi]$.

18. $\dfrac{(41\sin^2 x - 16)(5\operatorname{tg} x + 4)}{\sqrt{41}\cos^2 x - 5\cos x} = 0$, $[2\pi; 4\pi]$.

19. $\dfrac{24\operatorname{ctg} 2x + 7}{50\cos^2 x - 32} = 0$, $[7\pi; 10\pi]$.

20. $\dfrac{(\cos^4 4x - \sqrt{3}\cos^3 4x)(4\operatorname{ctg}^4 4x - 1)}{(\sqrt{3}\sin^4 4x - \sin^3 4x)(4\operatorname{tg}^4 4x + 1)} = 0$, $[1,5\pi; 2\pi]$.

Логарифмические преобразования и вычисления.

Основные формулы $(a>0, a\neq 1, b>0, c>0)$:

1) $a^{\log_a b}=b$, 2) $\log_a a=1$; 3) $\log_a 1=0$;

4) $\log_a b+\log_a c=\log_a bc$; 5) $\log_a b-\log_a c=\log_a \dfrac{b}{c}$; 6) $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$

7) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ $(b\neq 1)$; 8) $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $(c\neq 1)$; 9) $b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$.

Вычислите:

1. $\log_2 16$; $\log_2 \dfrac{1}{8}$; $\log_2 1024$; $\log_2 1$.

2. $\log_{\frac{7}{3}} \dfrac{3}{7}$; $\log_{0,2} \dfrac{1}{25}$; $\log_{2,5} 6\dfrac{1}{4}$; $\log_{\frac{1}{7}} 343$.

3. $\lg 1$; $\lg 10000$; $\lg 0,001$ $\lg 100^{100}$.

4. $\log_{16} 32$; $\log_{625} 125$; $\log_7 7\sqrt{7}$; $\log_{4\sqrt{2}} \sqrt[5]{16}$.

5. $8^{\log_8 32}$; $4^{\log_2 7}$; $0,5^{\log_4 \frac{1}{25}}$; $5^{\log_{\frac{1}{5}} 4}$.

6. $\log_{\frac{16}{9}} \log_{81} 27$; $\log^2_{125} 5\sqrt{5}$.

7. $100^{\lg 9}$; $7^{\log_{\sqrt[3]{7}} \lg 1000}$; $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\log_{27} 7\sqrt{7}}$; $\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{\log_{64} 125}$.

8. $3^{2+\log_3 15}$; $4^{3+\log_4 3}$; $5^{3+\log_5 2}$; $9^{\log_3 4+1}$.

9. $\lg(49^{\log_7 0,8}+25^{\log_5 0,6})$; $6^{\log_6 3+1}-3^{\log_3 6+1}$.

10. $\log_{36} 2+\log_{36} 18$; $\lg 8+\lg 125$; $\log_2 3,2+\log_2 5$; $\log_3 20,25+\log_3 4$.

11. $\log_3 54-\log_3 6$; $\log_2 72-\log_2 9$; $\log_{\sqrt{2}} 14-\log_{\sqrt{2}} 7\sqrt{2}$; $\log_7 \log_2 16-\log_7 28$.

12. $\log_5 0,25-2\log_5 \dfrac{2}{3}+\log_5 \dfrac{16}{9}$; $\log_3 8-2\log_3 2+\log_3 \dfrac{9}{2}$.

13. $\dfrac{\log_2 27}{\log_2 9}$; $\dfrac{\log_7 9}{\log_{\sqrt{7}} 9}$; $\dfrac{\log_5 2+\log_5 3}{\log_5 36}$; $\dfrac{\log_5 49}{\log_5 21-\log_{25} 9}$.

14. $\dfrac{\log_8 20}{\log_8 5}+\log_5 0,05$; $\dfrac{\log_2 600}{\log_2 12}+\log_{12} 0,02$.

15. $\log_5 3\cdot\log_3 5$; $\log_5 128\cdot\log_2 125$; $49^{\frac{1}{2\log_9 7}}$; $27^{\frac{1}{\log_2 3}}+9^{\frac{1}{\log_5 3}}$.

16. $\log_2(\log_{\sqrt{2}} 9\cdot\log_{\sqrt{3}} 2)$; $\dfrac{\log_3 37}{\log_{21} 37}-\log_3 7$; $\dfrac{\log_{12} 30}{\log_3 30}+\log_{12} 4$; $\log_3 \sqrt{\log_5 4}+\log_9 \log_{64} 5$.

17. $\dfrac{\log_2^2 14+\log_2 14\cdot\log_2 7-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}$; $\dfrac{\log_4(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2+\log_2(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{27^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\log_3 4}+2^{\frac{1}{\log_8 0,5}}}$.

18. $2^{\frac{\log_2 5}{\log_5 2}}-5^{\log_2 5}$; $3^{2+\frac{\log_3 4}{\log_4 3}}-9\cdot 4^{\frac{1}{\log_4 3}}+4^{1+\log_4 25}$.

Найдите значение выражения:

19. $\log_6(18a)$, если $\log_6 3a=0,3$.

20. $2\lg a+\lg b$, если $\lg(0,001a^2b)=2,5$.

21. $\log^2_{\sqrt[3]{a}} b+\log_{\sqrt[3]{b}} a$, если $\log_b a=3$.

22. $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{b}}+\dfrac{1}{4}\log_{\frac{\sqrt{b}}{a^2}} b\sqrt{a}$, если $\log_a b=14$.

23. $\log_a b$, если $\log^2_{a^2b} ab^2=4$.

24. $\log_{ab} \dfrac{\sqrt{b}}{a}+\log_{\sqrt{ab}} b+\log_a \sqrt[3]{b}$, если $\log_{b\sqrt{a}} \dfrac{b}{a}=\dfrac{2}{5}$.

25. $(\log_4 6+\log_6 4+2)(\log_4 6-\log_{24} 6)\log_6 4-\log_4 6$.

Показательная и логарифмическая функции.

Свойства показательной функции $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1:$

(1) Область определения функции — множество всех действительных чисел ($x \in \mathbb{R}$).

(2) Область значений функции — множество всех действительных положительных чисел, т.е. $a^x > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

(3) При $a > 1$ функция возрастает: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$.

(4) При $0 < a < 1$ функция убывает: $x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$.

(5) $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$.

Свойства логарифмической функции $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1:$

(1) Область определения функции — множестао всех положительных действительных чисел ($x > 0$).

(2) Область значений функции — множество всех действительных чисел.

(3) При $a > 1$ функция возрастает: $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

(4) При $0 < a < 1$ функция убывает: $0 < x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

(5) $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 > 0$.

(6) $\log_a a^x = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $a^{\log_a x} = x$ для всех $x > 0$.

Построить графики функций:

1. $y = 2^x;\ y = 0,5^x;\ y = \log_2 x;\ y = \log_{1/2} x$.

Найти области определения функций:

2. $y = \log_{0,2} \dfrac{6 - x}{6 + 2x}$.

3. $y = \sqrt{x^2 - 25}\log_{0,1}(42 + x - x^2)$.

4. $y = \log_{3+x}(x^2 - 1)$.

5. $y = \sqrt[12]{\log_9 x - 2}$.

6. $y = \log_{-\cos x}(9 - x^2)$.

7. $y = (x - 3)^{\log_3(5-x)}$.

8. $y = (x - 2)^{\sqrt{x^2-1}}$.

9. $y = \log_{x-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}\right)$.

10. $y = \lg(4 - x^2)\sqrt{\dfrac{1 + \lg^2 x}{\lg x^2} - 1}$.

11. Найдите множество значений функции

$$1)\ y = 2^{\frac{1}{3^x - 1}};\quad 2)\ y = 4^{\frac{1}{1 - 2^x}}.$$

Что больше:

12. $\log_3 5$ или $\log_3 4,5$?

13. $\log_4 25$ или $\log_4 26$?

14. $\log_{0,1}\dfrac{3}{2}$ или $\log_{0,1}\dfrac{2}{3}$?

15. $\log_{\sqrt{2}-1}\dfrac{7}{4}$ или $\log_{\sqrt{2}-1}\dfrac{8}{5}$?

16. $\log_5 3$ или $\dfrac{2}{3}$?

17. $\log_2 5$ или $2\dfrac{1}{3}$?

18. $\log_8 5$ или $\log_6 5$?

19. $\log_{1/3} 10$ или $-2\dfrac{1}{5}$?

Решить уравнения:

20. $\log_2(x + 1) = 2$.

21. $\log_{0,5}(5 - x) = -2$.

22. $(x^2 - 3x - 4)\log_3(3 - x) = 0$.

23. $(x^2 - 5x + 6)\log_3(4x - 9) = 0$.

24. $x^2 - 3^{\log_3 x} = 2$.

25. $x^2 - 6^{\log_6(2x-10)} = 8x - 6$.

26. $4^{\log_2 x} = 5^{\log_5(2x+3)}$.

27. $3^{\log_3(x^2-7)} = 0,3^{\log_{0,3}(6x)}$.

28. $\log_{-x}(x + 6) = 2$.

29. $\log_x(4x + 12) = 2$.

30. $\log_{x+1}(x^2 + 3x - 1) = 2$.

Дробно - рациональные неравенства.

Решите неравенства:

1. $2(x+2) < 2x+5$.
2. $-\frac{1}{8} \leqslant \frac{2x+3}{4} \leqslant -0,25$.
3. $\frac{4}{7} \leqslant \frac{1-3x}{4} \leqslant 1,15$.
4. $\frac{x}{x-3} \leqslant 0$.
5. $\frac{2x+3}{x} \leqslant 1$.
6. $\frac{3x}{x^2-x+2} \leqslant 0$.
7. $(x+1)(x-3)(2x+1)(x-7)x > 0$.
8. $x^4-5x^2+4 \geqslant 0$.
9. $\frac{(x+3)(x-4)x}{(x+1)(x+2)} \leqslant 0$.
10. $\frac{(4+x)^3(x+3)(x-1)^3(x-2)^2}{-3(-5-x)^4(16-4x)^4} > 0$.
11. $\frac{(5-2x)(x+3)}{(2x-7)(6-5x)} \leqslant 0$.
12. $\frac{(x^2+2x-3)(x^2-16)}{(x^2-1)(x^2-9)} \geqslant 0$.
13. $\frac{7}{x} > \frac{x}{7}$.
14. $\frac{5}{x} - \frac{3}{3-x} < 0$.
15. $\frac{3x+2}{x^2+x-2} < -1$.
16. $\frac{x^2+4x-1}{x^2+4x+3} \leqslant \frac{1}{x+1}$.
17. $\frac{x^3-8}{x^3-1} \leqslant \frac{x-2}{x-1}$.
18. $\frac{1}{2x^2-5x} + \frac{4}{25-4x^2} \geqslant \frac{2}{25+10x}$.
19. $(x^2+x+1)^2 < 5x^2+5x-1$.
20. $x(x+1)(x+2)(x+3) \leqslant 24$.
21. $(x^2-3x-2)(x^2-3x+1) < 10$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. $x^2 > 4$.
2. $x^2+x+1 > 0$.
3. $9x^2-6x+1 \leqslant 0$.
4. $(x-2011)(2012-x) > 0$.
5. $-\frac{7}{6} \leqslant \frac{4x-5}{9} < -0,24$.
6. $\frac{4x+3}{2-0,5x} > 0$.
7. $\frac{x+2}{x+1} < 2$.
8. $\frac{x^2-4x+4}{x^2-1} \leqslant 0$.
9. $(x^2-3x-4)x > 0$.
10. $x^4-13x^2+36 < 0$.
11. $\frac{2-3x}{2x+5} \leqslant 0$.
12. $\frac{9}{x} > \frac{x}{4}$.
13. $\frac{(x+1)(x^2+1)}{(2x-1)(x^2+x+1)} \leqslant 0$.
14. $\frac{9-x^2}{4x^4-25} \geqslant 0$.
15. $\frac{1}{x} + \frac{5}{x+2} < 0$.
16. $\frac{x^2+2x+3}{x^2-4x+3} > -3$.
17. $x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 1,7\left(x+\frac{1}{x}\right)$.
18. $(x^2-x-1)(x^2-x-7) < -5$.

Неравенства с модулями.

Это должен знать каждый:

- $|A| < B \Longleftrightarrow -B < A < B$;
- $|A| > B \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} A > B \\ A < -B \end{array}\right.$
- $|A| < |B| \Longleftrightarrow A^2 < B^2$;

Решите неравенства:

1. $|x-2| > 2$.

2. $|x+1| > -3$.

3. $|x-1| \leqslant -4$.

4. $|x-3| < 2$.

5. $|x^2-1| > 0$.

6. $||x-4|-2| < 1$.

7. $\dfrac{1}{|2-x|} > 1$.

8. $|x+2|-|x| > 0$.

9. $|x^2-2x| \geqslant x$.

10. $|x^2+2x| \leqslant -x$.

11. $|x^2+2x-1| < 2x+3$.

12. $|2x^2-9x+15| \geqslant 20$.

13. $1+x+|x^2-x-3| < 0$.

14. $|x-2x^2| > 2x^2-x$.

15. $|2x-|x-2|| < 3$.

16. $|2x+1-|3x+1|| \leqslant x+2$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. $|x+1| > 5$.

2. $|x^2-2x| \leqslant -1$.

3. $|2x-1| \leqslant 7$.

4. $|x^2-25| \leqslant 0$.

5. $||x-5|-3| \geqslant 2$.

6. $|x^2+5x| < 6$.

7. $\left|\dfrac{2x-1}{x+2}\right| \leqslant 4$.

8. $|x^2+6x+8| \leqslant -x^2-6x-8$.

9. $|x^2-3x+2| \geqslant |x-1|$.

10. $||3x+1|+x+1| \geqslant 2$.

Иррациональные неравенства.

$$1)\sqrt{f(x)} < g(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant f(x) < g^2(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases};$$

$$2)\sqrt{f(x)} > g(x) \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x) \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \geqslant 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Решите неравенства:

1. $\sqrt{x-8} > 3$.

2. $\sqrt{2-4x} < 4$.

3. $\sqrt{3x-6} < 3$.

4. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1$.

5. $\sqrt{2-x} < -x$.

6. $\sqrt{x+1} > x-1$.

7. $\sqrt{2x-1} < x$.

8. $\sqrt{x^2+3x+2} > 3-x$.

9. $\sqrt{x+9} > 3-x$.

10. $x-3 \geqslant \sqrt{9-x^2}$.

11. $\sqrt{3+4x} \geqslant \sqrt{6x-9}$.

12. $\sqrt{22+x} - \sqrt{3-x} < 5$.

13. $\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x} < 3$.

14. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} \geqslant 3$.

15. $\sqrt{2-\sqrt{x+3}} < \sqrt{x+4}$.

16. $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}} \leqslant x+1$.

17. $(9-x^2)\sqrt{x+4} \geqslant 0$.

18. $(x+10)\sqrt{x-4} \leqslant 0$.

19. $(x-12)\sqrt{x-3} \leqslant 0$.

20. $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geqslant 0$.

Показательные неравенства.

1. $8^{5-\frac{x}{3}} > 4.$

2. $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x(2-x)} > 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3x}.$

3. $\frac{(\sqrt{5})^{x-10}}{4^{x-10}} > \frac{5\sqrt{5}}{64}.$

4. $\frac{0,2^{x+0,5}}{\sqrt{5}} > \frac{0,04^x}{25}.$

5. $4^x - 4^{x-1} < 3.$

6. $\frac{7^x - 35}{7^{x-1} + 1} \leqslant -14.$

7. $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}.$

8. $9 \cdot 3^{2x+2} + 3 \cdot 3^{2x+1} - 9^x \leqslant 89.$

9. $3^{1+x} \cdot 2^{1-x} + 3^x \cdot 2^{-x} < 10,5.$

10. $3^{x+2} \cdot 2^{1-2x} \leqslant 20.$

11. $3^{2x-1} < 11^{3-x}.$

12. $9^{x-1} - 36 \cdot 3^{x-3} + 3 < 0.$

13. $2^{2x+1} - 21 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geqslant 0.$

14. $2 \cdot 3^{2x^2} + 4 \leqslant 3^{x^2+2}.$

15. $0,25^{\sqrt{x}} < 2^{3-\sqrt{x}} + 25^{\log_3^{-1} 5}.$

16. $3^{\sqrt{x}} - 3^{1-\sqrt{x}} \leqslant \frac{26}{3}.$

17. $4^{\sqrt{x}} - 2^{\sqrt{x}+1} < 2^{\sqrt{x}+4} - 32.$

18. $15 \cdot 2^{2-2x} + 19 \cdot 2^{-x} > 2.$

19. $4 \cdot 3^{x+2} - 2 \cdot 5^{x+2} \leqslant 5^{x+3} - 3^{x+3}.$

20. $5 \cdot 9^x - 18 \cdot 15^x + 9 \cdot 25^x > 0.$

21. $16^x - 2 \cdot 12^x \leqslant 3^{2x+1}.$

22. $4^{x^2-x} - 10 \cdot 2^{x^2} + 2^{2x+4} \geqslant 0.$

23. $3^{x-1} \geqslant \frac{2 - 3^x}{3^x - 4}.$

24. $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{3-x} \leqslant (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{\sqrt{x+3}}.$

25. $\big||3^x + 4x - 9| - 8\big| \leqslant 3^x - 4x - 1.$

Логарифмические неравенства.

Свойства логарифмической функции $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$:

(1) Область определения функции — множество всех положительных действительных чисел ($x > 0$).

(2) Область значений функции — множество всех действительных чисел.

(3) При $a > 1$ функция возрастает: $0 < x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$.

(4) При $0 < a < 1$ функция убывает: $0 < x_1 < x_2 \Longleftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$.

(5) $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Longleftrightarrow x_1 = x_2 > 0$.

(6) $\log_a a^x = x$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $\quad a^{\log_a x} = x$ для всех $x > 0$.

1. $\log_7(x-1) > \log_7(2x-5)$.

2. $\log_{0,7}(2x-3) > \log_{0,7}(6-x)$.

3. $\log_2(x^2+3x) \leqslant 2$.

4. $\log_{1/3}\left(\dfrac{2-3x}{x}\right) \geqslant -1$.

5. $\log_3(x^2-x) \leqslant \log_3(3x+2)$.

6. $\log_7 x \cdot \log_3 7 < 5$.

7. $\log_5 x \cdot \log_{0,3} 5 < \log_{0,3} 4$.

8. $\log_{1/\sqrt{5}}(x^2-0,8x) \geqslant 2$.

9. $\log_{\pi-3}(x^2+x+31) \leqslant \log_{\pi-3}(10x+11)$.

10. $\log_{0,1}(x^2+x-2) > \log_{0,1}(x+3)$.

11. $\log_4(x-3) + \log_2(x-3) < \dfrac{3}{2}$.

12. $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) + \log_{\frac{1}{3}}(x+24) > -3$.

13. $\log_2(x-1) \leqslant 1 + \log_{0,5} x$.

14. $\log_5 x + \log_{25} x < \log_{1/5}\sqrt{125}$.

15. $\log_{\log_3 2}(2x-3) > 0$.

16. $\log_{\frac{1}{3}} \log_2(x^2-3) > 0$.

17. $\log_2(\log_{1/3}(\log_5 x)) > 0$.

18. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\log_5(x^2-1)} > 1$.

19. $\log_2(x-2) + \log_4(x-3)^2 \leqslant 1$.

20. $\log_2(x^2-3x) \leqslant 5 + \log_{0,5}(x+4)$.

21. $\log_3(3-x) + \log_3(5-x) > \log_3(x+7)$.

22. $\log_{0,1}(x-1) + \log_{0,1}(x-2) \geqslant \log_{0,1}(x+2)$.

23. $\log_{0,3}\dfrac{x+10}{x-2} \leqslant \log_{0,3}(x+3)$.

24. $\log_{\sqrt{3}}\sqrt{x-1} + \log_{\frac{1}{3}} 3 \leqslant \log_{\frac{1}{3}}(x+4) + \log_9 4$.

25. $\log_2(x+3) + \log_2(x^2-4x+1) \geqslant \log_2(11-x)$.

26. $\log_3((x+2)(x+4)) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2) < \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{3}} 7$.

27. $\log_3(x^2+7x+10) + \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{x+5}{9} + 1 \geqslant \log_3(3x^2+16x+20)$.

28. $\log_5(x+2) + \log_5(1-x) \leqslant \log_5((1-x)(x^2-8x-8))$.

29. $\log_2 \dfrac{3x-2}{x-1} + 3\log_8 \dfrac{(x-1)^3}{3x-2} < 1.$

30. $10^{\lg \log_2 x} + \log_2 x \leqslant 4.$

31. $\log_2^2(5-x) - 6\log_2(5-x) + 9 \leqslant 0.$

32. $\dfrac{1}{\log_2 x - 4} > \dfrac{1}{\log_2 x}.$

33. $\dfrac{4}{\lg 10x} - \dfrac{5}{\lg 100x} \geqslant 0.$

34. $\dfrac{\log_2 x - 5}{1 - 2\log_2 x} \geqslant 2\log_2 x.$

35. $\log_{\frac{1}{2}} x \cdot \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} x + 2 \leqslant 0.$

36. $\log_{0,5}^2 x - 3 > 2|\log_{0,5} x|.$

37. $\log_9 x^2 + \log_3^2(-x) < 2.$

38. $\log_{x-4}(2x-9) \cdot \log_{2x-9} \pi \leqslant \log_{x-4}(x-3,8) \cdot \log_{x-3,8} 3.$

39. $\log_3 x < (\log_3 x \cdot \log_3 72 - \log_3 576) \cdot \log_{\frac{x}{3}} 3.$

40. $\log_7 x \cdot \log_3 x - \log_7 3 \cdot \log_3 x \leqslant 12\log_7 3.$

41. $\log_3 x \cdot \log_{0,3} x + \log_3 0,3 \cdot \log_{0,3} x > 6\log_3 0,3.$

42. $\log_{x^2+2}(3x+12) > 1.$

43. $\log_{1-x^2}(5x+5) < 1.$

44. $(4x-1)\log_2 x \geqslant 0.$

45. $x\log_3 x - \dfrac{3}{\log_x 3} \leqslant 0.$

46. $x\log_2\left(\dfrac{x}{3}+2\right) \leqslant 10\log_{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{x}{3}+2\right).$

47. $\log_{x^2} 5 > \log_{x^2} 7.$

48. $\dfrac{\log_{27} x}{\log_3(1+2x)} \leqslant \dfrac{\log_3 \sqrt[3]{2x+1}}{\log_3 x}.$

49. $\log_x 3 < 1.$

50. $\log_{0,5}(2^x - 1) > x - 1.$

51. $\log_{3x} 3 \geqslant \log_x^2 3.$

52. $\sqrt{1 - \log_{1/2} x} < 2.$

53. $\sqrt{\log_3(9x+27)} \geqslant \log_3(x+3).$

54. $\dfrac{\sqrt{2x+1}}{2 + \log_{1/2}(x+1)} \geqslant 0.$

55. $\log_x \log_2(4^x - 12) \leqslant 1.$

56. $\log_x(\log_9(3^x - 9)) < 1.$

57. $\log_{\frac{x}{3}}(\log_x \sqrt{3-x}) \geqslant 0.$

58. $\log_8(2-x) + \log_8(x^3 - x + 2) \geqslant \log_8 2x^3.$

59. $\log_x(x^3 - 8x^2 + 19x - 10) > \log_x(5-x) + \log_x(x-2).$

60. $x^{\lg x} < 1000x^2.$

61. $x \cdot 2^{\log_x 5} \geqslant 10.$

62. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} \leqslant 162.$

Метод рационализации 1.

Если функция $f(x)$ возрастает, то выражение $f(A) - f(B)$ имеет такой же знак, что и выражение $A - B$. В частности, при $A \geqslant 0$ и $B \geqslant 0$ знаки выражений $A - B$ и $A^2 - B^2$ совпадают.

Решите неравенства:

1. $(|x-1|-1)(|x-3|-2) < 0.$

2. $\dfrac{4|2-x|}{4-|x|} - |x-2| \leqslant 0.$

3. $\dfrac{1}{|x+1|-1} \geqslant \dfrac{2}{|x+1|-2}.$

4. $\dfrac{|x-1|-|2x+1|}{|x-2|-|2x+2|} \geqslant 0.$

5. $\dfrac{|x-4|-2-x^2}{|2+x|-|x-6|} > 0.$

6. $\dfrac{|4x-3|-|3x-4|}{|x^2-x-18|-|x^2+x|} \leqslant 0.$

7. $\dfrac{||x^2+x|-3|-3}{||3x+4|-2|-1} \geqslant 0.$

8. $|x^2-5|x|+4| \leqslant |2x^2-3|x|+1|.$

9. $\dfrac{|2x^2-5x|-x^2}{|3x^2-5x|-x^2} \leqslant 0.$

10. $\dfrac{|2x^2-x-3|-x^2-2x-1}{|3x^2+x-2|-x^2-2x-1} \leqslant 0.$

11. $\dfrac{(x-2)^2-3|x-2|-10}{(|x-4|-5)(|3-x^2|-6)} \geqslant 0.$

12. $\dfrac{(|x^2-4|-5)(|x+5|-8)}{(|x-3|-|x-1|)|x|} \geqslant 0.$

13. $\dfrac{|x-3|-2}{|x|-1} \leqslant 2.$

14. $\dfrac{\sqrt{2x^2-5x+2}}{2x^2+6x} \leqslant 0.$

15. $\dfrac{\sqrt{4-3x-x^2}}{2x+3} \geqslant \dfrac{\sqrt{4-3x-x^2}}{x+3}.$

16. $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geqslant \dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$

17. $\dfrac{\sqrt{2x+3}+x-6}{x-5} \geqslant 3.$

18. $\dfrac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{2(5x+1)}}{\sqrt{x+3}-2} \leqslant 0.$

19. $\dfrac{\sqrt{8-x}-|2x-1|}{\sqrt{x+7}-|2x-1|} \leqslant 1.$

20. $\dfrac{|x+5|-\sqrt{2x+18}}{|x-4|-\sqrt{12-3x}} \geqslant 0.$

21. $(\sqrt{3x+5}-\sqrt{x+3})(|x-4|-x^2-2) < 0.$

22. $\dfrac{\sqrt{3x^2-5x+3}-\sqrt{x^2+x+1}}{|2x^2-x-1|-|12x^2+7x+1|} \geqslant 0.$

23.

$$|\sqrt{x^2+x+1}-2x-1|-|\sqrt{x^2+x+1}+2x+2| > 0.$$

24.

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{3x-2}}-\sqrt{x+\sqrt{2x-3}}}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}} \leqslant 0.$$

25. $\dfrac{\sqrt{2x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt[3]{3x^2+4x-2}+\sqrt[3]{3x^2+x-4}} \geqslant 0.$

26. $\dfrac{|x+1|-\sqrt{5-2x-2x^2}}{\sqrt[3]{x^3+2x^2-5x+2}-x} \leqslant 0.$

27.

$$\frac{(\sqrt{1+2x^2}-1-x^2)\cdot(|2x+3|-|3x+2|)}{(x^2-5x+4)\cdot(\sqrt{x+5}+1-x)\cdot(x^{99}-1)} \leqslant 0.$$

28.

$$\frac{((2x-1)^5-(x+1)^5)\cdot(\sqrt[3]{x^2-6}+\sqrt[3]{x})}{\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+2}} \leqslant 0.$$

29. $\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-\sqrt[3]{x-1}-2}{|x+3|-\sqrt{x^2-2x-3}} \leqslant 0.$

30.

$$\frac{(\sqrt{7-x}-x-5)\cdot(\sqrt{11-4x}-x-2,5)}{\sqrt{5+3x-2x^2}\cdot(|4x-3|-|6x+1|)} \leqslant 0.$$

Метод рационализации 2.

При всех допустимых значениях переменных a, b и c

- $\log_a b$ имеет такой же знак, что и выражение $(a-1)(b-1)$;
- $\log_a b - \log_a c$ имеет такой же знак, что и выражение $(a-1)(b-c)$;
- $a^b - a^c$ имеет такой же знак, что и выражение $(a-1)(b-c)$.

1. $\dfrac{\log_2(2x)\cdot\log_{0,5x}x^2}{\log_{0,125x}8}\leqslant 0.$

2. $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_{0,125x}2}{\log_{0,5x}2}\leqslant 0.$

3. $\dfrac{x^2-4}{\log_{0,5}(x^2-1)}<0.$

4. $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0.$

5. $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\dfrac{x}{3}\right)>0.$

6. $\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(2x^2+x-1)\geqslant\log_{\frac{3x-1}{x+2}}(11x-6-3x^2).$

7. $\log_{\frac{2x-1}{x}}5<\log_{\frac{2x-1}{x}}x.$

8. $\log_{6x^2-5x+1}2>\log_{\sqrt{6x^2-5x+1}}2.$

9. $\log_{x^2}(9-8x)\geqslant 1.$

10. $\log_{2x+3}x^2<1.$

11. $\dfrac{\log_{2x-1}(\log_2(x^2-2x))}{\log_{2x-1}(x^2+6x+10)}\leqslant 0.$

12. $\dfrac{\log_{0,2}\dfrac{1}{2x-1}+\log_5(2-x)}{\log_5(2x-1)+\log_{0,2}\dfrac{1}{3-2x}}\geqslant 0.$

13. $\dfrac{2\log_3(x^2-4x)}{\log_3 x^2}\leqslant 1.$

14. $\dfrac{2\log_5(x^2-5x)}{\log_5 x^2}\leqslant 1.$

15. $|x|^{x^2-x-2}<1.$

16. $|x+1|^{x^2+5x}\geqslant 1.$

17. $\dfrac{3^x-25}{x+1}\leqslant\dfrac{3^x-25}{x-3}.$

18. $\dfrac{2x^2-11x+15}{2^x-6}<0.$

19. $\dfrac{\sqrt{3^{2x+1}-4\cdot 3^x+1}}{x^2-x-6}\leqslant 0.$

20. $6^x\geqslant 3\sqrt{3}\cdot 2^x+32\cdot 2^2\cdot 3^x-64\sqrt{108}.$

21. $x^2\cdot 2^{x+2}-12x^2\cdot 3^x+3^{x+1}>2^x.$

22. $\sqrt{6-x}\cdot(2\cdot 9^{2x}-53\cdot 3^{2x}-27)\geqslant 0.$

23. $\dfrac{\log_2(2x^2-13x+20)-1}{\log_3(x+7)}\leqslant 0.$

24. $\dfrac{x+1-\log_3 9x}{1-\log_3 x}\geqslant 1.$

25. $\dfrac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}\geqslant 1.$

26. $\dfrac{12^x-4^{x+1}-3^{x+1}+12}{x^2-2x+1}<0.$

27. $x^{2-\log_2^2 x+2\log_{1/2}x}>\dfrac{1}{x}.$

28. $(x^2+1)^{2+x}>(x^2+1)^{5x-3}.$

29. $\log_{\sqrt[3]{x-3}}\left(\dfrac{x-10}{x^2-6x+5}\right)+3\leqslant 0.$

30. $\log_{3x+2}(6x^2+19x+10)\leqslant 3+\dfrac{1}{\log_2(3x+2)}.$

31. $\dfrac{(7x-x^2+98)\sqrt{x+6}}{\log_2|x-12|-4}\geqslant 0.$

32. $\log_{0,5x-2}\left(\log_4\left(\dfrac{12}{\sqrt{3x-12}}\right)\right)\leqslant 0.$

33. $\log_{3x-5}2\leqslant\log_{x-1}\sqrt{2}.$

34. $\log_{\log_2(x/2)}(x^2-10x+22)>0.$

35. $\lg^2\dfrac{(x-3)^2\cdot(x-2)}{18}>\lg^2\dfrac{(x-2)}{2}.$

36. $\dfrac{2\log_{2^{x-1}}|x|}{\log_{2^{x-1}}(x+7)}\leqslant\dfrac{\log_3(x+12)}{\log_3(x+7)}.$

37. $\dfrac{\log_{2^{x+4}}4}{\log_{2^{x+4}}(-8x)}\leqslant\dfrac{1}{\log_2\log_{\frac{1}{2}}2^x}.$

38. $\dfrac{\log_{3^{x+4}}27}{\log_{3^{x+4}}(-81x)}\leqslant\dfrac{1}{\log_3\log_{\frac{1}{3}}3^x}.$

39. $\log_{\frac{1}{36}}(22-3x)\cdot\log_{8-x}\dfrac{1}{6}\geqslant 1.$

40. $\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2)\leqslant 2.$

41. $\log_{|x-2|}(2-|x-1|)<1.$

42. $\dfrac{9}{\log_{1,9}x\log_{2,1}(x-10)^2}\geqslant\dfrac{(x-1)^{\log_3(x-1)}}{9\log_{1,9}x\log_{2,1}(x-10)^2}.$

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $\sqrt{3}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=\sin 2x$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 1,5\pi]$.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=3$, $BC=4$, $AA_1=12$. Через середину ребра AB перпендикулярно диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите угол, образованный этой плоскостью с основанием параллелепипеда.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $4\cos^2\frac{x}{2}-1=\sin x+\sin 2x$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-1,5\pi; 0,5\pi]$.

2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=AC=10$, а $BC=16$. Высота призмы равна 3. Точка M — середина ребра A_1B_1. Найдите угол между прямой MB и плоскостью BCC_1.

Вариант 3

1. а) Решите уравнение $3\sin^2 x=\cos\left(\frac{3\pi+2x}{2}\right)$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0,5\pi; 2\pi]$.

2. Сторона основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равна 12, а высота равна 9. Найдите расстояние от точки A до плоскости A_1FD.

Вариант 1

1. а) Решите уравнение $\sqrt{3}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)=\sin 2x$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 1,5\pi]$.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB=3$, $BC=4$, $AA_1=12$. Через середину ребра AB перпендикулярно диагонали BD_1 проведена плоскость. Найдите угол, образованный этой плоскостью с основанием параллелепипеда.

Вариант 2

1. а) Решите уравнение $4\cos^2\frac{x}{2}-1=\sin x+\sin 2x$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-1,5\pi; 0,5\pi]$.

2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=AC=10$, а $BC=16$. Высота призмы равна 3. Точка M — середина ребра A_1B_1. Найдите угол между прямой MB и плоскостью BCC_1.

Вариант 3

1. а) Решите уравнение $3\sin^2 x=\cos\left(\frac{3\pi+2x}{2}\right)$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0,5\pi; 2\pi]$.

2. Сторона основания правильной шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ равна 12, а высота равна 9. Найдите расстояние от точки A до плоскости A_1FD.

Вариант 4

1. а) Решите уравнение $6\operatorname{tg}^2 x - \dfrac{13}{\cos x} + 12 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[1{,}5\pi; 3{,}5\pi]$.

2. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $CB = AC = 5$, а $AB = 6$. Высота призмы равна 24. Точка M — середина ребра AA_1, точка K — середина ребра BB_1. Найдите угол между плоскостью основания и плоскостью MKC_1.

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 25^x - 5\cdot 10^x + 4^{x+1} < 0, \\ \log_2^2 x \leqslant \log_2 x. \end{cases}$$

4. Вершина равнобедренного треугольника с боковой стороной 5 и основанием 8 служит центром данной окружности радиуса 2. Найдите радиус окружности, касающейся данной и проходящей через концы основания треугольника.

Вариант 5

1. а) Решите уравнение $3\cos 2x + 13\sin x - 9 = 0$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0{,}5\pi; 2{,}5\pi]$.

2. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 20$, $BC = 10$ и боковой стороной $AB = 13$. Высота призмы равна 9. Найдите расстояние от точки C до плоскости ADC_1B_1.

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{3^{x+1} - 1}{\log_3 x - 2} \leqslant 0, \\ |\log_2 x - 1| \geqslant 2. \end{cases}$$

4. В равнобокой трапеции $ABCD$ основания AD и BC равны соответственно 20 и 8, а боковая сторона равна 10. Через вершину A проведена прямая, делящая площадь трапеции в отношении $1:3$ и пересекающая прямую BC в точке K. Найдите длину отрезка KC.

Вариант 6

1. а) Решите уравнение $\cos x = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2x\right)$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; \pi]$.

2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $BC = 3$, $AB = AA_1 = 4$. Найдите тангенс угла, который образует плоскость ACB_1 с гранью CDD_1C_1.

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |7^x - 1| \geqslant 2, \\ \dfrac{\log_{2x-1} x}{\log_{2x-1}(9x^2 - 12x + 5)} \leqslant 0. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC на стороне AB расположена точка K так, что $AK : KB = 3 : 5$. На прямой AC взята точка E так, что $AE = 2CE$. Известно, что прямые BE и CK пересекаются в точке O. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника BOC равна 20.

Вариант 7

1. а) Решите уравнение $\cos x - 2\sin 2x = 1 + 4\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[0,5\pi; 2,5\pi]$.

2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8, а боковое ребро равно 12. Точка K — середина ребра BB_1. Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости ACK.

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^{\log_3 x} \geqslant 9x, \\ \sqrt{4x^2 - 5x + 1} < 2x. \end{cases}$$

4. В параллелограмме острый угол равен 60°, периметр равен 30, а площадь равна $28\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, касающейся двух сторон и диагонали параллелограмма.

Вариант 8

1. а) Решите уравнение $\log_2(\cos(0,5\pi + x) - \sin x) = \dfrac{1}{2}$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[2,5\pi; 4\pi]$.

2. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ каждое ребро равно $2\sqrt{3}$. Определите расстояние между прямыми AD_1 и CB_1.

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4^{x+0,5} - 35 \cdot 2^x + 48 \leqslant 0, \\ \log_x(x^2 - 7x + 12) \leqslant 1. \end{cases}$$

4. Сторона BC прямоугольного треугольника ABC является диаметром окружности. Эта окружность пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите хорду BK, если известно, что площадь треугольника ABC равна 3, а один катет этого треугольника вдвое больше другого.

Вариант 9

1. а) Решите уравнение $6\sin x\cos 2x + 4 = 8\sin x + 3\cos 2x$.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; 0]$.

2. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб со стороной $2\sqrt{3}$ и углом B, равным 120°. Найдите угол, который образует плоскость ABD_1 с основанием призмы, если известно, что расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 4.

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^{|2\sqrt{3}x - 1|} < 2, \\ \log_x^2(1 - x) - \dfrac{3}{\log_{1-x} x} + 2 \leqslant 0. \end{cases}$$

4. Точка K делит диагональ AC квадрата $ABCD$ в отношении $1:3$. Прямые BK и CD пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника KPC, если сторона квадрата равна 4.