

1. מבוא :

חלוקה של עצמים דמיוניים מתוארת ונחקרת בצורה בה ישנם שני סוגי עצמים, האחד "טוב" עם השלכות חיוביות והשני "רע"³ עם השלכות שליליות. המאמר בא להציע אלגוריתם פולינומי לחלוקה הוגנת שתואם את ההגדרה PROP1, מדובר בבעיה מורכבת בתחום החלוקה ההוגנת שמנסה להגיע למצב אידיאלי של עצמים מחולקים כך שכמעט ולא יהיו Agents ש"יקנאו" בגורם אחר לאחר החלוקה. בחלוקה של עצמים ישנה הפרדה בין עצמים "חיוביים" ו"שליליים", עד כה הצליחו להוכיח ולהראות אלגוריתמים שמצליחים לעמוד בדרישה הנ"ל במקרה ומדובר בעצמים חיוביים בלבד או שליליים בלבד. **החידוש** במאמר הנ"ל הוא אלגוריתם שמצליח לעמוד בדרישת PROP1 וגם ב-fPO כאשר ישנה חלוקה של עצמים "מעורבבים", חיוביים ושליליים ביחד ואת זה המאמר מכוון להוכיח בכל מצב ובכל סיטואציה ללא תלות במספר ה-Agents. כמו כן במאמרים קודמים שכיוונו למימוש דומה הסתמכו מאוד על תנאים מקדימוס כגון CEEI בשונה מהמאמר הנ"ל. מדובר בבעיה פתוחה עד כה שבמאמרים קודמים קיום של חלוקה כזאת הוכח רק במקרה של חלוקת עצמים חיוביים או שליליים בלבד או לחלופין מקרה בו יש רק שני Agents בחלוקה, עד כה לא הוכח אלגוריתם שמבצע את החלוקה במצב של משאבים משולבים.

2. עבודות קודמות :

- a. **Freeman, R., Shah, N., 2019. Recent Advances in Fair Resource Allocation (ACM EC 2019 Tutorial)**
מאמר שמראה את ההתקדמות בתחום החלוקה ההוגנת, אנו משתמשים בו כדי להדגיש את הנושא ש-PROP1 ו-PO הן בעיות פתוחות במקרים בהם האובייקטים מעורבבים. במאמר זה ספציפית גם עצמים שליליים מוצגים כבעיה פתוחה ללא פתרון.
- b. **with Barman, S., Krishnamurthy, S. K., 2019. On the proximity of markets Artificial integral equilibria. In: Proceedings of the 33rd AAAI Conference on Intelligence (AAAI). pp. 1748–1755**
במאמר זה הציגו אלגוריתם פולינומי חזק שתמיד מצליח להגיע למצב של PROP1 ו-PO לחלוקה של עצמים חיוביים. המאמר שלנו מתבסס על חלק מהמתודולוגיות שמוצגות כאן בבניית האלגוריתם. ההבדל המרכזי במימוש כאן הוא שמסתמכים ב CEEI בצורה משמעותית.
- c. **Aziz, H., Caragiannis, I., Igarashi, A., Walsh, T., 2019. Fair allocation of combinations of indivisible goods and chores. In: Proceedings of the 28th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI)**
אחד המחקרים הראשונים שהצליח להציג אלגוריתם שמגיע ל-PROP1 ו-PO למקרה בו המשאבים מעורבבים (שליליים וחיוביים) אך כאן הסטנדרט המקדים הוא שיהיו רק שני Agents. כמו כן, הוצג כאן אלגוריתם למקרה כללי שמגיע לרמת EF1.
- d. **Sandomirskiy, F., Segal-Halevi, E., 2019. Fair division with minimal sharing⁴**
אחד המחקרים המרכזיים שהמימוש במאמר מתבסס עליהם. במאמר הנ"ל מראים אלגוריתם לחלוקה הוגנת שמתבסס על חלוקה של חלק מהאובייקטים המחולקים בין מס' Agents שונים. המאמר מתחיל את החוקה שלו ביצירת מצב בסיס שבו החלוקה כבר הוגנת ומתבסס על העבודה

¹ <https://arxiv.org/pdf/1909.00740.pdf>

² <https://www.britannica.com/science/proportionality>

³ המאמר מתאר את העצם הרע עם המילה Chore שיכולה להתפרש כמטלה, עבודה או נטל כלשהו על המקבל אותה.

⁴ <http://arxiv.org/abs/1908.01669>

שנעשתה כאן בדגש על האלגוריתם וההוכחות. באלגוריתם הראשון במאמר משתמשים מפורשות בפונקציה חישובית ממאמר זה ואף בסיבוכיות של האלגוריתם.

3. הגדרות:

- a. **Agent** – אלו הם הגורמים שלהם מחלקים את העצמים/אובייקטים במחקרים.
- b. **Utility** – ערך של אובייקט/עצם שמחלקים, יכול להיות שלילי או חיובי.
- c. **Pareto Optimality/Efficiency - PO**⁵ – **יעילות פרטו**, מתאר מצב שבו לא ניתן לשפר את יעילות החלוקה על ידי הקצאה מחדש של משאבים מבלי להעדיף גורם אחד על פני גורם אחר, מושג זה לרוב נמצא בשימוש במחקרים חברתיים וכלכליים.
- d. **Fractional Pareto Efficiency - fPO**⁶ – הגדרה חזקה יותר של PO, מצב שבו גם אם ניתן יהיה לחלק עצם בודד לכמה חלקים זה עדיין המצב הכי יעיל.
- e. **Envy-Free up to one item**⁷ – **EF1** – **חלוקה נטולת קנאה לעל היותר בפריט אחד**, מצב בו לכל שני גורמים להם חילקנו את האובייקטים השונים, מספיק להוריד את אחד מהאובייקטים המחולקים מאחד מהם כך שהשני לא יקנא בו.
- f. **Proportional Allocation** – **חלוקה פרופורציונלית**, מצב בו לכלל העצמים המחולקים, כל גורם יעריך את השווי של עצם מסוים יחסית לקבוצה המקבלת. כלומר עם ישנים n אנשים הערך יהיה $1/n$.
- g. **Proportionality Up to One Item**⁸ – **PROP1** – **פרופורציונליות עד לעצם אחד**, בדומה ל EF1 גם כאן לכל גורם שמקבל עצמים, אם נשלים לו עוד עצם אחד זה יבא את הערך של מה שבידו ליחסי לשאר הקבוצה ובכך יביא למצב פרופורציונלי.
- h. **Competitive Equilibrium with Equal Income**⁹ – **CEEI** – **שיוויון תחרותי עם הכנסה שווה**, מצב בחלוקה הוגנת בו לכל Agent יש "הכנסה" שווה, כלומר הוא מתחיל עם סכום שווה לאחרים בו הוא רוכש את האמצעים שבסוף מביא אותם לחלוקה הוגנת.
- i. **הגדרות מתמטיות:**
 - i. **O** – מייצג את קבוצת העצמים שאנחנו מחלקים וכל עצם מיוצג באות m .
 - ii. **N** – מייצג את קבוצת ה-Agents וכל אחד מיוצג באות n .
 - iii. $b_i > 0$ – מייצג את המשקל של כל Agent, כאשר הסכום של כל המשקלים הוא 1.
 - iv. **Integral Allocation**/חלוקה אינטגרלית – מצב שבו כל אובייקט חולק בדיוק ל-Agent אחד. נסמן אותו ע"י π_i אשר יציין את מספר המשאבים שקיבל Agent i .
 - v. $x = (x_1, \dots, x_n)$ – מייצג חלוקה חלקית של אובייקט אחד כאשר כל אינדקס מייצג את העצם החלקי שקיבל Agent i .
 - vi. $x_{i,0}$ – מייצג שבריר של אובייקט o שנמסר ל-Agent.
 - vii. $u_i(o)$ – מייצג את ה-Utility, ערך, של אובייקט מסוים שמחלקים, תלוי מאוד ביעד החלוקה. לחלק מה-Agents יכול להיות שהערך שלו שלילי, לחלק חיובי או ניטרלי (שווה לאפס).
 - viii. **Pareto Improvement** – פרטו שיפור, חלוקה y משפרת פרטו חלוקה x אחרת אם:
$$\forall i \in N : u_i(y_i) \geq u_i(x_i)$$
וגם i כלשהו אי-השוויון ביניהם הוא מתכנס כמה שיותר.
 - ix. **PO** – חלוקה אינטגרלית תקרא PO אם אין חלוקה אינטגרלית אחרת שמשפרת אותה.

⁵ [https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/pareto-optimality#:~:text=Pareto%20optimality%20\(also%20referred%20to,making%20someone%20else%20worse%20off.](https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/pareto-optimality#:~:text=Pareto%20optimality%20(also%20referred%20to,making%20someone%20else%20worse%20off.)

⁶ https://en.wikipedia.org/wiki/Pareto_efficiency#:~:text=Fractional%20Pareto%20efficiency%20is%20a,item%20are%20split%20between%20agents.

⁷ https://en.wikipedia.org/wiki/Envy-free_item_allocation#EF1_-_envy-free_up_to_at_most_one_item

⁸ https://en.wikipedia.org/wiki/Proportional_item_allocation#PROP1_allocations

⁹ [https://www.microsoft.com/en-us/research/publication/fair-allocation-through-competitive-equilibrium-from-generic-incomes/#:~:text=Competitive%20equilibrium%20from%20equal%20incomes,of%20goods%20\(food%20items\)](https://www.microsoft.com/en-us/research/publication/fair-allocation-through-competitive-equilibrium-from-generic-incomes/#:~:text=Competitive%20equilibrium%20from%20equal%20incomes,of%20goods%20(food%20items))

x. fPO – חלוקה שלא ניתנת לשיפור ע"י כל חלוקה חלקית אחרת (Fractional) תקרא fPO, כמובן שכל חלוקה כזאת היא גם PO.
xi. PROP – חלוקה x תהיה במשקל PROP אם:

$$\forall i \in N : u_i(x_i) \geq u_i(O)b_i$$

xii. $PROP^{10}$ – חלוקה אינטגרלית π תקרא כך אם מתקיימים **אחד מהתנאים** הבאים:

$$1. u_i(\pi_i) \geq u_i(O)b_i$$

$$2. \exists o \in O - \pi_i : u_i(\pi_i) + u_i(o) \geq u_i(O)b_i$$

$$3. \exists o \in \pi_i : u_i(\pi_i) - u_i(o) \geq u_i(O)b_i$$

xiii. Consumption Graph/גרף צריכה – לכל חלוקה אינטגרלית או חלקית X, גרף החלוקה המתאים G_x יהיה גרף דו-צדדי כאשר הקודקודים שלו הם איחוד הקבוצות N ו-O וקבוצת הצלעות מוגדרת כך:

$$E = \{\{i, o\} \mid x_{i,o} > 0\}$$

כלומר, אם Agent כלשהו i, חולק אובייקט עם Agent אחר j, הם יהיו שכנים בגרף.
xiv. גרף ללא מעגלים – במקרה שלנו כאשר משמשים בגרף דו-צדדי להצגת חלוקה, חוסר מעגלים בגרף מראה שאין בעצם פירוק של עצמים בחלוקה ושכל אחד הוא שלם ועל כן החלוקה אינטגרלית.

4. אלגוריתם:

נתעמק באלגוריתם 2 – מציאת שדרוג פרטו:

קלט: צירוף נתון של (N, O, u, y) כאשר y הוא חלוקה קודמת שהיא התוצאה של אלגוריתם 1 מהמאמר, אלגוריתם שמחזיר חלוקה $PROP^1$ ו-PO.
פלט: חלוקת fPO משופרת של החלוקה y כך שגרף החלוקה הוא ללא מעגלים.

a. נאתחל גרף צריכה G_x , גרף דו צדדי מלא.

b. נאתחל קבוצה ריקה T^{11} .

c. כל עוד בגרף הצריכה G_x יש מעגל C כלשהו בצע:

i. נפתור LP_T עם ערך אופטימלי, נגדיר אותו כ- opt_T

ii. נחשב סכום מקסימום $\sum_{i \in N} (\sum_{o \in O} u_i(o) \cdot x_{i,o})$ כך שמתקיימים התנאים הבאים:

$$\sum_{i \in N} \sum_{o \in O} u_i(o) \cdot x_{i,o} \geq \sum_{i \in N} \sum_{o \in O} u_i(o) \cdot y_{i,o} - N^{12}$$

לכל הסוכנים (Agents)¹² ב-N - $\sum_{i \in N} x_{i,o} = 1 - O^{13}$

לכל שבר חלוקה ב- T^{14} - $x_{i,o} = 0$

בהתאם, לכל שבר חלוקה אחר בין N ל-O - $x_{i,o} \geq 0$

iii. אם קיים מעגל ב- C^{15} כך שהפתרון האופטימלי opt_T הוא אותו פתרון עם המעגל, אז נכניס את המעגל לקבוצה T^{16} .

d. החזר את החלוקה החדשה X^*

5. הוכחת נכונות:

בחלק הראשון של המאמר הוכחו מספר טענות עבור **אלגוריתם 1** אותו אנו לא מציגים בסיכום זה, עם זאת מכיוון שאנו משפרים אותו חשוב לציין את הלמות שהאלגוריתם מבוסס עליהן.

¹⁰ במאמר הזכירו גם את ההגדרה הספרותית שתארנו בתחילת סעיף ההגדרות

¹¹ ישמש כקבוצה עבור שברי החלוקה, כולם צריכים להתאפס בסוף

¹² כך שהערך בחלוקה הנוכחית יהיה גבוהה מהחלוקה הקודמת אותה אנו משפרים

¹³ סכום כלל שברי החלוקה שם עצם צריך להיות 1, כמו בהגדרה

¹⁴ כלומר אין להם משקל כלל, אין שברים ועל כן החלוקה תהיה אינטגרלית

¹⁵ כלומר יש שבר חלוקה כלשהו והחלוקה עדיין לא אינטגרלית

¹⁶ כלומר שעדיין יש שבר חלוקה, עצם שחולק למספר גורמים ויוצר מעגל בגרף

- a. **למה 1** : אלגוריתם 1 מחזיר חלוקה אינטגרלית PROP1 בסיבוכיות פולינומית.
 b. **למה 2** : אלגוריתם 1 מחזיר חלוקה אינטגרלית fPO.

הלמות הנ"ל מבססות את הטענה שאנחנו כבר מקבלים חלוקה שעומדת בסטנדרטים PROP1 ו-fPO. אך בהן החלוקה היא לא פרופורציונלית. אלגוריתם 2 ישפר את החלוקה הנ"ל ויחזיר חלוקה שעומדת בכלל התנאים הקודמים והיא תהיה גם פרופורציונלית.

- c. **טענה 1** : עבור אמצעים מעורבים (שליליים וחיוביים כאחד) תמיד תהיה חלוקה אינטגרלית שתעמוד ב-PROP1 וגם ב-fPO. בנוסף, קיים אלגוריתם פולינומי שמחזיר תוצאה כזו.

הוכחה : אנו מסתמכים על הוכחות ממאמרים קודמים שהוזכרו בסיכום המוכיחים שניתן להגיע לתוצאה כזו עם 2 Agents או עם אמצעים שליליים או חיוביים בלבד. אנו מציגים דוגמת הרצה של אלגוריתם 2 שבה האלגוריתם שלנו לוקח אלגוריתם מחולק ומעגל אותו כך שיהיה אינטגרלי. מציגים דוגמאות שבהם כל פעם בוחרים Agent אחר ומראים כיצד אנו מעגלים את המשאבים ברשותו ולאט לאט מורידים מעגלים מהגרף.

6. סיכום ועבודות עתידיות :

- a. בשונה ממקרים דומים, כותב המאמר טוען שהתוצאה שהגיע אליה באלגוריתם ככה"נ **לא ניתנת לשיפור או שתהיה מורכבת מאוד לשיפור** בסטנדרטים הנוכחיים שהוצגו.
- b. אם נחליף את דרישת ה-PROP1 ב-EF1 אזי מדובר **בבעיה פתוחה** האם ניתן להגיע לתוצאה שהיא גם EF1 וגם PO. הבעיה פתוחה גם עם מדברים רק עם עצמים שליליים לחלוקה.
- c. אם נחזק את PROP1 לטענה חזקה יותר שהיא PROPX אזי הראו במאמר אחר שהתוצאה הרצויה **לא מובטחת** וישימה במקרה ומדובר בחלוקה של עצמים חיוביים.
- d. הכותב מציין שניתן לטעון שבמימוש כדאי להחליף את התנאי PO ב-Maximum Welfare אך עמידה בתנאי כזה וגם ב PROP1 היא כיום **מוגדרת כבעיה NP-Hard**.