**ממ"ן 12 - מתמטיקה בדידה**

**שמוליק ערמון**

1. נקח דוגמא מצומצמת משאלה 2 בממ"ח 12

נראה כי בקבוצת האיחוד בין R ל-R2 קיימים הזוגות הסדורים

(c,d) ו- (d,a) אך לא קיים (c,a). משמע שיחס זה אינו עומד

בתנאי הטרנזיטיביות. מש"ל.

2. א. הפונקציה אינה חח"ע. נראה כי במקרה של יחסים R ו-S מעל A, הנמצאים ב-M היחס T הוא הסגור הטרניזטיבי לשניהם (כל כיסוי טרניזיטיבי מוביל לעוד אחד עד שמגיעים ליחס בין כל איברי הקבוצה A לעצמם) –



ב. היחס R אינו יכול להיות סגור טרזיטיבי, ועדיין כלול ב-M הפוקנציה היא מ-M

ל-M. ומכאן ש-t לא על M

ג. כל סגור טרנזיטיבי הוא גם הסגור הטרנזיטיבי של עצמו, לכן אחרי הפעם הראשונה שנפעיל את הפונקציה, כל פעם שנפעיל אותה שוב על התוצאה עדיין יצא אותו הסגור הטרנזיטיבי. ולכן הטענה נכונה.

ד. הטענה איננה נכונה, נראה בדוגמא נגדית שקיים R ו-S ב-M שלא מקיימים את התכונה.

3. א. מדובר בקבוצת כל היחסים מעל A שהם סימטריים ואינם רפלקסיביים. יחס ריק מעל A הוא סימטרי שכן הוא מקיים את תנאי הסימטריות באופן ריק, ואינו רפלקסיבי כיוון שאינו מכיל את כל רלציית היחידה, מכאן שהוא איבר ב-K. הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה אחרת, מכאן שלכל x היא תמיד תהיה מוכלת ב-x וזוהי ההגדרה לאיבר הקטן ביותר. מכאן שהיחס הריק הוא האיבר הקטן ביותר. מש"ל.

ב. איבר מקסימלי לדוגמא ב-K הוא היחס הבא –

נוכיח שהוא מקסימלי בדוגמא נגדית ונניח שקיים יחס S שמכיל את R. הרי שיחס זה יאלץ להכיל את הזוג הסדור (4,4), שכן זהו הזוג הסדור היחיד שחסר על מנת שנגיע ליחס שיכיל את כל היחסים מעל A

אך יחס זה בהכרח אינו כלול בסדר החלקי K שכן הוא רפלקסיבי ולכן זוהי סתירה. ומכאן ש-R הוא איבר מקסימלי ב- K שביחס ההכלה יהיה רק בצד המכיל בסדר ואף פעם לא בצד המוכל. מש"ל.

ג. אף יחס ב-K אינו יכול להיות רפלקסיבי. לכן, לדוגמא יחס R מסעיף ב' יהיה יחס מקסימלי אך לא יהיה ניתן להשוותו בסדר ליחסים המכילים את הזוג הסדור (4,4). טענה זו תהיה נכונה לגבי כל איבר מקסימלי T ב-K. שכן בהכרח יהיה חסר זוג סגור –

והרי הזוג הסדור הזה יופיע בסדר בחלק מהיחסים ולא יהיה ניתן להשוות אותם לאיבר מקסימלי, ומכיוון שאיבר הגדול ביותר בהגדרתו צריך להיות ניתן להשוואה לכל איברי הסדר, נסיק שאין איבר גדול ביותר ב-K. מש"ל.

4. א. הפונקציה אינה חד-חד ערכית – נראה דוגמא –

ב. כן. מכיוון ש-M אינסופית, משמע שיהיה תמיד קיים איבר ב-M שיהיה צריך להתחלק ללא שארית בכל גורם בכל קבוצה של P(K).



ג. נראה כי למעשה כל מספר המורכב ממכפלה של המספר הראשוני 5 יהיה במחלקת שקילות זו. משמע כל 5 בחזקת n, n איבר במחלקת שקילות זו.

ד. כאן יש לנו שני מספרים ראשוניים, לכן התוצאה של כל גורם בחזקה כלשהי בהכפלה בגורם השני בחזקה כשלהי היא מחלקת השקילות

5. I. נחל בבדיקה באיבר הראשון ונראה שמקיים את התכונה הנדרשת להוכחה.

II. הנחת האינקודציה – כל איבר n=k מקיים את התנאי

III. ננסה להוכיח כי כל n=k+1 גם מקיים את התנאי. נראה כי נקבל למעשה את האיבר n=k, בחיבור עם 12k שיתחלק תמיד ב-12 ללא שארית, והמספר 36 שגם הוא תמיד יתחלק ב-12 ללא שארית. ומכיוון שלפי הנחת האינדוקציה n=k מתחלק ב-12 עם שארית שבע, ולשאר המספרים המחוברים אין השפעה על השארית, הוכחנו כי n=k+1 מקיים את התכונה. ומכאן מש"ל הוכחה באינדוקציה.



אני מתנצל אם העבודה הזאת נראית מעט לא מסודרת. נגמר לי הרשיון של ה-MATHTYPE ועברתי לעבוד עם נוסחאות של WORD, אז מה שעוד הייתי צריך לעדכן העברתי ומה שכבר סיימתי השארתי. סליחה אם זה הטריח.