**ממ"ן 13 – מתמטיקה בדידה**

**שמואל ערמון**

**1. א.** נראה דוגמא לפונקציה חח"ע ועל מ-N ל-K ובכך נראה שעוצמותיהן שוות. נשתמש בפונקציה f שלוקחת כל מספר מספר טבעי ב-N ומציבה אותו במשוואה שאיתה קבענו את איברי הפונקציות - התוצאה תהיה המספר הרציונלי מהקבוצה K אותו צריך להציב כדי להגיע למספר הטבעי כפי שהוגדר. פונקציה זו היא על כי אנו יכולים להציב בה כל מספר מ-N ולקבל מספר רציונלי.

נבדוק אם חח"ע בכך שנציב –

מכאן ש-

**ב.** נמצא את y בהשוואה ל-x

ומכאן ניצור פונקציה מ-R ל-L כך –

הפונקציה מתאימה לכל איבר ב-R את הזוג הסדור המתאים לו מ-L על פי המשוואה, ואנו רואים למעשה תהיה תוצאה לכל x ב-R ומכאן שהפונקציה היא על. נבדוק אם חח"ע

מהגדרת שוויון בין זוגות סדורים (עמ 29 בספר) אנו רואים שיש שוויון בין x1 ל-x2 ומכאן שהפונקציה חח"ע. ומכאן ש-

**ג.** נתחיל בכך שלשני הערכים המוגדרים בקבוצה עם קשר וגם אותיות וניצור מהן שני משוואות –

נפתח את המשוואות עד שנוכל לקבל את ערכיהם של x ו-y ביחס ל-m ו-n

כעת נגדיר פונקציה f –

נבדוק אם הפונקציה חח"ע –

מהגדרת שוויון בין זוגות סדורים (עמ 29 בספר) אנו רואים שיש שוויון בין n1 ל-n2 ובין m1 ל-m2 ומכאן שהפונקציה חח"ע.

נבדוק עם הפונקציה היא על, ונראה כי היא בהכרח על מטבע ההגדרה, שכן M מכילה זוגות סדורים של מספרים רציונליים אשר מסתכמים למספר טבעי בשני המשוואות, והפונקציה f מתאימה לכל אחת מהמשוואות את צמד המספרים הטבעיים שתוצאתם תמיד תהיה מספר רציונלי. ומכאן שהפונקציה על.

בע"מ 123 שאלה 4.7 סעיף א' קיימת הוכחה כי –

ומכיוון שיש לנו פונקציה חח"ע ועל ממנה ל-M –

**2. א**. נוכיח בעזרת אסטרטגיית ספירה שקילות ל-N. בגלל שהקבוצות סופיות של מספרים טבעיים, ניתן להכריז על סדר מלא בכל קבוצה סופית שהיא איבר בP(N) של "קטן מ-". ונתייחס לכל איבר לפי הסדר כמו בסדרה.

לדוגמא בקבוצה {1,2,3} שמוכלת ב-P(N) נגיד שהאיבר אחד קטן מ-2 לכן הוא הראשון וכן הלאה.

עכשיו נחלק את כל הקבוצות הסופיות לקבוצות שקילות כאשר לכל קבוצה בקבוצת השקילות אותו הסכום. אם קיימת יותר מקבוצה אחת בקבוצת השקילות, נסדר אותן על פי סדר לקסיקוגרפי. ונסדר את כל הקבוצות ב-K לפי קבוצות השקילות בסדר עולה, ובין עצמן בסדר הלקסיגורפי שקבענו שיראה כך-

כעת ניצור פונקציה f המתאימה כל איבר בקבוצה לפי הסדר שקבענו (משמאל לימין כאשר לצרוך העניין המספר שמותאם לקבוצה הריקה הוא 0 וכן הלאה) מעל איבר ב-N ומכיוון שזוהי בבירור חח"ע ועל כי זוהי ספירה של קבוצה אינסופית נסיק כי –

**ב.** נעזר בקבוצה K אשר הוכחנו למעלה שהיא בת מניה, וכי אנו יודעים שהיא הקבוצה של כל הקבוצות הסופיות ב-P(N).

נגדיר פונקציה f מ-L ל-K המתאימה כל קבוצה קו-סופית לקבוצה הסופית המשלימה שלה ב-K ונראה שפונקציה זו היא חח"ע ועל.

הפונקציה היא חח"ע, נראה זאת כאשר נתאים לשני קבוצות קו-סופיות את אותו המשלים A, ונראה שבמידה והקבוצות שונות, משמע שקיים איבר באחד מהן שלא קיים בשניה, ואז בהכרח המשלים שלה היה שונה. מכאן שבמידה ולשני קבוצות אותו משלים, הקבוצות שוות והפונקציה חח"ע.

הפונקציה היא על מטבע ההגדרה, שכן לכל קבוצה קו-סופית מותאמת קבוצה סופית, ו-K היא קבוצת כל הקבוצות הסופיות בP(N). ומכאן ש-

**3. א.** קבוצת כל הרלציות מעל N היא למעשה כל הקבוצות החלקיות ל-NXN לפי ההגדרה של יחס. ומכאן שלמעשה מדובר בקבוצה P(NXN).

אנו יודעים מההוכחה של שאלה 4.7א בעמ' 123 כי -

ומהגדרה 5.23 נוכל להסיק כי –

ומכאן לפי משפט 5.28 נסיק –

**ב.** נראה לפי משפט הכריך – הראינו בסעיף א כי -

נגדיר את קבוצת כל היחסים הרפלקסיביים מעל N כך –

אנו יודעים מהגדרה 5.25 כי-

נגדיר פונקציות f ו-g כך –

רלציה f מתאימה לכל איבר ב-I את אותו האיבר ב-P(NXN), ופונקציה זו היא חח"ע מכיוון ש-I חלקית ל-P(NXN) וכאשר נפעיל את הפונקציה על שני איברים ב-I ונקבל אותה התוצאה כמובן ששני איברים אילו זהים שכן התוצאה היא אותו האיבר.

רלציה g מתאימה לכל איבר ב-P(N) קבוצה מזוגות סדורים כך -

נבדוק אם חח"ע ונגיד שקיימות שני קבוצות שונות להן אותה תוצאה ב-g. משמע קיימת קבוצה A וקבוצה B, ובהם איברים x ו-y כך ש-

אך הקבוצה בתוצאה תכיל גם את x וגם את y וזוהי סתירה שהרי A ו-B שונות. אם אחת הקבוצות ריקות הרי שהן לא שוות, ואם הן זרות גם הרי שהן שונות. ובכך הוכחנו שהפונקציה חח"ע.

מכאן –

לפי משפט הכריך, בהכרח –

**4.א**. N בת מנייה, ועצמתה של R היא C.

מהגדרה 5.21 נחשב את עצמת קבוצת כל הפונקציות מ-N ל-R

ועל פי הטענה המוכחת 5.28 נראה כי -

מכאן שהתשובה הנכונה היא 3. מש"ל.

**ב.** על פי משפט 5.25 –

על פי משפט 5.23 –

על פי הגדרה 5.21 עצמת קבוצת הפונקציות היא –

כעת נפשט על פי משפט 5.27ג, ולאחר מכן נכפיל עצמות על פי 5.15ד המוכחת -

ומכאן התשובה הנכונה היא 3, מש"ל.