Практикум 2.2. Приложения определенного интеграла

Цель работы – научиться использовать средства пакета MatLab для вычисления площадей плоских фигур, длин дуг, объемов тел вращения.

Продолжительность работы - 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета MatLab.

Порядок выполнения

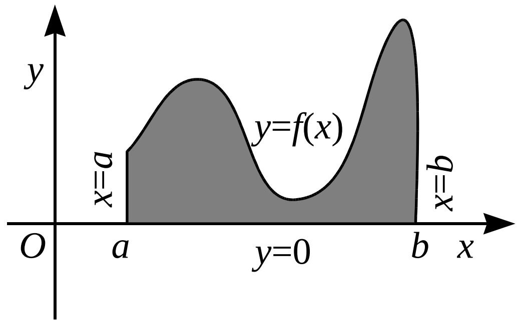
1. Работа начинается с выполнения общих упражнений. Их наличие в отчете является допуском к сдаче индивидуального зачетного задания по практикуму.
2. После выполнения общих упражнений выполняются индивидуальные задания; результаты заносятся в отчет.
3. Подготовить отчёт**,** в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения/

Краткие теоретические сведения

и практические упражнения

1. Вычисление площадей фигур, ограниченных кривыми, заданными уравнениями в декартовых координатах.

Если интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ неотрицательна на нем, то криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x=a,$ $x=b,$ $y=0$ и графиком функции $y=f(x),$ имеет площадь, равную $S=\int\limits_a^b f(x)dx.$



Упражнение 1. Построить график функции $y=x\cos x$ на отрезке $[0;\pi/2].$ Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции и линиями $x=0,$ $x=\dfrac{\pi}{2},$ $y=0.$

Если фигура ограничена кривыми $y=f(x)$ и $y=g(x)$ пересекающимися в точках $A(a;f(a))$ и $B(b;f(b)),$ $f(x)\geq g(x)$ при $x\in[a;b],$ то ее площадь равна $S=\int\limits_a^b\big(f(x)-g(x)\big)dx$ (можно считать, что она ограничена еще и прямыми $x=a,$ $x=b$).

Упражнение 2. Построить графики функций $y=x^2+2x$ и $y=7-4x-x^2.$ Найти точки пересечения графиков. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками.

2. Вычисление площади фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически.

Если плоская фигура ограничена прямыми $x=a,$ $x=b$ $(a<b),$ $y=0$ и графиком функции, заданной параметрическими уравнениями $y=y(t),$ $x=x(t),$ $a=x(t_1), b=x(t_2),$ и функция $y(t)$ неотрицательна на отрезке $[t_1;t_2],$ то площадь

фигуры вычисляется по формуле $S=\int\limits_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt$. Изменение параметра t от t_1 до t_2 должно соответствовать обходу контура по часовой стрелке.

Для построения графика функции, заданной параметрически нужно задать изменение параметра t и функции $x(t)$, $y(t)$.

Пример 1.

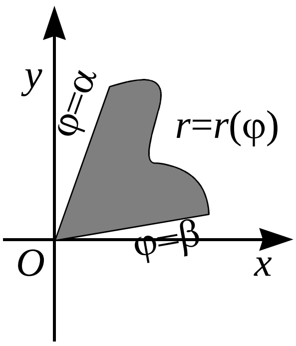
```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt
t=linspace(0,2*pi,100)
x=cos(t)+1
y=sin(t)
plt.plot(x,y)
plt.grid(True)
```

Упражнение 3. Построить графики функций, заданные параметрически. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками. Упражнение проделать с использованием Python и аналитически, сопоставить результаты:

а) $x=\cos t,\ y=\sin t,\ t\in[0;2\pi]$;

б) $x=2\cos t,\ y=3\sin t,\ t\in[0;2\pi]$.

3. Вычисление площади фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярных координатах.



Если фигура на плоскости ограничена двумя лучами, выходящим из начала координат $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\beta$, и кривой, заданной в полярных координатах интегрируемой на отрезке функцией $r=r(\varphi)\geq 0$, то эта фигура имеет площадь, равную

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Построение графика функции, заданной в полярных координатах можно свести к построению графика параметрически заданной функции.

Пример 2. Построить график функции $r=\varphi,\ 0\le\varphi\le 2\pi,$ заданной в полярных координатах.

```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt
t=linspace(0,2*pi,100)
r=t
x=r*cos(t)+1
y=r*sin(t)
plt.plot(x,y)
plt.grid(True)
```

Упражнение 4. Построить фигуру, ограниченную графиком логарифмической спирали $r=e^{\varphi}$ и прямыми $\varphi=0,\quad \varphi=2\pi.$ Найти площадь фигуры.

4. **Вычисление длины дуги.**

Если дуга кривой задана ***явным образом*** $y=y(x),\quad a\le x\le b$ где $y(x)$ - непрерывно дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ функция, то ее длина вычисляется по формуле $s=\int\limits_a^b\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$

Упражнение 5. Найти длину дуги параболы $y=x^2$, от точки $A(1;1)$ до точки $B(2;4).$

Если дуга кривой задана ***параметрическими уравнениями*** $y=y(t),\ x=x(t),$ $t_1\le t\le t_2,$ где функции $y(t)$ и $x(t)$ - непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_1,t_2]$, и $y'(t)$ и $x'(t)$ не обращаются одновременно в 0 (т.е. $(y'(t))^2+(x'(t))^2\ne 0$ при всех $t\in[t_1,t_2]$), то длина дуги вычисляется по формуле

$$s=\int\limits_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Упражнение 6. Найти длину замкнутой кривой, заданной параметрическими уравнениями $x=2\cos t,\ y=3\sin t,\ t\in[0;2\pi].$

Если дуга кривой задана в ***полярных координатах*** уравнением $r=r(\varphi),\ \varphi\in[\alpha;\beta],$ где функция $r(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $\varphi\in[\alpha;\beta],$ то длина дуги вычисляется по формуле

$$s=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}\,dt.$$

Упражнение 7. Вычислить длину замкнутой кривой, задаваемой уравнением $r = 4(1+\cos\varphi)$.

5. **Вычисление объема тела вращения.**

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и графиком неотрицательной непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$, равен $V = \pi\int_a^b y^2(x)\,dx$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x=a$, $x=b$, $y=0$ и графиком неотрицательной непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$, равен $V = 2\pi\int_a^b xy(x)\,dx$.

Упражнение 8. Вычислить объем тела, полученного при вращении криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y=\sin x$ и прямой $y=0$ ($x\in[0;\pi]$):

а) относительно оси Ox; б) относительно оси Oy.

Индивидуальные задания

Задание 1. Вычислить длину дуги кривой, сделать геометрическую иллюстрацию.

Номер компьютера	Индивидуальное задание
1.	Вычислить длину дуги кривой $y = \dfrac{1}{\sin 2x}$ между точками с абсциссами $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$.
2.	Вычислить длину дуги логарифмической спирали $\rho = 4e^{2\varphi}$, расположенной между двумя окружностями $\rho = 12$ и $\rho = 20$.
3.	Вычислить длину дуги внутри кардиоиды $\rho = 1+\cos\varphi$, лежащей справа от окружности $\rho = \dfrac{3}{4}\cos\varphi$.
4.	Вычислить длину дуги внутри окружности $\rho = 6\cos\varphi$, лежащей вне окружности $\rho = 3\sqrt{2}$
5.	Вычислить длину дуги $\rho = 3\sqrt{2}$, лежащей вне окружности $\rho = 6\sin\varphi$.
6.	Вычислить длину дуги лемнискаты $\rho^2 = 2\cos 2\varphi$, лежащей вне окружности $\rho = 1$

7.	Вычислить длину дуги $y = \dfrac{1}{\cos 2x}$ между точками с абсциссами $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ и $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$.
8.	Вычислить длину дуги окружности $\rho = \cos\varphi$, лежащей вне кардиоиды $\rho = (1 - \cos\varphi)$
9.	Вычислить длину дуги лемнискаты $\rho^2 = \cos 2\varphi$, лежащей внутри окружности $\rho = \sqrt{2}\sin\varphi$
10.	Вычислить длину дуги окружности $\rho = 4\cos\varphi$, лежащей внутри окружности $\rho = 2\sqrt{2}$.
11.	Вычислить длину дуги кривой $y^2 = 4x^3$, лежащей внутри окружности $x^2 + y^2 = \dfrac{3}{2}$.
12.	.Вычислить длину дуги кривой $x = 2\cos^3 t,$ $y = 2\sin^3 t$ $t \in [0; 2\pi]$
13.	.Вычислить длину дуги кривой: $x = 4(\cos t + t\sin\ t),$ $y = 4(\sin t - t\cos t)$ $t \in [0; 2\pi]$
14.	Вычислить длину дуги кривой $x = t - \sin\ t,$ $y = 1 - \cos t.$ $t \in [0; 2\pi]$
15.	Вычислить длину дуги кардиоиды $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$, лежащей внутри окружности $\rho = \dfrac{3}{2}$.
16.	Вычислить длину дуги окружности $\rho = 2\sin\varphi$, лежащей внутри окружности .$\rho = 1$
17.	Вычислить длину дуги окружности $\rho = 1$, лежащей внутри кардиоиды $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.
18.	Вычислить длину дуги окружности $\rho = 4\cos\varphi$, лежащей справа от кривой $\rho = \dfrac{3}{\cos\varphi}$
19.	Вычислить длину дуги кардиоиды $\rho = 1 + \cos\varphi$, лежащей вне кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$.
20.	Вычислить длину дуги окружности $\rho = \cos\varphi$, лежащей вне окружности $\rho = \sin\varphi$

21.	Вычислить длину дуги окружности $\rho = \frac{3}{2}$, лежащей вне кардиоиды $\rho = 3(1-\cos\varphi)$
22.	Вычислить длину дуги правой ветви лемнискаты $\rho^2 = 9\cos 2\varphi$, лежащей вне окружности $\rho = \sqrt{6}\cos\varphi$
23.	Вычислить длину дуги лемнискатами $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$.
24.	Вычислить длину дуги окружности $\rho = \sqrt{3}\sin\varphi$, лежащей вне кардиоиды $\rho = (1-\cos\varphi)$
25.	Вычислить длину кривой $y = \frac{1}{\sin 2x}$ между точками с абсциссами x=0 и x=$\frac{\pi}{8}$
26.	Вычислить длину кривой: $x = 2(3\cos t - \cos 3t),$ $y = 2(3\sin t - \sin 3t)$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
27.	Вычислить длину кривой $\rho = 3(1+\sin\varphi)$.
28.	Вычислить длину дуги окружности $\rho = 4\cos\varphi$, лежащей справа от кривой $\rho = \frac{3}{\cos\varphi}$

Задание 2. Построить фигуру, ограниченную кривыми. Вычислить объем тела, полученного при вращении фигуры

а) относительно оси Ox; б) относительно оси Oy.

1.	$y = \arcsin x$, $0 \le x \le 1$.	15.	$y = \arccos x$, $-1 \le x \le 1$.
2.	$y = \sqrt{x+2}$, $y = -x-2$, $x = 0$.	16.	$y = \sqrt{4-x}$, $y = 0$.
3.	y=x+2, $y = 2-\sqrt{x}$, y=0.	17.	y=x+2, $y = 4+\sqrt{x}$, y=0.
4.	$y = \sqrt[3]{x}$, y=0, x=8.	18.	$y = x^3$, y=0, x=2.
5.	$y = 2-\sqrt{x}$, $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$, $x = 0$.	19.	$y = 6-\sqrt{x}$, $y = 0$.
6.	$y = x^3$, $y = \sqrt[3]{x}$.	20.	$y = x^3$, $y = \sqrt[5]{x}$.
7.	y=ln(x+1), x=5, y=0.	21.	y=ln(x+7), x=4, y=0.
8.	$y = (x-2)^2$, $y = 4-x^2$.	22.	$y = (x-3)^2$, $y = 9-x^2$.
9.	$y = 2-\frac{x^2}{2}$, $y = 4-\frac{5x^2}{2}$.	23.	$y = 2-\frac{x^2}{2}$, $y = 4-\frac{5x^2}{2}$.
10.	$y = e^x - 1$, y=2, x=0.	24.	$y = 2^x - 1$, y=2, x=0.
11.	$(y-2)^2 = 4-x$, x=0.	25.	$(y-3)^2 = 5-x$, x=0.

12.	y=arctg x, y=x-1, y=0.	26.	y=arcctg x, y=x, x=0.
13.	$y=\sqrt{2x}$, y=4-x, x=0.	27.	$y=\sqrt{5x}$, y=10-x, x=0.
14.	y=lnx, y=2-lnx, y=0.	28.	y=2lnx, y=4-lnx, y=0.

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.

2. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение 1С. Построить графики функций $y=x^2+1$, $y=3-x$, $y=1$. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками всех трех функций. График оформить: сделать одинаковый масштаб по осям, нанести сетку, пометить оси координат, сделать заголовок.

Упражнение 2С. Построить график астроиды $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$, $t\in[0;2\pi]$. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком. График оформить: сделать одинаковый масштаб по осям, нанести сетку, пометить оси координат, сделать заголовок.

Упражнение 3С. Построить фигуру, ограниченную кривыми $r=1$, $r=2$ и лучами $\varphi=\frac{\pi}{4}$, $\varphi=\frac{3\pi}{4}$. Найти ее площадь.

Упражнение 4С. Найти длину замкнутой кривой, заданной параметрическими уравнениями $y=\sin^3 t$, $x=\cos^3 t$, $t\in[0;2\pi]$.