БАЗ.2. Салахов Ю.А. ПИН-31.

5. Найти урав касательной и нормали к поверхности:

$F = z^2 + x^2 + 2y^2 + 7 = 0 \qquad M_0(1, 2, 9.)$

• Урав касательной:

$F'_x = 2x \qquad F'_y = 4y \qquad F'_z = 2z$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{2z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y}{2z}$ В точке M_0:

$F'_x = -1/9 \qquad F'_y = -4/9$

$z - 9 = -1/9\,(x-1) - 4/9\,(y-2)$

$\frac{x}{9} + \frac{4y}{9} + z - 10 = 0.$

• Урав. нормали:

$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0 y_0)} = \frac{z - z_0}{F'}$, подставим

$\frac{x-1}{-1/9} = \frac{y-2}{-4/9} = \frac{z-9}{1}.$

6. Найти экстремумы ф.

$U = 4x - 3y - x^4 + y^3$

1. Найдем стационарные точки:

$U'_x = 4 - 4x^3 \qquad U'_y = 3y^2 - 3.$

2. Решим систему

$\begin{cases} 4 - 4x^3 = 0 \\ 3y^2 - 3 = 0 \end{cases} \quad x = 1, \quad y^2 = 1 \quad y = \pm 1 \qquad M_0(1, -1) \quad M_1(1, 1)$

3. Достаточное условие экст. ф. $A C - B^2 > 0$ - ф. имеет экстремум в точке M_0.

$A_0 = u''_{xx} \overset{M_0}{=} -12 \quad B = u''_{xy} \overset{M_0}{=} 0 \quad C = u''_{yy} \overset{M_0}{=} -6$

$M_0(1,-1)$

$AC - B^2 = 72 > 0 \Rightarrow$ M_0 – максимум $u(1,-1) = 5.$

$A_1 = -12 \quad B_1 = 0 \quad C_1 = 6 \quad AC - B^2 = -72 < 0$ – нет экст.

Ответ: Экстремум в точке $M_0(1,-1)$ – максимум.

7. Исследовать на экстремум:

$F(x,y) = x^3 + 6x^2y + 9xy^2 - 8y^3 + 2x^2 + 12xy + 24y^2.$

Стац. точки:

$F'_x = 3x^2 + 12xy + 4x + 72y^5 + 12y$

$F'_y = 6x^2 + 360xy^4 + 12x + 48y.$

$\begin{cases} 3x^2 + 12xy + 4x + 72y^5 + 12y = 0 \\ 6x^2 + 360xy^4 + 12x + 48y = 0 \end{cases}$ $x = 0$, $y = 0$ – подставим во вторн.

$3x^2 + \cancel{360z}\ 4x = 0 \quad x(3x + 4) = 0$ $\quad x = 0$, $x = -4/3$

$M_0 = (0\ 0) \quad M_1(-4/3, 0).$

		M_0	M_1
A	$F''_{x^2} = 6x + 12y + 4$	4	-4
C	$F''_{y^2} = 1440xy^3 + 48$	48	48
B	$F''_{xy} = 12x + 360y^4 + 12$	2	-4.
	$AC - B^2$	$48 > 0$ ✓	< 0 ✗

Ответ: Экстремум $M_0(00)$ – минимум.

8. Условный экстремум.

$z = a\cos^2 x + b\cos^2 y$ при $x + y = \pi/4$, неотрицательного аргумента.

1. Составим ф. Лагранжа:

$L = f(xy) + \lambda(\varphi(x,y)) \qquad \varphi = x + y - \pi/4$

$L = a\cos^2 x + b\cos^2 y + \lambda(x + y - \frac{\pi}{4}).$

$L'_x = -2a\sin(x)\cos(x) + \lambda \qquad L'_y = -2b\sin(y)\cos(y) + \lambda$

$$\begin{cases} L'_x = 0 & -2a\sin(x)\cos(x) + \lambda = 0 \\ L'_y = 0 & -2b\sin(y)\cos(y) + \lambda = 0 \\ \varphi = 0 & x + y - \pi/4 = 0. \end{cases}$$

$\lambda = +2a\sin(x)\cos(x)$

$\lambda = 2b\sin(y)\cos(y)$

$x = \pi/4 - y.$

$a\sin(x)\cos(x) = b\sin(y)\cos(y)$

$a\sin(\frac{\pi}{4}-y)\cos(\frac{\pi}{4}-y) = b\sin(y)\cos(y)$ $\quad a = b.$

$y = \pi n/8$, $n = 1, 3, 5 \dots$, при услов. $a - b = 0.$

$x = \pi/4 - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.$

$M = (\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}).$

• Для проверки найдем дифференциал второго порядка:

$d_2 F = -2a\cos(2x)\cdot dx^2 - 2b\cos(2y)\cdot dy^2.$

В точке $M(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$ и при $a = b$:

$-4a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}\,a \Rightarrow$ при $a, b > 0$ ф. в M достигает максим.

$ab < 0$ ф. в M миним.