Практикум 10. Экстремумы функции нескольких переменных

Цель работы – научиться находить локальный минимум функции нескольких переменных, используя средства Anaconda.

Продолжительность работы – 4 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием Anaconda.

Порядок выполнения

1. Работа начинается с выполнения общих упражнений. Их наличие в отчете является допуском к сдаче индивидуального зачетного задания по практикуму.
2. После выполнения общих упражнений выполняются индивидуальные задания; результаты заносятся в отчет.
3. Подготовить отчёт**,** в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты функций; выводы.

Краткие теоретические сведения

и практические упражнения

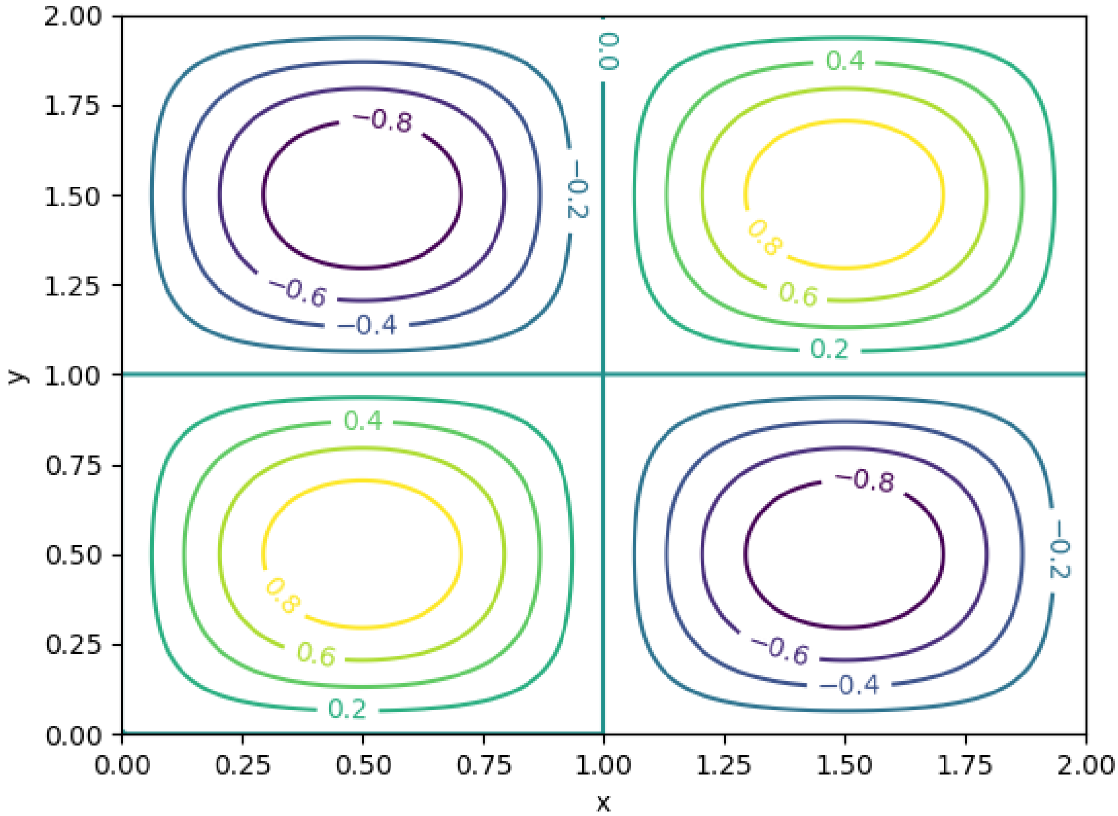
1. Минимизация функции двух переменных.

Нахождение локального минимума функции двух переменных разберём на примере функции $f(x) = \sin \pi x \cdot \sin \pi y$. Функция периодическая по обеим переменным с периодом 2, поэтому достаточно найти её минимумы на прямоугольнике $[0;2]\times[0;2]$.

Для нахождения минимума функции двух переменных следует сначала получить представление о поведении функции, построив её линии уровня:

```
import sympy as sp
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0, 2, 201)
y = np.linspace(0, 2, 201)
X, Y = np.meshgrid(x, y)
Z = np.sin(np.pi * X) * np.sin(np.pi * Y)
fig, ax = plt.subplots()
cs = ax.contour(X, Y, Z, levels=np.linspace(-0.8, 0.8, 9))
ax.clabel(cs, cs.levels, inline=True, fontsize=10)
plt.xlabel('x'); plt.ylabel('y')
plt.show()
```



На получившемся графике видно расположение локальных минимумов и максимумов. Перед нахождением локального минимума необходимо создать def-функцию, вычисляющую значения искомой функции. Аргументом def-функции является вектор, первый элемент которой соответствует переменной x, второй – переменной y:

```
def f(t):
    x, y = t
    return np.sin(np.pi * x) * np.sin(np.pi * y)
```

Для нахождения локального минимума теперь следует вызвать функцию *scipy.optimize.fmin* с двумя входными аргументами – именем def-функции и вектором начального приближения. Выходной аргумент – вектор искомой точки минимума.

```
from scipy.optimize import fmin


minimum = fmin(f, np.array([1, 1]), xtol=1e-9, disp=False)
print('Min:', minimum)
```

Вывод:

```
Min: [1.5 0.5]
```

Для нахождения не только точки минимума, но и значения функции в ней, следует вызвать *fmin* с параметром *full_output=True* и пятью выходными аргументами:

```
minimum, f_min, _, _, _ = fmin(f, np.array([1, 1]), xtol=1e-9, disp=False, full_output=True)
print('Min:', minimum)
print('f:', f_min)
```

Вывод:

```
Min: [1.5 0.5]
f: -1.0
```

Упражнение 1. Постройте линии уровня функции $z = f(x, y)$ и найдите экстремумы функции (таблица 1).

Индивидуальные задания

Номер компьютера	*Упражнение* 1 $f(x, y)$	*Упражнение* 5 $u(x, y, z)$
1	$xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$	$u = x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$
2	$xy + \frac{20}{x} + \frac{20}{y}$	$u = x + \frac{5y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$
3	$xy + \frac{20}{x} + \frac{50}{y}$	$u = 5x + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{2}{z}$
4	$8xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$	$u = x + \frac{y}{2x} + \frac{z}{3y} + \frac{5}{z}$
5	$8xy + \frac{15}{x} + \frac{25}{y}$	$u = x + \frac{y}{3x} + \frac{z}{2y} + \frac{5}{z}$

6	$8xy+\frac{25}{x}+\frac{15}{y}$	$u=5x+\frac{y}{2x}+\frac{z}{3y}+\frac{5}{z}$
7	$x^2+xy+y^2-12x-3y$	$x^2+y^2+\left(z+1\right)^2-xy+x$
8	$3+2x-y-x^2+xy-y^2$	$8-6x+4y-2z-x^2-y^2-z^2$
9	$3(x^2+y^2)-x^3+4y$	$xyz\left(16-x-y-2z\right)$
10	$3x^2y+y^3-12x-15y+3$	$x^3+y^2+z^2+6xy-4z$
11	$2x^3+xy^2+5x^2+y^2$	$\frac{xy+xz^2+y^2z}{xyz}+x+1$
12	$3x^3+y^3-3y^2-x-1$	$\frac{256}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+z^2$
13	$x^2y^2-2xy^2-6x^2y+12xy$	$\frac{128}{x}+\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{z}+z^2$
14	$x^4+y^4-2x^2$	$\frac{64}{x}+\frac{5x^2}{y}+\frac{3y^2}{z}+z^2$
15	$x^4+y^4-2y^2$	$\frac{2xy+3xz^2+y^2z}{xyz}+x+1$
16	$x^4+y^4-2(x-y)^2$	$\frac{2xy+xz^2+3y^2z}{xyz}+x+1$
17	$x^4+y^4-x^2-2y^2$	$\frac{xy+2xz^2+3y^2z}{xyz}+x+1$
18	$x^4+y^4-2x^2-y^2$	$\frac{3xy+2xz^2+y^2z}{xyz}+x+1$
19	$xy^2(12-x-y), x>0, y>0$	$\frac{5xy+2xz^2+3y^2z}{xyz}+x+1$
20	$\frac{\left(x+y\right)}{xy}-xy$	$x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$
21	$\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$	$x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{4y}+\frac{2}{z}$
22	$\frac{8}{y}+\frac{y}{x}+x$	$6x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$
23	$81\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)-\left(x^2+xy+y^2\right)$	$6x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{4y}+\frac{2}{z}$

24	$1+x^2+\sqrt[3]{(y+2)^2}$	$x+1+\dfrac{(y+1)^2}{4(x+1)}+\dfrac{(z+2)^2}{(y+1)}+\dfrac{2}{z+2}$
25	$\left(x+y^2\right)e^{\frac{x}{2}}$	$\left(x+7z\right)e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$
26	$\left(x^2+y\right)e^{\frac{y}{2}}$	$\left(4x+12z\right)e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$
27	$\left(x^2-2y^2\right)e^{x-y}$	$\left(4y+12z\right)e^{-\left(x^2+y^2+z^2\right)}$
28	$\left(x^2-2y^2\right)e^{x-y}$	$\left(x+7z\right)e^{-\left(2x^2+3y^2+z^2\right)}$

Упражнение 2. Создайте def-функцию, вычисляющую значения первых и вторых частных производных функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) и значения главных миноров матрицы, составленной из вторых производных.

Упражнение 3.

а**)** Найти экстремумы функции $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$.

б) С помощью созданной в упр. 2 def-функции проверьте выполнение необходимого и достаточного условия экстремума.

3. Минимизация функции трёх переменных.

Для нахождения стационарных точек функции трёх переменных требуется решить систему из трёх уравнений. Если функции *dfx*, *dfy* и *dfz* представляют собой частные производные функции f, то для того, чтобы найти стационарную точку необходимо вызывать функцию *sympy.solve* с одним выходным аргументом:

```python
import sympy as sp
from sympy.abc import x, y, z

df1 = x – z
df2 = x – y
df3 = x + z
s = sp.solve([df1, df2, df3])
print(s)
```

```
print(s[0][x])
```

Вывод:

```
[{x: 0, y: 0, z: 0}]
0
```

Вообще говоря, функция *sympy.solve* находит решения в символьном виде, численные решения можно получить с помощью *sympy.N*:

```
s=sp.solve([x**2+y**2-1, x-y, z-y])
print(s[0])
print(s[1])
print('x:', [sp.N(s[0][x]), sp.N(s[1][x])])
```

Вывод:

```
{x: -sqrt(2)/2, y: -sqrt(2)/2, z: -sqrt(2)/2}
{x: sqrt(2)/2, y: sqrt(2)/2, z: sqrt(2)/2}
x: [-0.707106781186548, 0.707106781186548]
```

Упражнение 4. Создайте def-функцию, которая находит стационарные точки функции трёх переменных и проверяет выполнение достаточного условия экстремума по критерию Сильвестра.

Упражнение 5. Используя def-функцию из упр. 4, найдите точки экстремума функции $u = u(x, y, z)$ (таблица 1).

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.

2. Ответить на контрольные вопросы:

1) Почему, прежде чем использовать функцию fmin, рекомендуется построить линии уровня функции?
2) Сформулируйте необходимое условие экстремума функции двух переменных?

3) Сформулируйте достаточное условие экстремума функции двух переменных?
4) Сформулируйте достаточное условие экстремума функции трех переменных?

Список рекомендуемой литературы

1. Официальная документация по языку программирования Python https://docs.python.org/3/

2. Официальная документация к библиотеке numpy https://numpy.org/doc/stable/index.html

3. Официальная документация к библиотеке scipy https://docs.scipy.org/doc/scipy/index.html

4. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч.3? Учебное пособие для втузов / Под общ. Ред. А.В.Ефимова и А.С. Поспелова. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2003