Практикум 2.5

Приближенное решение дифференциальных уравнений

Цель работы – научиться решать задачу Коши методом ломаных Эйлера и методом последовательных приближений.

Продолжительность работы - 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета MatLab.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить отчёт**,** в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты функций; выводы.

Краткие теоретические сведения и практические упражнения

В этой лабораторной работе мы рассмотрим некоторые приближенные методы решения задачи Коши, состоящей в отыскании решения $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Задачу приближенного решения задачи Коши будем понимать как задачу построения на заданном отрезке $[x_0, b]$ функции $\varphi(x)$, которая «близка» к решению $y(x)$ задачи Коши с заданной точностью ε в том смысле, что $|y(x) - \varphi(x)| \le \varepsilon$ ($x_0 \le x \le b$).

1. Метод ломаных Эйлера.

Пусть требуется найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Решение будем искать на отрезке $[a, b]$, $a = x_0$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ на n частей $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$, где $x_0 = a$, $x_n = b$. Заменим график функции $y(x)$ на отрезке $[x_0, x_1]$ отрезком прямой с угловым коэффициентом $k_0 = f(x_0, y_0)$, проходящей через точку $(x_0; y_0)$. Уравнение этой прямой имеет вид $y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$, ее ордината в точке x_1 равна $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$. При небольшой длине отрезка $[x_0, x_1]$ $y(x_1) \approx y_1$.

Далее заменим график функции $y(x)$ на участке $[x_1, x_2]$ отрезком прямой с угловым коэффициентом $k_1 = f(x_1, y_1)$, проходящей через точку $(x_1; y_1)$. Уравнение этой прямой имеет вид $y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$, ее ордината в точке x_2 равна $y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1)$. При небольшой длине отрезка $[x_1, x_2]$ $y(x_2) \approx y_2$.

Действуя аналогично, после n шагов будем иметь числа

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0),$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})(x_n - x_{n-1}).$$

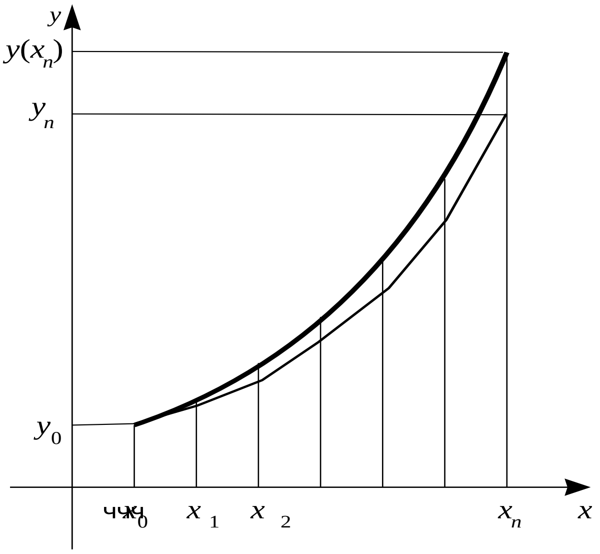

Рис. 1

Соединив точки с координатами $(x_0; y_0)$, $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, …, $(x_n; y_n)$, получим ломаную, которую называют ломаной Эйлера (рис. 1). Естественно ожидать, что $y(x_1) \approx y_1$, $y(x_2) \approx y_2$, …, $y(x_n) \approx y_n$ и ломаная Эйлера с достаточно короткими звеньями на отрезке $[a,b]$ близка к графику искомого решения $y(x)$.

Подытожим.

Метод ломаных Эйлера – метод приближенного решения задачи Коши $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$. Он состоит в замене точного решения $y = y(x)$ задачи Коши функцией, графически представленной ломаной Эйлера.

Чтобы построить ломаную Эйлера на отрезке $[a,b]$, удобно делить отрезок $[a,b]$ на n равных частей длиной $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$. Тогда координаты вершин ломаной определяются формулами

$$x_k = x_{k-1} + \Delta x,\ y_k = y_{k-1} + f(x_{k-1}, y_{k-1}) \cdot \Delta x \ (i = 1, 2, ..., n).$$

Можно показать, что если функция $f(x, y)$ задана на открытом выпуклом множестве G, содержащем точку $(x_0; y_0)$, имеет непрерывные частные производные по всем переменным, ограниченные на G, и точки $(x_k; y_k)$, $(x_k; y(x_k))$ не выходят за пределы множества G, то $|y(x_k) - y_k| \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Иными словами с ростом n ломаные Эйлера неограниченно приближаются к искомому решению.

Остается открытым вопрос, каким должен быть шаг Δx, который достаточно применить в алгоритме метода ломаных Эйлера, чтобы выдержать заданную точность ε. Вообще говоря, получены теоретические оценки точности приближенного решения метода Эйлера. В частности показано, что при уменьшении Δx погрешность схемы уменьшается линейно по $\triangle x$. Однако обсуждение этого вопроса выходит за рамки нашей лабораторной работы.

На практике для оценки точности пользуются следующим правилом. Вычисляют координаты вершин ломаных с n и $2n$ звеньями. Находят максимум разности между ординатами этих ломаных в общих узлах сетки (при одинаковых значениях абсцисс). Если его значение оказывается меньшим заданной точности ε, то вычисления заканчивают и за приближенное решение принимают ломаную с $2n$ звеньями. В противном случае число отрезков разбиения удваивают и т.д.

Упражнение 1.

Найти приближенное решение уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, на отрезке $[a,b]$ ($a = x_0$) методом ломаных Эйлера с заданной точностью ε.

Порядок выполнения упражнения:

1. Для отыскания приближенного решения создайте функцию.

В качестве входных аргументов функции используйте: заданную в символьном виде функцию $f(x,y)$; ее символьные аргументы x, y; координаты начальной точки x_0, y_0; координаты a и b концов отрезка, на котором ищется решение; начальное число отрезков разбиения n_0, точность ε.

В качестве выходных аргументов функции используйте: массивы координат вершин ломаной Эйлера и число отрезков разбиения n, понадобившихся для построения приближенного решения с заданной точностью.

Код функции должен включать:

а) Последовательное вычисление координат вершин ломаной Эйлера для числа отрезков разбиения n_0, $2n_0$, $4n_0$ и т.д. до тех пор, пока не будет достигнута точность ε (правило, по которому оценивается точность, изложено перед упр. 1).

б) Построение в графическом окне figure 1 в одной системе координат трех ломаных Эйлера с числом звеньев, равным n_0, $2n_0$ и n (полученных в результате первой, второй и последней итерации); ломаные должны быть изображены разными цветами.

2. Для тестирования функции из п.1 используйте решение уравнения $y' = xy$ с начальным условием $y(0) = 1$ на отрезке $[0;1]$ с точностью $\varepsilon = 0,001$. Вначале найдите «вручную» точное решение.

Код должен включать:

а) Задание входных аргументов функции из п.1, вызов функции, отыскание приближенного решения с заданной точностью.

б) Оценку реальной точности приближения: вычисление максимального отклонения в узлах сетки найденного приближенного решения от полученного аналитически точного решения.

в) Построение в графическом окне в одной системе координат двух графиков: приближенного и точного решения.

2. Метод последовательных приближений.

Заметим что всякое решение $y(x)$ задачи Коши

$$y' = f(x, y), \; y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

определенное на некотором отрезке $[a,b]$, содержащем x_0, удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt. \tag{2}$$

И обратно: всякое решение $y(x)$ интегрального уравнения (2), непрерывное на отрезке $[a,b]$, содержащем x_0, является также решением задачи Коши (1).

Поэтому вместо того, чтобы искать приближенное решение задачи Коши (1) можно искать приближенное решение интегрального уравнения (2). Решение уравнения (2) на отрезке $[a,b]$, заключающем в себя x_0, будем строить методом последовательных приближений Пикара.

Метод последовательных приближений Пикара сводится к следующему.

В качестве нулевого приближения $\varphi_0(t)$ можно взять любую непрерывную на отрезке $[a,b]$ функцию, в частности $\varphi_0(t) = y_0$. Последовательные приближения $\varphi_n(x)$ определяются рекуррентно по формуле

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt .$$

Обрывая процесс последовательных приближений при некотором значении n, мы получим приближенное решение $\varphi_n(x)$, тем более точное, чем больше n.

Правда, последнее можно утверждать только при определенных ограничениях на функцию $f(x, y)$. В частности, последовательные приближения равномерно сходятся на отрезке $[a;b]$ к решению задачи Коши при выполнении следующих условий: 1) функция $f(x, y)$ определена, непрерывна по x в некоторой области G на плоскости xOy, содержащей полосу $a \le x \le b$; 2) в любой замкнутой ограниченной области G', содержащейся в пересечении полосы $a \le x \le b$ с областью G, функция $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица по y с константой K, не зависящей от выбора G'.

Недостатком метода последовательных приближений Пикара является сложность вычислений, связанная с необходимостью вычислять для каждого следующего приближения интеграл вида $\int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))dt$.

Ограничимся использованием этого метода для уравнений, правая часть которых, функция $f(x, y)$, представляет собой многочлен переменных x, y. В этом случае для поиска последовательных приближений можно воспользоваться аппаратом символьного интегрирования пакета MATLAB.

Упражнение 2.

Найти приближенное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$, методом последовательных приближений Пикара.

Порядок выполнения упражнения:

1. Для отыскания приближенного решения создайте функцию.

В качестве входных аргументов функции используйте: заданную в символьном виде функцию $f(x, y)$; ее символьные аргументы x, y; координаты начальной точки x_0, y_0; число итераций n_0.

В качестве выходных аргументов функции используйте: массив приближенных решений, соответствующих 1-ой, 2-ой, …, n_0-ой итерации.

Код функции должен включать:

а) Последовательное отыскание приближенных решений с 1-ой по n_0-ю итерацию.

б) Построение в одной системе координат графиков приближенных решений, соответствующих 1-ой, 2-ой, …, n_0-ой итерации.

2. Для тестирования функции из п.1 используйте решение уравнения $y' = xy$ с начальным условием $y(0) = 1$ на отрезке $[0;1]$. Вначале найдите «вручную» точное решение.

Код должен включать:

а) Задание входных аргументов М-функции из п.1; вызов М-функции, последовательное отыскание приближенный решений, соответствующих 1-ой, 2-ой, …, n_0-ой итерации.

б) Оценку реальной точности приближения: вычисление на отрезке $[0;1]$ максимального отклонения приближенного решения, соответствующего итерации n_0, и точного решения.

в) Построение в той же системе координат, где были построены приближенные решения, графика точного решения.

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.

2. Ответить на контрольные вопросы:

1) В чем состоит метод ломаных Эйлера?

2) В чем состоит метод последовательных приближений?