Практикум 8. Производные.

Цель работы – изучить понятия приращения функции в точке, производной функции в точке, геометрического смысла производной функции; научиться использовать средства пакета MatLab для иллюстрации этих понятий, научиться вычислять производные символически, изучить структуру М-функции (файл-функции).

Продолжительность работы - 6 часов.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета MatLab.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить отчёт, в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить либо в формате интерактивного питон-скрипта (ipynb), либо в виде документа Microsoft Word. Файл следует назвать по следующей схеме pin_10_Ivanov_P_01_s1 (группа, фамилия, инициалы, номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты python фукнций; выводы.

Краткие теоретические сведения

и практические упражнения

1. Вычисление приращений с использованием функции.

Приращением функции *в точке* x_0, *соответствующим приращению аргумента* Δx *называется величина* $\Delta f = \Delta f(x_0, \Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Упражнение 1. Для функции $f(x) = x^2$ зададим новую блок-функцию, вычисляющую приращение функции в точке x_0 при приращениях аргумента Δx. С помощью вызова заданной блок-функции вычислить приращения функции в точках $x_0 = 0,\ x_0 = 2,\ x_0 = -9$ при приращениях от 0 до 1 с шагом 0.1.

Для использования численных методов и при программировании собственных приложений в Python необходимо уметь составлять собственные блок-функции, которые производят необходимые действия с входными аргументами и возвращают результат в выходных аргументах.

Пример 1. Предположим, что в вычислениях часто приходится использовать функцию $f(x) = e^{-x}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^4+0.1}}$. Имеет смысл один раз написать файл-функцию, а потом вызывать её всюду, где необходимо вычисление этой функции. Создайте новую ячейку с типом Code и наберите текст:

```
def myfun1(x):
    f=exp(-x)*np.sqrt((x**2+1)/(x**4+0.1))
    return f
```

Слово *def* в первой строке определяет начало функции. Первая строка является *заголовком функции*, в которой размещается *имя функции* и списки входных и выходных аргументов. В примере *myfun1* – имя функции, один входной аргумент *x* и один выходной аргумент ***f***. После заголовка следует тело функции, которое в данном примере состоит из одной строки, где и вычисляется значение функции. Вычисленное значение записывается в ***f***.

Теперь созданную функцию можно использовать так же, как и встроенные *sin, cos, exp* и другие:

```
myfun1(1)
```

Пример 2. Проверим работу заданной функции для массива

```
x=np.array([1,2,3,4])
myfun1(x)
```

Упражнение 2. Создать функцию, вычисляющую приращения функции $f(x)=1/x$ в точке 1 при различных приращениях аргумента. Вычислить приращения функции при приращениях аргумента от -0.5 до 0.5 с шагом 0.05.

2. Вычисление производной по определению.

Блок-функции с несколькими входными аргументами. Работа с блок-функциями с несколькими входными аргументами практически не отличается от случая с одним аргументом.

Пример 3. Создадим блок-функцию, вычисляющую длину радиус-вектора точки трёхмерного пространства

```
def radius(x,y,z):
  r=np.sqrt(x**2+y**2+z**2)
  return r
```

Вычислим длину радиус вектора точки (2;3;5)

```
radius(2,3,5)
```

Упражнение 3. Создать функцию, зависящую от точки x_0 и приращения Δx, вычисляющую предел отношения приращения функции к приращению аргумента для функции $y=\sqrt{x}$. Вычислить отношение приращения функции к приращению аргумента для каждой из точек 1; 0,5; 2 при приращениях аргумента 0,1; 0,01; 0,001.

Функции от функций. Если для исследования функций требуется запрограммировать собственный алгоритм, который должен оперировать с достаточно большим набором функций, то удобно оформить алгоритм в виде блок-функции, входными аргументами которой будут служить другие блок-функции. Имя используемой блок-функции передаётся отдельной переменной.

Пример 4. Создадим блок-функцию, вычисляющую значение сложной функции $\cos^3(f(x))$ при произвольных функциях $f(x)$.

```
def pr(fname,x):
  p=np.cos(fname(x))**3
  return p
```

Затем в другом блоке кода можно вызвать заданную функцию с любой функцией (существующей в Python или созданной нами).

```
p1=pr(np.sin,0)
p2=pr(myfun1,1)
```

Результаты вычисления:

$$p1 = \cos^3(\sin(0)),$$

$$p2 = \cos^3\left(e^{-1}\sqrt{\frac{1^2+1}{1^4+0.1}}\right).$$

Упражнение 4. Создать функцию, зависящую от функции, точки и приращения, вычисляющую отношение приращения функции к приращению аргумента. Вычислить значения этой функции в точках 1, 2, -3 при приращениях аргумента $0{,}001$, $-0{,}001$ для функций $y=\sqrt[3]{x}$, $y=2^x$.

Упражнение 5. Создать функцию, зависящую от функции и точки, вычисляющую значение производной функции в точке по определению. Для функций и точек из упражнения 4 вычислить значения производных. Заполнить таблицу, вставив вместо упр4 и упр5 результаты соответствующих упражнений.

<table>
<tr><td></td><td>$y=\sqrt[3]{x}$</td><td>$y=2^x$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x_0=1$</td><td>Упр 4</td><td>Упр 4</td></tr>
<tr><td>Упр 5</td><td>Упр 5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x_0=2$</td><td>Упр 4</td><td>Упр 4</td></tr>
<tr><td>Упр 5</td><td>Упр 5</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$x_0=-3$</td><td>Упр 4</td><td>Упр 4</td></tr>
<tr><td>Упр 5</td><td>Упр 5</td></tr>
</table>

3. Символическое вычисление производной

Вычисление производной любого порядка проще производить с помощью функции ***diff (fname,x,k),*** где ***fname*** – символическая запись дифференцируемой функции, ***x*** – переменная, по которой производится дифференцирование, ***k*** - порядок производной. После вычисления производной в символическом виде можно получить её значение в точке с помощью команды ***fname.subs(x,x0)***, которая возвращает значение символьного выражения ***fname*** при подстановке в него вместо переменной ***x*** значения ***x0*** (или выражения).

Пример 5. Вычислим производную функции x^3+x и её значение в точке 2.

```
from sympy import *
x=symbols('x')
f=x**3+x
y=diff(f,x,1)
y.subs(x,2)
```

Упражнение 6. Вычислить производные и их значения в точке $x_0=0,5$ для следующих функций

а) $f(x)=\mathrm{arctg}^2\sqrt{x}$, б) $f(x)=3^{\arcsin x^2}$.

4. Геометрический смысл производной.

Производная в точке равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в этой точке. Уравнение касательной $y=y(x_0)+y'(x_0)(x-x_0)$.

Упражнение 7. Создать блок-функцию для построения касательной к графику функции в точке. Входными аргументами функции являются строка с символическим представлением функции одной переменной x и числовое значение абсциссы точки x_0, в которой следует провести касательную. Файл-функция выводит в одном графическом окне графики функции и касательной к ней в заданной точке на промежутке $[x_0-1; x_0+1]$. Алгоритм файл-функции включает:

1) Нахождение производной символически заданной функции.
2) Формирование символического выражения для касательной и подстановки в него значения производной, абсциссы и ординаты точки, в которой проводится касательная.

3) Построение графика функции и касательной к нему в указанной точке на указанном промежутке.

Используя созданную блок-функцию, построить график функции и касательную к нему для следующих функций:

а) $y = \cos^3(3x)$, $x_0 = \pi/4$; б) $y = e^{2x}$, $x_0 = 1$.

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.

2. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение С1. Создать функцию, зависящую от функции, точки и приращения, вычисляющую отношение приращения функции к приращению аргумента. Вычислить значения этой функции в точках 1, 2, -3 при приращениях аргумента $0{,}001$, $-0{,}001$ для функции $y = \sin^5 \dfrac{1}{x}$.

Упражнение С2. Заполнить таблицу, вставив вместо С1 результаты упражнения С1, а вместо С2 значение производной функции в указанной точке, вычисленное по определению.

	$x_0 = 1$		$x_0 = 2$		$x_0 = -3$	
$y = \sin^5 \dfrac{1}{x}$	С1	С2	С1	С2	С1	С2

Упражнение С3. Вычислить производную функции $f(x) = \dfrac{\log_3(x^2+1)}{\arccos^3(\sin x)}$ и ее значение в точке $x_0 = 0{,}5$.

3. Ответить на контрольные вопросы:

1. Какую структуру имеют блок-функции?
2. Как использовать функцию в качестве входного аргумента блок-функции?
3. Как символически вычислять производные?

Список рекомендуемой литературы

1. Сборник задач по математике для втузов под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова, часть 2, М.2002, - 5.5.

2. А. Кривелёв. Основы компьютерной математики с использованием системы MatLab. М, 2005. – 6.1.