

Практикум 2.1. Интегрирование

Цель работы – научиться использовать средства пакета Anaconda для сим-вольного вычисления неопределенного и определенного интегралов, усвоить понятие интегральных сумм и сумм Дарбу.

Продолжительность работы - 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета Anaconda.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить отчёт, в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», упражнения для самостоятельной работы, индивидуальные задания. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты функций; выводы.

Краткие теоретические сведения и практические упражнения

1. Символьное вычисление неопределённого интеграла. Неопределённые интегралы от символьических функций вычисляются с помощью **int**, входными аргументами указываются символьическая функция и переменная, по которой ведётся интегрирование.

Пример 1.

```
from sympy import *  
x = Symbol('x')  
I = integrate(x**3*exp(x), x)  
pprint(I)
```

Упражнение 1. Вычислить неопределённые интегралы:

$$\text{а) } \int x \sin 5x dx \quad \text{б) } \int \frac{dx}{(x^2+1)(x-2)^2}.$$

2. Символьное вычисление определённого интеграла. При вычислении определённого интеграла в символьном виде следует задать значения нижнего и верхнего предела в качестве нижнего и верхнего предела: **integrate(f,(x,a,b))**.

Упражнение 2. Вычислить определённые интегралы в символьном виде:

$$\text{а) } \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx ; \quad \text{б) } \int_0^1 x e^{3x} dx.$$

3. Интегральные суммы и суммы Дарбу.

Упражнение 3. Создать функции, вычисляющие значения интегральных сумм на отрезке $[a;b]$ при равномерном разбиении его на n отрезков и выбором точек на (использовать пакеты numru и scipy):

- а) левых концах отрезков разбиения;
- б) правых концах отрезков разбиения.

Проверить работу функций, сопоставив результат выполнения программы и результат, полученный вручную, для интегральных сумм функции $f(x) = x$ на отрезке $[1;2]$ при разбиении его на четыре равных части.

Упражнение 4. Создать функции, вычисляющие значения верхних и нижних сумм Дарбу на отрезке $[a;b]$ при равномерном разбиении его на n отрезков. Проверить работу функций, сопоставив результат выполнения программы и ре-

зультат, полученный вручную, для сумм Дарбу функции $f(x) = x$ на отрезке $[1; 2]$ при разбиении его на четыре равных части.

Упражнение 5. Используя функции упр. 3 и 4, вычислить интегральные суммы и суммы Дарбу для $f(x) = e^{-x^2}$ на отрезке $[1; 2]$ при $n = 1000$.

4. Численное интегрирование. Функция `integrate.simpson(f,x)` из пакета `scipy` вычисляет значения определенного интеграла по формуле Симпсона для значений функции **f**, соответствующих аргументам **x**.

```
import scipy.integrate as integrate
import numpy as np
x = np.linspace(-1,2,1000)#
integrate.simpson(np.sin(x),x)
```

Упражнение 6. Вычислить $\int_1^2 e^{-x^2}$, используя функцию `integrate.simpson`.

Сравнить результат с результатами упражнения 5, вычислив разности между численным значением интеграла, полученным по формуле Симпсона (взяв разбиение на 100 интервалов и на 1000), и значениями интегральных сумм и сумм Дарбу.

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.
2. Ответить на контрольные вопросы:
 - 1) Почему при символьном вычислении неопределенного интеграла от функции с действительной областью определения и действительным множеством значений результат может содержать комплексные числа?
 - 2) Что представляет собой с геометрической точки зрения интегральная сумма?, нижняя сумма Дарбу?, верхняя сумма Дарбу?
 - 3) Предположим, что нам неизвестно аналитическое задание функции $f(x)$, но известно, что $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, и известны наименьшие и наибольшие значения $f(x)$ на каждом из 100 отрезков равномерного разбиения отрезка $[a, b]$. Как нам оценить значения $\int_a^b f(x)dx$? Можем мы ли

мы найти приближенное значение интеграла с помощью функции `integrate.simpson`?

3. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение С1. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$:

а) используя средства python;

б) без использования python.

Сопоставить и объяснить результаты.

Упражнение С2. Вычислить определённый интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x^2 dx$, используя символьное вычисление python.

Упражнение С3. Создать функцию, вычисляющую значения интегральных сумм на отрезке $[a;b]$ при равномерном разбиении его на n отрезков и выбором точек, делящих отрезки разбиения в произвольном заданном отношении λ .

Проверить работу функции, сопоставив результат выполнения программы и результат, полученный вручную, для интегральных сумм функции $f(x) = x$ на отрезке $[1;2]$ при разбиении его на четыре равных части и выбором точек, делящих отрезки разбиения пополам.

Индивидуальные задания

Задание 1. Вычислить значения интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ при его разбиении на n равных частей и выборе в качестве ξ_k точек, делящих отрезки разбиения в указанном отношении λ . Рассмотреть $n = 2, 4, 8, 16, \dots, 1024$. Результаты представить в виде таблицы.

Сравнить результаты со значением определенного интеграла, полученным аналитически.

Задание 2. Оценить значение $\int_a^b f(x)dx$ с помощью сумм Дарбу при разбиении отрезка на n равных частей. Рассмотреть $n = 2, 4, 8, 16, \dots, 1024$. Полученными результатами дополнить таблицу из задания 1.

Общие рекомендации к выполнению заданий: написанный при выполнении каждого задания m-файл протестировать, сопоставив для $n = 4$ результаты выполнения программ с расчетами, проделанными «вручную».

Варианты выполнения заданий:

Номер компьютера	$f(x)$	a	b	λ
1.	$-x^2$	-4	2	1/2
2.	$-x^3$	-2	4	1/2
3.	$2x^2$	-4	-2	1
4.	$2x^3$	-3	1	1/3
5.	$x^2 + 1$	-3	5	1/3
6.	$x^3 + 1$	-3	-1	1
7.	$2x^2 - 1$	-4	2	1/2
8.	$2x^3 - 1$	-2	4	1/2
9.	$-x^2 + 1$	-4	-2	1
10.	$-x^3 + 1$	-3	1	1/3
11.	$-2x^2 - 1$	-3	5	1/3
12.	$-2x^3 - 1$	-3	-1	1
13.	$x^2 - 1$	-4	2	1/2
14.	$x^3 - 1$	-2	4	1/2
15.	$2x^2 + 1$	-4	-2	1
16.	$2x^3 + 1$	-3	1	1/3
17.	$x^2 + 1$	-3	5	1/3
18.	$x^3 + 1$	-3	-1	1
19.	$2x^2 - 1$	-4	2	1/2
20.	$2x^3 - 1$	-2	4	1/2
21.	$-x^2 + 1$	-4	-2	1
22.	$-x^3 + 1$	-3	1	1/3
23.	$-2x^2 - 1$	-3	5	1/3
24.	$-2x^3 - 1$	-3	-1	1
25.	$x^2 - 1$	-4	2	1/2
26.	$x^3 - 1$	-2	4	1/2
27.	$2x^2 + 1$	-4	-2	1
28.	$2x^3 + 1$	-3	1	1/3

Список рекомендуемой литературы

1. Сборник задач по математике для вузов под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова, часть 2, М.2002, - 5.5.