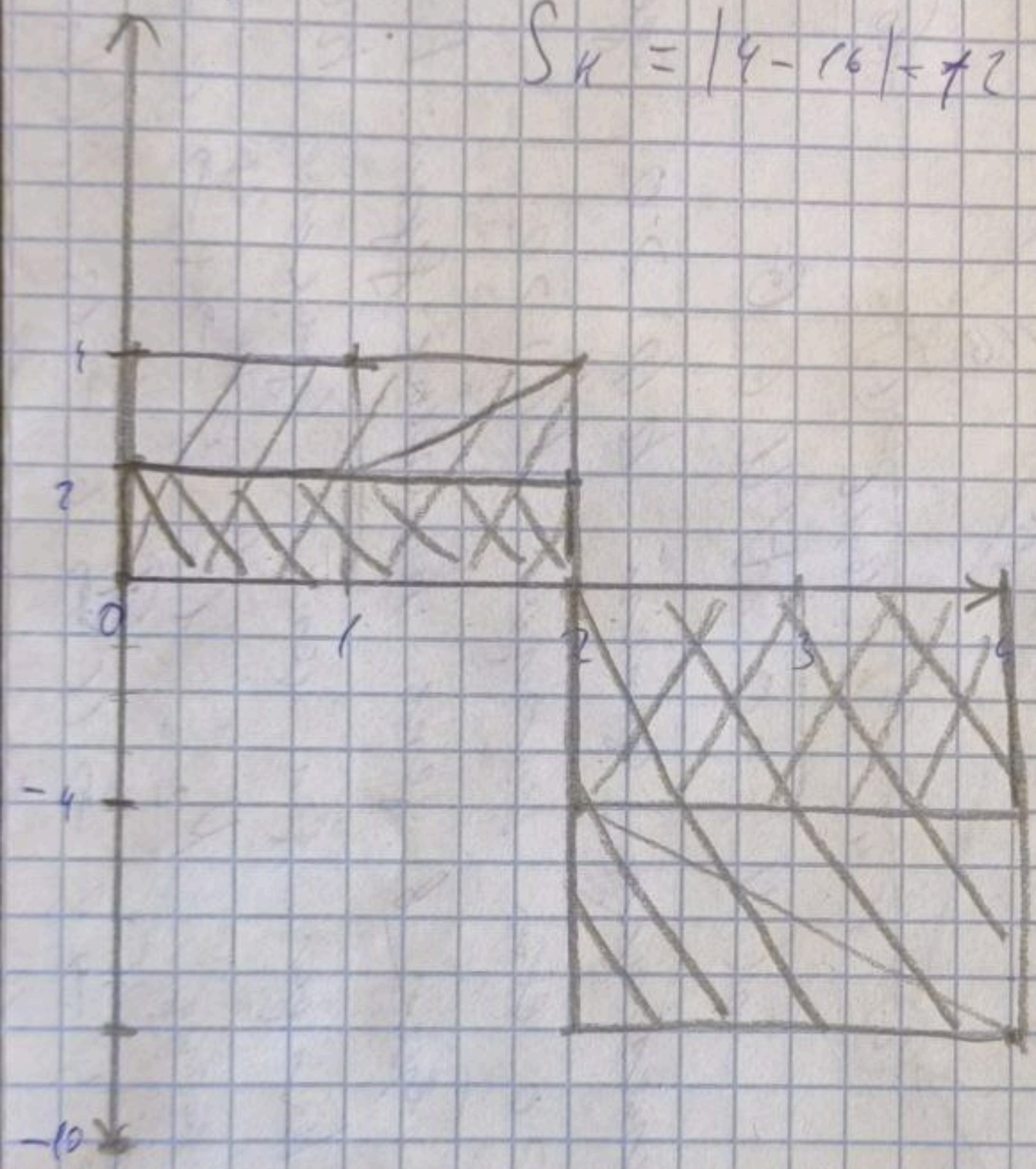
Сальков Ю.А. Пит. 31 Вариант 1.

1. $\int_0^1 F(x)\,dx$, при $F(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & x \le 2 \\ -2x & x > 2 \end{cases}$

График: $S_в = 0$

$S_н = |4 - 16| = 12$

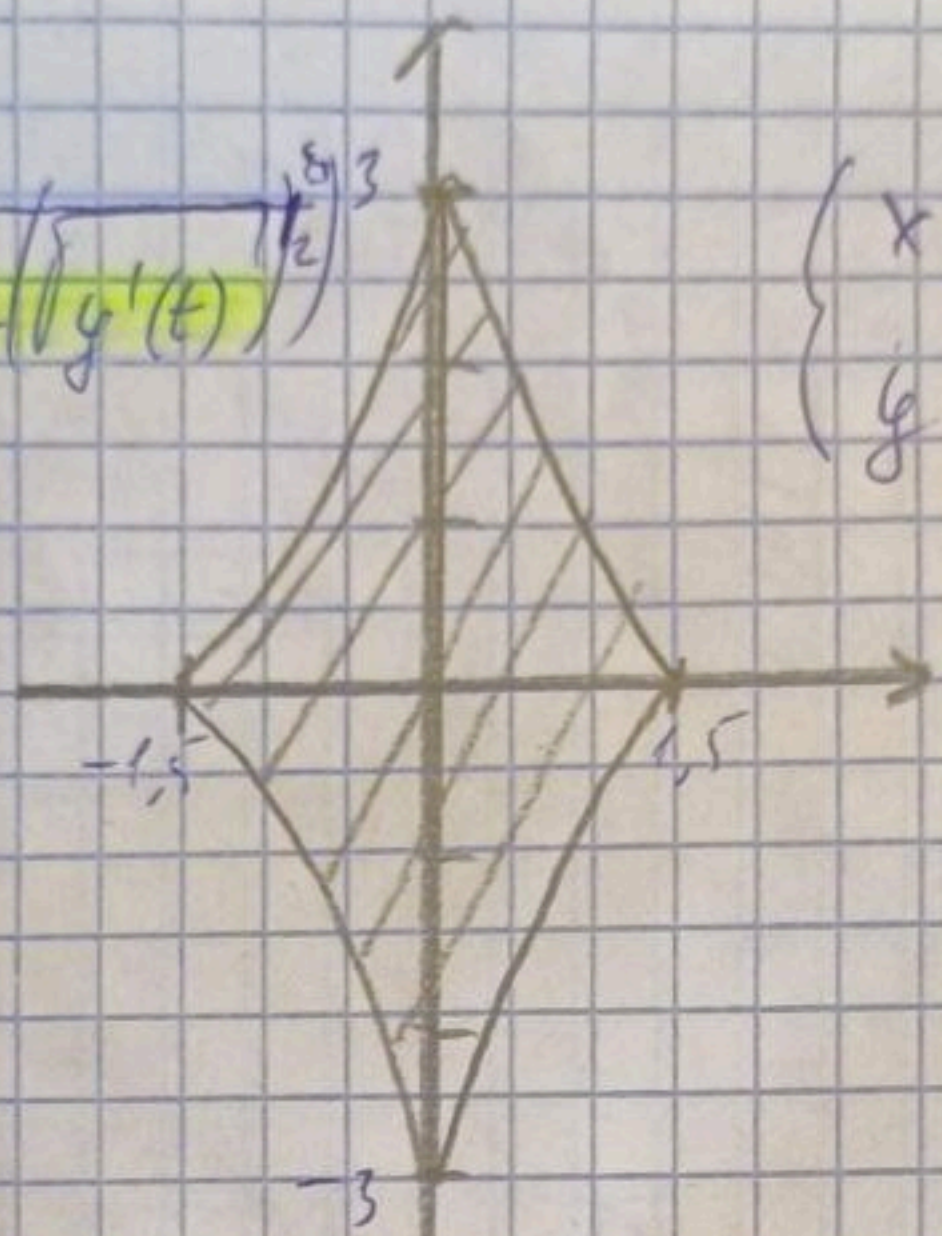


- нижние

- верхние

2. Длина дуги

$$S = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$



$$\begin{cases} x = 3\cos^3(t) \\ y = 3\sin^3(t) \end{cases}$$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{(9\cos^2(t)\cdot\sin(t))^2 + (9\sin^2(t)\cdot\cos(t))^2} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{81\cos^2(t)\sin^4(t) + \frac{81\cos^4(t)\sin^2(t)}{4}} =$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{9\sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)}\,\sin(2t)}{4} = \frac{9}{4}\sqrt{3\sin^2(t)+1}$$

$$= \frac{9}{4}\int 2\cos(t)\sin(t)\cdot\sqrt{3\sin^2(t)+1}\,dt$$ - Продолжим

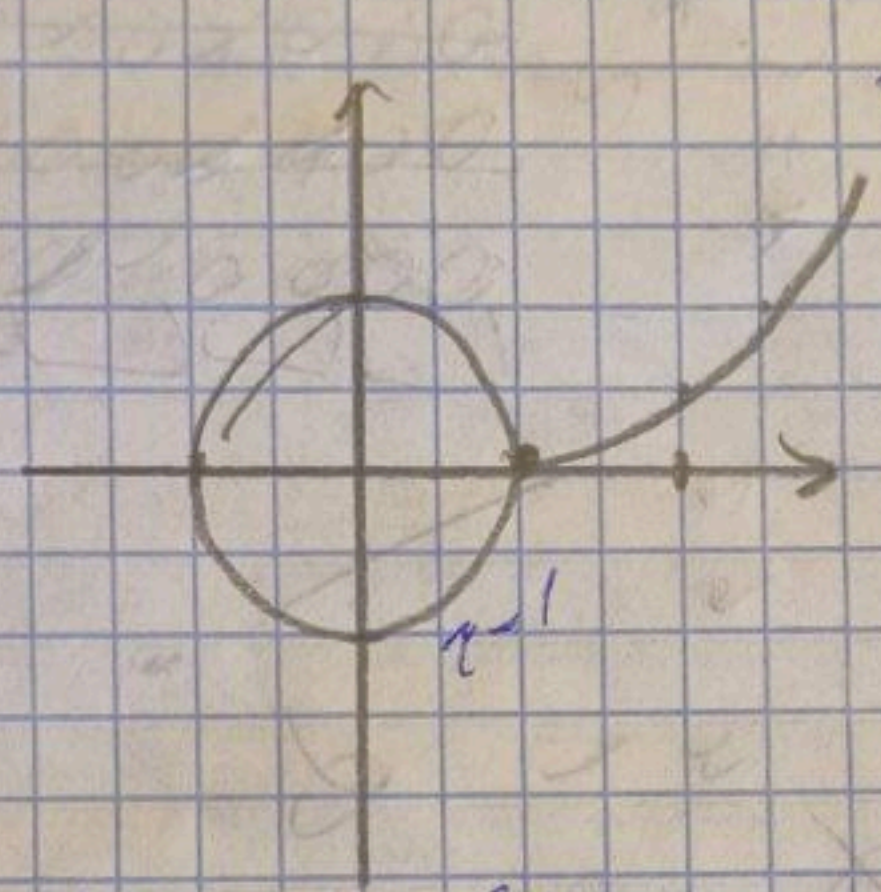
$$\begin{cases} u = 3\sin^2(t)+1 \\ du = 6\cos(t)\cdot\sin(t)\,dt \end{cases}$$

$$\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}\int\sqrt{u}\,du = \frac{3}{4}\cdot\frac{2u^{3/2}}{3} = \left(\frac{(3\sin^2(t)+1)^{3/2}}{2}\right.$$

Подставляем значения:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{3\sin^2(t)+1}{2}\right)^{3/2} = 7$$

3. График:



– Логарифмическая спираль не укладывается в окружность $r=1$ => мы не можем вычислить длину дуги.

Общая формула:

$$S = \int_a^b \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}$$

4. Найти объем тела вращения: OX

$$\begin{cases} x = 3/2 \cos^3(t) \\ y = 3\sin^3(t) \end{cases} \quad 0 \le t \le \pi/5.$$

• Общая формула:

$$V = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t) \cdot x'(t)\,dt$$

$$V = \pi \cdot \int_0^{\pi/5} (3\sin^3(t))^2 \cdot (-4{,}5\sin(t)\cdot\cos^2(t)) =$$

$$= \pi \int -9\sin^6(t)\cdot 4{,}5\sin t\cdot\cos^2 t = -\frac{81}{2}\pi \int \sin^7 t\cdot\cos^2(t)dt$$

$$= -\frac{81}{2}\pi \left| \left(\frac{\cos^9(t)}{9} - \frac{3\cos^7 t}{7} + \frac{3\cos^5(t)}{5} - \frac{\cos^3(t)}{3}\right)\right|_0^{\pi/5}$$

$\cos(\pi/5) \approx 0{,}8$

$$= \left((0{,}015 - 0{,}09 + 0{,}20 - 0{,}17\right) - \left(\tfrac{1}{9} - \tfrac{3}{7} + \tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{3}\right)) -$$

$$0 - \frac{81}{2}\cdot\pi \approx 40{,}4.$$