Практикум 11. Исследование функций и построение графиков.

Цель работы – освоить исследование функций и построение графиков с использованием производных; изучить возможности среды python для исследования функций; научиться использовать встроенную функцию brentq для нахождения нулей, стационарных точек и точек перегиба функции.

Продолжительность работы – 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием языка программирования Python и интерактивного блокнота jupyter-notebook.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить отчёт, в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные

из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; тексты М-сценариев и М-функций; выводы.

Краткие теоретические сведения и практические упражнения

1. Схема исследования функции и построения графика

Исследование функции можно проводить по следующей схеме.

1. Найти область определения функции.
2. Проверить, является ли функция четной, нечетной, периодической.
3. Найти нули функции и промежутки, где значения функции положительны, отрицательны.
4. Найти точки разрыва функции. Найти односторонние пределы функции в граничных точках области определения и в точках разрыва. Указать вертикальные асимптоты функции.
5. Найти наклонные асимптоты функции.
6. Вычислить первую производную функции, найти экстремумы и промежутки ее возрастания и убывания.
7. Вычислить вторую производную, найти точки перегиба графика, промежутки выпуклости вверх и выпуклости вниз.

2. Советы по применению python

Использование графических функций python позволяет быстро получить общее представление о поведении функций. При этом важно посмотреть графики на разных промежутках значений переменных – провести исследование, которое даст представление о функции на качественном уровне. Если функция имеет точки разрыва второго рода, то имеет смысл построить в одной системе координат «кусочки» графиков на промежутках непрерывности и тем самым добиться большей наглядности.

Во многих случаях общего представления о поведении функции недостаточно – нужны уточнения количественного характера. Получив первичное представление о поведении функции, легче проводить количественные исследования.

Хорошо, если количественный анализ удается провести аналитически. Но во многих случаях приходится обращаться к численным расчетам (с целью экономии сил или вследствие невозможности аналитического решения). Например, нули самой функции, ее первой и второй производной, можно найти численно с помощью встроенных команд python.

В случае громоздких выражений, для нахождения производных можно использовать символьное дифференцирование.

2. Нахождение нулей функции.

Встроенная функция brentq позволяет приближённо вычислить корень уравнения по заданному начальному приближению. Базовый формат вызова этой функции включает два аргумента и имеет следующий вид:

```
brentq (fun, a, b)
```

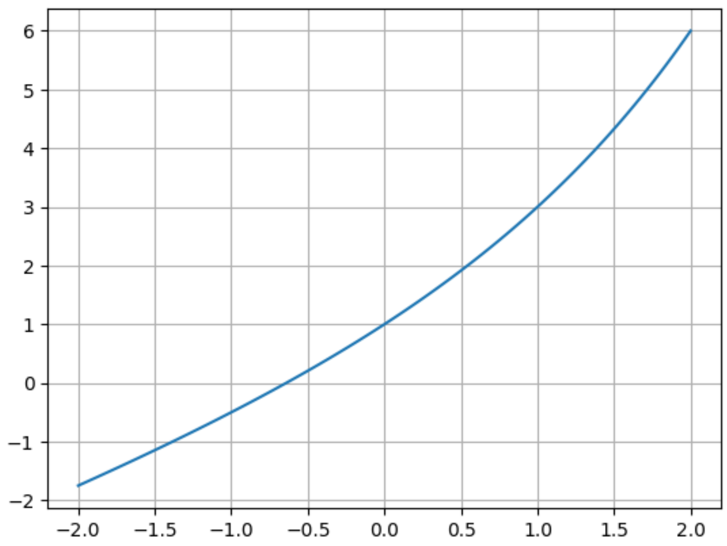
Параметры a, b представляет собой границы интервала, при этом значения fun должны менять знак на концах интервала, это гарантирует нахождение, по крайней мере, одного корня на этом интервале. Перед нахождением корней полезно построить график функции, входящей в левую часть уравнения. Имеет смысл воспользоваться ***sp.plot,*** построив более точный график по сравнению с ***plt.plot.***

Пример 1. Найдём приближённое решение уравнения $2^x + x = 0$. Так как функция $2^x + x$ возрастающая и $f(-1) < 0$, $f(0) > 0$, то уравнение имеет ровно один корень и этот корень принадлежит промежутку $[-1; 0]$. Создадим функцию ***myfun*** и построим её график на отрезке $[-1; 0]$, нанеся сетку.

```
from scipy import optimize
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def myfun(x):
    y = 2**x + x
    return y

x = np.linspace(-2, 2, 100)
plt.plot(x, myfun(x))
plt.grid(True)
```



Видим, что корень находится вблизи точки $x_0 = -0.5$, уточняем значение корня и проверяем подстановкой:

```
root = optimize.brentq(myfun, -1, 0)
print('root =', root)
print('f =', myfun(root))
```

```
root = -0.6411857744504986
f = 0.0
```

3. Минимизация функций.

Поиск локального минимума функции одной переменной на некотором отрезке осуществляется с помощью **optimize.fmin** с двумя входными аргументами: **fmin (f, x0)** , где x1 – начальное приближение, рядом с которым ищется минимум. При нахождении минимума функции следует сначала построить график с помощью **plot** и определить, какому промежутку принадлежит точка минимума. Для одновременного вывода точки минимума и значения в ней используется **fmin** с тремя входными аргументами:

```
M = fmin(f, x0, full_output=True)
```

В этом случае выходной аргумент **M** будет представлять собой кортеж данных, состоящий из точки локального минимума, значения функции в этой точке, количества итераций метода, количества вызовов функции и значения производной на последней итерации. Для нахождения локального максимума нет специальной функции, но очевидно, что локальные максимумы можно найти как минимумы противоположной функции.

Пример 2. Найдем локальный минимум функции $y = (x-2)^2 + 1$.

```
def f(x):
    return (x-2)**2 + 1

from scipy import optimize

minimum = optimize.fmin(f, 1, full_output=True, disp=False)
print('x0 =', minimum[0])
print('f(x0) =', minimum[1])
```

Упражнения

Упражнение 1

Исследовать функцию $y = \dfrac{x^4 + 2x^2 + x + 2}{x^3 + 2x^2 + x + 2}$ и построить ее график. При необходимости для полноты картины построить графики функции на разных промежутках. Нанести на графики информацию о нулях функции, координатах экстремумов и точек перегиба. Дополнить график асимптотами (при их наличии).

Упражнение 2

Скорость молекул идеального газа, находящего в равновесии при определенной температуре, является случайной величиной, подчиняющейся распределению Максвелла с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\beta^{3/2} x^2 e^{-\beta x^2/2}, x > 0 \end{cases}$$

(параметр $\beta > 0$ определяется температурой и массой молекул).

а) Исследовать функцию $f(x)$ при $\beta = 1$ и построить ее график (на рисунок нанести информацию о характерных точках и асимптотах).

б) Изучить на качественном уровне влияние параметра β на поведение функции.

Упражнение 3

Исследовать функцию $y=\sqrt{\dfrac{x^3-2x^2}{x-3}}$ и построить ее график. При необходимости для полноты картины построить графики функции на разных промежутках. Нанести на графики информацию о нулях функции, координатах экстремумов и точек перегиба. Дополнить график асимптотами (при их наличии).

Упражнение 4.

Найти локальные максимум и минимумы для функции $f(x)=e^{-x}\sin(3\pi x)$ на промежутке $[0;2]$. Ответ записать в текстовый файл.

Задания для самостоятельной работы

Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение С1. Найти точки перегиба для функции $f(x)=\sin x-x^2\cos x$ на промежутке $[-10;10]$.

Упражнение С2. Построить график функции $f(x)=e^{1/(x^2-1)}$. Найти нули функции, точки экстремума и значения в них, точки перегиба, значения в них, значения тангенса угла наклона касательной в точке перегиба, найти односторонние пределы в точках разрыва, уравнения асимптот. Обозначить на графике экстремумы, построить касательные в окрестностях точек перегиба, асимптоты.

Ответить на контрольные вопросы:

1. Можно ли, используя функцию brentq, найти нули функции $f(x)=\cos x-1$?
2. Почему, прежде чем искать нули функции с помощью функции brentq, рекомендуется построить график функции?
3. Почему, прежде чем искать минимумы функции с помощью функции fmin, рекомендуется построить график функции?

Список рекомендуемой литературы

1. Сборник задач по математике для втузов под ред. А.В.Ефимова и А.С.Поспелова, часть 2, М.2002.

2. Официальная документация по языку программирования Python https://docs.python.org/3/.

3. Официальная документация к библиотеке numpy https://numpy.org/doc/stable/index.html.

4. Официальная документация к библиотеке matplotlib https://matplotlib.org/stable/api/index.