Практикум 2.4. Принцип сжимающих отображений. Решение уравнений и систем линейных уравнений методом итераций

Цель работы – изучить понятия метрического пространства, полного метрического пространства, принцип сжимающих отображений; научиться решать, используя Python, методом итераций уравнения и системы линейных уравнений.

Продолжительность работы - 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием Python.

Требования к отчету

В отчет включаются решения упражнений из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнений для самостоятельной работы. Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; выводы; аналитические решения (если нужно по заданию).

Краткие теоретические сведения и практические упражнения

1. Метрические пространства. Полные метрические пространства.

Метрическим пространством называется пара (X,ρ), состоящая из множества X и заданного на этом множестве *расстояния* (*метрики*) ρ, т.е. действительной, неотрицательной функции двух элементов множества, удовлетворяющей *аксиомам расстояния:*

1. $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$;
2. $\forall x,y\in X \quad \rho(x,y)=\rho(y,x)$ (аксиома симметрии);
3. $\forall x,y,z\in X \quad \rho(x,z)\le\rho(x,y)+\rho(y,z)$ (аксиома треугольника).

В пространстве R^n часто используются следующие расстояния:

а) $(x,y)=\max\limits_{1\le k\le n}|x_k-y_k|$;

б) $\rho_1(x,y)=\sum\limits_{k=1}^{n}|x_k-y_k|$;

в) $\rho_2(x,y)=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2}$ (евклидова метрика),

Метрические пространства с соответствующими расстояниями обозначаются R_0^n, R_1^n, R_2^n.

Упражнение 1. Создать функции, которые вычисляют расстояние между точками R^n в различных метриках. Проверить их работу для расстояний между точкой $O(0;0)$ и точками $A(3;4)$ и $B(4;3)$. Вычислить расстояния между точками $A(1;2;3;4)$ и $B(7;3;4;200)$ в различных метриках.

Открытым шаром $B_{x_0,r}$ называется множество точек x метрического пространства (X,ρ), для которых $\rho(x,x_0)<r$.

Замкнутым шаром $\overline{B}_{x_0,r}$ называется множество точек x метрического пространства (X,ρ), для которых $\rho(x,x_0)\le r$.

Упражнение 2. Создать М-функцию, строящую изображение замкнутого шара в R^2 для различных метрик. Построить шары $\overline{B}_{O,1}$ в метриках ρ_0, ρ_1, ρ_2.

2. Принцип сжимающих отображений. Метод итераций.

Последовательность точек $\{x_n\}$ метрического пространства (X,ρ) называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon>0$ найдётся такое $n_0\in N$, что при всех $n>n_0$, $m>n_0$ выполняется неравенство $\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$.

Метрическое пространство (X,ρ) называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность в нём сходится, т.е. для этого пространства справедлив критерий Коши сходимости последовательности.

Пространства R_0^n, R_1^n, R_2^n являются полными.

Пусть (X,ρ)- полное метрическое пространство. Оператор A, отображающий X в X называется сжимающим, если

$$\exists\quad \alpha<1\quad \forall x\in R\quad \forall y\in R\quad \rho(Ax,Ay)\le\alpha\cdot\rho(x,y).$$

Пример 1. Если функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b]$, и имеет непрерывную производную $f'(x)$, удовлетворяющую условию $|f'(x)|<1$, то в полном метрическом пространстве R вещественных чисел отрезка $[a;b]$ с метрикой $\rho(x,y)=|x-y|$ определен оператор A: $A(x)=f(x)$, $A:R\to R$. В силу теоремы Лагранжа имеем $\left|f(x)-f(y)\right|\le\alpha|x-y|$, где $\alpha=\max\limits_{x\in[a,b]}|f'(x)|<1$ и следовательно, A - сжимающий оператор.

Принцип сжимающих отображений. Пусть (X,ρ)- полное метрическое пространство, а оператор A, отображающий X в X - сжимающий. Тогда уравнение $Ax=x$ имеет и притом единственное решение.

Принцип сжимающих отображений дает метод отыскания приближенного решения уравнения $Ax=x$. Именно, если выполняются условия приведенной теоремы, то последовательность точек метрического пространства x_1, x_2, …, x_n, …, где $x_i\in R$, x_1 выбирается произвольно, $x_2=Ax_1$, $x_3=Ax_2$, …, $x_n=Ax_{n-1}$, …, сходится к x_0 - решению уравнения $Ax=x$.

Этот метод решения уравнения (1) и называется *методом итераций*. Справедлива оценка погрешности от замены точного решения уравнения (1) его n -ым приближением x_n $\rho(x_0,x_n)\le\dfrac{\alpha^n\rho(x_1,x_2)}{1-\alpha}$.

Пример 2. С точностью до $0,001$ методом итераций найти решение уравнения $\operatorname{tg}x=x$ в интервале $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$.

Так как $\dfrac{d\operatorname{tg}x}{dx}=\dfrac{1}{\cos^2 x}\ge 1$, то процесс итераций для исходного уравнения расходится. Перепишем уравнение в виде $x=\operatorname{arctg}x+\pi$ (при переходе к обратной функции здесь получаем не $x=\operatorname{arctg}x$, а $x=\operatorname{arctg}x+\pi$, так как по определению $-\dfrac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}x<\dfrac{\pi}{2}$, а по условию, $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$).

Поскольку $\dfrac{d(\operatorname{arctg} x+\pi)}{d\,x}=\dfrac{1}{1+x^2}<1$ при $\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3\pi}{2}$, то для уравнения $x=\operatorname{arctg} x+\pi$ получаем сходящийся итерационный процесс.

Полагаем $x_1=3$. Тогда $x_2=\operatorname{arctg} x_1+\pi=\operatorname{arctg} 3+\pi\approx 4{,}3906$, …

Чтобы оценить число итераций, необходимых для достижения точности $\varepsilon=0{,}001$ воспользуемся формулой $\rho(x_0,x_n)\le\dfrac{\alpha^n\rho(x_1,x_2)}{1-\alpha}$. Для $x\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ производную функции $f(x)=\operatorname{arctg} x+\pi$ оценим сверху:

$$\frac{d(\operatorname{arctg} x+\pi)}{d\,x}=\frac{1}{1+x^2}<\frac{1}{1+\dfrac{\pi^2}{4}}<0{,}2884=\alpha .$$

Тогда неравенство $\rho(x_0,x_n)\le\dfrac{\alpha^n\rho(x_1,x_2)}{1-\alpha}$ дает $\dfrac{\alpha^n\rho(x_1,x_2)}{1-\alpha}<\varepsilon$, следовательно, $n>\dfrac{\ln(\varepsilon(1-\alpha))-\ln(\rho(x_1,x_2))}{\ln\alpha}$. Учитывая, что $\rho(x_1,x_2)=\operatorname{arctg} 3+\pi-3\approx 1{,}3906$, получаем $n>6{,}0944$.

Таким образом, начиная с седьмого, члены последовательности отличаются от точного решения уравнения менее, чем на $0{,}001$, $x_0\approx x_7=4{,}4934$, $|x_0-x_7|<0{,}001$.

Упражнение 3. Положив $x_1=3$, вывести 10 первых членов последовательности x_n, заданной рекуррентной формулой $x_{k+1}=\operatorname{tg}(x_k)$. Сделать вывод.

Упражнение 4. Создать функцию для решения уравнения $f(x)=x$ с заданной точностью с выводом последовательности приближений. Входными параметрами являются функция $f(x)$, параметр сжатия α, начальное приближение x_1, точность решения ε. Проверить работу для уравнения из примера 2. С точностью 0.0001 решить уравнение (см. ниже, номер задания равен номеру компьютера). Сравнить с ответом, полученными при непосредственном решении в Python.

Варианты заданий к упражнению 4:

1.	$4x = \cos x$	16.	$x^3 + x^2 - 1 = 0$
2.	$x = 0,21\sin(0,5 + x)$	17.	$x + e^x = 0$
3.	$x = \arcsin(10x - 20)$	18.	$x - 0,1\sin x = 2$
4.	$3x^3 + \cos x = 2$	19.	$x + e^x = 0$
5.	$e^x + e^{-3x} = 4$	20.	$\cos x = x$
6.	$x \lg x = 1$	21.	$\mathrm{tg}\, x = x,\ x \in (3\pi; 6\pi)$
7.	$\cos x = x^2$	22.	$x^2 = \sin \pi x$
8.	$2x \ln x = 1$	23.	$2(x-1)^2 = e^x$
9.	$2\sqrt{x} + \ln x = 0$	24.	$2 - x = \lg x$
10.	$x + 1 = x \lg x$	25.	$x = 5\cos x$
11.	$e^x = x^4$	26.	$2 = x \lg x$
12.	$(x^2 - 1)x = 1$	27.	$2\sin x = x$
13.	$3 - x = 2\lg x$	28.	$1 = (x+1)\lg x$
14.	$x^3 = e^x$	29.	$x^2 + e^x - 2 = 0$
15.	$x^5 + 3x - 2 = 0$	30.	$x^5 - 2x - 1 = 0$

3. Решение линейных систем.

Будем решать систему $AX = B$ методом итераций. Запишем систему $AX = B$ в виде $B - AX = 0$, $B + (-A + E)X = X.$ Если теперь обозначить $f(X) = B + (-A + E)X,$ то получим уравнение вида $f(X) = X$. Для получения приближенного решения выберем начальное приближение $X^{(0)}$ и реализуем итерационный процесс по схеме $X^{(n)} = f(X^{(n-1)}),\ n = 1, 2, \ldots .$ Для сходимости итерационного процесса должно выполняться одно из условий сжатости матрицы $C = -A + E$:

а) $\max\limits_{1 \le k \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |c_{kj}| < 1;$

б) $\max\limits_{1 \le k \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |c_{jk}| < 1;$

в) $\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{kj}^2} < 1.$

Если ни одно из условий сжатости для матричного уравнения $B + CX = X$ не выполняется, то можно попробовать исправить ситуацию: разделить каждое уравнение исходной системы на максимальный элемент и (или) переставить уравнения и перейти к решению полученной равносильной системы.

Упражнение 5. Записать систему уравнений в виде $B + CX = X$. Проверить выполнение условия сжатости матрицы C. Создать функцию для решения методом итераций системы уравнений $AX = B$ с точностью ε, взяв в качестве начального приближения решения $X_1 = B.$ Выходные параметры: приближённое решение и количество итераций. Решить систему уравнений с точностью 0,001. Проверить решение подстановкой.

Варианты заданий к упражнению 5:

1.	$A = \begin{pmatrix} 0,51 & 0,4 & 3,15 \\ 4,17 & 0,31 & -0,31 \\ 0,13 & 5,32 & 0,41 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6,12 \\ 5,34 \\ 8,01 \end{pmatrix}.$
2.	$A = \begin{pmatrix} -1,23 & 0,42 & 9,54 \\ -0,23 & -10,2 & 2,31 \\ 7,23 & 1,44 & -0,33 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 7,54 \\ -2,31 \\ 4,52 \end{pmatrix}.$
3.	$A = \begin{pmatrix} 0,23 & 8,31 & -0,41 \\ -0,29 & -0,24 & 7,27 \\ 5,41 & -0,23 & -0,67 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -4,26 \\ 7,51 \\ 6,23 \end{pmatrix}.$
4.	$A = \begin{pmatrix} 7,26 & -0,12 & 0,23 \\ -0,45 & 0,89 & 4,12 \\ 0,15 & 3,62 & -0,12 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -4,42 \\ 8,23 \\ 7,54 \end{pmatrix}.$
5.	$A = \begin{pmatrix} -0,51 & 0,43 & 4,15 \\ 6,17 & -0,31 & -0,25 \\ 0,14 & -7,32 & 0,43 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3,12 \\ 2,34 \\ 4,01 \end{pmatrix}.$
6.	$A = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,42 & -9,54 \\ -0,23 & 10,2 & -1,31 \\ 9,23 & -1,44 & -0,33 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -7,54 \\ -2,34 \\ 3,52 \end{pmatrix}.$
7.	$A = \begin{pmatrix} 1,23 & -9,31 & 0,41 \\ -0,89 & -1,24 & -10,27 \\ -8,41 & -0,23 & -1,67 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4,26 \\ -7,51 \\ 8,23 \end{pmatrix}.$
8.	$A = \begin{pmatrix} -9,26 & -0,12 & 1,23 \\ -0,45 & 0,89 & 8,12 \\ 0,15 & 5,62 & -0,12 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8,42 \\ -5,23 \\ 6,54 \end{pmatrix}.$
9.	$A = \begin{pmatrix} -0,67 & -0,4 & 5,15 \\ 7,17 & -0,31 & -0,31 \\ 0,13 & -8,32 & 0,41 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6,12 \\ 5,34 \\ 8,01 \end{pmatrix}.$

10.	$A=\begin{pmatrix} -1,23 & 0,42 & -9,54 \\ -1,23 & -11,2 & 0,31 \\ 13,23 & 1,44 & -1,33 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7,54 \\ -2,31 \\ 4,52 \end{pmatrix}.$
11.	$A=\begin{pmatrix} 1,23 & 8,31 & -0,41 \\ -0,89 & -0,24 & 7,27 \\ 5,41 & -0,23 & -0,67 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -4,26 \\ 7,51 \\ 6,23 \end{pmatrix}.$
12.	$A=\begin{pmatrix} -9,26 & -0,12 & 1,23 \\ -0,45 & 0,89 & 7,12 \\ -0,15 & 5,62 & -0,12 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -4,42 \\ 8,23 \\ 7,54 \end{pmatrix}.$
13.	$A=\begin{pmatrix} -1,51 & 0,43 & 8,15 \\ -6,17 & -0,31 & -0,25 \\ 0,14 & 9,32 & -0,43 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -3,12 \\ 2,34 \\ 4,01 \end{pmatrix}.$
14.	$A=\begin{pmatrix} 1,23 & 0,42 & 10,54 \\ -1,27 & 10,2 & -1,31 \\ 8,23 & -0,44 & -0,33 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -7,54 \\ -2,34 \\ 3,52 \end{pmatrix}.$
15.	$A=\begin{pmatrix} -0,23 & -9,31 & 1,41 \\ -1,89 & -1,24 & -10,27 \\ -8,41 & -0,23 & -1,67 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4,26 \\ -7,51 \\ 8,23 \end{pmatrix}.$
16.	$A=\begin{pmatrix} 1,51 & -8,34 & 0,15 \\ 7,25 & 1,31 & -0,31 \\ 0,13 & 0,32 & 10,32 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6,12 \\ -5,32 \\ 7,01 \end{pmatrix}.$
17.	$A=\begin{pmatrix} -0,52 & 0,41 & 4,15 \\ -5,17 & 0,32 & -0,31 \\ 0,13 & -7,32 & 0,41 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 6,12 \\ 5,34 \\ 8,01 \end{pmatrix}.$
18.	$A=\begin{pmatrix} 0,23 & -1,42 & 9,54 \\ -0,23 & -11,2 & -3,31 \\ 7,23 & -1,44 & -0,33 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 7,54 \\ -2,31 \\ 4,52 \end{pmatrix}.$
19.	$A=\begin{pmatrix} 0,23 & 7,31 & 0,41 \\ 0,29 & -0,34 & 7,27 \\ -6,41 & -0,23 & -0,67 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -4,26 \\ 7,51 \\ 6,23 \end{pmatrix}.$
20.	$A=\begin{pmatrix} -8,26 & -0,12 & 0,23 \\ -0,35 & -0,89 & 4,12 \\ 0,15 & 4,62 & -0,12 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -4,42 \\ 8,23 \\ 7,54 \end{pmatrix}.$
21.	$A=\begin{pmatrix} 0,55 & 0,43 & 4,15 \\ 7,17 & -0,31 & -0,25 \\ -0,14 & -7,32 & 0,43 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -3,12 \\ 2,34 \\ 4,01 \end{pmatrix}.$

22.	$A=\begin{pmatrix} -1,23 & 0,42 & -10,54 \\ 0,23 & -10,2 & -1,31 \\ 9,23 & 1,44 & -0,53 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7,54 \\ -2,34 \\ 3,52 \end{pmatrix}$.
23.	$A=\begin{pmatrix} 1,23 & 10,31 & -0,41 \\ 0,85 & -1,24 & 10,27 \\ 8,41 & 0,23 & -1,27 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4,26 \\ -7,51 \\ 8,23 \end{pmatrix}$.
24.	$A=\begin{pmatrix} 12,26 & -0,12 & 1,23 \\ -0,45 & 1,89 & 13,12 \\ 0,15 & 9,62 & -0,12 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 8,42 \\ -5,23 \\ 6,54 \end{pmatrix}$.
25.	$A=\begin{pmatrix} -0,67 & 1,41 & 10,15 \\ -7,17 & +0,31 & -0,31 \\ 1,13 & -8,32 & 0,41 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 6,12 \\ 5,34 \\ 8,01 \end{pmatrix}$.
26.	$A=\begin{pmatrix} -1,23 & 0,42 & 10,54 \\ 1,23 & -11,2 & 0,31 \\ 13,23 & 1,44 & -1,33 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 7,54 \\ -2,31 \\ 4,52 \end{pmatrix}$.
27.	$A=\begin{pmatrix} 1,23 & -12,31 & -0,41 \\ -0,89 & 0,24 & 7,27 \\ 9,41 & -0,23 & -0,67 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4,26 \\ 7,51 \\ 6,23 \end{pmatrix}$.
28.	$A=\begin{pmatrix} 13,26 & -0,12 & 1,23 \\ -1,45 & 0,89 & 7,12 \\ -1,15 & 8,62 & -0,12 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4,42 \\ 8,23 \\ 7,54 \end{pmatrix}$.
29.	$A=\begin{pmatrix} 1,51 & 0,43 & -10,15 \\ -9,17 & 1,31 & -0,25 \\ 0,14 & 9,32 & -0,43 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -3,12 \\ 2,34 \\ 4,01 \end{pmatrix}$.
30.	$A=\begin{pmatrix} 0,23 & -1,42 & 10,54 \\ 0,27 & 10,2 & -1,31 \\ 8,83 & -1,44 & 0,33 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -7,54 \\ -2,34 \\ 3,52 \end{pmatrix}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Ответить на контрольные вопросы:

1) Сформулируйте принцип сжимающих отображений.
2) Из каких соображений нужно выбирать начальное приближение при решении уравнений методом итераций?
3) Записать уравнение $x^3 - x - 1 = 0$ в виде, пригодном (с точки зрения выполнения достаточных условий сходимости) для поиска корня уравнения методом итерации.