Практикум 2.7. Дифференцирование функций многих переменных. Формула Тейлора

Цель работы – научиться находить частные производные, градиент, дифференциал функции нескольких переменных, используя средства Anaconda, строить касательную плоскость к графику функций двух переменных; использовать формулу Тейлора для приближенного вычисления значений функции.

Продолжительность работы – 4 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета Anaconda.

Порядок выполнения

1. Работа начинается с выполнения общих упражнений. Их наличие в отчете является допуском к сдаче индивидуального зачетного задания по практикуму.
2. После выполнения общих упражнений выполняются индивидуальные задания; результаты заносятся в отчет.
3. Подготовить отчёт**,** в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; функции; выводы.

Краткие теоретические сведения
и практические упражнения

1. Частные производные функции нескольких переменных

Для символьного вычисления производных используется функция **diff** из библиотеки **sympy**. Базовый формат вызова функции:

Y = diff(S, t, p)

S – функция, заданная в символьном виде, t – переменная, по которой дифференцируется функция, p – порядок производной.

Часть параметров можно опускать:

Y = diff(S)

Y = diff(S,t)

Y = diff(S,p)

Если отсутствует параметр t, то дифференцирование по умолчанию происходит по переменной, первой по алфавиту; если отсутствует параметр p, то ищется первая производная.

Пример 1.

```
import sympy as sp

x, y = sp.symbols('x y')
z = x**3 + y**2
print('dzdx:')
sp.pprint(sp.diff(z, x))
print('\ndzdy:')
sp.pprint(sp.diff(z, y))
print('\nd2zdx2:')
sp.pprint(sp.diff(z, x, 2))
print('\nd2zdxdy:')
sp.pprint(sp.diff(sp.diff(z, x), y))
```

Вывод:

```
dzdx:
  2
```

```
3·x

dzdy:
2·y

d2zdx2:
6·x

d2zdxdy:
0
```

Упражнение 1.

а) Вычислите частные производные первого и второго порядка функции $z(x, y) = \cos(3x + y^2)$.

б) Найдите градиент функции $f(x, y, z) = 2x^3 y + x - z$ в точке $(1, 2, -3)$.

Параметр S может быть и массивом (**sympy.Array** или **sympy.Matrix**), элементами которого являются функции. В этом случае **diff** возвращает массив из производных. Для примера вычислим якобиан перехода от декартовой системы координат к полярной. Напомним, что переход от декартовой к полярной системе координат осуществляется по формулам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ и определитель $I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$ называется якобианом этого преобразования.

Пример 2

```
r, t = sp.symbols('r t')
# формулы перехода от декартовой системы координат к полярной
x = r * sp.cos(t)
y = r * sp.sin(t)
# вектор функций перехода для составления матрицы
A = sp.Matrix([[x, y]])
sp.pprint(A)
```

```
[r⋅cos(t)  r⋅sin(t)]
```

```
# матрица производных (транспонирована для более удобного составления)
B = sp.Matrix([[sp.diff(A,r)], [sp.diff(A,t)]])
sp.pprint(B.T)
```

```
⎡cos(t)  -r⋅sin(t)⎤
⎢                 ⎥
⎣sin(t)  r⋅cos(t) ⎦
```

```
# вычисление якобиана
sp.pprint(B.det())
sp.pprint(sp.simplify(B.det()))  # упрощение выражения с помощью simplify
```

```
    2          2
r⋅sin (t) + r⋅cos (t)
r
```

Упражнение 2.

Вычислите якобиан перехода от декартовой системы координат к цилиндрической (переход осуществляется по формулам: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$).

2. Дифференциалы функции нескольких переменных

Упражнение 3.

а) Найдите первый дифференциал dz функции $z = xy^2 + 2y - x^2$ в точке $(2,-1)$, если $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = -0{,}2$.

б) Создайте **функцию**, вычисляющую первый дифференциал функции $f(x,y)$ в точке (x_0, y_0) при приращениях Δx, Δy. В число входных параметров включите функцию f, ее аргументы x, y и их приращения Δx, Δy, заданные в символьном виде, координаты точки (x_0, y_0) и числовые значения приращений аргументов. В число выходных параметров включите символьное выражение первого дифференциала в точке (x_0, y_0) и его числовое значение при заданных приращениях аргументов. Протестируйте **функцию**, используя данные пункта а).

Упражнение 4.

а) Найдите второй дифференциал d^2z функции $z = xy^2 + 2y - x^2$ в точке $(2,-1)$, если $\Delta x = 0,1$, $\Delta y = -0,2$.

б) Создайте **функцию**, вычисляющую второй дифференциал функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) при приращениях Δx, Δy. В число входных параметров включите функцию f, ее аргументы x, y и их приращения Δx, Δy, заданные в символьном виде, координаты точки (x_0, y_0) и числовые значения приращений аргументов. В число выходных параметров включите символьное выражение второго дифференциала в точке (x_0, y_0) и его числовое значение при указанных приращениях аргументов. Протестируйте **функцию**, используя данные пункта а).

3. Приближенное вычисление значений функции с помощью формулы Тейлора

Предположим, что функция $f(x, y)$ в окрестности некоторой точки (x_0, y_0) имеет непрерывные производные всех порядков до $(n+1)$-го включительно. Придадим x_0 и y_0 некоторые приращения Δx, Δy так, чтобы прямолинейный отрезок, соединяющий точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, не вышел за пределы рассматриваемой окрестности точки (x_0, y_0). Тогда справедлива *формула Тейлора*:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) + \frac{1}{(n+1)!} d^{n+1} f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y) \ \ (0 < \theta < 1).$$

Если точки (x_0, y_0) и $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ достаточно близки, то имеют место приближенные равенства

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y) + \ldots + \frac{1}{n!} d^n f(x_0, y_0, \Delta x, \Delta y),$$

которые называют разложением функции $f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0) до членов n-го порядка включительно.

Упражнение 5.

а) Создайте **функцию**, раскладывающую функцию $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) в ряд Тейлора до членов 1-го порядка включительно. В число входных параметров включите функцию f, ее аргументы x,y и их приращения Δx, Δy, заданные в символьном виде, координаты точки (x_0,y_0) и числовые значения приращений аргументов. В число выходных параметров включите символьное разложение $p_1(x,y)$ функции $f(x,y)$ по формуле Тейлора в точке (x_0,y_0) до членов 1-го порядка включительно, записанное через произвольные значения аргументов функции, а также приближенное значение функции $f(x,y)$ в точке $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$ (значение $p_1(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$) при указанных значениях x_0,y_0,dx,dy.

б) Используйте **функцию** из п. а) для вычисления приближенного значения функции $z=f(x,y)$ в точке $(x_0;y_0)$. Сравните полученный результат с точным значением этой функции в указанной точке.

в) Постройте в одной системе координат в области $x\in[a;b]$, $y\in[c,d]$ поверхности $z=f(x,y)$ и $z=p_1(x,y)$.

Замечание. Уравнение $z=p_1(x,y)$, или в развернутом виде

$$z=f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

является уравнением касательной плоскости к поверхности $z=f(x,y)$ в точке с координатами (x_0,y_0).

Упражнение 6.

а) Создайте **функцию**, раскладывающую функцию $f(x,y)$ в точке (x_0,y_0) по формуле Тейлора до членов 2-го прядка включительно. В число входных параметров включите функцию f, ее аргументы x,y и их приращения Δx, Δy, заданные в символьном виде, координаты точки (x_0,y_0) и числовые значения приращений аргументов. В число выходных параметров включите символьное разложение $p_2(x,y)$ функции $f(x,y)$ по формуле Тейлора в точке (x_0,y_0) до членов 2-го порядка включительно, записанное через произвольные значения аргументов функции, а также приближенное значение функции $f(x,y)$ в точке $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$ (значение $p_2(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$) при указанных значениях x_0,y_0,dx,dy.

б) Используйте **функцию** из п. а) для вычисления приближенного значения функции $z = f(x, y)$ в точке $(x_0; y_0)$. Сравните полученный результат с точным значением этой функции в указанной точке и с ее приближенным значением, полученным по формуле Тейлора до членов 1-го порядка.

в) Постройте в одной системе координат в области, $x \in [a; b]$, $y \in [c, d]$ поверхности $z = f(x, y)$, $z = p_1(x, y)$ и $z = p_2(x, y)$.

Индивидуальные задания

Номер компью-тера	$f(x,y)$	(x_0, y_0)	$[a,b]$	$[c,d]$
1	$f(x,y)=(2x^2+y^2)^2$	$(0,8;2,2)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
2	$f(x,y)=(x^2+2y^2)^2$	$(0,8;2,2)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
3	$f(x,y)=(2x^2+y^2)^4$	$(0,8;2,2)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
4	$f(x,y)=(x^2+2y^2)^4$	$(0,8;2,2)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
5	$f(x,y)=(2x^4+y^4)^2$	$(0,8;2,2)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
6	$f(x,y)=(x^4+2y^4)^2$	$(0,8;2,2)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
7	$f(x,y)=e^{\sqrt{y}}(2x^2+y^2)$	$(0,8;2,2)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
8	$f(x,y)=e^{\sqrt{y}}(x^2+2y^2)$	$(0,8;2,2)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
9	$f(x,y)=e^{\sqrt{x}}(2x^2+y^2)$	$(0,8;2,2)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
10	$f(x,y)=e^{\sqrt{x}}(x^2+2y^2)$	$(0,8;2,2)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
11	$f(x,y)=x^3+y^3-3xy$	$(1,4;1,4)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
12	$f(x,y)=x^3+y^3-15xy$	$(1,4;1,4)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
13	$f(x,y)=x^3+8y^3-6xy+1$	$(0,8;0,2)$	$[0;2]$	$[-1;1]$
14	$f(x,y)=e^{xy}(2x+y)$	$(4,4;4,4)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
15	$f(x,y)=e^{xy}(x+2y)$	$(4,4;4,4)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
16	$f(x,y)=e^{x-y}(2x^2+y^2)$	$(2,8;-2,8)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
17	$f(x,y)=e^{x-y}(x^2+2y^2)$	$(2,8;-2,8)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
18	$f(x,y)=e^{x-y}(2x^2-y^2)$	$(2,8;-2,8)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
19	$f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2)$	$(2,8;-2,8)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
20	$f(x,y)=e^{x+y}(2x^2+y^2)$	$(2,8;2,8)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
21	$f(x,y)=e^{x+y}(x^2+2y^2)$	$(2,8;2,8)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
22	$f(x,y)=e^{x+y}(2x^2-y^2)$	$(2,8;2,8)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$

23	$f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2-2y^2\right)$	$(2{,}8;2{,}8)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
24	$f(x,y)=xy(x+y-1)$	$(1{,}9;1{,}9)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
25	$f(x,y)=\sin(x)+\sin(y)+\sin(x+y)$	$\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
26	$f(x,y)=3\sin(x)+\sin(y)+\sin(x+y)$	$\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
27	$f(x,y)=\sin(2x)+\sin(2y)+\sin(x+y)$	$\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$
28	$f(x,y)=\sin(x)+\sin(y)+\sin(2x+2y)$	$\left(\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$	$[-6;6]$	$[-6;6]$

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.

2. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение 1С. Вычислите якобиан перехода от декартовой системы координат к сферической (переход осуществляется по формулам: $x=r\cos\varphi\cos\theta$, $y=r\sin\varphi\cos\theta$, $z=r\sin\theta$).

Упражнение 2С.

Формула Тейлора справедлива для функций от любого числа переменных. Пусть функция $f(x_1,...,x_n)$ определена в некоторой ε-окрестности точки $\tilde{M}(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)$ и $n+1$ раз дифференцируема в этой окрестности. Тогда значение функции f в любой точке $M(\tilde{x}_1+\sum x_1,...,\tilde{x}_n+\Delta x_n)$ этой окрестности может быть найдено по формуле Тейлора

$$f(\tilde{x}_1+\Delta x_1,...,\tilde{x}_n+\Delta x_n)=f(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)+\frac{1}{1!}df(\tilde{M},\Delta x_1,...,\Delta x_n)+\frac{1}{2!}d^2f(\tilde{M},\Delta x_1,...,\Delta x_n)+...$$

$$...+\frac{1}{n!}d^nf(\tilde{M},\Delta x_1,...,\Delta x_n)+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(N,\Delta x_1,...,\Delta x_n),$$

где N - некоторая точка указанной ε-окрестности.

Создайте **функцию**, раскладывающую функцию $f(x_1,...,x_n)$ в точке $\tilde{M}(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)$ по формуле Тейлора до членов 2-го порядка включительно (n - произвольное число). В число входных параметров включите саму функцию f, заданную в символьном виде, координаты точки $\tilde{M}(\tilde{x}_1,...,\tilde{x}_n)$, приращения $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n$. В число выходных параметров включите символьное разложение $p_2(x_1,...,x_n)$ функции $f(x_1,...,x_n)$ по формуле Тейлора до членов 2-го порядка включительно, записанное через приращения $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n$ независимых переменных, а также приближенное значение функции $f(x_1,...,x_n)$ в указанной точке $x_1=\tilde{x}_1+\Delta x_1$, …, $x_n=\tilde{x}_n+\Delta x_n$ (значение $p_2(\tilde{x}_1+\Delta x_1,...,\tilde{x}_n+\Delta x_n)$).

Протестируйте **функцию** на примерах.

3. Ответить на контрольные вопросы:

1) С помощью каких встроенных функций **sympy** можно символьно вычислять производные функции двух переменных? трех переменных?
2) Как, используя средства библиотеки **sympy**, вычислить вторую смешанную производную функции двух переменных?

Список рекомендуемой литературы

1. Официальная документация по языку программирования Python https://docs.python.org/3/

2. Официальная документация к библиотеке sympy https://docs.sympy.org/latest/index.html

3. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч.3? Учебное пособие для втузов / Под общ. Ред. А.В.Ефимова и А.С. Поспелова. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2003