Практикум 2.6. Графическое представление функций нескольких переменных

Цель работы – научиться строить, используя средства пакета MatLab, графики функций двух переменных и линии уровня функции нескольких переменных.

Продолжительность работы - 2 часа.

Оборудование, приборы, инструментарий – работа выполняется в компьютерном классе с использованием пакета MatLab.

Порядок выполнения

1. Упражнения выполняются параллельно с изучением теоретического материала.
2. После выполнения каждого упражнения результаты заносятся в отчёт.
3. При выполнении упражнений в случае появления сообщения об ошибке рекомендуется сначала самостоятельно выяснить, чем оно вызвано, и исправить команду; если многократные попытки устранить ошибку не привели к успеху, то проконсультироваться с преподавателем.
4. Дома доделать упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые Вы не успели выполнить во время аудиторного занятия.
5. После выполнения упражнений выполнить дополнительные упражнения для самостоятельной работы и ответить на контрольные вопросы и (см. ниже).
6. Подготовить отчёт, в который включить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения» и упражнения для самостоятельной работы. Отчёт представить в виде документа Microsoft Word, имя файла (пример): mp_10_Ivanov_P_01_s_1 (факультет_группа_Фамилия студента_Инициал_номер лабораторной, семестр). Отчет должен содержать по каждому выполненному упражнению: № упражнения, текст упражнения; команды, скопированные из командного окна, с комментариями к ним и результаты их выполнения, включая построенные графики; функции; выводы.

Краткие теоретические сведения
и практические упражнения

1. Функции многих переменных. Область определения.

Упражнение 1. Создать функции, строящие графики функций $y = f(x)$, $y = g(x)$, на промежутке $[a;b]$ ($f(x) \le g(x)$ при $x \in [a;b]$) и показывающую вертикальной штриховкой область, заключенную между графиками. Входные аргументы – функции, границы отрезка $[a;b]$ и количество частей, на которые разбивается отрезок:

а) верхняя и нижняя границы сплошные, б) обе границы пунктирные;

в), г) одна граница сплошная, другая пунктирная.

Упражнение 2. Используя М-функции из упр. 1, построить области определения функции $f(x;y) = \sqrt{y + 1 - x^2} \cdot \sqrt{1 + x^2 - y}$.

2. Графики функций двух переменных.

Для отображения функции двух переменных следует:

1. Сгенерировать матрицы для отображения узлов сетки на прямоугольной области определения функции.

2. Вычислить функцию в узлах сетки и записать полученные значения в матрицу.

3. Использовать одну из графических функций.

4. Нанести на график дополнительную информацию, в частности, соответствие цветов значениям функции.

Сетка генерируется с помощью команды *meshgrid*, вызываемой с двумя аргументами. Аргументами являются векторы, элементы которых соответствуют сетке на прямоугольной области построения функции. Можно использовать один аргумент, если область построения функции квадрат.

Пример 1. Сгенерируем сетку на области $x \in [-1;1]$, $y \in [0;1]$ и значения в узлах для функции $f(x) = 4\sin 2\pi x \cdot \cos 1.5y \cdot (1 - x^2) y (1 - y)$:

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(projection = '3d')
```

```
xs = np.linspace(-1, 1, 50)
ys = np.linspace(-1, 1, 50)
X, Y = np.meshgrid(xs, ys)
Z = 4*np.sin(2*np.pi*X)*np.cos(1.5*Y)*(1-X**2)*Y*(1-Y)
ax.plot_wireframe(X, Y, Z, rstride = 2, cstride = 2)
```

Команда *colorbar* выводит рядом с графиком функции столбик, устанавливающий соответствие между цветом и значением функции:

Команду *colorbar* можно применять в сочетании со всеми функциями, строящими трёхмерные объекты.

Пример 2 (обычная поверхность):

```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import cm
import numpy as np

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})
# построение поверхности
surf = ax.plot_surface(X, Y, Z, cmap=cm.YlGnBu_r, linewidth=0)
# цветовой индикатор
fig.colorbar(surf, shrink=0.5, aspect=5)
plt.show()
```

Упражнение 3. Построить каркасную поверхность, залитую цветом, с указанием соответствия цветов значениям для функции $z = 1/x + 1/y,\ \ x, y \in [0.1; 2]$.

3. Линии уровня. Пользуясь уже рассмотренными графиками, трудно сделать вывод о значении функции в той или иной точке плоскости *Oxy*. Линии уровня (линии постоянства значений функции), т.е. кривые, на которых значения функции равно одному и тому же числу) позволяют получить более точное представление о поведении функции. Python позволяет построить поверхность, состоящую из линий уровня.

Пример 3 (линии уровня в 3-d):

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
from matplotlib import cm

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"})
ax.contour(X, Y, Z, cmap=cm.YlGnBu_r) # Plot contour curves
plt.show()
```

Пример 4.1 (обычные линии уровня+заливка):

```
cs = plt.contourf(Z)
plt.colorbar(cs, shrink=0.9, aspect=5)
```

Пример 4.2 (обычные линии уровня):

```
cs = plt.contour(Z)
```

Упражнение 4. Для функции из упражнения 3 построить плоские линии уровня с заливкой и без неё; линии, поверхности, состоящие из линий уровня.

4. Контурная графика. Более содержательную информацию о числовых значениях функции дают плоские контурные графики, содержащие линии уровня исследуемых функций.

Упражнение 5. Для функции из упр. 3 построить плоские линии уровня без нанесения и с нанесением значений функции с шагом 0.1. Нанести сетку.

Пример 5 (большой пример с линиями уровня в 3-d):

```
import matplotlib.pyplot as plt
 fig1 = plt.figure()
 ax1 = fig1.add_subplot(231,projection='3d')
ax2 = fig1.add_subplot(232,projection='3d')
ax3 = fig1.add_subplot(233,projection='3d')
ax4 = fig1.add_subplot(234,projection='3d')
ax5 = fig1.add_subplot(235,projection='3d')
ax6 = fig1.add_subplot(236,projection='3d')

# построим поверхность на трех верхних графиках
ax1.plot_surface(X, Y, Z, edgecolor='royalblue', lw=0.5, rstride=8, cstride=8,
```

```
alpha=0.01)
ax2.plot_surface(X, Y, Z, edgecolor='royalblue', lw=0.5, rstride=8, cstride=8,
alpha=0.01)
ax3.plot_surface(X, Y, Z, edgecolor='royalblue', lw=0.5, rstride=8, cstride=8,
alpha=0.01)
# Построение линий уровня в разных проекциях вместе с самой поверхно-
стью
ax1.contour(X, Y, Z, zdir='z', offset=-1, cmap='coolwarm')
ax2.contour(X, Y, Z, zdir='x', offset=-1, cmap='coolwarm')
ax3.contour(X, Y, Z, zdir='y', offset=1, cmap='coolwarm')
# Построение линий уровня в разных проекциях отдельно от поверхностей
ax4.contour(X, Y, Z, zdir='z', offset=-1, cmap='coolwarm')
ax5.contour(X, Y, Z, zdir='x', offset=-1, cmap='coolwarm')
ax6.contour(X, Y, Z, zdir='y', offset=1, cmap='coolwarm')
plt.show()
```

Упражнение 6. Для функции из упр. 3 построить каркасную поверхность с с линиями уровня в разных проекциях вместе с самой поверхностью и отдельно от неё.

5. Построение параметрически заданных поверхностей и линий.

Python позволяет строить трёхмерные линии, определяемые формулами

$$x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t),\ \ t \in [a;b]$$

и поверхности, задаваемые зависимостями

$$x = x(u,v),\ \ y = y(u,v),\ \ z = z(u,v),\ \ u \in [a;b],\ \ \ v \in [c;d].$$

Пример 6 (построение параметрически заданной кривой в 3-d):

```
import numpy as np
t = np.linspace(-6,6,50)
x = np.cos(t)
y = np.sin(t)
z = t

fig1 = plt.figure()
```

```
ax = fig1.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(x,y,z)
```

Также имеется возможность изменять тип и цвет линии, вводя дополнительный аргумент свойства линии.

Упражнение 7. Построить пунктирную линию красного цвета, задаваемую уравнениями согласно варианту:

№ РС	Уравнения
1	$x = e^{\vert t\vert}\cos t, y = \sin t, z = t, t \in [-5\pi; 5\pi].$
2	$x = e^{\vert t\vert}\cos t, y = e^{-\vert t\vert}\sin t, z = t, t \in [-3\pi; 3\pi].$
3	$x = t\cos t, y = \sin t, z = t, t = [0, 4\pi]$
4	$x = t\cos t, y = \sin t, z = t, t \in [-10\pi; 10\pi].$
5	$x = \cos t, y = e^{-\vert t\vert}, z = t, t \in [-4\pi; 4\pi].$
6	$x = \sin t, y = \cos t, z = e^{-\vert t\vert}, t \in [-7\pi; 7\pi].$
7	$x = t^2, y = \cos t, z = e^{-\vert t\vert}, t \in [-6\pi; 6\pi].$
8	$x = e^{\vert t\vert}\cos 2t, y = \sin t, z = -t, t \in [-5\pi; 5\pi].$
9	$x = e^{\vert t\vert}\cos t, y = e^{-\vert 2t\vert}\sin t, z = 3t, t \in [-2\pi; 2\pi].$
10	$x = t\cos 2t, y = -\sin t, z = t, t = [0, 5\pi]$
11	$x = t\cos t, y = \sin 3t, z = 2t, t \in [-8\pi; 8\pi].$
12	$x = 2\cos t, y = e^{-\vert t-2\vert}, z = 2t, t \in [-4\pi; 4\pi].$
13	$x = -\sin t, y = \cos t, z = e^{-2\vert t\vert}, t \in [-6\pi; 8\pi].$
14	$x = t^2, y = \cos 2t, z = e^{-\vert t\vert}, t \in [-6\pi; 6\pi].$
15	$x = e^{\vert 2t\vert}\cos t, y = \sin 3t, z = t, t \in [-4\pi; 4\pi].$
16	$x = 2e^{\vert t\vert}\cos t, y = e^{-\vert t\vert}\sin t, z = 2t, t \in [-4\pi; 4\pi].$
17	$x = t\cos 2t, y = \sin t, z = -t, t = [-2\pi, 4\pi]$
18	$x = t\cos t, y = 3\sin t, z = 2t, t \in [-5\pi; 5\pi].$
19	$x = \cos t, y = 2e^{-\vert t\vert}, z = t, t \in [-6\pi; 6\pi].$

20	$x=\sin t, y=\cos 2t, z=e^{-\lvert t\rvert}, t\in[-5\pi;5\pi].$
21	$x=t^2, y=\cos t, z=2e^{-\lvert t\rvert}, t\in[-4\pi;4\pi].$
22	$x=e^{\lvert t\rvert}\cos 2t, y=3\sin t, z=-2t, t\in[-8\pi;8\pi].$
23	$x=e^{\lvert t\rvert}\cos 2t, y=e^{-\lvert t\rvert}\sin t, z=t, t\in[-5\pi;5\pi].$
24	$x=t\cos 2t, y=-\sin t, z=-t, t=[0,10\pi]$
25	$x=-t\cos t, y=\sin 3t, z=2t, t\in[0;8\pi].$
26	$x=\cos t, y=e^{-\lvert t-2\rvert}, z=-2t, t\in[-4\pi;4\pi].$
27	$x=\sin 2t, y=-\cos t, z=e^{-2\lvert t\rvert}, t\in[-6\pi;8\pi].$
28	$x=t^2, y=-\cos 2t, z=e^{-\lvert t\rvert}, t\in[-7\pi;7\pi].$

Параметрически заданную поверхность можно построить при помощи любой из функций, предназначенных для отображения трёхмерных графиков. Важно только правильно подготовить аргументы.

Пример 7 (построение параметрически заданной поверхности):

```
u = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 50)
v = np.linspace(-2*np.pi, 2*np.pi, 50)
U,V = np.meshgrid(u,v)
XX = U * np.cos(V)
YY = U * np.sin(V)
ZZ = U

fig1 = plt.figure()
ax = fig1.add_subplot(111, projection='3d')
surf2 = ax.plot_surface(XX,YY,ZZ,cmap=cm.YlGnBu_r )
fig1.colorbar(surf2, shrink=0.8, aspect=5)
```

Пример 8 (построение поверхности в символьном виде):

```
from sympy import symbols, sin, cos
from sympy.plotting import plot3d
```

```
x, y = symbols('x y')
plot3d(cos(x)*sin(y), (x, -3, 3), (y, -3, 3))
```

Упражнение 8. Построить прозрачную каркасную поверхность, заданную параметрически, согласно варианту:

№РС	Уравнения
1	$x=\sin u\cdot\cos v, y=2\sin u\cdot\sin v, z=\cos u, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
2	$x=u\cdot\cos v, y=u\cdot\sin v, z=u, u\in[-2\pi;2\pi], v\in[0;2\pi].$
3	$x=\sin u\cdot\cos v, y=u\cdot\sin v, z=u, u\in[-2\pi;2\pi], v\in[0;2\pi].$
4	$x=\sin u\cdot v, y=u\cdot\sin v, z=uv, u\in[-2\pi;2\pi], v\in[-2\pi;2\pi].$
5	$x=u\cdot v, y=\sin u\cdot\sin v, z=\cos u\cdot\sin v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
6	$x=v, y=u, z=\sin u\cdot\sin v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
7	$x=u, y=v, z=\cos u\cdot\sin v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
8	$x=2\sin u\cdot\cos v, y=\sin v, z=\cos u, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
9	$x=3u\cdot\cos v, y=\cos u\cdot\sin v, z=u, u\in[-2\pi;2\pi], v\in[0;2\pi].$
10	$x=v\cdot\sin u, y=u\cdot\sin v, z=u+v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
11	$x=v, y=u\cdot\cos v, z=v\sin u, u\in[-\pi;\pi], v\in[-\pi;\pi].$
12	$x=\cos u, y=\sin v, z=\cos u\cdot\sin v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
13	$x=3v, y=2u, z=\sin u\cdot\sin v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
14	$x=\cos u, y=2v, z=\cos u\cdot\sin v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
15	$x=\sin u\cdot\cos v, y=2\sin u\cdot\sin v, z=\cos u, u\in[-\pi;\pi], v\in[-\pi;\pi].$
16	$x=-u\cdot\cos v, y=u\cdot\sin v, z=u, u\in[-2\pi;2\pi], v\in[0;2\pi].$
17	$x=\sin u\cdot\cos v, y=u\cdot\sin v, z=-u, u\in[-2\pi;2\pi], v\in[0;2\pi].$
18	$x=\sin u\cdot v, y=2u\cdot\sin v, z=uv, u\in[-2\pi;2\pi], v\in[-2\pi;2\pi].$
19	$x=u\cdot v, y=\cos u\cdot\sin v, z=\cos u\cdot\sin v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
20	$x=\sin v, y=2u, z=\sin u\cdot\sin v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
21	$x=\sin u, y=3v, z=\cos u\cdot\sin v, u\in[-\pi;\pi], v\in[-\pi;\pi].$
22	$x=3\sin u\cdot\cos v, y=2\sin v, z=\cos u, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$

23	$x = u\cdot\cos v, y = -\cos u\cdot\sin v, z = u, u\in[-2\pi;2\pi], v\in[0;2\pi].$
24	$x = \cos v\cdot\sin u, y = u\cdot\sin v, z = u+v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
25	$x = \cos v, y = u\cdot\cos v, z = v\sin u, u\in[-\pi;\pi], v\in[-\pi;\pi].$
26	$x = \sin u\cdot\cos 2v, y = \sin v, z = \cos u\cdot\sin v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
27	$x = 3\sin v, y = 2u, z = \sin u\cdot\sin v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$
28	$x = \cos u, y = 2\cos v, z = \cos u\cdot\sin v, u\in[0;2\pi], v\in[0;2\pi].$

Задания для самостоятельной работы

1. Выполнить упражнения из раздела «Краткие теоретические сведения и практические упражнения», которые не успели сделать в аудитории.

2. Самостоятельно выполнить упражнения:

Упражнение 1С. Построить области определения следующих функций:

а) $f(x;y) = \ln(1-x^2-y^2)\cdot\ln y;$

б) $f(x;y) = \sqrt{\dfrac{4-x^2-y^2}{x^2+y^2-1}}.$

Упражнение 2С. Построить каркасную поверхность, залитую цветом, с указанием соответствия цветов значениям для следующих функций:

а) $z = \cos(xy),\ \ x,y\in[-2\pi;2\pi];$

б) $z = \dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y},\ \ x,y\in[-2\pi;2\pi]$ (шаг выбрать с учётом области определения).

Упражнение 3С. Для функций из упр. 2С построить линии уровня и поверхности, состоящие из линий уровня.

Упражнение 4С. Для функций из упр. 2С построить плоские линии уровня с заливкой промежутков между линиями уровня и шкалой соответствия цветов значениям функции.

Список рекомендуемой литературы

1. Официальная документация по языку программирования Python https://docs.python.org/3/

2. Официальная документация к библиотеке sympy https://docs.sympy.org/latest/index.html

3. Сборник задач по математике для втузов. В 4 частях. Ч.3? Учебное пособие для втузов / Под общ. Ред. А.В.Ефимова и А.С. Поспелова. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2003