Сальков Ю.А ПИН-31 БДЗ 1
по К.П. по математическому анализу

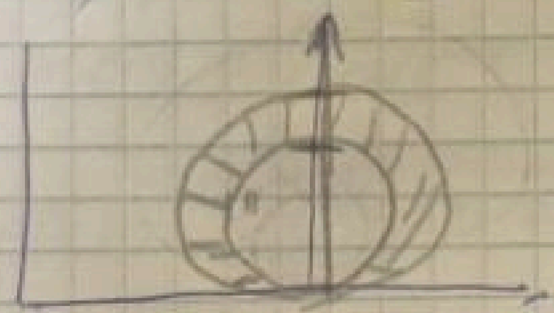
1. Найти S, огранич. кривыми:

$$\begin{cases} y = x - x^2\sqrt{x} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$S = \int_0^1 (x - x^{5/2})\,dx = \frac{3}{14}$$

2.

$$\begin{cases} r_0 = 6\sin\varphi \\ r_1 = 4\sin\varphi \end{cases}$$



$$S = S_{r0} - S_{r1} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 36\sin^2(\varphi)\,d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 16\sin^2(\varphi)\,d\varphi = 18\pi - 8\pi = 10\pi$$

3. Длина дуги:

$y = \ln(x)$, $\sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}$.

$$S_{дуги} = \int_a^b \sqrt{(1+(y'(x))^2)}\,dx \text{ — общая ф.}$$

$$S_{дуги} = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + (\ln(x)')^2}\,dx =$$

$$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + 1/x^2}\,dx = \operatorname{asinh}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \operatorname{asinh}\left(\frac{\sqrt{15}}{15}\right) + 2$$

$\approx 2,29\ldots$

4.

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{2t - t^2} \quad 0 \le t \le 1/2 \\ z = \ln(2/(2-t)) \end{cases}$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\cdot dt$$

$$S = \int_0^{0,5} \sqrt{1 + 0,5(2-2t)(2t-t^2)^{-1/2} - 1/(t-2)} =$$

$$= \int_0^{0,5} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{x-2}\right) - \left(\frac{(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}\right)} = \int_0^{0,5} \sqrt{\frac{(t-3)}{(x-2)} - \frac{(x-1)}{\sqrt{2t-t^2}}}$$

⑤ $\begin{cases} r = 2(1-\cos\varphi) \\ -\pi \le \varphi \le -\pi/2 \end{cases}$

$$S_{общ} = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\, d\varphi$$

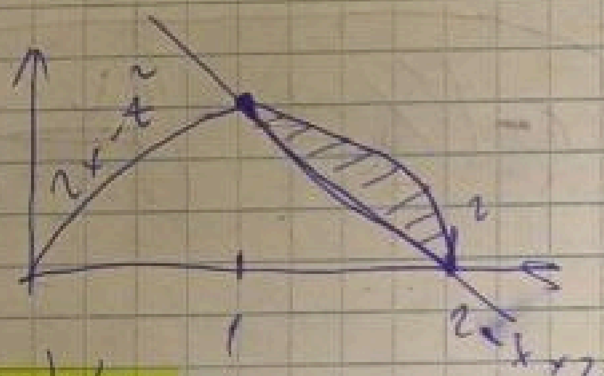
$$S = \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sqrt{(4 - 8\cos(\varphi) + 4\cos^2\varphi) + 4\sin^2(\varphi)} =$$

$$= \int_{-\pi}^{-\pi/2} \sqrt{8 - 8\cos(\varphi)} = \Big|_{-\pi}^{-\pi/2} 8\cos(x/2) = -2^{5/2}$$

⑥ Найти объем тела вращения

Вокруг OX:

$\begin{cases} y = 2x - x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$



$$V_{общ} = \pi \int_{\alpha}^{\beta} y^2(x)\, dx$$

$$V = \int_1^2 \pi(2x - x^2)\, dx = \Big|_1^2 \pi\left(x^2 - x^3/3\right) = \frac{8\pi}{15} \approx 1{,}68$$

⑦ Вычислить несобственный интеграл.

$\int_0^1 x \ln^4 x\, dx$ — разрыв в точке 0.

$$\int_0^1 x\ln^4(x) = \frac{x^2\ln^4(x)}{2} - x^2\ln^3(x) + \frac{3x^2\ln^2(x)}{2} - \frac{3x^2\ln(x)}{2} + \frac{3x^2}{4} + C.$$

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{x^2\ln^4(x)}{2}\right) - \left(x^2\ln^3(x)\right) + \left(\frac{3x^2\ln^2(x)}{2}\right) - \left(\frac{3x^2\ln(x)}{2}\right) + \frac{3x^2}{4} = 0.$

• Докажем, что $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln^4(x) = 0$.

$\lim\limits_{x\to +0} x\ln^4 x(x) = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(x)\ \ln^4(t)}{g(x)\ t}$ (0 · ∞) Применим правило Лопиталя 4 раза

$x = 1/t$, $t = 1/x$

$f'(x) = 4\ln^3(x)\ldots$
$g'(x) = 1$

Получим: $\lim\limits_{t\to\infty} 24(1/t) = 0$, ч.т.д.

• Получаем, что правый предел для нашего выражения равен 0.

Ответ $\int_0^1 x\ln^4(x) = 3/4 - 0 = 3/4$

⑧ Исследовать на сходимость:

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x} - \sin(x)}\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{0+\varepsilon}^{1} \frac{\cos(x)}{\sqrt{x} - \sin(x)}\, d(x) =$$