

卒業論文

振動子ネットワークにおける クラスタ構造とダイナミクス

03-200613 加藤雅己

指導教員 郡宏 教授

2022 年 2 月

東京大学工学部計数工学科システム情報工学コース

概要

頼むぜ田中. 頼むぜ田中. 頼むぜ田中. やったぜ田中.

同期現象はホタルの明滅や神経細胞・心筋細胞の電気活動など自然界で広く見られ、また、電力網などの工学系でも見られる。また、同期現象の数値モデルが進歩する一方でネットワーク科学が発展し、接続次数などのネットワークの構造と同期・拡散などの動的なプロセスとの関係が盛んに調べられている。閾値を越えたときのみ応答するような興奮現象を示す素子からなるネットワークにおいて、ネットワークの構造的な性質がネットワーク自体の機能に関係することが分かっている一方、ネットワークの構造と同期現象とを同時に扱う研究は十分になされていない。

本論文では、振動子ネットワークにおけるネットワーク構造と同期状態やクラスタ状態の関係を調べた。特に、枝の生成・消滅に伴う同期状態の変化という細かい性質を調べた。枝の生成・消滅に伴って振動子の所属クラスタが切り替わる鞍替えという現象を発見し、鞍替え現象を説明するために3種類の振動子で近似するモデルを提案した。振動子は、サイズが小さく、繋がっている枝が多いクラスタと同期しやすい。

また、枝の本数と振動数によるクラスタ状態の平均的な関係という一般的な性質についても調べ、それらの状態間の分岐条件を求め、同期や percolation との関係を調べた。同期状態は、枝の数が少ない疎な領域では、percolation の閾値など構造的性質に依存し、密な領域ではネットワーク全体の振動数同期に依存する。加えて、同じ振動数をもつ振動子の数の最大値という新たに導入した指標は、オーダーパラメータより顕著にミクロなクラスタ状態を表す。

本研究の結果は、一般の振動子ネットワークにおけるクラスタ同期を深く理解する助けになることが期待される。

キーワード 結合振動子モデル, 複雑ネットワーク, クラスタ同期, percolation

目次

本論文で使用する記号

- \mathbb{R} ：実数全体からなる集合.
- \mathbb{Z} ：整数全体からなる集合.
- \mathbb{S}^n ： n 次元球面. 以下で定義される.

$$\mathbb{S}^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

- \mathbb{T}^n ： n 次元トーラス. 以下で定義される.

$$\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$$

- A ：グラフの隣接行列.
- $f(x) = O(g(x))$ ： x が十分大きいとき $f(x)$ が $g(x)$ 以下に抑えられること. つまり,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 0$$

- $f(x) = \omega(g(x))$ ： x が十分大きいとき $g(x)$ が $f(x)$ 以下に抑えられること. つまり,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)/f(x) = 0$$

- $f(x) \sim g(x)$ ： x が十分大きいとき $f(x)$ が $g(x)$ にほとんど等しいこと. つまり,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/g(x) = 1$$

- $f(x) \gtrsim g(x)$, $g(x) \lesssim f(x)$ ： $f(x) \sim g(x)$ または $f(x) > g(x)$.
- $f(x) \gtrapprox g(x)$, $g(x) \lesssim f(x)$ ：任意の x で, $f(x) > g(x)$ だが $f(x)$ と $g(x)$ は十分近いこと.
- $\dot{x}(s)$ ： $dx/dt|_{t=s}$.
- i ：虚数単位.
- $G(V, E)$ ：頂点集合 V , 枝集合 E とするグラフ G .
- $x \gg y$ ： x が y と比べて十分大きいこと. 本論文では y/x を微小量として近似を行うことに利用する.
- $\text{sgn}(x)$ ： $x \in \mathbb{R}$ に対し, x の符号を返す関数.

第 1 章

はじめに

1.1 背景

同期現象はホタルの明滅や神経細胞・心筋細胞の電気活動など自然界で広く見られ、また、電力網などの工学系でも見られる [?, ?]. 同期現象は注目する周期的な現象に対して定義される振動数が部分的に一致する現象として数理的には理解される. そのような同期現象を記述する数理モデルは様々なもの [?, ?] が提案されているが、特に蔵本位相振動子モデル（以下、蔵本モデル）は研究が盛んに行われている [?]. 蔵本モデルは、それぞれ固有の振動数に従う自律的な振動子がそれぞれの位相差の \sin 関数で結合しているとするモデルである. 蔵本モデルは様々な興味深い性質を持つが、臨界結合強度というそれより結合強度が大きいと同期が実現するような結合強度で起きる相転移現象は特に注目されている [?, ?]. また、ネットワーク科学の発展により、現実のネットワークの特徴に対して示唆を与えられ、力学系に新たな観点が導入された [?]. 接続次数などのネットワークの構造が同期、拡散などの動的なプロセスにどう影響しているのかという疑問は多くの研究者を惹きつけるところとなった. 従来のモデルに加えて、次数分布や部分グラフの分布といったトポロジカルな性質を考慮したモデルが提案され、動的なプロセスとの関係が調べられている. 特に、蔵本モデルを振動子同士が結合したネットワークに拡張した結合振動子ネットワークについて、様々なモデルが提案されている [?, ?, ?, ?].

閾値を越えたときのみ応答するような興奮現象を示す素子からなるネットワークにおいて、percolation のような構造的な性質がネットワーク自体の機能に関係することが分かっている [?, ?]. 例えば、不整脈を起こす心臓組織は損傷などにより興奮性の細胞が不均一に結合し構成されている. この不均一性により自律的な電気回路が部分的に形成され、電気信号が不均一領域と相互作用することにより不規則に異常な興奮が繰り返し発生するリエントリーが生じる. そして、リエントリーの発生には、不均一領域の percolation を起こす閾値が大きな影響を及ぼしているとされている [?].

しかしながら、percolation と同期現象とを同時に扱う研究は十分になされていない. 同期現象においてそれぞれの振動子の振動数が主要な役割を果たすため、興奮現象などの同期現象を理解する上で、ネットワークの構造的性質と動的性質の一方だけを考慮することは十分

とは言えない。そのため、ネットワークにおける振動数分布がその構造とどのように関係するか調べることは、ネットワークの性質をさらに深く理解する助けになることが期待される。

以上を背景として、ネットワークの同期現象を調べる上でよく用いられる振動子ネットワークについて、ネットワーク構造と同期状態やクラスタ状態の関係を調べる。注目するネットワーク構造として percolation で着目するネットワークに存在する枝の本数を採用し、枝の生成・消滅に伴う同期状態の変化という細かい性質を調べる。続いて、枝の本数と振動数によるクラスタ状態の平均的な関係という一般的な性質について調べる。

1.2 本論文の構成

本論文では、全 5 章からなる。続く第??章では本論文を読むにあたって必要となる前提知識について述べる。第??章では振動子ネットワークにおいて枝を生成・消滅させたときの同期状態の変化について調べる。第??章では振動子ネットワークにおいて枝の数を変化させたときの平均的な振動数によるクラスタ状態の変化について調べる。そして、第??章では本論文をまとめる。

第 2 章

前提知識

2.1 蔵本モデル

本節を書くにあたっては, [?, ?] を参考にした.

蔵本モデルは, それぞれ固有の振動数に従う自律的な振動子がそれぞれの位相差の \sin 関数で結合しているとするモデルである. このモデルはもともと化学反応における不安定現象を説明する方程式から導出され [?], 今日振動子系の同期現象を記述するモデルとして広く使われている [?].

固有振動数をそれぞれ ω_1, ω_2 とする 2 つの振動子 $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ が結合強度 K で結合した蔵本モデルは以下のように記述される.

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + K \sin(\phi_j - \phi_i), (i, j) = (1, 2), (2, 1). \quad (2.1)$$

ここで, 各 $i = 1, 2$ について ϕ_i は無次元量, ω_i 及び K は時間の -1 乗の次元を持つことに注意せよ. このとき, $\delta\phi = \phi_1 - \phi_2$, $\delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ とすると, 1 変数の微分方程式になる.

$$\dot{\delta\phi} = \delta\omega - 2K \sin \delta\phi. \quad (2.2)$$

式 (??) を $\delta\phi - \dot{\delta\phi}$ 平面に描いたものを図??に示す. $K \geq \delta\omega/2$ のとき, 式 (??) は $\dot{\delta\phi} = 0$ の解を持つ. 特に, 安定解 $\delta\phi^*$ と不安定解の 2 つの解が存在する. このとき, $t \rightarrow \infty$ で $\delta\phi \rightarrow \delta\phi^*$ に収束する. このとき $\dot{\delta\phi} = 0$ であるので位相ロックしているという. これは 2 つの振動子の振動数が完全に一致した振動数同期の一種である.

また, 式 (??) に従う振動子の実効振動数 $\langle \dot{\phi}_i \rangle$ を以下で定義する.

$$\langle \dot{\phi}_i \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\phi_i(T) - \phi_i(0)}{T}. \quad (2.3)$$

式 (??) を N 体 ($N \in \mathbb{N}$) に拡張したものは以下ようになる.

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\phi_i - \phi_j), i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.4)$$

ここで, K は共通の結合強度で, ω_i は振動子 i の固有振動数とする.

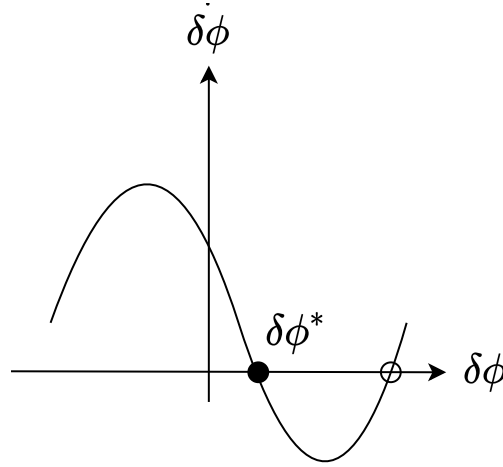


図 2.1: 式 (??) が安定解を持つ場合. $\delta\phi^*$ は安定解となる.

このとき, 振動子全体の同期を評価する量として以下で定義されるオーダーパラメータが用いられている.

$$Re^{i\psi} := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}. \quad (2.5)$$

オーダーパラメータは, 位相が $[0, 2\pi)$ に一様に分布しているとき, $R = 0$ となる. つまり振動子同士に同期が見られない状態を表す. 一方, 振動子全体の位相が一致するとき, $R = 1$ となる.

式 (??) は, 一般の複雑ネットワークにおける位相振動子の大域結合モデル (振動子ネットワーク) に拡張できる.

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\phi_i - \phi_j), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.6)$$

ここで, A_{ij} は振動子の接続状況を表す隣接行列 A の成分で, 振動子 i と振動子 j の間に枝があれば 1, そうでなければ 0 である. 一般には, 無向グラフ, 有向グラフ両方とも考えることがあるが, 本論文では無向グラフのみを考えるため, A は対称行列となる. 式 (??) で表されるダイナミクスを持つ, 複雑ネットワークに拡張された蔵本モデルを以下では振動子ネットワークと呼ぶこととする.

2.2 近恒等変換

本節を書くにあたっては, [?] を参考にした.

以下のような周期的な微分方程式を考える.

$$\dot{y} = \varepsilon f_1(t, y) + \varepsilon^2 f_2(t, y) + \dots \quad (2.7)$$

ただし, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ で, f_j は t, y に関して周期的な関数である.

6 第2章 前提知識

ここで、 $x \in \mathbb{R}^n$ として、 f_j に対し平均化を行うと

$$a_0(x) = [1, 0, \dots, 0]^\top \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad (2.8)$$

$$a_j(x) = [0, f_j(x)]^\top \quad (2.9)$$

として、

$$\dot{x} = a(x, \varepsilon) \sim a_0(x) + \varepsilon a_1(x) + \varepsilon^2 a_2(x) + \dots \quad (2.10)$$

に近似できる．ただしこの展開誤差はコンパクト集合上の任意の x で一様収束する．

この式を周期的で ε に依存した変数変換で、自律系に書き換えることを考える．以下のような変形は条件を満たす、

$$x = \xi + \sum_{j=1}^k \varepsilon^j s_j(t, \xi). \quad (2.11)$$

ここで、 $x \in \mathbb{R}^n$, $s_j : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は t に関して周期的とする、式 (??) は近恒等変換と呼ばれ、誤差が $O(\varepsilon^k)$ の範囲で逆変換が存在する．また、この変換は x の周期 x_0 で平均化を行ったことに相当する．

このように、非自律系であっても近恒等変換を用いて自律系に変形することで詳細なふるまいを調べることができ、また周期的な系であっても平均化を行い周期性を保ちながら詳細なふるまいを調べることができる．

2.3 ランダムグラフ

本節を書くにあたっては、[?, ?] を参考にした．

2.3.1 Erdős–Rényi グラフ

ランダムグラフとは、ある性質を満たすグラフの集合を考えるために導入された確率的に構成されるグラフのことである．

Erdős–Rényi グラフとは、 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ とラベリングされた n 個の頂点と N 本の枝を持つランダムグラフ $\Gamma_{n,N}$ である．つまり、異なる頂点 $i, j \in V$, $i \neq j$ との間の枝-全 $\binom{n}{2}$ 本から等しい確率で N 本選ぶことで得られるグラフである．

$\Gamma_{n,N(n)}$ について、 $N(n)$ によりグラフの連結成分や次数などの性質がどのように変化するかという問題が生じる．Erdős 及び Rényi は、 $N(n)$ の増大に伴って巨大な連結成分が出現することを発見し、以下のような結果を得た．

n を固定し、 N を 1 から $\binom{n}{2}$ まで増やしたときに、 $\Gamma_{n,N}$ は 5 つの異なる状態を経る．ただし、漸近的とは、頂点数 n を十分大きくする操作について述べているとする．

Phase 1 $N(n) = O(n)$ のとき．

この場合ほとんど確実に $\Gamma_{n,N}$ は木である．木に含まれる頂点の最大次数が k になるのは、 $N(n) = O(n^{(k-2)/(k-1)})$ のときで、そのときの $|\Gamma_{n,N}|$ はポアソン分布で、 $\Gamma_{n,N}$ は正規分布で漸近的に記述される．

Phase 2 $N(n) = cn + O(n)$, $0 < c < 1/2$ のとき.

この場合ほとんど確実に、高々 1 つの閉路しか存在せず、ほとんどの頂点は木に属する。また、頂点数最大の連結成分の頂点数は $|1/\alpha(\log n - 5/2 \log \log n)|$ となる。
($\alpha = 2c - 1 - \log 2c$)

Phase 3 $N(n) = cn + O(n)$, $c \geq 1/2$ のとき.

$N(n)$ が $n/2$ を超えると最大の連結成分は漸近的に $n^{2/3}$ 個の頂点を持つが、その構造は複雑である。一方、この連結成分以外の連結成分はほとんど確実に木である。

Phase 4 $N(n) = cn \log n + O(n \log n)$, $c \leq 1/2$ のとき.

このときほとんど確実にグラフ全体が連結となる。

Phase 5 $N(n) \sim (n \log n)\omega(n)$ のとき.

このときグラフ全体が連結だけでなく全ての頂点の次数が漸近的に等しい。

2.3.2 Percolation

percolation は、ネットワーク全体を貫く (percolate) 道の存在を調べる理論である。percolation には頂点を固定して枝を確率的に配置する bond percolation と、枝を固定して頂点を確率的に配置する site percolation の 2 種類が知られている。いずれの場合も配置確率 p に対し、主に以下の 3 つの指標に注目する。

- パーコレーション確率 P

無限に大きいネットワーク $G(V, E)$ において、ある頂点がサイズが無限大のクラスター (連結成分) に属する確率である。

$$P = P_p(|C| = \infty) = 1 - \sum_{1 \leq s < \infty} P_p(|C| = s). \quad (2.12)$$

ここで、 $P_p(|C| = s)$ はある頂点が属するクラスター C のサイズが s である確率とする。ただし、 $|C|/|V| < \infty$ となるクラスター C のサイズを $|C| = \infty$ と定める。

このとき、ある臨界確率 p_c を境に P が変化する。

$$P \begin{cases} = 0 & (p < p_c), \\ > 0 & (p \geq p_c). \end{cases} \quad (2.13)$$

- 平均的なクラスターのサイズ $\langle s \rangle$

$$\langle s \rangle = E_p(|C|) = \sum_{s=1}^{\infty} s P_p(|C| = s). \quad (2.14)$$

$P > 0$ のときは $\langle s \rangle$ は発散するので、代わりにサイズが有限のクラスターの平均サイズを考える。

$$\langle s \rangle^f = E_p(|C|, |C| < \infty) = \sum_{s < \infty} s P_p(|C| = s). \quad (2.15)$$

8 第2章 前提知識

- クラスタのサイズ分布 $n(s)$

$$n(s) = \frac{1}{s} P_p(|C| = s). \quad (2.16)$$

ここで、ある頂点がサイズ s のクラスタに含まれる確率とは必ずしも一致しないことに注意せよ。

ランダムグラフで任意の頂点間に枝を存在しうるのは、無限次元の系での bond percolation に対応する。このことからランダムグラフと percolation のアナロジーを考えることができる。実際、無限次元系において percolation における臨界確率 p_c は $p_c \simeq 1/N$ となり、Erdős-Rényi グラフの巨大な連結成分が出現する本数と対応する。

$$\binom{N}{2} p_c \simeq N/2. \quad (2.17)$$

同じ問題に取り組む二つの理論が存在することは、互いの理論を相補的に活用することができるため重要視されている。

2.4 力学系

本節を書くにあたっては、[?, ?] を参考にした。

2.4.1 自律系と流れ

以下のような自律系を考える。

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0. \quad (2.18)$$

ただし、 f は開集合 $M \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された C^k ($k \geq 1$) 級関数とする。

式 (??) の解 $\phi: T \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ は積分曲線と呼ばれ、 $\phi(0) = x_0$ を満たすような積分曲線を x_0 における積分曲線と呼ぶ。

そして、微分方程式の流れを写像として以下のように定義する。

$$\Phi: W \subset \mathbb{R} \times M \rightarrow M, \quad (t, x) \mapsto \phi(t, x). \quad (2.19)$$

ここで、 $\phi(t, x)$ とは x における積分曲線のうち、一意性が保証されるような最大の開区間 $I_x = (T_-(x), T_+(x))$ で定義されたものとする。

2.4.2 軌道と不変集合

x における軌道 $\gamma(x)$ とは以下で定義される。

$$\gamma(x) := \Phi(I_x \times \{x\}) \subset M. \quad (2.20)$$

同様に前進軌道、後退軌道が定義される。

$$\gamma_{\pm}(x) := \Phi((0, T_{\pm}(x)) \times \{x\}). \quad (2.21)$$

また、 $\gamma(x) = \{x\}$ のとき x は Φ の平衡点と呼ぶ。そして、 $\Phi(T, x) = x$ なる $T > 0$ が存在するとき、 x を周期点と呼び T の下限を周期と呼ぶ。特に、軌道の任意の点が周期点であるとき、その軌道を周期軌道と呼ぶ。

$x \in M$ の ω_{\pm} -極限集合 $\omega_{\pm}(x)$ とは、点列 $t_n \rightarrow \pm\infty$ が存在して $\Phi(t_n, x) \rightarrow y$ となるような点 $y \in M$ の集合である。

集合 $U \subset M$ が σ 不変 ($\sigma \in \{\pm\}$) とは、以下を満たすことである。

$$\forall x \in U, \gamma_{\sigma}(x) \subset U. \quad (2.22)$$

また、 \pm どちらでも不変のとき不変であると呼ぶ。集合 $U \subset M$ が minimal とは、非空で閉かつ不変であるような M の部分集合のうち最小のものであることをいう。

2.4.3 Poincaré-Bendixson の定理

まず、広く知られている \mathbb{R}^2 上の Poincaré-Bendixson の定理について述べる。

定理 1

以下の自律系について、解が一意に与えられ任意の $t \in \mathbb{R}$ で定義されたとする。

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in M \subset \mathbb{R}^2, \quad f \in C^1(M, \mathbb{R}^2), \quad M : \text{open}. \quad (2.23)$$

$p \in M$ の前進軌道 $\gamma_+(p)$ が連結な有界閉集合で、 ω_+ -極限集合 $\omega_+(p)$ が一つも平衡点を持たないと仮定する。このとき、 $\omega_+(p)$ は周期軌道で p が周期点であるか、 $\gamma_+(p)$ が Limit Cycle に収束するかのどちらかである。

この定理により閉軌道の存在を示すことができるため、具体的に周期解を求めることが難しい非線形力学系の分野で重要な定理となっている。

一方、 \mathbb{R}^2 と同じ 2 次元平面であっても、トーラス \mathbb{T}^2 では異なるふるまいを示す。Schwartz は定理??を任意の二次元多様体に拡張した [?].

定理 2

C^2 級のコンパクトで連結な二次元多様体 X で定義された自律系 (式 (??)) が流れを与えたとする。集合 $M \subset X$ が minimal ならば、 M は次のうちのどれか一つである。

- 1 平衡点からなる一元集合.
- 2 単純かつ閉で \mathbb{S}^1 に同相な軌道.
- 3 \mathbb{T}^2 に同相な X 全体.

2.4.4 準周期軌道

準周期軌道とは、周期的ではあるもののほぼ周期的でないくらい周期が長いような軌道のことであり、惑星の軌道や周期運動に摂動を加えた系でよく見られる。

準周期性は、厳密には以下のように定義される [?].

不変な n トーラス \mathbb{T}^n の多様体 M 上の滑らかなベクトル場 X を考える。

制限 $X|_T$ を $\dot{x}_i = \omega_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ に写す微分同相写像 $T \rightarrow \mathbb{T}^n$ が存在するとき、 T 上の X が parallel な流れを誘導するという。そして、 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ を T 上の流れの振動数という。

振動数 ω が rationally independent, i.e., $\forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \sum_{i=1}^n \omega_i k_i \neq 0$ のとき、振動数 ω をもつ parallel な T 上の流れは準周期的もしくは非調和的と呼ぶ。

例えば、 \mathbb{T}^2 上の流れ $\dot{x}_1 = \omega_1$, $\dot{x}_2 = \omega_2$ が準周期的である必要十分条件は振動数の比 ω_1/ω_2 が無理数であることである。

準周期的な流れによる軌道は、流れが定義された空間全体を密に満たす。しかしながら、初期値に対して鋭敏に依存しないためカオスとは区別される。

第 3 章

枝の増減に伴う同期状態の変化

3.1 問題設定及び数値実験

振動子ネットワークのふるまいを調べる際は、ネットワークの構造と振動数分布を定める必要がある。

ネットワークの構造としては、最も単純でありながら多様な性質をもつ Erdős–Rényi model (ER モデル) $\Gamma_{n,m}$ を用いる。そして、枝の本数 m を変化させることでモデルの構造を変化させることで振動子ネットワークのダイナミクスを変化させる。すなわち、 n 体の振動子ネットワークにおいて枝をランダムに選択し追加・削除を行うことで、 $m = 0$ から $m = n(n-1)/2$ まで枝の本数を連続的に変化させる。このとき、構造の変化に伴い同期状態が変化することが考えられる。

固有振動数の分布として、一般にはローレンツ分布などの連続分布 [?] から二項分布のような離散分布 [?] まで考えられる。本論文では、異なる固有振動数を持つ振動子の同期を扱う最も簡単な分布として二項分布を用いる。特に、一般性を失わず ± 1 の二項分布 $\text{Bin}(n, p)$ を用いる。

よって、ネットワークの各振動子の位相 ϕ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は、以下のような方程式に従う。

$$\dot{\phi}_i = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^n A_{ij} \sin(\phi_j - \phi_i) \quad (3.1)$$

ただし、振動子 i の固有振動数 ω_i は確率 p で 1、確率 $1-p$ で -1 をとる確率変数である。ここで、全ての振動子が結合している状況以外も考慮するために式 (??) とは異なり、結合強度を振動子の数でスケールせず λ としていることに注意せよ。

$n = 6$ での数値実験の結果を図??に示す。ただし、時刻 t ($0 \leq t \leq T$) で位相 $\phi_i(t)$ の node i の実効振動数は、 $\Omega_i^{\text{eff}} := (\phi_i(T) - \phi_i(T/2))/(T/2)$ で定めた。ここで、 $m = 5$ における node 1 のように、枝の増加により増加前に同期していた node と非同期になり別の node と同期する、つまり同期クラスタが変化する現象が見られる。以下、このような同期状態の変化を「鞍替え」と呼ぶこととする。この鞍替え現象は、振動子が鎖状に繋がり隣接した振動子の一方からのみ相互作用を受ける蔵本モデルにおいて結合強度を全て同じ値で変化させた場合に発生す

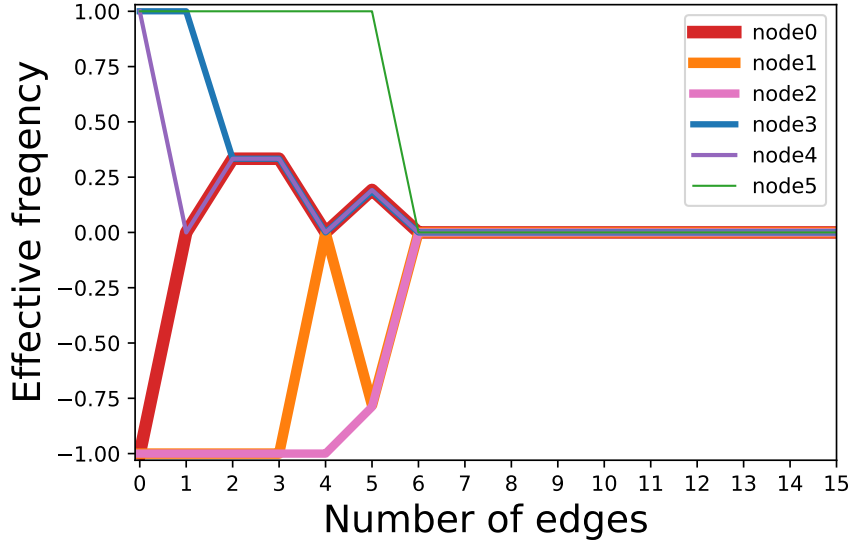


図 3.1: 固有振動数 1 の振動子 3 つと固有振動数の -1 の振動子 3 つからなる 6 体の振動子ネットワークにおいて、枝を 1 本ずつランダムに選び全接続まで連続的に増やしたときの各振動子の実効振動数の変化を表す。ただし $\lambda = 1.0$ である。 $m = 5$ における node 1 では、枝の増加により増加前に同期していた node と非同期になり別の node と同期する「鞍替え」が見られる。

ることが知られている [?] (付録参照)。しかしながら、ネットワーク構造の変化で発生することは知られておらず、疎なネットワークにおける微視的なクラスタリングパターンの理解において重要な役割を果たすと考えられる。また、ネットワーク全体のクラスタリングパターンの変化は、一部の振動子についての同期現象と鞍替え現象に分割して理解することができる。

次節ではこの鞍替え現象に注目し、二項分布に限らない一般の振動数分布に従うネットワークについて解析を行う。

3.2 鞍替え現象のモデル化

ある L 体の集団が M 体の集団から N 体の別の集団に鞍替えを起こすとき、以下のようにモデル化できる場合がある。

実効振動数 ω_L の L 体の振動子集団 Ω_L が実効振動数 ω_M の M 体の振動子集団 Ω_M との間に m 本の枝で繋がっており、また、実効振動数 ω_N の N 体の振動子集団 Ω_N との間に n 本の枝で繋がっている。ただし、振動子集団 Ω_M と振動子集団 Ω_N との間の枝は無視できるほど少ないとする。(図??)

枝の本数 m, n が変化すると、振動子の実効振動数が変化し同期状態が変化する。

このとき、集団間の枝を削除したとき、それぞれの振動子集団に属する振動子同士が同期することを仮定する。すると、それぞれの振動数集団に属する振動子がそれぞれ同一の位相・固

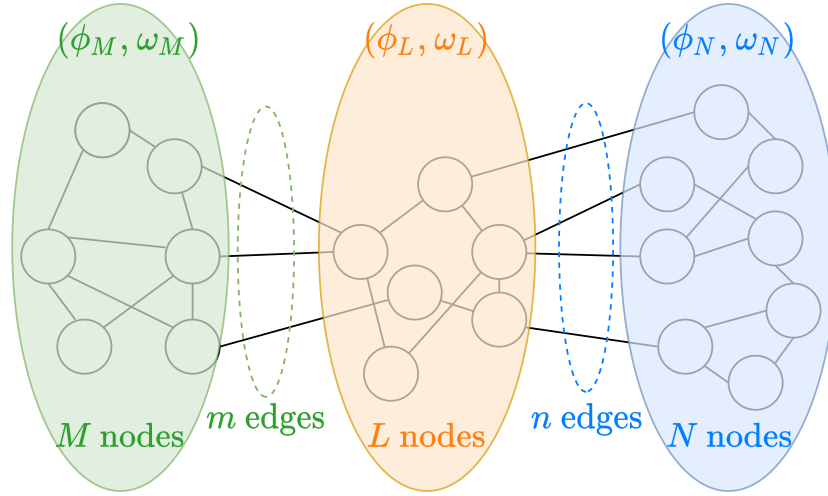


図 3.2: 鞍替え現象に関わる部分ネットワーク

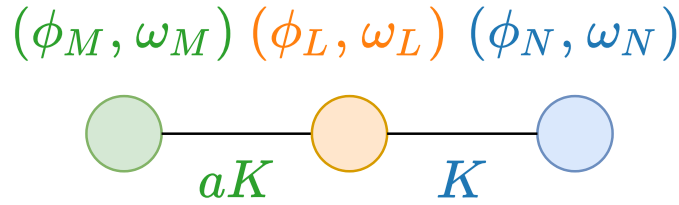


図 3.3: 鞍替え現象に関わる部分ネットワークを簡略化した鎖状の 3 体ネットワーク

有振動数を持つとして平均場近似を行うことができ、発展方程式は以下ようになる。

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_L &= \omega_L + \frac{n}{L} \lambda \sin(\phi_N - \phi_L) + \frac{m}{L} \lambda \sin(\phi_M - \phi_L), \\ \dot{\phi}_M &= \omega_M + \frac{m}{M} \lambda \sin(\phi_L - \phi_M), \\ \dot{\phi}_N &= \omega_N + \frac{n}{N} \lambda \sin(\phi_L - \phi_N).\end{aligned}\tag{3.2}$$

特に，結合強度を $K = n\lambda$ で定義し直し，結合強度比 $a = m/n$ ， $L = 1$ ， $M = 1$ ， $N = 1$ と仮定すると，図??のような鞍替えする振動子を中央とする鎖状の 3 体ネットワークに簡略化される。

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_L &= \omega_L + K \sin(\phi_N - \phi_L) + aK \sin(\phi_M - \phi_L), \\ \dot{\phi}_M &= \omega_M + aK \sin(\phi_L - \phi_M), \\ \dot{\phi}_N &= \omega_N + K \sin(\phi_L - \phi_N).\end{aligned}\tag{3.3}$$

3 体系においてパラメータを変化させることで 2 体の同期に関わる鞍替え現象を観測できることが予想されると同時に，3 体全体の同期現象を調べることもできる．ネットワーク全体の同期状態の変化は部分ネットワークそれぞれの同期状態の変化で理解されるため，簡略化した 3

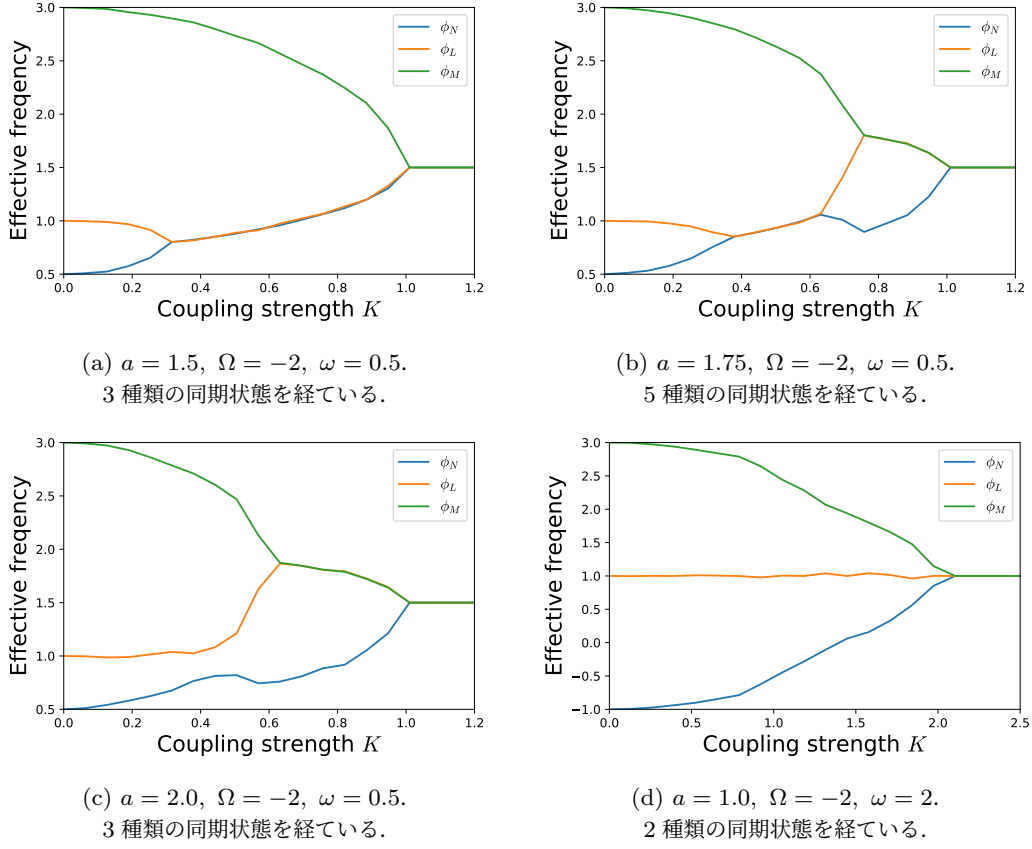


図 3.4: 様々なパラメータ a, Ω, ω で結合強度 K を変化させたときの同期状態の変化

体系の同期状態を調べることでネットワーク全体の同期状態の変化を理解することに繋がると期待される。

次節では、鞍替え現象に限定せず、3体系についてどのような同期状態が見られるか調べる。

3.3 3体系の同期状態

元の部分ネットワーク (図??) における枝の数 m, n の変化は、3体系 (図??) においてはパラメータ a, K の変化に対応する。

3体系について、様々な振動数差 $\Omega := \omega_L - \omega_M, \omega := \omega_L - \omega_N$ に対し、結合強度比 a を様々な値で固定し結合強度 K を変化させる数値実験を行うと、同期状態の変化が図??の4パターン見られた。

最大で5つの同期状態が存在し、4つの臨界結合強度が存在することがわかった。どのパターンの臨界結合強度も、図??のパターンにおける臨界結合強度の一部が存在する場合として考えることができる。つまり、図??は $K = 0.7$ 付近の臨界結合強度が2つとも存在せず $K = 0.3, K = 1.0$ 付近の臨界結合強度が存在する場合として解釈できる。図??は $K = 0.7$ 付近の臨界結合強度が1つだけ存在し $K = 1.0$ 付近の臨界結合強度が存在する場合として

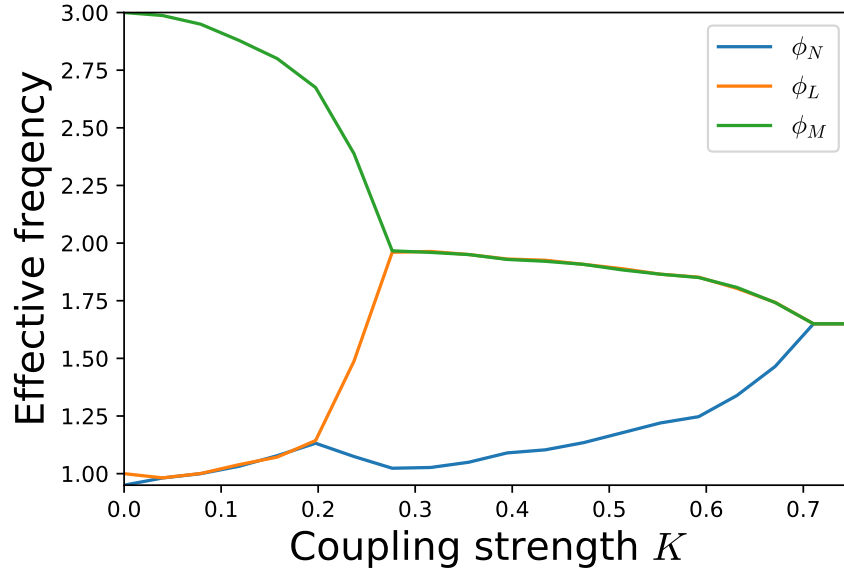


図 3.5: 3 体ネットワークで $a = 4.0$, $\Omega = -2$, $\omega = 0.05$ のしたときの結合強度 K と実効振動数の関係. $0 \leq K \lesssim 0.05$ では 3 体が非同期であり (phase 1), $0.03 \lesssim K \lesssim 0.15$ では固有振動数の近い 2 体が同期する ($\phi_L = \phi_N$, phase 2). そして, $0.15 \lesssim K \lesssim 0.27$ では鞍替えが起こり非同期になり (phase 3), $0.27 \lesssim K \lesssim 0.7$ では振動数の遠い 2 体が同期する ($\phi_L = \phi_M$, phase 4). 最後に $K \gtrsim 0.7$ では 3 体が同期する (phase 5).

解釈できる. そして, 図??は一番大きい臨界結合強度だけが存在する場合として解釈できる. よって, 3 体系のふるまいを理解する上では, 図??の場合の同期状態の変化及び臨界結合強度を解析するだけで十分である.

特に, 次節以降の解析の都合, 図??と同様に最も多様に同期状態が変化するパラメータであり, $|\Omega| \gg |\omega|$ となる $a = 4.0$, $\Omega = -2$, $\omega = 0.05$ の場合について注目する. そのときの結合強度と実効振動数の関係を図??に示す.

4 つの臨界結合強度を分岐点として 5 つの同期状態に分岐することが分かる. そこで, 4 つの臨界結合強度を小さい順にそれぞれ K_1 , K_2 , K_3 , K_4 とすると, 次のようにまとめられる. $0 \leq K < K_1$ では 3 体が非同期であり (phase 1), $K_1 \leq K < K_2$ では固有振動数の近い 2 体が同期する ($\phi_L = \phi_N$, phase 2). そして, $K_2 \leq K < K_3$ では鞍替えが起こり非同期になり (phase 3), $K_3 \leq K < K_4$ では振動数の遠い 2 体が同期する ($\phi_L = \phi_M$, phase 4). 最後に $K \leq K_4$ では 3 体が同期する (phase 5).

次節ではこれらの 5 つの同期状態が相平面上でどのように記述されるかを調べる.

3.4 3体系の同期状態の相平面解析

$x := \phi_L - \phi_M$, $y := \phi_L - \phi_N$ というように位相差を取ると, 式 (??) から2本の位相差に関する方程式が得られる.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \Omega - K(2a \sin x + \sin y), \\ \dot{y} &= \omega - K(a \sin x + 2 \sin y).\end{aligned}\tag{3.4}$$

図??のそれぞれの同期状態に対応する x - y 平面上の相図を図??に示す. それぞれの相図では, ベクトル場と同時に x -nullcline, y -nullcline, 沈点, 及び $(x, y) = (0, 0)$ から発する軌道を示している.

それぞれの同期状態は2本の位相差に関する方程式の安定解に対応し, それぞれ以下のような現象に対応する.

- 2振動子の同期: 任意の初期位相差から位相差 x, y の片方のみが安定な \mathbb{S}^1 と同相な周期軌道へ収束する. (図??, ??)
- 3振動子の同期: 任意の初期位相差から位相差 x, y の両方とも安定な平衡点へ収束する. (図??)
- 非同期: ほとんど確実に, 安定な周期軌道が存在せず, \mathbb{T}^2 全てを覆うような準周期軌道を描く. (図??, ??)

以上の相平面解析の結果を元に, 以降の節では4つの臨界結合強度を求める.

3.5 臨界結合強度の近似解

3.5.1 固有振動数の近い2体との同期 (K_1, K_2)

本節では解析のために2つの振動数差が大きく異なるとし, 以下の関係を仮定する.

$$|\Omega| \gg |\omega|. \tag{3.5}$$

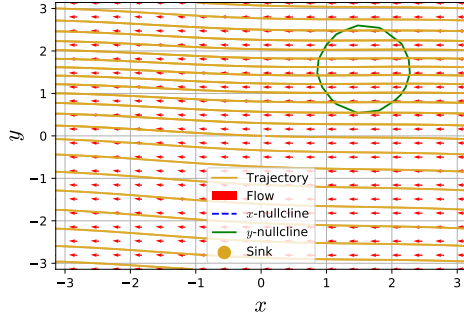
固有振動数差 Ω , ω に比べ, 結合強度 K が小さい状況 ($K \leq K_1$) では, 以下の大小関係が成り立つ.

$$|\Omega| \gg |\omega| > K. \tag{3.6}$$

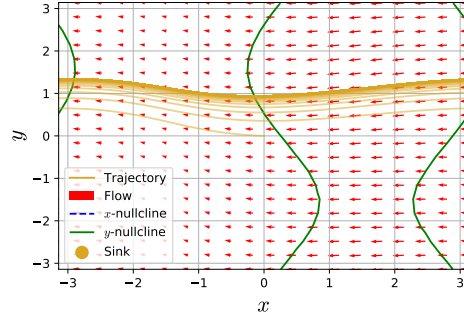
また, 結合強度 K が固有振動数差 Ω に比べ小さく, 固有振動数差 ω に比べ大きい状況 ($K \sim K_2$) では, 以下の大小関係が成り立つ.

$$|\Omega| \gg K > |\omega|. \tag{3.7}$$

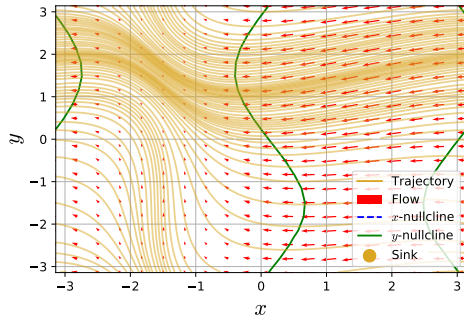
式 (??), (??) 両方の状況とも, 平均的に x は固有振動数 Ω で変化し, y は ω ($|\omega| \ll |\Omega|$) で変化する. よって, タイムスケールの分離が存在する. つまり, $\dot{x} = \Omega$, $y = z$ ($\dot{z} = \omega$) に対して, K に依存した周期外力を摂動として扱うような近似ができる.



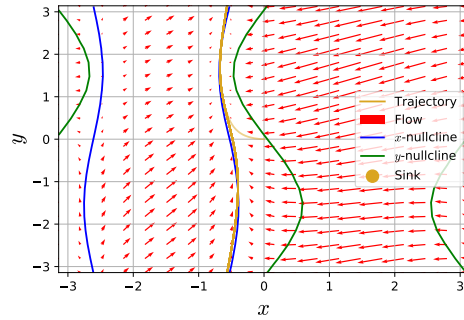
(a) $K = 0.02$. 3体が非同期.
phase 1



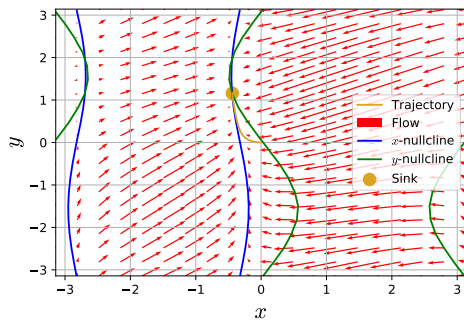
(b) $K = 0.1$. 固有振動数が近いものと同期.
phase 2



(c) $K = 0.22$. 同期が解除され3体が非同期.
phase 3



(d) $K = 0.5$. 固有振動数が遠いものと同期.
phase 4



(e) $K = 0.8$. 3体とも同期.
phase 5

図 3.6: $a = 4.0$, $\omega = 0.1$, $\Omega = -2$ における 5 つの同期状態における相図.
ベクトル場, x -nullcline, y -nullcline, 沈点, 及び $(x, y) = (0, 0)$ から発する軌道を示している.

18 第3章 枝の増減に伴う同期状態の変化

無次元量 $\tau := |\Omega|t$, $\varepsilon := \omega/|\Omega|$, $k = K/|\Omega|$ を導入し, 式 (??) で $Q(x, y) := -2a \sin x - \sin y$, $S(x, y) := -a \sin x - 2 \sin y$ と定めると, 以下のような微分方程式を得る.

$$\frac{dx}{d\tau} = \operatorname{sgn}(\Omega) + kQ(x, y), \quad (3.8)$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \varepsilon + kS(x, y). \quad (3.9)$$

ここで, 次のように x 及び y をそれぞれ p , q に近恒等変換する.

$$x = p + kg_1(p, q) + k^2g_2(p, q) + k^3g_3(p, q) + O(k^4), \quad (3.10)$$

$$y = q + kh_1(p, q) + k^2h_2(p, q) + k^3h_3(p, q) + O(k^4). \quad (3.11)$$

ここで, g_i , h_i , $i = 1, 2, 3$ は p に関して周期的な関数で, $g_i(p + 2\pi, q) = g_i(p, q)$, $g_i(0, q) = 0$, $h_i(p + 2\pi, q) = h_i(p, q)$, $h_i(0, q) = 0$ を満たす.

式 (??) を用いて, $Q(x, y)$, $S(x, y)$ を p 及び q に対して展開する.

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= -2a \sin x - \sin y \\ &= -2a \sin p - \sin q + k(-2a \cos p \cdot g_1 - \cos q \cdot h_1) + O(k^2), \\ S(x, y) &= -a \sin x - 2 \sin y \\ &= -a \sin p - 2 \sin q + k(-a \cos p \cdot g_1 - 2 \cos q \cdot h_1) \\ &\quad + k^2 \left(\frac{a}{2} \sin p \cdot g_2 + \sin q \cdot h_2 \right) + O(k^3). \end{aligned} \quad (3.12)$$

さらに, 関数 Q_1 及び Q_2 を $Q_1 := -2a \sin p - \sin q$, $Q_2 := -2a \cos p \cdot g_1 - \cos q \cdot h_1$ と定めると, $Q(x, y)$ は以下のように k について展開される.

$$Q(x, y) = Q_1(p, q) + kQ_2(p, q) + O(k^2). \quad (3.13)$$

同様に, 関数 S_1 , S_2 及び S_3 を $S_1 := -a \sin p - 2 \sin q$, $S_2 := -a \cos p \cdot g_1 - 2 \cos q \cdot h_1$, $S_3 := a/2 \sin p \cdot g_2 + \sin q \cdot h_2$ と定めると, $S(x, y)$ は以下のように k について展開される.

$$S(x, y) = S_1(p, q) + kS_2(p, q) + k^2S_3(p, q) + O(k^3). \quad (3.14)$$

式 (??) の両辺を τ で微分すると, $*' := d*/d\tau$ という略記を用いて以下の式が得られる.

$$\begin{aligned} x' &= p' + k(p' \partial_p g_1 + q' \partial_q g_1) + k^2(p' \partial_p g_2 + q' \partial_q g_2) + O(k^3) \\ &= (1 + k \partial_p g_1 + k^2 \partial_p g_2) p' + (k \partial_q g_1 + k^2 \partial_q g_2) q' + O(k^3), \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$y' = (1 + k \partial_p h_1 + k^2 \partial_p h_2 + k^3 \partial_p h_3) p' + (k \partial_q h_1 + k^2 \partial_q h_2 + k^3 \partial_q h_3) q' + O(k^4). \quad (3.16)$$

式 (??) を整理すると, 次のようになる.

$$\begin{aligned} p' &= (1 + k \partial_p g_1 + k^2 \partial_p g_2)^{-1} (x' - (k \partial_q g_1 + k^2 \partial_q g_2) q') + O(k^3) \\ &= (1 - k \partial_p g_1 - k^2 \partial_p g_2) (\operatorname{sgn}(\Omega) + kQ_1 + k^2Q_2 - (k \partial_q g_1 + k^2 \partial_q g_2) q') + O(k^3). \end{aligned} \quad (3.17)$$

式 (??) を式 (??) に代入すると次のような式が得られる.

$$y' = (1 + k\partial_q h_1 + k^2\partial_q h_2 + k^3\partial_q h_3)q' + (k\partial_p h_1 + k^2\partial_p h_2 + k^3\partial_p h_3)(1 - k\partial_p g_1 - k^2\partial_p g_2) \\ (\operatorname{sgn}(\Omega) + kQ_1 + k^2Q_2 - (k\partial_q g_1 + k^2\partial_q g_2)q') + O(k^4) \quad (3.18)$$

$$= (1 + k\partial_q h_1 + k^2\partial_q h_2 + k^3\partial_q h_3)q' \\ + (k\partial_p h_1 + k^2(-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_2) + k^3(\partial_p h_3 - \partial_p h_1 \cdot \partial_p g_2 - \partial_p h_2 \cdot \partial_p g_1) \\ (\operatorname{sgn}(\Omega) + kQ_1 - k\partial_q g_1 q' + k^2Q_2 - k^2\partial_q g_2 q') + O(k^4) \quad (3.19)$$

$$= (1 + k\partial_q h_1 + k^2(\partial_q h_2 - \partial_p h_1 \cdot \partial_q g_1) \\ + k^3(\partial_p h_3 + \partial_q g_1 \cdot (-\partial_p h_2 + \partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1) - \partial_q g_2 \cdot \partial_p h_1)) q' \\ + (k\partial_p h_1 + k^2(-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_2) + k^3(\partial_q h_3 - \partial_p h_1 \cdot \partial_p g_2 - \partial_p h_2 \cdot \partial_p g_1) \\ (\operatorname{sgn}(\Omega) + kQ_1 + k^2Q_2) + O(k^4), \quad (3.20)$$

$$q' = (1 + k\partial_q h_1 + k^2(\partial_q h_2 - \partial_p h_1 \cdot \partial_q g_1) \\ + k^3(\partial_q h_3 + \partial_q g_1 \cdot (-\partial_p h_2 + \partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1) - \partial_q g_2 \cdot \partial_p h_1))^{-1} \\ (y' - (k\partial_p h_1 + k^2(-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_2) + k^3(\partial_p h_3 - \partial_p h_1 \cdot \partial_p g_2 - \partial_p h_2 \cdot \partial_p g_1)) \\ (\operatorname{sgn}(\Omega) + kQ_1 + k^2Q_2)) + O(k^4) \quad (3.21)$$

$$= (1 - k\partial_q h_1 - k^2(\partial_q h_2 - \partial_p h_1 \cdot \partial_q g_1) \\ - k^3(\partial_q h_3 + \partial_q g_1 \cdot (-\partial_p h_2 + \partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1) - \partial_q g_2 \cdot \partial_p h_1)) \\ (\varepsilon + kS_1 + k^2S_2 + k^3S_3 - (\operatorname{sgn}(\Omega) + kQ_1 + k^2Q_2) \\ (k\partial_p h_1 + k^2(-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_2) + k^3(\partial_p h_3 - \partial_p h_1 \cdot \partial_p g_2 - \partial_p h_2 \cdot \partial_p g_1))) + O(k^4) \quad (3.22)$$

$$= (1 - k\partial_q h_1 - k^2(\partial_q h_2 - \partial_p h_1 \cdot \partial_q g_1) \\ - k^3(\partial_q h_3 + \partial_q g_1 \cdot (-\partial_p h_2 + \partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1) - \partial_q g_2 \cdot \partial_p h_1)) \\ (\varepsilon + k(S_1 - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p h_1) + k^2\{S_2 - \partial_p h_1 \cdot Q_1 + \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot (\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 - \partial_p h_2)\} \\ + k^3\{S_3 - \partial_p h_1 \cdot Q_2 - Q_1(-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_2) \\ - \operatorname{sgn}(\Omega)(-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_2 - \partial_p h_2 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_3)\}) \quad (3.23)$$

$$= \varepsilon + k(-\varepsilon\partial_q h_1 + S_1 - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p h_1) + k^2\{-\varepsilon(\partial_q h_2 - \partial_p h_1 \cdot \partial_q g_1) \\ - \partial_q h_1(S_1 - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p h_1) + S_2 - \partial_p h_1 \cdot Q_1 + \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot (\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 - \partial_p h_2)\} \\ + k^3[S_3 - Q_2 \cdot \partial_p h_1 - Q_1 \cdot (-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_2) \\ - \operatorname{sgn}(\Omega)(-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_2 - \partial_p h_2 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_3) \\ - \partial_q h_1 \cdot \{S_2 - Q_1 \cdot \partial_p h_1 - \operatorname{sgn}(\Omega)(-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_2)\} \\ - (\partial_q h_2 - \partial_p h_1 \cdot \partial_q g_1)(S_1 - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p h_1) \\ - \varepsilon\{\partial_q h_3 + \partial_q g_1 \cdot (-\partial_p h_2 + \partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1) - \partial_q g_2 \cdot \partial_p h_1\}] + O(k^4). \quad (3.24)$$

20 第3章 枝の増減に伴う同期状態の変化

式 (??) を式 (??) に代入すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}
p' &= (1 + k\partial_p g_1 + k^2\partial_p g_2)^{-1} \{ \text{sgn}(\Omega) + kQ_1 + k^2Q_2 - (k\partial_q g_1 + k^2\partial_q g_2)q' \} + O(k^3) \\
&= (1 - k\partial_p g_1 - k^2\partial_p g_2) [\text{sgn}(\Omega) + kQ_1 + k^2Q_2 - (k\partial_q g_1 + k^2\partial_q g_2) \\
&\quad \{ \varepsilon + k(S_1 - \text{sgn}(\Omega)\partial_p h_1 - \varepsilon\partial_q h_1) \}] + O(k^3) \\
&= (1 - k\partial_p g_1 - k^2\partial_p g_2) [\text{sgn}(\Omega) + k(Q_1 - \varepsilon\partial_q g_1) \\
&\quad + k^2 \{ Q_2 - \varepsilon\partial_q g_2 - \partial_q g_1(S_1 - \text{sgn}(\Omega)\partial_p h_1 - \varepsilon\partial_q h_1) \}] + O(k^3) \\
&= \text{sgn}(\Omega) + k(-\text{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p g_1 + Q_1 - \varepsilon\partial_q g_1) + k^2 \{ Q_2 - \varepsilon\partial_q g_2 \\
&\quad - \partial_q g_1(S_1 - \text{sgn}(\Omega)\partial_p h_1 - \varepsilon\partial_q h_1) - \partial_p g_1(Q_1 - \varepsilon\partial_q g_1) - \text{sgn}(\Omega)\partial_p g_2 \} \\
&\quad + O(k^3).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

ここで、 p' 及び q' が k について次のように展開されると仮定する。

$$p' = \text{sgn}(\Omega) + kG_1(q) + k^2G_2(q) + O(k^3), \tag{3.26}$$

$$q' = \varepsilon + kH_1(q) + k^2H_2(q) + k^3H_3(q) + O(k^4). \tag{3.27}$$

すると、式 (??) と式 (??) を k の 1 次で比較すると以下の式が得られる。

$$H_1(q) = S_1(p, q) - \text{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p h_1(p, q) - \varepsilon\partial_q h_1(p, q). \tag{3.28}$$

両辺 p について 0 から τ まで積分すると、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\tau H_1(q) &= \int_0^\tau (-a \sin p - 2 \sin q) dp - \text{sgn}(\Omega) \cdot h_1(\tau, q) + O(\varepsilon\tau) \\
&= a(\cos \tau - 1) - 2\tau \sin q - \text{sgn}(\Omega) \cdot h_1(\tau, q) + O(\varepsilon\tau).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

τ に 2π を代入すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned}
2\pi H_1(q) &= -4\pi \sin q + O(2\pi\varepsilon), \\
H_1(q) &= -2 \sin q + O(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.30}$$

続いて、式 (??) を式 (??) に代入すると、以下のようになる。

$$h_1(p, q) = \text{sgn}(\Omega) \cdot a(\cos p - 1) + O(\varepsilon p). \tag{3.31}$$

式 (??) と式 (??) を k の 1 次について比較すると以下の式が得られる。

$$G_1(q) = Q_1(p, q) - \text{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p g_1(p, q) - \varepsilon\partial_q g_1(p, q). \tag{3.32}$$

両辺 p について 0 から τ まで積分すると、以下のようになる。

$$\begin{aligned}
\tau G_1(q) &= \int_0^\tau (-2a \sin p - \sin q) dp - \text{sgn}(\Omega) \cdot g_1(\tau, q) + O(\varepsilon\tau) \\
&= 2a(\cos \tau - 1) - \tau \sin q - \text{sgn}(\Omega) \cdot g_1(\tau, q) + O(\varepsilon\tau).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

τ に 2π を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
2\pi G_1(q) &= -2\pi \sin q + O(2\pi\varepsilon), \\
G_1(q) &= -\sin q + O(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

続いて、式 (??) を式 (??) に代入すると以下の式が得られる。

$$g_1(p, q) = \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot 2a(\cos p - 1) + O(\varepsilon p). \quad (3.35)$$

次に、式 (??) と式 (??) を k の 2 次で比較し、式 (??), (??) を用いると次のような式が得られる。

$$\begin{aligned} H_2(q) &= -\varepsilon(\partial_q h_2 - \partial_p h_1 \cdot \partial_q g_1) - \partial_q h_1(S_1 - \operatorname{sgn}(\Omega)\partial_p h_1) + S_2 - \partial_p h_1 \cdot Q_1 \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot (\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 - \partial_p h_2) \\ &= -a \cos p \cdot \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot 2a(\cos p - 1) - 2 \cos q \cdot \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot a(\cos p - 1) \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot (-a \sin p) \cdot (-2a \sin p - \sin q) - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot a \sin p(-2a \sin p) \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p h_2 + O(\varepsilon) \\ &= \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot (-2a^2 \cos^2 p + 2a(a - \cos q) \cdot \cos p + 2a \cos q - a \sin q \sin p) \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p h_2 + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

両辺 p について 0 から τ まで積分すると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \tau H_2(q) &= \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot (-a^2(\tau + 1/2 \sin 2\tau) + 2a(a - \cos q) \sin \tau + 2a\tau \cos q \\ &\quad + a \sin q(\cos \tau - 1)) - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot h_2 + O(\varepsilon\tau). \end{aligned} \quad (3.36)$$

τ に 2π を代入すると次の式が得られる。

$$H_2(q) = -\operatorname{sgn}(\Omega) \cdot a(a - 2 \cos q) + O(\varepsilon). \quad (3.37)$$

式 (??) を式 (??) に代入すると以下ようになる。

$$h_2(p, q) = -\frac{a^2}{2} \sin 2p + 2a(a - \cos q) \sin p + a \sin q(\cos p - 1) + O(\varepsilon p) \quad (3.38)$$

式 (??) と式 (??) を k の 2 次で比較すると、次の式が得られる。

$$\begin{aligned} G_2(q) &= Q_2 - \varepsilon \partial_q g_2 - \partial_q g_1(S_1 - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p h_1 - \varepsilon \partial_q h_1) \\ &\quad - \partial_p g_1(Q_1 - \varepsilon \partial_q g_1) - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p g_2 \\ &= -2a \cos p \cdot \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot 2a(\cos p - 1) - \cos q \cdot \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot a(\cos p - 1) \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot 2a \sin p(-2a \sin p - \sin q) - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p g_2 + O(\varepsilon) \\ &= \operatorname{sgn}(\Omega) (-4a^2 + (4a^2 - a \cos q) \cos p + a \cos q - 2a \sin q \sin p - \partial_p g_2) + O(\varepsilon). \end{aligned} \quad (3.39)$$

両辺 p について 0 から τ まで積分すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} \tau G_2(q) &= \operatorname{sgn}(\Omega) (-4a^2 \tau + (4a^2 - a \cos q) \sin \tau + a\tau \cos q \\ &\quad + 2a \sin q(\cos \tau - 1) - g_2) + O(\varepsilon\tau). \end{aligned} \quad (3.40)$$

τ に 2π を代入すると、次の式が得られる。

$$G_2(q) = \operatorname{sgn}(\Omega)(a \cos q - 4a^2) + O(\varepsilon). \quad (3.41)$$

22 第3章 枝の増減に伴う同期状態の変化

続いて、式 (??) を式 (??) に代入すると以下ようになる。

$$g_2(p, q) = (4a^2 - a \cos q) \sin p + 2a \sin q (\cos p - 1) + O(\varepsilon p). \quad (3.42)$$

ここで、式 (??) と式 (??) を k の 3 次で比較すると、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} H_3(q) &= S_3 - Q_2 \cdot \partial_p h_1 - Q_1 \cdot (-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_2) \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\Omega) (-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_2 - \partial_p h_2 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_3) \\ &\quad - \partial_q h_1 \cdot \{S_2 - Q_1 \cdot \partial_p h_1 - \operatorname{sgn}(\Omega) (-\partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1 + \partial_p h_2)\} \\ &\quad - (\partial_q h_2 - \partial_p h_1 \cdot \partial_q g_1) (S_1 - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p h_1) \\ &\quad - \varepsilon \{ \partial_q h_3 + \partial_q g_1 \cdot (-\partial_p h_2 + \partial_p h_1 \cdot \partial_p g_1) - \partial_q g_2 \cdot \partial_p h_1 \} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a}{2} \sin p \cdot \{ (4a^2 - a \cos q) \sin p + 2a \sin q (\cos p - 1) \} \\ &\quad + \sin q \cdot \left\{ -\frac{a^2}{2} \sin 2p + 2a(a - \cos q) \sin p + a \sin q (\cos p - 1) \right\} \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot a \sin p \{ -2a \cos p \cdot 2a(\cos p - 1) - \cos q \cdot a(\cos p - 1) \} \\ &\quad + (2a \sin p + \sin q) \{ a \sin p \cdot (-2a \sin p) - a^2 \cos 2p \\ &\quad + 2a(a - \cos q) \cos p - a \sin q \sin p \} \\ &\quad - \operatorname{sgn}(\Omega) [\operatorname{sgn}(\Omega) \cdot a \sin p \{ (4a^2 - a \cos q) \cos p - 2a \sin q \sin p \} \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot 2a \sin p \{ -a^2 \cos 2p + 2a(a - \cos q) \cos p - a \sin q \sin p \} + \partial_p h_3] \\ &\quad - \{ 2a \sin q \sin p + a \cos q (\cos p - 1) \} (-2 \sin q) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{a^2}{2} (4a - \cos q) \sin^2 p + a^2 \sin q \sin p \cos p - a^2 \sin q \sin p \\ &\quad - \frac{a^2}{2} \sin q \sin 2p + 2a \sin q (a - \cos q) \sin p + a \sin^2 q \cos p - a \sin^2 q \\ &\quad + \operatorname{sgn}(\Omega) \{ -4a^3 \cos^2 p \sin p + 4a^3 \sin p \cos p - a^2 \cos q \sin p \cos p + a^2 \cos q \sin p \} \\ &\quad - 4a^3 \sin^3 p - 2a^3 \cos 2p \sin p + 4a^2 (a - \cos q) \sin p \cos p - 2a^2 \sin q \sin^2 p \\ &\quad - 2a^2 \sin q \sin^2 p - a^2 \sin q \cos 2p + 2a(a - \cos q) \sin q \cos p - a \sin^2 q \sin p \\ &\quad - a^2 (4a - \cos q) \sin p \cos p + 2a^2 \sin q \sin^2 p \\ &\quad + 2a^3 \cos 2p \sin p - 4a^2 (a - \cos q) \sin p \cos p + 2a^2 \sin q \sin^2 p - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot \partial_p h_3 \\ &\quad + 4a \sin^2 q \sin p + 2a \sin q \cos q \cos p - 2a \sin q \cos q. \end{aligned} \quad (3.45)$$

両辺 p について 0 から τ まで積分し τ に 2π を代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned} H_3(q) &= \frac{a^2}{4} (4a - \cos q) - a \sin^2 q - a^2 \sin q - a^2 \sin q + a^2 \sin q + a^2 \sin q - 2a \sin q \cos q \\ &= \frac{a^2}{4} (4a - \cos q) - a \sin^2 q - 2a \sin q \cos q. \end{aligned} \quad (3.46)$$

以上の計算から y に近恒等変換 q が従う微分方程式が得られる。よって、 q が安定解を持つ条件を求めることで、 y が安定解を持つ条件を近似的に求めることができる。

まず、式 (??) の場合について以下の微分方程式を得る。

$$q' = \varepsilon - 2k \sin q + O(k^2, \varepsilon k). \quad (3.47)$$

この式は式 (??) を x の式について平均化 (i.e. $\sin x \sim 0$) したものに相当する. 式 (??) が安定解を持つ条件は以下の式となる.

$$|k| \geq \frac{|\varepsilon|}{2}. \quad (3.48)$$

ゆえに, 臨界結合強度 K_1 は次のようになる.

$$K_1 = \frac{\omega}{2}. \quad (3.49)$$

次に, 式 (??) の場合について以下の微分方程式を得る.

$$\begin{aligned} q' &= \varepsilon - 2k \sin q - k^2 \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot a(a - 2 \cos q) + k^3 \left(a^3 - \frac{a^2}{4} \cos q \right) + O(\varepsilon k, ak^3, k^4) \\ &= \varepsilon - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot a^2 k^2 + a^3 k^3 - 2k \sin q + O(ak^2, a^2 k^3, k^4). \end{aligned} \quad (3.50)$$

ここで, 閉形式で求めるため $\varepsilon \ll ak$ を仮定すると, 式 (??) が安定解を持つ条件は次のようになる.

$$\begin{aligned} | - \operatorname{sgn}(\Omega) \cdot a^2 k^2 + a^3 k^3 | &\leq 2k, \\ 0 \leq k &\leq \frac{\operatorname{sgn}(\Omega) \cdot a + \sqrt{a^2 + 8a}}{2a^2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

よって臨界結合強度 K_2 は以下の式となる.

$$K_2 = |\Omega| \cdot \frac{\operatorname{sgn}(\Omega) \cdot a + \sqrt{a^2 + 8a}}{2a^2}. \quad (3.52)$$

3.5.2 固有振動数の遠い 2 体との同期 (K_3)

固有振動数の遠い 2 体との同期については, 以下の命題 ?? により,

$$K_3 \lesssim \frac{|\Omega|}{2a-1} := K'_3 \quad (3.53)$$

を得た.

命題 1

トーラス \mathbb{T}^2 上の自律系

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \Omega - K(2a \sin x + \sin y), \\ \dot{y} &= \omega - K(a \sin x + 2 \sin y)\end{aligned}\tag{3.54}$$

において、平衡点を持たず、任意の y に対し $\dot{x} = 0$ が解を持つならば、つまり、 K, a が

$$K \geq \frac{|\Omega|}{2a - 1}$$

を満たすならば、2つの安定、不安定な x -nullcline 付近に \mathbb{S}^1 と同相な安定、不安定な周期解がそれぞれ1つずつ存在し、任意の点から発する軌道は2つの周期解のどちらかに収束する。

まず、以下の補題を示す。

補題 1

命題??の状況で安定な x -nullcline の x 座標の最大値・最小値をそれぞれ x_{\max}, x_{\min} とし、 $D = [x_{\min}, x_{\max}] \times (-\pi, \pi] \subset \mathbb{T}^2$ とする。このとき、円筒領域 D 内に \mathbb{S}^1 に同相な安定な周期解がただ一つ存在する。

証明. まず、 D 内の任意の点から発する軌道は D 内に留まる。なぜなら、 D 内の点から発して D 外に出る軌道が存在すると仮定すると D の境界上で D 外の流れを持つが、図??よりそのような流れは存在しないからである。

そして、命題??の仮定より平衡点は存在せず、 D は円環に同相でトーラス \mathbb{T}^2 と同相でない。

以上より、Poincaré-Bendixson の定理の一般化（定理??）から D 内に \mathbb{S}^1 に同相な周期解が存在する。

また、その周期解は y 方向の流れが一定であることから、安定な x -nullcline と交差し、安定な周期解となる。特に、安定な周期解は x -nullcline が x_{\max} から x_{\min} に変化する間とその逆で1回ずつ交わる。このことと x -nullcline を挟んで流れが変化することから安定な周期解はただ一つ存在する。 \square

次に命題??の証明を示す。

証明. 補題??と式 (??) の座標・時刻に対する対称性から、安定な x -nullcline と不安定な x -nullcline の付近にそれぞれ安定、不安定な周期解 γ_a, γ_b を持つ。

他に周期解 γ が存在すると仮定すると、 γ は γ_a, γ_b と交わることはないので、任意の $y \in (-\pi, \pi]$ に対し、ある $x \in (-\pi, \pi]$ が存在して、 $(x, y) \in \gamma$ となる。また、そのような周期解は x -nullcline と交わる必要がある。なぜなら、 x -nullcline と交わるまで流れの x 成分の符号が変わらないので必ず x -nullcline に到達するからである。しかし、補題??より、1つの

x -nullcline は 1 つの周期解としか交わらないため矛盾する.

最後に, Poincaré-Bendixson の定理の一般化 (定理??) により, 任意の点から発する軌道
は γ_a, γ_b のいずれかに収束する. \square

3.5.3 3 体の同期 (K_4)

本節では $2\Omega \leq \omega, 2\omega \geq \Omega$ を仮定するが, それ以外の場合も同様の議論が成り立つ.

式 (??) が (双曲的) 平衡点を持つとき,

$$\begin{aligned} x_1 &= \arcsin \frac{2\Omega - \omega}{3aK} < 0, & x_2 &= -\pi - \arcsin \frac{2\Omega - \omega}{3aK}, \\ y_1 &= \arcsin \frac{2\omega - \Omega}{3K} > 0, & y_2 &= \pi - \arcsin \frac{2\omega - \Omega}{3K} \end{aligned}$$

とすると, 平衡点は,

$$(x, y) = (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1), (x_2, y_2).$$

となる. よって, 平衡点の存在条件は,

$$K \geq \frac{|2\Omega - \omega|}{3a} \cap K \geq \frac{|\Omega - 2\omega|}{3} \quad (3.55)$$

となる. また, 式 (??) のヤコビ行列 J は

$$J = -K \begin{pmatrix} 2a \cos x & \cos y \\ a \cos x & 2 \cos y \end{pmatrix}$$

であり,

$$\text{tr } J = -K(2a \cos x + 2 \cos y), \quad (3.56)$$

$$\det J = 3aK^2 \cos x \cos y, \quad (3.57)$$

$$(\text{tr } J)^2 - 4 \det J = K^2(2a \cos x - 2 \cos y)^2 > 0 \quad (3.58)$$

である. ここで, $\cos x_1 > 0, \cos x_2 < 0, \cos y_1 > 0, \cos y_2 < 0$ 及び $a > 0, K > 0$ より,

$$\det J|_{(x,y)=(x_1,y_1)} > 0, \quad \text{tr } J|_{(x,y)=(x_1,y_1)} < 0,$$

$$\det J|_{(x,y)=(x_1,y_2)} < 0,$$

$$\det J|_{(x,y)=(x_2,y_1)} < 0,$$

$$\det J|_{(x,y)=(x_2,y_2)} > 0, \quad \text{tr } J|_{(x,y)=(x_2,y_2)} > 0$$

となるため, 線形安定性から (x_1, y_1) は沈点, $(x_1, y_2), (x_2, y_1)$ は鞍点, (x_2, y_2) は源点となる. 実際, 図??では平衡点は源点, 2つの鞍点, 沈点に分かれている. このとき, 源点から2つの鞍点へ, 2つの鞍点から沈点への流れがあるので, 鞍点の安定多様体と交わるような Limit Cycle は存在しない. また, 全ての平衡点は x -nullcline, y -nullcline の交点であるので, 源点を囲うような Limit Cycle も存在しない.

26 第3章 枝の増減に伴う同期状態の変化

これまでの議論は双曲的平衡点が4つ存在する場合について述べたものであるが、非双曲的平衡点が2つ、つまり $x_1 = x_2$ もしくは $y_1 = y_2$ のときも、ベクトル場はほとんど変わらないことから同様の議論が成り立つ。

よって、平衡点を持つとき、周期解は持たず、Poincaré-Bendixson の定理の一般化（定理??）から任意の点から発する軌道は平衡点へ収束する。特に、平面上のほとんど全ての点から発する軌道は沈点に収束する。

以上より、3体が同期する臨界結合強度 K_4 は、

$$K_4 = \max \left(\frac{|2\Omega - \omega|}{3a}, \frac{|\Omega - 2\omega|}{3} \right) \quad (3.59)$$

となる。

3.5.4 臨界結合強度のまとめ

??, ??, ??節で示したように、臨界結合強度 K は結合強度比 a の関数として求められる。

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\omega}{2}, \\ K_2 &= |\Omega| \cdot \frac{\text{sgn}(\Omega) \cdot a + \sqrt{a^2 + 8a}}{2a^2}, \\ K'_3 &= \frac{|\Omega|}{2a - 1}, \\ K_{41} &= \frac{|2\Omega - \omega|}{3a}, \\ K_{42} &= \frac{|\Omega - 2\omega|}{3}, \\ K_4 &= \max(K_{41}, K_{42}). \end{aligned} \quad (3.60)$$

臨界結合強度から次のような同期現象の定性的な理解が得られる。固有振動数が近く枝が多いほど同期しやすい。そして、2つの集団との間の枝の本数の比がある程度偏っていて、結合強度がある程度強いとき、3体全体の同期や鞍替えが起こる。

また、 $K'_3 \geq K_4$ から固有振動数の離れた振動子との同期が起こる、つまり、鞍替え現象が発生するための結合強度比 a の十分条件も求まる。

$$a \geq \frac{|2\Omega - \omega|}{|4\Omega - 2\omega| - 3|\Omega|} = 2 - 3|\varepsilon| + O(|\varepsilon|^2) := a_1^*. \quad (3.61)$$

このとき、 $a = a_1^*$ で $K'_3(a_1^*) = K_{41}(a_1^*) = K_{42}(a_1^*)$ となる。 a_1^* を境に図??の同期状態変化パターンから図??に変化する。

さらに、 $K_1 \geq K'_3$ から固有振動数の近い振動子との同期が起こらずに固有振動数の離れた振動子との同期が起こる、つまり、鞍替え現象が発生しなくなるための結合強度比 a の必要条件も求まる。

$$a \geq \frac{2|\Omega| + |\omega|}{2|\omega|} := a_2^*. \quad (3.62)$$

a_2^* を境に図??の同期状態変化パターンから図??に変化する。

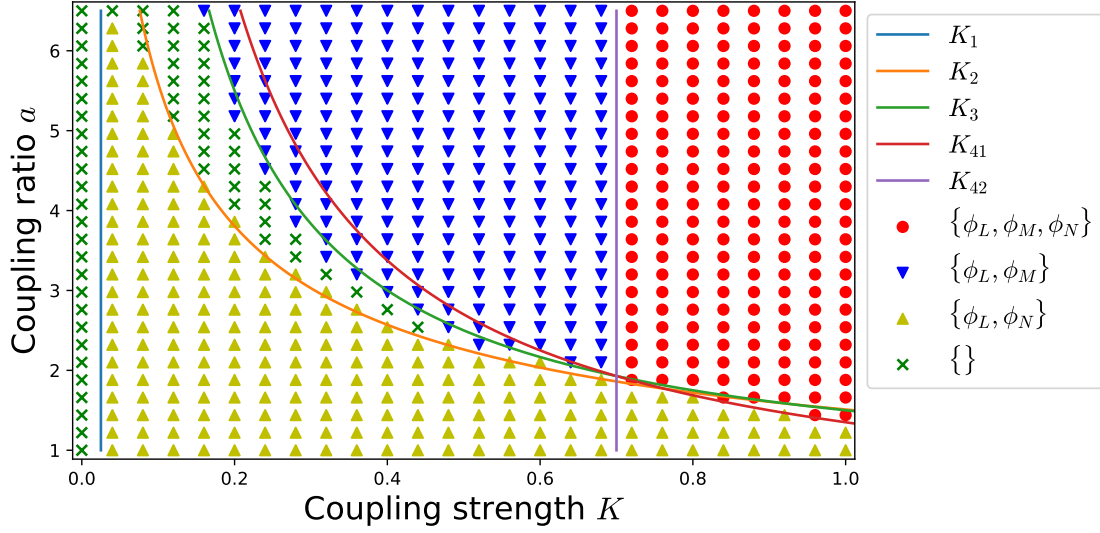


図 3.7: $\Omega = -2$, $\omega = 0.05$ のときの結合強度 K , 結合強度 a における 3 体系の同期状態を表す分岐図. 各格子点に対し, 3 体全体の同期・固有振動数の離れた振動子との同期・固有振動数の近い振動子との同期・3 体とも非同期の 4 状態を示している. また, ??, ??, ??節で求めた臨界結合強度の近似をそれぞれ重ねて示している.

式 (??) の正当性を確かめるため, K - a 平面における同期状態の相図を描くことを考える. そして, 各状態の境界が臨界結合強度 K_1 , K_2 , K_3 , K_4 で記述される曲線となっていることを確認する.

K - a 平面における同期状態の相図を図??に示す. 求めた臨界結合強度の近似解が境界をうまく近似できていることがわかる. また, $a_1^* \simeq 2$ を境に結合強度に対する同期状態変化パターンが変化していることもわかる. 加えて, $|\Omega| \gg |\omega|$ の場合は図??, ??, ??の同期状態変化パターンしか存在しないこともわかる.

3.5.5 一般の集団サイズをもつ 3 体系

これまでの節では, 鞍替えに関わる 3 つ集団のサイズ L , M , N について, $L = 1$, $M = 1$, $N = 1$ を仮定した式 (??) について解析を行ってきた. しかし, 一般のネットワークにおける枝の増加・減少に伴う同期状態の変化を説明する上では, $L = 1$, $M = 1$, $N = 1$ の理論では不十分である. そこで, 本節では一般の L , M , N について同様の議論を行う.

まず, 式 (??) について, $a = m/n$ として, $\tilde{K} = n\lambda/L$, $\tilde{M} = M/L$, $\tilde{N} = N/L$ というように結合強度及び集団のサイズを定義し直すと以下のようなになる.

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_L &= \omega_L + \tilde{K} \sin(\phi_N - \phi_L) + a\tilde{K} \sin(\phi_M - \phi_L), \\ \dot{\phi}_M &= \omega_M + \frac{a\tilde{K}}{\tilde{M}} \sin(\phi_L - \phi_M), \\ \dot{\phi}_N &= \omega_N + \frac{\tilde{K}}{\tilde{N}} \sin(\phi_L - \phi_N).\end{aligned}\tag{3.63}$$

28 第3章 枝の増減に伴う同期状態の変化

式 (??) においても, ??節と同様にパラメータ $a, \tilde{K}, \tilde{M}, \tilde{N}$ を変化させることで同期状態が変化することが期待される. 3 体系について, 様々な振動数差 $\Omega := \omega_L - \omega_M, \omega := \omega_L - \omega_N$ に対し, パラメータ a, L, M, N を様々な値で固定し, 結合強度 \tilde{K} を変化させたときの同期状態の変化を調べた. すると, ??節と同様に, 図??で見られた 4 つの同期状態の変化パターンを示すことがわかった.

続いて, ??節と同様に, 3 体系の同期状態と 2 つの位相差の相平面上の安定解との対応を調べる. 式 (??) と同様に, $x = \phi_L - \phi_M, y = \phi_L - \phi_N$ という位相差を定義すると, 式 (??) から以下の x, y に関する 2 本の微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \Omega - \tilde{K} \left(a \left(1 + \frac{1}{\tilde{M}} \right) \sin x + \sin y \right), \\ \dot{y} &= \omega - \tilde{K} \left(a \sin x + \left(1 + \frac{1}{\tilde{N}} \right) \sin y \right).\end{aligned}\tag{3.64}$$

図??で見られた 3 つの同期状態は, ??節と同様に式 (??) における安定解に対応する. また, $x-y$ 平面における相図は図??と同様の幾何学的性質を示す. よって, ??節と同様の手法で 4 つの臨界結合強度を求めることができ, 以下が得られる.

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{|\omega|}{1 + 1/\tilde{N}}, \\ K_2 &= |\Omega| \cdot \frac{\text{sgn}(\Omega) \cdot a + \sqrt{a^2 + 4 \left(1 + 1/\tilde{N} \right) a}}{\left(1 + 1/\tilde{M} \right) a^2}, \\ K'_3 &= \frac{|\Omega|}{a(1 + 1/\tilde{M}) - 1} \gtrsim K_3, \\ K_4 &= \max \left\{ \frac{|(1 + 1/\tilde{N})\Omega - \omega|}{a(1/\tilde{N} + 1/\tilde{M} + 1/\tilde{N}\tilde{M})}, \frac{|\Omega - (1 + 1/\tilde{M})\omega|}{(1/\tilde{N} + 1/\tilde{M} + 1/\tilde{N}\tilde{M})} \right\}.\end{aligned}\tag{3.65}$$

ただし, K_1, K_2 については, $|\Omega| \gg |\omega|$ を仮定し求めた. また, 式 (??) で $\tilde{N} = 1, \tilde{M} = 1$ としたものは式 (??) に一致することに注意せよ.

集団サイズ N, M を考慮した臨界結合強度についても同期現象の定性的な理解が得られる. 実効振動数が近い集団 Ω_N のサイズ N が小さく, 実効振動数の差 $|\omega|$ が小さいほど, 実効振動数の近い集団 Ω_N と同期しやすい. 実効振動数が近い集団 Ω_N と同期していた振動子集団 Ω_L は, Ω_N のサイズ N が大きく, 実効振動数が離れた集団 Ω_M との間に枝が多く, さらに Ω_M との振動数差 $|\Omega|$ が小さいほど, Ω_M に引き寄せられ, 同期が解除されやすい. また, 実効振動数が離れた集団 Ω_M のサイズ M が小さく, Ω_N に比べて枝が多く繋がっており, 実効振動数の差 Ω が小さいほど, Ω_M と同期しやすく, Ω_N から Ω_M に鞍替えしやすい. そして, 振動子集団 Ω_N のサイズ N がある程度小さく, 結合強度比 a がある程度大きいと 3 体全体が同期しやすい.

3.6 3 体系の適用例

本節では 3 体系による同期状態の解析の例を示す.

まず, 図??において鞍替えの起こる $m = 5$ のときを用いる. そのときのネットワーク及び 3 体系を適用する場合の集団の分割を図??に示す. node 0, 1, 2 は固有振動数 -1 であり, node 3, 4, 5 は固有振動数 1 である. Ω_M 及び Ω_L が同期した $m = 4$ から赤で示した node 1 と node 2 をつなぐ枝が追加されることで $m = 5$ となる.

このとき, 互いに連結な node 0, 1, 2, 3, 4 に対し, $\Omega_M = \{0, 3, 4\}$, $\Omega_L = \{1\}$, $\Omega_N = \{2\}$ として振動子を分割すると 3 体系として計算することができる. 実際, $K = 1$ のとき, 集団間の枝を無視すると各集団内の振動子は同期する. Ω_M は実効振動数 $\omega_M = 1/3$, サイズ $M = 3$ の集団で, Ω_L は実効振動数 $\omega_M = -1$, サイズ $L = 1$ の集団で, Ω_N は実効振動数 $\omega_N = -1$, サイズ $N = 1$ の集団である.

この集団では $|\Omega| = 4/3 \gg |\omega| = 0$ より臨界結合強度を求めることができる. 式 (??) におけるパラメータは $a = 1$, $\tilde{M} = 3$, $\tilde{N} = 1$ であるから, $K_1 = 0$, $K_4 = 4/3$ であり, $K_2 > K_4$, $K_3 > K_4$ となり K_2 , K_3 は定義されない. よって, 式 (??) で結合強度をスケールリングしたことに注意して, 図??の結合強度 $K = L\tilde{K}/n$ が

$$0 \leq \tilde{K} < \frac{4}{3}$$

を満たすとき, Ω_L 及び Ω_N のみが同期し,

$$\tilde{K} \geq \frac{4}{3}$$

のとき, 3 つの集団全体が同期する.

図??では $K = \tilde{K} = 1$ なので, 元々同期していた Ω_M ではなく, 実効振動数の近い Ω_N と同期する. つまり, Ω_M から Ω_N への鞍替えが起こる. また, 結合強度を $K \geq 4/3$ にすると全体が同期することも分かる.

次に, 図??と同じ $n = 6$ のネットワークであって 3 体系を有効に活用できる例を図??に示す.

このネットワークは 3 つの集団に分割することができる. Ω_M は実効振動数 $\omega_M = 1$, サイズ $M = 4$ の集団で, Ω_L は実効振動数 $\omega_L = -1$, サイズ $L = 1$ の集団で, Ω_N は実効振動数 $\omega_N = -1$, サイズ $N = 1$ の集団である.

この集団では $|\Omega| = 2 \gg |\omega| = 0$ より臨界結合強度を求めることができる. 式 (??) におけるパラメータは $a = 4$, $\tilde{M} = 4$, $\tilde{N} = 1$ であるから, $K_1 = 0$, $K_2 \sim 0.2$, $K_3 \sim 0.5$, $K_4 = 4/3$ である. よって, 式 (??) で結合強度をスケールリングしたことに注意して, 図??の結合強度 $K = L\tilde{K}/n$ が

$$0 \leq \tilde{K} \lesssim 0.2$$

を満たすとき, Ω_L 及び Ω_N のみが同期し,

$$0.2 \lesssim \tilde{K} \lesssim 0.5$$

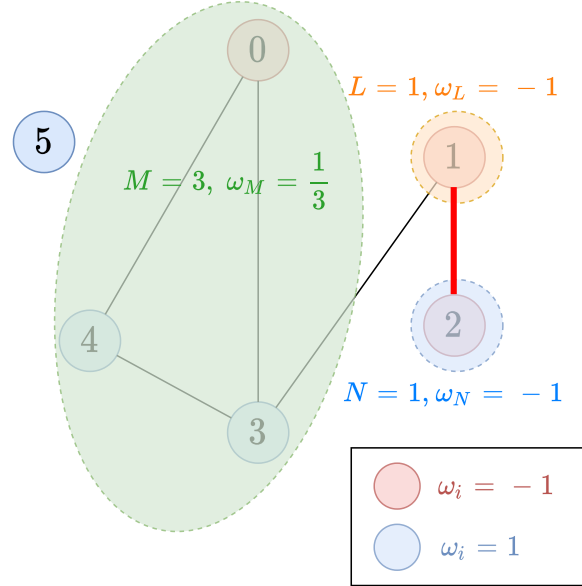


図 3.8: 図??における $m = 5$ のときのネットワーク. node 0, 1, 2 は固有振動数 -1 であり, node 3, 4, 5 は固有振動数 1 である. Ω_M 及び Ω_L が同期した $m = 4$ から赤で示した node 1 と node 2 をつなぐ枝が追加されることで $m = 5$ となる.

このとき, $\Omega_M = \{0, 3, 4\}$, $\Omega_L = \{1\}$, $\Omega_N = \{2\}$ として振動子を分割すると 3 体系として計算することができる. 実際, $K = 1$ のとき, 集団間の枝を無視すると各集団内の振動子は同期する. Ω_M は実効振動数 $\omega_M = 1/3$, サイズ $M = 3$ の集団で, Ω_L は実効振動数 $\omega_M = -1$, サイズ $L = 1$ の集団で, Ω_N は実効振動数 $\omega_N = -1$, サイズ $N = 1$ の集団である.

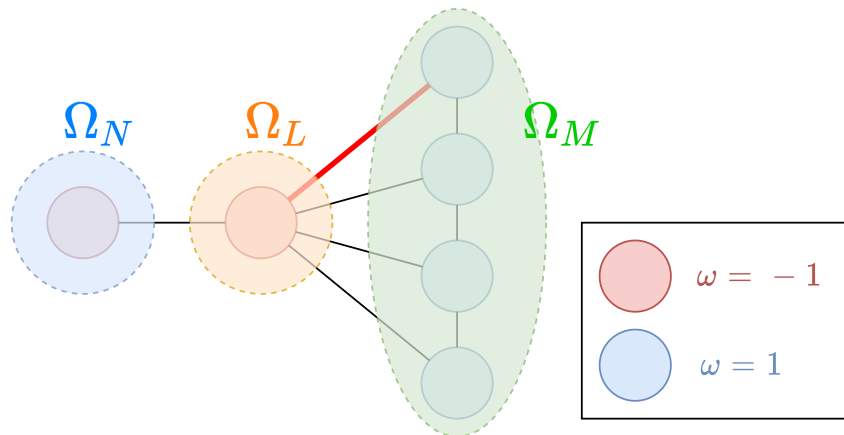


図 3.9: 6 つの振動子から構成されるネットワーク. このネットワークは 3 つの集団に分割することができる. Ω_M は実効振動数 $\omega_M = 1$, サイズ $M = 4$ の集団で, Ω_L は実効振動数 $\omega_L = -1$, サイズ $L = 1$ の集団で, Ω_N は実効振動数 $\omega_N = -1$, サイズ $N = 1$ の集団である.

のとき、3つの集団のうちどの2つも同期しない。そして、

$$0.5 \lesssim \tilde{K} < \frac{4}{3}$$

を満たすとき、 Ω_L 及び Ω_M のみが同期し、

$$\tilde{K} \geq \frac{4}{3}$$

のとき、3つの集団全てが同期する。このように結合強度に応じて大きく同期状態が変化する。

続いて、図??において赤で示した枝を省いたときの同期状態の変化について述べる。このとき、 $a = 3$ となるため、 $K_2 \sim 0.33$, $K_3 \sim 0.72$ である。よって、 $0.2 \lesssim \tilde{K} \lesssim 0.33$ のとき赤で示した枝を削除すると、3つの集団のうちどの2つも同期しない状態から、 Ω_L 及び Ω_N のみが同期する状態へ変化する。そして、 $0.5 \lesssim \tilde{K} \lesssim 0.72$ のとき赤で示した枝を削除すると、 Ω_L 及び Ω_M のみが同期する状態から、3つの集団のうちどの2つも同期しない状態へ変化する。

このように、3体系の解析を用いると、2つの集団で近似できる系よりもより複雑なふるまいを示す系について同期状態を調べることが可能である。

3.7 議論

3.7.1 同期状態の変化パターン

??節では結合強度 K_1 , K_2 については $|\Omega| \gg |\omega|$ の場合について求めた。また、??節では、 $|\Omega| \gg |\omega|$ の場合について、結合強度 K の変化に対応する同期状態の変化パターンとその結合強度比 a への依存性を調べた。

a を固定したときの变化パターンは、ネットワークの枝の本数を固定した場合の同期パターンに対応する。変化パターンの a 依存性を理解することで、既存の同期状態が分かっているネットワークに枝を追加・削除したときにどう同期状態が変化するか理解することができる。よって、 a を固定したときの变化パターンは枝の本数と同期状態の関係において重要な解析対象である。したがって、他のパラメータ領域でも同様に同期状態の変化パターンの a 依存性を調べることが期待される。

$|\Omega| \sim |\omega|$ の場合、式(??)の K_1 は正しくない。しかしながら、??節の議論と同様にして、固有振動数の近い振動子との同期の十分条件、つまり K_1 の上界が与えられる。

$$K_1 \lesssim \frac{|\omega|}{2-a} := K'_1. \quad (3.66)$$

このとき、 K'_1 , K'_3 , K_{41} , K_{42} は a_1^* で一致する。すなわち、2体が同期する場合鞍替えは起こらず、結合強度 K を大きくしても3体の同期が起こることになるため、これまでの議論と反する。よって、 K'_1 , K'_3 を用いて同期状態の変化パターンを議論するのは不適切である。よって、一般のパラメータ領域での同期状態の変化パターンを解析する上では、 K_1 , K_3 について K'_1 , K'_3 のような上界ではなくより正しい値を求めることが必要になると思われる。

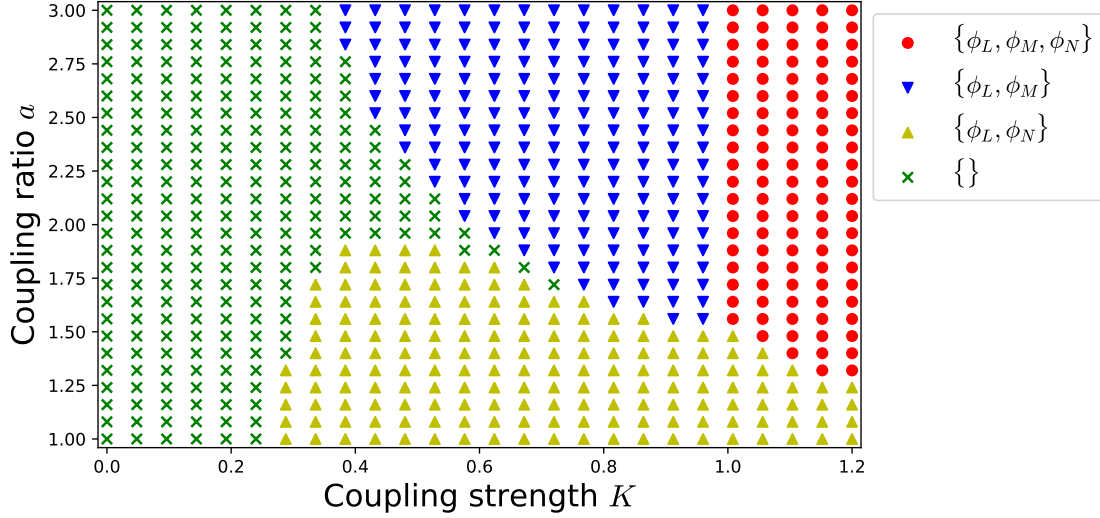


図 3.10: $\Omega = -2$, $\omega = 0.5$ のときの結合強度 K , 結合強度 a における 3 体系の同期状態を表す分岐図. 各格子点に対し, 3 体全体の同期・固有振動数の離れた振動子との同期・固有振動数の近い振動子との同期・3 体とも非同期の 4 状態を示している.

$a = 1.5, 1.8$ を境に a を固定し K を変化させたときの同期状態の変化パターンが変化している.

$|\Omega| \sim |\omega|$ の相図を図??に示す. 結合強度比 a を大きくすると, 図??のような同期状態の変化パターンから, 図??, 図??の順に変化パターンが変化することがわかる. そして, 3 体がどれも非同期の状態から 3 体が同期するような図??のような状況は起きえないことがわかる.

また, 他のパラメータに対し同様に数値実験を行った結果から, 3 体がどれも非同期の状態から 3 体が同期する必要十分条件が $\Omega = \pm\omega$ であり, 多くのパラメータ領域では起きえないことが推測される. 異なる振動数をもつ集団が同時に同じ振動数に変化することがほとんどのパラメータ領域では起きえないとすれば, 異なる振動子の集団がほとんどの場合 2 つしか同時に同じ振動数に変化することはないと考えることができる. よって, 平均場近似 (式 (??)) の仮定が成り立ち続けるような枝の増減に伴うネットワークの同期状態の変化を調べる場合, ネットワークを最も簡略化された 3 体系に分割して解析することが有用となる.

3.7.2 $|\Omega| \gg |\omega|$ を用いて求めた臨界結合強度の適用限界

??節において $\varepsilon = \omega/|\Omega| \ll 1$ を仮定し求めた結合強度 K_1, K_2 について, どの程度の ε ままで有効か調べる. ここでは, ??節において求めた K_2 の閉形式の表現である式 (??) だけでなく, 式 (??), (??) より定まる以下のような y の近恒等変換 q の微分方程式を考える.

$$q' = \varepsilon + kH_1(q) + k^2H_2(q) + k^3H_3(q) + O(k^4, \varepsilon k) \quad (3.67)$$

この式が $q' = 0$ の解を持ち Ω_N 及び Ω_L が同期する条件を以下では開形式の同期条件と呼ぶことにする. 特に, 開形式の同期条件から定まる臨界結合強度を開形式の臨界結合強度と略することとする. 開形式の同期条件の境界は K - a 平面上の連結な曲線であり, ある結合強度比 a に対して 2 つの交点を持つ. 開形式の同期条件は振動数の近い振動子が同期する条件である

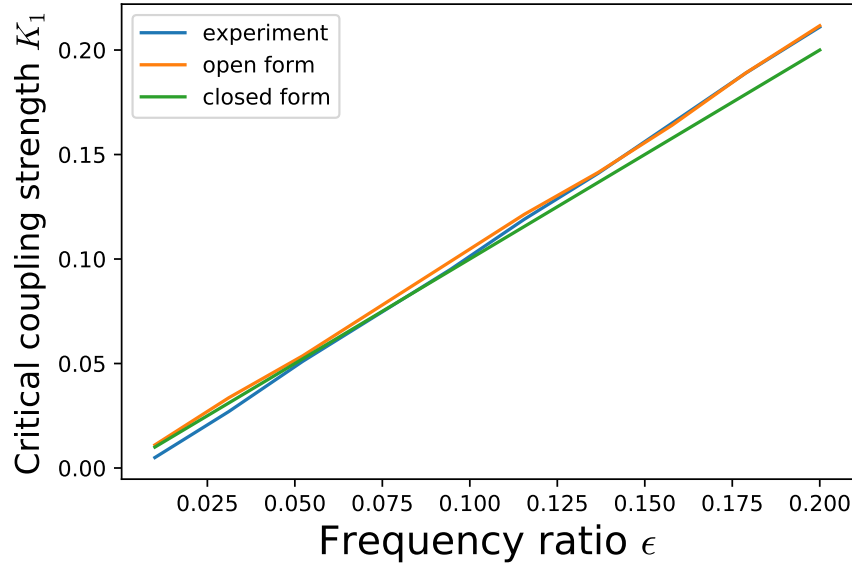


図 3.11: $a = 1$ のときの K_1 について, さまざまな ϵ における数値実験による値と閉形式の値 (式 (??)) と開形式の同期条件から定まる値の比較. $\epsilon = 0.3$ までは閉形式, 開形式ともにいい精度で近似できている.

ため, 2つの交点は K_1, K_2 に対応すると考えられる.

まず, $a = 1$ のときの K_1 について数値実験による値と閉形式の値 (式 (??)) と開形式の同期条件から定まる値を様々な ϵ で比較したものを図??に示す. $\epsilon = 0.3$ までは閉形式, 開形式ともにいい精度で近似できている.

次に, $a = 1, 1.7$ のときの K_1 について閉形式の値及び開形式の同期条件から定まる値の数値実験による値との誤差を様々な ϵ で比較したものを図??に示す. 閉形式・開形式ともに ϵ の増加に伴った誤差の拡大が $a = 1$ より $a = 1.7$ で大きい. これは, 図??で a が大きいほど K_1 の真の値が大きい, 開形式はその変化をうまく近似できていないことを表している. 一方, 式 (??) は定数であるため, a が大きいほど誤差が拡大している.

$a = 4$ のときの K_2 について数値実験による値と閉形式の値 (式 (??)) と開形式の同期条件から定まる値を様々な ϵ で比較したものを図??に示す. K_1 と比べると, 閉形式・開形式ともに精度が落ちるものの. $\epsilon = 0.045$ までは閉形式, 開形式ともにある程度の精度で近似できている. ここで, ϵ が大きい領域で開形式よりも追加の仮定を課した閉形式が数値実験による値に近いのは, 式 (??) において $O(\epsilon, ak^2, a^2k^3)$ という ϵ, a 及び k に依存した項を無視していることによるアーチファクトであると考えられる.

図??, ??からわかるように, K_1 及び K_2 はある点 (K, a) で一致し, K - a 平面で連結な曲線を構成する. 開形式による K_1 及び K_2 も連結な曲線となるため, ある a における両曲線の値を異なる ϵ で比較し精度を評価することが考えられる. $a = 5$ のときの K_1, K_2 について数値実験による値と開形式の同期条件から定まる値を様々な ϵ で比較したものを図??に示す. ϵ が大きい領域で開形式の精度が K_1, K_2 共に悪い. また, K_1 と K_2 が一致する ϵ も数値実

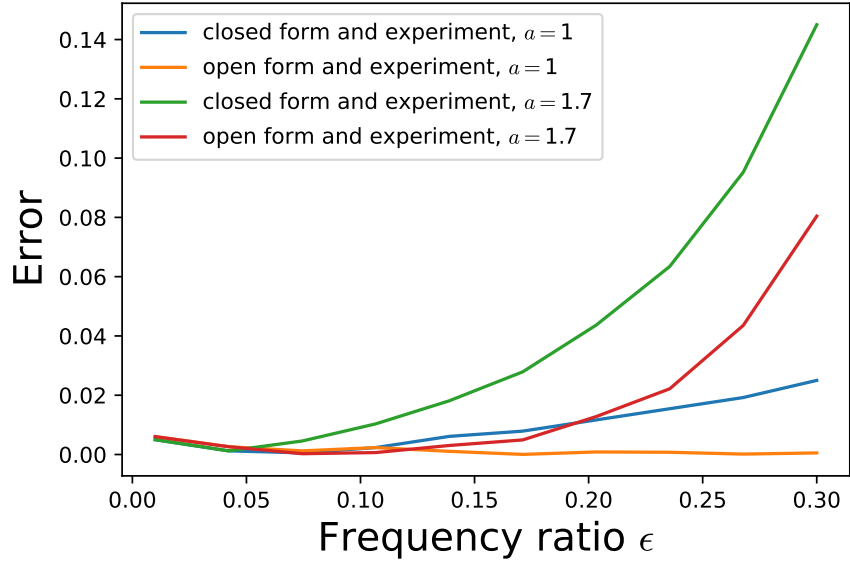


図 3.12: $a = 1, 1.7$ のときの K_1 について、様々な ϵ における数値実験による値と閉形式の値と開形式の同期条件から定まる値の比較。閉形式の値において ϵ の増加に伴った誤差の拡大が $a = 1$ より $a = 1.7$ で大きい一方で、閉形式については開形式に比べ誤差及び a の増大に伴う誤差の増大は小さくなっている。

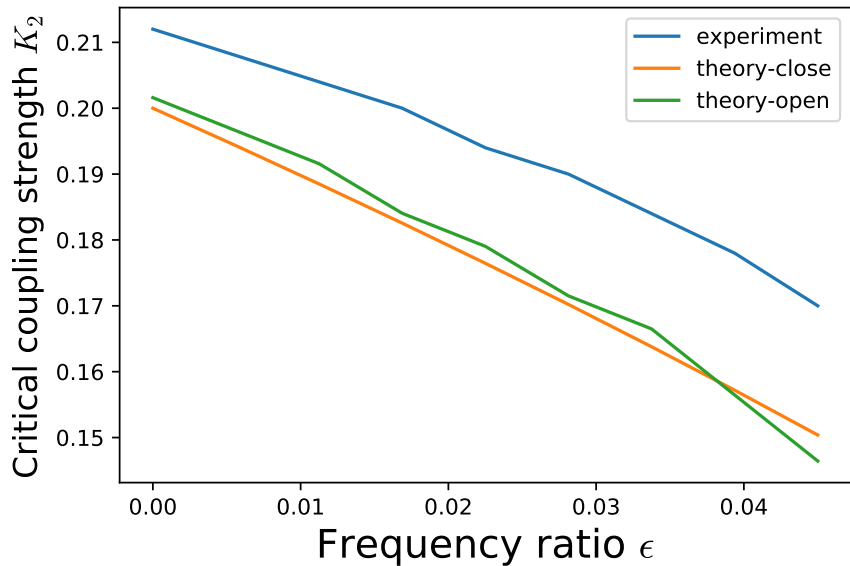


図 3.13: $a = 5$ のときの K_2 について、様々な ϵ での数値実験による値と閉形式の値（式 (??)）と開形式の同期条件から定まる値の比較。 K_1 と比べると、閉形式、開形式ともに精度が落ちるものの、 $\epsilon = 0.045$ までは閉形式、開形式ともにある程度の精度で近似できている。

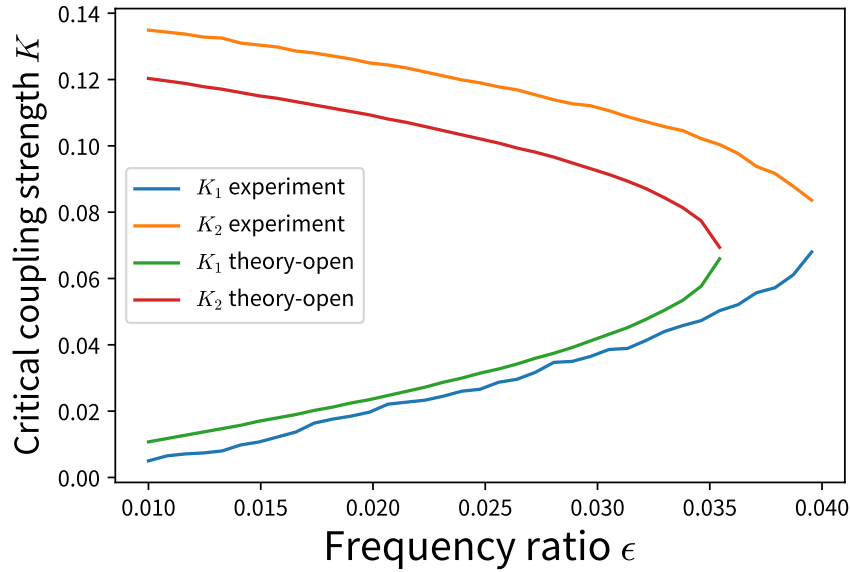


図 3.14: $a = 4$ のときの K_1 , K_2 について, 様々な ε での数値実験による値と閉形式の値 (式 (??)) と開形式の同期条件から定まる値の比較. ε が大きい領域で開形式の精度が K_1 , K_2 共に悪い. また, K_1 と K_2 が一致する ε も数値実験の値と開形式の値とで異なる.

験の値と開形式の値とで異なる. よって, 開形式の値は, 閉形式の値を用いるよりも ε 依存性をより精度よく近似しているものの, ε が大きくなると有効ではないと考えられる.

以上より, ??節で求めた閉形式の臨界結合強度は ε が極めて小さい場合は有効であるが, $\varepsilon \sim 1$ のような場合は有効ではない. また, 開形式の臨界結合強度は K_1 及び K_2 を連結な曲線で表現するという閉形式の臨界結合強度が持たない性質を持っているものの, ε が大きい領域での近似誤差は依然として大きい. このため, $\varepsilon \sim 1$ の場合の性質を調べるためには, $\varepsilon \ll 1$ を利用せずに臨界結合強度を求めることが期待される.

3.7.3 3 体系の適用範囲

??節では, 以下のような手順で 3 体系を導入した.

- ある連結な部分ネットワークにおいて部分ネットワークに属する振動子間に枝が追加されることを考える.
- 加えられた枝の端点異なる集団に属する形で, 3 つの同期した集団が鎖状に繋がるように分割する. このとき, 集団間の枝を無視した状態で各集団が同期することを仮定する. また, 鎖状に繋がった 3 つの集団のうち両端の集団の間の枝は無視できるほど少ないことを仮定する.
- 各集団をそれぞれ平均場近似を行い, 集団間の枝の数に応じた結合強度で結合しているみなす.

ここで, 必ずしも 3 つの集団が存在する必要はない. 2 つの集団に分割可能であれば, 集団間

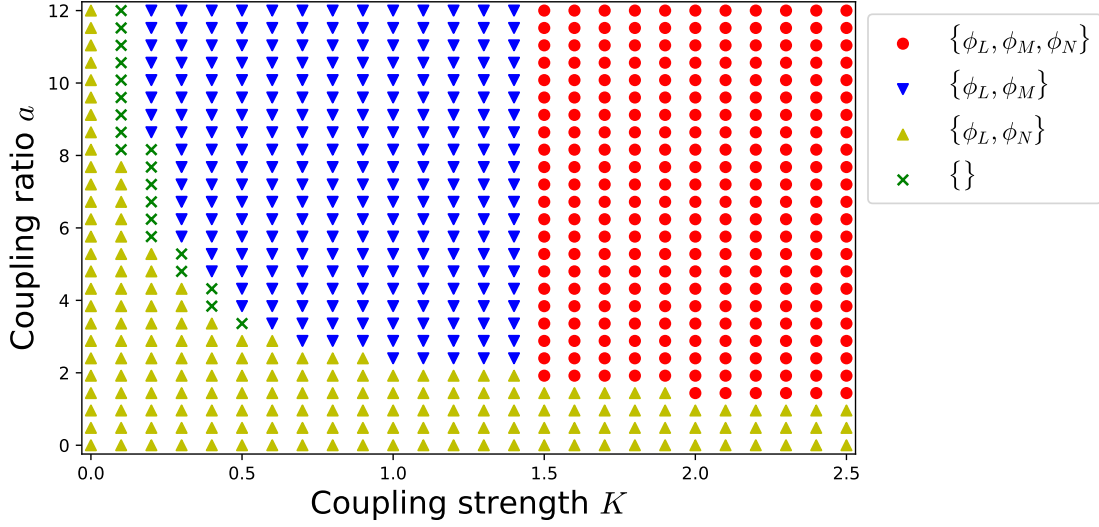


図 3.15: $\Omega = -2$, $\omega = 0$, $\tilde{M} = 5$, $\tilde{N} = 1$ のときの結合強度 K , 結合強度比 a における同期状態図。
 $m = 3$ から $m = 4$ に枝を増やすと $n = 1$ であるので $a = 3$ から $a = 4$ へ変化し, 2 つが同期していた状態から 3 つが非同期な状態へ同期状態が変化する。

の枝を無視した状態でそれぞれの集団を平均場近似を行うことで 2 体の同期問題に帰着することができる。このように, 3 体系を適用できる状況であっても適用する必要がない場合がある。

しかしながら, 以下のような場合は 3 体系を用いて同期状態を求めることができないと考えられる。

- Case 1 どのように分割しても異なる実行振動数の集団が必ず 4 つ以上存在する場合。
- Case 2 異なる実行振動数の集団が 3 つ以内になるように分割できるものの, どのように分割しても, 鎖状に連なった 3 つの集団において両端の集団間の枝がそれ以外の集団間の枝に比べ無視できない場合。
- Case 3 注目する枝を除いた場合は 3 つの集団に分割できるものの, そのどのような分割に対しても, 注目する枝を加えると 4 つ以上の集団に分かれてしまう場合。

Case ??, Case ?? に該当する部分ネットワークの存在は明らかであるが, Case ?? では明らかではない。3 つの集団に分かれたものに枝を加えると 4 つの集団に分かれる場合に存在すれば十分である。特に, 3 つの集団のうち 1 つの集団が他の集団と弱く結合していると仮定する。このとき, 2 つの集団に対して枝を増やしたときに 3 つの集団に分かれる場合があることを示せばいい。

実効振動数が近い 2 つの集団が同期した状態で, 実効振動数が離れた集団との間の枝を追加すると, 結合強度比 a が増加し, 3 つ全てが非同期となる場合がある。実際, K - a 平面における同期状態図 (図??) において, $a = m/n$ 及び $a = (m+1)/n$ の直線の間 K_1 , K_2 に対応する曲線を含むような枝の本数の組 (m, n) が, 各 K に対して存在する。よって, Case ?? の存在が示された。

第 4 章

Percolation と振動数同期

4.1 問題設定及び数値実験

??節と同様に、振動子ネットワークの構造として ER モデル $\Gamma_{n,m}$ を採用し、枝の本数を $m = 0$ から $m = n(n-1)/2$ まで変化させることでモデルの構造を変化させることを考える。このとき、構造の変化に伴い同期状態が変化することが考えられる。

また、同様に固有振動数の分布として ω_{\pm} の二項分布 $\text{Bin}(n, p)$, $p \geq 1/2$ を用いることとする。

枝をランダムに選択し追加することで $m = 0$ から $m = n(n-1)/2$ まで枝の本数を連続的に変化させることを 1 試行とし、 $M(> 1)$ 回行い、以下の特徴量の平均を求める。

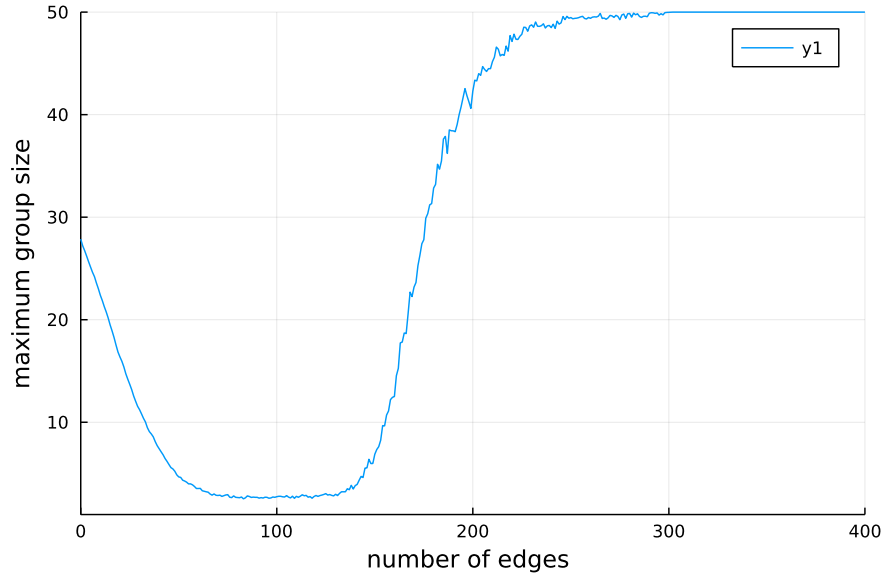
- 同じ実効振動数を持つ集団のサイズの最大値 L 。ただし、実効振動数差が $\Delta \ll 1$ の振動子を同一のクラスタに属するとみなすこととする。新たに定義した同期状態の指標であり、ネットワーク全体ではなくネットワークの部分の同期の程度を評価する指標である。
- オーダーパラメータ R 。

$$R e^{i\psi} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e^{i\theta_j}.$$

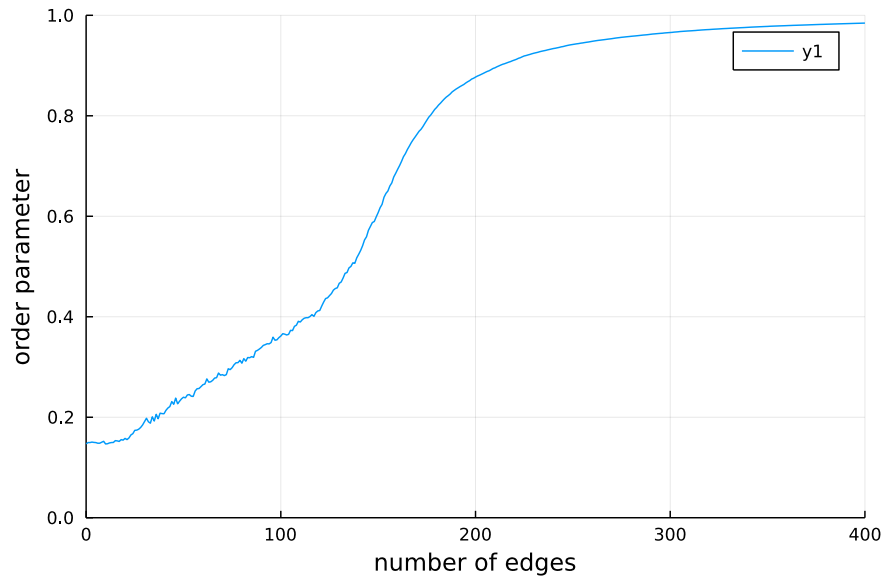
??節で述べたように、ネットワーク全体の同期の程度を評価する指標である。

固有振動数の分布として ± 1 の二項分布を用いた $n = 50$ 個の振動子に対し、枝の数を 0 から 1225 本まで変化させた試行を $M = 100$ 回行い平均したものを図??に示す。

3 つの同期状態に分かれている。それぞれの境界に相当する枝の臨界本数を m_1, m_2 とすると以下のようにまとめられる。 $0 \leq m < m_1$ では最大集団のサイズ L が線形に減少し、オーダーパラメータ R は緩やかに増加する (Phase 1)。 $m_1 \leq m < m_2$ では最大集団のサイズ L が極めて小さくなったまま変化せず、オーダーパラメータ R は Phase 1 とは異なるペースで増加する (Phase 2)。 $m \geq m_2$ では最大集団のサイズ L は急激に増加し n に漸近し、オーダーパラメータ R も急激に増加し 1 に漸近する (Phase 3)。



(a) 枝の本数と振動数によるクラスタの最大サイズの平均値の関係.



(b) 枝の本数とオーダーパラメータの平均値の関係.

図 4.1: $n = 50$, $\lambda = 0.4$, $p = 0.5$ のときの枝の本数 m と振動数によるクラスタの最大数とオーダーパラメータの $M = 100$ 回平均値の関係を示す. ただし, 実効振動数の差が $\Delta = 0.00003$ 以内の振動子を同一クラスタとみなした.

$0 \leq m \leq 50$ では, クラスタの最大サイズは線形に減少し, オーダーパラメータは緩やかに増加する. $50 \leq m \lesssim 150$ では, クラスタの最大サイズが極めて小さくなったまま変化せず, オーダーパラメータは $m = 50$ で変曲点を持ち $m < 50$ とは異なるペースで増加する. $150 \lesssim m \lesssim 300$ では, クラスタの最大サイズが急に増加し n に漸近する一方, オーダーパラメータは $m \sim 150$ で変曲点を持ち, 急激に増加し 1 に漸近する.

4.2 同期状態の定性的解釈

それぞれの同期状態は定性的に以下のように理解できる.

Phase 1 固有振動数 ω_{\pm} の孤立した頂点が主な振動数となる. 枝が 1 本増えるごとに高い確率で孤立した頂点をつなぐため, 固有振動数 ω_{\pm} を実効振動数にもつ頂点数は平均 p 本減少する. よって, クラスタの最大サイズ L は

$$L(m) = np - mp \quad (4.1)$$

となる. 一方, オーダーパラメータ R も枝の増加に伴う部分的同期により増加する.

Phase 2 ネットワークがほとんど連結になるが, 各試行で隣接した振動子の数及びその振動子の分布などのネットワーク構造が不均一であり異なる固有振動数を持つ振動子は同期しないため, ほとんどの振動子が異なるクラスタに属する. このため, クラスタの最大サイズ L は $L \approx 1$ となり主要な振動数が存在しない. 一方, オーダーパラメータ R は枝の増加に伴って実効振動数の分散が小さくなるため, 増加する.

Phase 3 異なる固有振動数を持つ振動子同士が同期し始め, 最後にはネットワーク全体が同期する. それに伴って, 同期した振動子同士がクラスタを構成するため, クラスタの最大サイズ L は増加し, n に漸近する. オーダーパラメータ R も同期により実効振動数の分散が小さくなるため, 増加する.

4.3 臨界本数

解析の都合上, m_2, m_1 の順に調べる.

4.3.1 最大サイズ L , オーダーパラメータ R が大きく変化する枝の本数 m_2

枝の本数 m が頂点数 n に比べ十分多い, 特に, 全ての振動子の次数が漸近的に等しいとき (??節, Phase ??) を考える. つまり,

$$m = n \log n \omega(n) \quad (4.2)$$

である.

このとき, 振動子のネットワークを固有振動数 ω_{\pm} を持つ 2 種類の振動子が結合したものとして平均場近似することができる. 各振動子は確率 p で ω_+ , 確率 $1-p$ で ω_- の固有振動数を持つとすると, それぞれの固有振動数を持つ振動子の数の平均はそれぞれ $np, n(1-p)$ となる. また, 存在する枝のうち, 異なる固有振動数の振動子同士をつなぐものは全体の $2p(1-p)$ である. 以上より, 固有振動数 ω_+ (ω_-) を持つ振動子の平均的な位相を ϕ_+ (ϕ_-) とすると,

平均場近似された2種類の結合振動子系のダイナミクスは以下のように表される.

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_+ &= \omega_+ + \frac{2p(1-p)m}{np} \lambda \sin(\phi_- - \phi_+), \\ \dot{\phi}_- &= \omega_- + \frac{2p(1-p)m}{n(1-p)} \lambda \sin(\phi_+ - \phi_-).\end{aligned}\tag{4.3}$$

この同期条件は

$$\lambda \geq \frac{|\omega_+ - \omega_-|n}{2m}$$

である, よって,

$$m_3 = \frac{|\omega_+ - \omega_-|n}{2\lambda}\tag{4.4}$$

となる. ただし, これは, m_3 が式 (??) を満たすような結合強度のときのみ成立する. つまり,

$$\lambda = (\omega_+ - \omega_-)(\log n)^{-1}O(n^{-1})\tag{4.5}$$

のときのような結合強度が十分弱い場合のみ成立する.

4.3.2 最大サイズ L が下げ止まる枝の本数 m_1

クラスタの最大サイズ L は線形に減少する.

$$L(m_1) = np - m_1p = 0.\tag{4.6}$$

よって,

$$m_1 = n\tag{4.7}$$

となる.

しかしながら, λ が十分大きい場合は同期が開始し L が下げ止まるため, $m_1 \leq n$ となる. 特に $n \rightarrow \infty$ の場合を考えると, $m = m_3$ 付近で

$$L(m) \begin{cases} \sim 1 & (m < m_3), \\ = n' \gtrsim 1p & (m > m_3) \end{cases}\tag{4.8}$$

となる,

振動子が k 次である確率 $P(k) \sim \binom{m}{k}(1/n)^k(1-1/n)^{m-k}$ より, $m < n$ では, ほとんどの振動子の次数は1である. よって, 異なる固有振動数を持つ振動子と1つだけ結合した部分系が同期するか考えればよい. 同期条件は,

$$\lambda \geq \frac{|\omega_+ - \omega_-|}{2}\tag{4.9}$$

である.

ネットワークの一部の振動子が同期するとき, $m < n$ であっても $L > np - mp$ となる. 特に, 式 (??) が満たされるとき, 連結になった振動子はほとんど同期するため, percolation が起こる $m = n/2$ において $L > np - mp$ となる.

以上より、ある λ^1 が存在して、

$$m_1 \begin{cases} \gtrsim n/2 & (\lambda \gtrsim |\omega_+ - \omega_-|/2), \\ n'', (n/2 < n'' < n) & (|\omega_+ - \omega_-|/2 \gtrsim \lambda > \lambda^1), \\ n & (\lambda^1 \geq \lambda > 1) \end{cases} \quad (4.10)$$

となる。

4.3.3 臨界本数の数値実験による確認

$n = 50$, $\lambda = 0.4$, $p = 1/2$ について、 $M = 100$ 回試行し平均したものが図??である。 $m_1 = n = 50$, $m_3 \sim |\omega_+ - \omega_-|n/2\lambda = 250$ となるが、概ね一致している。 m_3 がクラスタの最大サイズ L が真に増加し始める m と一致しないのは、 $n = 50 < \infty$ という有限の振動子数を用いていること及び、 $250 < 50 \log 50 \sim O(50)$ であることに起因すると考えられる。

また、 $n = 50$, $\lambda = 8$, $p = 1/2$ について、 $M = 100$ 試行し平均したものが図??である。図??では、枝が繋がっていない孤立した振動子の数の平均値及び、連結な部分ネットワークのうち最大のものに属する振動子の数の平均値を重ねて表した。ただし、枝が m 本のときに連結な部分ネットワークのうち最大のものに属する確率 v とすると、以下の式が成立することを用いた。

$$v = 1 - \left(1 - \frac{2m}{n(n-1)}v\right)^{n-1} \quad (4.11)$$

λ が $|\omega_+, \omega_-|/2$ より十分大きい場合、異なる固有振動数を持つ振動子同士は結合すると必ず同期する。そのため、枝の本数 m が $0 < m \lesssim n/2$ では、枝の数が少ないため、孤立振動子が同じ実効振動数をもつクラスタの中で最大のサイズをもつクラスタとなる。また、 $m \gtrsim n/2$ では連結な部分ネットワークは全て同期するため、連結な部分ネットワークのうち最大のものが、同じ実効振動数をもつクラスタの中で最大のサイズをもつクラスタとなる。実際、理論的な2本の曲線と数値実験による曲線は概ね一致している。

4.4 結論・議論

??節で求めた臨界本数から以下のような定性的な理解ができる。まず、最大クラスタが孤立振動子から構成される臨界本数 m_1 は、結合強度が十分弱い場合では孤立振動子がほとんどなくなるネットワークのサイズになる。結合強度がある程度大きくなると、臨界本数は減少し、percolation が引き起こされるネットワークのサイズの半分の本数まで減少する。そして、振動子が同期し始める境界である臨界本数 m_2 は、結合強度が十分弱い状況においては、結合強度が強く、固有振動数の差が小さいほど小さくなることがわかった。

このように、ネットワークにおけるクラスタサイズは、同期状態を調べるために用いられてきたオーダーパラメータよりも、顕著にネットワークにおけるミクロなダイナミクスを反映している。したがって、ネットワークの構造の変化に伴う同期状態の変化を調べる上でクラスタサイズに注目することは有用であると考えられる。

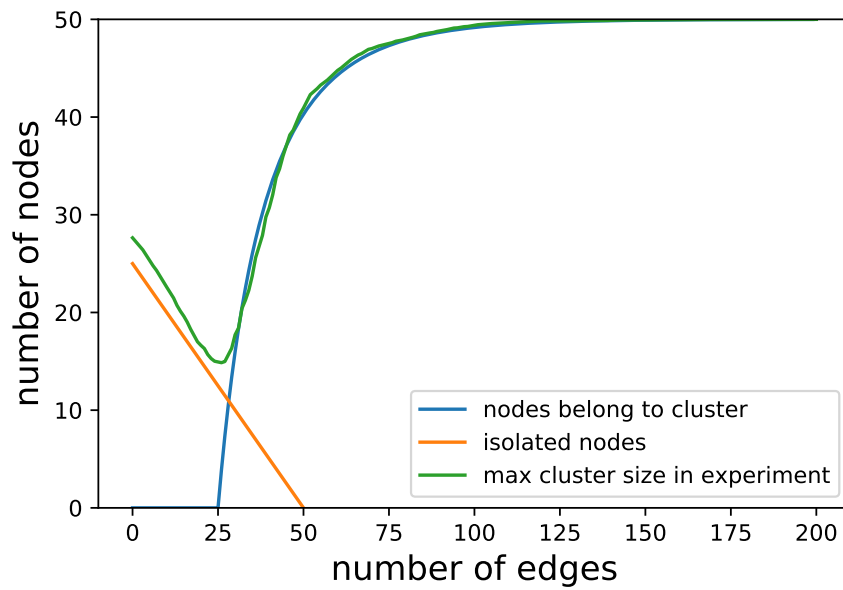


図 4.2: $n = 50$, $\lambda = 8$, $p = 1/2$ についてのクラスタの最大サイズの $M = 100$ 試行平均値と枝の本数との関係を表した。また、枝が繋がっていない孤立した振動子の数の平均値及び、連結な部分ネットワークのうち最大のものに属する振動子の数の平均値を重ねて表した。

λ が $|\omega_+, \omega_-|/2$ より十分大きい場合、異なる固有振動数を持つ振動子同士は結合すると必ず同期する。そのため、枝の本数 m が $0 < m \lesssim n/2$ では、枝の数が少ないため、孤立振動子が同じ実効振動数をもつクラスタの中で最大のサイズをもつクラスタとなる。また、 $m \gtrsim n/2$ では連結な部分ネットワークは全て同期するため、連結な部分ネットワークのうち最大のものが、同じ実効振動数をもつクラスタの中で最大のサイズをもつクラスタとなる。実際、理論的な 2 本の曲線と数値実験による曲線は概ね一致している。

第 5 章

おわりに

5.1 本研究のまとめ

本論文では、第??章で、振動子ネットワークにおける枝の生成・消滅に伴う同期状態の変化を調べた。特に、同期クラスタが変化する鞍替え現象に着目し、簡略化した数理モデルである 3 体系を提案した。鞍替えする振動子集団と鞍替え前後の集団の 3 種類の振動子に注目し各集団について平均化を行うと、3 つの振動子が鞍替えする振動子を中央にして鎖状に結合したモデルで近似される。この 3 体系はネットワークの構造を固定し結合強度を変化させた場合、最大で 5 種類の同期状態を経ることがわかった。そして、同期状態が変化する臨界結合強度の近似値を求めた。解析の結果の以下のことが分かった。固有振動数が近く枝が多く集団のサイズが小さいほど同期しやすい。そして、2 つの集団との間の枝の本数の比がある程度偏っていて、結合強度がある程度強いとき鞍替え現象が起こる。また、結合強度比を固定し結合強度を変化させたときの同期状態の変化パターンに関して、結合強度比 a には少なくとも 2 つの分岐点が存在することが分かった。特に、それぞれの近似値 a_1^* , a_2^* を求めた。 $0 < a \lesssim a_1^*$ のとき全部で 3 つの同期状態が観測される。そして、 $a_1^* \lesssim a \lesssim a_2^*$ では全部で 5 つの同期状態が認められ、 $a \gtrsim a_2^*$ では全部で 3 つの同期状態が見られる。このように、3 体系へ近似する手法は、鞍替え現象など 2 種類の振動子では説明できないような性質を示すようなネットワークの一部を説明できる。

続く第??章では、振動子ネットワークにおいて枝数を変化させる操作を複数回行った平均的なクラスタ状態について調べた、特に、同じ振動数をもつ振動子を同一のクラスタに属するとしたときの最大のクラスタサイズとオーダーパラメータの変化について注目した。最大クラスタは枝が少ないとき、孤立した振動子から構成され、枝が増えると最大の連結成分に属する振動子から構成される。そして、異なる固有振動数を持つ振動子が同期するほど枝の本数が大きくなると、ネットワーク全体が同期し、ネットワーク全体が 1 つのクラスタとなる。クラスタの最大サイズが 2 つの臨界本数に応じて変動するのに伴って、オーダーパラメータも変化し変曲点を 2 つもつ。これらの同期状態の変化において、境界となる枝の臨界本数についてそれぞれ求めた。このうち全体が同期する臨界本数は、結合強度が十分弱い場合について求めた。結合強度が強く、固有振動数の差が小さいほど小さくなることがわかった。また、最大クラス

タが孤立振動子から構成される臨界本数は、結合強度が十分弱い場合では孤立振動子がほとんどなくなるネットワークのサイズになることがわかった。さらにネットワークのサイズが十分大きい場合について調べ、結合強度がある程度大きくなると、臨界本数が減少し、percolation が引き起こされるネットワークのサイズの半分の本数まで減少することがわかった。このように、ネットワークにおけるクラスタサイズは、同期状態を調べるために用いられてきたオーダーパラメータよりも、顕著にネットワークにおけるミクロなダイナミクスを反映している。したがって、ネットワークの構造の変化に伴う同期状態の変化を調べる上でクラスタサイズに注目することは有用であると考えられる。

5.2 今後の課題

本研究では、ネットワークとして Erdős-Rényi モデル、振動数分布として二項分布を用いた。しかし、現実のネットワークのようなスケールフリー性などの特徴を Erdős-Rényi モデルは持たない。よって、ネットワークの構造が機能に影響する振動子ネットワークについて考える場合は、より現実のネットワークに即したモデル [?] を用いることが期待される。また、振動数分布も二項分布以外に、よく用いられる連続分布 [?] や時間変動する分布 [?] を考慮することで、様々な同期現象についてネットワーク構造との関係を調べることができる。

??節では、解析を容易にするため 3 体系における 2 つの振動数差が大きく異なるという仮定を行った。しかし、結合強度比を固定し結合強度を変化させたときの同期状態の変化パターンについて一般的な性質を知るには不十分である。実際、??節で述べたように、3 体がどれも非同期の状態から 3 体が同期する必要十分条件は、本研究の手法では調べることができなかった。この条件が正確に求まると、一般のネットワークの同期状態の変化パターンを解析する場合に 3 体系という最も簡略化された系に帰着させることの正当性がより明らかになる。このため、今後はより一般のパラメータ領域において同期状態の変化パターンなどの 3 体系の性質を調べることが求められる。

??節では、解析のため、結合強度が十分弱いという仮定や、ネットワークのサイズが十分大きいという仮定を課した。しかし、それ以外のパラメータ領域でも解析を行うことが、ネットワークの構造と同期状態の関係を理解する上で期待される。

謝辞

指導教員である郡宏教授には，研究のテーマ設定から論文の執筆まで大変熱心に御指導頂きました．この場を借りて御礼申し上げます．

また，渡邊絵美理さんを始め，数理情報第8研究室の皆様には，執筆や発表にあたって多くの示唆を与えて頂きました．深く感謝いたします．

そして，オンラインを中心とした研究生生活において精神的・肉体的な支えとなってくれた家族や友人など，全ての皆様に感謝申し上げます．

付録 A

鎖状ネットワークの同期に関する先行研究

鎖状ネットワークの同期に関する先行研究である [?] の解析内容について述べる.

鎖状に無向グラフとして N 個連なった位相振動子ネットワークのふるまいを以下で記述するとする.

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\theta}_i &= \omega_i + \lambda \sin(\theta_{i-1} - \theta_i), \quad i = 2, 3, \dots, N.\end{aligned}\tag{A.1}$$

ここで, θ_i, ω_i をそれぞれ端から i 番目の振動子の位相と固有振動数とする. $\lambda > 0$ は振動子間の結合強度とする. このモデルでは端の振動子 1 が固有振動数 ω_1 をもつ駆動源となり, 他の振動子は駆動源に近い方の隣接した振動子と相互作用する.

$\omega_1 = 2, \omega_2 = 1$ とし, 他の ω_i をランダムに選択するとして固有振動数を配置し, 結合強度を高めていく数値実験を行ったところ, 4 つのクラスタリングパターンが観測された.

Case 1 隣接した駆動振動子と同期し局所クラスターが発生する.

Case 2 駆動源と同期する振動子が出現する.

Case 3 結合強度が小さい間は隣接した駆動振動子と同期し局所クラスターを構成した後, 結合強度がある程度大きくなると局所クラスターが消滅する.

Case 4 隣接した駆動振動子が駆動源と同期した後, 駆動される振動子自体も同期する.

つまり, 各振動子とクラスターを構成するのは, 隣接した駆動振動子と, 駆動源の 2 つの振動子のみである. このパターンは, 他の鎖状ネットワークでも普遍的であるため, これらのクラスタリングパターンの分岐を考える.

特に $N = 3, \omega_1 = 2, \omega_2 = 1$ とする. ω_3 を変化させたとき全部で 4 つの領域に分かれた.

- $\omega_3 \in [1, 2]$ のとき, 結合強度の増加により隣接した駆動振動子と同期する. Case ?? に相当する.
- $\omega_3 \in (2, 3]$ のとき, 結合強度の増加により駆動振動子と同期する. Case ?? に相当する.
- $\omega_3 \lesssim 1$ のとき, 結合強度が小さい間は隣接した駆動振動子と同期し局所クラスターを

構成した後、結合強度がある程度大きくなると局所クラスターが消滅する。Case ??に相当する。

- ω_3 が ω_1, ω_2 両方ともから離れた値のとき、隣接した駆動振動子が駆動源と同期した後、駆動される振動子自体も同期する。Case ??に相当する。

以上の分岐を調べるため、以下の方程式を考える。

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1, \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 + \lambda \sin(\theta_1 - \theta_2), \\ \dot{\theta}_3 &= \omega_3 + \lambda \sin(\theta_2 - \theta_3).\end{aligned}\tag{A.2}$$

ここで、 $\phi_{21} = \theta_2 - \theta_1$, $\Delta\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$ とすると、

$$\dot{\phi}_{21} = \Delta\omega_{21} - \lambda \sin \phi_{21}\tag{A.3}$$

となる。ここで、両辺の長時間平均 $\langle \cdot \rangle$ を考える。 λ が同期が起こらないくらい小さいとき、 ϕ_{21} の確率分布 $\rho(\phi_{21}, t)$ は十分時間が経つと安定分布に収束する。

$$\rho(\phi_{21}, t) = \frac{\Delta\omega_{21} - \lambda \sin \phi_{21}}{C}, \quad C : \text{normalization constant}.\tag{A.4}$$

この確率分布に ϕ_{21} が従うとして式 (??) の $\sin \phi_{21}$ を平均する。すると、以下のようになる。

$$\langle \sin \phi_{21} \rangle = \frac{\Delta\omega_{21} - \sqrt{(\Delta\omega_{21})^2 - \lambda^2}}{\lambda}.\tag{A.5}$$

よって、式 (??) より、 θ_2 の実効振動数が得られる。

$$\langle \dot{\theta}_2 \rangle = \omega_1 + \sqrt{(\Delta\omega_{21})^2 - \lambda^2}.\tag{A.6}$$

この式より、 $\lambda_c = \Delta\omega_{21}$ として、 $\lambda \geq \lambda_c$ のとき $\langle \dot{\theta}_2 \rangle = \omega_1$ となり、振動子 1 と振動子 2 は同期する。同様の手順で θ_3 の実効振動数が得られる。

$$\langle \dot{\theta}_3 \rangle = \langle \dot{\theta}_2 \rangle + \sqrt{(\Delta\omega_{32})^2 - \lambda^2}.\tag{A.7}$$

ただし、 $\Delta\omega_{32} = \omega_3 - \langle \dot{\theta}_2 \rangle$ である。

以上より、振動子の同期条件を求めることができる。振動子 2 と振動子 3 の同期条件は $\Delta\omega_{21} \geq 0$ のとき、

$$\begin{cases} -\lambda \leq \Delta\omega_{31} - \sqrt{(\Delta\omega_{32})^2 - \lambda^2} \leq \lambda & (\lambda \leq |\Delta\omega_{21}|), \\ -\lambda \leq \Delta\omega_{31} \leq \lambda & (\lambda > |\Delta\omega_{21}|) \end{cases}\tag{A.8}$$

となり、 $\Delta\omega_{21} < 0$ のとき、

$$\begin{cases} -\lambda \leq \Delta\omega_{31} + \sqrt{(\Delta\omega_{32})^2 - \lambda^2} \leq \lambda & (\lambda \leq |\Delta\omega_{21}|), \\ -\lambda \leq \Delta\omega_{31} \leq \lambda & (\lambda > |\Delta\omega_{21}|) \end{cases}\tag{A.9}$$

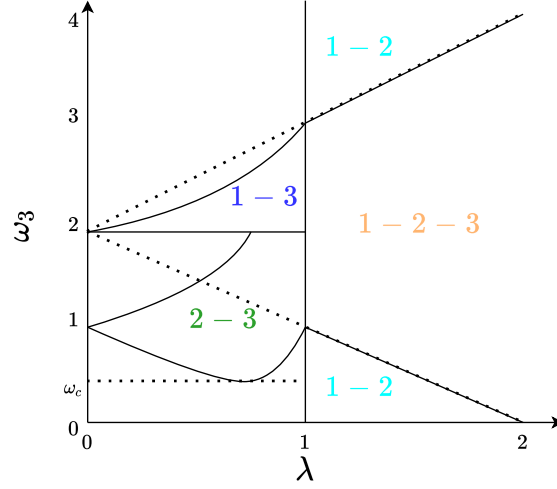


図 A.1: $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 1$ のときの固有振動数 ω_3 と結合強度 λ に対する相図. あるパラメータ領域で同期クラスタが発生する場合, その振動子の組を各領域に示している. また, 同期クラスタが異なるパラメータ領域の境界を実線で示している.

となる. ここで, $\Delta\omega_{31} = \omega_3 - \omega_1$ である. これらの同期条件から, $\omega_c = -\sqrt{2}|\Delta\omega_{21}| + \omega_1$ という臨界振動数を境界とする領域 $\omega_3 \in (\omega_c, \omega_2)$ で Case ?? のような分離が起こることがわかる.

次に, 振動子 1 と振動子 3 の同期条件を考える. $\phi_{31} = \theta_3 - \theta_1$ とすると,

$$\dot{\phi}_{31} = \Delta\omega_{31} - \lambda \sin(\phi_{31} - \phi_{21}) \quad (\text{A.10})$$

となるから同期の必要条件は, $|\Delta\omega_{31}| \leq \lambda$ となる. また, $\langle \dot{\theta}_3 \rangle = \omega_1$ の状況を考えると, 式 (??) から, 同期の十分条件が求まる.

$$\omega_3 \leq \omega_1 + |\Delta\omega_{21}| - \sqrt{(\Delta\omega_{21})^2 - \lambda^2}. \quad (\text{A.11})$$

以上の解析から ω_3, λ と同期クラスタの関係が図??として示される.

また, 式 (??) を再帰的に利用することで $N > 3$ の場合でも同様の解析が可能となる.

付録 B

3 体系が適用できない例

??節で述べたように 3 体系が適用できない場合が存在する．本節ではそれらの例を示す．

まず，どのように分割しても異なる実行振動数の集団が必ず 4 つ以上存在する場合（??節 Case ??）の例を図??に示す． $\lambda = 3/2$ のとき，図のような 4 つの集団に分かれ，3 つの集団に分割することはできない．この場合赤で示した枝を増やした場合の同期状態を 3 体系を用いて解析することはできない．

次に，どのように分割しても異なる実行振動数の集団が必ず 4 つ以上存在する場合（??節 Case ??）の例を図??に示す． $\lambda = 1$ のとき，図のような 4 つの集団に分かれ，3 つの集団に分割することはできない．この場合赤で示した枝を増やした場合の同期状態を 3 体系を用いて解析することはできない．

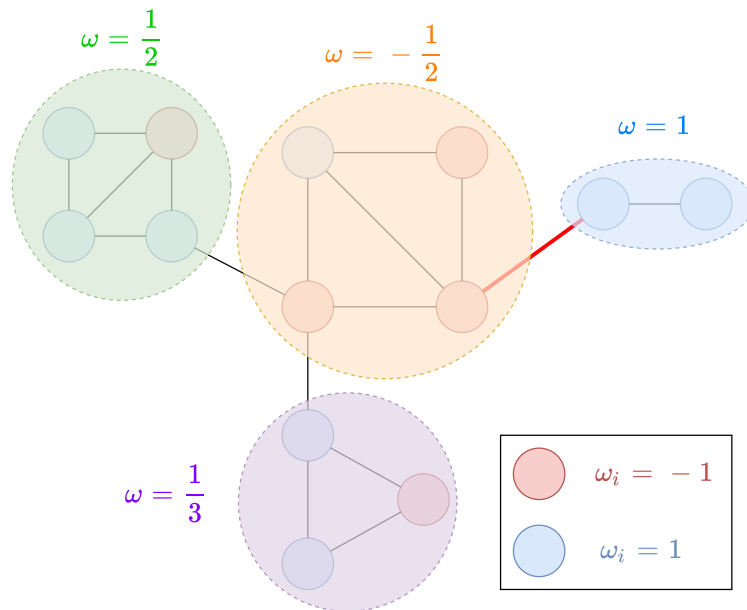


図 B.1: どのように分割しても異なる実行振動数の集団が必ず 4 つ以上存在する場合（??節 Case ??）の例．

$\lambda = 3/2$ のとき，図のような 4 つの集団に分かれ，3 つの集団に分割することはできない．

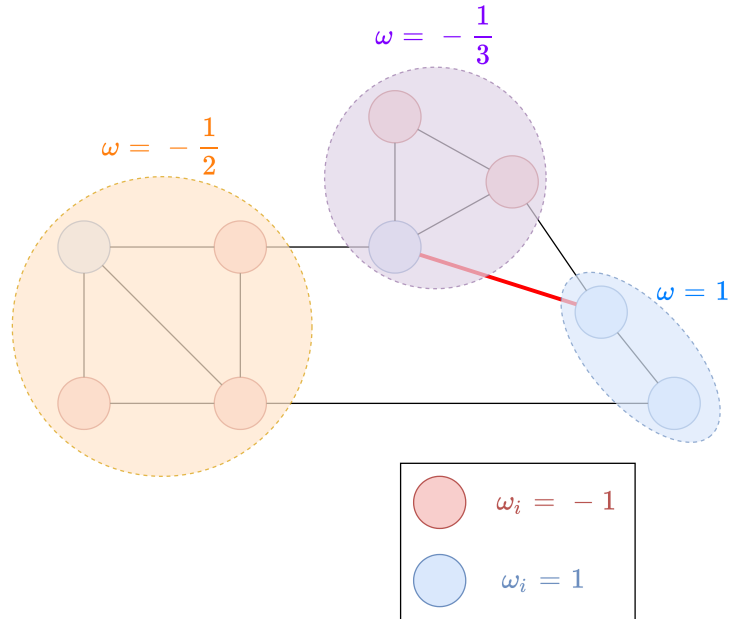


図 B.2: 異なる実行振動数の集団が3つ以内になるように分割できるもの、どのように分割しても鎖状に連なった3つの集団において両端の集団間の枝がそれ以外の集団間の枝に比べ無視できない場合 (??節 Case ??) の例.

$\lambda = 1$ のとき、図のような3つの集団に分かれるが、どの3集団の間にも枝が存在し無視することができない.

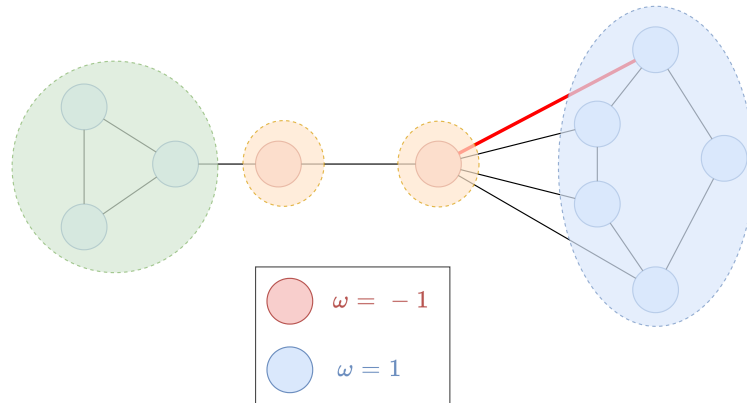


図 B.3: 注目する枝を除いた場合は3つの集団に分割できるものの、そのどのような分割に対しても、注目する枝を加えると4つ以上の集団に分かれてしまう場合 (??節 Case ??) の例. $\lambda = 1/60$ のとき、赤で示した枝を除いた場合は図の色で区別した3つの集団に分かれるものの、赤で示した枝を加えた場合は図の楕円で囲った4つの集団に分かれる.

そして、注目する枝を除いた場合は3つの集団に分割できるものの、そのどのような分割に対しても、注目する枝を加えると4つ以上の集団に分かれてしまう場合 (??節 Case ??) の例を図??に示す. $\lambda = 1/60$ のとき、赤で示した枝を除いた場合は図の色で区別した3つの集団に分かれるものの、赤で示した枝を加えた場合は図の楕円で囲った4つの集団に分かれる. この場合赤で示した枝を増やした場合の同期状態を3体系を用いて解析することはできない.