条件付き確率と乗法定理

高校数学 A『確率』

SAKAI SHO / 酒井 彰

鹿児島大学 / 理学部

January 1, 2023

目次

目次

条件付き確率

条件付き確率の定義

全事象を U とする。2 つの事象 A, B について，条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{1}$$

と表される。（ただし，$P(A) \neq 0$）

条件付き確率

条件付き確率の定義

全事象を U とする。2 つの事象 A, B について，条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{2}$$

と表される。（ただし，$P(A) \neq 0$）

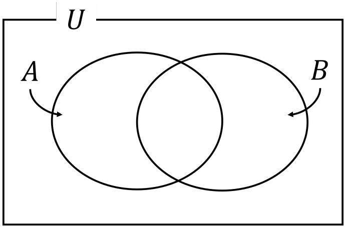


Figure: ベン図（事象の関係）

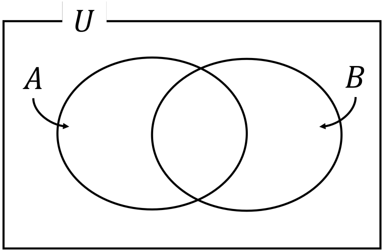
条件付き確率

条件付き確率の定義

全事象を U とする。2 つの事象 A, B について，条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{3}$$

と表される。（ただし，$P(A) \neq 0$）



memo

$\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$

$n(A \cap B)$: 事象 $A \cap B$ の起こる場合の数

$n(A)$: 事象 A の起こる場合の数

条件付き確率

条件付き確率の定義

全事象を U とする。2 つの事象 A, B について，条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{4}$$

と表される。（ただし，$P(A) \neq 0$）

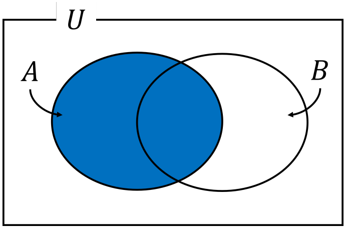


Figure: 条件付き確率のベン図（事象の関係）

条件付き確率

条件付き確率の定義

全事象を U とする。2 つの事象 A, B について，条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{5}$$

と表される。（ただし，$P(A) \neq 0$）

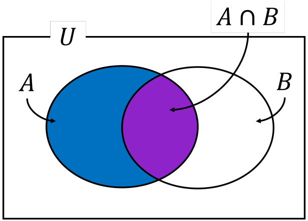


Figure: 条件付き確率のベン図（事象の関係）

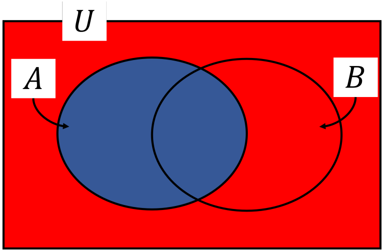
条件付き確率

条件付き確率の定義

全事象を U とする。2 つの事象 A, B について，条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{6}$$

と表される。（ただし，$P(A) \neq 0$）



memo

$$P(A) = \frac{P(A)}{1} = \frac{P(A \cap U)}{P(U)}$$

目次

乗法定理

乗法定理

2 つの事象 A, B がともに起こる確率 $P(A \cap B)$ は

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \tag{7}$$

と表される。（ただし，$P(A) \neq 0$）

目次

演習問題

問

　ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

演習問題

問

ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

問われていること

演習問題

問

　ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

問われていること

検査で陽性となった人が実際に患者である確率は？

演習問題

問

　ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

問われていること

検査で陽性となった人が実際に患者である確率は？

言葉の説明

患者: 感染症に感染している人

演習問題

問

　ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

問われていること

検査で陽性となった人が実際に患者である確率は？

言葉の説明

患者: 感染症に感染している人
検査で陽性が出る: 一定の確率で感染症に感染していると確認できる。

演習問題

問

ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

「事象」の候補

演習問題

問

ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

「事象」の候補

hint 問題文中にある確率

演習問題

問

ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

「事象」の候補

hint 問題文中にある確率

- 患者のうち陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者が陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率

演習問題

問

ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

「事象」の候補

hint 問題文中にある確率

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

ベン図を思い出す（何を事象として $U, A, B, \ldots$ とおけば求めたい確率を求められるのか）

演習問題

問

ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

「事象」の候補

- 検査対象者である。

演習問題

問

　ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

「事象」の候補

- 検査対象者である。
- 患者である。

演習問題

問

ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

「事象」の候補

- 検査対象者である。
- 患者である。
- 検査で陽性反応がでる。

演習問題

問

ある感染症の検査について，患者のうち 98% が陽性反応を示し，患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また，検査対象者のうち，患者である確率は 0.1% であるとする。このとき，検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

「事象」の候補

- 検査対象者である。
- 患者である。
- 検査で陽性反応がでる。

（否定等を考えれば他にも考えること「は」出来る。）

演習問題

「事象」の候補

- 検査対象者である。
- 患者である。
- 検査で陽性反応がでる。

演習問題

事象

- 検査対象者である。
- 患者である。
- 検査で陽性反応がでる。

これらに事象としての記号 (U, A, B) を与えて，ベン図にまとめると

演習問題

事象

- (U) 検査対象者である。
- (A) 患者である。
- (B) 検査で陽性反応がでる。

これらに事象としての記号 (U, A, B) を与えて，ベン図にまとめると

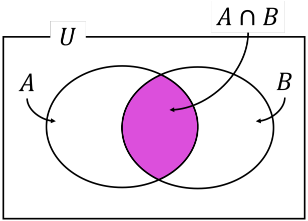


Figure: ベン図（事象の関係）

演習問題

事象

- (U) 検査対象者である。
- (A) 患者である。
- (B) 検査で陽性反応がでる。

問われていること

検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率は？

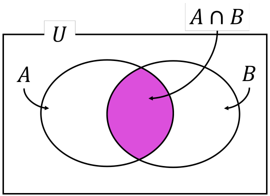


Figure: ベン図（事象の関係）

演習問題

事象

- (U) 検査対象者である。
- (A) 患者である。
- (B) 検査で陽性反応がでる。

問われていること

検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率は？$= P_B(A)$

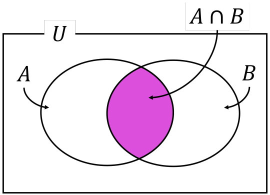


Figure: ベン図（事象の関係）

演習問題

求める値

$$P_B(A)$$

演習問題

条件付き確率の定義

全事象を U とする。2 つの事象 A, B について，条件付き確率 $P_A(B)$ は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \tag{8}$$

と表される。（ただし，$P(A) \neq 0$）

条件付き確率の定義より，

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{9}$$

演習問題

事象

- (U) 検査対象者である。
- (A) 患者である。
- (B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

求める値

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

演習問題

求める値

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = ??$$

$$P(B) = ??$$

演習問題

求める値

$$P(A \cap B)$$

事象

- (U) 検査対象者である。
- (A) 患者である。
- (B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

演習問題

求める値

$$P(A \cap B)$$

演習問題

乗法定理

2 つの事象 A, B がともに起こる確率 $P(A\cap B)$ は

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B) \tag{10}$$

と表される。（ただし，$P(A)\neq 0$）

乗法定理より

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P_A(B) \tag{11}$$

演習問題

事象

- (U) 検査対象者である。
- (A) 患者である。
- (B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

求める値

$$P(A) \cdot P_A(B)$$

演習問題

事象

- (U) 検査対象者である。
- (A) 患者である。
- (B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

求める値

$$P(A) \cdot P_A(B) = (0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})$$

演習問題

(U) 検査対象者である。
(A) 患者である。
(B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

求める値

$$P(A) \cdot P_A(B) = (0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})$$

実際，言葉で書くと
$P(A)$:（検査対象者のうち）患者である確率
$P_A(B)$: 患者である者のうち，検査で陽性反応が出る確率

演習問題

求める値

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \cap B) = (0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})$$

$$P(B) = ??$$

演習問題

求める値

$$P(B)$$

演習問題

以下の等式を認める ($\overline{A}$:A の余事象)

$$P(B) = P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A}) \tag{12}$$

演習問題

以下の等式を認める ($\overline{A}$:A の余事象)

$$P(B) = P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A}) \tag{13}$$

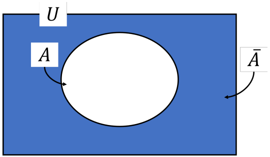


Figure: ベン図（事象の関係）

演習問題

以下の等式を認める ($\overline{A}$:A の余事象)

$$P(B) = P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A}) \tag{14}$$

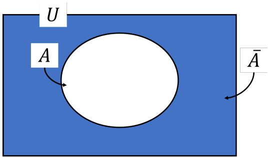


Figure: ベン図（事象の関係）

A は「患者である」という事象であった。
つまり，$\overline{A}$ は

演習問題

以下の等式を認める ($\overline{A}$:A の余事象)

$$P(B) = P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A}) \tag{15}$$

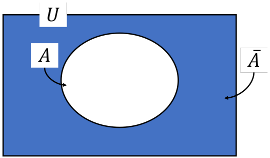


Figure: ベン図（事象の関係）

A は「患者である」という事象であった。
つまり，$\overline{A}$ は「患者ではない」という事象のこと。

演習問題

求める値

$$P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A})$$

演習問題

求める値

$$P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A})$$

確率の性質

全事象を U とする。事象 A の確率を $P(A)$ とすると，事象 A の余事象 $\overline{A}$ の確率 $P(\overline{A})$ は

$$P(\overline{A}) = P(U) - P(A) = 1 - P(A) \tag{16}$$

と求まる。

演習問題

$P(\overline{A})$ を求めたい。
(U) 検査対象者である。
(A) 患者である。
(B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

確率の性質

全事象を U とする。事象 A の確率を $P(A)$ とすると，事象 A の余事象 $\overline{A}$ の確率 $P(\overline{A})$ は

$$P(\overline{A}) = P(U) - P(A) = 1 - P(A) \tag{17}$$

と求まる。

演習問題

求める値

$$P(\overline{A})$$

(U) 検査対象者である。
(A) 患者である。
・検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%

確率の性質

全事象を U とする。事象 A の確率を $P(A)$ とすると，事象 A の余事象 $\overline{A}$ の確率 $P(\overline{A})$ は

$$P(\overline{A}) = P(U) - P(A) = 1 - P(A) \tag{18}$$

と求まる。

演習問題

(U) 検査対象者である。
(A) 患者である。
・検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%

確率の性質

全事象を U とする。事象 A の確率を $P(A)$ とすると，事象 A の余事象 $\overline{A}$ の確率 $P(\overline{A})$ は

$$P(\overline{A}) = P(U) - P(A) = 1 - P(A) \tag{19}$$

と求まる。

これより，

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \tag{20}$$

演習問題

(U) 検査対象者である。
(A) 患者である。
・検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%

確率の性質

全事象を U とする。事象 A の確率を $P(A)$ とすると，事象 A の余事象 $\overline{A}$ の確率 $P(\overline{A})$ は

$$P(\overline{A}) = P(U) - P(A) = 1 - P(A) \tag{21}$$

と求まる。

これより，

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.1 \cdot \frac{1}{100} = 99.9 \cdot \frac{1}{100} \tag{22}$$

演習問題

求めた値と求める値のまとめ

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{23}$$

演習問題

求めた値と求める値のまとめ

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{24}$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A})} \tag{25}$$

演習問題

求めた値と求める値のまとめ

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{26}$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A})} \tag{27}$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \tag{28}$$

演習問題

求める値

$$P_A(B), P(A), P_{\overline{A}}(B)$$

演習問題

求めた値と求める値のまとめ

$$P_B(A) = \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \tag{29}$$

(U) 検査対象者である。
(A) 患者である。
(B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

(U) 検査対象者である。
(A) 患者である。
(B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

$$P_B(A) = \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \tag{30}$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \tag{31}$$

(U) 検査対象者である。
(A) 患者である。
(B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

$$P_B(A) = \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \tag{32}$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (0.1 \cdot \frac{1}{100}) + P_{\overline{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \tag{33}$$

(U) 検査対象者である。
(A) 患者である。
(B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

$$P_B(A) = \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (0.1 \cdot \frac{1}{100}) + P_{\overline{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \tag{34}$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (0.1 \cdot \frac{1}{100}) + (3 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \tag{35}$$

(U) 検査対象者である。
(A) 患者である。
(B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

$$P_B(A) = \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (0.1 \cdot \frac{1}{100}) + (3 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \tag{36}$$

$$= \frac{0.1 \cdot 98}{98 \cdot 0.1 \cdot 3 \cdot 99.9} \tag{37}$$

$$= 0.03166397 \tag{38}$$

(U) 検査対象者である。
(A) 患者である。
(B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

$$P_B(A) = 0.03166397 \tag{39}$$

よって 3.17%.

目次