

# 条件付き確率と乗法定理

高校数学 A 『確率』

氏名

所属

November 30, 2022

# 目次

- ① 条件付き確率
- ② 乗法定理
- ③ 演習問題

# 目次

① 条件付き確率

② 乗法定理

③ 演習問題

# 条件付き確率

## 条件付き確率の定義

全事象を  $U$  とする。2つの事象  $A, B$  について、条件付き確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (1)$$

と表される。(ただし,  $P(A) \neq 0$ )

# 条件付き確率

## 条件付き確率の定義

全事象を  $U$  とする。2つの事象  $A, B$  について、条件付き確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (2)$$

と表される。(ただし,  $P(A) \neq 0$ )

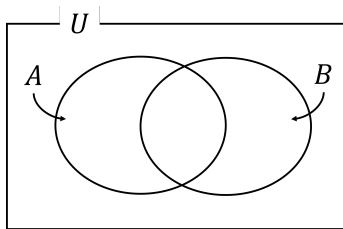


Figure: ベン図 (事象の関係)

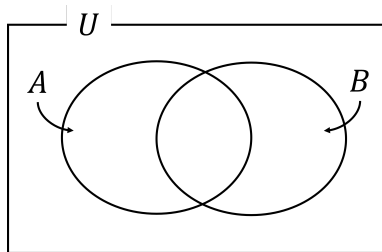
# 条件付き確率

## 条件付き確率の定義

全事象を  $U$  とする。2つの事象  $A, B$  について、条件付き確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (3)$$

と表される。(ただし,  $P(A) \neq 0$ )



### memo

$$\frac{n(A \cap B)}{n(A)}$$

$n(A \cap B)$ : 事象  $A \cap B$  の起こる場合の数

$n(A)$ : 事象  $A$  の起こる場合の数

# 条件付き確率

## 条件付き確率の定義

全事象を  $U$  とする。2つの事象  $A, B$  について、条件付き確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (4)$$

と表される。(ただし,  $P(A) \neq 0$ )

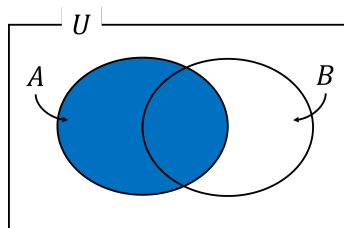


Figure: 条件付き確率のベン図 (事象の関係)

# 条件付き確率

## 条件付き確率の定義

全事象を  $U$  とする。2つの事象  $A, B$  について、条件付き確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (5)$$

と表される。(ただし,  $P(A) \neq 0$ )

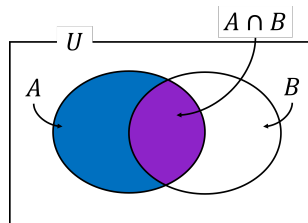


Figure: 条件付き確率のベン図 (事象の関係)



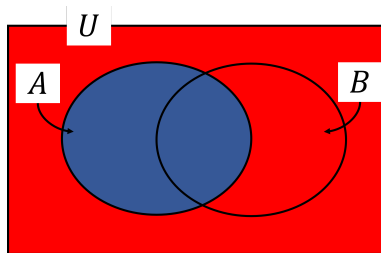
# 条件付き確率

## 条件付き確率の定義

全事象を  $U$  とする。2つの事象  $A, B$  について、条件付き確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (6)$$

と表される。(ただし,  $P(A) \neq 0$ )



### memo

$$P(A) = \frac{P(A)}{1} = \frac{P(A \cap U)}{P(U)}$$

# 目次

① 条件付き確率

② 乗法定理

③ 演習問題

# 乗法定理

## 乗法定理

2つの事象  $A, B$  がともに起こる確率  $P(A \cap B)$  は

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \quad (7)$$

と表される。(ただし,  $P(A) \neq 0$ )

# 目次

① 条件付き確率

② 乗法定理

③ 演習問題

# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 問われていること

# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 問われていること

検査で陽性となった人が実際に患者である確率は？

# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 問われていること

検査で陽性となった人が実際に患者である確率は？

## 言葉の説明

患者: 感染症に感染している人



# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 問われていること

検査で陽性となった人が実際に患者である確率は？

## 言葉の説明

患者: 感染症に感染している人

検査で陽性が出る: 一定の確率で感染症に感染していると確認できる。

# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 「事象」の候補

# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 「事象」の候補

hint 問題文中にある確率

# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 「事象」の候補

### hint 問題文中にある確率

- 患者のうち陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者が陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率

# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 「事象」の候補

### hint 問題文中にある確率

- 患者のうち、陽性反応を示す確率は 98%
  - 患者でない者のうち、陽性反応を示す確率は 3%
  - 検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%
  - 検査を受けて陽性となった者のうち、患者である確率
- ベン図を思い出す（何を事象として  $U, A, B, \dots$  とおけば求めたい確率を求められるのか）

# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 「事象」の候補

- 検査対象者である。

# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 「事象」の候補

- 検査対象者である。
- 患者である。

# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 「事象」の候補

- 検査対象者である。
- 患者である。
- 検査で陽性反応がでる。



# 演習問題

## 問

ある感染症の検査について、患者のうち 98% が陽性反応を示し、患者でない者が陽性反応を示す確率は 3% であるとする。また、検査対象者のうち、患者である確率は 0.1% であるとする。このとき、検査を受けて陽性となった人が実際に患者である確率を求めよ。

## 「事象」の候補

- 検査対象者である。
  - 患者である。
  - 検査で陽性反応がでる。
- (否定等を考えれば他にも考えること「は」出来る。)

# 演習問題

## 「事象」の候補

- 検査対象者である。
- 患者である。
- 検査で陽性反応がでる。

# 演習問題

## 事象

- 検査対象者である。
- 患者である。
- 検査で陽性反応がでる。

これらに事象としての記号  $(U, A, B)$  を与えて、ベン図にまとめると

# 演習問題

## 事象

- $(U)$  検査対象者である。
- $(A)$  患者である。
- $(B)$  検査で陽性反応がでる。

これらに事象としての記号  $(U, A, B)$  を与えて、ベン図にまとめると

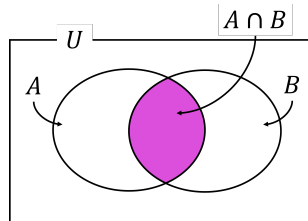


Figure: ベン図 (事象の関係)

# 演習問題

## 事象

- $(U)$  検査対象者である。
- $(A)$  患者である。
- $(B)$  検査で陽性反応がでる。

## 問われていること

検査を受けて陽性となった者のうち、患者である確率は？

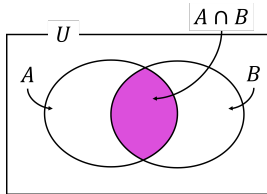


Figure: ベン図 (事象の関係)

# 演習問題

## 事象

- $(U)$  検査対象者である。
- $(A)$  患者である。
- $(B)$  検査で陽性反応がでる。

## 問われていること

検査を受けて陽性となった者のうち、患者である確率は？  $= P_B(A)$

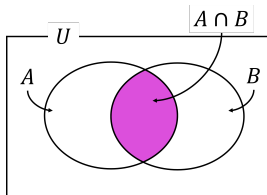


Figure: ベン図 (事象の関係)

# 演習問題

求める値

$$P_B(A)$$

# 演習問題

## 条件付き確率の定義

全事象を  $U$  とする。2つの事象  $A, B$  について、条件付き確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad (8)$$

と表される。(ただし,  $P(A) \neq 0$ )

条件付き確率の定義より,

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (9)$$



# 演習問題

## 事象

- $(U)$  検査対象者である。
  - $(A)$  患者である。
  - $(B)$  検査で陽性反応がでる。
- 
- 患者のうち、陽性反応を示す確率は 98%
  - 患者でない者のうち、陽性反応を示す確率は 3%
  - 検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%
  - 検査を受けて陽性となった者のうち、患者である確率

## 求める値

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

# 演習問題

求める値

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(A \cap B) = ??$$
$$P(B) = ??$$

# 演習問題

## 求める値

$$P(A \cap B)$$

## 事象

- $(U)$  検査対象者である。
  - $(A)$  患者である。
  - $(B)$  検査で陽性反応がでる。
- 
- 患者のうち、陽性反応を示す確率は 98%
  - 患者でない者のうち、陽性反応を示す確率は 3%
  - 検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%
  - 検査を受けて陽性となった者のうち、患者である確率

# 演習問題

求める値

$$P(A \cap B)$$

# 演習問題

## 乗法定理

2つの事象  $A, B$  がともに起こる確率  $P(A \cap B)$  は

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \quad (10)$$

と表される。(ただし,  $P(A) \neq 0$ )

乗法定理より

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) \quad (11)$$

# 演習問題

## 事象

- $(U)$  検査対象者である。
  - $(A)$  患者である。
  - $(B)$  検査で陽性反応がでる。
- 
- 患者のうち、陽性反応を示す確率は 98%
  - 患者でない者のうち、陽性反応を示す確率は 3%
  - 検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%
  - 検査を受けて陽性となった者のうち、患者である確率

## 求める値

$$P(A) \cdot P_A(B)$$

# 演習問題

## 事象

- $(U)$  検査対象者である。
  - $(A)$  患者である。
  - $(B)$  検査で陽性反応がでる。
- 
- 患者のうち、陽性反応を示す確率は 98%
  - 患者でない者のうち、陽性反応を示す確率は 3%
  - 検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%
  - 検査を受けて陽性となった者のうち、患者である確率

## 求める値

$$P(A) \cdot P_A(B) = (0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})$$

## 演習問題

( $U$ ) 検査対象者である。

( $A$ ) 患者である。

( $B$ ) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち、陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち、陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち、患者である確率

### 求める値

$$P(A) \cdot P_A(B) = (0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})$$

実際、言葉で書くと

$P(A)$ : (検査対象者のうち) 患者である確率

$P_A(B)$ : 患者である者のうち、検査で陽性反応が出る確率



# 演習問題

求める値

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P(A \cap B) = (0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})$$
$$P(B) = ??$$

# 演習問題

求める値

$$P(B)$$

# 演習問題

以下の等式を認める ( $\bar{A}$ :  $A$  の余事象)

$$P(B) = P_A(B) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot P(\bar{A}) \quad (12)$$

# 演習問題

以下の等式を認める ( $\bar{A}$ :  $A$  の余事象)

$$P(B) = P_A(B) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot P(\bar{A}) \quad (13)$$

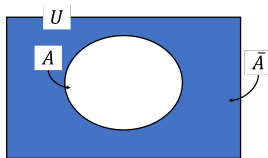


Figure: ベン図 (事象の関係)

## 演習問題

以下の等式を認める ( $\bar{A}$ :  $A$  の余事象)

$$P(B) = P_A(B) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot P(\bar{A}) \quad (14)$$

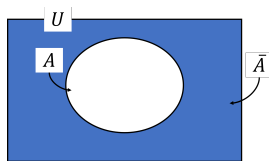


Figure: ベン図 (事象の関係)

$A$  は「患者である」という事象であった。  
つまり、 $\bar{A}$  は

## 演習問題

以下の等式を認める ( $\bar{A}$ :  $A$  の余事象)

$$P(B) = P_A(B) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot P(\bar{A}) \quad (15)$$

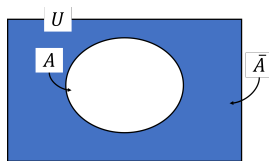


Figure: ベン図 (事象の関係)

$A$  は「患者である」という事象であった。  
つまり、 $\bar{A}$  は「患者ではない」という事象のこと。

# 演習問題

求める値

$$P_A(B) \cdot P(A) + P_{\overline{A}}(B) \cdot P(\overline{A})$$

## 演習問題

### 求める値

$$P_A(B) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot P(\bar{A})$$

### 確率の性質

全事象を  $U$  とする。事象  $A$  の確率を  $P(A)$  とすると、事象  $A$  の余事象  $\bar{A}$  の確率  $P(\bar{A})$  は

$$P(\bar{A}) = P(U) - P(A) = 1 - P(A) \quad (16)$$

と求まる。



## 演習問題

$P(\bar{A})$  を求めたい。

( $U$ ) 検査対象者である。

( $A$ ) 患者である。

( $B$ ) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち、陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち、陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち、患者である確率

### 確率の性質

全事象を  $U$  とする。事象  $A$  の確率を  $P(A)$  とすると、事象  $A$  の余事象  $\bar{A}$  の確率  $P(\bar{A})$  は

$$P(\bar{A}) = P(U) - P(A) = 1 - P(A) \quad (17)$$

と求まる。

## 演習問題

### 求める値

$$P(\overline{A})$$

( $U$ ) 検査対象者である。

( $A$ ) 患者である。

- ・検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%

### 確率の性質

全事象を  $U$  とする。事象  $A$  の確率を  $P(A)$  とすると、事象  $A$  の余事象  $\overline{A}$  の確率  $P(\overline{A})$  は

$$P(\overline{A}) = P(U) - P(A) = 1 - P(A) \quad (18)$$

と求まる。

## 演習問題

( $U$ ) 検査対象者である。

( $A$ ) 患者である。

- ・検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%

### 確率の性質

全事象を  $U$  とする。事象  $A$  の確率を  $P(A)$  とすると、事象  $A$  の余事象  $\bar{A}$  の確率  $P(\bar{A})$  は

$$P(\bar{A}) = P(U) - P(A) = 1 - P(A) \quad (19)$$

と求まる。

これより、

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (20)$$

## 演習問題

( $U$ ) 検査対象者である。

( $A$ ) 患者である。

- ・検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%

### 確率の性質

全事象を  $U$  とする。事象  $A$  の確率を  $P(A)$  とすると、事象  $A$  の余事象  $\bar{A}$  の確率  $P(\bar{A})$  は

$$P(\bar{A}) = P(U) - P(A) = 1 - P(A) \quad (21)$$

と求まる。

これより、

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0.1 \cdot \frac{1}{100} = 99.9 \cdot \frac{1}{100} \quad (22)$$

# 演習問題

## 求めた値と求める値のまとめ

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (23)$$

# 演習問題

## 求めた値と求める値のまとめ

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (24)$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{P_A(B) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot P(\bar{A})} \quad (25)$$

## 演習問題

## 求めた値と求める値のまとめ

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (26)$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{P_A(B) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot P(\bar{A})} \quad (27)$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{P_A(B) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \quad (28)$$

# 演習問題

求める値

$$P_A(B), P(A), P_{\overline{A}}(B)$$



## 演習問題

### 求めた値と求める値のまとめ

$$P_B(A) = \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{P_A(B) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \quad (29)$$

(U) 検査対象者である。

(A) 患者である。

(B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち、陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち、陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち、患者である確率

(U) 検査対象者である。

(A) 患者である。

(B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

$$P_B(A) = \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{P_A(B) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \quad (30)$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \quad (31)$$

( $U$ ) 検査対象者である。

( $A$ ) 患者である。

( $B$ ) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

$$P_B(A) = \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot P(A) + P_{\bar{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \quad (32)$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (0.1 \cdot \frac{1}{100}) + P_{\bar{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \quad (33)$$

( $U$ ) 検査対象者である。

( $A$ ) 患者である。

( $B$ ) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

$$P_B(A) = \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (0.1 \cdot \frac{1}{100}) + P_{\bar{A}}(B) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \quad (34)$$

$$= \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (0.1 \cdot \frac{1}{100}) + (3 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \quad (35)$$

(U) 検査対象者である。

(A) 患者である。

(B) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち、陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち、陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち、患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち、患者である確率

$$P_B(A) = \frac{(0.1 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (98 \cdot \frac{1}{100})}{(98 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (0.1 \cdot \frac{1}{100}) + (3 \cdot \frac{1}{100}) \cdot (99.9 \cdot \frac{1}{100})} \quad (36)$$

$$= \frac{0.1 \cdot 98}{98 \cdot 0.1 \cdot 3 \cdot 99.9} \quad (37)$$

$$= 0.03166397 \quad (38)$$

( $U$ ) 検査対象者である。

( $A$ ) 患者である。

( $B$ ) 検査で陽性反応がでる。

- 患者のうち，陽性反応を示す確率は 98%
- 患者でない者のうち，陽性反応を示す確率は 3%
- 検査対象者のうち，患者である確率は 0.1%
- 検査を受けて陽性となった者のうち，患者である確率

$$P_B(A) = 0.03166397 \quad (39)$$

よって 3.17%.

# 目次

- ① 条件付き確率
- ② 乗法定理
- ③ 演習問題