

熱交換モデル (HEX)

[1] 基礎理論

サブシステムには熱交換を扱うものがいくつかある。その代表的なものが空調機コイル（水と空気）や水・水熱交換器（水と水）である。これらの熱交換の計算には対数平均温度差または対数平均エンタルピー差の概念が使われることが多い。これについて各サブシステムモデルのプログラムで個別に考慮しても構わないが、むしろ共通するものとして整理しておいた方が汎用性のあるプログラムとして構築し易い。

一般に、2つの熱媒体（水や空気）の熱交換時の流れは大きく3つに分類できる。向流型（カウンタフロー）、並流型（パラレルフロー）、直交流型（クロスフロー）の3つである。このうち直交流型はモデル化することが難しく、また、実際の空調システムでの適用頻度もそれほど多くない。以下は、向流型と並流型にのみ適用できる理論である。

今、図1のような向流型の熱交換器を考える。熱媒体の種類は特に指定せず、高温側の熱交換器入口・出口温度[°C]を T_{h1} , T_{h2} 、低温側のそれを T_{c1} , T_{c2} とする。また、それぞれの流量[kgf/h]を G_h , G_c 、

定圧比熱[kcal/(kgf・°C)]を c_h , c_c とする。微小区間 dA の高温側と低温側の温度を T_h , T_c とすると、

以下の式(1)が成立する。

$$\begin{aligned} dQ &= K(T_h - T_c)dA \\ &= -G_h c_h dT_h \\ &= -G_c c_c dT_c \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 dQ ：微小区間 dA での熱移動量[kcal/h]、 K ：熱貫流率[kcal/(m²・h・°C)]

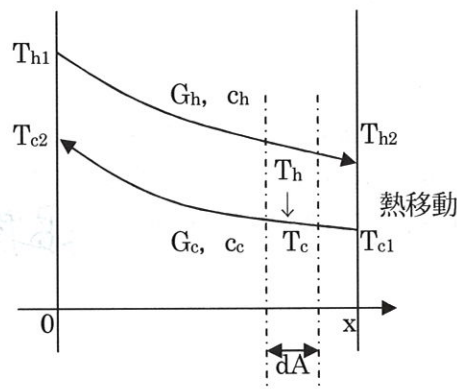


図1 向流型熱交換器

すなわち、熱交換器の高温側から低温側に移動した熱量は、高温側の熱媒体の温度変化による熱量と、低温側の熱媒体の温度変化による熱量に等しいと考える。

今、式(1)で $G_h c_h = W_h$, $G_c c_c = W_c$ とすれば、 $dT_h = -\frac{1}{W_h} dQ$, $dT_c = -\frac{1}{W_c} dQ$ であり、式(1)

から以下の式が得られる。

$$d(T_h - T_c) = dT_h - dT_c = \left(-\frac{1}{W_h} + \frac{1}{W_c} \right) dQ = \left(-\frac{1}{W_h} + \frac{1}{W_c} \right) K(T_h - T_c) dA \quad (2)$$

次に、式(2)の両辺を $0 \sim x$ で積分すると、以下の式(3)が得られる。

$$\log \frac{T_{h2} - T_{c1}}{T_{h1} - T_{c2}} = KA \left(-\frac{1}{W_h} + \frac{1}{W_c} \right) \quad (3)$$

さらに、 $-\frac{1}{W_h} = \frac{dT_h}{dQ} = \frac{T_{h2} - T_{h1}}{Q}$, $-\frac{1}{W_c} = \frac{dT_c}{dQ} = \frac{T_{c1} - T_{c2}}{Q}$ を式(3)に代入すると、

$$Q = KA \frac{(T_{h2} - T_{c1}) - (T_{h1} - T_{c2})}{\log \frac{T_{h2} - T_{c1}}{T_{h1} - T_{c2}}} = KA \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\log \frac{\Delta_1}{\Delta_2}} = KA(MTD) \quad (4)$$

ここで、 $MTD = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\log \frac{\Delta_1}{\Delta_2}}$: 対数平均温度差[°C] ($\Delta_1 = T_{h2} - T_{c1}$, $\Delta_2 = T_{h1} - T_{c2}$)

式(4)は、例えば水—水熱交換器のような顕熱のみの熱交換を示しているが、冷却除湿コイルのように潜熱の熱交換も同時に考慮する場合は、状態量をエンタルピーに拡張する必要がある。このとき式(1)は以下の式(1)'となり、式(4)は式(4)'と表せることになる。

温度→エンタルピー

$$\begin{aligned} dQ &= K_w (h_h - h_c) dA \\ &= -G_h dh_h \\ &= -G_c dh_c \end{aligned} \quad (1)'$$

ここで、 dQ : 微小区間 dA での熱移動量[kcal/h], h_h, h_c : 高温側と低温側の比エンタルピー, K_w : エンタルピー基準の熱貫流率[kcal/(m²・h・kcal/kgf(DA))]

$$Q = K_w A \frac{(h_{h2} - h_{c1}) - (h_{h1} - h_{c2})}{\log \frac{h_{h2} - h_{c1}}{h_{h1} - h_{c2}}} = K_w A \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\log \frac{\Delta_1}{\Delta_2}} = K_w A (MED) \quad (4)'$$

ここで, $MED = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\log \frac{\Delta_1}{\Delta_2}}$: 対数平均エンタルピー差 [kcal/kgf(DA)] ($\Delta_1 = h_{h2} - h_{c1}$,

$$\Delta_2 = h_{h1} - h_{c2})$$

すなわち, 温度差基準であれエンタルピー基準であれ, 状態量に温度と対数平均温度差を使うのか, あるいは比エンタルピーと対数平均エンタルピー差を使うのか, の違いだけであり, 式の上では同じ形になる。よって, 以下では温度差基準 (顕熱のみの熱交換) を例に理論展開を考える。ただし, 式(1)や式(1)'で温度や比エンタルピーにかかる W_h, W_c の意味が異なるので注意が必要である。

さらに, Δ_1, Δ_2 は熱交換器両端における高温側と低温側の差を示していて,

$$MTD = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\log \frac{\Delta_1}{\Delta_2}} = \frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\log \frac{\Delta_2}{\Delta_1}} \text{ と表せるので, } \Delta_1, \Delta_2 \text{ の明確な区別はしなくても良いことになる。}$$

なわち, 熱交換器のどちらかの端が Δ_1 であり, もう一方の端が Δ_2 である。そして, MTD または MED 熱交換器内における高温側と低温側の平均的な温度 (比エンタルピー) 差である。

以上は, 向流型における対数平均温度差の説明であるが, この温度差は並流型についても全く同じ形で定義できる (上記と同様な導出をしてみると良い)。並流型の熱交換器を図 2 のように考えると, 以下の式が導出される。

$$Q = KA \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\log \frac{\Delta_1}{\Delta_2}} = KA (MTD) \quad (5)$$

ここで, $\Delta_1 = T_{h2} - T_{c2}$, $\Delta_2 = T_{h1} - T_{c1}$

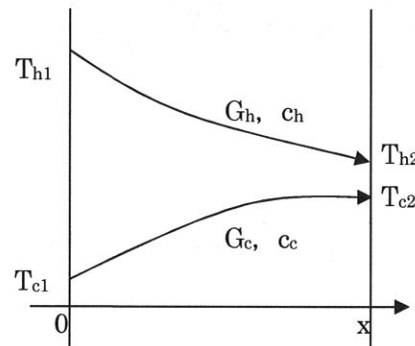


図 2 並流型熱交換器

さて、2つの熱媒体の熱交換器入口温度と流量を使って、それぞれの熱交換器出口温度を算出する式を導出する。

①向流型の場合

$$\begin{aligned} Q &= KA(MTD) \\ &= G_h c_h (T_{h1} - T_{h2}) \\ &= G_c c_c (T_{c2} - T_{c1}) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\text{ここで, } MTD = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\log \frac{\Delta_1}{\Delta_2}}, \quad \Delta_1 = T_{h2} - T_{c1}, \quad \Delta_2 = T_{h1} - T_{c2}$$

前述と同様に、 $G_h c_h = W_h$, $G_c c_c = W_c$ とすれば、

$$\begin{cases} T_{h2} = T_{h1} - \frac{Q}{W_h} \\ T_{c2} = T_{c1} + \frac{Q}{W_c} \end{cases} \quad (7)$$

また、

$$\begin{aligned} \Delta_1 - \Delta_2 &= (T_{h2} - T_{c1}) - (T_{h1} - T_{c2}) = \left(T_{h1} - \frac{Q}{W_h} - T_{c1} \right) - \left(T_{h1} - T_{c1} - \frac{Q}{W_c} \right) \\ &= \frac{Q}{W_c} \left(1 - \frac{W_c}{W_h} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\text{さらに, } MTD = \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{\log \frac{\Delta_1}{\Delta_2}} = \frac{Q}{KA} \text{ より,}$$

$$\log \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{KA}{Q} (\Delta_1 - \Delta_2) = \frac{KA}{Q} \cdot \frac{Q}{W_c} \left(1 - \frac{W_c}{W_h} \right) = \frac{KA}{W_c} \left(1 - \frac{W_c}{W_h} \right)$$

よって、

$$\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \exp \left\{ \frac{KA}{W_c} \left(1 - \frac{W_c}{W_h} \right) \right\} \text{ となり, これを } X \text{ とおく。} \quad (9)$$

一方、式(7)から

$$\Delta_1 = T_{h2} - T_{c1} = (T_{h1} - T_{c1}) - \frac{Q}{W_h} = Y - \frac{Q}{W_h}$$

$$\Delta_2 = T_{h1} - T_{c2} = (T_{h1} - T_{c1}) - \frac{Q}{W_c} = Y - \frac{Q}{W_c}$$

となるので、これらを式(9)に代入して、

$$\frac{Y - \frac{Q}{W_h}}{Y - \frac{Q}{W_c}} = X \quad (10)$$

これを整理すると、

$$Q = \frac{Y(1-X)}{\frac{1}{W_h} - \frac{X}{W_c}} \quad (11)$$

式(11)を式(7)に代入すれば、次の式が得られる。

$$\begin{cases} T_{h2} = T_{h1} - \frac{Y(1-X)}{1 - \frac{W_h}{W_c} X} \\ T_{c2} = T_{c1} + \frac{Y(1-X)}{\frac{W_c}{W_h} - X} \end{cases} \quad (12)$$

ただし、 $X = \exp\left\{\frac{KA}{W_c}\left(1 - \frac{W_c}{W_h}\right)\right\}$, $Y = T_{h1} - T_{c1}$

②並流型の場合

①の向流型と同様に考えれば、以下の式が導出できる。

$$\begin{cases} T_{h2} = T_{h1} - \frac{Y(1-X)}{\frac{W_h}{W_c} + 1} \\ T_{c2} = T_{c1} + \frac{Y(1-X)}{\frac{W_c}{W_h} + 1} \end{cases} \quad (13)$$

ただし、 $X = \exp\left\{-\frac{KA}{W_c}\left(1 + \frac{W_c}{W_h}\right)\right\}$, $Y = T_{h1} - T_{c1}$ (X が向流型と異なることに注意)

③向流型で $W_h = W_c$ の場合

この場合は、向流型プレート式水-水熱交換器などで、高温側と低温側に流れる流量が等しいときに生じる。このとき式(12)においては、 $\frac{W_h}{W_c} = \frac{W_c}{W_h} = 1$, $X = 1$ となり、分母・分子ともに 0 となって計算できない (不定形)。そこで、以下に示すロピタルの定理を使う。

ロピタルの定理 ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ のとき、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{f'(x)}$ が成立する)

式(12)において、 $\frac{W_c}{W_h} = x$ とおき、分母と分子を x についてそれぞれ微分し、 $x = 1$ を代入して整理すれば以下の式が得られる。

$$\begin{cases} T_{h2} = T_{h1} - \frac{Y \frac{KA}{W_c}}{1 + \frac{KA}{W_c}} \\ T_{c2} = T_{c1} + \frac{Y \frac{KA}{W_c}}{1 + \frac{KA}{W_c}} \end{cases} \quad (14)$$

ただし、 $Y = T_{h1} - T_{c1}$

このことは、向流型で $W_h = W_c$ であれば、熱交換器の入口から出口までの温度変化は、高温側と低温側で等しいことを示している。

[2] プログラム

(1) ステップ 1 ($\frac{W_c}{W_h}$ を定義する) (21)

(2) ステップ 2 (熱交換の種類に応じて計算を進める) (22-39)

➤ 向流型で $\frac{W_c}{W_h} \neq 1$ の場合 (式(12), 23-27)

➤ 向流型で $\frac{W_c}{W_h} = 1$ の場合 (式(14), 28-32)

➤ 並流型の場合 (式(13), 34-39)

向流型プレート式水-水熱交換器モデル (WWHEX)

【基礎理論】

向流型のプレート式水-水熱交換器は、非常に熱交換効率の良い機器として空調システムにしばしば用いられる（図 1）。向流型で水と水の熱交換なので HEX のモデルがそのまま利用できるが、利用頻度が高いのでここで改めて WWHEX モデルを用意する。HEX にある諸式から、この場合の出口温度は以下の式で与えられる（記号は HEX を参照）。

① $W_h \neq W_c$ の場合

$$\begin{cases} T_{h2} = T_{h1} - \frac{Y(1-X)}{1 - \frac{W_h}{W_c} X} \\ T_{c2} = T_{c1} + \frac{Y(1-X)}{\frac{W_c}{W_h} - X} \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $X = \exp\left\{\frac{KA}{W_c}\left(1 - \frac{W_c}{W_h}\right)\right\}$, $Y = T_{h1} - T_{c1}$

② $W_h = W_c$ の場合

$$\begin{cases} T_{h2} = T_{h1} - \frac{Y \frac{KA}{W_c}}{1 + \frac{KA}{W_c}} \\ T_{c2} = T_{c1} + \frac{Y \frac{KA}{W_c}}{1 + \frac{KA}{W_c}} \end{cases} \quad (2)$$

ただし、 $Y = T_{h1} - T_{c1}$

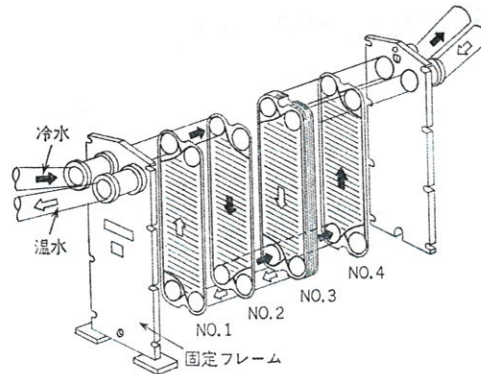


図 1 向流型プレート式水-水熱交換器

このモデルの要点は、向流型プレート式水・水熱交換器の熱貫流率の与え方で、以下の式から計算できる。

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\alpha_h} + \frac{1}{\alpha_c} \quad (3)$$

ここで、 α_h, α_c : 高温側, 低温側の熱伝達率[kcal/(m²h°C)]

α_h, α_c は、高温側, 低温側を流れる流体の流速や熱物性、熱交換器の仕様によって変化する。すなわち、

$$\frac{\alpha}{C_p \left(\frac{L}{S} \right)} \left(\frac{C_p \mu}{\lambda} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{0.023}{\left\{ \frac{D_e \left(\frac{L}{S} \right)}{\mu} \right\}^{0.2}} \quad (4)$$

ここで、 C_p : 流体比熱[kcal/kg°C], L : 流量[kg/h], S : 通過断面積[m²],

μ : 粘度[kg/mh] (= 3600×9.80η, η : 粘性係数[kgs/m²]), λ : 流体の熱伝導率[kcal/mh°C],

$D_e : \frac{2ab}{a+b}$ (a : 通路長[m], b : 通路幅[m])

また、水の物性値から、

$C_p = 1.000$, $\eta = 1.022 \times 10^{-4}$, $\lambda = 0.518$ (いずれも 20°C基準) が与えられる。

ここでの注意は、これらの物性値は流体温度に依存しているということである。COIL でも空気の物性値が与えられているが、これらも 20°C基準の数値となっている。実用的な範囲で計算するために固定値として与えられているが、必要に応じてこれらの物性値を変更することも可能である。空気と水の物性値表を以下にあげておく。

表 1 空気と水の物性値

表 11.3 気体の物性表 (圧力: 1 kg/cm^2 (飽和水蒸気を除く)) (日本機械学会) (A29)

物質	温度 ($^{\circ}\text{C}$)	比重 γ (kg/m^3)	比熱 c_p ($\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}}$)	粘性係数 η (kg s/m^2)	動粘性係 数 ν (m^2/s)	熱伝導率 λ ($\frac{\text{kcal}}{\text{m h}^{\circ}\text{C}}$)	温度伝導 率 a (m^2/h)	プラン トル数 Pr
空 気	-100	1.984	0.241	$\times 10^{-6}$ 1.21	$\times 10^{-4}$ 0.060	0.0135	0.0281	0.77
	-50	1.533	0.240	1.49	0.095	0.0172	0.0468	0.73
	-20	1.348	0.240	1.65	0.120	0.0193	0.0597	0.73
	0	1.251	0.240	1.76	0.138	0.0207	0.0689	0.72
	20	1.166	0.240	1.86	0.156	0.0221	0.0789	0.71
	40	1.091	0.241	1.95	0.175	0.0234	0.0892	0.71
	60	1.026	0.241	2.05	0.196	0.0247	0.100	0.71
	80	0.968	0.241	2.14	0.217	0.0260	0.111	0.70
	100	0.916	0.242	2.23	0.239	0.0272	0.123	0.70
	120	0.869	0.242	2.32	0.262	0.0285	0.135	0.70
飽 和 水蒸気	100	0.598	0.501	$\times 10^{-6}$ 1.22	$\times 10^{-4}$ 0.200	0.0207	0.0691	1.04
	120	1.121	0.521	1.31	0.115	0.0223	0.0382	1.08
	140	1.966	0.539	1.38	0.0688	0.0242	0.0228	1.09
	160	3.258	0.577	1.45	0.0436	0.0262	0.0139	1.13
	180	5.16	0.619	1.52	0.0289	0.0284	0.00890	1.17

表 11.4 水の物性表 (圧力: 1 kg/cm^2 (飽和温度以上は飽和圧力)) (日本機械学会) (A29)

温度 ($^{\circ}\text{C}$)	比重 γ (kg/m^3)	比熱 c_p ($\frac{\text{kcal}}{\text{kg}^{\circ}\text{C}}$)	粘性係数 η (kg s/m^2)	動粘性係 数 ν (m^2/s)	熱伝導率 λ ($\frac{\text{kcal}}{\text{m h}^{\circ}\text{C}}$)	温度伝導 率 a (m^2/h)	プラン トル数 Pr	膨張率 β ($1/^{\circ}\text{C}$)	表面張力 (kg/m)
0	999.9	1.008	$\times 10^{-4}$ 1.829	$\times 10^{-6}$ 1.79	0.489	$\times 10^{-4}$ 4.85	13.3	$\times 10^{-3}$ -0.06	$\times 10^{-3}$ 7.72
10	999.7	1.002	1.336	1.31	0.505	5.04	9.36	+0.09	7.56
20	998.2	0.999	1.022	1.00	0.518	5.08	7.09	0.20	7.39
30	995.7	0.998	0.816	0.803	0.531	5.34	5.41	0.29	7.24
40	992.3	0.998	0.676	0.668	0.543	5.48	4.39	0.38	7.08
50	988.1	0.999	0.559	0.555	0.552	5.59	3.57	0.45	6.90
60	983.2	1.000	0.482	0.480	0.562	5.72	3.02	0.54	6.74
70	977.8	1.001	0.416	0.417	0.571	5.85	2.69	0.59	6.55
80	971.8	1.003	0.365	0.368	0.578	5.93	2.23	0.65	6.37
90	965.3	1.005	0.323	0.328	0.583	6.01	1.97	0.72	6.19
100	958.4	1.007	0.290	0.297	0.586	6.08	1.76	0.78	6.00
120	943.1	1.014	0.238	0.247	0.589	6.16	1.44	0.91	5.55
140	926.1	1.023	0.197	0.209	0.588	6.21	1.21	1.05	5.10
160	907.3	1.037	0.172	0.186	0.585	6.22	1.08	1.20	4.65
180	886.9	1.054	0.152	0.168	0.578	6.25	0.97	1.37	4.17