確率・統計　試験問題略解

問題 1

(1) ある家庭には、４人の子どもがいる。４人とも女の子である確率はいくらか。
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

(2) ある家庭には、４人の子どもがいる。そのうち、少なくとも１人は女の子だそうである。４人とも女の子である確率はいくらか。
16 通りのうち、4 人とも男である可能性は無いので、$\frac{1}{16-1} = \frac{1}{15}$

(3) ある家庭には、４人の子どもがいる。一番上は女の子である。４人とも女の子である確率はいくらか。
2 番目、3 番目、4 番目が各々女の子である確率は、$\frac{1}{2}$ だから、$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

問題 2 青森県の有効求人倍率は、およそ 0.5 である。これは、一社を受験した場合に内定をもらう確率が 0.5 であることを意味する。

(1) 一社を受験した場合に、内定をもらえない確率を求めよ。
$1 - 0.5 = 0.5$

(2) 三社を受験した場合に、どこからも内定をもらえない確率を求めよ。
$0.5^3 = 0.125$

(3) 三社を受験した場合に、少なくとも一社から内定をもらえる確率を求めよ。
1 から (2) の結果を引いて、$1 - 0.5^3 = 1 - 0.125 = 0.875$

問題 3 ある夜、タクシーがひき逃げした。目撃者は、青のタクシーがひいたと証言した。その町で営業しているタクシー会社は、グリーン社とブルー社の二社で、次のようなデータがある。

a 町を走るタクシーの 80 %はグリーン社の緑の車で、残りの 20 %はブルー社の青い車である。
b 夜の事故という状況で目撃者の証言がどれだけ信頼できるかを警察がテストしたところ、2 つの色を正しく識別できる確率は 75 %、間違える確率は 25 %であった。

(1) 夜間に青いタクシーの目撃証言が得られる確率 $P(青_{目})$ はいくらか。

$$\begin{aligned} P(青_{目}) &= P(青_{目}|緑_{走})P(緑_{走}) + P(青_{目}|青_{走})P(青_{走}) \\ &= 0.25 \times 0.8 + 0.75 \times 0.2 = 0.35 \end{aligned}$$

(2) 夜間に緑のタクシーの目撃証言が得られる確率 $P(緑_{目})$ はいくらか。

$$\begin{aligned} P(緑_{目}) &= P(緑_{目}|緑_{走})P(緑_{走}) + P(緑_{目}|青_{走})P(青_{走}) \\ &= 0.75 \times 0.8 + 0.25 \times 0.2 = 0.65 \end{aligned}$$

(3) ブルー社のタクシーが事故を起こした確率 $P(青_{事故}) = \frac{P(青_{走} \cap 青_{目})}{P(青_{目})}$ はいくらか。
$P(青_{事故}) = \frac{P(青_{目}|青_{走})P(青_{走})}{P(青_{目})} = \frac{0.15}{0.35} = \frac{3}{7}$

問題 4

[1] 20 本のくじの中に、賞金 100 円の当りくじが 1 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

(i) 2 本のうち 1 本が当りくじである確率はいくらか。$\dfrac{1\times 19}{{}_{20}C_2} = \dfrac{1}{10}$

(ii) 2 本とも空くじである確率はいくらか。$\dfrac{{}_{19}C_2}{{}_{20}C_2} = \dfrac{9}{10}$

(iii) X の期待値 (平均) を求めよ。$\mu = 100 \times \dfrac{1}{10} = 10$ 円

(iv) X の分散を求めよ。$\sigma^2 = 100^2 \times \dfrac{1}{10} - 10^2 = 900$

[2] 40 本のくじの中に、賞金 100 円の当りくじが 2 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

(i) 2 本とも当りくじとなる確率を求めよ。 $\dfrac{1}{{}_{40}C_2} = \dfrac{1}{780}$

(ii) 2 本のうち 1 本が当りくじである確率はいくらか。$\dfrac{2\times 38}{{}_{40}C_2} = \dfrac{76}{780} = \dfrac{19}{195}$

(iii) 2 本とも空くじである確率はいくらか。$\dfrac{{}_{38}C_2}{{}_{40}C_2} = \dfrac{703}{780}$

(iv) X の期待値 (平均) を求めよ。$\mu = 200 \times \dfrac{1}{780} + 100 \times \dfrac{76}{780} = 10$ 円

(v) X の分散を求めよ。$\sigma^2 = 200^2 \times \dfrac{1}{780} + 100^2 \times \dfrac{76}{780} - 10^2 = \dfrac{36100}{39} \simeq 925.641$

問題 5 選択肢が 4 個あり、その中の正しいものに○をつけよという設問が 5 題ある。ただし、各設問について正解は 1 個しかないものとする。まったくでたらめに○をつけたとした場合について以下の質問に答えよ。

(1) x コ正解する確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。$\mathrm{P}(x) = {}_5C_x \left(\dfrac{1}{4}\right)^x \left(\dfrac{3}{4}\right)^{5-x} = \dfrac{{}_5C_x\ 3^{5-x}}{1024}$

(2) 平均するといくつ正解することになるか。$\mu = 5 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$

(3) 正解数の分散を求めよ。$\sigma^2 = 5 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{16}$

(4) 正解数が 0 の確率を求めよ。$\mathrm{P}(0) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^5 = \dfrac{243}{1024}$

(5) 1 問正解する確率はくらか。$\mathrm{P}(1) = \dfrac{{}_5C_1\ 3^4}{1024} = \dfrac{405}{1024}$

(6) 2 問正解する確率はいくらか。$\mathrm{P}(2) = \dfrac{{}_5C_2\ 3^3}{1024} = \dfrac{270}{1024} = \dfrac{135}{512}$

(7) 3 問以上正解する確率はいくらか。

$\mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(5) = \dfrac{90+15+1}{1024} = \dfrac{106}{1024} = \dfrac{53}{512}$

問題 6 a, b, c の 3 人の友達が久しぶりに会って、レストランで旧交を温めた。全員帽子をかぶってきて、入る時にレストランに預けた。ところが、お酒をしこたま飲んだために、へべれけに酔っぱらってしまい、帰る時になって、どれが自分の帽子か分からなくなってしまった。帽子のかぶり方の集合を Ω とする。そのうち、a が正しく自分の帽子をかぶっている全てのかぶり方の集合を A、b が正しく自分の帽子をかぶっている全てのかぶり方の集合を B、c が正しく自分の帽子をかぶっている全てのかぶり方集合を C と表す。

(1) 3 人が 3 つの帽子をかぶる方法 $|\Omega|$ は、全部で何通りあるか。$|\Omega| = 3! = 6$ 通り

(2) a が正しく自分の帽子をかぶっている場合のすべての集合、すなわち、$|A|$ はいくつか。$|A| = 2! = 2$ 通り

(3) a と b が正しく自分の帽子をかぶっている場合の数、すなわち、$|A \cap B|$ はいくつか。$|A \cap B| = 1! = 1$ 通り

(4) a と b と c が正しく自分の帽子をかぶっている場合の数、すなわち、$|A \cap B \cap C|$ はいくつか。
$|A \cap B \cap C| = 1$ 通り

(5) 3 人が全て他人の帽子をかぶる場合の数はいくらか。

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \\ &= 2 \times 3 - 1 \times 3 + 1 = 4, \\ \therefore \quad & |\Omega| - |A \cup B \cup C| = 6 - 4 = 2 \text{ 通り} \end{aligned}$$

(6) 3 人が全て他人の帽子をかぶる確率を求めよ。$\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$