ベイズ推定 (Bayesian Inference)

1 ベイズの定理

ベイズの定理は、

$$\mathrm{P}(A_i|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_i)\mathrm{P}(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

と書ける。

この公式を確率関数に含まれるパラメータ θ_i の決定に用いる。すなわち、事象 A_i の確率 $\mathrm{P}(A_i)$ の代わりに θ_i の確率 $\pi(\theta_i)$ を考える。パラメータが値 θ_i を取るときに事象 x が起こる確率を $f(x|\theta_i)$ で表す。すると、事象 x が起こったことが分かったときのパラメータ θ_i の確率 $\mathrm{P}(\theta_1|x)$ は、

$$\text{は}\pi(\theta_i|x) = \frac{f(x|\theta_i)\pi(\theta_i)}{\sum_{k=1}^{n} f(x|\theta_k)\pi(\theta_k)}$$

で与えられる。θ が連続の場合には、

$$\pi(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\int f(x|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

となる。$f(x|\theta)$ を尤度関数と呼ぶ。

2 二項分布またはベータ分布における p の推定

例として、硬貨投げ (coin flipping) を考えよう。硬貨を放り投げたときに、表（Heads - H）が出る確率 p の取る値を θ とすると、裏 (Tails - T) の出る確率は $1-\theta$ である。すなわち、1 回目に表または裏が出る確率は、各々、

$$\begin{aligned} f(H_1|\theta) &= \theta \\ f(T_1|\theta) &= 1-\theta \end{aligned}$$

となる。硬貨を投げる前は、θ は、0 から 1 のどの値も同様に確からしいとする。

$$\pi(\theta) = 1$$

すると、表または裏が出たと分かった時の θ の確率分布は、

$$\pi(\theta|H_1) = \frac{\theta \times 1}{\int_0^1 \theta \times 1\, d\theta} = 2\theta \tag{1}$$

$$\pi(\theta|T_1) = \frac{(1-\theta) \times 1}{\int_0^1 (1-\theta) \times 1\, d\theta} = 2(1-\theta) \tag{2}$$

1 回目にコインの表 (H) が出た場合には、$\pi(\theta|H) = 2\theta$ を新たな事前確率分布として 2 回目のコイン投げを行う。すると、

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|H_2H_1) &= \frac{\theta \times 2\theta}{\int_0^1 \theta \times 2\theta \, d\theta} = 3\theta^2 \\
\pi(\theta|T_2H_1) &= \frac{(1-\theta) \times 2\theta}{\int_0^1 (1-\theta) \times 2\theta \, d\theta} = 6\theta(1-\theta)
\end{aligned}$$

1 回目にコインの裏 (T) が出た場合には、$\pi(\theta|T) = 2(1-\theta)$ を新たな事前確率分布として 2 回目のコイン投げを行うと、

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|H_2T_1) &= \frac{\theta \times 2(1-\theta)}{\int_0^1 \theta \times 2(1-\theta) \, d\theta} = 6\theta(1-\theta) \\
\pi(\theta|T_2T_1) &= \frac{(1-\theta) \times 2(1-\theta)}{\int_0^1 (1-\theta) \times 2(1-\theta) \, d\theta} = 3(1-\theta)^2
\end{aligned}$$

3 度目のコイン投げ

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|H_3H_2H_1) &= \frac{\theta \times 3\theta^2}{\int_0^1 \theta \times 3\theta^2 \, d\theta} = 4\theta^3 \\
\pi(\theta|T_3H_2H_1) &= \frac{(1-\theta) \times 3\theta^2}{\int_0^1 (1-\theta) \times 3\theta^2 \, d\theta} = 12\theta^2(1-\theta) \\
\pi(\theta|H_3T_2H_1) &= \frac{\theta \times 6\theta(1-\theta)}{\int_0^1 \theta \times 6\theta(1-\theta) \, d\theta} = 12\theta^2(1-\theta) \\
\pi(\theta|T_3T_2H_1) &= \frac{(1-\theta) \times 6\theta(1-\theta)}{\int_0^1 (1-\theta) \times 6\theta(1-\theta) \, d\theta} = 12\theta(1-\theta)^2 \\
\pi(\theta|H_3H_2T_1) &= \frac{\theta \times 6\theta(1-\theta)}{\int_0^1 \theta \times 6\theta(1-\theta) \, d\theta} = 12\theta^2(1-\theta) \\
\pi(\theta|T_3H_2T_1) &= \frac{(1-\theta) \times 6\theta(1-\theta)}{\int_0^1 (1-\theta) \times 6\theta(1-\theta) \, d\theta} = 12\theta(1-\theta)^2 \\
\pi(\theta|H_3T_2T_1) &= \frac{\theta \times 3(1-\theta)^2}{\int_0^1 \theta \times 3(1-\theta)^2 \, d\theta} = 12\theta(1-\theta)^2 \\
\pi(\theta|T_3T_2T_1) &= \frac{(1-\theta) \times 3(1-\theta)^2}{\int_0^1 (1-\theta) \times 3(1-\theta)^2 \, d\theta} = 4(1-\theta)^3
\end{aligned}$$

一般に、コインを n 回投げた場合、順序は問わずに表が α 回、裏が β 回出たとすると、一回の試行で表が出る確率 p の値の確率分布は、 ベータ分布

$$f(x; m, n) = \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)} x^{m-1}(1-x)^{n-1}$$

を用いて、

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|\text{表の出た回数} = \alpha\text{、裏の出た回数} = \beta) &= f(\theta;\ \alpha+1,\ \beta+1) \\
&= \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!}\,\theta^{\alpha}(1-\theta)^{\beta}
\end{aligned}$$

と表されることが分かる。

θ の平均値

$$\begin{aligned} E(\theta) &= \int_0^1 \theta f(\theta;\ \alpha+1, \beta+1)\, d\theta \\ &= \frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!} \int_0^1 \theta^{\alpha+1}(1-\theta)^\beta\, d\theta \end{aligned}$$

を計算すれば良い。積分は部分積分法を用いる。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \theta^{\alpha+1}(1-\theta)^\beta\, d\theta &= \frac{1}{\alpha+2}\int_0^1 \left(\frac{d}{d\theta}\theta^{\alpha+2}\right)(1-\theta)^\beta\, d\theta \\ &= \frac{1}{\alpha+2}\left\{ \theta^{\alpha+2}(1-\theta)^\beta \Big|_0^1 + \beta\int_0^1 \theta^{\alpha+2}(1-\theta)^{\beta-1}\, d\theta \right\} \\ &= \frac{\beta}{\alpha+2}\int_0^1 \theta^{\alpha+2}(1-\theta)^{\beta-1}\, d\theta \\ &= \frac{\beta(\beta-1)\cdots 1}{(\alpha+2)(\alpha+3)\cdots(\alpha+\beta+1)}\int_0^1 \theta^{\alpha+\beta+1}\, d\theta \\ &= \frac{\beta(\beta-1)\cdots 1}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+2)} \\ &= \frac{(\alpha+1)!\,\beta!}{(\alpha+\beta+2)!} \end{aligned}$$

となるので、

$$E(\theta) = \frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2}$$

を得る。

θ の最尤推定

$$\frac{d}{d\theta}\left\{\frac{(\alpha+\beta+1)!}{\alpha!\,\beta!}\,\theta^\alpha(1-\theta)^\beta\right\} = 0 \text{ より、} \theta = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

3 正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ における平均 μ の推定

正規母集団 $N(\mu,\ \sigma^2)$ から n コのデータ $\boldsymbol{x} = \{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$ を取り出した場合、その尤度は、

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}|\theta) &= f(x_n|\theta)f(x_{n-1}|\theta)\ \cdots\ f(x_1|\theta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\sigma^2}\right)^n}\exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

ここで、$\bar{x}_n = \dfrac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ を導入すると、

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2 &= \sum_{i=1}^n \left[(x_i-\bar{x}_n)-(\bar{x}_n-\theta)\right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left[(x_i-\bar{x}_n)^2 - 2(\bar{x}-\theta)(x_i-\bar{x}_n) + (\bar{x}_n-\theta)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^n (x_i-\bar{x}_n)^2 + n(\bar{x}_n-\theta)^2
\end{aligned}$$

となるので、

$$f(\boldsymbol{x}|\theta) \propto \exp\left\{-\frac{(\bar{x}_n-\theta)^2}{2\sigma^2/n}\right\}$$

したがって、θ の事後分布は、

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \exp\left\{-\frac{(\theta-\bar{x}_n)^2}{2\sigma^2/n}\right\}\pi(\theta)$$

となる。

ここで、θ の事前分布 $\pi(\theta)$ を、平均 θ_0、分散 σ_0^2 の正規分布

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}}\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$$

に選ぶと、

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \exp\left\{-\frac{(\theta-\bar{x}_n)^2}{2\sigma^2/n}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2\sigma_0^2}\right\}$$

ところで、

$$\begin{aligned}
\frac{(\theta-\bar{x}_n)^2}{\sigma^2/n} + \frac{(\theta-\theta_0)^2}{\sigma_0^2} &= \frac{n}{\sigma^2}\left(\theta^2 - 2\bar{x}_n\theta + \bar{x}_n^2\right) + \frac{1}{\sigma_0^2}\left(\theta^2 - 2\theta_0\theta + \theta_0^2\right) \\
&= \left(\frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\theta^2 - 2\left(\frac{n\bar{x}_n}{\sigma^2}+\frac{\theta_0}{\sigma_0^2}\right)\theta + \left(\frac{n\bar{x}_n^2}{\sigma^2}+\frac{\theta_0^2}{\sigma_0^2}\right)
\end{aligned}$$

なので、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_n^2} &= \frac{n}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_0^2} \\
\frac{\theta_n}{\sigma_n^2} &= \frac{n\bar{x}_n}{\sigma^2}+\frac{\theta_0}{\sigma_0^2}
\end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
\frac{(\theta-\bar{x})^2}{\sigma^2/n} + \frac{(\theta-\theta_0)^2}{\sigma_0^2} &= \frac{1}{\sigma_n^2}\theta^2 - 2\frac{\theta_n}{\sigma_n^2}\theta + \cdots \\
&= \frac{(\theta-\theta_n)^2}{\sigma_n^2} + \cdots
\end{aligned}$$

となるので、

$$\pi(\theta|\boldsymbol{x}) \propto \exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \tag{3}$$

である。

さらに新しいデータ x_{n+1} が得られたとすると、今度は (3) 式を事前分布として θ の事後分布を求めると、

$$\begin{aligned}\pi(\theta|x_{n+1}) &\propto \exp\left\{-\frac{(x_{n+1}-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}\cdot\exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_n)^2}{2\sigma_n^2}\right\} \\ &\propto \exp\left\{-\frac{(\theta-\theta_{n+1})^2}{2\sigma_{n+1}^2}\right\}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sigma_{n+1}^2} &= \frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\sigma_n^2} \\ \frac{\theta_{n+1}}{\sigma_{n+1}^2} &= \frac{x_{n+1}}{\sigma^2}+\frac{\theta_n}{\sigma_n^2}\end{aligned}$$

または、

$$\theta_{n+1}=\frac{\sigma_n^2x_{n+1}+\sigma^2\theta_n}{\sigma_n^2+\sigma^2}$$

を得る。

4 カルマンフィルター (Kalman Filter)

4.1 導出-その 1

時刻 t における状態を $x(t)$、観測値を $y(t)$ と置く。ここでは、簡単のために $x(t)$ と $y(t)$ はスカラーとする。また、時刻 1 における観測値 $y(1)$ から時刻 t における観測値 $y(t)$ までを用いた後の状態 $x(t)$ の推定値 (期待値、または、平均値) を $\hat{x}(t)$ と書く。状態 $x(t)$ は推定値 $\hat{x}(t)$ を中心とする分散 $\sigma_a(t)^2$ の正規分布に従うとする。ここで、サフィックス a は、観測値 $y(t)$ が求まった後 (after) であることを表す。

$$\mathrm{P}\left(x(t)|\hat{x}(t)\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(t)}}\exp\left\{-\frac{\left(x(t)-\hat{x}(t)\right)^2}{2\sigma_a^2(t)}\right\} \tag{4}$$

すなわち、

$y(t)$ を用いて推定した $x(t): N\left(\hat{x}(t),\ \sigma_a(t)\right)$ に従う

これを、

$$x(t)=\hat{x}(t)+v_a(t)$$

とも書くことにしよう。

状態方程式を

$$x(t)=Gx(t-1)+w(t) \tag{5}$$

とする。簡単のため G は時間に依存しない定数とする。$w(t)$ は、平均 0、分散 $\sigma_w^2(t)$ の正規分布に従うとする。すなわち、

$$w(t): N\left(0,\ \sigma_w(t)\right) \text{ に従うシステム雑音} \tag{6}$$

言い換えると、

$$
\mathrm{P}\left(x(t)|Gx(t-1)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2(t)}}\exp\left\{\frac{\left(x(t)-Gx(t-1)\right)^2}{2\sigma_w^2(t)}\right\} \tag{7}
$$

である。

時刻 $t-1$ に置ける状態の推定値 $\hat{x}(t-1)$ から状態方程式 (5) を用いて推定した時刻 t の状態を $\hat{x}^{-}(t)$ で表すと、

$$
\hat{x}^{-}(t) = G\hat{x}(t-1) \tag{8}
$$

$\hat{x}^{-}(t)$ は、観測値 $y(t)$ を利用する前の $x(t)$ の推定値である。この時、$x(t)$ の確率分布は、平均が $\hat{x}^{-}(t)$ で分散が $\sigma_b^2(t)$ の正規分布に従うとする。分散にサフィックス b を付けたのは、時刻 t における観測 $y(t)$ はまだ使われていない事を表す。

$$
\mathrm{P}\big(x(t)|\hat{x}^{-}(t)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2(t)}}\exp\left\{-\frac{\big(x(t)-\hat{x}^{-}(t)\big)^2}{2\sigma_b^2(t)}\right\} \tag{9}
$$

または、

$$
x(t) = \hat{x}^{-}(t) + v_b(t)
$$

である。すると、

$$
\begin{aligned}
x(t) &= Gx(t-1) + v_w(t) \\
&= G\left(\hat{x}(t-1) + v_a(t-1)\right) + v_w(t) \\
&= G\hat{x}(t-1) + Gv_a(t-1) + v_w(t) \\
&= G\hat{x}(t-1) + v_b(t)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
v_b(t) = Gv_a(t-1) + v_w(t) \tag{10}
$$

が成り立つ。これは、

$$
\sigma_b^2(t) = G^2\sigma_a^2(t-1) + \sigma_w^2(t) \tag{11}
$$

が成り立つことを意味する。

---

(10) 式から (11) 式が導かれることを証明する。

簡単のために、

$$
\begin{aligned}
Z &= v_b(t), & \sigma_Z^2 &= \sigma_b^2(t) \\
X &= Gv_a(t-1), & \sigma_X^2 &= G^2\sigma_a^2(t-1) \\
Y &= v_w(t), & \sigma_Y^2 &= \sigma_w^2(t)
\end{aligned}
$$

とおく。ここで、X と Y は独立である。

関係式 $Z=X+Y$ より、

$$\mathrm{P_Z}(Z)=\int\delta(Z-X-Y)\mathrm{P_X}(X)\mathrm{P_Y}(Y)\,dXdY \tag{12}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}
\sigma_Z^2 &= \int Z^2\mathrm{P_Z}(Z)\,dZ \\
&= \int Z^2\delta(Z-X-Y)\mathrm{P_X}(X)\mathrm{P_Y}(Y)\,dXdYdZ \\
&= \int(X+Y)^2\mathrm{P_X}(X)\mathrm{P_Y}(Y)\,dXdY \\
&= \int(X^2+2XY+Y^2)\mathrm{P_X}(X)\mathrm{P_Y}(Y)\,dXdY \\
&= \int X^2\mathrm{P_X}(X)\,dX+2\int X\mathrm{P_X}(X)\,dX\int Y\mathrm{P_Y}(Y)\,dY+\int Y^2\mathrm{P_Y}(Y)\,dY
\end{aligned}$$

ところが、

$$\int X\mathrm{P_X}(X)\,dX=\int Y\mathrm{P_Y}(Y)\,dY=0$$

なので、

$$\sigma_Z^2=\sigma_X^2+\sigma_Y^2$$

を、すなわち、(11) 式を得る。

観測方程式を

$$y(t)=F_tx(t)+v(t) \tag{13}$$

ここで、

$$v(t)\ \ :\ \ N\left(0,\ \sigma_v^2(t)\right) \tag{14}$$

とする。

$\hat{x}^-(t)$ から予測した $y(t)$ を $\hat{y}^-(t)$ と書こう。これは (13) 式を用いると、

$$\hat{y}^-(t)=F_t\hat{x}^-(t)=F_tG\hat{x}(t-1) \tag{15}$$

となる。実際の観測量 $y(t)$ から $\hat{y}^-(t)$ を引いた量 $e(t)$ を定義する。

$$\begin{aligned}
e(t) &= y(t)-\hat{y}^-(t) && (16)\\
&= F_t\left(x(t)-\hat{x}^-(t)\right)+v(t) && (17)
\end{aligned}$$

これをイノベーションという。これは、平均が $F_t\left(x(t)-G\hat{x}(t-1)\right)$、分散が $\sigma_v^2(t)$ の正規分布にしたがう。

ここで、

$$e'(t)=\frac{e(t)}{F_t}+\hat{x}^-(t) \tag{18}$$

とおくと、

$$e'(t) = x(t) + \frac{v(t)}{F_t}$$

となる。これは、平均が $x(t)$、分散が $\sigma_v^2(t)/F_t^2$ の積分布に従う。すなわち、

$$\mathrm{P}\big(e'(t)|x(t)\big) = \sqrt{\frac{F_t^2}{2\pi\sigma_v^2(t)}} \exp\left\{-\frac{F_t^2}{2\sigma_v^2(t)}\big(e'(t) - x(t)\big)^2\right\} \tag{19}$$

となる。

$$\mathrm{P}\big(e'(t)|\hat{x}^-(t)\big) = \int \mathrm{P}\big(e'(t)|x(t)\big)\mathrm{P}\big(x(t)|\hat{x}^-(t)\big)\, dx(t) \tag{20}$$

に (9) 式と (19) 式を代入することにより、$e'(t)$ が与えられたときの、$x(t)$ の事後分布は、

$$\mathrm{P}\big(x(t)|e'(t), \hat{x}^-(t)\big) \propto \exp\left\{-\frac{F_t^2}{2\sigma_v^2(t)}\big(e'(t) - x(t)\big)^2\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{\big(x(t) - \hat{x}^-(t)\big)^2}{2\sigma_b^2(t)}\right\} \tag{21}$$

そこで、$\mathrm{P}\big(x(t)|e'(t), \hat{x}^-(t)\big)$ を $\mathrm{P}\big(x(t)|\hat{x}(t)\big)$ と書くことにすると、これは、

$$\mathrm{P}\big(x(t)|\hat{x}(t)\big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(t)}} \exp\left\{-\frac{\big((x(t) - \hat{x}(t)\big)^2}{2\sigma_a^2(t)}\right\} \tag{22}$$

と表される。ここで、

$$\frac{1}{\sigma_a^2(t)} = \frac{F_t^2}{\sigma_v^2(t)} + \frac{1}{\sigma_b^2(t)} \tag{23}$$

$$\frac{\hat{x}(t)}{\sigma_a^2(t)} = \frac{F_t^2 e'(t)}{\sigma_v^2(t)} + \frac{\hat{x}^-(t)}{\sigma_b^2(t)} \tag{24}$$

である。

すなわち、(23) 式より、

$$\sigma_a^2(t) = \frac{\sigma_b^2(t)\sigma_v^2(t)}{F_t^2\sigma_b^2(t) + \sigma_v^2(t)} \tag{25}$$

また、(11) 式より、

$$\sigma_b^2(t) = G^2\sigma_a^2(t-1) + \sigma_w^2(t)$$

である。

また、(24) 式 に (18) 式を代入し (23)，(25) 式を用いると、

$$\begin{aligned}
\hat{x}(t) &= \sigma_a^2(t)\left\{\frac{F_t^2}{\sigma_v^2(t)}\left(\frac{e(t)}{F_t} + \hat{x}^-(t)\right) + \frac{G\hat{x}(t-1)}{\sigma_b^2(t)}\right\} \\
&= \sigma_a^2(t)\left\{\frac{F_t^2}{\sigma_v^2(t)} + \frac{1}{\sigma_b^2(t)}\right\}\hat{x}^-(t) + \frac{F_t\sigma_a^2(t)}{\sigma_v^2(t)}\, e(t) \\
&= \hat{x}^-(t) + \frac{F_t\sigma_b^2(t)}{F_t^2\sigma_b^2(t) + \sigma_v^2(t)}\, e(t)
\end{aligned}$$

を得る。

さらに、この状態推定値 $\hat{x}(t)$ をイノベーションの (16) 式を用いて書き改めると、

$$\hat{x}(t) = \hat{x}^-(t) + K(t)\big(y(t) - \hat{y}^-(t)\big) \tag{26}$$

となる。ここで、

$$K(t) = \frac{F_t\sigma_b^2(t)}{F_t^2\sigma_b^2(t) + \sigma_v^2(t)} \tag{27}$$

をカルマンゲイン (Kalman gain) という。

4.2 導出-その 2

時刻 t における状態の推定値 $\hat{x}(t)$ は、(26) 式のように書けると考えるのは自然である。そこで、(26) 式から出発して、(4) 式で定義した

$$\sigma_a^2(t) = E\Big[\big(x(t) - \hat{x}(t)\big)^2\Big] \tag{28}$$

を最小にするという条件から $K(t)$ を決定しよう。

$x(t) - \hat{x}(t)$ を (13)，(15) 式を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned} x(t) - \hat{x}(t) &= x(t) - \Big(\hat{x}^-(t) + K(t)\big(y(t) - \hat{y}^-(t)\big)\Big) &(29)\\ &= \big(x(t) - \hat{x}^-(t)\big) - K(t)\big(F_t x(t) + v(t) - F_t G\hat{x}(t-1)\big) &(30)\\ &= (1 - K(t)F_t)\big(x(t) - \hat{x}^-(t)\big) - K(t)v(t) &(31)\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \sigma_a^2(t) &= E\Big[\big(x(t) - \hat{x}(t)\big)^2\Big] \\ &= (1 - K(t)F_t)^2 E\Big[\big(x(t) - \hat{x}^-(t)\big)^2\Big] + K^2(t)E\Big[v^2(t)\Big] &(32)\end{aligned}$$

を得る。(9) 式および (14) より、

$$\begin{aligned} E\Big[\big(x(t) - \hat{x}^-(t)\big)^2\Big] &= \sigma_b^2(t) \\ E\Big[v^2(t)\Big] &= \sigma_v^2(t)\end{aligned}$$

なので、(32) 式は、

$$\sigma_a^2 = (1 - K(t)F_t)^2\sigma_b^2 + K^2(t)\sigma_v^2(t) \tag{33}$$

となる。

この式を　$K(t)$ で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_a^2}{dK(t)} &= -2F_t(1 - K(t)F_t)\sigma_b^2(t) + 2K(t)\sigma_v^2(t) \\ &= -2F_t\sigma_b^2(t) + 2K(t)\left(F_t^2\sigma_b^2(t) + \sigma_v^2(t)\right)\end{aligned}$$

この式を 0 とおくと、

$$K(t) = \frac{F_t\sigma_b^2(t)}{F_t^2\sigma_b^2(t) + \sigma_v^2(t)}$$

を得る。

4.3　例　1次元ランダムウォーク (1-D Random Walk)

時刻 t における粒子の位置を x_t と書く。最初 $(t=0)$ の粒子の位置を測定した結果を y_0 する。測定は誤差を含むので、実際の位置 x_0 は、推定値 $\hat{x}_0 = y_0$ を中心とする正規分布で与えられる。

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(x_0|y_0) &= \mathrm{P}(x_0|\hat{x}_0) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}}\exp\left\{-\frac{(x_0-\hat{x}_0)^2}{2\sigma_v^2}\right\}\end{aligned} \tag{34}$$

これを、

$$y_0 = x_0 + v, \qquad v \sim N\big(0,\ \sigma_v^2\big)$$

と書こう。

単位時間経過後の粒子の位置 x_1 は、x_0 を中心とする正規分布

$$x_1 = x_0 + w, \qquad w \sim N\big(0,\ \sigma_w^2\big)$$

で与えられる。すなわち、

$$\mathrm{P}(x_1|x_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}}\exp\left\{-\frac{(x_1-x_0)^2}{2\sigma_w^2}\right\} \tag{35}$$

となるので、実際の位置は、

$$\mathrm{P}(x_1|\hat{x}_0) = \int \mathrm{P}(x_1|x_0)\mathrm{P}(x_0|\hat{x}_0)\,dx_0 \tag{36}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}}\int \exp\left\{-\frac{(x_1-x_0)^2}{2\sigma_w^2} - \frac{(x_0-\hat{x}_0)^2}{2\sigma_v^2}\right\}dx_0 \tag{37}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\big(\sigma_w^2+\sigma_v^2\big)}}\exp\left\{-\frac{(x_1-\hat{x}_0)^2}{2\big(\sigma_w^2+\sigma_v^2\big)}\right\} \tag{38}$$

で与えられる。 ここで、新しい記号

$$\sigma_b^2(1) = \sigma_w^2 + \sigma_v^2 \tag{39}$$

を導入すると、上の (38) 式は、

$$\mathrm{P}(x_1|\hat{x}_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2(1)}}\exp\left\{-\frac{(x_1-\hat{x}_0)^2}{2\sigma_b^2(1)}\right\} \tag{40}$$

と書くことができる。

時刻 $t=1$ のときに、この粒子の位置を観測したところ、y_1 であることが分かったとしよう。粒子の位置が x_1 であった時に観測値が y_1 である確率は、

$$\mathrm{P}(y_1|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}}\exp\left\{-\frac{(y_1-x_1)^2}{2\sigma_v^2}\right\} \tag{41}$$

従って、

$$\mathrm{P}(y_1|\hat{x}_0) = \int \mathrm{P}(y_1|x_1)\mathrm{P}(x_1|\hat{x}_0)\,dx_1$$

を得る。ゆえに、観測値 y_1 が得られたときに x_1 の事後分布は、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x_1|\hat{x}_0, y_1) &\propto \mathrm{P}(y_1|x_1)\mathrm{P}(x_1|\hat{x}_0) && (42) \\ &\propto \exp\left\{-\frac{(y_1-x_1)^2}{2\sigma_v^2}\right\} \times \exp\left\{-\frac{(x_1-\hat{x}_0)^2}{2\sigma_b^2(1)}\right\} && (43) \end{aligned}$$

で与えられる。すなわち、

$$\mathrm{P}(x_1|\hat{x}_0, y_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(1)}} \exp\left\{-\frac{(x_1-\hat{x}_1)^2}{2\sigma_a^2(1)}\right\} = \mathrm{P}(x_1|\hat{x}_1) \tag{44}$$

を得る。ここに、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma_a^2(1)} &= \frac{1}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_b^2(1)} && (45) \\ \frac{\hat{x}_1}{\sigma_a^2(1)} &= \frac{y_1}{\sigma_v^2} + \frac{\hat{x}_0}{\sigma_b^2(1)} && (46) \end{aligned}$$

である。

イノベーションを $e_1 = y_1 - \hat{x}_0$ で定義して、(46) 式の $\hat{x}_1$ を書き直すと、

$$\hat{x}_1 = \sigma_a^2(1)\left\{\frac{\hat{x}_0 + e_1}{\sigma_v^2} + \frac{\hat{x}_0}{\sigma_b^2(1)}\right\}$$

より

$$\hat{x}_1 = \hat{x}_0 + \frac{\sigma_b^2(1)}{\sigma_b^2(1) + \sigma_v^2}\, e_1 \tag{47}$$

を得る。

カルマンゲインは、

$$K = \frac{\sigma_b^2(1)}{\sigma_b^2(1) + \sigma_v^2}$$

となる。

次に、$t = 2$ の場合に進もう。(34) 式の代わりに (44) を用い、(35) 式を

$$\mathrm{P}(x_2|x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left\{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2\sigma_w^2}\right\} \tag{48}$$

で置き換えると、

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(x_2|\hat{x}_1) &= \int \mathrm{P}(x_2|x_1)\mathrm{P}(x_1|\hat{x}_1)\, dx_1 && (49) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2(2)}} \exp\left\{-\frac{(x_2-\hat{x}_1)^2}{2\sigma_b^2(2)}\right\} && (50) \\ & && (51) \end{aligned}$$

で与えられる。 ここで、

$$\sigma_b^2(2) = \sigma_w^2 + \sigma_a^2(1) \tag{52}$$

である。また、

$$\mathrm{P}(y_2|\hat{x}_1) = \int \mathrm{P}(y_2|x_2)\mathrm{P}(x_2|\hat{x}_1)\, dx_2$$

だから、観測値 y_2 が得られたときに x_2 の事後分布は、

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x_2|\hat{x}_1, y_2) &\propto \mathrm{P}(y_2|x_2)\mathrm{P}(x_2|\hat{x}_1) && (53)\\
&\propto \exp\left\{-\frac{(y_2 - x_2)^2}{2\sigma_v^2}\right\} \times \exp\left\{-\frac{(x_2 - \hat{x}_1)^2}{2\sigma_b^2(2)}\right\} && (54)\\
& && (55)
\end{aligned}$$

で与えられる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x_2|\hat{x}_1, y_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(2)}} \exp\left\{-\frac{(x_2 - \hat{x}_2)^2}{2\sigma_a^2(2)}\right\} && (56)\\
&= \mathrm{P}(x_2|\hat{x}_2) && (57)
\end{aligned}$$

と書くことにすると、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_a^2(2)} &= \frac{1}{\sigma_v^2} + \frac{1}{\sigma_b^2(2)} && (58)\\
\frac{\hat{x}_2}{\sigma_a^2(2)} &= \frac{y_2}{\sigma_v^2} + \frac{\hat{x}_1}{\sigma_b^2(2)} && (59)
\end{aligned}$$

となる。

イノベーション $e_2 = y_2 - \hat{x}_1$ を用いて、(59) 式の $\hat{x}_2$ を書き直すと、

$$\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + \frac{\sigma_b^2(2)}{\sigma_b^2(2) + \sigma_v^2}\, e_1 \tag{60}$$

を得る。

カルマンゲインは、

$$K = \frac{\sigma_b^2(2)}{\sigma_b^2(2) + \sigma_v^2}$$

となる。

一般に任意の t の場合には、

$$\begin{aligned}
x_t &= x_{t-1} + w, \quad w \sim N\big(0,\ \sigma_w^2\big) && (61)\\
y_t &= x_t + v, \qquad v \sim N\big(0,\ \sigma_v^2\big) && (62)
\end{aligned}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
P(x_{t+1}|x_t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left\{-\frac{(x_{t+1} - x_t)^2}{2\sigma_w^2}\right\} && (63)\\
P(y_t|x_t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_v^2}} \exp\left\{-\frac{(y_t - x_t)^2}{2\sigma_v^2}\right\} && (64)\\
& && (65)
\end{aligned}$$

さらに、

$$\mathrm{P}(x_t|\hat{x}_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(t)}} \exp\left\{-\frac{(x_t - \hat{x}_t)^2}{2\sigma_a^2(t)}\right\} \tag{66}$$

と書くことにすると、単位時間が経過したあとの粒子の位置 x_{t+1} は、

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x_{t+1}|\hat{x}_t) &= \int \mathrm{P}(x_{t+1}|x_t))\mathrm{P}(x_t|\hat{x}_t)\,dx_t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(t)}}\int \exp\left\{-\frac{(x_{t+1}-x_t)^2}{2\sigma_w^2}-\frac{(x_t-\hat{x}_t)^2}{2\sigma_a^2(t)}\right\}dx_t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\big(\sigma_w^2+\sigma_a^2(t)\big)}}\exp\left\{-\frac{(x_{t+1}-\hat{x}_t)^2}{2\big(\sigma_w^2+\sigma_a^2(t)\big)}\right\} \qquad (67)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\sigma_b^2(t+1)=\sigma_w^2+\sigma_a^2(t) \qquad (68)$$

とおくと、(67) 式は、

$$\mathrm{P}(x_{t+1}|\hat{x}_t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_b^2(t+1)}}\exp\left\{-\frac{(x_{t+1}-\hat{x}_t)^2}{2\sigma_b^2(t+1)}\right\} \qquad (69)$$

と書けるので、

$$\mathrm{P}(y_{t+1}|\hat{x}_t)=\int \mathrm{P}(y_{t+1}|x_{t+1})\mathrm{P}(x_{t+1}|\hat{x}_t)\,dx_{t+1}$$

となる。従って、

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x_{t+1}|\hat{x}_t,y_{t+1}) &\propto \mathrm{P}(y_{t+1}|x_{t+1})\mathrm{P}(x_{t+1}|\hat{x}_t) \\
&\propto \exp\left\{-\frac{(y_{t+1}-x_{t+1})^2}{2\sigma_v^2}\right\}\times\exp\left\{-\frac{(x_{t+1}-\hat{x}_t)^2}{2\sigma_b^2(t+1)}\right\} \qquad (70)
\end{aligned}$$

となる。すなわち、

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(x_{t+1}|\hat{x}_t,y_{t+1}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_a^2(t+1)}}\exp\left\{-\frac{(x_{t+1}-\hat{x}_{t+1})^2}{2\sigma_a^2(t+1)}\right\} \qquad (71) \\
&= \mathrm{P}(x_{t+1}|\hat{x}_{t+1}) \qquad (72)
\end{aligned}$$

を得る。ここで、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma_a^2(t+1)} &= \frac{1}{\sigma_v^2}+\frac{1}{\sigma_b^2(t+1)} \qquad (73) \\
\frac{\hat{x}_{t+1}}{\sigma_a^2(t+1)} &= \frac{y_{t+1}}{\sigma_v^2}+\frac{\hat{x}_t}{\sigma_b^2(t+1)} \qquad (74)
\end{aligned}$$

である。(73) 式より、

$$\sigma_a^2(t+1)=\frac{\sigma_v^2\ \sigma_b^2(t+1)}{\sigma_v^2+\sigma_b^2(t+1)} \qquad (75)$$

を得る。

イノベーションを、$e_{t+1}=y_{t+1}-\hat{x}_t$ とおくと、(74) 式の $\hat{x}_{t+1}$ は、

$$\hat{x}_{t+1}=\hat{x}_t+K(t)\ e_{t+1} \qquad (76)$$

となる。ここで、

$$K(t)=\frac{\sigma_b^2(t+1)}{\sigma_b^2(t+1)+\sigma_v^2} \qquad (77)$$

4.3.1　定常カルマンフィルター

定常状態では、$\sigma_a^2(t)$ も $\sigma_b^2(t)$ も時間に依らない定数となる。$\sigma_b^2(t) = p$ とおいて、(68) 式と (75) 式を書き直すと、

$$\begin{aligned} p &= \sigma_w^2 + \sigma_a^2 && (78) \\ \sigma_a^2 &= \frac{\sigma_v^2 p}{p + \sigma_v^2} && (79) \end{aligned}$$

これらの式から σ_a^2 を消去すると、

$$p^2 - \sigma_w^2 p - \sigma_v^2 \sigma_w^2 = 0 \tag{80}$$

を得る。この解は、$p > 0$ だから、

$$p = \frac{\sigma_w^2 + \sqrt{(\sigma_w^2)^2 + 4\sigma_v^2\sigma_w^2}}{2} \tag{81}$$

$\boldsymbol{\sigma_v^2 = 0}$ の場合

この場合は、$y_t = x_t$、すなわち、観測値は誤差を含まない。

$$\begin{aligned} \sigma_b^2 &= \sigma_w^2 && (82) \\ \sigma_a^2 &= 0 && (83) \end{aligned}$$

なので、$K = 1$ となり、

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + y_{t+1} - \hat{x}_t = y_{t+1} \tag{84}$$

すなわち、

$$\hat{x}_{t+1} = y_{t+1} \tag{85}$$

という全く自明の結果を得る。

$\boldsymbol{\sigma_w^2 = 1}$，$\boldsymbol{\sigma_v^2 = 2}$ の場合

(80) 式は、

$$p^2 - p - 2 = 0 \tag{86}$$

となり、$p = \sigma_b^2 = 2$ を得る。すると、$K = \dfrac{1}{2}$ となるので、

$$\hat{x}_{t+1} = \hat{x}_t + \frac{1}{2}(y_{t+1} - \hat{x}_t) \tag{87}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \hat{x}_{t+1} &= \frac{1}{2}(y_{t+1} + \hat{x}_t) && (88) \\ &= \frac{1}{2}y_{t+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (y_t + \hat{x}_{t-1}) && (89) \\ &= \frac{1}{2}y_{t+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 y_t + \left(\frac{1}{2}\right)^3 (y_{t-1} + \hat{x}_{t-2}) && (90) \\ &\cdots\cdots && (91) \\ &= \frac{1}{2}y_{t+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 y_t + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} (y_1 + \hat{x}_0) && (92) \\ &= \sum_{i=1}^{t} \left(\frac{1}{2}\right)^{t+2-i} y_i + \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1} \hat{x}_0 && (93) \end{aligned}$$

または、

$$\hat{x}_t = \sum_{i=1}^{t} \left(\frac{1}{2}\right)^{t+1-i} y_i + \left(\frac{1}{2}\right)^t \hat{x}_0 \tag{94}$$

を得る。