2019年度
CG基礎数学模擬試験問題解答

問 1. 次の値を求めよ。

(1) $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$　(2) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$　(3) $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$　(4) $\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$　(6) $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　(7) $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$　(8) $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

問 2. 2 次元座標系における変換について、次の問に答えよ。

(1) 点 $(x_P,\ y_P)$ を原点のまわりに角 θ だけ回転した点を $(x',\ y')$ とすると、$(x',\ y')$ は $(x_P,\ y_P)$ と θ を用いてどのように表されるか。　教科書 p.018 [3] 回転参照

$$\begin{aligned} x' &= x_P\cos\theta - y_P\sin\theta, \\ y' &= x_P\sin\theta + y_P\cos\theta \end{aligned}$$

(2) 点 $(x_P,\ y_P)$ を直線 $y = x$ に関して鏡映変換して得られる点を $(x',\ y')$ とすると、$(x',\ y')$ は $(x_P,\ y_P)$ を用いてどのように表されるか。
教科書 p.018 [4] 鏡映と p.019 1-3-3 合成変換とアフィン変換を参照

(a) 鏡映線 $y = x$ が y 軸に一致するように点 $(x_P,\ y_P)$ を原点 O のまわりに 45°回転させる。

$$\begin{aligned} x_R &= x_P\cos 45^\circ - y_P\sin 45^\circ = \frac{x_P - y_P}{\sqrt{2}} \\ y_R &= x_P\sin 45^\circ + y_P\cos 45^\circ = \frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(b) $(x_R,\ y_R)$ を y 軸に関する鏡映変換を行うと、$(x'_R,\ y'_R) = (-x_R,\ y_R)$ となる。すなわち、

$$\begin{aligned} x'_R &= -x_R = -\frac{x_P - y_P}{\sqrt{2}} \\ y'_R &= y_R = \frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(c) 鏡映軸が $y = x$ となるように、$(x'_R,\ y'_R)$ を原点 O のまわりに -45°回転する。

$$\begin{aligned} x' &= x'_R\cos(-45^\circ) - y'_R\sin(-45^\circ) \\ &= -\frac{x_P - y_P}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= y_P \\ y' &= x'_R\sin(-45^\circ) + y'_R\cos(-45^\circ) \\ &= -\frac{x_P - y_P}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x_P + y_P}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= x_P \end{aligned}$$

ゆえに、 $x' = y_P,\quad y' = x_P$ を得る。

(3) 点 $(x_P,\ y_P)$ を直線 $y=-x$ に関して鏡映変換して得られる点を $(x',\ y')$ とすると、$(x',\ y')$ は $(x_P,\ y_P)$ を用いてどのように表されるか。

(a) 鏡映線 $y=-x$ が y 軸に一致するように点 $(x_P,\ y_P)$ を原点 O のまわりに -45° 回転させる。

$$\begin{aligned} x_R &= x_P\cos(-45^\circ) - y_P\sin(-45^\circ) = \frac{x_P+y_P}{\sqrt{2}} \\ y_R &= x_P\sin(-45^\circ) + y_P\cos(-45^\circ) = \frac{-x_P+y_P}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(b) $(x_R,\ y_R)$ を y 軸に関する鏡映変換を行うと、$(x'_R,\ y'_R)=(-x_R,\ y_R)$ となる。すなわち、

$$\begin{aligned} x'_R &= -x_R = -\frac{x_P+y_P}{\sqrt{2}} \\ y'_R &= y_R = \frac{-x_P+y_P}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(c) 鏡映軸が $y=-x$ となるように、$(x'_R,\ y'_R)$ を原点 O のまわりに 45°回転する。

$$\begin{aligned} x' &= x'_R\cos 45^\circ - y'_R\sin 45^\circ \\ &= -\frac{x_P+y_P}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{-x_P+y_P}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -y_P \\ y' &= x'_R\sin 45^\circ + y'_R\cos 45^\circ \\ &= -\frac{x_P+y_P}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{-x_P+y_P}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= -x_P \end{aligned}$$

ゆえに、 $x'=-y_P,\qquad y'=-x_P$ を得る。

(4) 点 $(5,\ 0)$ を原点のまわりに 60°回転した点の座標を求めよ。
(3) において、$(x_P,\ y_P)=(5,\ 0),\ \ \theta=60^\circ$とおくと、

$$\begin{aligned} x' &= 5\cos 60^\circ - 0\sin 60^\circ = \frac{5}{2} \\ y' &= 5\sin 60^\circ + 0\cos 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ゆえに、$(x',\ y')=\left(\frac{5}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$

(5) 点 $(7,\ 1)$ を直線 $y=x$ に関して鏡映変換して得られる点の座標を求めよ。
$(x_P,\ y_P)=(7,\ 1)$ とする。 (4) より、 $(x',\ y')=(1,\ 7)$

(6) 点 $(4,\ 10)$ を点 $(2,\ 0)$ のまわりに 45°回転した点の座標を求めよ。

(a) 点 $(2,\ 0)$ が原点 O にくるように平行移動 $x_T=x-2,\ y_T=y$ をすると、点 $(4,\ 10)$ は、$(2,\ 10)$ に移る。

(b) 点 $(2,\ 10)$ を原点のまわりに 45°回転すると、

$$\begin{aligned} x_R &= 2\cos 45^\circ - 10\sin 45^\circ = -4\sqrt{2} \\ y_R &= 2\sin 45^\circ + 10\cos 45^\circ = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

(c) 原点 O が $(2,\ 0)$ となるように、平行移動 $x' = x_R + 2,\ y' = y_R$ を行うと、

$$\begin{aligned} x' &= x_R + 2 = 2 - 4\sqrt{2} \\ y' &= y_R = 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

ゆえに、$(x',\ y') = \left(2 - 4\sqrt{2},\ 6\sqrt{2}\right)$

問 3. 視点 C を原点とする左手座標系 $O - xyz$ を考え、平面 $z = f$ を投影面とする。投影面上の $O' - x'y'z'$ 座標系を座標中心 O' が z 軸との交点と一致し、座標軸 x', y' をそれぞれ x 軸, y 軸と平行となるように選ぶ。3 次元空間内の点 $(x_P,\ y_P,\ z_P)$ を投影面に投影したときの座標を $(x'_P,\ y'_P)$ として、以下の問に答えよ。
教科書 p.021 1-3-4 投影変換参照

(1) 視距離 $f = 40$ の場合、点 $(30,\ 20,\ 100)$ の投影面における座標 $(x'_P,\ y'_P)$ を求めよ。
$(x,\ y,\ z) = (30,\ 20,\ 100)$ とおくと、

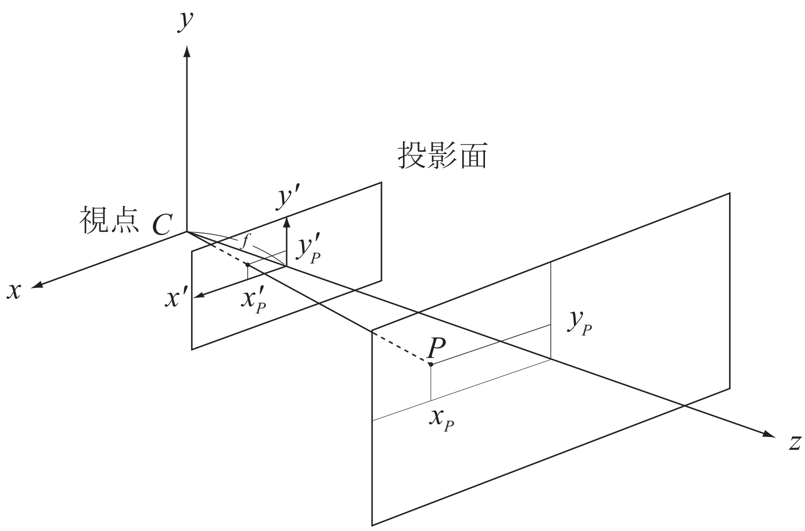
$$x'_P = \frac{f}{z} \cdot x, \qquad y'_P = \frac{f}{z} \cdot y$$

より、

$$x'_P = \frac{40}{100} \cdot 30 = 12, \qquad y'_P = \frac{40}{100} \cdot 20 = 8$$

ゆえに、$(x'_P,\ y'_P) = (12,\ 8)$

(2) 平行投影の場合、点 $(30,\ 20,\ 100)$ の投影面における座標 $(x'_P,\ y'_P)$ を求めよ。
平行投影においては、
$(x'_P,\ y'_P) = (x,\ y) = (30,\ 20)$



問 4. 各面が正三角形である正多面体の頂点、稜線、面の数を、それぞれ $v,\ e,\ f$ とし、一つの頂点には n コの面が集まるとする。多面体ができるためには、

[1] 1 つの頂点に集まる面の数は 3 以上である。

[2] 凸多面体の 1 つの頂点に集まる角の大きさの和は、360 °よりも小さい。

次の問に答えよ。

(1) [1] と [2] から n の下限と上限を求めよ。$3 \leqq n \leqq 5$

(2) $v,\ e,\ f$ の間には、どのような関係が成り立つか。$v - e + f = 2$

(3) e を f を用いて表せ。$e = \dfrac{3f}{2}$

(4) v を f と n を用いて表せ。$v = \dfrac{3f}{n}$

【注】$e = \dfrac{nv}{2}$ も成り立つので、これをオイラーの公式に代入すると、別解 $v = \dfrac{2(f-2)}{n-2}$ を得る。

(5) (2), (3) で得られた結果を (1) の式に代入し、f を n で表せ。

$\dfrac{3f}{n} - \dfrac{3f}{2} + f = 2$ より、$f = \dfrac{4n}{6-n}$

問 5. 次のようにパラメータ形式で表現された 2 次曲線を陰関数形式で表せ。

教科書 p.053 2-3 曲線・曲面 参照

(1) $x = a\cos\theta, \qquad y = b\sin\theta$

$$\frac{x}{a} = \cos\theta, \qquad \frac{y}{b} = \sin\theta \quad \cdots\cdots \quad (a)$$

(a) 式を、

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1 = 0$$

に代入すると、

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$ を得る。これは、楕円の式である。

(2) $x = \dfrac{a}{\cos\theta}, \qquad y = b\tan\theta$

$$\frac{x}{a} = \cos\theta, \qquad \frac{y}{b} = \tan\theta \quad \cdots\cdots \quad (b)$$

ところで、

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta - 1 = 0$$

を $\cos^2\theta$ で割ると、

$$1 + \tan^2\theta - \frac{1}{\cos^2\theta} = 0$$

または、

$$\frac{1}{\cos^2\theta} - \tan^2\theta - 1 = 0$$

この式に (b) 式を代入すると、$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ を得る。これは、双曲線の式である。

問 6. 極方程式 $r = \dfrac{4}{1+\cos\theta}$ を直交座標系に関する方程式で表せ。

与式より $r(1+\cos\theta) = 4$. $x = r\cos\theta$ だから、$r + x = 4$. すなわち、$r = 4 - x$.
この式の両辺を 2 乗して、$r^2 = x^2 + y^2$ を左辺に代入すると、
$x^2 + y^2 = 16 - 8x + x^2$, すなわち、$y^2 = -8x + 16$ または、$x = -\dfrac{y^2}{8} + 2$ を得る。

問 7. 次の文章を読み、$\boxed{}$ の中に、最も適当な言葉を入れよ。

平面内や空間内の位置を表すために、座標系が用いられる。よく用いられる座標系として $\boxed{\text{a}}$ がある。たとえば、平面における $\boxed{\text{a}}$ は、原点 O で互いに垂直に交わる 2 つの直線 x 軸と y 軸を用いて定義される。このとき、平面内の点の位置は、x 軸と y 軸に関する位置を示す数値の組 $(x,\ y)$ で表される。これに対し、点の位置を原点 O からの距離 r と基準の方向 (x 軸の正の方向) から反時計回りに測った回転角 θ の組 $(r,\ \theta)$ で表す方法が $\boxed{\text{b}}$ である。 p.013 1-2 座標系とモデリング参照

a. (2 次元) 直交座標系　　　*b.* 極座標系

問 8. 3 つの制御点を、$\vec{P}_0 = (0,\ 0)$, $\vec{P}_1 = (1,\ -1)$, $\vec{P}_2 = (2,\ 0)$ とする 2 次ベジエ曲線について以下の問に答えよ。

(1) 2 点 $\vec{P}_0$ と $\vec{P}_1$ を $t : (1-t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に内分する点を $\vec{P}_a = (x_a(t),\ y_a(t))$ とする。$x_a(t)$, $y_a(t)$ を t の関数として求めよ。

$$\vec{P}_a = (1-t)\vec{P}_0 + t\vec{P}_1$$

より、

$$(x_a(t),\ y_a(t)) = (1-t)(0,\ 0) + t(1,\ -1) = (t,\ -t)$$

ゆえに、$x_a(t) = t$, $y_a(t) = -t$

(2) 2 点 $\vec{P}_1$ と $\vec{P}_2$ を $t : (1-t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に内分する点を $\vec{P}_b = (x_b(t),\ y_b(t))$ とする。$x_b(t)$, $y_b(t)$ を t の関数として求めよ。

$$\vec{P}_b = (1-t)\vec{P}_1 + t\vec{P}_2$$

より、

$$(x_b(t),\ y_b(t)) = (1-t)(1,\ -1) + t(2,\ 0) = (1+t,\ -1+t)$$

ゆえに、$x_b(t) = 1 + t$, $y_b(t) = -1 + t$

(3) 2 点 $\vec{P}_a$ と $\vec{P}_b$ を $t:(1-t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ に内分する点を $\vec{P}_c = (x(t),\ y(t))$ とする。$x(t)$，$y(t)$ を t の関数として求めよ。

$$\vec{P}_c = (1-t)\vec{P}_a + t\vec{P}_b$$

より、

$$\begin{aligned}(x(t),\ y(t)) &= (1-t)(t,\ -t) + t(1+t,\ -1+t) \\ &= ((1-t)t + t(1+t),\ -(1-t)t + t(-1+t)) \\ &= (2t,\ -2t+2t^2)\end{aligned}$$

ゆえに、 $x(t) = 2t, \quad y(t) = -2t + 2t^2$

(4) 曲線 $\vec{P}_c = (x(t),\ y(t))$ を陽関数形式、すなわち、$y = f(x)$ の形で表せ。
$t = \dfrac{x}{2}$ を $y = -2t + 2t^2$ に代入して、$y = -x + \dfrac{1}{2}x^2$を得る。

問 9 下図の左はシェルピンスキーのガスケット (gasket - 詰め物) と呼ばれるものである。この図形は、下図右のように、正三角形の真ん中をくり抜く操作を無限回実行した極限として得られる。

(1) この図形を 2 倍に拡大すると、それは元の図形の何個分で構成されているか。 3 個

(2) この図形のフラクタル次元を求めよ。 $3 = 2^D$ より $D = \dfrac{\log 3}{\log 2} = 1.58496\cdots$