ブラウン運動 (Brownian motion)

1 微分方程式

ランダム・ウォークにおける一回の変化の幅を Δx、それに要する時間を Δt とする。1 回の歩みで、正の方向に進む確率を p、負の方向に進む確率を q とする。時刻 t に位置 x にいる確率を、$P(x,\ t)$ と書くと、漸化式は、

$$P(x,\ t+\Delta t) = qP(x+\Delta x,\ t) + pP(x-\Delta x,\ t) \tag{1}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
P(x,\ t+\Delta t) &\approx P(x,\ t) + \frac{\partial P(x,\ t)}{\partial t}\Delta t \\
P(x+\Delta x,\ t) &\approx P(x,\ t) + \frac{\partial P(x,\ t)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P(x,\ t)}{\partial x^2}\Delta x^2 \\
P(x-\Delta x,\ t) &\approx P(x,\ t) - \frac{\partial P(x,\ t)}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 P(x,\ t)}{\partial x^2}\Delta x^2
\end{aligned}$$

を代入すると、

$$\frac{\partial P(x,\ t)}{\partial t} = -\frac{(p-q)\Delta x}{\Delta t}\frac{\partial P(x,\ t)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2\Delta t}\frac{\partial^2 P(x,\ t)}{\partial x^2} \tag{2}$$

ここで、

$$2C = \frac{(p-q)\Delta x}{\Delta t}, \qquad D = \frac{\Delta x^2}{2\Delta t} \tag{3}$$

とおくと、

$$\frac{\partial P(x,\ t)}{\partial t} = -2C\frac{\partial P(x,\ t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2 P(x,\ t)}{\partial x^2} \tag{4}$$

ここで、$X = x - 2Ct$ とおき、

$$B(X,\ t) = P(x,\ t)$$

とおくと、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(x,\ t)}{\partial t} &= \frac{\partial B(X,\ t)}{\partial t} - 2C\frac{\partial B(X,\ t)}{\partial X} \\
\frac{\partial P(x,\ t)}{\partial x} &= \frac{\partial B(X,\ t)}{\partial X}
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{\partial B(X,\ t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 B(X,\ t)}{\partial X^2} \tag{5}$$

を得る。

拡散方程式の解法

(17) 式を解こう。

$$\begin{aligned} P(x,\ t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(k,t)e^{ikx}\,dk \\ F(k,\ t) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x,\ t)e^{-ikt}\,dx \end{aligned}$$

とおいて、(17) 式に代入すると、

$$\frac{\partial F(k,\ t)}{\partial t} = -2iCk\,F(k,\ t) - Dk^2F(k,\ t)$$

ゆえに、

$$F(k,\ t) = \phi(k)e^{-(2iCk+Dk^2)t}$$

初期条件を

$$P(x,\ 0) = \delta(x)$$

とおくと、

$$F(k,\ 0) = \phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)e^{-ikx}\,dx = 1$$

だから、

$$F(k,\ t) = e^{-(2iCk+Dk^2)t}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} P(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2iCk+Dk^2)t}e^{ikx}\,dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big[-Dtk^2 + i(x-2Ct)k\Big]\,dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-Dt\left(k^2 - i\frac{(x-2Ct)k}{Dt}\right)\right]dk \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-Dt\left(k - i\frac{(x-2Ct)}{2Dt}\right)^2 - \frac{(x-2Ct)^2}{4Dt}\right]dk \end{aligned}$$

ここで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-Dt\left(k - i\frac{(x-2Ct)}{2Dt}\right)^2\right]dk = \sqrt{\frac{\pi}{Dt}}$$

なので、結局、

$$P(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\left[-\frac{(x-2Ct)^2}{4Dt}\right] \tag{6}$$

を得る。

2 漸化式再び

最初、粒子は原点にいたとしよう。n ステップ後に $+$ の方向に x 回、$-$ 方向に $n-x$ 回進む確率は、

$$\mathrm{P}_n(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x}$$

で与えられ、その位置は、$X = (x-(n-x))\,\Delta x = (2x-n)\Delta x$ である。これを、二項係数の関係式を用いて書き直すと、

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n(x) &= \left\{{}_{n-1}C_{x-1} + {}_{n-1}C_x\right\} p^x q^{n-x} \\
&= p\cdot{}_{n-1}C_{x-1}p^{x-1}q^{(n-1)-(x-1)} + q\cdot{}_{n-1}C_x p^x q^{(n-1)-x} \\
&= p\mathrm{P}_{n-1}(x-1) + q\mathrm{P}_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

となる。これを、$n-1$ ステップ後の時刻を t、n ステップ後の時刻を $t+\Delta t$、とし、n の代わりに位置 $X=(2x-n)\Delta x$ にいる確率 $P(X,t)$ を用いて書き改めると、時刻 $t+\Delta t$ に X にいる確率は、

$$P_X(X,\ t+\Delta t) = qP_X(X+\Delta x,\ t) + pP_X(X-\Delta x,\ t) \tag{7}$$

を得る。したがって、n ステップ後の位置の期待値は、

$$\begin{aligned}
E(X) &= \Delta x\sum_{x=0}^{n}(2x-n)\ {}_nC_x p^x q^{n-x} \\
&= \Delta x\,(2np-n)
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$E(X) = n\Delta x(p-q)$$

分散は、

$$\begin{aligned}
V(X) &= \Delta x^2\sum_{x=0}^{n}(2x-n)^2\ {}_nC_x p^x q^{n-x} - n^2\Delta x^2(p-q)^2 \\
&= \Delta x^2\left(\sum_{x=0}^{n}(4x^2-4nx+n^2)\ {}_nC_x p^x q^{n-x} - n^2(p-q)^2\right) \\
&= \Delta x^2\left(4n^2p^2+4npq-4n^2p+n^2-n^2(p-q)^2\right) \\
&= \Delta x^2\left(n^2\left(4p^2-4p+1-(p-q)^2\right)+4npq\right) \\
&= \Delta x^2\left(n^2\left(-4pq+(p+q)^2-(p-q)^2\right)+4npq\right)
\end{aligned}$$

ここで、

$$\sum_{x=0}^{n}x^2\ {}_nC_x p^x q^{n-x} = n^2p^2+npq$$

を用いた。ゆえに、

$$V(X) = 4n\Delta x^2 pq$$

ここで、n ステップまでの時間経過を t と置くと、あるステップでの変化の幅が Δx で、それから次のステップまでに要する時間は Δt だから、

$$n = \frac{t}{\Delta t}$$

すると、

$$\begin{aligned} E(X) &= (p-q)t\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (8) \\ V(X) &= 4pqt\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \quad (9) \end{aligned}$$

ここで、$\Delta x,\ \Delta t \to 0$ の極限で $E(X),\ V(X)$ が一定値に収束するためには、$\displaystyle\lim_{\Delta x,\ \Delta t\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ が一定値に収束する必要がある。この値を、(3) 式のようにおく。すなわち、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x,\ \Delta t\to 0}\frac{(p-q)\Delta x}{\Delta t} &= 2C, \quad (10) \\ \lim_{\Delta x,\ \Delta t\to 0}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} &= 2D \quad (11) \end{aligned}$$

すると、

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(p-q)}{\Delta x} = \frac{C}{D}$$

だから、

$$p-q = \frac{C}{D}\Delta x$$

すると、

$$\begin{aligned} 4pq &= (p+q)^2-(p-q)^2 \\ &= 1-\frac{C^2}{D^2}(\Delta x)^2 \\ &= \left(1+\frac{C}{D}\Delta x\right)\left(1-\frac{C}{D}\Delta x\right) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{C}{D}\Delta x\right) \\ q &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{C}{D}\Delta x\right) \end{aligned}$$

を得る。そして、

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x,\ \Delta t\to 0}E(X) &= 2Ct \quad (12) \\ \lim_{\Delta x,\ \Delta t\to 0}V(X) &= 2Dt \quad (13) \end{aligned}$$

となる。

確率変数

$$X = \lim_{\Delta x,\ \Delta t\to 0}(2x-n)\Delta x$$

は、平均 $2Ct$、分散 $2Dt$ の正規分布に従うことは、次のようにして分かる。

n が十分大きいとき、二項分布は正規分布で近似できるので、

$$\mathrm{P}(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\exp\left(-\frac{(x-np)^2}{2npq}\right)$$

ゆえに、確率変数 $X=(2x-n)\Delta x$ の分布は、$n=t/\Delta t$ とおくと、

$$\begin{aligned} P_X(X) &= \int \delta\left(X-(2x-n)\Delta x\right)\mathrm{P}(x)\,dx \\ &= \frac{1}{2\Delta x}\mathrm{P}\left(\frac{X+n\Delta x}{2\Delta x}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 4pqt\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}}}\exp\left(-\frac{\left(X+(1-2p)t\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2}{2\cdot 4pqt\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}}\right) \end{aligned}$$

となるので、

$$\lim_{\Delta x,\ \Delta t\to 0} P_X(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot 2Dt}}\exp\left(-\frac{(X-2Ct)^2}{2\cdot 2Dt}\right)$$

を得る。これは、以前に得られた (6) 式である。

3　ブラウン運動再び

3.1　master 方程式

$$\rho(x,t_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(x-x_0,t_1-t)\rho(x_0,t)\,dx_0$$

変数変換

$$\begin{aligned} \Delta x &= x-x_0 \\ \Delta t &= t_1-t \end{aligned}$$

を行うと、

$$\rho(x,t+\Delta t)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(\Delta x,\Delta t)\rho(x-\Delta x,t)\,d(\Delta x)$$

ところが、

$$\rho(x,t+\Delta t)=\rho(x,t)+\Delta t\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}$$

$$\rho(x-\Delta x,t)=\rho(x,t)-\Delta x\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x}+\frac{(\Delta x)^2}{2!}\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2}$$

だから、

$$\begin{aligned} &\rho(x,t)+\Delta t\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} \\ &=\rho(x,t)-\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta x P(\Delta x,\Delta t)\,d(\Delta x)\right)\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta x)^2 P(\Delta x,\Delta t)\,d(\Delta x)\right)\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2} \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t}=-\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta x P(\Delta x,\Delta t)\,d(\Delta x)\right)\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta t}\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta x)^2 P(\Delta x,\Delta t)\,d(\Delta x)\right)\frac{\partial^2\rho(x,t)}{\partial x^2} \tag{14}$$

3.2 粒子の運動方程式 (Langevin 方程式)

$$m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} + R(t)$$

ここで、$R(t)$ は、揺動力 (random force) で、$0 \leq t', t" \leq \Delta t$ として、

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} R(t')P(\Delta x, \Delta t)\, d(\Delta x) &= 2C \\ \frac{1}{\lambda^2}\int_{-\infty}^{+\infty} R(t')R(t")P(\Delta x, \Delta t)\, d(\Delta x) &= 2D\delta(t' - t")\end{aligned}$$

とする。

もしも、

$$|m\ddot{x}| \ll |\lambda\dot{x}|$$

ならば、

$$\dot{x} = \frac{1}{\lambda}R(t)$$

これを積分して、

$$\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = \frac{1}{\lambda}\int_{t}^{t+\Delta t} R(t')\ dt'$$

となるので、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta x P(\Delta x, \Delta t)\, d(\Delta x) &= \frac{1}{\lambda}\int_{t}^{t+\Delta t} dt' \int_{-\infty}^{+\infty} R(t')P(\Delta x, \Delta t)\, d(\Delta x) \\ &= 2C\int_{t}^{t+\Delta t} dt' \\ &= 2C\Delta t \qquad (15)\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta x)^2 P(\Delta x, \Delta t)\, d(\Delta x) &= \frac{1}{\lambda^2}\int_{t}^{t+\Delta t} dt' \int_{t}^{t+\Delta t} dt" \int_{-\infty}^{+\infty} R(t')R(t")P(\Delta x, \Delta t)\, d(\Delta x) \\ &= 2D\int_{t}^{t+\Delta t} dt' \int_{t}^{t+\Delta t} dt"\, \delta(t' - t") \\ &= 2D\int_{t}^{t+\Delta t} dt' \\ &= 2D\Delta t \qquad (16)\end{aligned}$$

(14) 式に、(15) 式と (16) 式を代入すると、

$$\frac{\partial\rho(x,\ t)}{\partial t} = -2C\,\frac{\partial\rho(x,\ t)}{\partial x} + D\frac{\partial^2\rho(x,\ t)}{\partial x^2} \qquad (17)$$

を得る。

4　フォッカー・プランク方程式

プロパゲーター P が、時間経過や速度変化のみの関数ではなく、初期速度 v_0 にも依存する場合、すなわち、$P(v_0, v-v_0, t_1-t)$ の場合を考える。

$$f(v,t_1)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(v_0, v-v_0, t_1-t) f(v_0,t)\ dv_0 \tag{18}$$

変数変換

$$\begin{aligned}\Delta v &= v-v_0\\ \Delta t &= t_1-t\end{aligned}$$

$$f(v,t+\Delta t)=\int_{-\infty}^{+\infty} P(v-\Delta v, \Delta v, \Delta t) f(v-\Delta v,t)\ d(\Delta v)$$

Taylor 展開

$$f(v,t+\Delta t)=f(v,t)+\Delta t\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}P(v-\Delta v,\Delta v,\Delta t)f(v-\Delta v,t) &= P(v,\Delta v,\Delta t)f(v,t)-\Delta v\frac{\partial}{\partial v}\{P(v,\Delta v,\Delta t)f(v,t)\}\\ &\quad +\frac{1}{2!}(\Delta v)^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}\{P(v,\Delta v,\Delta t)f(v,t)\}+\cdots\cdots \end{aligned}\tag{20}$$

(19) 式と (20) 式を (18) 式の右辺に代入して、微分と積分の順序を入れ替える。

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} P(v,\Delta v,\Delta t)f(v,t)\ d(\Delta v) &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} P(v,\Delta v,\Delta t)\ d(\Delta v)\right)f(v,t)=f(v,t)\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta v\frac{\partial}{\partial v}\{P(v,\Delta v,\Delta t)f(v,t)\}\ d(\Delta v) &= \frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta v P(v,\Delta v,\Delta t)d(\Delta v)\right)f(v,t)\right\}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta v)^2\frac{\partial^2}{\partial v^2}\{P(v,\Delta v,\Delta t)f(v,t)\}\ d(\Delta v) &= \frac{\partial^2}{\partial v^2}\left\{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta v)^2 P(v,\Delta v,\Delta t)\ d(\Delta v)\right)f(v,t)\right\}\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} &= -\frac{1}{\Delta t}\frac{\partial}{\partial v}\left\{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\Delta v P(v,\Delta v,\Delta t)d(\Delta v)\right)f(v,t)\right\}\\ &\quad +\frac{1}{2\Delta t}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\left\{\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(\Delta v)^2 P(v,\Delta v,\Delta t)\ d(\Delta v)\right)f(v,t)\right\}\end{aligned}\tag{21}$$

運動方程式

$$m\ddot{x}=-\lambda\dot{x}+R(t)$$

揺動力 $R(t)$ は、 $t\le t_1,t_2\le t+\Delta t$ において、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(t_1)P(v,\Delta v,\Delta t)d(\Delta v)=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(t_1)R(t_2)P(v,\Delta v,\Delta t)d(\Delta v)=2D\delta(t_1-t_2)$$

を満たすものとする。

運動方程式を、$v=\dot{x}$ を用いて書き直すと、

$$m\dot{v}=-\lambda v+R(t)$$

となる。これを積分して、

$$\Delta v = -\frac{\lambda}{m}\ v\Delta t + \frac{1}{m}\int_{t}^{t+\Delta t} R(t')\ dt' \tag{22}$$

と書き直すと、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta v P(v, \Delta v, \Delta t) d(\Delta v) = -\frac{\lambda}{m}\ v\Delta t \tag{23}$$

次に、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta v)^2 P(v, \Delta v, \Delta t)\ d(\Delta v)$$

に (22) を代入して、Δt について 2 次以上の項を省略すると、

$$\left(\frac{\lambda}{m}\ v\Delta t + \frac{1}{m}\int_{t}^{t+\Delta t} R(t')\ dt'\right)^2 = \frac{2\lambda}{m^2} v\Delta t \int_{t}^{t+\Delta t} R(t')\ dt' + \frac{1}{m^2}\int_{t}^{t+\Delta t}\ dt_1 \int_{t}^{t+\Delta t}\ dt_2 R(t_1)R(t_2)$$

となるので、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\Delta v)^2 P(v, \Delta v, \Delta t)\ d(\Delta v) = \frac{2D}{m^2}\int_{t}^{t+\Delta t}\ dt_1 \int_{t}^{t+\Delta t}\ dt_2 \delta(t_1 - t_2) = \frac{2D}{m^2}\Delta t \tag{24}$$

となる。

(23) 式と (24) 式を (21) 式に代入して、

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \frac{1}{m}\left\{\lambda \frac{\partial}{\partial v} v + \frac{D}{m}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right\} f(v,t)$$

を得る。

5 連続の方程式からの導出

連続の方程式

$$\frac{\partial \rho(v,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v}\left(\dot{v}\rho(v,t)\right) \tag{25}$$

Langevin 方程式

$$m\dot{v} = -\lambda v + R(t) \tag{26}$$

(26) 式を (25) 式に代入する。

$$\frac{\partial \rho(v,t)}{\partial t} = -\frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial v}\Big\{(-\lambda v + R(t))\rho(v,t)\Big\}$$

ゆえに、

$$\frac{\partial \rho(v,t)}{\partial t} = \frac{1}{m}\left(\lambda + v\lambda\frac{\partial}{\partial v} - R(t)\frac{\partial}{\partial v}\right)\rho(v,t) \tag{27}$$

これを積分すると、

$$\begin{aligned}\rho(v,t+\Delta t) &= e^{\frac{1}{m}\int_t^{t+\Delta t} dt'\left(\lambda+\lambda v\frac{\partial}{\partial v}-R(t')\frac{\partial}{\partial v}\right)}\rho(v,t) \\ &= e^{\frac{1}{m}\left[\lambda\left(1+v\frac{\partial}{\partial v}\right)\Delta t-\int_t^{t+\Delta t} R(t')\,dt'\frac{\partial}{\partial v}\right]}\rho(v,t) \qquad (28)\end{aligned}$$

ここで、

$$A=\frac{1}{m}\left[\lambda\left(1+v\frac{\partial}{\partial v}\right)\Delta t-\int_t^{t+\Delta t} R(t')\,dt'\frac{\partial}{\partial v}\right]$$

とおくと、(28) 式は、

$$\begin{aligned}\rho(v,t+\Delta t) &= e^{A}\rho(v,t) \qquad (29)\\ &= \left[1+A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots\right]\rho(v,t) \qquad (30)\end{aligned}$$

となるので、

$$\rho(v,t+\Delta t)-\rho(v,t)=\frac{\partial\rho(v,t)}{\partial t}\Delta t=A\rho(v,t)+\frac{1}{2}A^2\rho(v,t)+\cdots \qquad (31)$$

ここで、ランダム力について平均 $\langle\cdot\rangle$ をとると、

$$\frac{\partial\rho(v,t)}{\partial t}\Delta t=\langle A\rangle\rho(v,t)+\frac{1}{2}\langle A^2\rangle\rho(v,t)+\cdots \qquad (32)$$

$$\langle A\rangle=\frac{1}{m}\left[\lambda\left(1+v\frac{\partial}{\partial v}\right)\Delta t-\int_t^{t+\Delta t}\langle R(t')\rangle\,dt'\frac{\partial}{\partial v}\right]$$

ここで、

$$\langle R(t')\rangle=0$$

を用いると、

$$\langle A\rangle=\frac{\lambda}{m}\left(1+v\frac{\partial}{\partial v}\right)\Delta t \qquad (33)$$

を得る。

$\langle A^2\rangle$ については、Δt についての 1 次の項までを残すことにすると、

$$\begin{aligned}\langle A^2\rangle &= \frac{1}{m^2}\int_t^{t+\Delta t}dt'\int_t^{t+\Delta t}dt"\langle R(t')R(t")\rangle\frac{\partial^2}{\partial v^2} \\ &= \frac{1}{m^2}\int_t^{t+\Delta t}dt'\int_t^{t+\Delta t}dt"2D\delta(t'-t")\frac{\partial^2}{\partial v^2}\end{aligned}$$

となるので、

$$\langle A^2\rangle=\frac{2D}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\Delta t \qquad (34)$$

を得る。

(33), (34) 式を (32) 式に代入して、

$$\frac{\partial\rho(v,t)}{\partial t}=\left\{\frac{\lambda}{m}\left(1+v\frac{\partial}{\partial v}\right)+\frac{2D}{m^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right\}\rho(v,t) \qquad (35)$$

を得る。