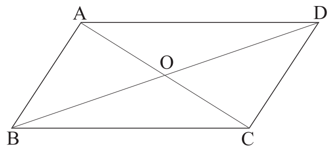
2018 年度代数学 I　試験問題解答

問題 1　平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし、$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする。次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB} = \vec{b}$　(2) $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = \vec{a} + \vec{b}$

(3) $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA} = -\vec{a}$　(4) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \vec{b} - \vec{a}$

(5) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = -\vec{a} - \vec{b}$　(6) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC} = -2\vec{a}$



問題 2 次の等式を満たすベクトル $\vec{x}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(1) $3\vec{x} - 4\vec{a} = 6\vec{b} + \vec{x}$　$\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

(2) $\vec{x} + 5\vec{a} - 3\vec{b} = 3\left(\vec{x} - \vec{a} - 3\vec{b}\right)$　$\vec{x} = 4\vec{a} + 3\vec{b}$

問題 3 $\vec{a} = (2,\ 1)$, $\vec{b} = (2,\ -3)$ であるとき、次のベクトルを成分で表せ。また、その大きさを求めよ。

(1) $\vec{a} + \vec{b} = (4,\ -2)$,　$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$　(2) $\vec{a} - \vec{b} = (0,\ 4)$,　$|\vec{a} - \vec{b}| = 4$

(3) $3\vec{a} + \vec{b} = (8,\ 0)$,　$|3\vec{a} + \vec{b}| = 8$　(4) $2\vec{b} - \vec{a} = (2,\ -7)$,　$|2\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{53}$

問題 4 次のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ の内積と、それらのなす角 θ を求めよ。ただし、$0 \leqq \theta < \pi$ とする。

(1) $\vec{a} = (1,\ -1,\ 0)$, $\vec{b} = (1,\ -2,\ 1)$　$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 2 + 0 = 3$, $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{2}\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より、$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

(2) $\vec{a} = (1,\ -1,\ 1)$,　$\vec{b} = (1,\ 3,\ 2)$　$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 - 3 + 2 = 0$, $\cos\theta = 0$ より、$\theta = \dfrac{\pi}{2}$

(3) $\vec{a} = (2,\ -3,\ 1)$,　$\vec{b} = (-1,\ -2,\ 3)$　$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 + 6 + 3 = 7$, $\cos\theta = \dfrac{7}{\sqrt{14}\sqrt{14}} = \dfrac{1}{2}$
より、$\theta = \dfrac{\pi}{3}$

問題 5 次の計算を行い、答えを $a + bi$ の形で表せ。ただし、a, b は実数とする。

(1) $(7 + 3i) + (3 - 4i) = 10 - i$

(2) $(2 - i) - (5 - 2i) = -3 + i$

(3) $(2 + 3i)(3 - 2i) = 6 + 6 + (9 - 4)i = 12 + 5i$

(4) $\dfrac{1}{(-2 + i)(1 - 3i)} = \dfrac{1}{1 + 7i} = \dfrac{1 - 7i}{(1 + 7i)(1 - 7i)} = \dfrac{1 - 7i}{50}$

(5) $\sqrt{-5+12i}$ $\quad \sqrt{-5+12i}=a+bi$ とおいて、両辺を 2 乗すると、$a^2-b^2=-5,\ ab=6$
これを解くと、$a=\pm 2,\ b=\pm 3$ と求まるので、$\sqrt{-5+12i}=\pm(2+3i)$

問題 6 次の複素数を極形式で表せ。

(1) $\sqrt{3}+i \ =2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+i} \ =\dfrac{(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

問題 7 $(1-i)^{11}$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}(1-i)^{11} &= \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^{11}=2^{11/2}\left(\cos\frac{11\pi}{4}-i\sin\frac{11\pi}{4}\right)=2^{11/2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}-i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\\ &= \ =2^{11/2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=-32-32i\end{aligned}$$

問題 8 次の行列の積を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

(2) $\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-y\\ x+y\end{pmatrix}=x(x-y)+y(x+y)=x^2+y^2$

(3) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-a' & b-b' & c-c'\\ a'+2a'' & b'+2b'' & c'+2c''\\ a'' & b'' & c''\end{pmatrix}$

問題 9 $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & b\end{pmatrix}$ について、$A^2=E$ となるように，$a,\ b$ の値を求めよ。

$A^2=\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 2 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 2(a+b) & b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ より、$a^2=1,\ a+b=0,\ b^2=1$
ゆえに、 $a=\pm 1,\ b=\mp 1$

問題 10 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E$ を計算せよ。

$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E$

$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$