2018 年度率・統計　試験問題

問題 1

(1) ある家庭には、3 人の子どもがいる。

(a) 3 人とも女の子である確率はいくらか。 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

(b) 2 人が女の子で 1 人が男の子である確率はいくらか。 $\frac{3}{8}$

(c) 一番上が女の子である確率はいくらか。 $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(2) ある家庭には 3 人の子どもがいる。そのうち、少なくとも 1 人は女の子だそうである。

(a) 3 人とも女の子である確率はいくらか。 8 通りのうち、3 人とも男である可能性は無いので、$\frac{1}{8-1} = \frac{1}{7}$

(b) 2 人が女の子で 1 人が男の子である確率はいくらか。 $\frac{3}{7}$

(c) 一番上が女の子である確率はいくらか。 $\frac{4}{7}$

問題 2 200 本のくじの中に 5 本の当りくじがある。これを 2 人が順に 1 本ずつ引く。1 番目に引く人と 2 番目に引く人が当りくじを引き当てる確率について考えてみよう。

(1) 1 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(1_{当})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(1_{当}) = \frac{5}{200} = \frac{1}{40}$

(2) 1 番目の人が外れくじを引く確率 $\mathrm{P}(1_{外})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(1_{外}) = \frac{195}{200} = \frac{39}{40}$

(3) 1 番目の人が当りくじを引いた場合に、2 番目の人も当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{当})$ を求めよ。 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{当}) = \frac{4}{199}$

(4) 1 番目の人が外れくじを引いた場合に、2 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ を求めよ。 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外}) = \frac{5}{199}$

(5) 2 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当})$ は、$\mathrm{P}(1_{当})$, $\mathrm{P}(1_{外})$, $\mathrm{P}(2_{当}|1_{当})$, $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ を用いてどのように表されるか。
$\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$

(6) 2 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(2_{当}) = \frac{4}{199} \cdot \frac{1}{40} + \frac{5}{199} \cdot \frac{39}{40} = \frac{4 + 5 \times 39}{199 \cdot 40} = \frac{1}{40}$

問題３ ある夜、タクシーがひき逃げした。目撃者は、青のタクシーがひいたと証言した。その町で営業しているタクシー会社は、グリーン社とブルー社の二社で、次のようなデータがある。

a 町を走るタクシーの 90 ％はグリーン社の緑の車で、残りの 10 ％はブルー社の青い車である。

b 夜の事故という状況で目撃者の証言がどれだけ信頼できるかを警察がテストしたところ、2 つの色を正しく識別できる確率は 85 ％、間違える確率は 15 ％であった。

(1) 夜間に青いタクシーの目撃証言が得られる確率 $\mathrm{P}(青_{目})$ はいくらか。

(答) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(青_{目}) &= \mathrm{P}(青_{目}|\,青_{走})\mathrm{P}(青_{走}) + \mathrm{P}(青_{目}|\,緑_{走})\mathrm{P}(緑_{走})\\ &= 0.85 \times 0.1 + 0.15 \times 0.9 = 0.22\end{aligned}$$

(2) 夜間に緑のタクシーの目撃証言が得られる確率 $\mathrm{P}(緑_{目})$ はいくらか。

(答) $$\begin{aligned}\mathrm{P}(緑_{目}) &= \mathrm{P}(緑_{目}|\,緑_{走})\mathrm{P}(緑_{走}) + \mathrm{P}(緑_{目}|\,青_{走})\mathrm{P}(青_{走})\\ &= 0.85 \times 0.9 + 0.15 \times 0.1 = 0.78\end{aligned}$$

(3) ブルー社のタクシーが事故を起こした確率 $\mathrm{P}(青_{事故}) = \dfrac{\mathrm{P}(青_{走} \cap 青_{目})}{\mathrm{P}(青_{目})}$ はいくらか。

(答) $$\mathrm{P}(青_{事故}) = \frac{\mathrm{P}(青_{目}|\,青_{走})\mathrm{P}(青_{走})}{\mathrm{P}(青_{目})} = \frac{0.85 \times 0.1}{0.22} = \frac{85}{220} = \frac{17}{44} \approx 0.386$$

問題４

[1] 25 本のくじの中に、賞金 100 円の当りくじが 1 本ある。このくじを 2 本引く。このときに得る賞金を X 円とする。

(1) 100 円が当る確率 P(100) を求めよ。
$$\mathrm{P}(100) = \frac{24 \cdot 1}{{}_{25}C_2} = \frac{2 \cdot 24}{25 \cdot 24} = \frac{2}{25}$$

(2) 0 円が当る確率 P(0)、すなわち、2 本とも外れである確率はいくらか。
$$\mathrm{P}(0) = \frac{{}_{24}C_2}{{}_{25}C_2} = \frac{24 \cdot 23}{25 \cdot 24} = \frac{23}{25}$$

(3) X の期待値 (平均) を求めよ。
$$\mu = 0 \times \mathrm{P}(0) + 100 \times \mathrm{P}(100) = 100 \times \frac{2}{25} = 8 \text{ 円}$$

(4) X の分散を求めよ。
$$\sigma^2 = 0^2 \times \mathrm{P}(0) + 100^2 \times \mathrm{P}(100) - \mu^2 = 100^2 \times \frac{2}{25} - 8^2 = 800 - 64 = 736$$

[2] 50 本のくじの中に、賞金 100 円のあたりくじが 2 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

(1) 200 円が当る確率 P(200)、すなわち、2 本とも当たりくじとなる確率はいくらか。
$$\mathrm{P}(200) = \frac{{}_{2}C_2}{{}_{50}C_2} = \frac{2}{50 \cdot 49} = \frac{2}{2450} = \frac{1}{1225}$$

(2) 100 円が当る確率 P(100)、すなわち、2 本のうち 1 本が当たりでもう 1 本が外れくじとなる確率はいくらか。
$$\mathrm{P}(100) = \frac{2 \times 48}{{}_{50}C_2} = \frac{4 \cdot 48}{50 \cdot 49} = \frac{192}{2450} = \frac{96}{1225}$$

(3) 0 円が当る確率 P(0)、すなわち、2 本とも外れである確率はいくらか。
$$\mathrm{P}(0) = \frac{{}_{48}C_2}{{}_{50}C_2} = \frac{48 \cdot 47}{50 \cdot 49} = \frac{2256}{2450} = \frac{1128}{1225}$$

(4) X の期待値 (平均) を求めよ。
$$\mu = 0 \times \frac{1128}{1225} + 100 \times \frac{96}{1225} + 200 \times \frac{1}{1225} = \frac{100 \times 98}{1225} = \frac{100 \times 49 \times 2}{25 \times 49} = 8$$

(5) X の分散を求めよ。
$$\begin{aligned}\sigma^2 &= 0^2 \times \frac{1128}{1225} + 100^2 \times \frac{96}{1225} + 200^2 \times \frac{1}{1225} - 8^2\\ &= \frac{100^2(96+4)}{25 \times 49} - 8^2 = \frac{100^2 \times 100}{25 \times 49} - 8^2 = \frac{4 \times 100^2}{49} - 64\\ &= \frac{40000 - 64(50-1)}{49} = \frac{40000 - 3200 + 64}{49} = \frac{36864}{49} \quad \left(\approx 752.3265\right)\end{aligned}$$

問題５ 1コの硬貨を投げる試行を行う。

(1) 1回の試行で表が出る確率 p はいくらか。 $p = \frac{1}{2}$

(2) x 回目の試行で、初めて表が出る確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{P}(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = \frac{1}{2^x}$

(3) 表が出るまでの平均の試行回数を求めよ。 $\mu = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

(4) x の分散を求めよ。 $\sigma^2 = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2$

(5) x 回の試行で一度も表が出ない確率 $\mathrm{Q}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{Q}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

(6) $\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \mathrm{Q}(x-1)$

(7) $\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。
$\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x) = \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{Q}(x-1) = \cdots = 1$

(8) $\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(n) > \frac{9}{10}$ を満たす最小の n を求めよ。
$1 - \mathrm{Q}(n) > \frac{9}{10}$ より、$\mathrm{Q}(n) < \frac{1}{10}$. $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} < \frac{1}{10} < \frac{1}{8}$. ゆえに、$n = 4$.

問題６ 選択肢が4個あり、その中の正しいものに○をつけよという設問が5題ある。ただし、各設問について正解は1個しかないものとする。まったくでたらめに○をつけたとした場合について以下の質問に答えよ。

(1) 各設問について正解する確率 p はいくらか。$p = \frac{1}{4}$

(2) 各設問について不正解となる確率 q はいくらか。$q = \frac{3}{4}$

(3) x コ正解する確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。$\mathrm{P}(x) = {}_5C_x \left(\frac{1}{4}\right)^{x} \left(\frac{3}{4}\right)^{5-x}$

(4) 平均するといくつ正解することになるか。$\mu = np = 5 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

(5) 正解数の分散を求めよ。$\sigma^2 = npq = 5 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{16}$

(6) 1問正解につき20点とし60点以上を合格とする。でたらめに解答した場合に合格する確率は何パーセントか。有効数字2桁で答えよ。
$\mathrm{P}(5) + \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(3) = \left(\frac{1}{4}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right) + 10\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1+15+90}{1024} = \frac{106}{1024} = \frac{53}{512} \approx 10.\%$