コーシー分布 (Cauchy distribution)

緑川章一[*]

1　コーシー分布

確率変数 x が、確率密度関数

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

に従う分布を標準コーシー分布 (Cauchy distribution) という。この分布の特徴は、存在しないことにある。

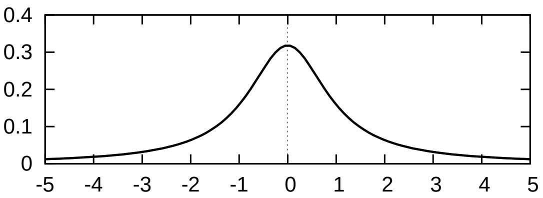

図 1: コーシー分布

期待値

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

は、$xf_X(x)$ が奇関数であることから、対称性より 0 になると思われるかも知れないが、実際は、

$$\mu = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{1+x^2}\,dx = \infty - \infty$$

で、定義されないのである。

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

もまた、発散するので、分散も定義できない。

もっとも一般的なコーシー分布の確率密度関数の形は、

$$f_X(x) = \frac{\gamma}{\pi\left((x-x_0)^2+\gamma^2\right)}$$

で与えられる。

物理学において、この種の関数は、古典物理学における減衰のある強制振動や量子力学での共鳴の解として現れるので、それらを研究した人々にちなんでローレンツ分布 (Lorentz distribution)、または、ブライト - ウィグナー分布 (Breit-Wigner distribution) と呼ばれる。

[*]Shoichi Midorikawa

2　再生成 (reproductive property)

$i = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ とし、確率変数 x_i は各々独立で、同一の分布関数 $f(x_i) = \dfrac{1}{\pi(1+x_i^2)}$ に従うものとする。$z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ の分布は、

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z - x_1 - x_2 \cdots - x_n) f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(z - x_1 - x_2 \cdots - x_n)} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n)\, dx_1 dx_2 \cdots dx_n dk \\
&= \frac{1}{2\pi^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikz} \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx_i}}{1+x_i^2}\, dx_i \\
&= \frac{1}{2\pi^{n+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk\, e^{ikz} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\, dx \right]^n
\end{aligned}
$$

ところで、複素積分における留数定理を用いると、

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ikx}}{(x+i)(x-i)}\, dx = \begin{cases} \pi e^{-k} & k \geqq 0 \\ \pi e^{k} & k < 0 \end{cases}
$$

だから、

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{0}^{+\infty} e^{(iz-n)k}\, dk + \int_{-\infty}^{0} e^{(iz+n)k}\, dk \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{iz-n} + \frac{1}{iz+n} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{n}{z^2+n^2}
\end{aligned}
$$

次に、$\bar{x} = z/n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ の分布を考える。

$$
\begin{aligned}
f_{\bar{X}}(\bar{x}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\bar{x} - \frac{z}{n}\right) f_Z(z)\, dz \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\bar{x} - \frac{z}{n}\right) \frac{n}{z^2+n^2}\, dz \\
&= \frac{n}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(n\bar{x} - z\right) \frac{n}{z^2+n^2}\, dz \\
&= \frac{1}{\pi(\bar{x}^2+1)}
\end{aligned}
$$

すなわち、互いに独立で、同一のコーシー分布に従う確率変数の平均の分布は、元のコーシー分布に従う。

3　逆数の分布

確率変数 x が、コーシー分布、

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

に従うときに、その逆数 $y = 1/x$ の分布を求める。

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(y - \frac{1}{x}\right) \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx$$

ここで、関係式 $\delta\left(\varphi(x)\right) = \dfrac{1}{|\varphi'(x_0)|}\delta(x - x_0)$ (ただし、x_0は、$\varphi(x) = 0$ の解) を用いると、
$\delta\left(y - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{y^2}\delta\left(x - \dfrac{1}{y}\right)$ だから、

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{y^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(x - \frac{1}{y}\right) \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx \\ &= \frac{1}{\pi(1+y^2)} \end{aligned}$$

すなわち、逆数の分布も、また、コーシー分布に従う。

4　一様分布とコーシー分布

確率変数 t は、区間 $-\dfrac{\pi}{2} < t < \dfrac{\pi}{2}$ において、

$$f_T(t) = \frac{1}{\pi}$$

の一様分布に従うものとする。

このとき、$x = \tan t$ の分布 $f_X(x)$ は、

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta(x - \tan t)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \delta\left(t - \arctan(x)\right)\cos^2 t\, dt \\ &= \frac{1}{\pi(1+x^2)} \end{aligned}$$

である。すなわち、コーシー分布となる。

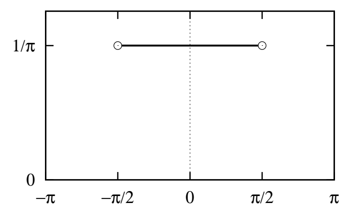

図 2: 一様分布