2016 年度率・統計　試験前問題

問題 1　集合 $\Omega = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) 要素数が 0 の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_0 = 1$
(2) 要素数が 1 の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_1 = 5$
(3) 要素数が 2 の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_2 = 10$
(4) 要素数が 3 の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_3 = 10$
(5) 要素数が 4 の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_4 = 5$
(6) 要素数が 5 の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_5 = 1$
(7) Ω の部分集合は全部でいくつあるか。 (答)　${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^5 = 32$

問題 2

(1) ある家庭には、3 人の子どもがいる。3 人とも女の子である確率はいくらか。
$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

(2) ある家庭には、3 人の子どもがいる。そのうち、少なくとも 1 人は女の子だそうである。3 人とも女の子である確率はいくらか。
8 通りのうち、3 人とも男である可能性は無いので、$\frac{1}{8-1} = \frac{1}{7}$

(3) ある家庭には、3 人の子どもがいる。一番上は女の子である。3 人とも女の子である確率はいくらか。
2 番目、3 番目が各々女の子である確率は、$\frac{1}{2}$ だから、$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

(4) ある家庭には、3 人の子どもがいる。その家を訪問したら、女の子がひとり顔を出した。3 人とも女の子である確率はいくらか。
残りの 2 人が女の子である確率だから、$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

問題 3 200 本のくじの中に 3 本の当りくじがある。これを 2 人が順に 1 本ずつ引く。1 番目に引く人と 2 番目に引く人が当りくじを引き当てる確率について考えてみよう。

(1) 1 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(1_{当})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(1_{当}) = \frac{3}{200}$

(2) 1 番目の人が外れくじを引く確率 $\mathrm{P}(1_{外})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(1_{外}) = \frac{197}{200}$

(3) 1 番目の人が当りくじを引いた場合に、2 番目の人も当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{当})$ を求めよ。 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{当}) = \frac{2}{199}$

(4) 1 番目の人が外れくじを引いた場合に、2 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ を求めよ。 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外}) = \frac{3}{199}$

(5) 2 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当})$ は、$\mathrm{P}(1_{当})$，$\mathrm{P}(1_{外})$，$\mathrm{P}(2_{当}|1_{当})$，$\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ を用いてどのように表されるか。
$\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$

(6) 2 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(2_{当}) = \frac{2}{199} \cdot \frac{3}{200} + \frac{3}{199} \cdot \frac{197}{200} = \frac{3(2+197)}{199 \cdot 200} = \frac{3 \cdot 199}{199 \cdot 200} = \frac{3}{200}$

問題4 ある夜、タクシーがひき逃げした。目撃者は、青のタクシーがひいたと証言した。その町で営業しているタクシー会社は、グリーン社とブルー社の二社で、次のようなデータがある。

a 町を走るタクシーの 80 %はグリーン社の緑の車で、残りの 20 %はブルー社の青い車である。

b 夜の事故という状況で目撃者の証言がどれだけ信頼できるかを警察がテストしたところ、2 つの色を正しく識別できる確率は 75 %、間違える確率は 25 %であった。

(1) 夜間に青いタクシーの目撃証言が得られる確率 $\mathrm{P}(青_{目})$ はいくらか。

(答) $\mathrm{P}(青_{目}) = \mathrm{P}(青_{目}|\ 青_{走})\mathrm{P}(青_{走}) + \mathrm{P}(青_{目}|\ 緑_{走})\mathrm{P}(緑_{走})$

$= 0.75 \times 0.2 + 0.25 \times 0.8 = 0.35$

(2) 夜間に緑のタクシーの目撃証言が得られる確率 $\mathrm{P}(緑_{目})$ はいくらか。

(答) $\mathrm{P}(緑_{目}) = \mathrm{P}(緑_{目}|\ 緑_{走})\mathrm{P}(緑_{走}) + \mathrm{P}(緑_{目}|\ 青_{走})\mathrm{P}(青_{走})$

$= 0.75 \times 0.8 + 0.25 \times 0.2 = 0.65$

(3) ブルー社のタクシーが事故を起こした確率 $\mathrm{P}(青_{事故}) = \dfrac{\mathrm{P}(青_{走} \cap 青_{目})}{\mathrm{P}(青_{目})}$ はいくらか。

(答) $\mathrm{P}(青_{事故}) = \dfrac{\mathrm{P}(青_{目}|\ 青_{走})\mathrm{P}(青_{走})}{\mathrm{P}(青_{目})} = \dfrac{0.75 \times 0.2}{0.35} = \dfrac{0.15}{0.35} = \dfrac{3}{7} \simeq 0.43$

問題5

[1] 50 本のくじの中に、賞金 100 円の当りくじが 1 本ある。このくじを 2 本引く。このときに得る賞金を X 円とする。

(1) 100 円が当る確率 P(100) を求めよ。

$\mathrm{P}(100) = \dfrac{49 \cdot 1}{{}_{50}C_2} = \dfrac{2 \cdot 49}{50 \cdot 49} = \dfrac{1}{25}$

(2) 0 円が当る確率 P(0)、すなわち、2 本とも外れである確率はいくらか。

$\mathrm{P}(0) = \dfrac{{}_{49}C_2}{{}_{50}C_2} = \dfrac{49 \cdot 48}{50 \cdot 49} = \dfrac{48}{50} = \dfrac{24}{25}$

(3) X の期待値 (平均) を求めよ。

$\mu = 0 \times \mathrm{P}(0) + 100 \times \mathrm{P}(100) = 100 \times \dfrac{1}{25} = 4$ 円

(4) X の分散を求めよ。

$\sigma^2 = 0^2 \times \mathrm{P}(0) + 100^2 \times \mathrm{P}(100) - \mu^2 = 100^2 \times \dfrac{1}{25} - 4^2 = 400 - 16 = 384$

[2] 100 本のくじの中に、賞金 100 円のあたりくじが 2 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

(1) 200 円が当る確率 P(200)、すなわち、2 本とも当たりくじとなる確率はいくらか。

$\mathrm{P}(200) = \dfrac{{}_{2}C_2}{{}_{100}C_2} = \dfrac{2}{100 \cdot 99} = \dfrac{2}{9900} = \dfrac{1}{4950}$

(2) 100 円が当る確率 P(100)、すなわち、2 本のうち 1 本が当たりでもう 1 本が外れくじとなる確率はいくらか。

$\mathrm{P}(100) = \dfrac{2 \times 98}{{}_{100}C_2} = \dfrac{4 \cdot 98}{100 \cdot 99} = \dfrac{392}{9900} = \dfrac{196}{4950} = \dfrac{98}{2475}$

(3) 0 円が当る確率 P(0)、すなわち、2 本とも外れである確率はいくらか。

$\mathrm{P}(0) = \dfrac{{}_{98}C_2}{{}_{100}C_2} = \dfrac{98 \cdot 97}{100 \cdot 99} = \dfrac{4753}{4950}$

(4) X の期待値 (平均) を求めよ。

$\mu = 0 \times \dfrac{4753}{4950} + 100 \times \dfrac{196}{4950} + 200 \times \dfrac{1}{4950} = \dfrac{100 \times 198}{4950} = \dfrac{100 \times 99 \times 2}{50 \times 99} = 4$

(5) X の分散を求めよ。

$\sigma^2 = 0^2 \times \dfrac{4753}{4950} + 100^2 \times \dfrac{196}{4950} + 200^2 \times \dfrac{1}{4950} - 4^2$

$$= \frac{100^2(196+4)}{50\times 99} - 4^2 = \frac{100^2\times 200}{50\times 99} - 4^2 = \frac{4\times 100^2}{99} - 16$$
$$= \frac{40000-16(100-1)}{99} = \frac{38416}{99} \left(\approx 388.0404\right)$$

問題 6 100 円玉と 50 円玉を投げる試行を行う。

(1) 1 回の試行で 2 枚とも表が出る確率はいくらか。 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

(2) x 回目の試行で、初めて 2 枚揃って表が出る確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。

$p=\frac{1}{4},\ q=\frac{3}{4}$ の幾何分布だから、$\mathrm{P}(x)=p\cdot q^{x-1}=\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}$

(3) 2 枚とも表が出るまでの平均の試行回数を求めよ。

$\mu=\frac{1}{p}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4$

(4) x の分散を求めよ。 $\sigma^2=\frac{q}{p^2}=\frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}=12$

(5) x 回の試行で一度も 2 枚揃って表が出ない確率 $\mathrm{Q}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{Q}(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$

(6) $\mathrm{P}(x)+\mathrm{Q}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{P}(x)+\mathrm{Q}(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1}=\mathrm{Q}(x-1)$

(7) $\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\cdots+\mathrm{P}(x)+\mathrm{Q}(x)$ を求めよ。

$\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\cdots+\mathrm{P}(x)+\mathrm{Q}(x)=\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\cdots+\mathrm{Q}(x-1)=\cdots=1$

(8) $\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\cdots+\mathrm{P}(n)>\frac{1}{2}$ を満たす最小の n を求めよ。

$1-\mathrm{Q}(n)>\frac{1}{2}$ より、$\mathrm{Q}(n)<\frac{1}{2}$. $\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}<\frac{1}{2}$. ゆえに、$n=3$.

問題 7 選択肢が 5 個あり、その中の正しいものに○をつけよという設問が 5 題ある。ただし、各設問について正解は 1 個しかないものとする。まったくでたらめに○をつけたとした場合について以下の質問に答えよ。

(1) x コ正解する確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。

$n=5,\ p=\frac{1}{5},\ q=\frac{4}{5}$ の二項分布だから、$\mathrm{P}(x)={}_5C_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{5-x}$

(2) 平均するといくつ正解することになるか。$\mu=np=1$

(3) 正解数の分散を求めよ。$\sigma^2=npq=\frac{4}{5}$

(4) 3 問以上正解する確率はいくらか。

$\mathrm{P}(3)+\mathrm{P}(4)+\mathrm{P}(5)={}_5C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2+{}_5C_4\left(\frac{1}{5}\right)^4\frac{4}{5}+{}_5C_5\left(\frac{1}{5}\right)^5=\frac{160+20+1}{5^5}=\frac{181}{3125}$

問題 8

(1) 硬貨を 144 回投げたとき、表が 50 回出た。この硬貨は正常ではないと言えるか。有意水準 0.3%で答えよ。

$n=144,\ p=q=1/2$ とすると、

$$\mu=np=72,\qquad 3\sigma=3\sqrt{npq}=3\sqrt{144\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=3\sqrt{36}=18$$

だから、正常な硬貨を 144 回投げたときに、表の出る回数 s の範囲は、

$$72-18\leqq\ s\leqq\ 72+18,\quad \text{すなわち、}\quad 54\leqq\ s\leqq\ 90$$

となる。$s=50$ は、この範囲外なので、正常ではないと言える。

(2) 364 世帯をモニターとして、ある番組の視聴率を調べたところ、35%であった。このとき、実際の視聴率はどの範囲だったと考えられるか。99.7%信頼区間を求めよ。

$n = 364,\ \hat{p} = 0.35,\ \hat{q} = 0.65$ だから、$3\sqrt{\dfrac{0.35 \times 0.65}{364}} = 0.075$

ゆえに、

$0.35 - 0.075 \leqq\ p \leqq\ 0.35 + 0.075,$　すなわち、$0.275 \leqq\ p \leqq\ 0.425$