定理 (**Weierstrass**)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \qquad \left(\text{ただし、} 0 < a < 1,\ b \text{ 奇数},\ ab > 1 + \frac{3}{2}\pi\right)$$

とおくと、$f(x)$ は到る処連続で、到る処微分できない。

<u>**Proof**</u>

$|a^n \cos(b^n \pi x)| \leqq a^n$ かつ $0 < a < 1$ より

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

は一様収束。

よって、Weierstrass の定理より、

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

は一様収束。各項は、continuous function であることは明らか。

よって、$f(x)$ は continuous。

1st step

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\{f(x+h) - f(x)\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{h}[\cos b^n \pi(x+h) - \cos b^n \pi x] \\
&= \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{h}[\cos b^n \pi(x+h) - \cos b^n \pi x] + \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{h}[\cos b^n \pi(x+h) - \cos b^n \pi x] \\
&= s_m + r_m
\end{aligned}$$

とおく。

$$\begin{aligned}
|s_m| &= \Big| \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{h}[\cos b^n \pi(x+h) - \cos b^n \pi x] \Big| \\
&= \left| -\sum_{n=0}^{m-1} \frac{2}{h} \sin \frac{b^n \pi(2x+h)}{2}\ \sin \frac{b^n \pi h}{2} \right| \\
&\leqq \sum_{n=0}^{m-1} \left| (ab)^n \pi \frac{\sin b^n \pi(x + \frac{h}{2})\ \sin \frac{b^n \pi h}{2}}{\frac{1}{2} b^n \pi h} \right| \\
&\leqq \pi \sum_{n=0}^{m-1} (ab)^n \\
&= \pi \frac{(ab)^m - 1}{ab - 1} < \frac{\pi (ab)^m}{ab - 1}
\end{aligned}$$

よって、$\exists \epsilon : |\epsilon| < 1,\ s_m = \dfrac{\pi (ab)^m \epsilon}{ab - 1}$

2nd step

$b^m x$ に最も近い integer を k_m とし、$b^m x = k_m + \rho_m$ とおくと、$|\rho_m| \leqq \dfrac{1}{2}$

$\xi_m = (k_m+1)b^{-m},\ \eta_m = (k_m-1)b^{-m}$ とおくと、

$$\eta_m < x < \xi_m$$

$m \to \infty$ なるとき、$\xi_m,\ \eta_m \to x$

いま、特に h を、$x+h = \xi_m$ なる如くとると、

$$h = \xi_m - x = (k_m+1)b^{-m} - x = b^{-m}(k_m + 1 - b^m x) = (1-\rho_m)b^{-m} \leqq \frac{3}{2}b^{-m}$$

$n \geqq m$ のとき、

$$\cos b^n \pi(x+h) = \cos b^n \pi \xi_m = \cos\left(b^{n-m}\pi(1+k_m)\right) = (-1)^{1+k_m} \quad (\because b \text{ 奇数})$$

$$\begin{aligned}
\cos b^n \pi x &= \cos\Big(b^{n-m}\pi(k_m+\rho_m)\Big) = \cos\Big(b^{n-m}\pi k_m + b^{n-m}\pi\rho_m\Big) \\
&= (-1)^{k_m}\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad r_m = (-1)^{1+k_m}\frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty} a^n\Big(1+\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)\Big)$$

ここで、$1+\cos(\pi\rho_m) \geqq 1,\ \ 1+\cos(b^{n-m}\pi\rho_m) \geqq 0$ for $n > m$ だから、

$$(-1)^{1+k_m} r_m \geqq \frac{1}{h}a^m \geqq \frac{2}{3}(ab)^m \quad \left(\text{Note that} \ \ h \leqq \frac{3}{2}b^{-m}\right)$$

$$\therefore \quad \exists\theta > 1;\ r_m = (-1)^{1+k_m}\frac{2}{3}(ab)^m\theta$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\Big\{f(\xi_m) - f(x)\Big\} &= s_m + r_m \\
&= (-1)^{1+k_m}\frac{2}{3}\theta(ab)^m + \epsilon\pi\frac{(ab)^m}{ab-1} \\
&= (-1)^{1+k_m}(ab)^m\left\{\frac{2}{3}\theta + (-1)^{1+k_m}\frac{\pi\epsilon}{ab-1}\right\}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{2}{3}\theta + (-1)^{1+k_m}\frac{\pi\epsilon}{ab-1} > \frac{2}{3} - \frac{\pi}{ab-1}$$

ところが、$ab - 1 > \dfrac{3}{2}\pi.$ $\therefore \quad \dfrac{2}{3} > \dfrac{\pi}{ab-1}$

$$\therefore \quad \frac{2}{3}\theta + (-1)^{1+k_m}\frac{\pi\epsilon}{ab-1} > 0$$

次に、$\dfrac{1}{h}\Big\{f(\eta_m)-f(x)\Big\}$ の振る舞いを調べる。
$x+h=\eta_m=(k_m-1)b^{-m}$ とおくと、$b^m x=k_m+\rho_m$ だから、

$$h=-(1+\rho_m)b^{-m} \quad \therefore \quad |h| \leqq \frac{3}{2}b^{-m}$$

$$\begin{aligned}\cos(b^n\pi\eta_m) &= \cos\Big(b^n\pi(k_m-1)b^{-m}\Big)=\cos\Big(b^{n-m}\pi(k_m-1)\Big)=(-1)^{k_m-1} \quad (\because b \text{ 奇数}) \\ \cos(b^n\pi x) &= \cos\Big(b^n\pi(k_m+\rho_m)b^{-m}\Big)=\cos\Big(b^{n-m}\pi(k_m+\rho_m)\Big) \\ &= \cos(b^{n-m}\pi k_m)\ \cos(b^{n-m}\pi\rho_m)=(-1)^{k_m}\ \cos(b^{n-m}\pi\rho_m)\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{h}\Big\{f(\eta_m)-f(x)\Big\}=(-1)^{k_m-1}\frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty}a^n\Big(1+\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)\Big)+\frac{\pi\epsilon(ab)^m}{ab-1} \quad (|\epsilon|<1)$$

ところが、
$1+\cos(\pi\rho_m)\geqq 1,\ 1+\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)\geqq 0$ for $n>m$

$$\therefore \quad \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty}a^n\Big(1+\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)\Big)\geqq\frac{1}{h}a^m\geqq\frac{2}{3}(ab)^m$$

なので、

$$\exists\theta'>1,\quad \frac{1}{h}\sum_{n=m}^{\infty}a^n\Big(1+\cos(b^{n-m}\pi\rho_m)\Big)=\frac{2}{3}(ab)^m\theta'$$

$$\therefore \quad \frac{1}{h}\Big\{f(\eta_m)-f(x)\Big\}=(-1)^{k_m-1}(ab)^m\Big\{\frac{2}{3}\theta'+(-1)^{k_m-1}\frac{\pi\epsilon}{ab-1}\Big\}$$

ここで、

$$\frac{2}{3}\theta'+(-1)^{k_m-1}\frac{\pi\epsilon}{ab-1}>\frac{2}{3}-\frac{\pi}{ab-1}>0 \quad \Big(\because \quad ab>1+\frac{3}{2}\pi\Big)$$

$ab>0$ なので、$m\to\infty$ のとき $(ab)^m\to\infty$. このとき、$\dfrac{1}{h}\Big\{f(\xi_m)-f(x)\Big\}$ も $\dfrac{1}{h}\Big\{f(\eta_m)-f(x)\Big\}$
発散するので、$f'(x)$ は存在しない。