情報数学

緑川章一

目 次

0.1 集合と命題 4
    0.1.1 集合 4
    0.1.2 命題と集合 8
    0.1.3 命題と証明 11
    0.1.4 逆・裏・対偶 12
    0.1.5 推論の形式 14
0.2 組合せ数学 15
    0.2.1 包含と排除の原理 15
    0.2.2 順列 17
    0.2.3 円順列 19
    0.2.4 一般順列 20
    0.2.5 組合せ 21
    0.2.6 一般順列と組合せ 23
    0.2.7 重複組合せ 25
    0.2.8 二項定理 27
0.3 鳩の巣原理 31

0.1　集合と命題

0.1.1　集合

集合の定義方法

数学的にはっきりと定義されたものの集まりを集合と言う。集合を定義する方法は、2 通りある。

(1) 集合 M の要素を列挙する方法。これを外延 (extension) と呼ぶ。

$$M = \{a, b, c, \cdots\}$$

【例】　$M = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$

(2) 集合に含まれる要素の満たすべき性質 (条件) を述べる方法。これを内包 (intension) と呼ぶ。書き方は、カッコ $\{\cdots\}$ を — で区切り、左辺に仮の要素名 (x) を、右辺にその要素が満たすべき性質 $c(x)$ を記す。関数 $c(x)$ は、命題関数とも呼ばれる。
【例】　$M = \{x | x$ は自然数 $\}$

x が集合 M の要素であるとき、

$$x \in M, \quad \text{または、} \quad M \ni x$$

などと表す。また、x が集合 M の要素でないとき、

$$x \notin M$$

と表す。有限個を要素からなる集合を**有限集合**、無限個の要素からなる集合を**無限集合**と言う。
要素を 1 つも持たない集合を**空集合**と言い、記号 $\emptyset$ で表す。

数の集合

	記号	由来
自然数	N	[英] natural number
整　数	Z	[独] Zahl（数）
有理数	Q	[英] quotient （商）
実　数	R	[英] real number
複素数	C	[英] complex number

$$
\begin{aligned}
N &= \{1,2,3,\cdots\} \\
Z &= \{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\} \\
Q &= \{x|x \text{ は正と負で表されるすべての分数}\} \\
R &= \{x|x \text{ は数直線上のすべての点が表す数}\} \\
C &= \{z|z = x+iy,\ x,\ y \in R\}
\end{aligned}
$$

部分集合、べき集合

$A,\ B$ を 2 つの集合とする。A のすべての要素が、どれも必ず B の要素であるとき、A は B の部分集合であるといい、

$$A \subset B, \quad \text{または、} \quad B \supset A$$

と表す。空集合は、全ての集合の部分集合である。

集合 A と B が等しいとき、$A = B$ と表す。

記号 $\subset,\ =$ などで表される集合の関係を包含関係と言い、次のことが成り立つ。

1. $A \subset A$
2. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ ならば、$A = B$
3. $A \subset B$ かつ $B \subset C$ ならば、$A \subset C$

数の集合 $N,\ Z,\ Q,\ R,\ C$ では、次の包含関係が成り立つ。

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

【例】　集合 M は、3 つの文字 a, b, c からなる集合とする。すなわち、

$$M = \{a, b, c\}$$

とすると、

$$a \in M,\ b \in M,\ c \in M,\quad \text{しかし、}\quad d \notin M$$

M の部分集合

要素数 3 の部分集合　集合 $M = \{a, b, c\}$ 自身も、M の部分集合である。

要素数 2 の部分集合　$\{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\}$ の 3 個

要素数 1 の部分集合　$\{a\},\ \{b\},\ \{c\}$ の 3 個

要素数 0 の部分集合　空集合 $\emptyset = \{\ \}$ も M の部分集合である。

ゆえに、部分集合の総数は、

$$1 + 3 + 3 + 1 = 8 = 2^3$$

である。

べき集合

部分集合の集合をべき集合と言う。

【例】集合 $M = \{a, b, c\}$ の部分集合の集合、

$$\emptyset, \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\},\ M = \{a, b, c\}$$

を M のべき集合と言う。

集合 M の要素の数を $|M|$ で表す。すなわち、$n = |M|$ とおくと、集合 M の部分集合の総数は、

$$2^n$$

で与えられる。

証明　集合 M の要素を $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ とする。部分集合には、a_1 を含むものと含まないものとの 2 通りがある。その 2 通りの部分集合のそれぞれについて、a_2 を含むものと含まないものとの 2 通りがある。同様のことが、a_3 から a_n についても成り立つ。ゆえに、部分集合の総数は、2 を n 回掛けたもの、すなわち 2^n となる。

【例】　集合 $M = \{a, b, c\}$ の部分集合の場合。含める場合を○で、含めない場合は何も書かないで表すと、場合分けは、次のようになる。

番号	a	b	c	部分集合
1			○	$\{a, b, c\}$
2				$\{a, b\}$
3			○	$\{a, c\}$
4				$\{a\}$
5			○	$\{b, c\}$
6				$\{b\}$
7			○	$\{c\}$
8				$\{\} = \emptyset$

集合算

和集合

2 つの集合 A と B の少なくとも一方に属している要素全体の集合を A と B の和集合と言い、$A \cup B$ と表す。

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$$

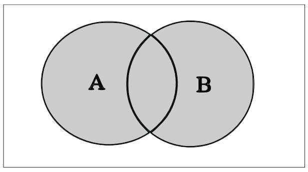

図 1: 和集合

積集合

2 つの集合 A と B の両方に属している要素全体の集合を A と B の積集合、または共通部分と言い、$A \cap B$ と表す。

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

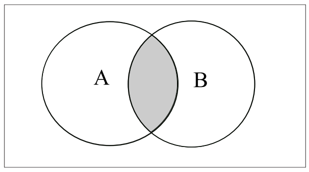

図 2: 積集合

和集合と積集合については、次の性質が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
&A \cup A = A && A \cap A = A && \text{(巾等則)}\\
&A \cup B = B \cup A && A \cap B = B \cap A && \text{(交換則)}\\
&A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C && A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C && \text{(結合則)}\\
&A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) && A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) && \text{(分配則)}
\end{aligned}
$$

補集合

全体集合 Ω の中で、部分集合 A に属さないものの集合を A の補集合 (complementary set) とよび、記号 A^c で表す。補集合を内包的な定義で表すと、

$$A^c = \{x | x \notin A\}$$

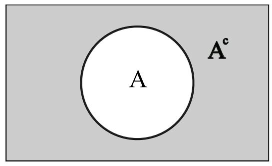

図 3: 補集合

補集合は、明らかに次の性質を満たす。

$$
\begin{aligned}
&(A^c)^c = A,\\
&A \cup A^c = \Omega, \qquad A \cap A^c = \emptyset
\end{aligned}
$$

ド・モルガンの法則 (de Morgan's law)

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

0.1.2 命題と集合

命題 (proposition)
意味が明瞭で、客観的に真か偽 (true or false) の判定できる文章。
例 :「ソクラテスは人間である。」

真理値 (truth value)
ある命題の真偽を、その命題の真理値と言う。真を 1 で、偽を 0 で表すこともある。
例

命題	真理値	備考
ソクラテスは人間である。	真	(ソクラテスは、古代ギリシャの哲学者)
鯨にはへそがある。	真	(鯨は、哺乳類)
蛙にはへそがある。	偽	(蛙は、両生類)

ある命題 p を満たす要素全体の集合を P とする。また、別の命題 q の満たす要素全体の集合を Q とする。このように命題と集合を対応させると、論理の法則は、集合の言葉に置き換えることができる。

論理否定 p ではない $(\neg p)$　　集合 P^c

例　命題 $p =$「東京は日本の首都である。」

$\neg p =$「東京は日本の首都ではない。」

【注】日本の首都の集合を P とすると、P の要素は東京だけである。
すなわち、$P = \{$ 東京 $\}$ である。

論理和「p または q」$(p \vee q)$　　集合 $P \cup Q$

例　命題 $p =$「弟がいる。」

命題 $q =$「妹がいる。」

$p \vee q =$「弟か妹がいる。」

論理積「p かつ q」$(p \wedge q)$　　集合 $P \cap Q$

例　命題 $p =$「英語が話せる。」

命題 $q =$「フランス語が話せる。」

$p \wedge q =$「英語もフランス語も話せる。」

条件 (含意) ”すべての p について”「p ならば q」$(p \Rightarrow q)$ 集合 $P \subset Q$,　P は Q の部分集合

例　命題 $p =$「吹雪だ。」

命題 $q =$「大風だ。」

$p \Rightarrow q =$「吹雪ならば、大風だ。」

排他的論理和　「p または q」$(\oplus)$　集合 $(P \cap Q^c) \cup (P^c \cap Q)$

例えば、水曜日の１時限には、「芸術」と「法学」の講義があるとしよう。
命題 p を「水曜日の１時限目には、芸術の講義を受けます。」、
命題 q を「水曜日の１時限目には、法学の講義を受けます。」
とする。両方の講義をいっぺんに受講できないので、「水曜日の１時限目には、芸術か法学の講義を受けます。」は、論理記号を用いて表すと、$p \oplus q$ となる。

真理値表

真偽がはっきりしている命題に論理否定、論理和などの論理演算を行った命題の真偽を、もとの命題の真偽とともに表にしたものを**真理値表**と言う。

論理否定 (NOT)

正しい命題 $p =$ 「ワシントンはアメリカ合衆国の首都である。」に対して、その否定 $\neg p =$ 「ワシントンはアメリカ合衆国の首都ではない。」は誤り (偽) である。
一方、偽の命題 $p =$ 「$\sqrt{2}$ は有理数である。」の否定 $\neg p =$ 「$\sqrt{2}$は有理数でない。」は真である。

p	$\neg p$
真	偽
偽	真

論理和 (OR)

$p \vee q$ は、2 つの命題 p または q のすくなくとも一方が正しい場合に、真、どちらも偽の場合には偽となる。
命題 p=「コーヒーに砂糖を入れます。」,
命題 q=「コーヒーにミルクを入れます。」
とすると、複合命題は、
$p \vee q =$「コーヒーには、砂糖かミルクを入れます。」
となる。コーヒーには、砂糖かミルクのどちらかを入れる場合もあれば、両方入れる場合もある。

p	q	$p \vee q$
真	真	真
真	偽	真
偽	真	真
偽	偽	偽

排他的論理和 (exclusiveOR) または (XOR)

$p \oplus q$ は、2 つの命題 p と q のどちらか一方のみが成り立ち、両方とも同時に成り立つことは無い場合を表す。

命題 p=「紅茶にレモンを入れます。」,
命題 q=「紅茶にミルクを入れます。」
とすると、複合命題は、
$p \oplus q =$「紅茶には、レモンかミルクを入れます。」
となる。紅茶に、レモンとミルクを同時にも入れることはない。入れたらどうなるか、試したことはありますか?

p	q	$p \oplus q$
真	真	偽
真	偽	真
偽	真	真
偽	偽	偽

論理積 (AND)

$p \wedge q$ は、2つの命題 p と q がともに真の場合のみ真で、それ以外の場合には偽である。
命題 p=「2本足である。」,
命題 q=「羽がない。」
とすると、複合命題は、
$p \wedge q$ =「2本足で羽がない。」
となる。
【注】「人間とは、2本足で羽のない動物である。」(プラトン)

p	q	$p \wedge q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	偽
偽	偽	偽

条件法 (IMP) (IMP=implication)

$p \to q$ は、命題 p が真で q が偽の場合のみ偽となる。
命題 p=「一生懸命に勉強する。」,
命題 q=「青森大学に合格する。」
とすると、複合命題は、
$p \to q$ =「一生懸命に勉強すれば、青森大学に合格する。」
となる。一生懸命に勉強して合格したならば、命題 $p \to q$ は、正しい (真)。一生懸命に勉強して不合格ならば、命題 $p \to q$ は、正しくない (偽)。一生懸命に勉強しなかった場合については、合格するとも不合格だとも言っていないので、結果はどうあれ、命題 $p \to q$ は正しい (真)。

p	q	$p \to q$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

0.1.3 命題と証明

2つの『ならば』

(1) 嵐ならば大雨である。 ($\Rightarrow$ の『ならば』)

(2) 晴れたならば動物園に連れて行ってやる。($\to$ の『ならば』)

(1) の場合　命題 p を「嵐である。」、命題 q を「大雨である。」とする。この場合は、命題 p が成り立てば、命題 q が必ず成り立つ。それぞれの命題を満たす集合を $P,\ Q$ とすると、P は Q の部分集合である。すなわち、

$$P \subset Q$$

が成り立つ。このとき、命題「p ならば q」($p \Rightarrow q$) が成り立つ領域、すなわち、$P^c \cup Q$(図 (4) の (1) の網掛け部分) は全体集合に一致する。

一方、(2) の場合に、命題pを「晴れである。」、命題qを「動物園に連れていく。」とすると、晴れても動物園に連れて行かない場合もありうる。そして、この場合に、命題$p \to q$は偽となる。それぞれの命題に対応する集合をP, Qとすると、PはQの部分集合ではないので、命題$p \to q$の成り立つ領域 $(P^c \cup Q)$(図 (4) の網掛け部分) は、全体集合に一致しない。

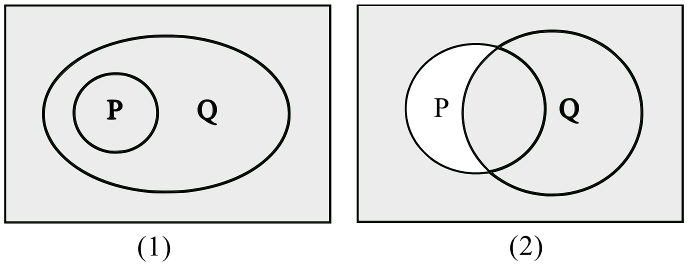

図 4: 2 つの『ならば』の集合

２つの命題$p,\ q$に対して、命題$p \Rightarrow q$が成り立つとき、すなわち、(1) の場合に、qはpであるための**必要条件**と言う。逆に、pはqであるための**十分条件**と言う。

$p \Rightarrow q$かつ$q \Rightarrow p$のときを、$p \Leftrightarrow q$と表し、pとqは**同値**であると言う。このとき、pはqの**必要十分条件**である。と言う。qもまたpであるための**必要十分条件**である。

0.1.4 逆・裏・対偶

命題「pならばq」$(p \to q)$ に対して、

(1) 命題「qならばp」$(q \to p)$ を命題「pならばq 」の**逆**と言う。

(2) 命題「pでないならばqでない」$(\neg p \to \neg q)$ を命題「pならばq」の**裏**と言う。

(3) 命題「qでないならばpでない」$(\neg q \to \neg p)$ を命題「pならばq」の**対偶**と言う。

ここで、$\neg p$は命題pの否定を、$\neg q$は命題qの否定を表す。もちろん、以上の事は、$(p \Rightarrow q)$ の場合にも成り立つ。

命題 $(p \to q)$ が真ならば、その対偶の命題 $(\neg q \to \neg p)$ も真である。それは、真理値表を書いてみれば分かる。真理値表において一般には、真を 1 で偽を 0 で表す。命題$p \to q$の真理値表を、数字を用いて表すと、命題が成り立たないのは、前提が真で結論が偽の場合だけだから、

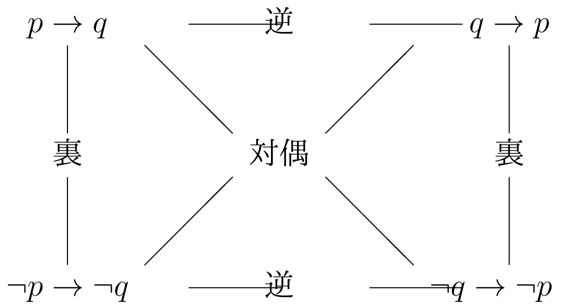

表 1: 逆、裏、対偶

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

表 2: $p \to q$ の真理値表

$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \to \neg p$
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

表 3: $\neg q \to \neg p$ の真理値表

また、集合論からも次のようにして分かる。

命題 p を満たす要素の集合を P，命題 q の満たす要素の集合を Q とすると、命題 $p \to q$ が真である要素の集合は、$\mathrm{P^c} \cup \mathrm{Q}$ である。一方、その対偶である命題 $\neg q \to \neg p$ が真である要素の集合は、$(\mathrm{Q^c})^\mathrm{c} \cup \mathrm{P^c}$ である。ところが、$(Q^c)^c = Q$ だから $(\mathrm{Q^c})^\mathrm{c} \cup \mathrm{P^c} = \mathrm{Q} \cup \mathrm{P^c} = \mathrm{P^c} \cup \mathrm{Q}$ となる。ゆえに、命題「p ならば q」とその対偶である命題「q でないならば p でない」は同値である。

0.1.5 推論の形式

$p,\ q,\ r$ を命題とする。

(1) 命題「p ならば q」が真で命題 p が成り立つならば、命題 q が成り立つ。

(2) 命題「p ならば q」と命題「q ならば r」がともに真ならば、命題「p ならば r」は真である。

(1)、(2) が成り立つことは、真理値表をもちいて確かめることができる。

命題 $p \to q$ の真理値表を、数字を用いて表すと、命題が成り立たないのは、$p = 1$ で $q = 0$ の場合だけだから、

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

表 4: $p \to q$ の真理値表

この表から、p が 1 で $p \to q$ も 1 ならば q も 1 となるので、確かに (1) は成り立っていることが分かる。

次に (2) について真理値表を作って調べてみよう。表 5 から分かるように、$p \to q$

場合	p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$
[1]	1	1	1	1	1	1
[2]	1	1	0	1	0	0
[3]	1	0	1	0	1	1
[4]	1	0	0	0	1	0
[5]	0	1	1	1	1	1
[6]	0	1	0	1	0	1
[7]	0	0	1	1	1	1
[8]	0	0	0	1	1	1

表 5: $p \to q,\ q \to r,\ p \to r$ の真理値表

も $q \to r$ も成り立つ、すなわち 1 となるのは、[1], [5], [7], [8] の場合で、その時の $p \to q$ も確かに 1 である。

例題 1 Alice が「Betty は正直者だ 」と言った。これは、「もし A が正直者ならば B は正直者である」となるので、A → B と表される。命題が成り立たないのは、A が嘘つきで B が正直者の場合だけである。1 正直者を 1 で、嘘つきを 0 で表すと、その真理値表は、次のようになる。命題 A → B が成り立つのは、[1], [3], [4] の場

場合	A	B	A → B
[1]	1	1	1
[2]	1	0	0
[3]	0	1	1
[4]	0	0	1

合である。このことから、2 人とも正直者か、A は嘘つきで B は正直者か、2 人とも嘘つきの 3 通りの場合があると結論づけられる。

例題 2 Alice, Betty, Carol の 3 人がいる。Betty は、「Carol は正直者だ」と言った。ところが、Alice は、「Carol は嘘つきだ」と言った。3 人のうち 1 人は嘘つきである。嘘つきはだれか。

3 人のうち 1 人が嘘つきだから、3 通りの場合を調べれば良い。Betty が正直者ならば Carol は正直者である。これを B → C と書こう。Alice が正直者ならば Carol は嘘つきである。これを A → ¬C と書こう。これらの真理値表は、以下のようである。

場合	A	B	C	¬C	B → C	A → ¬C
[1]	0	1	1	0	1	1
[2]	1	0	1	0	1	0
[3]	1	1	0	1	0	1

命題 B → C と A → ¬C が成り立つのは、[1] の場合だけである。ゆえに、嘘つきは Alice である。

0.2 組合せ数学

0.2.1 包含と排除の原理

有限集合 A に含まれる要素の数を $|A|$ と書こう。集合 A と集合 B の和集合 $A \cup B$ に含まれる要素の数 $|A \cup B|$ は、共通部分 $A \cap B$ が無ければ、$|A \cup B| = |A| + |B|$

となるが、共通部分に含まれる要素は、$|A|$ を求めるときも、$|B|$ を求めるときも数えているので、２回数えていることになる。そこで、その部分を一回引く必要があるので、

$$|\mathrm{A} \cup \mathrm{B}| = |\mathrm{A}| + |\mathrm{B}| - |\mathrm{A} \cap \mathrm{B}| \tag{1}$$

となる。このように、集合 $A \cup B$ の要素の数を数え上げるとき、集合 A と B の要素の数を求める値に含め、共通部分 $A \cap B$ の要素の数をとり除く方法を**包含と排除の原理** (inclusion-exclusion principle)、または、略して**包除原理**と言う。

例　50 人のクラスがあって、英語が得意な人が 30 人、数学が得意な人が 10 人、どちらも得意な人が 5 人いる。クラス全体の集合を Ω, 英語の得意な人の集合を E, 数学が得意な人の集合を M とすると、$|E| = 30,\ |M| = 10,\ |E \cap M| = 5$ となる。英語または数学が得意な人の人数 $|E \cup M|$ は、

$$|E \cup M| = |E| + |M| - |E \cap M| = 30 + 10 - 5 = 35$$

である。また、どちらも不得意な人の数は、

$$|\Omega| - |E \cup M| = 50 - 35 = 15$$

である。

包除原理は、もっとたくさんの集合の場合にも拡張できる。例えば、３つの有限集合 A, B, C の和集合に含まれる要素の数 $|A \cup B \cup C|$ を場合を考えてみよう。まず、$D = A \cup B$ とおくと、

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |D \cup C| \\ &= |D| + |C| - |D \cap C| \\ &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \end{aligned} \tag{2}$$

ところが、(1) 式より、

$$\begin{aligned} |(A \cap C) \cup (B \cap C)| &= |A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)| \\ &= |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| \end{aligned} \tag{3}$$

となるので、これを (2) 式に代入して、項の順序を入れ替えると、

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C| \tag{4}$$

を得る。

0.2.2　順列

n コの異なったものから r コを取り出し、順序を付けて一列に並べものを順列 **(permutation)** といい、並べ方の数を記号 ${}_n\mathrm{P}_r$ で表す。

順序	取り出し方
1 番目	n 通り
2 番目	$n-1$ 通り
3	$n-2$ 通り
$\vdots$	$\vdots$
r 番目	$n-r+1$ 通り

1 番目の選び方は n 通り、その各々に対して 2 番目の選び方は $n-1$ 通り。3 番目の選び方は、1 番目、2 番目の選び方の各々に対して $n-2$ 通り、と続いて、r 番目の選び方は $n-(r-1)=n-r+1$ 通りとなるので、n コから r コを選ぶ順列の総数は、

$$
{}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \tag{5}
$$

となる。

【例】3 つのアルファベット a, b, c を順序を付けて並べる。

1 番目	2 番目	3 番目
a	b	c
	c	b
b	a	c
	c	a
c	a	b
	b	a

順列の総数は、${}_3\mathrm{P}_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ 通り となる。

特に、$r = n$ の場合には、

$${}_n\mathrm{P}_n = n(n-1)\cdots 1$$

これを n の階乗と言い、$n!$ で表す。すなわち、

$$n! = n(n-1)\cdots 1$$

また、${}_n\mathrm{P}_r$ を階乗の記号を用いて表すと、

$$\begin{aligned} {}_n\mathrm{P}_r &= n(n-1)\cdots(n-r+1) \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)\ (n-r)(n-r-1)\cdots 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 1} \end{aligned}$$

となるので、

$${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{6}$$

となる。ここで、形式的に $r = n$ とおくと、

$${}_n\mathrm{P}_n = n! = \frac{n!}{0!}$$

となる。そこで、$0! = 1$ と定義する。また、(6) 式より、${}_n\mathrm{P}_0 = 1$ となる。

例題 5 個数字 0, 1, 2, 3, 4 の中の異なる数字を用いてできる整数について
4 桁の整数の数
千の位の数字は、1, 2, 3, 4 の 4 通り。その各々の場合の百、十、一の位の数の選び方は、${}_4\mathrm{P}_3$ 通り。ゆえに、求める数は、

$$4 \times {}_4\mathrm{P}_3 = 96 \text{ 通り。}$$

4 桁の偶数の個数
一の位の数字は、0, 2, 4 の 3 通り。その各々の場合の千、百、十の位の数の選び方は、${}_4P_3$ 通り。ゆえに、$3 \times {}_4\mathrm{P}_3 = 72$ 通り。ところが、千の位は 0 にはなり得ないので、その場合の数 $2 \times {}_3\mathrm{P}_2 = 12$ 通り を引かなければならない。ゆえに、求める数は、$72 - 12 = 60$ 通り である。
4 桁の奇数
一の位の数字は、1, 3 の 2 通り。その各々の場合の千の位の数の選び方は、0 と一の位に選んだ数を除いた 3 通り。百と十の位は、残った 3 コの順列の数だから、$2 \times 3 \times {}_3\mathrm{P}_2 = 36$ 通り である。
［チェック］ $60 + 36 = 96$

0.2.3 円順列

A, B, C, D, E の 5 人を一列に並べる順列の数は、

$$5! = 120 \text{ 通り。}$$

次に、この 5 人を円卓に配置する場合、ABCDE と BCDEA, CDEAB, DEABC, EABCD は回転して重ねることができるので、同じ並び方と考えることができるので、配置の総数は、

$$\frac{5!}{5} = 4! = 24 \text{ 通り。}$$

一般に、いくつかのものを円形に並べた配列を**円順列**と言う。n コのものを円形に並べる場合には、全体を回転させて一致する配置は同じものと考えるので、 1 つを固定して、残りの n-1 コの順列について考えれば良いので、その総数は、

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

となる。

0.2.4　一般順列

$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$と書かれた 5 枚のカードから作られる 5 桁の数字の総数は、

$${}_5\mathrm{P}_5 = 120 \text{ 通り。}$$

$\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$と書かれた 5 枚のカードから作られる 5 桁の数字の総数は、いくつか。 3 つの 1 を区別して、$\boxed{1_a}$, $\boxed{1_b}$, $\boxed{1_c}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$として、順列の数を求めると、5! となる。ところが、3 枚の 1 は同じものなので、$\boxed{1_a}$, $\boxed{1_b}$, $\boxed{1_c}$の並び方の異なるものは同一の並びとみなす必要がある。例えば、

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{1_a} & \boxed{2} & \boxed{1_b} & \boxed{1_c} & \boxed{3} \\
\boxed{1_a} & \boxed{2} & \boxed{1_c} & \boxed{1_b} & \boxed{3} \\
\boxed{1_b} & \boxed{2} & \boxed{1_a} & \boxed{1_c} & \boxed{3} \\
\boxed{1_b} & \boxed{2} & \boxed{1_c} & \boxed{1_a} & \boxed{3} \\
\boxed{1_c} & \boxed{2} & \boxed{1_a} & \boxed{1_b} & \boxed{3} \\
\boxed{1_c} & \boxed{2} & \boxed{1_b} & \boxed{1_a} & \boxed{3}
\end{array}$$

の $6 = 3!$ コは、すべて同じものとみなさなければならないので、 3 つの 1 の並べ方の数の 3!で割ってやらなければならない。ゆえに、並べ方の総数は、

$$\frac{5!}{3!} = 20 \text{ 通り}$$

となる。それらをすべて書き下すと、

23111	21311	21131	21113	32111
12311	12131	12113	31211	13211
11231	11213	31121	13121	11321
11123	31112	13112	11312	11132

となる。

一般に次のような場合を考える。全部で n コのものがあるが、それらは全部が違うものではなく、k 種類の異なるものからできているとする。そして、1 番目の種類は n_1 コ、2 番目の種類は n_2 コ、一般に $i(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 番目の種類のものは n_i コあるとする。すなわち、$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ が成り立つ。この n コのものの順列の総数は、

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\cdots\,n_k!}$$

で与えられる。
【例】　7 つのアルファベット a, a, b, b, b, c, d の並べ方の総数は、

$$\frac{7!}{2!\,3!\,1!\,1!} = 420 \text{ 通り}$$

である。

0.2.5　組合せ

n コの異なるものの中から順序を問題にしないで、異なる r コを取り出したものの 1 組を、n コのものから r コを取り出した**組合せ (combination)** と言う。組合せの総数を ${}_n\mathrm{C}_r$ と表す。言い換えると、要素の数が n コの集合 A から作られる要素の数が r コの部分集合の総数が ${}_n\mathrm{C}_r$ である。

${}_n\mathrm{C}_r$ と ${}_n\mathrm{P}_r$ の関係

n コのものから r を取り出す組合せの数を ${}_n\mathrm{C}_r$ と書いた。取り出した一組の r コの並べ方は、$r!$ 通りである。ゆえに、n コのものから r コを取り出しで順に並べる方法の数 ${}_n\mathrm{P}_r$ は、r コを取り出す組合せの数に取り出した r コの順列の数を掛けたものとなる。すなわち、

$${}_n\mathrm{C}_r \cdot r! = {}_n\mathrm{P}_r$$

ところで、

$${}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

だから、

$${}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

となる。特に、${}_n\mathrm{C}_0 = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$ であることに注意しよう。

【例】　3 コの要素からなる集合 $M = \{a,\ b, c\}$ から 2 コの要素を取り出して作られる順列の総数は、${}_3\mathrm{P}_2 = 3 \cdot 2 = 6$ 通りである。

番号	1 番目	2 番目
(1)	a	b
(2)	a	c
(3)	b	a
(4)	b	c
(5)	c	a
(6)	c	b

ところが、(1) と (3)，(2) と (5)，(4) と (6) は同じ組合せである。このように同じ組合せで順列の異なるものは、2! 通りずつあるので、集合 M から作られる要素の数が 2 コの部分集合の総数は、$\dfrac{{}_3P_2}{2!} = 3$ となる。

　また、次の公式も成り立つ。

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_n\mathrm{C}_{n-r} $$

証明

$$ {}_n\mathrm{C}_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!\;(n-(n-r))!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} = {}_n\mathrm{C}_r $$

これは、次のように考えることもできる。n コ要素からなる集合から r コの要素を取り出すと、残りの要素は $n-r$ コである。従って、r コの要素からなる部分集合の総数は、$n-r$ コの要素からなる部分集合の総数に等しい。

　数ある組み合わせの恒等式の中でも、次の公式は有名である。

$$ {}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r $$

【証明】

$$
\begin{aligned}
{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r &= \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}\cdot r + \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}\cdot(n-r) \\
&= \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}\cdot(r+(n-r)) \\
&= \frac{(n-1)!}{r!(n-r)!}\cdot n \\
&= \frac{n!}{r!(n-r)!} \\
&= {}_n\mathrm{C}_r
\end{aligned}
$$

これは、次のように考えることもできる。

n コの要素からなる集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ の部分集合の中で、r コの要素からなる集合の総数は、${}_n\mathrm{C}_r$ である。この部分集合を、要素 a_1 を含むものと含まないものとに分けて考える。そこで、集合 A の部分集合で、要素 a_1 を含まない部分集合を $B=\{a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$ とおく。

(1) 要素 a_1 を含む要素 r の部分集合は、残りの要素を集合 B から $r-1$ コを取り出せば良い。その取り出し方の数は、${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$ である。

(2) 要素 a_1 を含まない要素 r の部分集合は、集合 B から r コを取り出せば良い。その取り出し方の数は、${}_{n-1}\mathrm{C}_r$ である。

0.2.6 一般順列と組合せ

n コのものが、k コの異なる種類に分けられていて、$i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ 番目の種類のものは n_i コある場合、n コのものの順列の総数は、

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\cdots\,n_k!} \qquad \text{ここで、} n=n_1+n_2+\cdots+n_k$$

で与えられた。これは、組合せの個数を用いて、

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\cdots\,n_k!}={}_n\mathrm{C}_{n_1}\cdot{}_{n-n_1}\mathrm{C}_{n_2}\cdots{}_{n-n_1-n_2\cdots-n_{k-2}}\mathrm{C}_{n_{k-1}} \tag{7}$$

と表される。

証明

$$\begin{aligned}
{}_n\mathrm{C}_{n_1} &= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!}\\
{}_{n-n_1}\mathrm{C}_{n_2} &= \frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!}\\
{}_{n-n_1-n_2}\mathrm{C}_{n_3} &= \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!\,(n-n_1-n_2-n_3)!}\\
&\ \vdots\\
{}_{n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-2}}\mathrm{C}_{n_{k-1}} &= \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-2})!}{n_{k-1}!\,n_k!}
\end{aligned}$$

最後の式においては、$n - n_1 - \cdots - n_{k-2} - n_{k-1} = n_k$ を用いた。これらを全て掛けると、証明すべき式が得られる。

(7) 式は、一般順列の総数を組合せの考えを用いて求めることができることを示している。

今、n コの物体があるとする。その内訳は、

$$a_1\text{が}\, n_1\text{コ},\ \ a_2\text{が}\, n_2\text{コ},\ \ a_3\text{が}\, n_3\text{コ}, \cdots,\ \ a_k\text{が}\, n_k\text{コ}$$

だとする。当然のことながら、$n = n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k$ である。

この n コの物体を n コの場所に配置する問題を考えよう。最初に、n_1 の a_1 を n コの場所に配置する方法は、${}_n\mathrm{C}_{n_1}$ である。a_1 の配置の後には、$n - n_1$ コの空所が残っている。そこに a_2 を配置する方法は、${}_{n-n_1}\mathrm{C}_{n_2}$ である。この操作を次々におこなっていって a_{k-1} の配置が終了したとする。残りの空所は数は n_k であるが、これらには残りの a_k を配置することで全ての配置は完了する。

【例】 5 つの文字 $a,\ a,\ a,\ b,\ c$ を一列に並べる方法の数を求めることは、これら 5 つの文字を 5 つの場所

$$\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$$

に配置する問題と同じである。

まず、a の配列の仕方は、

$$\begin{array}{ccccc}
\boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} \\
\boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} \\
\boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} \\
\boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} \\
\boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} \\
\boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}} \\
\boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} \\
\boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} \\
\boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}} \\
\boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\phantom{\mathrm{a}}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}} & \boxed{\mathrm{a}}
\end{array}$$

の 10 通りがある。これは、${}_5\mathrm{C}_3$ で求めることができる。

この a の配置の 10 通りの各々に対して、b の配置の方法は、${}_2\mathrm{C}_1 = 2$ 通り存在する。たとえば、

$$\boxed{\mathrm{a}}\,\boxed{\mathrm{a}}\,\boxed{\mathrm{a}}\,\boxed{\phantom{\mathrm{a}}}\,\boxed{\phantom{\mathrm{a}}}$$

の場合には、

$$\boxed{\mathrm{a}}\ \boxed{\mathrm{a}}\ \boxed{\mathrm{a}}\ \boxed{\mathrm{b}}\ \boxed{\phantom{\mathrm{a}}}$$
$$\boxed{\mathrm{a}}\ \boxed{\mathrm{a}}\ \boxed{\mathrm{a}}\ \boxed{\phantom{\mathrm{a}}}\ \boxed{\mathrm{b}}$$

の 2 通りである。残った 1 つの空所には自動的に c が入る。ゆえに、求める方法の数は、

$${}_5\mathrm{C}_3 \cdot {}_2\mathrm{C}_1 = \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{2!}{1!\,1!} = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20 \text{ 通り}$$

となる。

0.2.7 重複組合せ

n 種類のものから重複 (ちょうふく) を許して r コを取り出す組合せを**重複組合せ (repeated combination)** と言い、その総数を ${}_n\mathrm{H}_r$ で表す。

重複組合せの総数 ${}_n\mathrm{H}_r$ は、組合せの数を用いて、

$${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r \tag{8}$$

と表される。

証明 n 種類の違いを区別するために、1, 2, $\cdots$, n と番号をつけよう。すると、1 から n までの数から重複を許して r コを取り出す場合の数を求めることになる。いま、1 を x_1 コ、2 を x_2 コ、$\cdots$, n を x_n コ取り出したとしよう。これは、次のように表される。

$$\overbrace{1\ \cdots\ 1}^{x_1\text{コ}}\ |\ \overbrace{2\ \cdots\ 2}^{x_2\text{コ}}\ |\ \overbrace{3\ \cdots\ 3}^{n_3\text{コ}}\ |\ \cdots\cdots\ |\ \overbrace{n\ \cdots\ n}^{x_n\text{コ}}$$

並べた数字の数は全部で r コだから、$r = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n$ が成り立つ。また、各数字の集まりを区別するために、1 から 2, 2 から 3 と数字が変わる境には $n-1$ コの仕切り | をいれる。こうすると、数字の総数 r と仕切りの数 $n-1$ を足した $n+r-1$ コの場所を用意し、

$$\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}\ \cdots\cdots\ \boxed{}\,\boxed{}$$

のどこに $n-1$ コの仕切りを入れるかで、一つの重複組合せを決めることができる。例えば、

$$\boxed{}\ \ldots\ \boxed{}\,\boxed{|}\,\boxed{}\ \cdots\cdots\ \boxed{|}\,\boxed{}\ \ldots\ \boxed{}$$

で 1 つの組合せが出来上がる。

仕切りの配置が決まったならば、左から最初の仕切りの場所 $\boxed{|}$ までの各 $\boxed{}$ には 1 を入れ、次の $\boxed{|}$ までの $\boxed{}$ には 2 を入れ等々と、

$$\boxed{1}\ \ldots\ \boxed{1}\,\boxed{|}\,\boxed{2}\ \ldots\ldots\ \boxed{|}\,\boxed{n}\ \ldots\ \boxed{n}$$

のように最後まで繰り返してゆけば良い。

$n+r-1$ の空所に $n-1$ コ仕切りを入れる方法の数は、${}_{n+r-1}\mathrm{C}_{n-1} = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ である。ゆえに、(8) 式は成り立つ。

【例】 a, b, c の 3 文字から重複を許して 3 コを取り出す場合の数は、$n = 3,\ r = 3$ だから、

$$ {}_3H_3 = {}_5\mathrm{C}_3 = 10 \text{ 通り} $$

となる。それら 10 通りの方法とそれに対応する 5 つの場所 $\square$ における仕切り位置を全て書き下すと、

a a a				$\vert$	$\vert$
a a b			$\vert$		$\vert$
a a c			$\vert$	$\vert$	
a b b		$\vert$			$\vert$
a b c		$\vert$		$\vert$	
a c c		$\vert$	$\vert$		
b b b	$\vert$				$\vert$
b b c	$\vert$			$\vert$	
b c c	$\vert$		$\vert$		
c c c	$\vert$	$\vert$			

となる。

0.2.8 二項定理

和の記号

ここで、和の記号を導入する。数列 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n$ の和を記号 Σ を用いて、

$$ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k $$

と書く。左辺は、a_k の添え字 k の値を 1 から n まで変化させて、その和をとることを意味する。例えば、$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2$ は、

$$ \sum_{k=1}^{10} k^2 $$

と書く。和を英語で、sum と言う。アルファベットの s に相当するギリシャ文字を大文字で表すと、Σ となる。そこで、これを和の記号として用いるのである。

二項展開

$(x+y)^n$ の展開を考える。

$$\begin{aligned}(x+y)^0 &= 1\\(x+y)^1 &= x+y\\(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2\\(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\\(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4\\&\vdots\end{aligned}$$

一般に、

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= {}_n\mathrm{C}_0x^n+{}_n\mathrm{C}_1x^{n-1}y+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}y^2+{}_n\mathrm{C}_3x^{n-3}y^3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_ny^n\\&= \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kx^{n-k}y^k \qquad (9)\end{aligned}$$

となる[1]。

【証明】 $(x+y)^n$ は、$(x+y)$ を n コ掛けたものである。

$$(x+y)\ (x+y)\ \cdots\ (x+y)$$

$x^{n-k}y^k$ は、この n コの $(x+y)$ から x または y を取り出して掛けたものである。その時、取り出す x の数は $n-k$ コで、y の数は k コである。その係数は x と y の取り出し方の数で決まる。n コの $(x+y)$ から k コの y を取り出す場合の数は、${}_nC_k$ である。これが、$(x+y)^n$ を展開したときの、$x^{n-k}y^k$ の係数である。

また、数学的帰納法を用いて証明することもできる。そのときには、公式 ${}_n\mathrm{C}_k={}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_k$ が重要な役割をする。

1. $n=1$ のとき、

$$(x+y)^1={}_1\mathrm{C}_0x^1y^0+{}_1\mathrm{C}_1x^0y^1=x+y$$

ゆえに、$n=1$ のとき、(9) 式は成り立つ。

[1] 二項定理は、高校「数学 II」の内容である。

2. $(x+y)^{n-1}$ は、

$$(x+y)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k x^{n-k-1}y^k$$

と展開できると仮定すると、

$$\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)^{n-1}(x+y)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}C_k x^{n-k-1}y^k\right)(x+y)\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k x^{n-k}y^k+\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k x^{n-k-1}y^{k+1}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k x^{n-k}y^k+\sum_{k'=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k'-1} x^{n-k'}y^{k'} \quad (k'=k+1\text{ とおく。})\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_k x^{n-k}y^k+\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} x^{n-k}y^{k} \quad (k'=k\text{ とおく。})\\
&= {}_{n-1}\mathrm{C}_0 x^n y^0+\sum_{k=1}^{n-1}\left({}_{n-1}\mathrm{C}_k+{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\right)x^{n-k}y^k+{}_{n-1}\mathrm{C}_{n-1}x^0y^n\\
&= {}_n\mathrm{C}_0 x^n y^0+\sum_{k=1}^{n-1}{}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}y^k+{}_n\mathrm{C}_{n-1}x^0y^n\\
&= \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^{n-k}y^k
\end{aligned}$$

ゆえに、(9) 式は成り立つ。

二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ の公式 ${}_n\mathrm{C}_k={}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_k$ を、

$$\begin{array}{ccc}
{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} & & {}_{n-1}\mathrm{C}_k\\
 & {}_n\mathrm{C}_k &
\end{array}$$

と書いて、$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$ と変化した場合の値を行に、$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$ と変化した場合の値を列に書き並べたものを**パスカルの三角形**と言う。

【例 1】 $(x-1)^5$ の展開式を求める。

$$\begin{aligned}
(x+y)^5 &= {}_5\mathrm{C}_0x^5y^0+{}_5\mathrm{C}_1x^4y^1+{}_5\mathrm{C}_2x^3y^2+{}_5\mathrm{C}_3x^2y^3+{}_5\mathrm{C}_4x^1y^4+{}_5\mathrm{C}_5x^0y^5\\
&= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5
\end{aligned}$$

$n=1$								1		1						
$n=2$							1		2		1					
$n=3$						1		3		3		1				
$n=4$					1		4		6		4		1			
$n=5$				1		5		10		10		5		1		
$n=6$			1		6		15		20		15		6		1	
$n=7$		1		7		21		35		35		21		7		1
$\vdots$																

において $y=-1$ を代入すると、

$$(x-1)^5 = x^5 + (-1)\cdot 5x^4 + (-1)^2\cdot 10x^3 + (-1)^3\cdot 10x^2 + (-1)^4\cdot 5x + (-1)^5$$

すなわち、

$$(x-1)^5 = x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

を得る。

【例 2】 (9) 式において、$x=y=1$ とおくと、

$$2^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n$$

が成り立つ。

多項定理

$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$ を展開したとき、$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ $(n_1+n_2+\cdots+n_k=n)$ の係数は、

$$\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}$$

で与えられる。

証明 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ の係数は、n コの $(x_1+x_2+\cdots+x_k)$ から $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ を 1 つ選び、x_1 を n_1 コ，x_2 を n_2 コ，$\cdots$，x_k を n_k コ取り出す場合の数に等しいので、一般順列の総数に等しい。

別の言い方をすると、n コの $(x_1+x_2+\cdots+x_k)$ から n_1 コの x_1 選び方は ${}_nC_{n_1}$ である。残りの $n-n_1$ コの $(x_1+x_2+\cdots+x_k)$ から n_2 コの x_2 選び方は ${}_{n-n_1}C_{n_2}$

である。この操作を最後まで行うと、選び方の総数は、

$$
\begin{aligned}
&{}_nC_{n_1} \cdot {}_{n-n_1}C_{n_2} \cdots {}_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}C_{n_k} \\
&= \frac{n!}{n_1!\,(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!\,(n-n_1-n_2)!} \cdots \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!\,(n-n_1-\cdots-n_{k-1}-n_k)!} \\
&= \frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_k!}
\end{aligned}
$$

を得る。

【例】 $(a+b+c)^2 = \dfrac{2!}{2!\,0!\,0!}(a^2+b^2+c^2) + \dfrac{2!}{1!\,1!\,0!}(ab+bc+ca)$ だから、

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

となる。

0.3 鳩の巣原理

最初に例を挙げよう。

例１ 9 コの巣に 10 羽の鳩がいると、少なくとも 1 つの巣には 2 羽以上の鳩がいる。

例２ 3 人がいると、すくなくとも 2 人は同性である。

例３ 367 人が集まると、すくなくとも 2 人の誕生日は同じである。
(閏年の一年は 366 日であることに注意しよう！)

上述の例を一般的な法則として述べたものを**ディリクレの鳩の巣原理 (the Dirichlet pigeonhale principle)** という。これは、また、**ディリクレの抽出（ひきだ）し論法**とも**部屋割り論法**などとも言われる。

ディリクレの鳩の巣原理

n コの抽出しの中に $n+1$ コの物があれば、少なくとも 1 つの抽出しには 2 コ以上のものがある。

これは、次のように一般化することができる。

一般化

n コの抽出しの中に $kn+1$ コの物があれば、少なくとも 1 つの抽出しには (k+1) コ以上のものがある。

例 1 8 部屋に 25 人の客を宿泊させるとする。各部屋に 3 人ずつを割り振ると全部で 24 人しか泊めることができない。25 人を泊めようとすると、どうしても 4 人の部屋が 1 つできてしまう。

例 2 袋の中に白い碁石が 5 コ、黒い碁石が 10 コ入っている。この袋の中からでたらめに碁石を取り出す。

(a) 少なくとも 4 コの碁石が同じ色となるためには、何個の碁石を取り出せばよいか。
答 $n = 2,\ k = 4$ だから、$4 \times 2 + 1 = 9$ コ

(b) 少なくとも 7 コの碁石が同じ色となるためには、何個の碁石を取り出せばよいか。
答 白石は 5 コしかないので、最悪の場合には、黒石 5 コと白石 6 コの合わせて 11 コを取り出すと、袋の中の残りは、4 コの白石だけとなる。次の 12 コ目は、必ず白石となり、7 個の白が揃う。ゆえに、答は $5 + 6 + 1 = 12$ コである。

You can take a horse to the water, but you can’t make him drink.