2014 年度率・統計　試験問題

問題 1　集合 $\Omega = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) 要素数が 1 の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_1 = 5$
(2) 要素数が 2 の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_2 = 10$
(3) 要素数が 3 の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_3 = 10$
(4) 要素数が 4 の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_4 = 5$
(5) Ω の部分集合は全部でいくつあるか。 (答)　$2^5 = 32$

問題 2

(1) ある家庭には、2 人の子どもがいる。2 人とも女の子である確率はいくらか。
(答)　$\frac{1}{4}$
(2) ある家庭には、2 人の子どもがいる。そのうち、少なくとも 1 人は女の子だそうである。2 人とも女の子である確率はいくらか。
(答)　$\frac{1}{3}$
(3) ある家庭には、2 人の子どもがいる。この家を訪問したところ、女の子が顔を出した。2 人とも女の子である確率はいくらか。
(答)　$\frac{1}{2}$

問題 3 ある夜、タクシーがひき逃げした。目撃者は、青のタクシーがひいたと証言した。その町で営業しているタクシー会社は、グリーン社とブルー社の二社で、次のようなデータがある。

a 町を走るタクシーの 80 %はグリーン社の緑の車で、残りの 20 %はブルー社の青い車である。
b 夜の事故という状況で目撃者の証言がどれだけ信頼できるかを警察がテストしたところ、2 つの色を正しく識別できる確率は 75 %、間違える確率は 25 %であった。

(1) 夜間に青いタクシーの目撃証言が得られる確率 $\mathrm{P}(青_{目})$ はいくらか。
(答)　$\mathrm{P}(青_{目}) = 0.2 \times 0.75 + 0.8 \times 0.25 = 0.35$
(2) 夜間に緑のタクシーの目撃証言が得られる確率 $\mathrm{P}(緑_{目})$ はいくらか。
(答)　$\mathrm{P}(緑_{目}) = 0.8 \times 0.75 + 0.2 \times 0.25 = 0.65$
(3) ブルー社のタクシーが事故を起こした確率 $\mathrm{P}(青_{事故}) = \dfrac{\mathrm{P}(青_{走} \cap 青_{目})}{\mathrm{P}(青_{目})}$ はいくらか。
(答)　$\mathrm{P}(青_{事故}) = \dfrac{0.2 \times 0.75}{0.35} = \dfrac{0.15}{0.35} = \dfrac{3}{7} \simeq 0.43$

問題 4

[1] 30 本のくじの中に、賞金 100 円の当たりくじが 1 本ある。このくじを 1 本ずつ順に 2 本引く。このときに得る賞金を X 円とする。

(1) 1 本目が当りくじである確率 $\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。$\mathrm{P}(1_{当}) = \dfrac{1}{30}$

(2) 1 本目が外れくじである確率 $\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。$\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{29}{30}$

(3) 1 本目が外れくじであったとき、2 本目が当りくじである確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ はいくらか。$\mathrm{P}(2_{当}|1_{外}) = \dfrac{1}{29}$

(4) 2 本目が当たりくじである確率 $\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \frac{1}{29} \times \frac{29}{30} = \frac{1}{30}$

(5) 2 本のうち、1 本が当りくじである確率 $\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当})$ を求めよ。

$\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当}) = \frac{1}{15}\left(= \frac{1 \times 29}{{}_{30}C_2} = \frac{2 \times 29}{30 \times 29}\right)$

(6) 2 本とも外れである確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \frac{28}{29}\frac{29}{30} = \frac{28}{30} = \frac{14}{15}\left(= \frac{{}_{29}C_2}{{}_{30}C_2}\right)$

(7) X の期待値 (平均) を求めよ。$\mu = 100 \times \frac{1}{15} = \frac{20}{3}$円

(8) X の分散を求めよ。$\sigma^2 = 100^2 \times \frac{1}{15} - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{5600}{9} \approx 622.2$

[2] 60 本のくじの中に、賞金 100 円のあたりくじが 2 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

(1) 2 本とも当たりくじとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) = \frac{1}{59}\frac{2}{60} = \frac{1}{1770}\left(= \frac{1}{{}_{60}C_2}\right)$

(2) 1 本目が当りで 2 本目が外れとなる確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) = \frac{58}{59}\frac{2}{60} = \frac{58}{1770} = \frac{29}{885}$

(3) 1 本目が外れで 2 本目が当りとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \frac{2}{59}\frac{58}{60} = \frac{58}{1770} = \frac{29}{885}$

(4) 2 本のうち 1 本が当たりくじとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) + \mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) + \mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \frac{116}{1770} = \frac{58}{885}\left(= \frac{2 \times 58}{{}_{60}C_2}\right)$

(5) 2 本とも外れである確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \frac{57}{59}\frac{58}{60} = \frac{1653}{1770} = \frac{551}{590}\left(= \frac{{}_{58}C_2}{{}_{60}C_2}\right)$

(6) X の期待値 (平均) を求めよ。$\mu = 100 \times \frac{58}{885} + 200 \times \frac{1}{1770} = \frac{20}{3}$

(7) X の分散を求めよ。$\sigma^2 = 100^2 \times \frac{58}{885} + 200^2 \times \frac{1}{1770} - \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{336400}{531} \approx 633.5$

問題 5

(1) 50 円玉と 10 円玉と 5 円玉を同時に投げた場合に、3 枚とも表の出る確率はいくらか。

目の出方は、全部で 8 通りだから、$p = \frac{1}{8}$

(2) 50 円玉と 10 円玉と 5 円玉を同時に投げる試行を 3 枚とも表の出るまで繰り返す。

(a) x 回目にはじめて 3 枚とも表が出たとする。確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。$\mathrm{P}(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^{x-1}$

(b) x の平均を求めよ。$\mu = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$

(c) x の分散を求めよ。$\sigma^2 = \frac{1 - \frac{1}{8}}{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = 56$

問題 6　サイコロを 4 回振って 6 の目の出た回数を確率変数 X とおく。

(a) 確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。　$\mathrm{P}(x) = {}_4C_x \left(\frac{1}{6}\right)^x \left(\frac{5}{6}\right)^{4-x}$

(b) x の平均を求めよ。　$\mu = 4 \times \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

(c) x の分散を求めよ。　$\sigma^2 = 4 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{9}$