# 幾何分布と指数分布
# Geometric and Exponential Distribution

緑川章一

## 幾何分布

$$\mathrm{P}(x) = pq^{x-1}, \quad p+q=1, \quad x=1,2,3,\cdots$$

## 幾何分布の連続極限としての指数分布

$t = \dfrac{x}{n}$ と置き、$n \to \infty$ の極限を考える。その時、

$$f(t)\,\Delta t = \frac{1}{n} f(t) = pq^{nt-1}$$

となる $f(t)$ を求める。

$r = q^n$ とおくと、

$$p = 1 - q = 1 - r^{1/n}$$

だから、

$$\frac{1}{n} f(t) = \left(1 - r^{1/n}\right) r^{t-1/n} \tag{1}$$

$$= \left(r^{-1/n} - 1\right) r^{t} \tag{2}$$

ところで、$r = \exp(\ln r)$ だから、

$$r^{-1/n} = e^{-\frac{\ln r}{n}} \approx 1 - \frac{\ln r}{n}$$

ゆえに、

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} n \left(r^{-1/n} - 1\right) r^t = -\ln r \, e^{t \ln r}$$

ここで、

$$\lambda = -\ln r$$

とおくと、

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

を得る。これは指数分布を表す。