確率変数の和，積，商，べき乗の分布 (PDFs of $X+Y$, XY, X/Y, and X^Y)

緑川章一*

X と Y は、互いに独立で連続的な確率変数とし、それらの確率密度関数 (probability density function (PDF)) は、それぞれ、$f(x)$、$g(y)$ で与えられるとする。このとき、(a) $Z=X+Y$，(b) $Z=XY$，(c) $Z=X/Y$，(d) $Z=X^Y$ の確率密度関数を求める。

(a) $Z = X + Y$

$$
\begin{aligned}
p(z) &= \int \delta(z-x-y) f(x) g(y)\, dx\, dy \\
&= \int f(z-y) g(y)\, dy
\end{aligned}
\tag{1}
$$

【例 1】 確率変数 x と y が、$0 \leqq x,\ y \leqq 1$ の一様分布に従うとき

確率密度関数は、$f(x)=1\ (0 \leqq x \leqq 1)$，$g(y)=1\ (0 \leqq y \leqq 1)$ である。x 積分は、単にデルタ関数を消去するだけである。

$$
p(z) = \int_0^1 dy \int_0^1 \delta(z-x-y)\, dx
$$

その後の y 積分の範囲は、図 1 の標本空間に描かれた $y=-x+z$ から明らかなように、$0 \leqq z \leqq 1$ のときは、$0 \leqq y \leqq z$ で、$1 \leqq z \leqq 2$ のときは、$z-1 \leqq y \leqq 1$ である。

$$
p(z) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^z dy = z & 0 \leqq z \leqq 1 \\ \displaystyle\int_{z-1}^1 dy = 2-z & 1 \leqq z \leqq 2 \end{cases}
$$

【例 2】 確率変数 x と y が、指数分布 $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geqq 0)$，$g_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y} (y \geqq 0)$ に従うとき

$$
\begin{aligned}
f_G(z) &= \lambda^2 \int \delta(z-x-y) e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}\, dxdy \\
&= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dy \qquad (x = z-y \geqq 0,\ y \geqq 0\ \rightarrow\ 0 \leqq y \leqq z) \\
&= \lambda^2 z e^{-\lambda z}
\end{aligned}
$$

---

*Shoichi Midorikawa

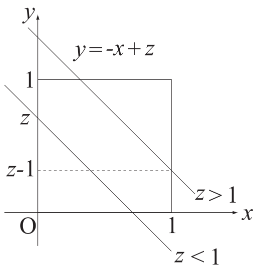

図 1: X と Y の標本空間と $y = -x + z$

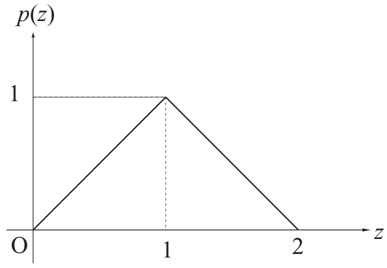

図 2: 確率密度関数 $p(z)$

ところで、ガンマ分布 (gamma disribution)$\Gamma(\alpha,\ \lambda)$ は、

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$$

で定義される。指数分布は、$\alpha = 1$ のガンマ分布である。指数分布に従う互いに独立な確率変数の和は、$\alpha = 2$ のガンマ分布に従う。
【例 3】 確率変数 x と y が、標準正規分布 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x^2/2},\ g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{y^2/2}$ に従うとき

$$\begin{aligned} f_N(z) &= \frac{1}{2\pi} \int \delta(z - x - y) e^{-(x^2+y^2)/2}\, dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int e^{-\left((z-y)^2+y^2\right)/2}\, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-z^2/4} \int e^{-(y-z/2)^2}\, dz \end{aligned}$$

ここで、$t = y - z/2$ とおくと、

$$\int e^{-(y-z/2)^2}\, dz = \int e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

だから、結局、

$$f_N(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-z^2/4}$$

となる。これは、平均 $\mu = 0$, 分散 $\sigma^2 = 2$ の正規分布である。

(b) $\boldsymbol{Z = XY}$

$$q(z) = \int \delta(z - xy) f(x) g(y)\, dx\, dy \tag{2}$$

この積分を実行するためには、次に示す δ 関数の性質を用いる。

$$\delta\left(u(x)\right) = \frac{1}{|u'(\alpha)|} \delta(x - \alpha) \tag{3}$$

ここで、α は $u(x) = 0$ の解である。(3) 式を、(2) 式に代入すると、

$$q(z) = \int \frac{1}{|y|} f(z/y) g(y)\, dy$$

を得る。
【例 1】 確率変数 x と y が、$0 \leqq x,\ y \leqq 1$ の一様分布に従うとき

$$q(z) = \int_z^1 \frac{dy}{y} = -\ln z$$

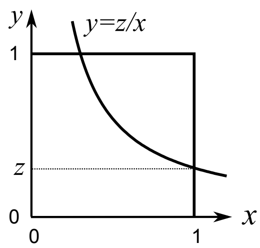

図 3: X と Y の標本空間と $y = z/x$

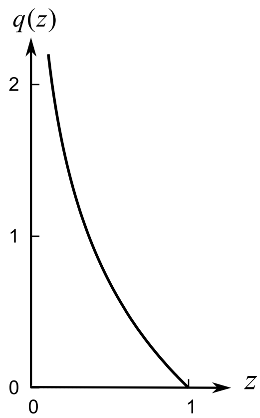

図 4: 確率密度関数 $q(z)$

【例 2】 確率変数 x と y が、指数分布に従うとき、

$$\begin{aligned} f(z) &= \lambda^2 \int \delta(z - xy)\, e^{-\lambda x} e^{-\lambda y}\, dxdy \\ &= \lambda^2 \int_0^\infty \frac{1}{y}\, e^{-\lambda(z/y+y)}\, dy \end{aligned}$$

ここで、$t = \lambda y$ とおくと、

$$f(z) = \lambda^2 \int_0^\infty \frac{1}{t}\, e^{-(\lambda^2 z/t+t)}\, dt \tag{4}$$

ところで、関数

$$K_n(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n \int_0^\infty \exp\left(-t - \frac{z^2}{4t}\right) \cdot t^{-n-1}\, dt$$

は、第 2 種の変形されたベッセル関数と (modified Bessel function of the second kind) と呼ばれている。特に、$n = 0$ の場合は、

$$K_0(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp\left(-t - \frac{z^2}{4t}\right) \cdot t^{-1}\, dt \tag{5}$$

なので、(5) 式を用いて、(4) 式を書き直すと、

$$f(z) = 2\lambda^2 K_0\left(2\lambda\sqrt{z}\right)$$

となる。
【例 3】 確率変数 x と y が、標準正規分布に従うとき

$$f_Z(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dy \int_{-\infty}^\infty \delta(z - xy) e^{-(x^2+y^2)/2}\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|y|}\,e^{-(z^2/y^2+y^2)/2}\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{y}\,e^{-(z^2/y^2+y^2)/2}\,dy+\int_{0}^{\infty}\frac{1}{y}\,e^{-(z^2/y^2+y^2)/2}\,dy\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1}{y}\,e^{-(z^2/y^2+y^2)/2}\,dy
\end{aligned}
$$

ここで、$t=\dfrac{y^2}{2}$ とおくと、$\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dt}{2t}$ だから、

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-t-z^2/4t}}{t}\,dt \\
&= \frac{1}{\pi}K_0(z)
\end{aligned}
$$

となる。再び、第 2 種の変形されたベッセル関数が現れた！

(c) $\boldsymbol{Z = X/Y}$

$$
\begin{aligned}
r(z) &= \int \delta(z-x/y)f(x)g(y)\,dx\,dy \\
&= \int |y|f(zy)g(y)\,dy
\end{aligned}
$$

ここで、x 積分を行うにあたり (3) 式を用いた。
【例 1】 確率変数 x と y が、$0 \leqq x,\ y \leqq 1$ の一様分布に従うとき

$$
r(z)=\int_0^1 dy\int_0^1 \delta(z-x/y)\,dx
$$

その後の y 積分の範囲は、図 (5) の標本空間に描かれた $y=x/z$ から明らかなように、$0 \leqq z \leqq 1$ のときは、$0 \leqq y \leqq 1$ で、$1 \leqq z$ のときは、$0 \leqq y \leqq 1/z$ である。

$$
r(z)=\begin{cases}
\displaystyle\int_0^1 y\,dy=\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2} & 0 \leqq z \leqq 1 \\[2ex]
\displaystyle\int_0^{1/z} y\,dy=\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{1/z}=\frac{1}{2z^2} & 1 \leqq z
\end{cases}
$$

【例 2】 確率変数 x と y が、指数分布に従うとき、

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \lambda^2\int \delta(z-x/y)\,e^{-\lambda x}e^{-\lambda y}\,dxdy \\
&= \lambda^2\int_0^{\infty} y\,e^{-\lambda(z+1)y}\,dy
\end{aligned}
$$

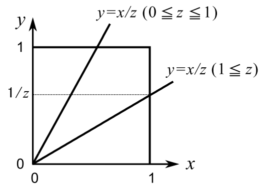

図 5: X と Y の標本空間と $y = x/z$

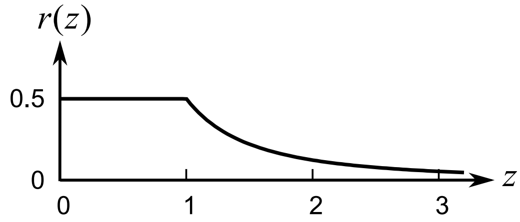

図 6: 確率密度関数 $r(z)$

ここで、$t = \lambda(z+1)y$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{(z+1)^2}\int_0^\infty t\,e^{-t}\,dt \\
&= \frac{1}{(z+1)^2}\int_0^\infty t\left(-e^{-t}\right)'\,dt \\
&= \frac{1}{(z+1)^2}\left\{\Big[-t\,e^{-t}\Big]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-t}\,dt\right\} \\
&= \frac{1}{(z+1)^2}
\end{aligned}
$$

すなわち、

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$$

を得る。

【例 3】 確率変数 x と y が、標準正規分布 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{x^2/2},\ g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{y^2/2}$ に従うとき

$$
\begin{aligned}
f_C(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty dy\int_{-\infty}^\infty \delta(z - x/y)e^{-(x^2+y^2)/2}\,dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty |y|\,e^{-(z^2+1)y^2/2}\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{-\infty}^0 y\,e^{-(z^2+1)y^2/2}\,dy + \int_0^\infty y\,e^{-(z^2+1)y^2/2}\,dy\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty y\,e^{-(z^2+1)y^2/2}\,dy
\end{aligned}
$$

ここで、積分変数 y の代わりに、$t = (1+z^2)y^2/2$ を用いると、

$$\int_0^\infty y\,e^{-(z^2+1)y^2/2} = \frac{1}{1+z^2}\int_0^\infty e^{-t}\,dt = \frac{1}{1+z^2}$$

だから、

$$f_C(z) = \frac{1}{\pi(1+z^2)}$$

を得る。これを、コーシー分布 (Cauchy distribution) と言う。

(d)　$\boldsymbol{Z = X^Y}$

$$
\begin{aligned}
s(z) &= \int \delta(z - x^y) f(x) g(y)\, dx\, dy \\
&= \int \frac{1}{|y\, z^{1-1/y}|} f\bigl(z^{1/y}\bigr) g(y)\, dy
\end{aligned}
$$

ここで、x 積分を行うにあたり (3) 式を用いた。

【例】 確率変数 x と y が、$0 \leqq x,\ y \leqq 1$ の一様分布に従うとき

$$
\begin{aligned}
s(z) &= \int_0^1 dy \int_0^1 \delta(z - x^y)\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{y\, z^{1-1/y}}\, dy \\
&= \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{z^{1/y}}{y}\, dy \\
&= \frac{1}{z} \int_0^1 \frac{e^{(\ln z)/y}}{y}\, dy
\end{aligned}
$$

ここで、$t = \dfrac{\ln z}{y}$ とおくと、

$$
e^{(\ln z)/y} = e^t, \qquad dt = -\ln z \frac{dy}{y^2} = -t \frac{dy}{y}
$$

だから、

$$
s(z) = -\frac{1}{z} \int_{-\infty}^{\ln z} \frac{e^t}{t}\, dt
$$

となる。

　ところで、ここに現れる積分は、積分指数関数と呼ばれ、

$$
Ei(\ln z) = \int_{-\infty}^{\ln z} \frac{e^t}{t}\, dt
$$

と表されるので、結局、

$$
s(z) = -\frac{1}{z} Ei(\ln z) \quad 0 \leqq z \leqq 1
$$

を得る。

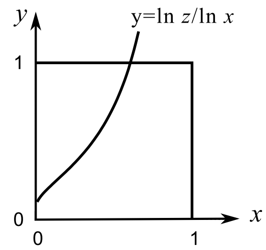

図 7: X と Y の標本空間と $y = \ln z / \ln x$

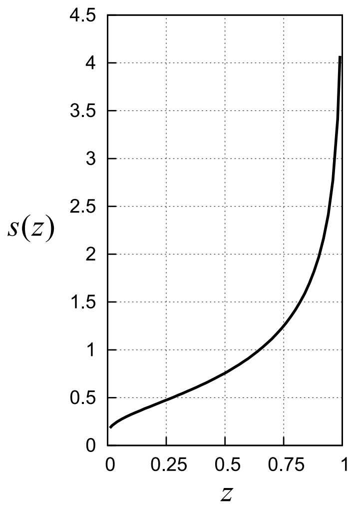

図 8: 確率密度関数 $s(z)$