

演習問題 8-2

問題 1 コのサイコロを振る試行をおこなう。

- (1) 1 回の試行で 6 の目が出る確率 p を求めよ。

$$p = \frac{1}{6}$$

- (2) x 回目の試行で、初めて 6 の目が出る確率 $P(x)$ を求めよ。

$$P(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}$$

- (3) 6 の目が出るまでの平均の試行回数を求めよ。

$$\mu = \frac{1}{p} = 6$$

- (4) x の分散を求めよ。

$$\sigma^2 = \frac{1-p}{p^2} = 30$$

- (5) x 回の試行で、一度も 6 の目が出ない確率 $Q(x)$ を求めよ。

$$Q(x) = \left(\frac{5}{6}\right)^x$$

- (6) $P(x) + Q(x)$ を求めよ。

$$P(x) + Q(x) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} + \left(\frac{5}{6}\right)^x = \left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\right) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} = Q(x-1)$$

- (7) $P(1) + P(2) + \cdots + P(x) + Q(x)$ を求めよ。

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(x-1) + (P(x) + Q(x))$$

$$= P(1) + P(2) + \cdots + (P(x-1) + Q(x-1))$$

$$= \cdots$$

$$= P(1) + Q(1)$$

$$= 1$$

- (8) 『1 コのサイコロを n 回振って、6 の目が出たら勝ち』というゲームが有利であるためには、 n が条件、

$$P(1) + P(2) + \cdots + P(n) > \frac{1}{2}$$

を満たせば良い。最小の n を求めよ。

(7) より、 $P(1) + P(2) + \cdots + P(n) = 1 - Q(n)$ だから、

$$1 - Q(n) > \frac{1}{2}. \text{ したがって、} \frac{1}{2} > Q(n).$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}, \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}, \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296}, \cdots$$

$$\text{なので、} \left(\frac{5}{6}\right)^4 < \frac{1}{2}. \text{ ゆえに、} n = 4$$