感染症流行の数理モデル

1　マルサスモデル (Malthusian model)

人口は、制限せられなければ、幾何級数的に増加する。生活資料は算術級数的にしか増加しない。多少ともに数学のことを知っている人ならば、前者の力が後者のそれに比してどれほど大きいか、それがすぐにわかるであろう。

ロバート・マルサス「人口の原理」高野岩三郎・大内兵衛訳（岩波書店）

人口を N、 時間を t、単位時間当たりの人口増加率を定数 r とおけば、

$$\frac{1}{N}\frac{dN}{dt} = r \tag{1}$$

ゆえに、

$$\int_{N_0}^{N}(t)\frac{dN}{N} = r\int_0^t dt$$

これを解くと、

$$\ln(N(t)/N_0) = rt$$

すなわち、

$$N(t) = N_0 e^{rt} \tag{2}$$

を得る。これは、発生の初期においてのみ正しい。

2　伝染病曲線 (epidemic curve)

集団の大きさを $n+1$ とする。ある時、一人の人が伝染病にかかって**潜伏期間無しに**他の人に感染させるとする。単位時間あたりに新たに感染する人の数は、まだ感染していな

い人の数 x、および、すでに感染している人の数 $n+1-x$ に比例する。その比例定数を β とすると、

$$\text{新たに感染する人の数} = -\text{新たに減った未感染者の数} \equiv -dx$$

だから、

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(n+1-x) \tag{3}$$

を得る。ここで、$\tau = \beta t$ とおくと、

$$\frac{dx}{d\tau} = -x(n+1-x) \tag{4}$$

となる。これは、容易に積分できる。まず、

$$\frac{dx}{x(n+1-x)} = -d\tau$$

と書き直して、次に、

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{n+1-x} = \frac{n+1}{x(n+1-x)}$$

と書けるので、

$$\int_n^x \frac{dx}{x} + \int_n^x \frac{dx}{n+1-x} = -(n+1)\int_0^\tau d\tau$$

となる。ここで、$x(0) = n$ であることに注意しよう。この積分を実行して

$$\ln\left(\frac{x}{n(n+1-x)}\right) = -(n+1)\tau$$

これを、x について解くと、

$$x(\tau) = \frac{n(n+1)}{n+e^{(n+1)\tau}} \tag{5}$$

を得る。 当然のことながら、

$$x(0) = n, \quad \lim_{\tau\to\infty} x(\tau) = 0$$

の単調減少関数である。

感染者の増加率 $-dx/d\tau$ は、(5) 式を (4) 式に代入することにより、

$$-\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{n(n+1)^2 e^{(n+1)\tau}}{\left(n+e^{(n+1)\tau}\right)^2} \tag{6}$$

を得る。これを伝染曲線 (epidemic curve) という。

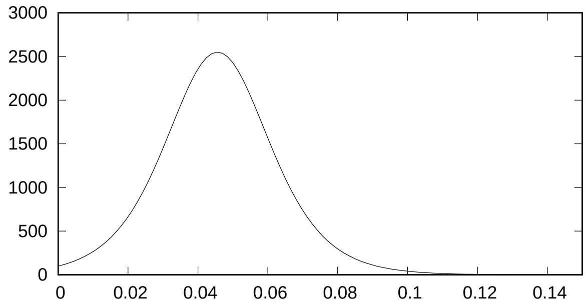

図 1　伝染曲線

ここで、

$$-\frac{dx(0)}{d\tau}=n,\quad \lim_{\tau\to\infty}\left(-\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)=0$$

また、

$$\frac{d}{dx}\left(-\frac{dx(\tau)}{d\tau}\right)=n+1-2x$$

だから、$x=(n+1)/2$、すなわち、

$$\frac{n(n+1)}{n+e^{(n+1)\tau}}=\frac{(n+1)}{2},\quad \text{つまり、}\quad e^{(n+1)\tau}=n$$

で最大値をとる。これを τ についてと解くと、

$$\tau=\frac{\ln n}{n+1}$$

を得る。

3　Kermack-McKendrick Model

先ほどのモデルでは、全人口を n、感染者の数を x として感染の様子をしらべた。すなわち、集団は、感染者と未感染者の 2 種類に分類された。Kermack と McKendrick は、集団を 3 種類に分類したモデルを提唱した [1]。すなわち、未だ感染していない者、感染している者、死亡または治癒または隔離されている者である。

いま、集団の大きさを N として、

$$\begin{aligned}&\text{未感染者の数}\quad : S(t)\ (susceptibles),\\&\text{感染者の数}\qquad : I(t)\ (infectives),\\&\text{隔離された人数} : R(t)\ (emoved)\end{aligned}$$

とすると、これらの間には、

$$N=S(t)+I(t)+R(t) \tag{7}$$

の関係が成り立つ。これらの時間発展は、次の微分方程式で表される。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \tag{8}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \tag{9}$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \tag{10}$$

ここで、β は感染率、γ は隔離率である。このモデルは、3 つの変数を並べて、SIR モデルと呼ばれている。

初期条件は、

$$S(0) = S_0,\ I(0) = I_0,\ R(0) = R_0 = 0$$

とする。

流行初期においては、

$$\frac{dI(0)}{dt} = (\beta S_0 - \gamma)I_0$$

だから、$\beta S_0 > \gamma$ でないと感染は拡大しない。

(8) 式を (10) 式で割ると、

$$\frac{dS(t)}{dR(t)} = -\frac{\beta}{\gamma}S(t)$$

となる。この式は、容易に積分できて、

$$S(t) = S_0 \exp\left(-\frac{\beta}{\gamma}R(t)\right) \tag{11}$$

となる。

後は、(8), (9), (10) 式を数値計算で解いて解の振舞いをしらべても良いのだけれど、できるだけ解析的に解いてみよう。

今後は、$S(t),\ I(t),\ R(t)$ を単に $S,\ I,\ R$ と書くことにし、(7) 式を $I(t)$ について解いて、(11) 式を用いると、

$$\frac{dR}{dt} = \gamma\left(N - S_0 e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} - R\right)$$

となる。この式の近似解を求めるために、

$$e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} \approx 1 - \frac{\beta}{\gamma}R + \frac{\beta^2}{2\gamma^2}R^2$$

と展開の 2 次の項までを残すことにすると、

$$\frac{dR}{dt} = \gamma\left(N - S_0 + \frac{\beta}{\gamma}S_0 R - \frac{\beta^2}{2\gamma^2}S_0 R^2 - R\right) \tag{12}$$

初期条件として、$R_0 = 0$ と仮定したので、$N - S_0 = I_0 \ll 1$ であるので、(12) 式は、

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= \gamma \left\{ I_0 + \left(\frac{\beta}{\gamma} S_0 - 1 \right) R - \frac{\beta^2}{2\gamma^2} S_0 R^2 \right\} \\ &= \gamma \left\{ \frac{\gamma^2}{2S_0\beta^2} \left[\left(\frac{\beta S_0}{\gamma} - 1 \right)^2 + \frac{2S_0 I_0 \beta^2}{\gamma^2} \right] - \frac{S_0\beta^2}{2\gamma^2} \left[R - \frac{\gamma^2}{S_0\beta^2} \left(\frac{\beta S_0}{\gamma} - 1 \right) \right]^2 \right\} \quad (13)\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$x = R - \frac{\gamma^2}{S_0\beta^2} \left(\frac{\beta S_0}{\gamma} - 1 \right) \quad (14)$$

$$A = \frac{S_0\beta^2}{2\gamma^2} \quad (15)$$

$$B = \frac{\gamma^2 Q}{2S_0\beta^2} \quad (16)$$

とおく。ここで、

$$Q = \left(\frac{\beta S_0}{\gamma} - 1 \right)^2 + \frac{2S_0 I_0 \beta^2}{\gamma^2} \quad (17)$$

である。すると (13) 式は、

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{B - Ax^2} = \gamma t \quad (18)$$

と書ける。ここで、$t = 0$ における初期条件は、$R(0) = R_0 = 0$ としたので、

$$x_0 = -\frac{\gamma^2}{S_0\beta^2} \left(\frac{\beta S_0}{\gamma} - 1 \right)$$

である。

(18) 式の左辺は、容易に積分できる。$x = \sqrt{\frac{B}{A}} \tanh z$ とおくと、

$$B - Ax^2 = \frac{B}{\cosh^2 z}, \quad (19)$$

$$dx = \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{dz}{\cosh^2 z} \quad (20)$$

だから、

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{B - Ax^2} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \left\{ \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{A}{B}}\, x \right) - \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{A}{B}}\, x_0 \right) \right\}$$

これを、(18) 式に代入すると、

$$\frac{1}{\sqrt{AB}}\left\{\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\ x\right)-\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\ x_0\right)\right\}=\gamma t \tag{21}$$

となる。ここで、

$$\phi=-\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{A}{B}}\ x_0\right)=\tanh^{-1}\left(-\sqrt{\frac{A}{B}}\ x_0\right) \tag{22}$$

とおいて、x について解くと、

$$x=\sqrt{\frac{B}{A}}\tanh\left(\sqrt{AB}\,\gamma t-\phi\right) \tag{23}$$

　これに、(14) ∼ (17) を代入して R について解くと、

$$R(t)=\frac{\gamma^2}{S_0\beta^2}\left\{\frac{\beta S_0}{\gamma}-1+\sqrt{Q}\tanh\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\gamma t-\phi\right)\right\} \tag{24}$$

を得る。ここで、

$$\phi=\tanh^{-1}\left[\frac{\frac{\beta S_0}{\gamma}-1}{\sqrt{Q}}\right] \tag{25}$$

である。

　また、

$$\frac{dR}{dt}=\frac{dx}{dt}=\gamma\left(B-Ax^2\right)$$

に (23) 式を代入すると、

$$\frac{dR}{dt}=\frac{\gamma^3}{2S_0\beta^2}\ \frac{Q}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\gamma t-\phi\right)} \tag{26}$$

を得る。

　伝染病が終息するのは、$dR/dt \fallingdotseq 0$ のときであるから、(13) 式の右辺は 0 となる。この時、$I_0=0$ とおいて、R を求めると、

$$R(\infty)=\frac{2\gamma}{S_0\beta}\left(S_0-\frac{\gamma}{\beta}\right)$$

を得る。これが感染者の総数である。

参考文献

[1] W. O. Kermack and A. G. Mckendrick,, A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proc. R. Soc. Lond.* **A 115**, 700-721 (1927).