

感染症流行の数理モデル

1 マルサス・モデル (Malthusian Model)

人口は、制限せられなければ、幾何級数的に増加する。生活資料は算術級数的にしか増加しない。多少ともに数学のことを知っている人ならば、前者の力が後者のそれに比してどれほど大きいかわかるであろう [1]。

人口を N 、時間を t 、単位時間当たりの人口増加率を定数 r とおけば、

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{dt} = r \quad (1)$$

ゆえに、

$$\int_{N_0}^N (t) \frac{dN}{N} = r \int_0^t dt$$

これを解くと、

$$\ln(N(t)/N_0) = rt$$

すなわち、

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (2)$$

を得る。これは、発生の初期においてのみ正しい。

2 伝染病曲線 (Epidemic Curve)

集団の大きさを $n+1$ とする。ある時、一人の人が伝染病にかかって潜伏期間無しに他の人に感染させるとする。単位時間あたりに新たに感染する人の数は、まだ感染していない人の数 x 、および、すでに感染している人の数 $n+1-x$ に比例する。その比例定数を β とすると、

$$\text{新たに感染する人の数} = -\text{新たに減った未感染者の数} \equiv -dx$$

だから、

$$\frac{dx}{dt} = -\beta x(n+1-x) \quad (3)$$

を得る。ここで、 $\tau = \beta t$ とおくと、

$$\frac{dx}{d\tau} = -x(n+1-x) \quad (4)$$

となる。これは、容易に積分できる。まず、

$$\frac{dx}{x(n+1-x)} = -d\tau$$

と書き直して、次に、

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{n+1-x} = \frac{n+1}{x(n+1-x)}$$

と書けるので、

$$\int_n^x \frac{dx}{x} + \int_n^x \frac{dx}{n+1-x} = -(n+1) \int_0^\tau d\tau$$

となる。ここで、 $x(0) = n$ であることに注意しよう。この積分を実行して

$$\ln \left(\frac{x}{n(n+1-x)} \right) = -(n+1)\tau$$

これを、 x について解くと、

$$x(\tau) = \frac{n(n+1)}{n + e^{(n+1)\tau}} \quad (5)$$

を得る。当然のことながら、

$$x(0) = n, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} x(\tau) = 0$$

の単調減少関数である。

感染者の増加率 $-dx/d\tau$ は、(5) 式を (4) 式に代入することにより、

$$-\frac{dx(\tau)}{d\tau} = \frac{n(n+1)^2 e^{(n+1)\tau}}{(n + e^{(n+1)\tau})^2} \quad (6)$$

を得る。これを伝染病曲線 (epidemic curve) という。

ここで、

$$-\frac{dx(0)}{d\tau} = n, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left(-\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right) = 0$$

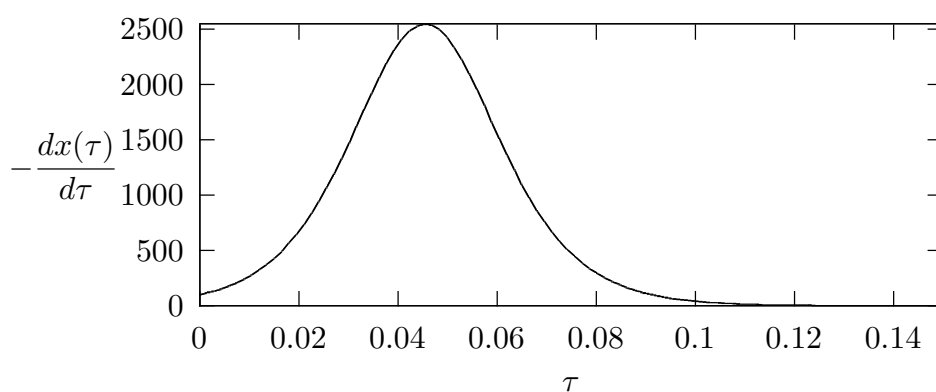


図1 伝染病曲線

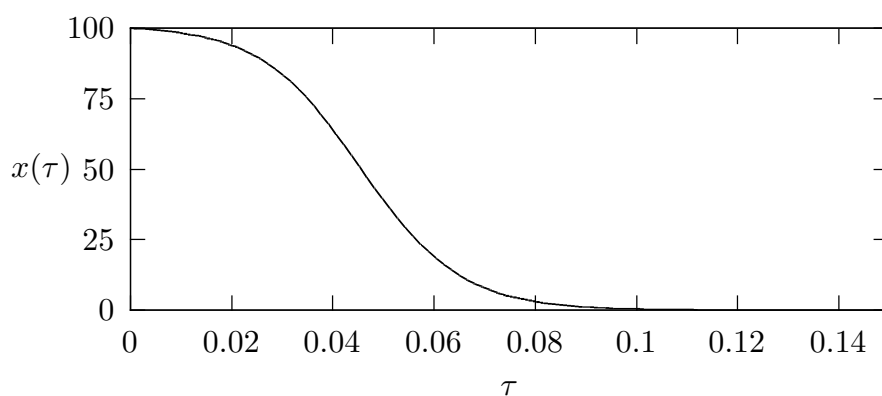


図2 未感染者数の時間変移

また、

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{dx(\tau)}{d\tau} \right) = n + 1 - 2x$$

だから、 $x = (n + 1)/2$ 、すなわち、

$$\frac{n(n + 1)}{n + e^{(n+1)\tau}} = \frac{(n + 1)}{2}, \quad \text{つまり、} e^{(n+1)\tau} = n$$

で最大値をとる。これを τ についてと解くと、

$$\tau = \frac{\ln n}{n + 1}$$

を得る。

3 Kermack-McKendrick モデル

先ほどのモデルでは、全人口を n 、感染者の数を x として感染の様子をしらべた。すなわち、集団は、感染者と未感染者の 2 種類に分類された。Kermack と McKendrick は、集団を 3 種類に分類したモデルを提唱した [2]。その 3 種類とは、未だ感染していない者、感染している者、死亡・免疫獲得・治癒・隔離措置などで除かれた者である。

いま、集団の大きさを N として、

$$\begin{aligned} \text{未感染者の数} &: S(t) \text{ (susceptibles),} \\ \text{感染者の数} &: I(t) \text{ (infectives),} \\ \text{隔離された人数} &: R(t) \text{ (removed)} \end{aligned}$$

とすると、これらの間には、

$$N = S(t) + I(t) + R(t) \quad (7)$$

の関係が成り立つ。これらの時間発展は、次の微分方程式で表される。

$$\frac{dS(t)}{dt} = -\beta S(t)I(t) \quad (8)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t) \quad (9)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) \quad (10)$$

ここで、 β は感染率、 γ は隔離率である。このモデルは、3 つの変数を並べて、 SIR モデルと呼ばれている。

初期条件は、

$$R(0) = 0$$

とする。

流行初期においては、

$$\frac{dI(0)}{dt} = (\beta S(0) - \gamma)I_0$$

だから、 $\beta S(0) > \gamma$ でないと感染は拡大しない。

(8) 式を (10) 式で割ると、

$$\frac{dS(t)}{dR(t)} = -\frac{\beta}{\gamma} S(t)$$

となる。この式は、容易に積分できて、

$$S(t) = S(0) \exp\left(-\frac{\beta}{\gamma} R(t)\right) \quad (11)$$

となる。

後は、(8), (9), (10) 式を数値計算で解いて解の振舞いをしらべても良いのだけれど、できるだけ解析的に解くことを試みる。

今後は、 $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ を単に S , I , R と書くことにし、(7) 式を $I(t)$ について解いて、(11) 式を用いると、

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \left(N - S(0) e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} - R \right)$$

となる。この式の近似解を求めるために、

$$e^{-\frac{\beta}{\gamma} R} \approx 1 - \frac{\beta}{\gamma} R + \frac{\beta^2}{2\gamma^2} R^2$$

と展開の2次の項までを残すことにすると、

$$\frac{dR}{dt} = \gamma \left(N - S(0) + \frac{\beta}{\gamma} S(0) R - \frac{\beta^2}{2\gamma^2} S(0) R^2 - R \right) \quad (12)$$

初期条件として、 $R(0) = 0$ と仮定したので、 $N - S(0) = I(0) \ll 1$ であるので、(12) 式は、

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} &= \gamma \left\{ I(0) + \left(\frac{\beta}{\gamma} S(0) - 1 \right) R - \frac{\beta^2}{2\gamma^2} S(0) R^2 \right\} \\ &= \gamma \left\{ \frac{\gamma^2}{2S(0)\beta^2} \left[\left(\frac{\beta S(0)}{\gamma} - 1 \right)^2 + \frac{2S(0)I(0)\beta^2}{\gamma^2} \right] - \frac{S(0)\beta^2}{2\gamma^2} \left[R - \frac{\gamma^2}{S(0)\beta^2} \left(\frac{\beta S(0)}{\gamma} - 1 \right) \right]^2 \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

となる。簡単のために、

$$x = R - \frac{\gamma^2}{S(0)\beta^2} \left(\frac{\beta S(0)}{\gamma} - 1 \right) \quad (14)$$

$$A = \frac{S(0)\beta^2}{2\gamma^2} \quad (15)$$

$$B = \frac{\gamma^2 Q}{2S(0)\beta^2} \quad (16)$$

とおく。ここで、

$$Q = \left(\frac{\beta S(0)}{\gamma} - 1 \right)^2 + \frac{2S(0)I(0)\beta^2}{\gamma^2} \quad (17)$$

である。すると (13) 式は、

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{B - Ax^2} = \gamma t \quad (18)$$

と書ける。ここで、 $t = 0$ における初期条件は、 $R(0) = 0$ としたので、

$$x_0 = -\frac{\gamma^2}{S(0)\beta^2} \left(\frac{\beta S(0)}{\gamma} - 1 \right)$$

である。

(18) 式の左辺は、容易に積分できる。 $x = \sqrt{\frac{B}{A}} \tanh z$ とおくと、

$$B - Ax^2 = \frac{B}{\cosh^2 z}, \quad (19)$$

$$dx = \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{dz}{\cosh^2 z} \quad (20)$$

だから、

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{B - Ax^2} = \frac{1}{\sqrt{AB}} \left\{ \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{A}{B}} x \right) - \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{A}{B}} x_0 \right) \right\}$$

これを、(18) 式に代入すると、

$$\frac{1}{\sqrt{AB}} \left\{ \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{A}{B}} x \right) - \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{A}{B}} x_0 \right) \right\} = \gamma t \quad (21)$$

となる。ここで、

$$\phi = -\tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{A}{B}} x_0 \right) = \tanh^{-1} \left(-\sqrt{\frac{A}{B}} x_0 \right) \quad (22)$$

とおいて、 x について解くと、

$$x = \sqrt{\frac{B}{A}} \tanh \left(\sqrt{AB} \gamma t - \phi \right) \quad (23)$$

これに、(14) ~ (17) を代入して R について解くと、

$$R(t) = \frac{\gamma^2}{S(0)\beta^2} \left\{ \frac{\beta S(0)}{\gamma} - 1 + \sqrt{Q} \tanh \left(\frac{\sqrt{Q}}{2} \gamma t - \phi \right) \right\} \quad (24)$$

を得る。ここで、

$$\phi = \tanh^{-1} \left[\frac{\frac{\beta S(0)}{\gamma} - 1}{\sqrt{Q}} \right] \quad (25)$$

である。

また、

$$\frac{dR}{dt} = \frac{dx}{dt} = \gamma (B - Ax^2)$$

に (23) 式を代入すると、

$$\frac{dR}{dt} = \frac{\gamma^3}{2S(0)\beta^2} \frac{Q}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\gamma t - \phi\right)} \quad (26)$$

を得る。

伝染病が終息するのは、 $dR/dt = 0$ のときであるから、(13) 式の右辺は 0 となる。この時、 $I(0) = 0$ とおいて、 R を求めると、

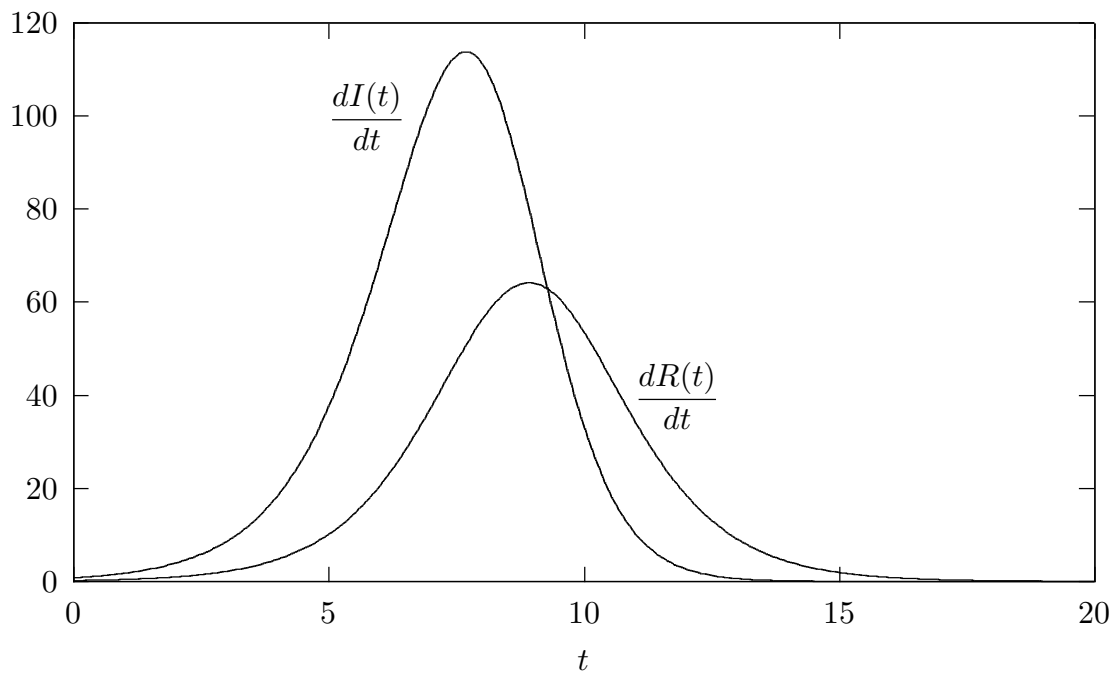
$$R(\infty) = \frac{2\gamma}{S(0)\beta} \left(S(0) - \frac{\gamma}{\beta} \right)$$

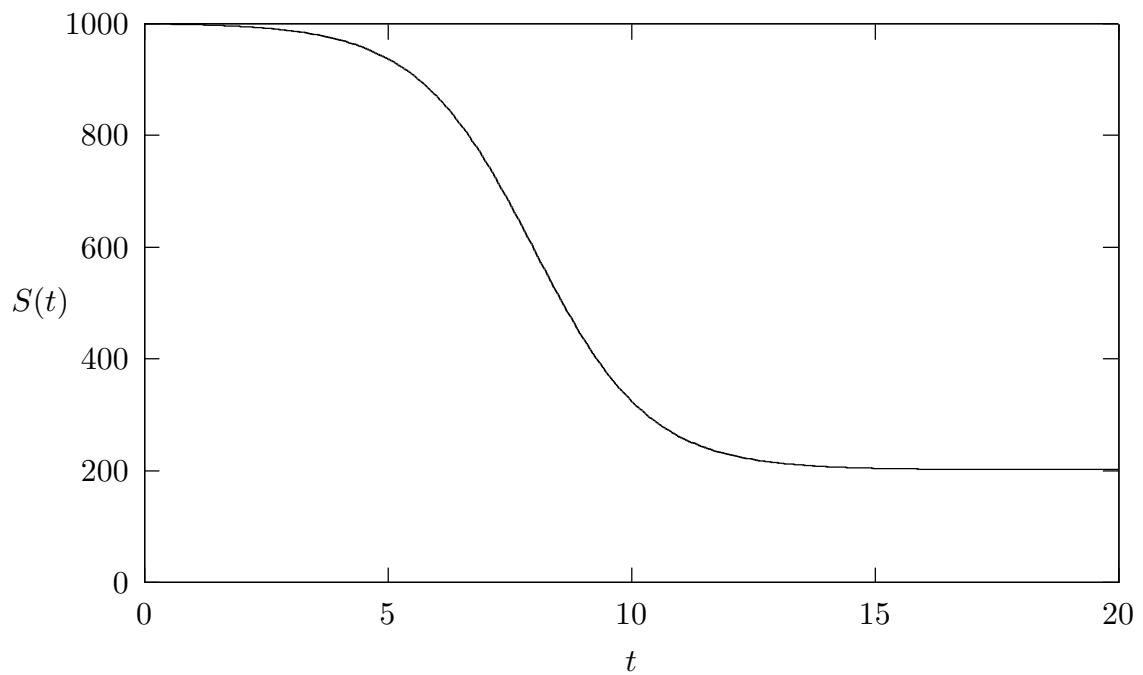
を得る。これが感染者の総数である。

得られた関数がどんなものか、試みに、

$$S(0) = 1000, \quad I(0) = 1, \quad \beta = 0.001, \quad \gamma = 0.2$$

とにおいてグラフを描くと、以下ようになる。





参考文献

- [1] ロバート・マルサス著・高野岩三郎、大内兵衛訳 『初版人口の原理』 岩波書店 (1961).
- [2] W. O. Kermack and A. G. McKendrick,, A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics, *Proc. R. Soc. Lond.* **A 115**, 700-721 (1927).