レスリー行列
Leslie Matrix

緑川章一 *

1 Leslie Matrx

時刻 t における i 年齢の人口を $n_i(t)$ で表すことにすると、時刻 t での年齢別人口は、ベクトル

$$\boldsymbol{n}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{pmatrix}$$

で表すことができる。ここで、m は最高年齢を表し、

$$k \geq m+1 \text{ では、} n_k(t) = 0$$

とする。

時刻 t における i 年齢人口の時刻 $t+1$ に置ける生残率を s_i と置くと、

$$n_{i+1}(t+1) = s_i n_i(t) \quad (1 \leq i \leq m-1)$$

$n_1(t+1)$ は、 各年齢の人口 $n_i(t)$ に出生率 β_i を掛けたものを足し上げて得られるので、

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ \vdots \\ n_m(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \beta_3 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i n_i(t) \\ s_1 n_1(t) \\ s_2 n_2(t) \\ \vdots \\ s_{m-1} n_{m-1}(t) \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$L = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

をレスリー行列 (Leslie matrix) と呼ぶ。この L の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$、固有値を λ と書こう。すなわち、

$$L\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \tag{1}$$

---
*Shoichi Midorikawa

が成り立つ。

固有値 λ は、L の特性方程式

$$\left| L - \lambda I \right| = 0 \tag{2}$$

の解である。この行列式を計算しよう。$A = L - \lambda I$ とおき、$\det A$ を第1行に関する余因子展開をおこなう。

$$\det A = \begin{vmatrix} \beta_1 - \lambda & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & -\lambda \end{vmatrix} \tag{3}$$

$$= (\beta_1 - \lambda) A_{1,1} + \beta_2 A_{1,2} + \beta_3 A_{1,3} + \cdots + \beta_m A_{1,m} \tag{4}$$

ここで、

$$A_{1,1} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{m-1}$$

$$A_{1,2} = -\begin{vmatrix} s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & -\lambda \end{vmatrix} = -s_1(-\lambda)^{m-2}$$

$$A_{1,3} = (-1)^2 \begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^2 s_1 s_2 (-\lambda)^{m-3}$$

$$\vdots$$

$$A_{1,m} = (-1)^{m-1} \begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{m-1} \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} s_1 s_2 \cdots s_{m-1}$$

そこで、(2) 式は、

$$\beta_1 \lambda^{m-1} + \beta_2 s_1 \lambda^{m-2} + \beta_3 s_1 s_2 \lambda^{m-3} + \cdots + \beta_m s_1 s_2 \cdots s_{m-1} - \lambda^m = 0$$

となる。これを書き直すと、

$$\beta_1 \lambda^{-1} + \beta_2 s_1 \lambda^{-2} + \beta_3 s_1 s_2 \lambda^{-3} + \cdots + \beta_m s_1 s_2 \cdots s_{m-1} \lambda^{-m} = 1 \tag{5}$$

さらに、

$$\ell_1 = 1,\quad \ell_2 = s_1,\quad \ell_3 = s_1 s_2,\quad \ell_4 = s_1 s_2 s_3,\quad \cdots,\quad \ell_m = s_1 s_2 \cdots s_{m-1} \tag{6}$$

と書くことにすると、

$$\lambda^{-1}\beta_1\ell_1 + \lambda^{-2}\beta_2\ell_2 + \lambda^{-3}\beta_3\ell_3 + \cdots + \lambda^{-m}\beta_m\ell_m = 1$$

を得る。和の記号を用いて表すと、

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda^{-i}\beta_i\ell_i = 1$$

となる。これは、ロトカ・オイラー方程式 (Lotka-Euler equation)

$$\int_0^\infty e^{-ra}\beta(a)\ell(a)\,da = 1$$

において、$e^{-r} = \lambda$ とおいて、離散化したものである。

固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$$

と書こう。すると、(1) 式は、

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m}\beta_i v_i \\ s_1 v_1 \\ s_2 v_2 \\ \vdots \\ s_{m-1}v_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \vdots \\ \lambda v_m \end{pmatrix}$$

ゆえに、以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m}\beta_i v_i &= \lambda v_1, & (7)\\ s_1 v_1 &= \lambda v_2, & (8)\\ s_2 v_2 &= \lambda v_3, & (9)\\ &\vdots \\ s_{m-1}v_{m-1} &= \lambda v_m & (10) \end{aligned}$$

これらの関係式を用いて、$v_i\,(i = 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ を λ と s_i を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} v_2 &= \lambda^{-1}v_1 s_1 \\ v_3 &= \lambda^{-1}s_2 v_2 = \lambda^{-2}v_1 s_1 s_2 \\ &\vdots \\ v_m &= \lambda^{-1}s_{m-1}v_{m-1} = \lambda^{-(m-1)}v_1 s_1 \cdots s_{m-1} \end{aligned}$$

これらの関係式を用いると、(7) 式左辺は、

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i = \lambda v_1 \left(\lambda^{-1}\beta_1 + \lambda^{-2}\beta_2 s_1 + \lambda^{-3}\beta_3 s_1 s_2 + \cdots + \lambda^{-m}\beta_m s_0 s_1 \cdots s_{m-1}\right) \tag{11}$$

$$= \lambda v_1 \left(\lambda^{-1}\beta_1 \ell_1 + \lambda^{-2}\beta_2 \ell_2 + \lambda^{-3}\beta_3 \ell_3 + \cdots + \lambda^{-m}\beta_m \ell_m\right) \tag{12}$$

ところが、上式右辺のカッコ内 $(\cdots)$ は、(5) 式より 1 となるので、

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i = \lambda v_1$$

すなわち、(7) 式は、(8) 式から (10) 式を用いて導かれることが分かった。
　そこで、固有ベクトルは、$v_1 = 1$ と選ぶことにすると、

$$\boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{-1}s_1 \\ \lambda^{-2}s_1 s_2 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-1)}s_1 s_2 \cdots s_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \lambda^{-1}\ell_2 \\ \lambda^{-2}\ell_3 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-1)}\ell_m \end{pmatrix} \tag{13}$$

この時、

$$\boldsymbol{v}(1) = L\boldsymbol{v}(0) = \lambda \boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} \lambda \\ s_1 \\ \lambda^{-1}s_1 s_2 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-2)}s_1 s_2 \cdots s_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\ell_1 \\ \ell_2 \\ \lambda^{-1}\ell_3 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-2)}\ell_m \end{pmatrix} \tag{14}$$

　基本再生産数 R_0 は、

$$R_0 = (-1)^{m-1}\left(|L - I| + 1\right)$$

または、

$$L' = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & -1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} (-1)^{m-1}\det L' &= \beta_1 + \beta_2 s_1 + \beta_3 s_1 s_2 + \cdots + \beta_m s_1 s_2 \cdots s_{m-1} \\ &= \beta_1\ell_1 + \beta_2\ell_2 + \beta_3\ell_3 + \cdots + \beta_m\ell_m \\ &= R_0 \end{aligned}$$

で与えられる。

2　一般化

時刻 t における人口を年齢別に分類するとき、一般に最高年齢は不定である。その場合、ある年齢以上を一纏めにして考えるのが便利である。

$$\boldsymbol{n}(t)=\begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{pmatrix}$$

において $n_m(t)$ は、m 年齢以上の人数とする。すなわち、時刻 t における i 年齢人口の時刻 $t+1$ に置ける生残率を s_i と置くと、

$$n_{i+1}(t+1)=s_i n_i(t) \quad (1 \leq i \leq m-2)$$

ただし、

$$n_m(t+1)=s_{m-1}n_{m-1}(t)+s_m n_m(t)$$

とする。

$n_1(t+1)$ は、 各年齢の人口 $n_i(t)$ に出生率 β_i を掛けたものを足し上げて得られるので、

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ n_3(t+1) \\ \vdots \\ n_m(t+1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_1 & \beta_3 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_m(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i n_i(t) \\ s_1 n_1(t) \\ s_2 n_2(t) \\ \vdots \\ s_{m-1}n_{m-1}(t)+s_m n_m(t) \end{pmatrix}$$

となる。ここで、

$$L_G=\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m \end{pmatrix}$$

を一般化されたレスリー行列 (Leslie matrix) と呼ぼう。この L の固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$、固有値を λ と書こう。すなわち、

$$L_G\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v} \tag{16}$$

が成り立つ。

特性方程式は、

$$\left|L_G-\lambda I\right|=0 \tag{17}$$

である。

この行列式を計算しよう。$A_G = L_G - \lambda I$ とおき、$\mathrm{det}A_G$ を第 1 行に関する余因子展開をおこなう。

$$
\begin{aligned}
\det A_G &= \begin{vmatrix} \beta_1-\lambda & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \cdots & \beta_m \\ s_1 & -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m-\lambda \end{vmatrix} \qquad (18) \\
&= (\beta_1-\lambda)A_{1,1} + \beta_2 A_{1,2} + \beta_3 A_{1,3} + \cdots + \beta_m A_{1,m} \qquad (19)
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
A_{1,1} &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{m-2}(s_m-\lambda) \\
A_{1,2} &= -\begin{vmatrix} s_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_3 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m-\lambda \end{vmatrix} = -s_1(-\lambda)^{m-3}(s_m-\lambda) \\
A_{1,3} &= (-1)^2\begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & s_{m-1} & s_m-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^2 s_1 s_2(-\lambda)^{m-4}(s_m-\lambda) \\
&\vdots \\
A_{1,m-1} &= (-1)^{m-2}\begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_m-\lambda \end{vmatrix} = (-1)^{m-2} s_1 s_2 \cdots s_{m-2}(s_m-\lambda) \\
A_{1,m} &= (-1)^{m-1}\begin{vmatrix} s_1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & -\lambda & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & s_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & s_{m-1} \end{vmatrix} = (-1)^{m-1} s_1 s_2 \cdots s_{m-1}
\end{aligned}
$$

そこで、(17) 式は、

$$
\begin{aligned}
&\left\{(\beta_1-\lambda)\lambda^{m-2} + \beta_2 s_1 \lambda^{m-3} + \beta_3 s_1 s_2 \lambda^{m-4} + \cdots + \beta_{m-1} s_1 s_2 \cdots s_{m-2}\right\}(\lambda - s_m) \\
&+\beta_m s_1 s_2 \cdots s_{m-1} = 0 \qquad (20)
\end{aligned}
$$

または、

$$\left\{\beta_1\lambda^{m-1}+\beta_2 s_1\lambda^{m-2}+\beta_3 s_1 s_2\lambda^{m-3}+\cdots+\beta_{m-1}s_1 s_2\cdots s_{m-2}-\lambda^m\right\}\left(1-\frac{s_m}{\lambda}\right)$$
$$+\beta_m s_1 s_2\cdots s_{m-1}=0 \tag{21}$$

となる。さらに、両辺を λ^m で割って、(6) 式を用いて ℓ_i を使って書き直す。

$$\lambda^{-1}\beta_1\ell_1+\lambda^{-2}\beta_2\ell_2+\lambda^{-3}\beta_3\ell_3+\cdots+\lambda^{-m+1}\beta_{m-1}\ell_{m-1}-1=-\frac{\beta_m\ell_m}{\lambda^{m-1}(\lambda-s_m)} \tag{22}$$

または、

$$\lambda^{-1}\beta_1\ell_1+\lambda^{-2}\beta_2\ell_2+\lambda^{-3}\beta_3\ell_3+\cdots+\lambda^{-m+1}\beta_{m-1}\ell_{m-1}+\lambda^{-m}\beta_m\ell_m-1=-\frac{\beta_m\ell_{m+1}}{\lambda^m(\lambda-s_m)} \tag{23}$$

を得る。和の記号を用いて表すと、

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda^{-i}\beta_i\ell_i-1=-\frac{\beta_m\ell_{m+1}}{\lambda^m(\lambda-s_m)}$$

となる。これを、

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{-i}\beta_i\ell_i-1=0$$

と比較して、

$$\frac{\beta_m\ell_{m+1}}{\lambda^m(\lambda-s_m)}=\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda^{-i}\beta_i\ell_i$$

を得る。

固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}$$

と書こう。すると、(16) 式は、

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \beta_i v_i\\ s_1 v_1\\ s_2 v_2\\ \vdots\\ s_{m-2}v_{m-2}\\ s_{m-1}v_{m-1}+s_m v_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda v_1\\ \lambda v_2\\ \lambda v_3\\ \vdots\\ \lambda v_{m-1}\\ \lambda v_m\end{pmatrix}$$

ゆえに、以下の等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i = \lambda v_1, \tag{24}$$
$$s_1 v_1 = \lambda v_2, \tag{25}$$
$$s_2 v_2 = \lambda v_3, \tag{26}$$
$$\vdots$$
$$s_{m-2} v_{m-2} = \lambda v_{m-1} \tag{27}$$
$$s_{m-1} v_{m-1} = (\lambda - s_m) v_m \tag{28}$$

これらの関係式を用いて、$v_i\,(i = 2,\ 3,\ \cdots,\ m)$ を λ と s_i を用いて表すことができる。

$$\begin{aligned} v_2 &= \lambda^{-1} v_1 s_1 \\ v_3 &= \lambda^{-2} v_1 s_1 s_2 \\ &\vdots \\ v_{m-1} &= \lambda^{-(m-2)} v_1 s_1 s_2 \cdots s_{m-2} \\ v_m &= (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-(m-2)} v_1 s_1 s_2 \cdots s_{m-2} s_{m-1} \end{aligned}$$

これらの関係式を用いると、(24) 式左辺は、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i &= \lambda v_1 \Big(\lambda^{-1} \beta_1 + \lambda^{-2} \beta_2 s_1 + \lambda^{-3} \beta_3 s_1 s_2 + \cdots + \lambda^{-(m-1)} \beta_{m-1} s_0 s_1 \cdots s_{m-2} \\ &\quad + (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-(m-1)} \beta_m s_1 s_2 \cdots s_{m-2} s_{m-1} \Big) \\ &= \lambda v_1 \Big(\lambda^{-1} \beta_1 \ell_1 + \lambda^{-2} \beta_2 \ell_2 + \lambda^{-3} \beta_3 \ell_3 + \cdots + \lambda^{-m+1} \beta_{m-1} \ell_{m-1} \\ &\quad + (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-(m-1)} \beta_m \ell_m \Big) \\ &= \lambda v_1 \Big(\lambda^{-1} \beta_1 \ell_1 + \lambda^{-2} \beta_2 \ell_2 + \lambda^{-3} \beta_3 \ell_3 + \cdots + \lambda^{-m+1} \beta_{m-1} \ell_{m-1} + \lambda^{-m} \beta_m \ell_m \\ &\quad + (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-m} \beta_m \ell_{m+1} \Big) \end{aligned} \tag{29}$$

ところが、上式右辺のカッコ内 $(\cdots)$ は、(22) 式より 1 となるので、

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i v_i = \lambda v_1$$

すなわち、(24) 式は、(25) 式から (28) 式を用いて導かれることが分かった。

そこで、固有ベクトルは、$v_1 = 1$ と選ぶことにすると、

$$\boldsymbol{v}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^{-1} s_1 \\ \lambda^{-2} s_1 s_2 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-2)} s_1 s_2 \cdots s_{m-2} \\ (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-(m-2)} s_1 s_2 \cdots s_{m-2} s_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \lambda^{-1} \ell_2 \\ \lambda^{-2} \ell_3 \\ \vdots \\ \lambda^{-(m-2)} \ell_{m-1} \\ (\lambda - s_m)^{-1} \lambda^{-(m-2)} \ell_m \end{pmatrix} \tag{30}$$

となる。

基本再生産数 R_0 は、

$$\det(L_G - I) = (-1)^{m-1}(1-s_m)\left\{\sum_{i=1}^{m}\beta_m\ell_m + \frac{\beta_m\ell_{m+1}}{1-s_m} - 1\right\}$$

より、

$$\begin{aligned} R_0 &= \sum_{i=1}^{m}\beta_m\ell_m + \frac{\beta_m\ell_{m+1}}{1-s_m} \\ &= (-1)^{m-1}\frac{\det(L_G - I)}{1-s_m} + 1 \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、

$$\frac{\beta_m\ell_{m+1}}{1-s_m} = \sum_{i=m+1}^{\infty}\beta_m\ell_m$$

である。

3 フィボナッチのうさぎ (Fibonacci's Rabbits)

問題

新しく生まれたひとつがいのウサギが野原に放たれた。つがいはひと月で成熟し、2 か月後には新たにひとつがいのウサギを生む。ウサギが死ぬことは無く、生後 2 か月からは毎月ひとつがいのウサギを産むとすると、1 年後のつがいの数はいくらか？

t ヶ月後に生まれたつがいの数を $n_1(t)$、生まれてからひと月以上経過したつがいの数を $n_2(t)$ とおき、

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix}$$

と書くと、

$$n_1(t+1) = n_2(t) \tag{31}$$

$$n_2(t+1) = n_1(t) + n_2(t) \tag{32}$$

となり、レスリー行列は 2×2 の行列となる。拡張されたレスリーのパラメータは、

$$\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ s_1 = 1,\ s_2 = 1$$

で与えられ、

$$\begin{pmatrix} n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \end{pmatrix}$$

または、

$$\boldsymbol{u}(t+1) = L\boldsymbol{u}(t) \tag{33}$$

と書ける。レスリー行列は、

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

初期状態を

$$\boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{34}$$

と定め、 (33) 式を繰り返し用いると、 $u(t)$ の系列、

$$\boldsymbol{u}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}(2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}(3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}(4) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \cdots\cdots$$

が得られる。

特性方程式は、

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

となり、固有値と固有ベクトルは、

$$\lambda_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \qquad \boldsymbol{v}_\pm = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_\pm \end{pmatrix} \tag{35}$$

で与えられる。

初期状態 (34) を固有ベクトル (35) を用いて表すと、

$$\boldsymbol{u}(0) = -\frac{\lambda_-}{\sqrt{5}}\boldsymbol{v}_+ + \frac{\lambda_+}{\sqrt{5}}\boldsymbol{v}_-$$

となる。そして、n ヶ月後の状態は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(n) &= L^n \boldsymbol{u}(0) && (36) \\ &= -\frac{\lambda_- \lambda_+^n}{\sqrt{5}}\boldsymbol{v}_+ + \frac{\lambda_+ \lambda_-^n}{\sqrt{5}}\boldsymbol{v}_- && (37) \\ &= \frac{\lambda_+^{n-1}}{\sqrt{5}}\boldsymbol{v}_+ - \frac{\lambda_-^{n-1}}{\sqrt{5}}\boldsymbol{v}_- && (38) \end{aligned}$$

となる。

ここで、

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{39}$$

を定義する。すると、n ヶ月後のつがいの総数は、

$$\begin{aligned} N(n) &= \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{u}(n) && (40) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \lambda_+^{n-1}(1+\lambda_+) - \lambda_-^{n-1}(1+\lambda_-) \right\} && (41) \end{aligned}$$

ここで、 $1 + \lambda_\pm = \lambda_\pm^2$ を用いると、

$$N(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\lambda_+^{n+1} - \lambda_-^{n+1} \right)$$

を得る。

1 年後のつがいの総数は、$N = 12$ とおいて求まるので、フィボナッチパズルの答は、

$$N(12) = 233 \text{ つがい}$$

である。

4　塵劫記のねずみ

問題

正月にねずみの父と母がいて、子を 12 匹産み、1 月末には親と子を合わせて 14 ひきになる。子ねずみは 6 組の夫婦となり、それぞれが 12 匹ずつ産む。親もまた 12 匹を産むので、2 月末には、親と子を合わせて 98 匹になる。このように月に 1 度ずつ、親も子も、孫もひ孫も月々に 12 匹ずつ産むとき、12 月のおわりにはねずみの総数は何ひきになるか。

解答

$$\begin{aligned} u_1(t) &: \text{その月 } (t) \text{ に生まれたつがいの数} \\ u_2(t) &: \text{その月 } (t) \text{ より前に生まれたつがいの数} \end{aligned}$$

と定義して、

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix}$$

とおく。

$$\begin{aligned} u_1(t+1) &= 6u_1(t) + 6u_2(t) \\ u_2(t+1) &= u_1(t) + u_2(t) \end{aligned}$$

となるので、レスリー行列 (Leslie-like Matrix) は、

$$L = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

正月には、1 つがいのネズミなので、

$$\boldsymbol{u}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ひと月毎のネズミの状態は、

$$\boldsymbol{u}(1) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}(2) = \begin{pmatrix} 42 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{u}(3) = \begin{pmatrix} 294 \\ 49 \end{pmatrix}, \quad \cdots$$

特性方程式とその解は、

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 6 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - 7\lambda = 0 \quad \therefore \quad \lambda = 0,\ 7$$

である。

固有値と固有ベクトルは、

固有値	固有ベクトル
$\lambda = 0$	$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
$\lambda = 7$	$\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\boldsymbol{u}(0)$ を固有ベクトルえ表すと、

$$\boldsymbol{u}(0) = -\frac{6}{7}\boldsymbol{v}_1 + \frac{1}{7}\boldsymbol{v}_2$$

となるので、12 月末には、

$$\boldsymbol{u}(12) = L^{12}\boldsymbol{u}(0) = 7^{11}\boldsymbol{v}_2$$

となる。ゆえに、12 か月後のつがいの数 $N(12)$ は (39) 式の $\boldsymbol{a}$ をもちいて、

$$N(12) = 7^{11}\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{v}_2 = 7^{12} = 13,841,287,201$$

と表される。ネズミの総数は、この数を 2 倍して、

$$2 \times 7^{12} = 27,682,574,402$$

となる。