確率・統計　模擬試験問題解答

問題 1

(1) ある家庭には、3 人の子どもがいる。3 人とも女の子である確率はいくらか。
$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

(2) ある家庭には 3 人の子どもがいる。そのうち、少なくとも 1 人は女の子だそうである。3 人とも女の子である確率はいくらか。
8 通りのうち、3 人とも男である可能性は無いので、$\frac{1}{8-1} = \frac{1}{7}$

(3) ある家庭には 3 人の子どもがいる。一番上が女の子である確率はいくらか。
$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

(4) ある家庭には、3 人の子どもがいる。そのうち、少なくとも 1 人は女の子だそうである。一番上が女の子である確率はいくらか。
$\frac{4}{7}$

問題 2 100 本のくじの中に 5 本の当りくじがある。これを 2 人が順に 1 本ずつ引く。1 番目に引く人と 2 番目に引く人が当りくじを引き当てる確率について考えてみよう。

(1) 1 番目の人が当りくじを引く確率 $P(1_{当})$ を求めよ。
$P(1_{当}) = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}$

(2) 1 番目の人が外れくじを引く確率 $P(1_{外})$ を求めよ。
$P(1_{外}) = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$

(3) 1 番目の人が当りくじを引いた場合に、2 番目の人も当りくじを引く確率 $P(2_{当}|1_{当})$ を求めよ。 $P(2_{当}|1_{当}) = \frac{4}{99}$

(4) 1 番目の人が外れくじを引いた場合に、2 番目の人が当りくじを引く確率 $P(2_{当}|1_{外})$ を求めよ。 $P(2_{当}|1_{外}) = \frac{5}{99}$

(5) 2 番目の人が当りくじを引く確率 $P(2_{当})$ は、$P(1_{当})$, $P(1_{外})$, $P(2_{当}|1_{当})$, $P(2_{当}|1_{外})$ を用いてどのように表されるか。
$P(2_{当}) = P(2_{当}|1_{当})P(1_{当}) + P(2_{当}|1_{外})P(1_{外})$

(6) 2 番目の人が当りくじを引く確率 $P(2_{当})$ を求めよ。
$P(2_{当}) = \frac{4}{99}\cdot\frac{1}{20} + \frac{5}{99}\cdot\frac{19}{20} = \frac{4+5\times 19}{99\cdot 20} = \frac{1}{20}$

問題 3 ある夜、タクシーがひき逃げした。目撃者は、青のタクシーがひいたと証言した。その町で営業しているタクシー会社は、グリーン社とブルー社の二社で、次のようなデータがある。

a 町を走るタクシーの 90 %はグリーン社の緑の車で、残りの 10 %はブルー社の青い車である。

b 夜の事故という状況で目撃者の証言がどれだけ信頼できるかを警察がテストしたところ、2 つの色を正しく識別できる確率は 75 %、間違える確率は 25 %であった。

(1) 夜間に青いタクシーの目撃証言が得られる確率 $P(青_{目})$ はいくらか。
(答)　$P(青_{目}) = P(青_{目}|青_{走})P(青_{走}) + P(青_{目}|緑_{走})P(緑_{走})$
$= 0.75\times 0.1 + 0.25\times 0.9 = 0.3$

(2) 夜間に緑のタクシーの目撃証言が得られる確率 $P(緑_{目})$ はいくらか。
(答)　$P(緑_{目}) = P(緑_{目}|緑_{走})P(緑_{走}) + P(緑_{目}|青_{走})P(青_{走})$
$= 0.75\times 0.9 + 0.25\times 0.1 = 0.7$

(3) ブルー社のタクシーが事故を起こした確率 $\mathrm{P}(青_{事故}) = \dfrac{\mathrm{P}(青_{走} \cap 青_{目})}{\mathrm{P}(青_{目})}$ はいくらか。

(答) $\mathrm{P}(青_{事故}) = \dfrac{\mathrm{P}(青_{目}|\ 青_{走})\mathrm{P}(青_{走})}{\mathrm{P}(青_{目})} = \dfrac{0.75 \times 0.1}{0.3} = \dfrac{0.75}{3} = 0.25$

問題 4

[1] 25 本のくじの中に、賞金 100 円の当りくじが 1 本ある。このくじを 2 本引く。このときに得る賞金を X 円とする。

(1) 1 本目が当りくじである確率 $\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。$\mathrm{P}(1_{当}) = \dfrac{1}{25}$

(2) 1 本目が外れくじである確率 $\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。$\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{24}{25}$

(3) 1 本目が外れくじであったとき、2 本目が当りくじである確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ はいくらか。$\mathrm{P}(2_{当}|1_{外}) = \dfrac{1}{24}$

(4) 2 本目が当たりくじである確率 $\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{1}{24} \times \dfrac{24}{25} = \dfrac{1}{25}$

(5) 2 本のうち、1 本が当りくじである確率 $\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当})$ を求めよ。

$\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当}) = \dfrac{2}{25} \left(= \dfrac{1 \times 24}{{}_{25}C_2} = \dfrac{2 \times 24}{25 \times 24} \right)$

(6) 2 本とも外れである確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{23}{24} \cdot \dfrac{24}{25} = \dfrac{23}{25} \left(= \dfrac{{}_{24}C_2}{{}_{25}C_2} \right)$

(7) X の期待値 (平均) を求めよ。$\mu = 0 \times \mathrm{P}(0) + 100 \times \mathrm{P}(100) = 0 \times \dfrac{23}{25} + 100 \times \dfrac{2}{25} = 8$ 円

(8) X の分散を求めよ。$\sigma^2 = 0 \times \mathrm{P}(0) + 100^2 \times \mathrm{P}(100) - \mu^2 = 100^2 \times \dfrac{2}{25} - 8^2 = 200 \times \dfrac{100}{25} - 64 = 800 - 64 = 736$

[2] 50 本のくじの中に、賞金 100 円のあたりくじが 2 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

(1) 2 本とも当たりくじとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) = \dfrac{1}{49} \cdot \dfrac{2}{50} = \dfrac{1}{1225} \left(= \dfrac{1}{{}_{50}C_2} \right)$

(2) 1 本目が当りで 2 本目が外れとなる確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) = \dfrac{48}{49}\dfrac{2}{50} = \dfrac{48}{1225}$

(3) 1 本目が外れで 2 本目が当りとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{2}{49} \cdot \dfrac{48}{50} = \dfrac{48}{1225}$

(4) 2 本のうち 1 本が当たりくじとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) + \mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) + \mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \dfrac{48 \times 2}{1225} = \dfrac{96}{1225} \left(= \dfrac{2 \times 48}{{}_{50}C_2} \right)$

(5) 2 本とも外れである確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{47}{49} \cdot \dfrac{48}{50} = \dfrac{1128}{1225} \left(= \dfrac{{}_{48}C_2}{{}_{50}C_2} \right)$

(6) X の期待値 (平均) を求めよ。$\mu = 0 \times \dfrac{1128}{1225} + 100 \times \dfrac{96}{1225} + 200 \times \dfrac{1}{1225} = \dfrac{100 \cdot (96 + 2)}{1225} = 8$

(7) X の分散を求めよ。$\sigma^2 = 100^2 \times \dfrac{96}{1225} + 200^2 \times \dfrac{1}{1225} - 8^2$

$$= 100^2 \times \frac{(96+4)}{1225} - 64 = 100^2 \times \frac{100}{25 \times 49} - 64$$

$$= \frac{40000}{49} - 64 = \frac{(4000 - 64 \times (50-1))}{49} = \frac{36864}{49} \approx 752.3265$$

問題 5 サイコロを投げる試行を行う。

(1) 1 回の試行で 6 の目が出る確率 p はいくらか。 $p = \dfrac{1}{6}$

(2) x 回目の試行で、初めて 6 の目が出る確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{P}(x) = \left(\dfrac{1}{6}\right) \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{x-1}$

(3) 6 の目が出るまでの平均の試行回数を求めよ。 $\mu = \dfrac{1}{\frac{1}{6}} = 6$

(4) x の分散を求めよ。 $\sigma^2 = \dfrac{\frac{5}{6}}{\left(\frac{1}{6}\right)^2} = 30$

(5) x 回の試行で一度も 6 の目が出ない確率 $\mathrm{Q}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{Q}(x) = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{x}$

(6) $\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x) = \dfrac{1}{6} \cdot \left(\dfrac{5}{6}\right)^{x-1} + \left(\dfrac{5}{6}\right)^{x} = \left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{5}{6}\right)\left(\dfrac{5}{6}\right)^{x-1} = \left(\dfrac{5}{6}\right)^{x-1} = \mathrm{Q}(x-1)$

(7) $\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。
$\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(x-1) + (\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)) = \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + (\mathrm{P}(x-1) + \mathrm{Q}(x-1)) = \cdots = 1$

(8) $\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(n) > \frac{1}{2}$ を満たす最小の n を求めよ。
$1 - \mathrm{Q}(n) > \dfrac{1}{2}$ より、$\mathrm{Q}(n) < \dfrac{1}{2}$. $\left(\dfrac{5}{6}\right)^3 = \dfrac{125}{216} > \dfrac{1}{2}$. $\left(\dfrac{5}{6}\right)^4 = \dfrac{625}{1296} < \dfrac{1}{2}$. ゆえに、$n = 4$.

問題 6 選択肢が 4 個あり、その中の正しいものに○をつけよという設問が 6 題ある。ただし、各設問について正解は 1 個しかないものとする。まったくでたらめに○をつけたとした場合について以下の質問に答えよ。

(1) x コ正解する確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。$\mathrm{P}(x) = {}_6C_x \left(\dfrac{1}{4}\right)^x \left(\dfrac{3}{4}\right)^{6-x}$

(2) 平均するといくつ正解することになるか。$\mu = np = 6 \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{2}$

(3) 正解数の分散を求めよ。$\sigma^2 = npq = 6 \times \dfrac{1}{4} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{18}{16} = \dfrac{9}{8}$

(4) 3 問以上正解する確率は何パーセントか。有効数字 2 桁で答えよ。
$\mathrm{P}(6) + \mathrm{P}(5) + \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(3) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^6 + 6\left(\dfrac{1}{4}\right)^5\left(\dfrac{3}{4}\right) + 15\left(\dfrac{1}{4}\right)^4\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 + 20\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$
$= \dfrac{1 + 18 + 135 + 540}{4096} = \dfrac{694}{4096} = \dfrac{347}{2048} \approx 17\%$