練習問題 8

問 1. 次の値を求めよ。

1. ${}_{10}P_3$ ${}_{10}P_3 = 10 \times 9 \times 8 = 720$
2. ${}_{20}P_2$ ${}_{20}P_2 = 20 \times 19 = 380$
3. ${}_{20}C_2$ ${}_{20}C_2 = \dfrac{20 \times 19}{2!} = 190$
4. ${}_{20}C_3$ ${}_{20}C_3 = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{3!} = 1140$
5. ${}_{20}C_{17}$ ${}_{20}C_{17} = {}_{20}C_3 = 1140$
6. ${}_{20}C_{18}$ ${}_{20}C_{18} = {}_{20}C_2 = 190$

問 2. 男子 9 人、女子 8 人のクラスがある。

(1) クラスから 4 人の委員の選び方は何通りあるか。

クラス全体の人数は 17 人である。17 人から 4 人を選ぶ方法の数は、

$$ {}_{17}C_4 = \frac{17 \times 16 \times 15 \times 14}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2380 \text{ 通り} $$

(2) 4 人の委員すべてが男子である選び方は何通りあるか。

9 人から 4 人を選ぶ方法の数は、

$$ {}_{9}C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126 \text{ 通り} $$

(3) 少なくとも 1 人の女子を含んだ 4 人の委員の選び方は何通りあるか。

17 人から 4 人を選ぶ方法の数から、4 人とも男子の場合を引いてやればよいので、

$$ {}_{17}C_4 - {}_{9}C_4 = 2380 - 126 = 2254 \text{ 通り} $$

(4) 男子 3 人、女子 1 人の委員の選び方は何通りあるか。

$$ {}_{9}C_3 \times {}_{8}C_1 = 672 \text{ 通り} $$

(5) 男子 2 人、女子 2 人の委員の選び方は何通りあるか。

$$ {}_{9}C_2 \times {}_{8}C_2 = 1008 \text{ 通り} $$

(6) 男子 1 人、女子 3 人の委員の選び方は何通りあるか。

$${}_9C_1 \times {}_8C_3 = 504 \text{ 通り}$$

(7) 4 人の委員がすべて女子の選び方は何通りあるか。

$${}_8C_4 = 70 \text{ 通り}$$

【参考】 上記で求めた値の間には、次の関係が成り立っている。

$$2380 = 126 + 672 + 1008 + 504 + 70$$

これを式で表すと、

$${}_{17}C_4 = {}_9C_4 \cdot {}_8C_0 + {}_9C_3 \cdot {}_8C_1 + {}_9C_2 \cdot {}_8C_2 + {}_9C_1 \cdot {}_8C_3 + {}_9C_0 \cdot {}_8C_4$$

これは、

$$(x+1)^{17} = (x+1)^9 \cdot (x+1)^8 \tag{1}$$

と書いて、両辺を x で展開して得られる係数の関係だからである。

$$(x+1)^{17} = \sum_{i=0}^{17} {}_{17}C_i x^i, \quad (x+1)^9 = \sum_{j=0}^{9} {}_9C_j x^j, \quad (x+1)^8 = \sum_{l=0}^{9} {}_8C_l x^l$$

(1) 式の x^i の係数を比較すると、

$${}_{17}C_i = \sum_{j+l=i} {}_9C_j \cdot {}_8C_l = \sum_{j=0}^{9} {}_9C_j \cdot {}_8C_{i-j}$$

を得る。

問 3. ニュートンの公式

$${}_nC_r \cdot {}_rC_k = {}_nC_k \cdot {}_{n-k}C_{r-k}$$

が成り立つことを証明せよ。

$$\begin{aligned} {}_nC_r \cdot {}_rC_k &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{r!}{k!(r-k)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{(n-k)!}{(r-k)!\,(n-k)-(r-k))!} \\ &= {}_nC_k \cdot {}_{n-k}C_{r-k} \end{aligned}$$