2015年度率・統計　試験前問題

問題1　集合 $\Omega = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) 要素数が１の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_1 = 5$
(2) 要素数が２の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_2 = 10$
(3) 要素数が３の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_3 = 10$
(4) 要素数が４の部分集合はいくつあるか。 (答)　${}_5C_4 = 5$
(5) Ω の部分集合は全部でいくつあるか。　(答)　${}_5C_0 + {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_5C_4 + {}_5C_5 = 2^5 = 32$

問題2

(1) ある家庭には、４人の子どもがいる。４人とも女の子である確率はいくらか。
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$
(2) ある家庭には、４人の子どもがいる。そのうち、少なくとも１人は女の子だそうである。４人とも女の子である確率はいくらか。
16通りのうち、４人とも男である可能性は無いので、$\frac{1}{16-1} = \frac{1}{15}$
(3) ある家庭には、４人の子どもがいる。一番上は女の子である。４人とも女の子である確率はいくらか。
2番目、3番目、4番目が各々女の子である確率は、$\frac{1}{2}$ だから、$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

問題3 100本のくじの中に3本の当りくじがある。これを2人が順に1本ずつ引く。1番目に引く人と2番目に引く人が当りくじを引き当てる確率について考えてみよう。

(1) 1番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(1_{当})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(1_{当}) = \frac{3}{100}$
(2) 1番目の人が外れくじを引く確率 $\mathrm{P}(1_{外})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(1_{外}) = \frac{97}{100}$
(3) 1番目の人が当りくじを引いた場合に、2番目の人も当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{当})$ を求めよ。　$\mathrm{P}(2_{当}|1_{当}) = \frac{2}{99}$
(4) 1番目の人が外れくじを引いた場合に、2番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ を求めよ。　$\mathrm{P}(2_{当}|1_{外}) = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}$
(5) 2番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当})$ は、$\mathrm{P}(1_{当})$, $\mathrm{P}(1_{外})$, $\mathrm{P}(2_{当}|1_{当})$, $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ を用いてどのように表されるか。
$\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$
(6) 2番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(2_{当}) = \frac{2}{99}\cdot\frac{3}{100} + \frac{3}{99}\cdot\frac{97}{100} = \frac{3(2+97)}{99\cdot 100} = \frac{3}{100}$

問題4 ある夜、タクシーがひき逃げした。目撃者は、青のタクシーがひいたと証言した。その町で営業しているタクシー会社は、グリーン社とブルー社の二社で、次のようなデータがある。

a 町を走るタクシーの 80 %はグリーン社の緑の車で、残りの 20 %はブルー社の青い車

である。

b 夜の事故という状況で目撃者の証言がどれだけ信頼できるかを警察がテストしたところ、2 つの色を正しく識別できる確率は 75 %、間違える確率は 25 %であった。

(1) 夜間に青いタクシーの目撃証言が得られる確率 $\mathrm{P}(青_{目})$ はいくらか。

(答) $\mathrm{P}(青_{目}) = \mathrm{P}(青_{目}|\,青_{走})\mathrm{P}(青_{走}) + \mathrm{P}(青_{目}|\,緑_{走})\mathrm{P}(緑_{走})$
$= 0.75 \times 0.2 + 0.25 \times 0.8 = 0.35$

(2) 夜間に緑のタクシーの目撃証言が得られる確率 $\mathrm{P}(緑_{目})$ はいくらか。

(答) $\mathrm{P}(緑_{目}) = \mathrm{P}(緑_{目}|\,緑_{走})\mathrm{P}(緑_{走}) + \mathrm{P}(緑_{目}|\,青_{走})\mathrm{P}(青_{走})$
$= 0.75 \times 0.8 + 0.25 \times 0.2 = 0.65$

(3) ブルー社のタクシーが事故を起こした確率 $\mathrm{P}(青_{事故}) = \dfrac{\mathrm{P}(青_{走} \cap 青_{目})}{\mathrm{P}(青_{目})}$ はいくらか。

(答) $\mathrm{P}(青_{事故}) = \dfrac{\mathrm{P}(青_{目}|\,青_{走})\mathrm{P}(青_{走})}{\mathrm{P}(青_{目})} = \dfrac{0.75 \times 0.2}{0.35} = \dfrac{0.15}{0.35} = \dfrac{3}{7} \simeq 0.43$

問題 5

[1] 30 本のくじの中に、賞金 100 円の当たりくじが 1 本ある。このくじを 1 本ずつ順に 2 本引く。このときに得る賞金を X 円とする。

(1) 1 本目が当りくじである確率 $\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。$\mathrm{P}(1_{当}) = \dfrac{1}{30}$

(2) 1 本目が外れくじである確率 $\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。$\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{29}{30}$

(3) 1 本目が外れくじであったとき、2 本目が当りくじである確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ はいくらか。$\mathrm{P}(2_{当}|1_{外}) = \dfrac{1}{29}$

(4) 2 本目が当たりくじである確率 $\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{1}{29} \times \dfrac{29}{30} = \dfrac{1}{30}$

(5) 2 本のうち、1 本が当りくじである確率 $\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当})$ を求めよ。

$\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当}) = \dfrac{1}{15} \left(= \dfrac{1 \times 29}{{}_{30}C_2} = \dfrac{2 \times 29}{30 \times 29} \right)$

(6) 2 本とも外れである確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{28}{29}\dfrac{29}{30} = \dfrac{28}{30} = \dfrac{14}{15} \left(= \dfrac{{}_{29}C_2}{{}_{30}C_2} \right)$

(7) X の期待値 (平均) を求めよ。$\mu = 100 \times \dfrac{1}{15} = \dfrac{20}{3}$円

(8) X の分散を求めよ。$\sigma^2 = 100^2 \times \dfrac{1}{15} - \left(\dfrac{20}{3}\right)^2 = 100 \times \left(\dfrac{100}{15} - \dfrac{4}{9}\right)$
$= 100 \times \left(\dfrac{20}{3} - \dfrac{4}{9}\right) = 100 \times \dfrac{(60-4)}{9} = \dfrac{5600}{9} \approx 622.2$

[2] 60 本のくじの中に、賞金 100 円のあたりくじが 2 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

(1) 2 本とも当たりくじとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) = \dfrac{1}{59}\dfrac{2}{60} = \dfrac{1}{1770} \left(= \dfrac{1}{{}_{60}C_2} \right)$

(2) 1 本目が当りで 2 本目が外れとなる確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当})$ はいくらか。$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) = \dfrac{58}{59}\dfrac{2}{60} = \dfrac{58}{1770} = \dfrac{29}{885}$

(3) 1 本目が外れで 2 本目が当りとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{2}{59}\dfrac{58}{60} = \dfrac{58}{1770} = \dfrac{29}{885}$

(4) 2 本のうち 1 本が当たりくじとなる確率 $\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) + \mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{当})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) + \mathrm{P}(2_{当} \cap 1_{外}) = \dfrac{116}{1770} = \dfrac{58}{885} \left(= \dfrac{2 \times 58}{{}_{60}C_2} \right)$

(5) 2 本とも外れである確率 $\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$ はいくらか。

$\mathrm{P}(2_{外} \cap 1_{外}) = \mathrm{P}(2_{外}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外}) = \dfrac{57}{59}\dfrac{58}{60} = \dfrac{1653}{1770} = \dfrac{551}{590} \left(= \dfrac{{}_{58}C_2}{{}_{60}C_2} \right)$

(6) X の期待値 (平均) を求めよ。$\mu = 100 \times \dfrac{58}{885} + 200 \times \dfrac{1}{1770} = \dfrac{20}{3}$

(7) X の分散を求めよ。$\sigma^2 = 100^2 \times \dfrac{116}{1770} + 200^2 \times \dfrac{1}{1770} - \left(\dfrac{20}{3}\right)^2$

$$= 100^2 \times \frac{(116+4)}{1770} - \frac{400}{9} = 100^2 \times \frac{120}{1770} - \frac{400}{9}$$

$$= 400 \times \left(\frac{100}{59} - \frac{1}{9}\right) = 400 \times \frac{(900-59)}{531} = \frac{336400}{531} \approx 633.5$$

問題 6 100 円玉と 50 円玉を投げる試行を行う。

(1) 1 回の試行で 2 枚とも表が出る確率はいくらか。 $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

(2) x 回目の試行で、初めて 2 枚揃って表が出る確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{P}(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1}$

(3) 2 枚とも表が出るまでの平均の試行回数を求めよ。 $\mu = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

(4) x の分散を求めよ。 $\sigma^2 = \dfrac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 12$

(5) x 回の試行で一度も 2 枚揃って表が出ない確率 $\mathrm{Q}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{Q}(x) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$

(6) $\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1} = \mathrm{Q}(x-1)$

(7) $\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。

$\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x) = \mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{Q}(x-1) = \cdots = 1$

(8) $\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(n) > \frac{1}{2}$ を満たす最小の n を求めよ。

$1 - \mathrm{Q}(n) > \dfrac{1}{2}$ より、$\mathrm{Q}(n) < \dfrac{1}{2}$. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3 = \dfrac{27}{64} < \dfrac{1}{2}$. ゆえに、$n = 3$.

問題 7 選択肢が 5 個あり、その中の正しいものに○をつけよという設問が 5 題ある。ただし、各設問について正解は 1 個しかないものとする。まったくでたらめに○をつけたとした場合について以下の質問に答えよ。

(1) x コ正解する確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。$\mathrm{P}(x) = {}_5C_x \left(\dfrac{1}{5}\right)^x \left(\dfrac{4}{5}\right)^{5-x}$

(2) 平均するといくつ正解することになるか。$\mu = 1$

(3) 正解数の分散を求めよ。$\sigma^2 = \dfrac{4}{5}$

(4) 正解数が 0 の確率を求めよ。$\mathrm{P}(0) = \left(\dfrac{4}{5}\right)^5 = \dfrac{1024}{3125}$

(5) 1 問正解する確率はくらか。$\mathrm{P}(1) = {}_5C_1 \left(\dfrac{1}{5}\right) \left(\dfrac{4}{5}\right)^4 = \dfrac{1280}{3125} = \dfrac{256}{625}$

(6) 2 問正解する確率はいくらか。$\mathrm{P}(2) = {}_5C_2 \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 \left(\dfrac{4}{5}\right)^3 = \dfrac{640}{3125} = \dfrac{128}{625}$

(7) 3 問以上正解する確率はいくらか。$\mathrm{P}(3) + \mathrm{P}(4) + \mathrm{P}(5) = \dfrac{181}{3125}$