

演習問題 7 解答

問題 1 お客が 5 人来て、それぞれ自分の帽子をテーブルの上に置いた。5 人の客は、酒をしこたま飲んだため、帰り際に、どれが自分の帽子か分からなくなってしまった。そこで、それぞれの客は「当てずっぽうに」帽子を取って帰った。すべての客が、他人の帽子を取っていった確率を求めたい。

1. 帽子の被り方の集合 Ω の要素の数 $|\Omega|$ 、すなわち、帽子の被り方の総数を求めよ。

$$5! = 120 \text{ 通り}$$

2. 5 人のうち、少なくとも 1 人が自分の帽子を被っている帽子の被り方は全部で何通りあるか。

$$\begin{aligned} & {}_5C_1 \times 4! - {}_5C_2 \times 3! + {}_5C_3 \times 2! - {}_5C_4 \times 1! + {}_5C_5! \\ &= 5! - \frac{5!}{2!} + \frac{5!}{3!} - \frac{5!}{4!} + \frac{5!}{5!} \\ &= 120 - 60 + 20 - 5 + 1 \\ &= 76 \text{ 通り} \end{aligned}$$

3. 5 人すべてが他人の帽子を被っているような帽子の被り方は全部で何通りあるか。

$$120 - 76 = 44 \text{ 通り}$$

4. すべての客が、他人の帽子を取っていく確率を求めよ。

$$\frac{44}{120} = \frac{11}{30}$$

問題 2

[1] 50 本のくじの中に、賞金 100 円の当たりくじが 1 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

- (1) くじの引き方は、全部で何通りか。 ${}_{50}C_2 = 1225 \text{ 通り}$
(2) 当たりくじを含む引き方は、全部で何通りか。 49 通り
(3) 2 本とも空くじとなる引き方は、全部で何通りか。 ${}_{49}C_2 = 1176 \text{ 通り}$
(4) 2 本のうち 1 本が当たりくじである確率はいくらか。 $\frac{1}{25}$
(5) 2 本とも空くじである確率はいくらか。 $\frac{24}{25}$
(6) X の期待値 (平均) を求めよ。 $\mu = 100 \times \frac{1}{25} = 4 \text{ 円}$
(7) X の分散を求めよ。 $\sigma^2 = 100^2 \times \frac{1}{25} - 4^2 = 400 - 16 = 384$

[2] 100 本のくじの中に、賞金 100 円のあたりくじが 2 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

(1) くじの引き方は、全部で何通りか。

$${}_{100}C_2 = 4950 \text{ 通り}$$

(2) 2 本とも当たりくじとなる引き方は、全部で何通りか。

$$1 \text{ 通り}$$

(3) 2 本のうち、1 本が当たりくじとなる引き方は、全部で何通りか。

$$2 \times 98 = 196 \text{ 通り}$$

(4) 2 本とも空くじとなる引き方は、全部で何通りか。

$${}_{98}C_2 = 4753 \text{ 通り}$$

(5) 2 本とも当たりくじとなる確率はいくらか。

$$\frac{1}{4950}$$

(6) 2 本のうち 1 本が当たりくじとなる確率はいくらか。

$$\frac{196}{4950} = \frac{98}{2475}$$

(7) 2 本とも空くじである確率はいくらか。

$$\frac{4753}{4950}$$

(8) X の期待値 (平均) を求めよ。

$$\mu = 100 \times \frac{196}{4950} + 200 \times \frac{1}{4950} = 4$$

(9) X の分散を求めよ。

$$\sigma^2 = 100^2 \times \frac{196}{4950} + 200^2 \times \frac{1}{4950} - 4^2 = \frac{40000}{99} - 16 = \frac{38416}{99} \simeq 388.04$$