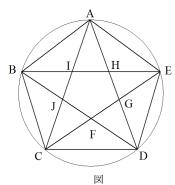
# 平成28年度 青森県教員採用試験 数学 問題および解答・解説

- $\boxed{1}$  図のように、円に内接する 1 辺の長さが a の正五角形ABCDEがある。点F,G,H,I,J は対角線の交点とするとき、次の  $(1)\sim(3)$  に答えなさい。
  - (1)  $\triangle ABE$  と  $\triangle IBA$  が相似であることを示しなさい。 【解答】

$$\angle ABE = \angle IBA$$
 (共通)

$$\angle AEB = \angle IAB$$

2組の角がそれぞれ等しいので、 $\triangle ABE$  と  $\triangle IBA$  は相似である。



(2) BI と BE の長さを求めなさい。

# 【解答】

$$\triangle AEI$$
 について

$$\angle AEI$$
 は $\angle AED$  を 3 等分した大きさで、

 $\angle IAE$  は $\angle BAE$  を 3 等分した 2 つ分の大きさだから

$$\angle AEI = 108^{\circ} \times \frac{1}{3} = 36^{\circ}, \ \angle IAE = 108^{\circ} \times \frac{2}{3} = 72^{\circ}$$

よって、
$$\angle EIA = 180^{\circ} - (36^{\circ} + 72^{\circ}) = 72^{\circ}$$

$$IE = AE = a$$

$$AB:BE=IB:BA$$

$$AB:(BI+IE)=IB:BA$$

$$a:(x+a)=x:a$$

$$(x+a)x = a^2$$

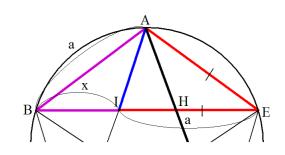
$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

 $x > 0 \downarrow 0$ 

$$x = \frac{(-1+\sqrt{5})}{2}a = BI$$

$$BE = BI + IE = \frac{(-1+\sqrt{5})}{2}a + a = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}a$$

- (1) 三角形の相似の条件
- ① 3 組の辺の比が、すべて等しい
- ② 2 組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい
- ③ 2 組の角がそれぞれ等しい



(3) 正五角形 ABCDE の面積を $S_1$ , 五角形 FGHIJ の面積を $S_2$ 

とおくとき、
$$\frac{S_2}{S_1}$$
の値を求めなさい。

【解答】

$$IH = BE - 2BI = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}a + (1-\sqrt{5})a = \frac{3-\sqrt{5}}{2}a$$

ここで、五角形 FGHIJ の一つの内角である $\angle HIJ$  の大きさは  $\angle HIJ = \angle AIB = 180^{\circ} - (36^{\circ} + 36^{\circ}) = 108^{\circ}$ 

 $\sharp \mathcal{L}, \triangle IAB \equiv \triangle JBC \equiv \triangle FCD \equiv \triangle GDE \equiv \triangle HEA$ 

よって,五角形 FGHIJ の 1 つの内角がすべて  $108^\circ$ であるので FGHIJ は正五角形である。

すなわち, ABCDE と FGHIJ は相似であり,

相似比は1:
$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
である。

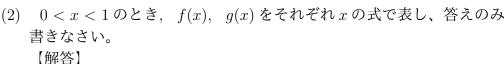
したがって、 
$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \div 1^2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$$

(3) 正 n 角形の 1 つの内角は  $(n-2) \times 180^{\circ} \times \frac{1}{n}$  よって、正五角形の 1 つの内角は  $108^{\circ}$ 

図形の相似比が m:n のとき

面積比は  $m^2:n^2$ 

- 時計の長針と短針が重なる時刻について次のように考える。ただし、短針は 12 時間で長針は 1 時間でそれぞれなめらかに 1 周するものとする。図のように、半径が 1 の円をとり、「12 時」の点を A とする。「12 時」から x 時間たったときの、中心から延ばした短針の延長線と円周の交点を P、長針の延長と円周の交点を Q とし、このときの  $\widehat{AP}$  の長さを  $\widehat{f(x)}$ ,  $\widehat{AQ}$  の長さを  $\widehat{g(x)}$  とする。ただし、 $\widehat{AP}$ ,  $\widehat{AQ}$  ともに  $\widehat{A}$  から時計回りにある側とし、 $\widehat{Q}$  と  $\widehat{A}$  が重なるときの  $\widehat{AQ}$  の長さは  $\widehat{Q}$  と  $\widehat{Q}$  と  $\widehat{Q}$  の長さとする。 $\widehat{Q}$  の長さは  $\widehat{Q}$  と  $\widehat{Q}$  と  $\widehat{Q}$  に答えなさい。
  - (1) f(3),  $g\left(\frac{1}{3}\right)$  をそれぞれ求め、答えのみ書きなさい。 【解答】  $f(3)=2\pi\cdot\frac{3}{12}=\frac{\pi}{2}$   $g\left(\frac{1}{3}\right)=2\pi\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\pi$



【解答】
$$f(x) = \frac{\pi}{6}x$$
$$g(x) = 2\pi x$$

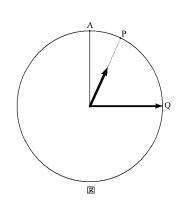
(3)  $1 \le x < 2$  のとき, P と Q が重なるときの x の値を求めなさい。

### 【解答】

 $1 \leq x < 2$ のとき

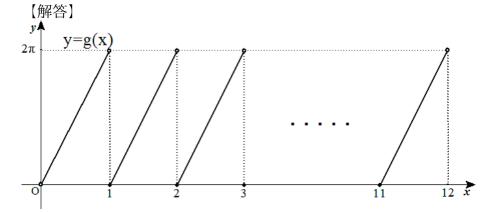
$$f(x) = \frac{x}{6}\pi, \quad g(x) = g(1) + g(x-1) = 0 + g(x-1) = g(x-1)$$
ここで、 $P$  と  $Q$  が重なるとき、 $\widehat{AP}$  と  $\widehat{AQ}$  の長さが等しいから  $f(x) = g(x)$ 

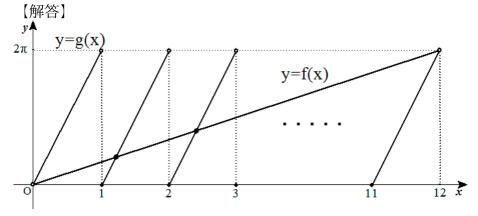
$$\frac{x}{6}\pi = 2\pi(x-1) \implies \frac{11}{6}\pi x = 2\pi$$
$$x = \frac{12}{11}$$



短針:
$$\stackrel{\frown}{AP}$$
 の長さ =  $f(x)$   
長針: $\stackrel{\frown}{AQ}$  の長さ =  $g(x)$ 

- (2) P の移動速度を時速  $\frac{1}{12}$ 周 (時速  $\frac{1}{6}\pi$ ) Q の移動速度を時速 1 周 (時速  $2\pi$ ) と考えると式にしやすい。
- (3) 点 Q は 1 時間経つと頂点に戻るので 例えば  $g(1.5) = g(1) + g(0.5) = 0 + \pi$





上図より、PとQは10回重なる。

- (4),(5) グラフをかくときは、
  - と○を忘れず正しくかく。
- (5) 12 本ある斜線のうち直線 y=f(x) と交わらないのは両端の斜線である。

次の(1)~(3)に答えなさい。

(1) 3個のサイコロを同時にふったとき, その目の積が2の倍数になる確率を求めなさい。

【解答】

この余事象は、「1つも偶数の目が出ない」場合であるから

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

(2) 4個のサイコロを同時にふったとき,その目の積が4の倍数になる確率を求めなさい。

【解答1】

この事象は、「少なくとも 2 個は偶数の目が出る」場合と「1 個は 4 の目、それ以外は奇数の目が出る」場合がある。

(i)「少なくとも 2 個は偶数の目が出る」場合 この事象は,「まったく偶数の目が出ない」場合と「1 個だけ偶数の目が 出る」場合の和事象の余事象であるから

$$1 - \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^4 +_4 C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right\}$$
$$= 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{4}{16}\right) = \frac{11}{16}$$

(ii)「1個は4の目,それ以外は奇数の目が出る」場合

$$_4C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{4}{48}$$

(i),(ii) は排反事象であるから、求める確率は

$$\frac{11}{16} + \frac{4}{48} = \frac{37}{48}$$

【解答 2】

この余事象、「積が4の倍数にならない」場合を考える。

積が4の倍数にならないとき、「全て奇数の目が出る」場合と「1 個だけ2 か6、それ以外は奇数の目が出る」場合である。

(i)「全て奇数の目が出る」場合

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

(ii) 「1個だけ2か6, それ以外は奇数の目が出る」場合

$${}_4C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{24}$$

(i),(ii) は排反事象であるから、積が4の倍数にならない確率は

・余事象の確率・

事象 A が起こる確率を P(A), 事象 A が起こらない (事象 A の余事象の) 確率を  $P(\bar{A})$  とすると

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

- 反復試行の確索

事象 A の起こる確率 がpであるとする。この 試行をn 回繰り返し行 うとき、事象Aがちょう どr 回起こる確率は

 $_{n}C_{r}p^{n}q^{n-r}$ 

ただし q=1-p

$$\frac{1}{16} + \frac{4}{24} = \frac{11}{48}$$

したがって、求める確率は

$$1 - \frac{11}{48} = \frac{37}{48}$$

(3) n 個のサイコロを同時にふったとき、その目の積が6 の倍数になる確率を求めなさい。

#### 【解答】

この事象は、「少なくとも1回は6の目が出る」場合と「少なくとも1回は2か4が出る」かつ「少なくとも1回は3の目がでる」場合がある。 事象 A,B,C を

A: 少なくとも1回は6の目が出る

B: 少なくとも1回は2か4の目が出る

C: 少なくとも1回は3の目が出る

とすると,6の倍数になるのは、 $A \cup (B \cap C)$ である。

この余事象(6の倍数にならないとき)は、

$$\bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C})$$

よって.

「6 か 2 か 4 の目が 1 回も出ない」または「6 か 3 の目が 1 回も出ない」場合

すなわち、

「すべての目が1か3か5」または「すべての目が1か2か4か5」の場 の目が1か2か4か5と合たので なる確率 | 「すべての目が

$$\left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{4}{6}\right)^n - \left(\frac{2}{6}\right)^n \quad \cdots \quad \text{$\%$}$$

したがって、求める確率は

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3) 6 の倍数になるときの 条件がすべて「少なくとも ~」になっている。式の形 としては「少なくも~であ る確率」よりも「まったく ~でない確率」の方が単純 であるので、余事象の確率 を考えると良い。

ド・モルガンの法則を使 い論理式の余事象をとると

 $A o \bar{A}$ 

 $\cup \to \cap$ 

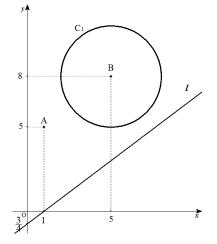
∩ → U に変わる。

%「すべての目が1か3か5となる確率」+「すべての目が1か2か4か5となる確率」「「すべての目が1か5となる確率」

6の倍数にならない=「す べて奇数の目が出る」また は「すべて3の倍数ではな い目が出る」ことに気がつ けば※式がすぐに作れる。

- <u>4</u> 座標平面上に点 A(1,5) と,直線 l:3x-4y-3=0,円  $C_1:x^2+y^2-10x-16y+80=0$  がある。円  $C_1$ の中心を点 B とする。次の (1)~(4) に答えなさい。
  - (1) 点Bの座標と円 $C_1$ の半径を求めなさい。 【解答】

$$x^{2} + y^{2} - 10x - 16y + 80 = 0$$
$$(x - 5)^{2} + (y - 8)^{2} - 25 - 64 + 80 = 0$$
$$(x - 5)^{2} + (y - 8)^{2} = 3^{2}$$
  
点  $B(5, 8)$ , 半径 3



(2) 点Aと直線lの距離dを求めなさい。

【解答】
$$d = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 5 - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = 4$$

(3) 直線 l 上を動く点 P をとるとき, AP + BP の最小値を求めなさい。

【解答1】

点Bが直線lに対して対称な点をB'(a,b)とすると $BB' \perp l$ より、2直線の傾きの積が-1になるので

$$\frac{b-8}{a-5} \cdot \frac{3}{4} = -1 \quad \cdots \quad \textcircled{1}$$

また, BB'の中点が直線 l 上にあるので

$$3 \cdot \frac{5+a}{2} - 4 \cdot \frac{8+b}{2} - 3 = 0 \quad \cdots \quad \textcircled{2}$$

②式について

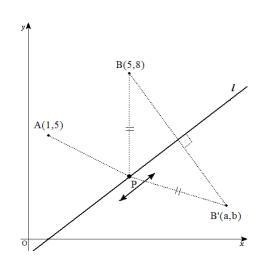
$$b-8 = -\frac{4}{3}(a-5)$$

$$15+3a-32-4b-6=0$$

$$3a-4b=23 \cdots 2'$$

$$3b - 24 = -4a + 20$$

$$4a + 3b = 44 \cdots \bigcirc '$$



$$4 \times (1)' + 3 \times (2)'$$
より

$$16a + 12b = 176$$

$$\frac{+| 9a - 12b = 69}{25a = 245}$$

$$a = \frac{49}{5}, \ b = -\frac{4}{3} \cdot \frac{49}{5} + \frac{44}{3} = \frac{-196 + 220}{15} = \frac{8}{5}$$

$$AP + BP = AP + B'P$$

よって, AP + BP が最小となるとき APB'が一直線上に並ぶので

AP + BP の最小値 = AB'

$$AB' = \sqrt{\left(\frac{49}{5} - 1\right)^2 + \left(\frac{8}{5} - 5\right)^2} = \sqrt{\frac{44^2}{25} + \frac{17^2}{25}} = \sqrt{\frac{2225}{25}} = \sqrt{89}$$

#### 【解答 2】

点 A が直線 l に対して対称な点を A'(x,y) とする直線 l に垂直な直線の方程式は 4x + 3y + C = 0

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot 5 + C = 0$$

$$C = -19$$

よって直線 AA'の方程式は 4x + 3y = 19 · · · · · ① 点 A'と l の距離が 4 であるから

$$\frac{|3x - 4y - 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 4$$

$$|3x - 4y - 3| = 20$$

$$3x - 4y - 3 = \pm 20$$

$$3x - 4y = 23$$
,  $3x - 4y = -17$ 

3x - 4y = -17 は点 A のときに成り立つので, 点 A'

のときに成り立つ式は

$$3x - 4y = 23 \quad \cdots \quad \boxed{2}$$

① 
$$\times 4 + ② \times 3 \sharp 9$$

$$16x + 12y = 76$$

$$\frac{+|9x - 12y = 69}{25x} = 145$$

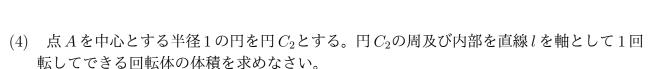
$$x = \frac{29}{5}, \ \ y = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \frac{29}{5} - \frac{23}{4} = \frac{87 - 115}{20} = -\frac{28}{20} = -\frac{7}{5}$$

$$AP + BP = A'P + BP$$

よって, AP + BP が最小となるとき A'PB が一直線上に並ぶので

$$AP + BP$$
 の最小値 =  $A'B$ 

$$A'B = \sqrt{\left(\frac{29}{5} - 5\right)^2 + \left(-\frac{7}{5} - 8\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{47}{5}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{16 + 2209}{25}} = \sqrt{\frac{2225}{25}} = \sqrt{89}$$



円 
$$C_2$$
の方程式は  $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 1$ 

(2) から,点Aと直線lの距離は4より,

求める回転体の体積は

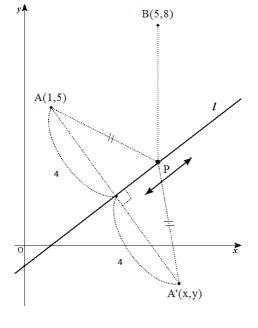
$$\exists x^2 + (y-4)^2 = 1$$

【解答】

を x 軸を軸として1回転してできる

回転体の体積に等しい。

$$x^2 + (y - 4)^2 = 1$$



$$(y-4) = \pm \sqrt{1-x^2}$$
  $y=4\pm \sqrt{1-x^2}$  より 
$$V = \pi \int_{-1}^{1} (4+\sqrt{1-x^2})^2 dx - \pi \int_{-1}^{1} (4-\sqrt{1-x^2})^2 dx$$
 大きな回転体の体験 - 小さな回転体の体験 
$$= \pi \int_{-1}^{1} (16+8\sqrt{1-x^2}+1-x^2) dx - \pi \int_{-1}^{1} (16-8\sqrt{1-x^2}+1-x^2) dx$$
 
$$= \pi \int_{-1}^{1} 16\sqrt{1-x^2} dx$$
 ※ 
$$= \pi \int_{-1}^{1} 16\sqrt{1-x^2} dx$$
 ※ 
$$= 16\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} dx$$
 ※ 
$$= 32\pi \int_{0}^{1} \sqrt{$$

$$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & 1 \\ \hline t & \frac{\pi}{2} & \to & 0 \end{array}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t \quad \sharp \, \mathcal{D}$$

$$V = 32\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1 - \cos^{2}t} \cdot (-\sin t) dt = -32\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{\sin^{2}t} \cdot \sin t dt$$

$$= 32\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2}t dt = 32\pi \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = 16\pi \left[ t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2}\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}}{(\frac{\pi^{2}}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0\right))}$$

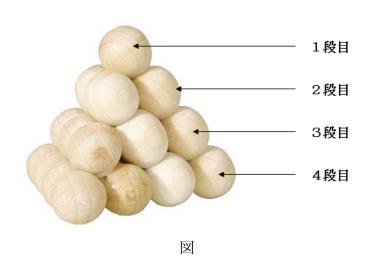
$$= 8\pi \cdot \pi = 8\pi^{2}$$

$$= 16\pi \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \sin \pi - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0\right) \right\} = 8\pi \cdot \pi = 8\pi^{2}$$

$$= 8\pi^{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \sin^{2}\theta + \frac{1}{2} \sin^{2}\theta$$

5 図のように、半径1の球を用いて、水平面上に3個を互いが接するように置き、できたへこみの上に1個を置く。上におかれた1個を1段目、先に置かれた3個を2段目と呼ぶことにする。さらに、2段目の下に3段目として6個置き、2段目のそれぞれの球が3段目の3個と接するように置く。このように段を増やす作業を繰り返し、一番下の段がn段目である物体をT(n)とするただし、 $1 \le 1$ 2 とする。次の $1 \le 1$ 3 に答えなさい。



- (1) ① 4段目, 5段目で使われる球の個数をそれぞれ求めなさい。 【解答】
  - $1,2,3,\cdots$ 段目に使われる球の個数は、それぞれ  $1,3,6,10,15,\cdots$  であるから 4 段目:10 個、5 段目:15 個
  - ② n 段目で使われる球の個数を求めなさい。 【解答】

n 段目に使われる球の個数は数列  $\{1, 2, 3, \cdots n\}$  の和になるから

$$\frac{1}{2}n(n+1)$$
個

③ T(n) で使われる球の個数を求めなさい。

## 【解答1】

T(n)で使われる球の個数は、全ての段の球を足し合わせた数であるから

$$\begin{split} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2} k(k+1) \right\} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (k^2 + k) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2} n(n+1) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1) \left\{ (2n+1) + 3 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+4) = \frac{1}{6} n(n+1)(n+2) \, \end{split}$$

# 【解答2】

T(n)で使われる球の個数は、全ての段の球を足し合わせた数であるから

$$k(k+1) = \frac{1}{3} \{k(k+1)(k+2) - (k-1)k(k+1)\}$$
 を利用。

(2) ① T(2) の高さを求めなさい。

## 【解答】

4個の半径1の球が接するとき,中心を結んだ立体は1辺の長さが2の正四面体となる。4個の球の中心をそれぞれ,A,B,C,Dとし,Aから面 BCDに下ろした垂線の足をGとすると

$$BG = CG = DG$$
 となり

G は  $\triangle$  BCD の外心である。また, BCD は正三角形より G は重心でもある。

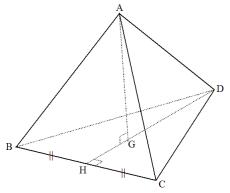
$$DH = \sqrt{3}, \quad DG : GH = 2 : 1 から \qquad DG = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

よって

$$AG = \sqrt{AD^2 - DG^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

したがって,T(2)の高さは

$$1 + \frac{2\sqrt{6}}{3} + 1 = \frac{2\sqrt{6}}{3} + 2$$



(2)① AG の長さを求めたい  $\Rightarrow DG$  の長さを知りたいここでは DG の長さを求めるために、点 G が重心であることを利用している。

※他の方法で, 
$$AG$$
 の長さを求める方法  $\triangle AHD$  について,  $AH = HD = \sqrt{3}$ ,  $AD = 2$ 

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times AG$$
$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sin \angle AHD$$

これを計算して
$$AG = \sqrt{3}\sin\angle AHD$$

$$\angle \angle C$$
,  $\cos \angle AHD = \frac{\sqrt{3}^2 + \sqrt{3}^2 - 2^2}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$ 

であるから, 
$$\sin \angle AHD = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

したがって、
$$AG = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

② T(n) の高さが 20 より大きくなるとき, n の最小値を求めなさい。 【解答】

$$T(n)$$
 は  $n-1$  箇所で上下の球が接しているから

$$T(n)$$
 の高さは、 $\frac{2\sqrt{6}}{3}(n-1)+2$  と表せる。

$$\frac{2\sqrt{6}}{3}(n-1) + 2 > 20$$

$$2\sqrt{6}(n-1) > 54$$

$$\sqrt{6(n-1)} > 27$$

$$\sqrt{6n} > 27 + \sqrt{6}$$

$$n > \frac{27}{\sqrt{6}} + 1 = \frac{9\sqrt{6}}{2} + 1$$

$$n > \sqrt{\frac{486}{4}} + 1 > \sqrt{121} + 1 = 12$$

よって, n の最小値は 13

- 6 (中学校受験者のみ解答すること)
  - (1) 学習指導要領の穴埋め問題 (2)①語句の説明②生徒の発表に対しての問題 ※作成予定
- 7 (高等学校受験者のみ解答すること)
  - (1) 学習指導要領の穴埋め問題 (2) 生徒の答案に対しての問題 ※作成予定