ワイブル分布 (Weibull distributions)

緑川章一 [*]

1 生存関数

$T \geqq 0$ を寿命を表す確率変数とする。寿命 T が与えられた値 t よりも長くなる割合を表す関数を生存関数 (survival function) と言い、

$$S(t) = \mathrm{P}(T > t) = \int_T^\infty f(t)dt$$

で定義される。

2 1指数分布とワイブル分布

指数分布 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ において、$t = x^n$ とおき、変数 x の分布 $f_X(x)$ を考える。

$$f_X(x) = \lambda \int_0^\infty \delta\left(x - \sqrt[n]{t}\right) e^{-\lambda t}\, dt \tag{1}$$

この積分を求めるに当り、$\varphi(t) = x - \sqrt[n]{t}$ とおいて、$t = x^n$ の周りで展開する。$\varphi(x^n) = 0$ だから、

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi'(x^n)(t-n) + \cdots \\ &= -\frac{1}{n} x^{-(n-1)}(t - x^n) + \cdots \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\delta\left(x - \sqrt[n]{t}\right) = n x^{n-1} \delta(t - x^n)$$

これを、(1) 式に代入して、t についての積分をおこなう。

$$\begin{aligned} f_X(x) &= = \lambda n x^{n-1} \int_0^\infty \delta(t - x^n) e^{-\lambda t}\, dt \\ &= \lambda n x^{n-1} e^{-\lambda x^n} \end{aligned} \tag{2}$$

これを、ワイブル分布 (Weibull distribution) と言う。

ワイブル分布の一般的な表現は、(2) 式で、$n = \alpha,\ \lambda = 1/\beta^\alpha$ と置いたものである。

$$f_X(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^\alpha} \tag{3}$$

[*]Shoichi Midorikawa

3　商の分布

確率変数 x と y は、それぞれ、α の値は同じで β の値が異なるワイブル分布、

$$f_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta_1}\right)\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta_1)^\alpha}, \quad f_2(y) = \left(\frac{\alpha}{\beta_2}\right)\left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha-1} e^{-(y/\beta_2)^\alpha}$$

に従うものとする。このとき、２つの確率変数の比 $z = x/y$ の分布を考える。
注意！　比 $z = (x/\beta_1)/(y/\beta_2)$ の分布に書き直す。

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \int_0^\infty \delta(z - x/y) f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^\infty y\delta(x - yz) f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy \\
&= \int_0^\infty y f_1(yz) f_2(y)\, dy \\
&= \frac{\alpha^2}{\beta_1\beta_2}\int_0^\infty y\left(\frac{yz}{\beta_1}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha-1} e^{-(yz/\beta_1)^\alpha} e^{-(y/\beta_2)^\alpha}\, dy \qquad (4)
\end{aligned}$$

ここで、$u = (y/\beta_2)^\alpha$ と置くと、(4) 式は、

$$f_Z(z) = \alpha\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}z\right)^{\alpha-1}\int_0^\infty u \exp\left\{-\Big[\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}z\right)^\alpha + 1\Big]u\right\} du \qquad (5)$$

さらに、$r = (\beta_2/\beta_1)^\alpha$, $v = (rz^\alpha + 1)u$ とおくと、

$$f_Z(z) = \alpha\frac{rz^{\alpha-1}}{(rz^\alpha + 1)^2}\int_0^\infty ve^{-v}\, dv$$

ところが、

$$\int_0^\infty ve^{-v}\, dv = 1$$

なので、

$$f_Z(z) = \frac{r\alpha z^{\alpha-1}}{(rz^\alpha + 1)^2} \qquad (6)$$

となる。
　更に、$w = rz^\alpha$ とおくと、

$$\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_0^\infty \delta(w - rz^\alpha)\frac{\alpha z^{\alpha-1}}{(rz^\alpha + 1)^2}\, dz \\
&= \frac{1}{(w+1)^2}
\end{aligned}$$

を得る。これは、自由度 (2, 2) の F 分布である。すなわち、確率変数 $w = \left(\dfrac{x/\beta_1}{y/\beta_2}\right)^\alpha$ は、自由度 (2, 2) の F 分布に従う。