

幾何分布と指数分布

Geometric and Exponential Distribution

緑川章一*

幾何分布

$$P_G(x) = pq^{x-1}, \quad p+q=1, \quad x=1, 2, 3, \dots$$

幾何分布の連続極限としての指数分布

$t = \frac{x}{n}$ と置き、 $n \rightarrow \infty$ の極限を考える。その時、

$$f(t) \Delta t = \frac{1}{n} f(t) = pq^{nt-1}$$

となる $f(t)$ を求める。

$r = q^n$ とおくと、

$$p = 1 - q = 1 - r^{1/n}$$

だから、

$$\frac{1}{n} f(t) = (1 - r^{1/n}) r^{t-1/n} \tag{1}$$

$$= (r^{-1/n} - 1) r^t \tag{2}$$

ところで、 $r = \exp(\ln r)$ だから、

$$r^{-1/n} = e^{-\frac{\ln r}{n}} \approx 1 - \frac{\ln r}{n}$$

ゆえに、

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} n (r^{-1/n} - 1) r^t = -\ln r e^{t \ln r}$$

ここで、

$$\lambda = -\ln r$$

とおくと、

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

を得る。これは指数分布を表す。

*Shoichi Midorikawa

指数分布から幾何分布へ

指数分布

$$P_E(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

から幾何分布 $P_G(n)$ を求める。

$$\begin{aligned} P_G(n) &= \lambda \int_{n-1}^n e^{-\lambda t} dt \\ &= \left[-e^{-\lambda t} \right]_{n-1}^n \\ &= e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda n} \\ &= e^{-\lambda(n-1)} (1 - e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

ここで、

$$p = 1 - e^{-\lambda}, \quad q = e^{-\lambda}$$

と置くと、

$$P_G(n) = pq^{n-1}$$

を得る。

平均と分散

幾何分布の平均と分散

$$\begin{aligned} \mu_G &= \sum_{x=1}^{\infty} x p q^{x-1} = \frac{1}{p} \\ \sigma_G^2 &= \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p q^{x-1} - \mu_G^2 = \left(\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} \right) - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} \end{aligned}$$

指数分布の平均と分散

$$\begin{aligned} \mu_E &= \int_0^{\infty} t f(t) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{x=1}^{\infty} x p q^{x-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{np} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(1 - e^{-\lambda/n})} \end{aligned}$$

ここで、

$$p = 1 - q = 1 - e^{-\lambda/n} \approx \frac{\lambda}{n}$$

だから、

$$\mu_E = \frac{1}{\lambda}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^2 f(t) \, dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{x=1}^\infty x^2 p q^{x-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} \right) \\ &= \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$