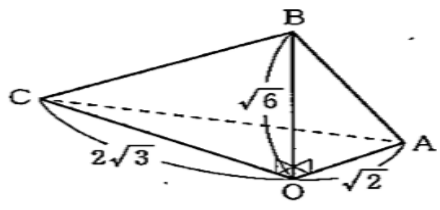
平成29年度
青森県公立学校教員採用候補者試験

平成29 年2 月7 日

第1章　大問1

1.1　問 1

・ 図の三角すい $OABC$ は $OA=\sqrt{2}, OB=\sqrt{6}, OC=2\sqrt{3}$,
$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=90^\circ$である。次の　(1)〜(4) に答えなさい。



図

(1)　三角すい $OABC$ の体積を求めなさい。

(2)　$\angle ABC$ の大きさを求めなさい。

(3)　$\triangle ABC$ のを面積を求めなさい。

(4)　頂点 O から $\triangle ABC$ に下した垂線の長さを求めなさい。

解答

(1)　三角すい $OABC$ の体積を求めなさい。

・三角すいの体積の公式は $V=\dfrac{1}{3}$×底面積×高さ
・図の三角すい $OABC$ は$\angle\ AOB=\angle BOC=\angle COA=90^\circ$
求める三角すい $OABC$ の体積は　$V=\dfrac{1}{3}\cdot\triangle\,OAC\cdot OB$
$\triangle\,OAC=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{6}$　　高さ $=OB=\sqrt{6}$

したがって、求める三角すい $OABC$ の体積は　$V=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}=2$

(2)　$\angle ABC$ の大きさを求めなさい。

$$\cos B \quad = \frac{CB^2+AB^2-CA^2}{2\cdot BC\cdot AB}=\frac{1}{2}$$

$0<\angle ABC<\ \pi$ より $\angle ABC=60^\circ$

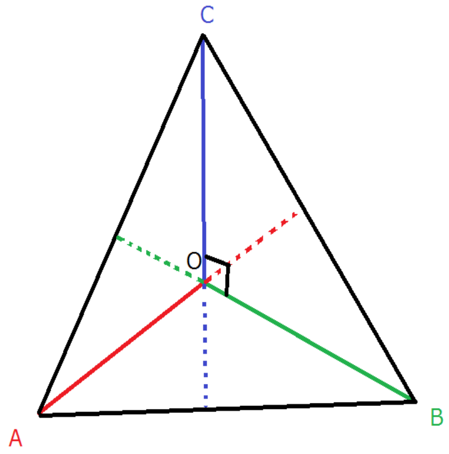
(3)　$\triangle ABC$ のを面積を求めなさい。
・三角形の面積の公式

$$\begin{aligned}\triangle ABC \quad &= \frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot \sin B\\ \triangle ABC \quad &= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot \sin 60^\circ\\ \triangle ABC \quad &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

(4)　頂点 O から $\triangle ABC$ に下した垂線の長さを求めなさい。
・垂線の長さを求めるには、(1) で求めた体積 V を使って求める。
・求める垂線の長さを h とする。

$$\begin{aligned}V &= \frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot h=2\\ \sqrt{3}h &= 2\\ h &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

別解



原点を O として、3 点 $A(\sqrt{2},\ 0,\ 0),\ B(0,\ \sqrt{6},\ 0),\ C(0,\ 0,\ 2\sqrt{3})$ を通る平面の方程式は、

$$\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{6}}+\frac{z}{2\sqrt{3}}=1 \tag{1.1}$$

(1) 三角錐 $OABC$ の体積 V は、

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\ =2$$

(2) $\overrightarrow{BA}=(\sqrt{2},\ -\sqrt{6},\ 0),\ \ \overrightarrow{BC}=(0,\ -\sqrt{6},\ 2\sqrt{3})$ である。

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\mathrm{\overrightarrow{BA}}||\overrightarrow{BC}|\cos\angle ABC$$

より、

$$(\sqrt{6})^2=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{6})^2}\sqrt{(\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3})^2}\cos\angle ABC$$

ゆえに、

$$\cos\angle ABC=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

したがって、

$$0<\angle ABC<\pi \text{ より} \angle ABC=60^\circ$$

(3) $\triangle ABC$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|\sin\angle ABC \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{BA}|^2|\overrightarrow{BC}|^2-\left(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{12+72+24}=3\sqrt{3} \end{aligned}$$

(4)　平面 ABC に垂直なベクトルは、外積を使って

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA} = (6\sqrt{2},\ 2\sqrt{6},\ 2\sqrt{3})$$

で与えらる。そこで、原点から平面 ABC に至るベクトルで、長さが最小なものは、$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{BA}$ に平行なベクトルである。これを

$$\vec{d} = k(6\sqrt{2},\ 2\sqrt{6},\ 2\sqrt{3})$$

と表し、この点は、(1) 式を満たすので、

$$k\left(\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}} + \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\right) = 1$$

が成り立つ。これを、k について解くと、

$$k = \frac{12}{108} = \frac{1}{9}$$

これを、成分表示する

$$|\vec{d}| = \frac{1}{9}\sqrt{(6\sqrt{2})^2 +\ (2\sqrt{6})^2 +\ (2\sqrt{3})^2} = \frac{1}{9}\sqrt{108} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

第2章　大問2

2.1　問 2

・6 枚のカード A, B, C, D, E, F を一列に並べる。次の (1)〜(4) に答えなさい。

(1)　6 枚の並べ方は何通りあるか求めなさい。

(2)　A, E が隣り合う並べ方は何通りあるか求めなさい。

(3)　B, C, D がどの 2 つとも隣り合わない並べ方は何通りあるか求めなさい。

(4)　A, E を母音のカード, B, C, D, F を子音のカードとする。B, A, C, D, E, F のように、母音のカードと子音のカードの配置が左右対称となるような並べ方は何通りあるか求めなさい。

解答

(1)　6 枚の並べ方は何通りあるか求めなさい。

・異なる 6 個のものの中から、異なる 6 個を取り出して並べる順列を求める。

$$6\,! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720(\text{通り})$$

(2)　A, E が隣り合う並べ方は何通りあるか求めなさい。

・ A, E を一枚として考える。5 枚の並べ方は

$$5\,! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120(\text{通り})$$

・ A, E には A, E と E, A の 2 通りの並べ方がある。

よって並べ方の総数は $5! \times 2 = 240$(通り)

(3)　B, C, D がどの 2 つとも隣り合わない並べ方は何通りあるか求めなさい。

・まず A, E, F の並べ方は　$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$(通り)

・この 3 枚のカードの間または両端の 4 箇所に B, C, D を並べる。下図のようになる。

$(B, C, D)A(B, C, D)E(B, C, D)F(B, C, D)$

・この 4 箇所の中から 3 つをとって並べる方法は

$${}_4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24(\text{通り})$$

・よって、並べ方の総数は　$3! \times {}_4P_3 = 6 \times 24 = 144$(通り)

(4)　A, E を母音のカード, B, C, D, F を子音のカードとする。B, A, C, D, E, F のように、母音のカードと子音のカードの配置が左右対称となるような並べ方は何通りあるか求めなさい。
・カードの配置が左右対称になるには左端から 3 枚は母音のカード 1 枚と子音のカード 2 枚ということである。

(例)　母子子 | 子子母　子母子 | 子母子　子子母 | 母子子　いずれかのパターンである。

・　左端からの 3 枚の並べ方を求める。母音の選び方は 2 通り、並べ方は 3 通りある。子音の選び方は 4 枚から 2 枚選ぶので ${}_4C_2 = 6$ 通り、子音の並べ方は $2!$ 通りであるから
$2 \times 3 \times {}_4C_2 \times 2 = 72$(通り)

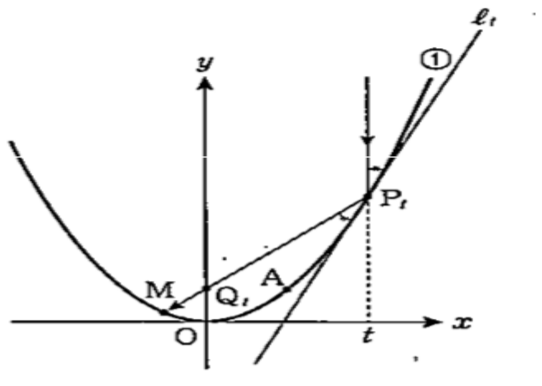
・右端のカードも対象に並べたものなので母音の並べ方は 1 通り、子音のカードの並べ方は 2！通り

$1\times\ 2! = 2$(通り)　よって、並べ方の総数は　$72\times\ 2 = 144$(通り)

第3章　大問3

3.1　問 3

・図のように座標平面上に点 $A\,(2,1)$ を通る放物線 $y=ax^2$…①と動点 M がある。$t\neq\ 0$ のとき、動点 M は直線 $x=t$ 上を y 座標の大きい方から小さいほうへと①に向かって動き、①上の点 P_t に当たって反射し、反射した後も直線上を動いて y 軸上の点 Q_t を通り、再び①に当たって止まるものとする。このとき、P_{t} における①の接線 ℓ_t とすると、反射した後に M が動く直線と ℓ_t のなす角は、直線 $x=t$ と ℓ_t のなす角と等しいものとする。次の (1)～(4) に答えなさい。



図

(1)　a の値を求めなさい。

(2)　①は点 A において、$y=x-1$ と接することを示しなさい。

(3)　$t=2$ のとき、点 Q_2 の座標を求めなさい。

(4)　$t>0$ である任意の t において、点 Q_t は点 Q_2 と一致することを示しなさい。

解答

(1)　aの値を求めなさい。

・$y = ax^2$は、点$A(2,1)$を通る。　$a = \dfrac{1}{4}$

(2)　①は点Aにおいて、$y = x - 1$と接することを示しなさい。

・ (1)の解答より①は　$y = \dfrac{1}{4}x^2$

・ 曲線$y = f(x)$上の点$A(a, f(a))$における接線の傾きは$f'(a)$である。

よって$y = \dfrac{1}{4}x^2$上の点$(2,1)$における接線の傾きは　$y' = \dfrac{1}{2}\cdot 2 = 1$
曲線$y = f(x)$上の点$A(a, f(a))$における接線の方程式は

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

→曲線$y' = \dfrac{1}{2}x$上の点$A(1,2)$における接線の方程式は

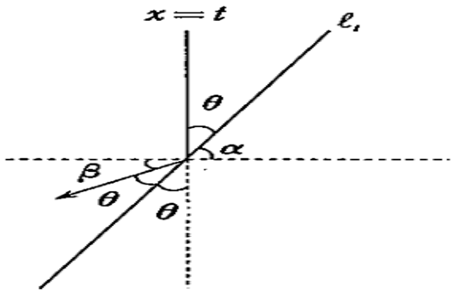
$$y - 1 = 1(x - 2)$$

$y = x - 1$ゆえに①は点Aにおいて$y = x - 1$と接する。

(3)　$t = 2$のとき、点Q_2の座標を求めなさい。
・(2)より点Aにおける接線ℓ_2の傾きは1である。このとき、直線$x = 2$とℓ_2のなす角は45°である。
・ 反射した後にMが動く直線とℓ_2のなす角も45°とある。
よって反射した後にMが動く直線はx軸に平行となりその式は　$y = 1$
だから、$Q_2(0,1)$である。

(4)　$t > 0$である任意のtにおいて、点Q_tは点Q_2と一致することを示しなさい。
・ $x = t$における接線ℓ_tの傾きは$\dfrac{1}{2}t$である。このとき、直線$x = t$とℓ_tのなす角をθとする。
・　ℓ_tとx軸のなす角をα, 反射した後にMが動く直線とx軸のなす角をβ

とする。



$\to \tan\alpha = \frac{1}{2}t,\ \theta = 90^\circ - \alpha$
$\to \beta = 90^\circ - 2\theta = 90^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha - 90^\circ$
$\to \tan(2\alpha - 90^\circ) = -\tan(90^\circ - 2\alpha) = -\frac{1}{\tan 2\alpha}$
$\to \tan\beta = -\frac{1}{\tan 2\alpha}$
$\to -\frac{1}{\tan 2\alpha} = -\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha}$ ←2倍角の公式により

$$= -\frac{1-\frac{1}{4}t^2}{2\cdot\frac{1}{2}t}$$
$$= \frac{1}{4}t - \frac{1}{t}$$

・反射後に M が動く直線は $P_t\left(t, \frac{1}{4}t^2\right)$ を通るのでその方程式は (2) 同様に考える。

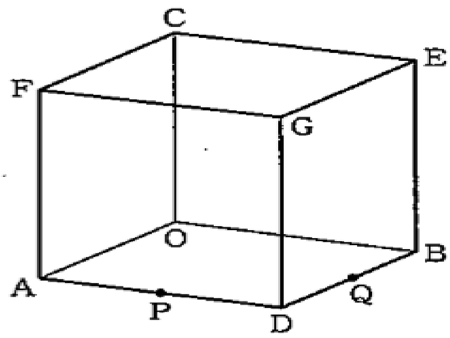
$$y - \frac{1}{4}t^2 = \left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{t}\right)(x-t)$$
$$= \left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{t}\right)x - \frac{1}{4}t^2 + 1 + \frac{1}{4}t^2$$
$$= \left(\frac{1}{4}t - \frac{1}{t}\right)x + 1$$

・よって、y 軸との交点 Q_t は $(0,1)$ となり Q_2 と一致する。

第4章　大問4

4.1　問 4

・図のような1辺の長さが1の立方体がある。辺AD,辺BDの中点をそれぞれP,Qを通る平面αでこの立方体を切断し、平面αと辺AFの交点をRとする。
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{a}},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{b}},\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{c}}$で表しなさい。とするとき,次の(1)〜(4)に答えなさい。



図

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を　$\overrightarrow{\mathrm{a}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{b}}$で表しなさい。

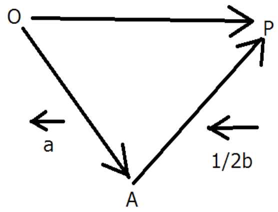
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\overrightarrow{\mathrm{a}},\overrightarrow{\mathrm{b}},\overrightarrow{\mathrm{c}}$で表しなさい。

(3)　頂点Oから平面αに下した垂線と平面αとの交点をHとするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$\overrightarrow{\mathrm{a}},\overrightarrow{\mathrm{b}},\overrightarrow{\mathrm{c}}$で表しなさい。

(4)　(3)のとき、OHの長さを求めなさい。

解答

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を　$\overrightarrow{\mathrm{a}},\overrightarrow{\mathrm{b}}$で表しなさい。

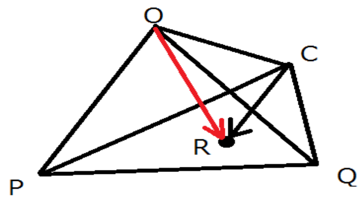


$\rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{b}}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を $\overrightarrow{\mathrm{a}}$,　$\overrightarrow{\mathrm{b}}$, $\overrightarrow{\mathrm{c}}$で表しなさい。

・点 R は平面 α 上により　$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$(ただし $s+t+u=1$) とおける。



なぜなら、$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CR}}$と表される。ここで CP と CQ は平行ではないので$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = s\overrightarrow{\mathrm{CP}} + t\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ と表される。

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{CP}} + t\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + s(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}}) + t(\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{OP}} - s\overrightarrow{\mathrm{OC}}) + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} - t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

・　ここで、$(1-s-t)$ を u とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \overrightarrow{\mathrm{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = s\left(\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{b}}\right) + t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \overrightarrow{\mathrm{b}}\right) + u\overrightarrow{\mathrm{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \left(s + \frac{1}{2}t\right)\overrightarrow{\mathrm{a}} + \left(\frac{1}{2}s + t\right)\overrightarrow{\mathrm{b}} + u\overrightarrow{\mathrm{c}}$

・また $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{a}} + k\overrightarrow{\mathrm{c}}$ とおける。$\overrightarrow{\mathrm{a}}, \overrightarrow{\mathrm{b}}, \overrightarrow{\mathrm{c}}$ は一次独立により

$s + \frac{1}{2}t = 1,\quad \frac{1}{2}s + t = 0,\quad u = k,\quad s + t + u = 1$

これを解くと、 $k = \frac{1}{3}$ $u = \frac{1}{3},\quad t = -\frac{2}{3},\quad s = \frac{4}{3}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{c}}$

(3) 頂点 O から平面 α に下した垂線と平面 α との交点を H とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を $\overrightarrow{\mathrm{a}},\ \overrightarrow{\mathrm{b}}, \overrightarrow{\mathrm{c}}$ で表しなさい。

・点 H は平面 α 上により$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OP}} + u\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$(ただし $s + t + u = 1$) とおける。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \overrightarrow{\mathrm{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = t\left(\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{b}}\right) + u\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \overrightarrow{\mathrm{b}}\right) + s\,\overrightarrow{\mathrm{c}}$

・$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$　,$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{QC}}$より

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{a}} - \overrightarrow{\mathrm{b}}\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{QC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \overrightarrow{\mathrm{b}} - \overrightarrow{\mathrm{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(t(\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{b}}) + u(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \overrightarrow{\mathrm{b}}) + s\,\overrightarrow{\mathrm{c}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{b}})\right) = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \left(t\,\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}t\,\overrightarrow{\mathrm{b}} + \frac{1}{2}u\,\overrightarrow{\mathrm{a}} + u\,\overrightarrow{\mathrm{b}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{c}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{b}})\right) = 0$

$|\overrightarrow{\mathrm{a}}| = |\overrightarrow{\mathrm{b}}| = |\overrightarrow{\mathrm{c}}| = 1,\quad \overrightarrow{\mathrm{a}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{b}} = \overrightarrow{\mathrm{a}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{c}} = \overrightarrow{\mathrm{b}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{c}} = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}u + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}u = 0$

・整理をすると　　$t = u$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}} = \left(t\,\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}t\,\overrightarrow{\mathrm{b}} + \frac{1}{2}u\,\overrightarrow{\mathrm{a}} + u\,\overrightarrow{\mathrm{b}} + s\,\overrightarrow{\mathrm{c}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \overrightarrow{\mathrm{b}} - \overrightarrow{\mathrm{c}}\right) = 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}} = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}u + \frac{1}{2}t + u - s = 0$

$4t + 5u - 4s = 0$

・$t = u$　$4t + 5u - 4s = 0,\quad t + u + s = 1$ から

$t = u = \frac{4}{17}$　$, s = \frac{9}{17}$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{4}{17}(\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{b}}) + \frac{4}{17}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \overrightarrow{\mathrm{b}}\right) + \frac{9}{17}\overrightarrow{\mathrm{c}}$

$$= \frac{4}{17}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{2}{17}\overrightarrow{\mathrm{b}} + \frac{2}{17}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{4}{17}\overrightarrow{\mathrm{b}} + \frac{9}{17}\overrightarrow{\mathrm{c}}$$

$$= \frac{6}{17}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{6}{17}\overrightarrow{\mathrm{b}} + \frac{9}{17}\overrightarrow{\mathrm{c}}$$

$$= \frac{3}{17}(2\overrightarrow{\mathrm{a}} + 2\overrightarrow{\mathrm{b}} + 3\overrightarrow{\mathrm{c}})$$

(4) (3) のとき、OH の長さを求めなさい。

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| = \left(\frac{3}{17}\right)^2 (2\overrightarrow{\mathrm{a}} + 2\overrightarrow{\mathrm{b}} + 3\overrightarrow{\mathrm{c}}) \cdot (2\overrightarrow{\mathrm{a}} + 2\overrightarrow{\mathrm{b}} + 3\overrightarrow{\mathrm{c}})$$

$$= \left(\frac{3}{17}\right)^2 (4\,|\overrightarrow{\mathrm{a}}|^2 + 4\,|\overrightarrow{\mathrm{b}}|^2 + 9\,|\overrightarrow{\mathrm{c}}|^2 + 8\overrightarrow{\mathrm{a}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{b}} + 12\overrightarrow{\mathrm{b}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{c}} + 12\overrightarrow{\mathrm{c}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{a}}$$

$$= \left(\frac{3}{17}\right)^2 (4 + 4 + 9)$$

$$= \frac{9}{17}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}| \quad > 0$ だから$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{3}{17}\sqrt{17}$

別解

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を$\overrightarrow{\mathrm{a}}$, $\overrightarrow{\mathrm{b}}$, $\overrightarrow{\mathrm{c}}$で表しなさい。

$\rightarrow \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \overrightarrow{\mathrm{b}}$

・平面αに垂直な上にベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{n}} = s\overrightarrow{\mathrm{a}} + t\overrightarrow{\mathrm{b}} + u\overrightarrow{\mathrm{c}}$とすると、

$$\overrightarrow{\mathrm{n}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}} = \left(s\overrightarrow{\mathrm{a}} + t\overrightarrow{\mathrm{b}} + u\overrightarrow{\mathrm{c}}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{b}} - \overrightarrow{\mathrm{c}}\right) = s + \frac{t}{2} - u = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{n}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \left(s\overrightarrow{\mathrm{a}} + t\overrightarrow{\mathrm{b}} + u\overrightarrow{\mathrm{c}}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{a}} + \overrightarrow{\mathrm{b}} - \overrightarrow{\mathrm{c}}\right) = \frac{s}{2} + t - u = 0$$

$\overrightarrow{\mathrm{n}}$は平面$\alpha$に垂直なベクトルで大きさは適当に決めることができる。よって$s = 1$とおいて、これを解くと、$t = 1, u = \dfrac{3}{2}$,

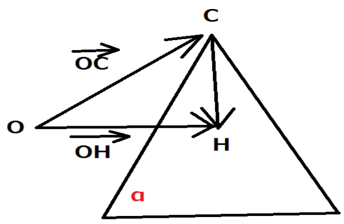
$\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + \dfrac{3}{2}\vec{c}$

・ $\overrightarrow{OR} = \vec{a} + k\vec{c}$ とおくと, $\overrightarrow{CR} = \vec{a} + (k-1)\vec{c}$ とおける。

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{CR} = \left(\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{3}{2}\vec{c}\right)\cdot(\vec{a} + (k-1)\vec{c}) = 1 + \dfrac{3}{2}(k-1) = 0$

これを解くと, $k = \dfrac{1}{3}$, ゆえに　$\overrightarrow{OR} = \vec{a} + \dfrac{1}{3}\vec{c}$ が得られる。

(3)　頂点 O から平面 α に下した垂線と平面 α との交点を H とするとき、$\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表しなさい。



$\overrightarrow{OH} = \ell\vec{n}$ とおくと　$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{n} = (\overrightarrow{OH} - \vec{c})\cdot\vec{n} = 0$

$\ell\vec{n}\cdot\vec{n} = \vec{c}\cdot\vec{n}$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1,\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$

(2) より　$\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + \dfrac{3}{2}\vec{c}$

$\ell\left(1 + 1 + \dfrac{9}{4}\right) = \dfrac{3}{2}$

$\ell = \dfrac{6}{17}$

$\overrightarrow{OH} = \dfrac{6}{17}\left(\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{3}{2}\vec{c}\right)$

$$= \frac{3}{17}(2\overrightarrow{\mathrm{a}} + 2\overrightarrow{\mathrm{b}} + 3\overrightarrow{\mathrm{c}})$$

第5章　大問5

5.1　問 5

次の (1)〜(2) に答えなさい。

(1)　方程式 $-\sin x + \cos x = 0$ を解きなさい。ただし, $0 \leqq x \leqq 2\pi$

(2) $f(x) = e^{-x}\sin x$ とするとき,　次の①〜③に答えなさい。

① $f(x)$ を微分しなさい。

② $0 < x < 2\pi$ における極大値と極小値を求めなさい。

③ $x > 0$ において, 関数 $y = f(x)$ が極大値をとるときの x の値を小さいものから順に $x_1, x_2, x_3\cdots$ とする。このとき, $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots$ を求めなさい。

5

解答

(1)　方程式 $-\sin x + \cos x = 0$ を解きなさい。ただし, $0 \leqq x \leqq 2\pi$

・三角関数の合成により

$$-\sin x + \cos x = -(\sin x - \cos x)$$

$$-(\sin x - \cos x) = \quad -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\,\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\,\theta\right)$$

$$= -\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\,\theta\,\cos\frac{1}{\sqrt{2}} - \cos\,\theta\,\sin\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$= -\sqrt{2}(\sin\ \theta\ -\dfrac{\pi}{4})$

$0 \leqq\ x \leqq\ 2\ \pi$ より　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq\quad x - \dfrac{\pi}{4}\quad \leqq \dfrac{7}{4}\pi$

$x - \dfrac{\pi}{4} = 0,\ \pi$

$x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5}{4}\pi$

(2) $f(x) = e^{-x}\sin x$ とするとき，　次の①〜③に答えなさい。

① $f(x)$ を微分しなさい。$f'(x) = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x = -e^{-x}(\sin x - \cos x)$

② $0 < x < 2\ \pi$ における極大値と極小値を求めなさい。$f'(x) = -e^{-x}(\sin x - \cos x) = -e^{-x}\left(-\sqrt{2}(\sin\ \theta\ -\dfrac{\pi}{4})\right) = 0$ のとき、

(1) より、$x = \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5}{4}\pi$

$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

$f\left(\dfrac{5}{4}\pi\right) = e^{-\frac{5}{4}\pi}\sin\left(\dfrac{5}{4}\pi\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}$

f(x)における増減表

x	0	…	π/4	…	5/4π	…	2π
f'(x)		+	0	−	0	+	
f(x)	0	↗	極大	↘	極小	↗	0

極大値　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}\left(x = \dfrac{\pi}{4}\right)$ 極小値　$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5}{4}\pi}\left(x = \dfrac{5}{4}\pi\right)$

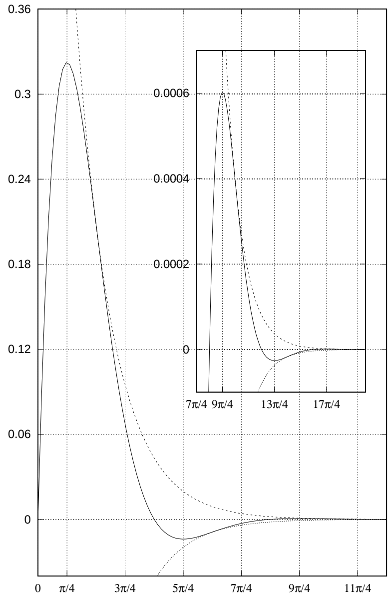


図 5.1: $f(x) = e^{-x}\sin x$ のグラフ

③ $x > 0$ において, 関数 $y = f(x)$ が極大値をとるときの x の値を小さいものから順に $x_1, x_2, x_3 \cdots$ とする。このとき, $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots$ を求めなさい。

・$f(x) = e^{-x}\sin x$ のグラフは図 5.1 のように 2 π を周期として振動しながら急激に減衰している。振幅の小さい $\left(\dfrac{7}{4}\pi\right)$ 以降も振動していることを確かめるため拡大した図も掲載した。
したがって、②より、$f'(x) = 0$ となる（極大値）x の値は、$\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{9}{4}\pi, \dfrac{17}{4}\pi, \cdots$
$\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ である。

$f(x_1)f(x_2)f(x_3)\cdots = f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) f\left(\dfrac{9}{4}\pi\right) f\left(\dfrac{17}{4}\pi\right)\cdots$ となり、

$$= e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + e^{-\frac{9}{4}\pi}\sin\left(\frac{9}{4}\pi\right) + e^{-\frac{17}{4}\pi}\sin\left(\frac{17}{4}\pi\right) + \cdots$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}} + e^{-\frac{9}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}} + e^{-\frac{17}{4}\pi}\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots$$

$$= e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + e^{-2\ \pi} + e^{-4\ \pi} + \cdots\right)$$

・$1 + e^{-2\ \pi} + e^{-4\ \pi} + \cdots$は初項 1 , 公比 $e^{-2\ \pi}$ の無限等比級数となり、その和は、$\dfrac{1}{1 - e^{-2\ \pi}}$となり

$$e^{-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{1 - e^{-2\ \pi}} = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}(1 - e^{-2\ \pi})}$$

第6章　大問6

6.1　問 6

6　次の文は、高等学校学習指導要領「数学」の「各科目」の「数学 II」の「内容」の一部である。下の (1)〜(2) に答えなさい。

(1) いろいろな式
整式の乗法・除法及び分数式の計算式の四則計算について理解できるようにするとともに、等式や不等式が成り立つことを証明できるようにする。また、方程式についての理解を深め、数の範囲を（　a　）まで拡張して、二次方程式を解くこと及び因数分解を利用して高次方程式を解くことができるようにする。

ア　　式と証明

(ア)　整式の乗法・除法, 分数式の計算

(　b　) の乗法公式及び因数分解の公式を理解し、それらを用いて次の展開や因数分解をすること。また、整式の除法や分数式の四則計算について理解し、簡単な場合について計算をすること。

(イ)　等式や不等式の照明

等式や不等式が成り立つことを、それらの基本的な性質や（　c　）の性質などを用いて証明すること。

イ　高次方程式

(ア)　（ a　）と二次方程式

数を　(a) まで拡張する意識を理解し、(a) の四則計算をすること。また、二次方程式の解の種類の判別及び（　d　）の関係について理解すること。

(イ)　（　e　）と高次方程式

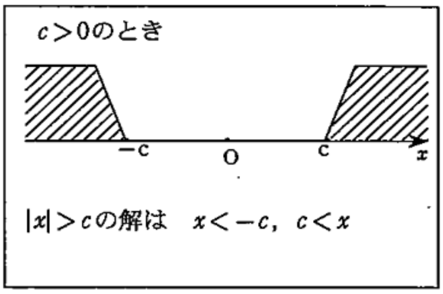
（　e　）について理解し、簡単な高次方程式の解を（　e　）などを用いて求めること。

(1)　a〜e に当てはまる語句を書きなさい。

(2)　次の「問題」に対する「生徒の答え」には誤りがある。「生徒の答案」の誤りを指導した上で、「問題」の解法を黒板で生徒に指導するように書きなさい。
「問題」
不等式 $|2x-1|>3$ を解きなさい。
「生徒の答案」
方程式 $|2x-1|=3$ の絶対値をはずすと　$2x-1=\pm 3$
同様に $|2x-1|>3$ の絶対値をはずすと $2x-1>\pm 3$
したがって　$2x-1>3$ または　$2x-1>-3$
$2x>4$ または　$2x>-2$
よって　$x>2, x>-1$

解答　a.複素数 b.三次 c.実数 d,解と係数 e,因数定理

「誤りの指摘」
$C>0$ のとき不等式 $|x|>c$ の解は $x<-C$、$C<x$ であることから、$|2x-1|>3$ の絶対値をはずしたとき、$2x-1=\pm 3$ とするのは間違いである。



　「解法」
方程式 $|2x-1|=3$ の絶対値をはずすと
したがって　$2x-1>3$ または　$2x-1<-3$
$2x>4$ または　$2x<-2$
よって　$x>2, x<-1$

第7章　予想チェックテスト

7.1　予想チェックテスト

$\boxed{1}$ 場合の数と確率

あるゲームで A が B に勝つ確率は常に $\frac{1}{2}$ で一定とする。
このゲームを繰り返し、先に4勝した方を優勝者とする。ただし、1回のゲームで必ず勝負がつくものとする。次の問いに答えよ。

(1)　4回目で優勝者が決まる確率を求めよ。

(2)　6回目で A が優勝する確率を求めよ。

$\boxed{2}$ 場合の数と確率

6個の文字 $S,\ E,\ N,\ S,\ E,\ I$ を横一列に並べる。次の問いに答えよ。

(1)　この並べ方は全部で何通りあるか求めよ。

(2)　S と S が隣り合わず、E と E も隣合わないような並べ方は、何通りあるか求めよ。

解答

$\boxed{1}$

あるゲームで A が B に勝つ確率は常に$\frac{1}{2}$で一定とする。
このゲームを繰り返し、先に4勝した方を優勝者とする。ただし、1回のゲームで必ず勝負がつくものとする。次の問いに答えよ。

(1)　4回目で優勝者が決まる確率を求めよ。

・4回目で優勝者が決まる場合は、A が4回目で優勝する場合と B が4回目で優勝する場合がある。その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ であるから求める確率は$\frac{1}{8}$

(2)　6回目で A が優勝する確率を求めよ。

6回目でAが優勝する場合は、5回目までにAが3回買っていることである。
この場合は

${}_5C_3 = 10$(通り)

求める確率は、$10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{32}$

$\boxed{2}$

6個の文字 $S,\ E,\ N,\ S,\ E,\ I$ を横一列に並べる。次の問いに答えよ。

(1)　この並べ方は全部で何通りあるか求めよ。

$\frac{6!}{2!\times\ 2!} = 180$（通り）

(2) S と S が隣り合わず、E と E も隣合わないような並べ方は、何通りあるか求めよ。

・余事象として考え、どちらも隣り合う場合を考える。

S と S を一つの文字として考え、その並び方は

$[SS],\ E,\ N,\ E,\ I$

$\dfrac{5!}{2!} = 60$（通り）

E と E も一つの文字として考え、その並び方は同じく

$[EE],\ S,\ N,\ S,\ I$

$\dfrac{5!}{2!} = 60$（通り）

・また、二つの場合で被った場合を引くため、これは S と E を一つの文字としてみた 4 つの並び方になるので

$[SS],\ [EE],\ N,\ I$

$4! = 24$（通り）

・したがって S と S が隣り合い、E と E も隣合わうような並べ方は 96 通りとなるので、求める場合は

$180 - 96 = 84$（通り）