ワイブル分布 (Weibull distributions)

緑川章一 *

1 生存関数

$t \geqq 0$ を寿命を表す確率変数とし、その確率密度関数を $f(t)$ とする。寿命 T が与えられた値 t よりも長くなる割合を表す関数を生存関数 (survival function) と言い、

$$S(t) = \mathrm{P}(t > \tau) = \int_t^\infty f(\tau) d\tau$$

で定義される。

一方、累積分布関数 (cumulative distribution function)$F(t)$ は、

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(\tau) d\tau && (1) \\ &= 1 - S(t) && (2) \end{aligned}$$

で与えられる。

累積分布関数 $F(t)$ を微分すると、確率密度関数 $f(t)$ が得られる。

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) \tag{3}$$

2 指数分布とワイブル分布

指数分布

指数分布の確率密度関数は、

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \tag{4}$$

で与えられる。

生存関数は、

$$S(t) = \lambda \int_t^\infty e^{-\lambda\tau} d\tau = e^{-\lambda t}$$

累積分布関数は、

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

である。

---

*Shoichi Midorikawa

また、

$$\frac{dF(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}$$

と指数分布の確率密度関数が得られる。

ハザード関数 (hazard function) とは、

$$\begin{aligned}
h(t) &= \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{P(t \le \tau \le t+\Delta\tau | \tau \ge t)}{\Delta\tau} \\
&= \frac{\lim_{\Delta\tau\to 0} \dfrac{P(t \le \tau \le t+\Delta\tau)}{\Delta\tau}}{P(\tau > t)} \\
&= \frac{\lim_{\Delta\tau\to 0} \dfrac{1}{\Delta\tau} \displaystyle\int_t^{t+\Delta\tau} f(t)\, d\tau}{\displaystyle\int_t^{\infty} f(\tau) d\tau} \\
&= \frac{f(t)}{\displaystyle\int_t^{\infty} f(\tau)\, d\tau}
\end{aligned}$$

で定義される。この式に (4) 式を代入すると、

$$h(t) = \lambda$$

を得る。

ワイブル分布

指数分布 $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ において、$t = x^n$ とおき、変数 x の分布 $f_X(x)$ を考える。

$$f_X(x) = \lambda \int_0^{\infty} \delta\left(x - \sqrt[n]{t}\right) e^{-\lambda t}\, dt \tag{5}$$

この積分を求めるに当り、$\varphi(t) = x - \sqrt[n]{t}$ とおいて、$t = x^n$ の周りで展開する。$\varphi(x^n) = 0$ だから、

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \varphi'(x^n)(t-n) + \cdots \\
&= -\frac{1}{n} x^{-(n-1)}(t - x^n) + \cdots
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$\delta\left(x - \sqrt[n]{t}\right) = n x^{n-1} \delta(t - x^n)$$

これを、(1) 式に代入して、t についての積分をおこなう。

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \lambda n x^{n-1} \int_0^{\infty} \delta(t - x^n) e^{-\lambda t}\, dt \\
&= \lambda n x^{n-1} e^{-\lambda x^n} \qquad (6)
\end{aligned}$$

これを、ワイブル分布 (Weibull distribution) と言う。

ワイブル分布の一般的な表現は、(2) 式で、$n = \alpha,\ \lambda = 1/\beta^{\alpha}$ と置いたものである。

$$f_X(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)^{\alpha}} \tag{7}$$

累積分布関数から

指数関数の累積分布関数 $F(t)$ は、

$$F(t) = 1 - e^{\lambda t}$$

で与えられる。

ここで、$t = x^n$ とおくと、

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x^n}$$

この式を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dF_X(x)}{dx} &= \lambda n x^{n-1} e^{-\lambda x^n} \\ &= f_X(x) \end{aligned}$$

をワイブル分布の確率密度関数 (6) 式が得られる。

3 商の分布

確率変数 x と y は、それぞれ、α の値は同じで β の値が異なるワイブル分布、

$$f_1(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta_1}\right)\left(\frac{x}{\beta_1}\right)^{\alpha-1} e^{-(x/\beta_1)^\alpha}, \quad f_2(y) = \left(\frac{\alpha}{\beta_2}\right)\left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha-1} e^{-(y/\beta_2)^\alpha}$$

に従うものとする。このとき、2 つの確率変数の比 $z = x/y$ の分布を考える。

注意！　比 $z = (x/\beta_1)/(y/\beta_2)$ の分布に書き直す。

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \int_0^\infty \delta(z - x/y) f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty y\delta(x - yz) f_1(x) f_2(y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^\infty y f_1(yz) f_2(y)\, dy \\ &= \frac{\alpha^2}{\beta_1\beta_2}\int_0^\infty y\left(\frac{yz}{\beta_1}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{y}{\beta_2}\right)^{\alpha-1} e^{-(yz/\beta_1)^\alpha} e^{-(y/\beta_2)^\alpha}\, dy \end{aligned} \tag{8}$$

ここで、$u = (y/\beta_2)^\alpha$ と置くと、(8) 式は、

$$f_Z(z) = \alpha\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}z\right)^{\alpha-1}\int_0^\infty u \exp\left\{-\left[\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}z\right)^\alpha + 1\right]u\right\} du \tag{9}$$

さらに、$r = (\beta_2/\beta_1)^\alpha,\ v = (rz^\alpha + 1)u$ とおくと、

$$f_Z(z) = \alpha\frac{rz^{\alpha-1}}{(rz^\alpha + 1)^2}\int_0^\infty ve^{-v}\, dv$$

ところが、

$$\int_0^\infty ve^{-v}\, dv = 1$$

なので、

$$f_Z(z) = \frac{r\alpha z^{\alpha-1}}{(rz^\alpha + 1)^2} \tag{10}$$

となる。
　更に、$w = rz^\alpha$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
f_W(w) &= \int_0^\infty \delta(w - rz^\alpha) \frac{\alpha z^{\alpha-1}}{(rz^\alpha + 1)^2}\, dz \\
&= \frac{1}{(w+1)^2}
\end{aligned}
$$

を得る。これは、自由度 (2, 2) の F 分布である。すなわち、確率変数 $w = \left(\dfrac{x/\beta_1}{y/\beta_2}\right)^\alpha$ は、自由度 (2, 2) の F 分布に従う。