離散確率分布
Discrete Probability Distributions

緑川章一*

確率変数 X は、離散的な値 $x = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$ をとるものとし、その確率関数 $p(x)$ と書くことにする。

1 Fourier 変換

関数 $f(x)$ は、$[-\pi, \pi]$ で定義されているとする。この関数のフーリエ展開を

$$f(x) = \sum_n a_n e^{inx}$$

と表すと、その係数 a_n は、

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

より求まる。実際、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_m a_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\, dx = a_n$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}\, dx = \delta_{m,n} \tag{1}$$

を用いた。

2 特性関数

確率関数 $p(x)$ をフーリエ係数とする関数

$$f(t) = \cdots + p(-2)e^{-2it} + p(-1)e^{-it} + p(0) + p(1)e^{it} + p(2)e^{2it} + \cdots = \sum_x p(x) e^{ixt}$$

*Shoichi Midorikawa

を確率関数 $p(x)$ の特性関数 (characteristic function) という。

$$f(0)=\sum_x p(x)=1$$

となることに注意しよう。

確率関数 $p(n)$ は、特性関数の積分

$$p(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt \tag{2}$$

から求まる。

平均と分散

$f(t)=\sum_x p(x)e^{ixt}$ を t で微分すると、

$$f'(t)=i\sum_x xp(x)e^{ixt}, \qquad f''(t)=-\sum_x x^2p(x)e^{ixt}$$

だから、

$$\begin{aligned} &\text{平均} \quad : \quad \mu=\sum_x xp(x)=-if'(0) \\ &\text{分散} \quad : \quad \sigma^2=\sum_x x^2p(x)-\mu^2=-f''(0)+f'(0)^2 \end{aligned}$$

3　確率変数の和の分布

確率変数 X の離散確率分布を $p_A(X)$、確率変数 Y の離散確率分布を $p_B(Y)$ とする。また、$p_A(X)$，$p_B(Y)$ の特性関数を、それぞれ、$f_A(t)$, $f_B(t)$ と表すと、

$$\begin{aligned} f_A(t) &= \sum_x p_A(x)e^{ixt} \\ f_B(t) &= \sum_y p_B(y)e^{iyt} \end{aligned}$$

である。このとき、$Z=X+Y$ の確率関数 $P(Z)$ は、

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_x\sum_y \delta_{z,x+y}p_A(x)p_B(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_x\sum_y\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{i(x+y-z)t}\,p_A(x)p_B(y) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{-izt}\left(\sum_x p_A(x)e^{ixt}\right)\left(\sum_y p_B(y)e^{iyt}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{-izt}f_A(t)f_B(t) \end{aligned}$$

すなわち、

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dte^{-izt} f_A(t) f_B(t) \tag{3}$$

で与えられる。ここで、$f_A(t)f_B(t)$ が $P(Z)$ の特性関数である。
　実際、

$$\begin{aligned}
f_A(t)f_B(t) &= \left(\sum_x p_A(x)e^{ixt}\right)\left(\sum_y p_B(y)e^{iyt}\right) \\
&= \sum_z \left(\sum_x \sum_y \delta_{z,x+y}\, p_A(x)p_B(y)\right) e^{izt} \\
&= \sum_z P(z)\, e^{izt}
\end{aligned}$$

である。

3.1 平均と分散

　$Z = X + Y$ の 平均と分散は、特性関数 $F_Z(t) = f_A(t)f_B(t)$ から求めることができる。
平均

$$\begin{aligned}
\mu_Z &= -iF'(0) \\
&= -if_A'(0)f_B(0) - if_A(0)f_B'(0) \\
&= \mu_A + \mu_B
\end{aligned}$$

　実際、

$$\begin{aligned}
\mu_Z &= \sum_z zP(z) \\
&= \sum_z z \sum_x \sum_y \delta_{z,x+y} p_A(x)p_B(y) \\
&= \sum_z \sum_x \sum_y \delta_{z,x+y}(x+y)p_A(x)p_B(y) \\
&= \sum_x \sum_y (x+y)p_A(x)p_B(y) \\
&= \sum_x xp_A(x) \cdot \sum_y p_B(y) + \sum_x p_A(x) \cdot \sum_y yp_B(y) \\
&= \mu_A + \mu_B
\end{aligned}$$

である。

分散

$$
\begin{aligned}
\sigma_Z^2 &= -F_Z''(0) + F_Z'(0)^2 \\
&= -f_A''(0) + f_A'(0)^2 - f_B''(0) + f_B'(0)^2 \\
&= \sigma_A^2 + \sigma_B^2
\end{aligned}
$$

実際、

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_z z^2 P(z) - \mu_Z^2 \\
&= \sum_z z^2 \sum_x \sum_y \delta_{z,x+y} p_A(x) p_B(y) - (\mu_A + \mu_B)^2 \\
&= \sum_x \sum_y (x+y)^2 p_A(x) p_B(y) - (\mu_A + \mu_B)^2 \\
&= \sum_x x^2 p_A(x) - \mu_A^2 + \sum_y y_B^2(y) - \mu_B^2 \\
&= \sigma_A^2 + \sigma_B^2
\end{aligned}
$$

となる。

3.2 一般化

次に、$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ は独立な確率変数で、それぞれ同一の確率分布 $p(X)$ に従うものとする。このとき

$$
Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n
$$

の確率関数は、確率変数 X の特性関数を $f(t) = \sum_x p(x) e^{ixt}$ とすると、

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} \delta_{z, x_1 + \cdots + x_n} p(x_1) \cdots p(x_n) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{x_1} \cdots \sum_{x_n} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{i(x_1 + \cdots x_n - z)t}\, p(x_1) \cdots p(x_n) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{-izt} \left(\sum_{x_1} p(x_1) e^{ix_1 t} \right) \cdots \left(\sum_{x_n} p(x_n) e^{ix_n t} \right)
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
P(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{-izt}\, f^n(t)
$$

で与えられることが分かる。

平均と分散

X_i $(i = 1,\ 2, \cdots,\ n)$ の平均を μ、分散を σ^2 とおく。すなわち、

$$\mu = -if'(0), \qquad \sigma^2 = -f''(0) + f'(0)^2$$

とする。

$F_Z(t) = f^n(t)$ とおくと、

$$\begin{aligned} F_Z'(t) &= nf^{n-1}(t)f'(t) \\ F_Z''(t) &= nf^{n-1}(t)f''(t) + n(n-1)f^{n-2}(t)f'(t)^2 \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} \mu_Z &= -iF_Z'(0) \\ &= -inf'(0) \\ &= n\mu, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_Z^2 &= -F_Z''(0) + F_Z'(0)^2 \\ &= -nf''(0) - n(n-1)f'(0)^2 + n^2f'(0)^2 \\ &= -nf''(0) + nf'(0)^2 \\ &= n\sigma^2 \end{aligned}$$

を得る。

3.3 ベルヌーイ試行

結果は、成功か失敗かのように、2つに1つの場合について考える。確率変数 X の値は、事象 E が起こる場合を 0，起こらない場合を 1 とする。それらの確率を $P(0) = p$，失敗の確率を $P(1) = q = 1 - p$ と書こう。この場合の特性関数は、

$$f(t) = p + qe^{it}$$

である。

ベルヌーイ試行列

ベルヌーイ試行を独立に n 回繰り返す場合の特性関数は、$f^n(t)$ で与えられる。

$$
\begin{aligned}
f^n(t) &= \left(p+qe^{it}\right)^n \\
&= \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x} e^{ixt} \\
&= \sum_{x=0}^{n} p_n(x) e^{ixt}
\end{aligned}
$$

ゆえに、

$$
p_n(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x}
$$

と二項分布になる。

3.4 ポアソン分布

確率分布がポアソン分布 $p(n) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \quad (n=0,\ 1,\ 2, \cdots)$ の場合

$$
\begin{aligned}
f(t) &= e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^{it})^n}{n!} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{-\lambda(1-e^{it})} \\
e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-\lambda(1-e^{it})}e^{-imt}\,dt
\end{aligned}
$$

ポアソン確率変数の和

$X_1,\ X_2$ が互いに独立で、各々、パラメータが $\lambda_1,\ \lambda_2$ のポアソン分布に従うものとする。このとき、$Z = X_1 + X_2$ の確率分布は、

$$
P(z) = \sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\delta_{z,x_1+x_2}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!}
$$

で与えられる。ここで、(1) を用いると、

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{x_1=0}^{\infty}\sum_{x_2=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} dt e^{i(x_1+x_2-z)t}\,e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\int_{-\pi}^{\pi} dt\left(\sum_{x_1=0}^{\infty}\frac{(\lambda_1 e^{it})^{x_1}}{x_1!}\right)\left(\sum_{x_2=0}^{\infty}\frac{(\lambda_2 e^{it})^{x_2}}{x_2!}\right)e^{-izt} \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\int_{-\pi}^{\pi} dt\,e^{\lambda_1 e^{it}}e^{\lambda_2 e^{it}}\,e^{-izt} \\
&= \frac{1}{2\pi}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\int_{-\pi}^{\pi} dt\,e^{(\lambda_1+\lambda_2)e^{it}}\,e^{-izt}
\end{aligned}
$$

ここで、$\lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2$ とおくと、

$$\begin{aligned}
P(z) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda_s} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{\lambda_s e^{it}}\, e^{-izt} \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\lambda_s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_s^k}{k!} \int_{-\pi}^{\pi} dt e^{i(k-z)t} \\
&= e^{-\lambda_s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_s^k}{k!} \delta_{k,z} \\
&= e^{-\lambda_s} \frac{\lambda_s^z}{z!}
\end{aligned}$$

ゆえに、$z = x_1 + x_2$ の分布は、

$$P(z) = e^{-\lambda_s} \frac{\lambda_s^z}{z!}, \qquad \text{ここで、} \quad \lambda_s = \lambda_1 + \lambda_2$$

普通は、こんな七面倒くさいことはしないで、

$$\begin{aligned}
P(z) &= \sum_{x_1=0}^{\infty} \sum_{x_2=0}^{\infty} \delta_{z,x_1+x_2} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} \\
&= \sum_{x_1=0}^{z} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{z-x_1}}{(z-x_1)!} \qquad \because\ x_2 = z - x_1 \geqq 0 \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{z!} \sum_{x_1=0}^{z} \frac{z!}{x_1!(z-x_1)!} \lambda_1^{x_1} \lambda_2^{z-x_1} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!}
\end{aligned}$$

ゆえに、

$$P(z) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^z}{z!}$$

3.5 二項分布

二項分布 $p_n(x) = {}_nC_x p^x q^{n-x}$ の場合、特性関数は、

$$f(t) = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x p^x q^{n-x} e^{ixt} = \sum_{x=0}^{n} {}_nC_x \left(pe^{it}\right)^x q^{n-x} = \left(pe^{it} + q\right)^n$$

で与えられる。

二項分布に従う確率変数の和

X_1 と X_2 は互いに独立で、それぞれ、確率分布

$$\begin{aligned} p_{n_1}(x_1) &= {}_{n_1}C_{x_1} p^{x_1} q^{n_1-x_1}, \\ p_{n_2}(x_2) &= {}_{n_2}C_{x_2} p^{x_2} q^{n_2-x_2} \end{aligned}$$

に従うものとする。このとき、$Z = X_1 + X_2$ の確率分布は、

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} \delta_{z,x_1+x_2}\ {}_{n_1}C_{x_1} p^{x_1} q^{n_1-x_1}\ {}_{n_2}C_{x_2} p^{x_2} q^{n_2-x_2} \\ &= \sum_{x_1=0}^{n_1} \sum_{x_2=0}^{n_2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z-x_1-x_2)t}\, dt\ {}_{n_1}C_{x_1} p^{x_1} q^{n_1-x_1}\ {}_{n_2}C_{x_2} p^{x_2} q^{n_2-x_2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \left(\sum_{x_1=0}^{n_1} {}_{n_1}C_{x_1} (pe^{-it})^{x_1} q^{n_1-x_1} \right) \left(\sum_{x_2=0}^{n_2} {}_{n_2}C_{x_2} (pe^{-it})^{x_2} q^{n_2-x_2} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \left(pe^{-it} + q \right)^{n_1} \ \left(pe^{-it} + q \right)^{n_2}\ dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{izt} \left(pe^{-it} + q \right)^{n_1+n_2}\ dt \\ &= \sum_{s=0}^{n_1+n_2} {}_{n_1+n_2}C_s\, p^s q^{n_1+n_2-s}\, \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(z-s)t}\, dt \\ &= \sum_{s=0}^{n_1+n_2} {}_{n_1+n_2}C_s\, p^s q^{n_1+n_2-s}\, \delta_{z,s} \\ &= {}_{n_1+n_2}C_z\, p^z q^{n_1+n_2-z} \end{aligned}$$

すなわち、

$$P(z) = {}_{n_1+n_2}C_z\, p^z q^{n_1+n_2-z}$$

3.6　幾何分布

幾何分布 $P(x) = pq^{x-1}$ ただし、$p + q = 1,\ x = 1,\ 2,\ \cdots$ の特性関数は、

$$f(t) = \sum_{x=1}^{\infty} P(x) e^{ixt} = \frac{p}{q} \sum_{x=1}^{\infty} \left(qe^{it} \right)^x = \frac{pe^{it}}{(1 - qe^{it})}$$

幾何分布に従う確率変数の和

$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ は独立な確率変数で、それぞれ同一の幾何分布 $P(X)$ に従うものとする。このとき

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

の確率関数は、確率変数 X_i の特性関数を $f(t)=\dfrac{pe^{it}}{(1-qe^{it})}$ とすると、

$$P(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-izt}\,f^n(t)\,dt=\frac{p^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{int}e^{-izt}}{(1-qe^{it})^n}\,dt \tag{4}$$

で与えられる。

ところで、

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-s)^n} &= 1+\frac{n}{1!}s+\frac{n(n+1)}{2!}s^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}s^3+\cdots\\ &= \sum_{u=0}^{\infty}{}_{n-1+u}C_u\,s^u\end{aligned}$$

だから、(4) 式は、

$$\begin{aligned}P(z) &= \sum_{u=0}^{\infty}{}_{n-1+u}C_u p^n q^u\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n+u-z)t}\,dt\\ &= {}_{z-1}C_{z-n}p^nq^{z-n}\end{aligned}$$

すなわち、

$$P(z)={}_{z-1}C_{z-n}p^nq^{z-n}$$

ここで、$z=n+k$ とおくと、

$$P(n+k)={}_{n+k-1}C_kp^nq^k$$

これは、ある事象が n 回成功するまでに k 回の失敗したときの確率である。なぜなら、$n+k$ 回の試行で、n 回の成功と k 回の失敗をしたとすると、その確率は、p^nq^k となる。$n+k$ 回目の試行は成功であるから、それまでの、$n+k-1$ 回の間に k 回の失敗の仕方は、${}_{n+k-1}Ck$ となるからである。

ところで、

$$\begin{aligned}{}_{n+k-1}C_kp^nq^k &= \frac{(n+k-1)(n+k-2)\cdots(n+1)n}{k!}p^nq^k\\ &= \frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-(k-1))}{k!}p^n(-q)^k\\ &= {}_{-n}C_k\left(\frac{1}{p}\right)^{-n-k}\left(-\frac{q}{p}\right)^k\end{aligned}$$

と書けるので、$\mathcal{N}=-n,\ \mathcal{P}=\dfrac{1}{p},\ \mathcal{Q}=-\dfrac{q}{p}$ とおくと、

$${}_{n+k-1}C_kp^nq^k={}_{\mathcal{N}}C_k\mathcal{P}^{\mathcal{N}-k}\mathcal{Q}^k$$

右辺は、形式的には二項分布の形をしている。ただし、$\mathcal{N}<0,\ \mathcal{Q}<0$ である。また、$p+q=1$ なので $\mathcal{P}+\mathcal{Q}=1$。これを負の二項分布と言う。

4　ランダムウォーク

$X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ は、互いに独立で、確率 p で 1 を、確率 q で -1 をとるものとする。このとき、

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

が値 r をとる確率は、

$$\begin{aligned}
P(S_n = r) &= \sum_{x_1}\sum_{x_2}\cdots\sum_{x_n}\delta_{r,x_1+x_2+\cdots+x_n}\,p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{-irt}\prod_{l=1}^{n}\left(\sum_{x_l} p(x_l)e^{ix_l t}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{-irt}\left(pe^{it} + qe^{-it}\right)^n \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{-irt}\left(\sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k} e^{i(2k-n)t}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k p^k q^{n-k}\delta_{r,2k-n}
\end{aligned}$$

クロネッカーのデルタにより残る項を取り出すと、

$$P(S_n = r) = {}_nC_{\frac{n+r}{2}}\, p^{\frac{n+r}{2}} q^{\frac{n-r}{2}} \tag{5}$$

を得る。ただし、$0 \leqq \frac{n+r}{2} \leqq n,$　かつ　$n + r$ は偶数 である。

次に、ランダムウォークが、原点に戻ってくる確率を求めよう。

ランダムウォークが時刻 $2n$ に原点に戻る事象を A_{2n} とおく。原点に戻るのは、必ず偶数回目であることに注意しよう。そこで、(5) 式で、$S_{2n} = 0$ とおいて、

$$P(A_{2n}) = {}_{2n}C_n p^n q^n$$

を得る。この事象は、時刻 0 から $2n$ までの間に、何回か原点に戻る事象も含んでいるかも知れない。時刻 0 に原点を出発して時刻 $2k$ に初めて原点に戻る事象を B_{2k} とおく。そこで、ランダムウォークはリセットされるので、時刻 $2k$ から出発して $2n$ にも原点に戻る事象は、$A_{2(n-k)}$ で表されるので、確率 $P(A_{2n})$ は、時刻 $2k$ $(k = 1, 2, \cdots, n-1)$ にはじめて原点に戻る確率 $P(B_{2k})$ と $P(A_{2(n-k)})$ の積で与えられる。

$$P(A_{2n}) = \sum_{k=0}^{n} P(B_{2k})P(A_{2(n-k)}), \tag{6}$$

ただし、$n \geqq 1,\ P(A_0) = 1,\ P(B_0) = 0$　とする。

ここで、簡単のために、

$$u_{2n} = P(A_{2n}),\ f_{2n} = P(B_{2n})$$

とおくことにすると、(6) 式は、

$$u_{2n} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} \delta_{n,k+l}\, f_{2k}\, u_{2l} \tag{7}$$

と書ける。ただし、$n = 1, 2, \cdots$ である。ここで、

$$\delta_{n,k+l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k+l-n)t}\, dt$$

とおくと、

$$u_{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{-int} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}\, e^{ikt}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} u_{2l}\, e^{ilt}\right)$$

さらに、

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}\, e^{ikt}, \quad U(t) = \sum_{l=0}^{\infty} u_{2l}\, e^{ilt}$$

とおくと、

$$u_{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{-int} F(t)U(t)$$

これは、

$$\begin{aligned} F(t)U(t) &= u_2 e^{it} + u_4 e^{2it} + u_6 e^{3it} + \cdots \\ &= U(t) - u_0 \end{aligned}$$

と書けることを意味する。ところが、$u_0 = P(A_0) = 1$ だから、

$$F(t)U(t) = U(t) - 1$$

となる。

ところで、

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_{2n}C_n (pqe^{it})^n \\ &= 1 + \frac{2}{1!}(pqe^{it}) + \frac{4\cdot 3}{2!}(pqe^{it})^2 + \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}(pqe^{it})^3 + \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!}(pqe^{it})^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{1}{2}(4pqe^{it}) + \frac{1\cdot 3}{2^2\, 2!}(4pqe^{it})^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\, 3!}(4pqe^{it})^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4\, 4!}(4pqe^{it})^4 + \cdots \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - 4pqe^{it}}} \end{aligned}$$

なので、

$$F(t) = 1 - \sqrt{1 - 4pqe^{it}}$$

となる。

いつかは、原点に戻る確率は、$F(0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{2k}$ である。その値は、

$$\begin{aligned} F(0) &= 1 - \sqrt{1 - 4pq} \\ &= 1 - \sqrt{(p+q)^2 - 4pq} \\ &= 1 - \sqrt{(p-q)^2} \\ &= 1 - |p - q| \end{aligned}$$

と求まる。これは、$p = q = 1/2$ のときには、$F(0) = 0$ となる。すなわち、ランダムウォークは、いつかは必ず原点に戻ってくることを表している。

5 確率変数の和の数もまた確率変数の場合 (Sum of a Random Number of Random Variables)

確率変数 X_i $(i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ ,\ n)$ は、互いに独立で、同一の確率分布に従うものとする。この確率変数 X_i の n コの和

$$Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

の分布を扱うが、今度は、確率変数の数 n は、一定の値ではなく、確率分布関数 $\mathscr{P}(n)$ に従うものとする。このとき、$Z = z$ となる確率 $P(z)$ は、

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_n \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} \delta_{z, x_1+x_2+\cdots+x_n}\, p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)\mathscr{P}(n) \\ &= \sum_n \sum_{x_1} \sum_{x_2} \cdots \sum_{x_n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(-z+x_1+x_2+\cdots+x_n)t}\, dt\, p(x_1)p(x_2)\cdots p(x_n)\mathscr{P}(n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_n \int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{-izt} \left(\sum_{x_1} p(x_1)e^{ix_1t} \right) \cdots \left(\sum_{x_n} p(x_n)e^{ix_nt} \right) \mathscr{P}(n) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{-izt} \left[\sum_n \left(\sum_x p(x)e^{ixt} \right)^n \mathscr{P}(n) \right] \end{aligned}$$

ここで、

$$f(t) = \sum_x p(x)e^{ixt}$$

とおくと、

$$P(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dt\, e^{-izt}\left[\sum_n f^n(t)\mathscr{P}(n)\right]$$

と書ける。この式と (2) 式を比較すると、

$$\mathscr{F}(t) \equiv \sum_n f^n(t)\mathscr{P}(n) = \sum_z P(z)e^{izt}$$

となる、すなわち、$\mathscr{F}(t)$ は Z の特性関数であることが分かる。

平均と分散

　Z の平均と分散を、X の平均と分散、

$$\mu_X = \sum_x xp(x) = -if(0), \quad \sigma_X^2 = \sum_x x^2p(x) - \mu_X^2 = -f''(0) + f'(0)^2$$

と、N の平均と分散、

$$\mu_N = \sum_n n\mathscr{P}(n), \quad \sigma_N^2 = \sum_n n^2\mathscr{P}(n) - \mu_N^2$$

を用いて表すと、

$$\begin{aligned}
\mu_Z &= -i\mathscr{F}'(0) \\
&= -if'(0)\sum_n n\mathscr{P}(n) \\
&= \mu_X\,\mu_N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_Z^2 &= -\mathscr{F}''(0) + \mathscr{F}'(0)^2 \\
&= -f''(0)\sum_n n\mathscr{P}(n) - f'(0)^2\sum_n n(n-1)\mathscr{P}(n) + f'(0)^2\left(\sum_n n\mathscr{P}(n)\right)^2 \\
&= \sigma_X^2\,\mu_N + \mu_X^2\,\sigma_N^2
\end{aligned}$$

となる。

6　分枝過程 (Branching Process)

6.1　Nomad(ノマド)

　時刻 $n = 0$ でのノマドの数は、一匹だけであり、1 単位時間だけ生存する。時刻 $n = 1$ で出産後に志望し、その子孫の家族で置き換わる。子孫は $n = 2$ まで生存する。その後、死亡して、次の子どもに置き換わる。この死亡出生過程は、時刻 $n = 3,\ 4,\ \cdots$ と続く。家族の個体数は次の 2 条件を満足する確率変数であるとする。

(1) 家族の個体数は、それぞれ $\{0, 1, 2, \cdots\}$ に値をとる独立な確率変数である。
(2) 家族の個体数は、離散確率密度関数 p を持つ同分布な確率変数であり、ノマドの子どもの数 C は、$k = 0, 1, 2, \cdots$ に対して離散確率密度関数 $P(C = k) = p(k)$ を持つ。

分枝過程の第 n 世代のノマドの個体数を Z_n で表す。明らかに $Z_0 = 1$ である。

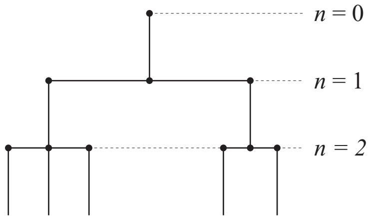

図 1: ノマドの増殖

6.2 特性関数による方法

$Z_0 = 1$ だから、$p(Z_0 = 1) = 1$。そこで、Z_0 の特性関数は、

$$f(t) = e^{it} \tag{8}$$

である。Z_1 の特性関数を、

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p(k) e^{ikt} \tag{9}$$

と書き、

$$\begin{aligned} \mu &= -if'(0) \\ \sigma^2 &= -f''(0) + f'(0)^2 \end{aligned}$$

とおく。

一般に、Z_n の特性関数を、

$$f_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_n = k) e^{ikt}$$

と書く。

第 $n-1$ 世代の子どもの数は、Z_{n-1} である。これらの子どもの中で第 i 番目が第 n 世代に残した子どもの数を C_i とすると、

$$Z_n = C_1 + C_2 + \cdots + C_{Z_{n-1}}$$

となるので、

$$\begin{aligned} P(Z_n = k) &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{c_1=0}^{\infty}\cdots\sum_{c_l=0}^{\infty}\delta_{k,\,c_1+c_2+\cdots+c_l}p(c_1)p(c_2)\cdots p(c_l)P(Z_{n-1}=l) && (10)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dte^{-ikt}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\prod_{j=1}^{l}\left(\sum_{c_j=0}^{\infty}p(c_j)e^{ic_jt}\right)P(Z_{n-1}=l)\right] && (11)\end{aligned}$$

ところが、(9) 式より、

$$\sum_{c_j}p(c_j)e^{ic_jt} = f(t), \qquad (j=1,\ \cdots,\ l)$$

が成り立つので、

$$P(Z_n = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dte^{-ikt}\left[\sum_{l=0}^{\infty}f^l(t)P(Z_{n-1}=l)\right]$$

すなわち、確率変数 Z_n の特性関数 $\mathscr{F}(t)$ は、

$$\mathscr{F}(t) = \sum_{l=0}^{\infty}f^l(t)P(Z_{n-1}=l)$$

で与えられる。

平均は、

$$\begin{aligned}\mu_{Z_n} &= -i\mathscr{F}'(0)\\ &= \mu\,\mu_{Z_{n-1}}\\ &= \mu^2\,\mu_{Z_{n-2}}\\ &\vdots\\ &= \mu^{n-1}\,\mu_{Z_1}\end{aligned}$$

ところが、$\mu_{Z_1} = \mu$ だから、

$$\mu_{Z_n} = \mu^n$$

を得る。

以上の事により、次のことが導かれる。

$$\mu_{Z_n} \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & (\mu < 1)\\ 1 & (\mu = 1)\\ \infty & (\mu > 1)\end{cases}$$

次に、分散を求める。

$$\begin{aligned}\sigma_{Z_n}^2 &= -\mathscr{F}''(0) + F'(0)^2 \\ &= \mu_{Z_{n-1}}\,\sigma^2 + \mu^2\,\sigma_{Z_{n-1}}^2\end{aligned}$$

ところが、$\mu_{Z_{n-1}} = \mu^{n-1}$ だから、

$$\sigma_{Z_n}^2 = \mu^{n-1}\,\sigma^2 + \mu^2\,\sigma_{Z_{n-1}}^2 \tag{12}$$

を得る。この漸化式を解くのだが、ちょっと考えると、$\mu \neq 1$ の場合には、

$$\sigma_{Z_n}^2 + \frac{\mu^{n-1}}{\mu-1}\,\sigma^2 = \mu^2\left(\sigma_{Z_{n-1}}^2 + \frac{\mu^{n-2}}{\mu-1}\,\sigma^2\right)$$

と書けることが分かるので、

$$\sigma_{Z_n}^2 + \frac{\mu^{n-1}}{\mu-1}\,\sigma^2 = \mu^{2(n-1)}\left(\sigma^2 + \frac{1}{\mu-1}\,\sigma^2\right)$$

となる。したがって、

$$\sigma_{Z_n}^2 = \sigma^2\mu^{n-1}\,\frac{\mu^n-1}{\mu-1}$$

を得る。

$\mu = 1$ の場合の (12) 式は、

$$\sigma_{Z_n}^2 = \sigma^2 + \sigma_{Z_{n-1}}^2$$

となるので、

$$\sigma_{Z_n} = n\,\sigma^2$$

である。

以上の結果をまとめると、分散は次のようになる。

$$\sigma_{Z_n}^2 = \begin{cases} n\sigma^2 & (\mu = 1), \\ \\ \sigma^2\mu^{n-1}\dfrac{\mu^n-1}{\mu-1} & (\mu \neq 1). \end{cases}$$

6.3 絶滅確率

$Z_n = 0$ のとき、すべての $m \geq n$ に対して、$Z_m = 0$ である。第 n 世代までに分枝過程が絶滅する確率は、

$$e_n = P(Z_n = 0)$$

である。$Z_n = 0$ ならば、$Z_{n+1} = 0$ だから、

$$e_n \leqq e_{n+1}$$

したがって、極値が存在し、

$$e = \lim_{n \to \infty} e_n$$

である。e を過程の**絶滅確率**と言う。

次に、絶滅確率 e の満たす方程式を求めよう。そのために、確率 $P(Z_n)$ の (10) 式とは、異なる表示法を導入する。

第 1 世代の子どもの数を u とすると、その確率は $p(u)$ である。これらの子どもの中で第 i 番目が第 n 世代に残した子どもの数を $Z_{n-1,i}$ とすると、

$$Z_n = Z_{n-1,1} + Z_{n-1,2} + \cdots + Z_{n-1,u}$$

となるので、

$$P(Z_n = k) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{z_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{z_u=0}^{\infty} \delta_{k, z_1+\cdots+z_u} P(Z_{n-1,1} = z_1) \cdots P(Z_{n-1,u} = z_u)\, p(u)$$

特に、$k = 0$ とおくと、$z_i = 0 \quad (i = 1,\, 2,\, \cdots,\, u)$ だから、

$$e_n = \sum_{u=0}^{\infty} e_{n-1}^u\, p(u) \tag{13}$$

を得る。ここで、関数 $G(x)$ を

$$G(x) = \sum_{u=0}^{\infty} x^u\, p(u) \tag{14}$$

で定義すると、(13) 式は、

$$e_n = G(e_{n-1})$$

となる。

絶滅確率 e は、$\lim\limits_{n \to \infty} e_n$ で与えられるから、

$$e = G(e)$$

を満たす非負の解である。

更に、e は、最小非負解であることを証明しよう。

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k\, p(k)$$

を x で微分すると、

$$G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} p(k)$$

ところが $kp(k) \geqq 0$ だから、$0 \leqq x \leqq 1$ において、

$$G'(x) \geqq 0$$

η を任意の非負解とすると、$e \leqq \eta$ である。なぜなら、

$$e_1 = G(0) \leqq G(\eta) = \eta$$

同様に、

$$e_2 = G(e_1) \leqq G(\eta) = \eta$$

同様な操作を繰り返すと、$n = 1, 2, \cdots$ に対して一般に、

$$e_n \leqq \eta,$$

が言える。従って、

$$e = \lim_{n \to \infty} e_n \leqq \eta$$

定理　絶滅確率 e が $e = 1$ であるための必要十分条件は、家族の個体数の平均 μ が $\mu \leqq 1$ を満たすことである。

証明

$p(0) > 0$ と仮定する。なぜなら、もし、$p(0) = 0$ ならば、$e = 0$ でしかも $\mu > 1$ だからである。区間 $[0,\ 1]$ 上で $G(x)$ は、次を満たす。

(1) 連続である。

(2) 非減少である $\left(なぜなら、G'(x) = \sum_k kp(k)x^{k-1} \right)$。

(3) 凸である $\left(なぜなら、G''(x) = \sum_k k(k-1)p(k)x^{k-2} \geqq 0 \right)$。

一般的に、曲線 $y = G(x)$ と直線 $y = x$ のグラフは、区間 $[0,\ 1]$ で 1 個または 2 個の交点を持つ。$x = 1$ での $G(x)$ の微分係数が $G'(1) > 1$ を満たすとき、グラフは、異なる 2 つの交点を持つ。ところが、$G'(1) \leqq 1$ のとき、交点はただ 1 つであり、$x = 1$ が方程式 $x = G(x)$ の $[0,\ 1]$ における唯一の解である。ところが、$G'(1) = \mu$ だから、$e = 1$ であるための必要十分条件は、$\mu \leqq 1$ である。

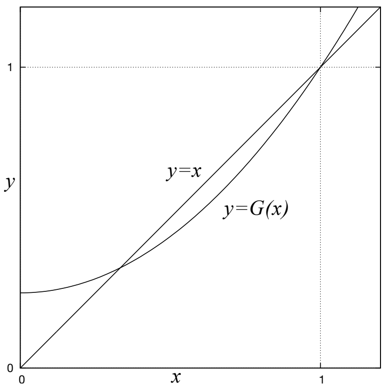

図 2: $G'(x) > 1$

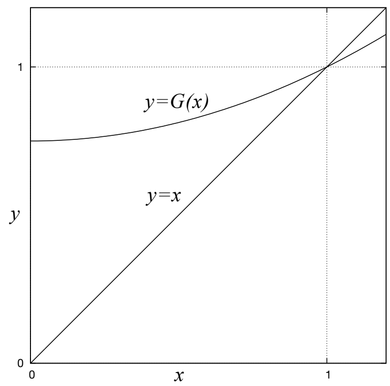

図 3: $G'(x) \leqq 1$