2015 年度率・統計　試験問題略解

問題 1

(1) ある家庭には、3 人の子どもがいる。3 人とも女の子である確率はいくらか。
$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

(2) ある家庭には、3 人の子どもがいる。そのうち、少なくとも 1 人は女の子だそうである。3 人とも女の子である確率はいくらか。
8 通りのうち、3 人とも男である可能性は無いので、$\frac{1}{8-1} = \frac{1}{7}$

(3) ある家庭には、3 人の子どもがいる。一番上は女の子である。3 人とも女の子である確率はいくらか。
2 番目と 3 番目がそれぞれ女の子である確率は、$\frac{1}{2}$ だから、$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

(4) ある家庭には、3 人の子どもがいる。その家庭を訪問したときに、1 人の女の子が顔を出した。3 人とも女の子である確率はいくらか。
残りの 2 人が女の子である確率であるから、$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

問題 2 100 本のくじの中に 4 本の当りくじがある。これを 2 人が順に 1 本ずつ引く。1 番目に引く人と 2 番目に引く人が当りくじを引き当てる確率について考えてみよう。

(1) 1 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(1_{当})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(1_{当}) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$

(2) 1 番目の人が外れくじを引く確率 $\mathrm{P}(1_{外})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(1_{外}) = \frac{96}{100} = \frac{24}{25}$

(3) 1 番目の人が当りくじを引いた場合に、2 番目の人も当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{当})$ を求めよ。　$\mathrm{P}(2_{当}|1_{当}) = \frac{3}{99} = \frac{1}{33}$

(4) 1 番目の人が外れくじを引いた場合に、2 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ を求めよ。　$\mathrm{P}(2_{当}|1_{外}) = \frac{4}{99}$

(5) 2 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当})$ は、$\mathrm{P}(1_{当})$，$\mathrm{P}(1_{外})$，$\mathrm{P}(2_{当}|1_{当})$，$\mathrm{P}(2_{当}|1_{外})$ を用いてどのように表されるか。
$\mathrm{P}(2_{当}) = \mathrm{P}(2_{当}|1_{当})\mathrm{P}(1_{当}) + \mathrm{P}(2_{当}|1_{外})\mathrm{P}(1_{外})$

(6) 2 番目の人が当りくじを引く確率 $\mathrm{P}(2_{当})$ を求めよ。
$\mathrm{P}(2_{当}) = \frac{3}{99}\cdot\frac{1}{25} + \frac{4}{99}\cdot\frac{24}{25} = \frac{3+96}{99\cdot 25} = \frac{99}{99\cdot 25} = \frac{1}{25}$

問題 3 ある夜、タクシーがひき逃げした。目撃者は、青のタクシーがひいたと証言した。その町で営業しているタクシー会社は、グリーン社とブルー社の二社で、次のようなデータがある。

a 町を走るタクシーの 90 %はグリーン社の緑の車で、残りの 10 %はブルー社の青い車である。
b 夜の事故という状況で目撃者の証言がどれだけ信頼できるかを警察がテストしたところ、2 つの色を正しく識別できる確率は 85 %、間違える確率は 15 %であった。

(1) 夜間に青いタクシーの目撃証言が得られる確率 $\mathrm{P}(青_{目})$ はいくらか。
$\mathrm{P}(青_{目}) = 0.1 \times 0.85 + 0.9 \times 0.15 = 0.22$

(2) 夜間に緑のタクシーの目撃証言が得られる確率 P(緑$_{目}$) はいくらか。

P(緑$_{目}$) $= 0.9 \times 0.85 + 0.1 \times 0.15 = 0.78$

(3) ブルー社のタクシーが事故を起こした確率 P(青$_{事故}$) $= \dfrac{\mathrm{P}(青_{走} \cap 青_{目})}{\mathrm{P}(青_{目})}$ はいくらか。有効数字 2 桁で答えよ。

P(青$_{事故}$) $= \dfrac{0.085}{0.22} \simeq 0.39$

問題 4

[1] 30 本のくじの中に、賞金 90 円の当りくじが 1 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

(i) 引いた 2 本が当りくじを含む確率はいくらか。 $\dfrac{29}{{}_{30}C_2} = \dfrac{1}{15}$

(ii) 2 本とも空くじである確率はいくらか。 $\dfrac{{}_{29}C_2}{{}_{30}C_2} = \dfrac{14}{15}$

(iii) X の期待値 (平均) を求めよ。 $\mu = 0 \times \dfrac{14}{15} + 90 \times \dfrac{1}{15} = 6$ 円

(iv) X の分散を求めよ。$\sigma^2 = 0^2 \times \dfrac{14}{15} + 90^2 \times \dfrac{1}{15} - 6^2 = 90 \times 6 - 36 = 540 - 36 = 504$

[2] 60 本のくじの中に、賞金 90 円の当りくじが 2 本ある。このくじを 2 本引くときに得る賞金を X 円とする。

(i) 2 本とも当りくじとなる確率を求めよ。

$\dfrac{1}{{}_{60}C_2} = \dfrac{1}{1770}$

(ii) 2 本のうちの 1 本が当りくじである確率はいくらか。

$\dfrac{{}_{2}C_1 \cdot {}_{58}C_1}{{}_{60}C_2} = \dfrac{116}{1770} = \dfrac{58}{885}$

(iii) 2 本とも空くじである確率はいくらか。

$\dfrac{{}_{58}C_2}{{}_{60}C_2} = \dfrac{1653}{1770} = \dfrac{551}{590}$

(iv) X の期待値 (平均) を求めよ。

$\mu = 0 \times \dfrac{1653}{1770} + 90 \times \dfrac{116}{1770} + 180 \times \dfrac{1}{1770} = \dfrac{9(116+2)}{177} = \dfrac{9 \times 118}{59 \times 3} = 6$ 円

(v) X の分散を求めよ。

$$\sigma^2 = 0^2 \times \frac{1653}{1770} + 90^2 \times \frac{116}{1770} + 180^2 \times \frac{1}{1770} - 6^2 = \frac{810 \times (116+4)}{177} - 36$$

$$= \frac{810 \times 120}{59 \times 3} - 36 = \frac{32400}{59} - 36 = \frac{32400 - 36 \times (60-1)}{59} = \frac{30276}{59} \simeq 513.15$$

問題 5 100 円玉と 50 円玉を投げる試行を行う。

(1) 1 回の試行で 2 枚とも表が出る確率はいくらか。 $\dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$

(2) x 回目の試行で、初めて 2 枚揃って表が出る確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。

$p = \dfrac{1}{4}$, $q = \dfrac{3}{4}$ の幾何分布だから、$\mathrm{P}(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right) \cdot \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1}$

(3) 2 枚とも表が出るまでの平均の試行回数を求めよ。 $\mu = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

(4) x の分散を求めよ。 $\sigma^2 = \dfrac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 12$

(5) x 回の試行で一度も 2 枚揃って表が出ない確率 $\mathrm{Q}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{Q}(x) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$

(6) $\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。 $\mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{x-1} = \mathrm{Q}(x-1)$

(7) $\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(2) + \cdots + \mathrm{P}(x) + \mathrm{Q}(x)$ を求めよ。

$\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\cdots+\mathrm{P}(x)+\mathrm{Q}(x)=\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\cdots+\mathrm{Q}(x-1)=\cdots=1$

(8) $\mathrm{P}(1)+\mathrm{P}(2)+\cdots+\mathrm{P}(n)>\frac{1}{2}$ を満たす最小の n を求めよ。

$1-\mathrm{Q}(n)>\dfrac{1}{2}$ より、$\mathrm{Q}(n)<\dfrac{1}{2}$. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^3=\dfrac{27}{64}<\dfrac{1}{2}$. ゆえに、$n=3$.

問題 6　選択肢が 3 個あり、その中の正しいものに○をつけよという設問が 10 個ある。ただし、各設問について正解は 1 個しかないものとする。まったくでたらめに○をつけたとした場合について以下の質問に答えよ。

(1) x コ正解する確率 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。

$n=10,\ p=\dfrac{1}{3},\ q=\dfrac{2}{3}$ の二項分布だから、$\mathrm{P}(x)={}_{10}C_x\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10-x}$

(2) 平均するといくつ正解することになるか。$\mu=10\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{3}$

(3) 正解数の分散を求めよ。$\sigma^2=10\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{20}{9}$

(4) 1 問につき 10 点とし、80 点以上を優とする。優となる確率は何パーセントか。有効数字 1 桁で求めよ。$\mathrm{P}(8)+\mathrm{P}(9)+\mathrm{P}(10)=\dfrac{180+20+1}{3^{10}}=\dfrac{201}{3^{10}}=\dfrac{67}{3^9}=\dfrac{67}{19683}=0.0034\cdots\approx 0.3\ \%$