円周率は3.05より大きいことを証明せよ。

【証明】

マチン (Machin) の公式より、

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta$$
, $\angle \angle \mathcal{C}$, $\tan \alpha = \frac{1}{5}$, $\tan \beta = \frac{1}{239}$

 $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ の両辺を 2 乗して、

$$\tan^2 \alpha = \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{25}, \quad \therefore \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

ゆえに、

$$\alpha > \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}} > \frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{\sqrt{3}}{9} > \frac{1.732}{9} > 0.192$$

一方、

$$\beta < \tan \beta = \frac{1}{239} < \frac{1}{200} = 0.005$$

以上の関係式より、 $\frac{\pi}{4} > 4 \times 0.192 - 0.005$ 、すなわち、

$$\pi > 3.052$$

を得る。

[註]

$$4(4\sin\alpha - \tan\beta) < \pi < 4(4\tan\alpha - \sin\beta)$$

ところで、

$$4(4\sin\alpha - \tan\beta) = 4\left(\frac{4}{\sqrt{26}} - \frac{1}{239}\right) = 3.121\cdots$$
, $4(4\tan\alpha - \sin\beta) = 4\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{\sqrt{239^2 + 1}}\right) = 3.183\cdots$

$$3.12 < \pi < 3.19$$

上限値と下限値の平均値を取ると、 $\pi \simeq 3.15$ と結構良い値が出る。

【別解】(オーソドックスな方法)

角の大きさを表すのに弧度法を用いることにする。 $\theta > 0$ とすると、定義より、

$$\theta > \sin \theta$$
, 更に、 $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

なので、 θ が小さいほど、 $\sin\theta$ との一致は良くなる。そこで、 $\theta=15^\circ=\frac{\pi}{12}$ を代入する。1 つの角が 15° の直角三角形の 3 辺の比は下図のようになるので、

$$\frac{\pi}{12} > \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

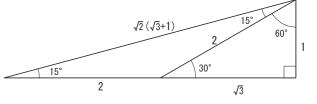
ゆえに、

$$\pi > 3\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) > 3 \times 1.41 \times (1.732 - 1) > 3.096 > 3.05$$

[註] $\sin \theta < \theta < \tan \theta \; (0 < \theta < \pi/2)$ に $\theta = \frac{\pi}{12}$ を代入して、整理すると、

$$3\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) < \pi < 12(2-\sqrt{3})$$

 $\sqrt{2} = 1.414 \cdots$, $\sqrt{3} = 1.732 \cdots$ を代入して計算 <u>15°</u> すると、



$$3.10 < \pi < 3.22$$

を得る。上限値と下限値の平均を取ると、 $\pi \simeq 3.16$ となる。