量子計算

筒井翔一朗

2021 年 10 月 29 日

目次

1 Notation

Qubit

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

Kronecker 積

$$A \otimes B \equiv \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1N}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}B & \dots & a_{NN}B \end{pmatrix} \tag{2}$$

Hadamard ゲート

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

一般位相ゲート

$$R_l = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{2\pi}{2^l}} \end{pmatrix} \tag{4}$$

整数 k の 2 進数表記

$$(k)_2 = i_1 i_2 \cdots, \quad i_n = 0, 1 \tag{5}$$

例

$$(0)_2 = 0 \tag{6}$$
$$(1)_2 = 1 \tag{7}$$
$$(2)_2 = 10 \tag{8}$$
$$(3)_2 = 11 \tag{9}$$
$$(4)_2 = 100 \tag{10}$$
$$(5)_2 = 101 \tag{11}$$
$$(6)_2 = 110 \tag{12}$$
$$(7)_2 = 111 \tag{13}$$
$$(8)_2 = 1000 \tag{14}$$
$$(9)_2 = 1001 \tag{15}$$
$$(10)_2 = 1010 \tag{16}$$
$$(11)_2 = 1011 \tag{17}$$
$$(12)_2 = 1100 \tag{18}$$
$$(13)_2 = 1101 \tag{19}$$

小数を含む 2 進数表記

$$(k)_2 = k_1 \cdots k_{l-1}.k_l \cdots k_n = \cdots + k_{l-1}2^0 + \frac{k_l}{2^1} + \frac{k_{l+1}}{2^2} + \cdots + \frac{k_n}{2^{n-l+1}} \tag{20}$$

2　基本的な計算結果

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{21}$$
$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{22}$$

10 進数と 2 進数の関係。$(k)_2 = k_1 k_2 \cdots k_n$ のとき

$$k = k_1 2^{n-1} + k_2 2^{n-2} + \cdots + k_n 2^0 \tag{23}$$

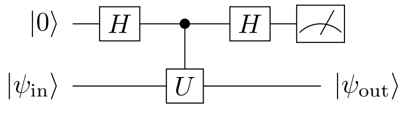
例えば、

$$9 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \tag{24}$$

3　基本的な量子アルゴリズム

3.1　アダマールテスト

U をユニタリー演算子とする。以下のゲート



を考える。control U gate を式で表すと、

$$|0\rangle\langle 0|\otimes I+|1\rangle\langle 1|\otimes U \tag{25}$$

であることに注意して、この回路を式で書くと、測定の直前の状態は

$$\begin{aligned}
&(H\otimes I)(|0\rangle\langle 0|\otimes I+|1\rangle\langle 1|\otimes U)(H\otimes I)|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (26)\\
=&(H\otimes I)(|0\rangle\langle 0|\otimes I+|1\rangle\langle 1|\otimes U)\frac{|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+|1\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{\sqrt{2}} && (27)\\
=&(H\otimes I)\left(\frac{|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{|1\rangle U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{\sqrt{2}}\right) && (28)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}(H\otimes I)\left(|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+|1\rangle U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right) && (29)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right) && (30)\\
=&\frac{|0\rangle+|1\rangle}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+\frac{|0\rangle-|1\rangle}{2}U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (31)\\
=&|0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+|1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (32)
\end{aligned}$$

となる。第一の qubit が $|0\rangle$ である確率は

$$\begin{aligned}
p_0&=\left|(|0\rangle\langle 0|\otimes I)\left(|0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+|1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right)\right|^2 && (33)\\
&=\left||0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right|^2 && (34)\\
&=\left(\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{I+U^\dagger}{2}\langle 0|\right)\left(|0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right) && (35)\\
&=\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{I+U+U^\dagger+U^\dagger U}{4}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (36)\\
&=\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{2I+U+U^\dagger}{4}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (37)\\
&=\frac{1+\mathrm{Re}\langle\psi_{\mathrm{in}}|U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{2} && (38)
\end{aligned}$$

となり、第一の qubit が $|1\rangle$ である確率は

$$\begin{aligned}
p_1&=\left|(|1\rangle\langle 1|\otimes I)\left(|0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+|1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right)\right|^2 && (39)\\
&=\left||1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right|^2 && (40)\\
&=\left(\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{I-U^\dagger}{2}\langle 1|\right)\left(|1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right) && (41)\\
&=\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{I-U-U^\dagger+U^\dagger U}{4}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (42)\\
&=\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{2I-U-U^\dagger}{4}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (43)\\
&=\frac{1-\mathrm{Re}\langle\psi_{\mathrm{in}}|U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{2} && (44)
\end{aligned}$$

となる。従って、この回路では演算子 U の $\langle\psi_{\rm in}|$ における期待値を推定することができる。

測定の結果、第一番目の qubit が $|0\rangle\,,|1\rangle$ だった場合、残りの状態はそれぞれ、

$$|\psi_{\rm out}\rangle = |\psi_0\rangle = \frac{I+U}{2}\,|\psi_{\rm in}\rangle\,,\quad |\psi_{\rm out}\rangle = |\psi_1\rangle = \frac{I-U}{2}\,|\psi_{\rm in}\rangle \tag{45}$$

となる。

3.2 量子フーリエ変換

x_j を 2^n 成分ベクトルとする。これは規格化 $\sum_{j=0}^{2^n-1}|x_j|^2=1$ されているとする。この離散フーリエ変換

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}} \tag{46}$$

を量子回路を用いて計算する方法について述べる。

整数 j に対してその 2 進数表記をラベルに持つような量子状態を考え、次のように書く。

$$|(j)_2\rangle = |i_1 i_2 \cdots\rangle \tag{47}$$

例えば

$$|(6)_2\rangle = |110\rangle = |1\rangle\otimes|1\rangle\otimes|0\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{48}$$

である。この約束のもと、次のような状態を考える

$$|x\rangle\rangle \equiv \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j\,|(j)_2\rangle\,,\quad |y\rangle\rangle \equiv \sum_{j=0}^{2^n-1} y_j\,|(j)_2\rangle \tag{49}$$

$|y\rangle\rangle$ を x_j で表すと

$$\begin{aligned}|y\rangle\rangle &= \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k\,|(k)_2\rangle & (50)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}}\,|(k)_2\rangle & (51)\\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}}\,|(k)_2\rangle\right) & (52)\end{aligned}$$

となる。もし、あるユニタリー変換で、

$$U\,|(j)_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}}\,|(k)_2\rangle \tag{53}$$

となるようなものがあったとすると、

$$U|x\rangle\rangle = |y\rangle\rangle \tag{54}$$

となる。$|y\rangle\rangle$ の係数を読み取ることで、フーリエ変換の結果を知ることができる。

以下で、そのような U を具体的に構成する。ビット数は n で固定する。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}} |(k)_2\rangle &= \sum_{k_1=0,1} \cdots \sum_{k_n=0,1} e^{i\frac{2\pi j(k_1 2^{n-1}+\cdots+k_0 2^0)}{2^n}} |k_1\cdots k_n\rangle && (55)\\
&= \sum_{k_1=0,1} \cdots \sum_{k_n=0,1} e^{i2\pi j(k_1 2^{-1}+\cdots+k_0 2^{-n})} |k_1\cdots k_n\rangle && (56)\\
&= \left(\sum_{k_1=0,1} e^{i2\pi jk_1 2^{-1}} |k_1\rangle\right) \otimes\cdots\otimes \left(\sum_{k_n=0,1} e^{i2\pi jk_n 2^{-n}} |k_n\rangle\right) && (57)\\
&= \left(|0\rangle + e^{i2\pi j2^{-1}} |1\rangle\right) \otimes\cdots\otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi j2^{-n}} |1\rangle\right) && (58)
\end{aligned}$$

ここで、$j2^{-l}$ という因子の 2 進数表記について考える。

$$(j)_2 = j_1 j_2 \cdots j_n \tag{59}$$

とすると、

$$j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \cdots + j_n 2^0 \tag{60}$$

であるから

$$j2^{-l} = j_1 2^{n-l-1} + j_2 2^{n-l-2} + \cdots + j_n 2^{-l} \tag{61}$$

である。よって、これを 2 進数表記すると

$$\begin{aligned}
(j2^{-1})_2 &= (\text{整数部分}).j_n && (62)\\
(j2^{-2})_2 &= (\text{整数部分}).j_{n-1}j_n && (63)\\
&\vdots && (64)\\
(j2^{-l})_2 &= (\text{整数部分}).j_{n-l+1}\cdots j_{n-1}j_n && (65)\\
&\vdots && (66)\\
(j2^{-n})_2 &= (\text{整数部分}).j_1\cdots j_{n-1}j_n && (67)\\
& && (68)
\end{aligned}$$

となる。また、一般に

$$\begin{aligned}
e^{i2\pi j_1\cdots j_{l-1}.j_l\cdots j_n} &= e^{i2\pi\left(\cdots+j_{l-2}2^1+j_{l-1}+\frac{j_l}{2^1}\cdots+\frac{j_n}{2^{n-l+1}}\right)} && (69)\\
&= \cdots e^{i2\pi j_{l-2}2^1} e^{i2\pi j_{l-1}} e^{i2\pi\frac{j_l}{2^1}} \cdots e^{i2\pi\frac{j_n}{2^{n-l+1}}} && (70)\\
&= e^{i2\pi\frac{j_l}{2^1}} \cdots e^{i2\pi\frac{j_n}{2^{n-l+1}}} && (71)\\
&= e^{i2\pi\left(\frac{j_l}{2^1}\cdots+\frac{j_n}{2^{n-l+1}}\right)} && (72)\\
&= e^{i2\pi 0.j_l\cdots j_n} && (73)
\end{aligned}$$

のように整数部分は効いてこないことに注意すると、

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}} |(k)_2\rangle = \left(|0\rangle + e^{i2\pi j2^{-1}}|1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi j2^{-n}}|1\rangle\right) \tag{74}$$

$$= \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_n}|1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1\cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{75}$$

を得る。よって、求めるべきユニタリー変換 U とは

$$U|(j)_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_n}|1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1\cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{76}$$

となるようなものである。

まず、Hadamard ゲートが状態に対して

$$H|j\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^j|1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{77}$$

と作用することを思い出す。ここで、2 進小数を導入すると

$$e^{i2\pi 0.0} = 1, \quad e^{i2\pi 0.1} = e^{\frac{i2\pi}{2}} = -1 \tag{78}$$

であるから、

$$H|j\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j}|1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{79}$$

と表すことができる。このことを用い、まず第一番目の bit に Hadamard ゲートを作用させると

$$(H \otimes I \otimes \cdots)|j_1 j_2 \cdots j_n\rangle = \left(\frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|j_2 \cdots j_n\rangle \tag{80}$$

となる。次に、2 番目の bit を制御ゲートとする位相ゲート R_2 を一番目のゲートに作用させる。3 番目以降の bit は関与しないから、1,2 番目の bit だけに注目して計算してみる。

$$(I \otimes |0\rangle\langle 0| + R_2 \otimes |1\rangle\langle 1|)\left(\frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|0\rangle = \frac{|00\rangle + e^{i2\pi 0.j_1}|10\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 0}|10\rangle}{\sqrt{2}} \tag{81}$$

$$(I \otimes |0\rangle\langle 0| + R_2 \otimes |1\rangle\langle 1|)\left(\frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle = \left(\frac{|0\rangle + e^{i\frac{2\pi}{2^2}}e^{i2\pi 0.j_1}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle = \frac{|01\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 1}|11\rangle}{\sqrt{2}} \tag{82}$$

この結果をまとめると、

$$(I \otimes |0\rangle\langle 0| + R_2 \otimes |1\rangle\langle 1|)\left(\frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1}|1\rangle}{\sqrt{2}}\right)|j_2\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 j_2}|1\rangle}{\sqrt{2}}|j_2\rangle \tag{83}$$

となる。まったく同様の計算により、

$$C_{n,1}(R_n)\cdots C_{3,1}(R_3)C_{2,1}(R_2)H_1|j_1 j_2 j_3 \cdots j_n\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 j_2 j_3 \cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}|j_2 j_3 \cdots j_n\rangle \tag{84}$$

となる。以下、残った $|j_2 j_3 \cdots j_n\rangle$ の部分に同様な操作を施す。

$$C_{n-1,2}(R_n)\cdots C_{3,2}(R_4)C_{2,2}(R_3)H_2|\bullet j_2 j_3 \cdots j_n\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_2 j_3 \cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}|j_3 \cdots j_n\rangle \tag{85}$$

$$C_{n-1,3}(R_n)\cdots C_{3,3}(R_5)C_{2,3}(R_4)H_3|\bullet\bullet j_3 \cdots j_n\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_3 \cdots j_n}|1\rangle}{\sqrt{2}}|j_4 \cdots j_n\rangle \tag{86}$$

$$\vdots \tag{87}$$

これらをすべて合わせると、

$$|j_1 j_2 \cdots j_n\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2^n}} \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1 \cdots j_n} |1\rangle\right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_n} |1\rangle\right) \tag{88}$$

を得る。最後に SWAP ゲートで状態の入れ替えを行えば完了である。

3.3 位相推定アルゴリズム

ユニタリー演算子 U が固有値 $e^{i\lambda_l}$ をもち、対応する固有状態が $|\psi_l\rangle$ であるとする。固有値の位相は $0 \le \lambda_l \le 2\pi$ として一般性を失わないから、$\lambda_l/2\pi$ は次のように 2 進展開できる:

$$\frac{\lambda_l}{2\pi} = \frac{j_1^{(l)}}{2^1} + \cdots + \frac{j_n^{(l)}}{2^n} \tag{89}$$

ただし、展開が無限次になる場合は、n 桁で打ち切って近似しているものと考える。これを次のように表す。

$$\lambda_l = (2\pi)0.j_1^{(l)} \cdots j_n^{(l)} \tag{90}$$

一般の量子状態 $|\psi\rangle$ を U の固有状態で展開したときの係数を c_l と表すことができる。

$$|\psi\rangle = \sum_l c_l |\psi_l\rangle \tag{91}$$

このとき、$|\psi\rangle$ と n 桁の補助量子ビット $|00\ldots0\rangle$ を

$$V|00\ldots0\rangle|\psi\rangle = \sum_l c_l \left|j_1^{(l)} \cdots j_n^{(l)}\right\rangle |\psi_l\rangle \tag{92}$$

のように変換するアルゴリズムを量子位相推定と呼ぶ。例えば、補助ビットが $|0\cdots0\rangle$ となる確率は

$$\left| |0\cdots0\rangle\langle0\cdots0| \otimes I \sum_l c_l \left|j_1^{(l)} \cdots j_n^{(l)}\right\rangle |\psi_l\rangle \right|^2 \tag{93}$$

$$= \left| \sum_l c_l |0\cdots0\rangle\langle0\cdots0| \left|j_1^{(l)} \cdots j_n^{(l)}\right\rangle |\psi_l\rangle \right|^2 \tag{94}$$

$$= \sum_{ll'} c_l c_{l'}^* \langle\psi_{l'}| \left\langle j_1^{(l')} \cdots j_n^{(l')}\right| |0\cdots0\rangle\langle0\cdots0| |0\cdots0\rangle\langle0\cdots0| \left|j_1^{(l)} \cdots j_n^{(l)}\right\rangle |\psi_l\rangle \tag{95}$$

$$= \sum_{ll'} c_l c_{l'}^* \delta_{ll'} \left\langle j_1^{(l')} \cdots j_n^{(l')}\right| |0\cdots0\rangle\langle0\cdots0| \left|j_1^{(l)} \cdots j_n^{(l)}\right\rangle \tag{96}$$

$$= \sum_l |c_l|^2 \left\langle j_1^{(l)} \cdots j_n^{(l)}\right| |0\cdots0\rangle\langle0\cdots0| \left|j_1^{(l)} \cdots j_n^{(l)}\right\rangle \tag{97}$$

$$= \sum_l |c_l|^2 \left| \langle0\cdots0| \left|j_1^{(l)} \cdots j_n^{(l)}\right\rangle \right|^2 \tag{98}$$

まず準備として、ひとつの補助ビットと U の固有状態のテンソル積状態を考え、それに Hadamard ゲートと制御 U^{2^k} ゲートを作用させる。

$$C_1(U_2^{2^k})H_1|0\rangle|\psi_l\rangle = C_1(U_2^{2^k})\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}|\psi_l\rangle \tag{99}$$

$$= \frac{|0\rangle}{\sqrt{2}}|\psi_l\rangle + \frac{|1\rangle}{\sqrt{2}}U^{2^k}|\psi_l\rangle \tag{100}$$

$$= \frac{|0\rangle + e^{2^k i\lambda_l}|1\rangle}{\sqrt{2}}|\psi_l\rangle \tag{101}$$

ここで、

$$2^0\lambda_l = (2\pi)2^0 0.j_1^{(l)}\cdots j_n^{(l)} = (2\pi)0.j_2^{(l)}\cdots j_n^{(l)} \tag{102}$$

$$2^1\lambda_l = (2\pi)2^1 0.j_1^{(l)}\cdots j_n^{(l)} = (2\pi)j_1^{(l)}.j_2^{(l)}\cdots j_n^{(l)} \tag{103}$$

$$2^2\lambda_l = (2\pi)2^2 0.j_1^{(l)}\cdots j_n^{(l)} = (2\pi)j_1^{(l)}j_2^{(l)}.j_3^{(l)}\cdots j_n^{(l)} \tag{104}$$

$$\vdots \tag{105}$$

$$2^k\lambda_l = (2\pi)2^k 0.j_1^{(l)}\cdots j_n^{(l)} = (2\pi)j_1^{(l)}\cdots j_k^{(l)}.j_{k+1}^{(l)}\cdots j_n^{(l)} \tag{106}$$

であるから、

$$C_1(U_2^{2^k})H_1\left|0\right\rangle\left|\psi_l\right\rangle = \frac{\left|0\right\rangle + e^{2^k i\lambda_l}\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}}\left|\psi_l\right\rangle \tag{107}$$

$$= \frac{\left|0\right\rangle + e^{(2\pi i)j_1^{(l)}\cdots j_k^{(l)}.j_{k+1}^{(l)}\cdots j_n^{(l)}}\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}}\left|\psi_l\right\rangle \tag{108}$$

$$= \frac{\left|0\right\rangle + e^{(2\pi i)0.j_{k+1}^{(l)}\cdots j_n^{(l)}}\left|1\right\rangle}{\sqrt{2}}\left|\psi_l\right\rangle \tag{109}$$

を得る。この結果を用いると、

$$\prod_{k=1}^{n} C_k(U_2^{2^{k-1}})H_k\left|00\cdots 0\right\rangle\left|\psi_l\right\rangle \tag{110}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(\left|0\right\rangle + e^{(2\pi i)0.j_1^{(l)}\cdots j_n^{(l)}}\left|1\right\rangle\right)\left(\left|0\right\rangle + e^{(2\pi i)0.j_2^{(l)}\cdots j_n^{(l)}}\left|1\right\rangle\right)\cdots\left(\left|0\right\rangle + e^{(2\pi i)0.j_n^{(l)}}\left|1\right\rangle\right)\left|\psi_l\right\rangle \tag{111}$$

となるが、これは $\left|j_1 j_2\cdots j_n\right\rangle$ に量子フーリエ変換を施してできる状態に他ならない。従って、

$$\mathrm{QFT}^\dagger\prod_{k=1}^{n} C_k(U_2^{2^{k-1}})H_k\left|00\cdots 0\right\rangle\left|\psi_l\right\rangle = \left|j_1^{(l)}j_2^{(l)}\cdots j_n^{(l)}\right\rangle\left|\psi_l\right\rangle \tag{112}$$

である。よって、$V = \mathrm{QFT}^\dagger\prod_{k=1}^{n} C_k(U_2^{2^{k-1}})H_k$ とすれば良いことが分かった。

4 Summary