量子計算

筒井翔一朗

2021 年 10 月 26 日

目次

1 Notation

Qubit

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

Kronecker 積

$$A \otimes B \equiv \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1N}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}B & \dots & a_{NN}B \end{pmatrix} \tag{2}$$

Hadamard ゲート

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

整数 k の 2 進数表記

$$(k)_2 = i_1 i_2 \cdots, \quad i_n = 0, 1 \tag{4}$$

例

$$(0)_2 = 0 \tag{5}$$
$$(1)_2 = 1 \tag{6}$$
$$(2)_2 = 10 \tag{7}$$
$$(3)_2 = 11 \tag{8}$$
$$(4)_2 = 100 \tag{9}$$
$$(5)_2 = 101 \tag{10}$$
$$(6)_2 = 110 \tag{11}$$
$$(7)_2 = 111 \tag{12}$$
$$(8)_2 = 1000 \tag{13}$$
$$(9)_2 = 1001 \tag{14}$$
$$(10)_2 = 1010 \tag{15}$$
$$(11)_2 = 1011 \tag{16}$$
$$(12)_2 = 1100 \tag{17}$$
$$(13)_2 = 1101 \tag{18}$$

小数を含む 2 進数表記

$$(k)_2 = k_1 \cdots k_{l-1}.k_l \cdots k_n = \cdots + k_{l-1}2^0 + \frac{k_l}{2^1} + \frac{k_{l+1}}{2^2} + \cdots + \frac{k_n}{2^{n-l+1}} \tag{19}$$

2　基本的な計算結果

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{20}$$
$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{21}$$

10 進数と 2 進数の関係。$(k)_2 = k_1k_2 \cdots k_n$ のとき

$$k = k_1 2^{n-1} + k_2 2^{n-2} + \cdots + k_n 2^0 \tag{22}$$

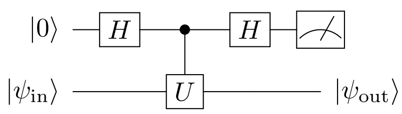
例えば、

$$9 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \tag{23}$$

3　基本的な量子アルゴリズム

3.1　アダマールテスト

U をユニタリー演算子とする。以下のゲート



を考える。control U gate を式で表すと、

$$|0\rangle\langle 0|\otimes I+|1\rangle\langle 1|\otimes U \tag{24}$$

であることに注意して、この回路を式で書くと、測定の直前の状態は

$$\begin{aligned}
&(H\otimes I)(|0\rangle\langle 0|\otimes I+|1\rangle\langle 1|\otimes U)(H\otimes I)|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle &(25)\\
=&(H\otimes I)(|0\rangle\langle 0|\otimes I+|1\rangle\langle 1|\otimes U)\frac{|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+|1\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{\sqrt{2}} &(26)\\
=&(H\otimes I)\left(\frac{|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{\sqrt{2}}+\frac{|1\rangle U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{\sqrt{2}}\right) &(27)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}(H\otimes I)\left(|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+|1\rangle U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right) &(28)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right) &(29)\\
=&\frac{|0\rangle+|1\rangle}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+\frac{|0\rangle-|1\rangle}{2}U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle &(30)\\
=&|0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+|1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle &(31)
\end{aligned}$$

となる。第一の qubit が $|0\rangle$ である確率は

$$\begin{aligned}
p_0&=\left|(|0\rangle\langle 0|\otimes I)\left(|0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+|1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right)\right|^2 &(32)\\
&=\left||0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right|^2 &(33)\\
&=\left(\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{I+U^\dagger}{2}\langle 0|\right)\left(|0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right) &(34)\\
&=\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{I+U+U^\dagger+U^\dagger U}{4}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle &(35)\\
&=\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{2I+U+U^\dagger}{4}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle &(36)\\
&=\frac{1+\mathrm{Re}\langle\psi_{\mathrm{in}}|U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{2} &(37)
\end{aligned}$$

となり、第一の qubit が $|1\rangle$ である確率は

$$\begin{aligned}
p_1&=\left|(|1\rangle\langle 1|\otimes I)\left(|0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle+|1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right)\right|^2 &(38)\\
&=\left||1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right|^2 &(39)\\
&=\left(\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{I-U^\dagger}{2}\langle 1|\right)\left(|1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right) &(40)\\
&=\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{I-U-U^\dagger+U^\dagger U}{4}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle &(41)\\
&=\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{2I-U-U^\dagger}{4}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle &(42)\\
&=\frac{1-\mathrm{Re}\langle\psi_{\mathrm{in}}|U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{2} &(43)
\end{aligned}$$

となる。従って、この回路では演算子 U の $\langle\psi_{\rm in}|$ における期待値を推定することができる。
　測定の結果、第一番目の qubit が $|0\rangle, |1\rangle$ だった場合、残りの状態はそれぞれ、

$$|\psi_{\rm out}\rangle = |\psi_0\rangle = \frac{I+U}{2}|\psi_{\rm in}\rangle, \quad |\psi_{\rm out}\rangle = |\psi_1\rangle = \frac{I-U}{2}|\psi_{\rm in}\rangle \tag{44}$$

となる。

3.2　量子フーリエ変換

　x_j を 2^n 成分ベクトルとする。これは規格化 $\sum_{j=0}^{2^n-1}|x_j|^2 = 1$ されているとする。この離散フーリエ変換

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}} \tag{45}$$

を量子回路を用いて計算する方法について述べる。
　整数 j に対してその 2 進数表記をラベルに持つような量子状態を考え、次のように書く。

$$|(j)_2\rangle = |i_1 i_2\cdots\rangle \tag{46}$$

例えば

$$|(6)_2\rangle = |110\rangle = |1\rangle\otimes|1\rangle\otimes|0\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{47}$$

である。この約束のもと、次のような状態を考える

$$|x\rangle\rangle \equiv \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j|(j)_2\rangle, \quad |y\rangle\rangle \equiv \sum_{j=0}^{2^n-1} y_j|(j)_2\rangle \tag{48}$$

$|y\rangle\rangle$ を x_j で表すと

$$\begin{aligned}|y\rangle\rangle &= \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k|(k)_2\rangle & (49)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{j=0}^{2^n-1}\sum_{k=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}}|(k)_2\rangle & (50)\\ &= \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j\left(\frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}}|(k)_2\rangle\right) & (51)\end{aligned}$$

となる。もし、あるユニタリー変換で、

$$U|(j)_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}}|(k)_2\rangle \tag{52}$$

となるようなものがあったとすると、

$$U\left|x\right\rangle\rangle = \left|y\right\rangle\rangle \tag{53}$$

となる。$\left|y\right\rangle\rangle$ の係数を読み取ることで、フーリエ変換の結果を知ることができる。

以下で、そのような U を具体的に構成する。ビット数は n で固定する。

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}}\left|(k)_2\right\rangle &= \sum_{k_1=0,1}\cdots\sum_{k_n=0,1} e^{i\frac{2\pi j(k_1 2^{n-1}+\cdots+k_0 2^0)}{2^n}}\left|k_1\cdots k_n\right\rangle && (54)\\
&= \sum_{k_1=0,1}\cdots\sum_{k_n=0,1} e^{i2\pi j(k_1 2^{-1}+\cdots+k_0 2^{-n})}\left|k_1\cdots k_n\right\rangle && (55)\\
&= \left(\sum_{k_1=0,1} e^{i2\pi jk_1 2^{-1}}\left|k_1\right\rangle\right)\otimes\cdots\otimes\left(\sum_{k_n=0,1} e^{i2\pi jk_n 2^{-n}}\left|k_n\right\rangle\right) && (56)\\
&= \Big(\left|0\right\rangle + e^{i2\pi j2^{-1}}\left|1\right\rangle\Big)\otimes\cdots\otimes\Big(\left|0\right\rangle + e^{i2\pi j2^{-n}}\left|1\right\rangle\Big) && (57)
\end{aligned}$$

ここで、$j2^{-l}$ という因子の 2 進数表記について考える。

$$(j)_2 = j_1 j_2\cdots j_n \tag{58}$$

とすると、

$$j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \cdots + j_n 2^0 \tag{59}$$

であるから

$$j2^{-l} = j_1 2^{n-l-1} + j_2 2^{n-l-2} + \cdots + j_n 2^{-l} \tag{60}$$

である。よって、これを 2 進数表記すると

$$\begin{aligned}
(j2^{-1})_2 &= (\text{整数部分}).j_n && (61)\\
(j2^{-2})_2 &= (\text{整数部分}).j_{n-1}j_n && (62)\\
&\vdots && (63)\\
(j2^{-l})_2 &= (\text{整数部分}).j_{n-l+1}\cdots j_{n-1}j_n && (64)\\
&\vdots && (65)\\
(j2^{-n})_2 &= (\text{整数部分}).j_1\cdots j_{n-1}j_n && (66)\\
& && (67)
\end{aligned}$$

となる。また、一般に

$$\begin{aligned}
e^{i2\pi j_1\cdots j_{l-1}.j_l\cdots j_n} &= e^{i2\pi\left(\cdots+j_{l-2}2^1+j_{l-1}+\frac{j_l}{2^1}\cdots+\frac{j_n}{2^{n-l+1}}\right)} && (68)\\
&= \cdots e^{i2\pi j_{l-2}2^1} e^{i2\pi j_{l-1}} e^{i2\pi\frac{j_l}{2^1}}\cdots e^{i2\pi\frac{j_n}{2^{n-l+1}}} && (69)\\
&= e^{i2\pi\frac{j_l}{2^1}}\cdots e^{i2\pi\frac{j_n}{2^{n-l+1}}} && (70)\\
&= e^{i2\pi\left(\frac{j_l}{2^1}\cdots+\frac{j_n}{2^{n-l+1}}\right)} && (71)\\
&= e^{i2\pi 0.j_l\cdots j_n} && (72)
\end{aligned}$$

のように整数部分は効いてこないことに注意すると、

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}} |(k)_2\rangle = \Big(|0\rangle + e^{i2\pi j2^{-1}} |1\rangle\Big) \otimes \cdots \otimes \Big(|0\rangle + e^{i2\pi j2^{-n}} |1\rangle\Big) \tag{73}$$

$$= \big(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_n} |1\rangle\big) \otimes \cdots \otimes \big(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1\cdots j_n} |1\rangle\big) \tag{74}$$

を得る。よって、求めるべきユニタリー変換 U とは

$$U |(j)_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \big(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_n} |1\rangle\big) \otimes \cdots \otimes \big(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1\cdots j_n} |1\rangle\big) \tag{75}$$

となるようなものである。

まず、Hadamard ゲートが状態に対して

$$H |j\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^j |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{76}$$

と作用することを思い出す。ここで、2 進小数を導入すると

$$e^{i2\pi 0.0} = 1, \quad e^{i2\pi 0.1} = e^{\frac{i2\pi}{2}} = -1 \tag{77}$$

であるから、

$$H |j\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j} |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{78}$$

と表すことができる。

4 Summary