量子計算ミニマム

筒井翔一朗

2022 年 1 月 3 日

目次

1 Notation

Qubit

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

Kronecker 積

$$A \otimes B \equiv \begin{pmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1N}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1}B & \dots & a_{NN}B \end{pmatrix} \tag{2}$$

Pauli ゲート

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Hadamard ゲート

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

整数 k の 2 進数表記

$$(k)_2 = i_1 i_2 \cdots, \quad i_n = 0, 1 \tag{5}$$

例

$$(0)_2 = 0 \tag{6}$$
$$(1)_2 = 1 \tag{7}$$
$$(2)_2 = 10 \tag{8}$$
$$(3)_2 = 11 \tag{9}$$
$$(4)_2 = 100 \tag{10}$$
$$(5)_2 = 101 \tag{11}$$
$$(6)_2 = 110 \tag{12}$$
$$(7)_2 = 111 \tag{13}$$
$$(8)_2 = 1000 \tag{14}$$
$$(9)_2 = 1001 \tag{15}$$
$$(10)_2 = 1010 \tag{16}$$
$$(11)_2 = 1011 \tag{17}$$
$$(12)_2 = 1100 \tag{18}$$
$$(13)_2 = 1101 \tag{19}$$

小数を含む 2 進数表記

$$(k)_2 = k_1 \cdots k_{l-1}.k_l \cdots k_n = \cdots + k_{l-1}2^0 + \frac{k_l}{2^1} + \frac{k_{l+1}}{2^2} + \cdots + \frac{k_n}{2^{n-l+1}} \tag{20}$$

2 基本的な計算結果

X ゲートは

$$X|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \tag{21}$$
$$X|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \tag{22}$$

のように 0,1 を反転させるので、NOT の役割をする。

アダマールゲートによる演算。

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{23}$$
$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{24}$$

量子状態と測定確率。規格化された状態

$$|\psi\rangle = \frac{\alpha}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\alpha|^2}} |0\rangle + \frac{\beta}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\alpha|^2}} |1\rangle \tag{25}$$

があったとする。この状態を測定して $|0\rangle$ が観測される確率は

$$P_0 = |\, |0\rangle \langle 0| \, |\psi\rangle \, |^2 = |\, \langle 0| \, |\psi\rangle \, |^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \tag{26}$$

である。

10 進数と 2 進数の関係。$(k)_2 = k_1 k_2 \cdots k_n$ のとき

$$k = k_1 2^{n-1} + k_2 2^{n-2} + \cdots + k_n 2^0 \tag{27}$$

例えば、

$$9 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \tag{28}$$

3　測定について

ここでは有限次元の Hilbert 空間のみ考える。半正定値行列のセット $\{F_i\}$ で

$$\sum_i F_i = I \tag{29}$$

を満たすようなものを positive operator-valued measure (POVM) と呼ぶ。量子状態 ρ を測定して、出力 i が得られる確率は

$$\mathrm{tr}(\rho F_i) \tag{30}$$

で与えられる。

例として、純粋状態

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| \,, \quad |\psi\rangle = \frac{\alpha}{|\alpha|^2 + |\alpha|^2} |0\rangle + \frac{\beta}{|\alpha|^2 + |\alpha|^2} |1\rangle \tag{31}$$

と、POVM

$$F_0 = \frac{1+Z}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \frac{1-Z}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

を考える。測定によって出力 0 が得られる確率は

$$\mathrm{tr}(\rho F_0) = \mathrm{tr}(|\psi\rangle \langle\psi| F_0) = \langle\psi| F_0 |\psi\rangle = \frac{\alpha^2}{|\alpha|^2 + |\alpha|^2} \tag{33}$$

出力 1 が得られる確率は

$$\mathrm{tr}(\rho F_1) = \mathrm{tr}(|\psi\rangle \langle\psi| F_1) = \langle\psi| F_1 |\psi\rangle = \frac{\beta^2}{|\alpha|^2 + |\alpha|^2} \tag{34}$$

である。これはいわゆる Born の規則である。

4　基本的な量子アルゴリズム

4.1　アダマールテスト

U をユニタリー演算子とする。以下のゲートを考える。control U gate を式で表すと、

$$|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U \tag{35}$$

であることに注意して、この回路を式で書くと、測定の直前の状態は

$$
\begin{aligned}
&(H \otimes I)(|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U)(H \otimes I)|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (36)\\
=&(H \otimes I)(|0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes U)\frac{|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle + |1\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{\sqrt{2}} && (37)\\
=&(H \otimes I)\left(\frac{|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|1\rangle U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{\sqrt{2}}\right) && (38)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}(H \otimes I)\left(|0\rangle|\psi_{\mathrm{in}}\rangle + |1\rangle U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right) && (39)\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right) && (40)\\
=&\frac{|0\rangle + |1\rangle}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{2}U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (41)\\
=&|0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle + |1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (42)
\end{aligned}
$$

となる。第一の qubit が $|0\rangle$ である確率は

$$
\begin{aligned}
p_0 &= \left|(|0\rangle\langle 0| \otimes I)\left(|0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle + |1\rangle\frac{I-U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right)\right|^2 && (43)\\
&= \left||0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right|^2 && (44)\\
&= \left(\langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{I+U^\dagger}{2}\langle 0|\right)\left(|0\rangle\frac{I+U}{2}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle\right) && (45)\\
&= \langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{I+U+U^\dagger+U^\dagger U}{4}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (46)\\
&= \langle\psi_{\mathrm{in}}|\frac{2I+U+U^\dagger}{4}|\psi_{\mathrm{in}}\rangle && (47)\\
&= \frac{1+\mathrm{Re}\langle\psi_{\mathrm{in}}|U|\psi_{\mathrm{in}}\rangle}{2} && (48)
\end{aligned}
$$

となり、第一の qubit が $|1\rangle$ である確率は

$$p_1 = \left| (|1\rangle\langle 1| \otimes I) \left(|0\rangle \frac{I+U}{2} |\psi_{\rm in}\rangle + |1\rangle \frac{I-U}{2} |\psi_{\rm in}\rangle \right) \right|^2 \tag{49}$$

$$= \left| |1\rangle \frac{I-U}{2} |\psi_{\rm in}\rangle \right|^2 \tag{50}$$

$$= \left(\langle\psi_{\rm in}| \frac{I-U^\dagger}{2} \langle 1| \right) \left(|1\rangle \frac{I-U}{2} |\psi_{\rm in}\rangle \right) \tag{51}$$

$$= \langle\psi_{\rm in}| \frac{I-U-U^\dagger+U^\dagger U}{4} |\psi_{\rm in}\rangle \tag{52}$$

$$= \langle\psi_{\rm in}| \frac{2I-U-U^\dagger}{4} |\psi_{\rm in}\rangle \tag{53}$$

$$= \frac{1-\mathrm{Re}\,\langle\psi_{\rm in}| U |\psi_{\rm in}\rangle}{2} \tag{54}$$

となる。従って、この回路では演算子 U の $\langle\psi_{\rm in}|$ における期待値を推定することができる。

測定の結果、第一番目の qubit が $|0\rangle, |1\rangle$ だった場合、残りの状態はそれぞれ、

$$|\psi_{\rm out}\rangle = |\psi_0\rangle = \frac{I+U}{2} |\psi_{\rm in}\rangle, \quad |\psi_{\rm out}\rangle = |\psi_1\rangle = \frac{I-U}{2} |\psi_{\rm in}\rangle \tag{55}$$

となる。

4.2 量子フーリエ変換

x_j を 2^n 成分ベクトルとする。これは規格化 $\sum_{j=0}^{2^n-1} |x_j|^2 = 1$ されているとする。この離散フーリエ変換

$$y_k = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}} \tag{56}$$

を量子回路を用いて計算する方法について述べる。

整数 j に対してその 2 進数表記をラベルに持つような量子状態を考え、次のように書く。

$$|(j)_2\rangle = |i_1 i_2 \cdots\rangle \tag{57}$$

例えば

$$|(6)_2\rangle = |110\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

である。この約束のもと、次のような状態を考える

$$|x\rangle\rangle \equiv \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j |(j)_2\rangle, \quad |y\rangle\rangle \equiv \sum_{j=0}^{2^n-1} y_j |(j)_2\rangle \tag{59}$$

$|y\rangle\rangle$ を x_j で表すと

$$|y\rangle\rangle = \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k |(k)_2\rangle \tag{60}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} x_j e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}} |(k)_2\rangle \tag{61}$$

$$= \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j \left(\frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}} |(k)_2\rangle \right) \tag{62}$$

となる。もし、あるユニタリー変換で、

$$U |(j)_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}} |(k)_2\rangle \tag{63}$$

となるようなものがあったとすると、

$$U |x\rangle\rangle = |y\rangle\rangle \tag{64}$$

となる。$|y\rangle\rangle$ の係数を読み取ることで、フーリエ変換の結果を知ることができる。

以下で、そのような U を具体的に構成する。ビット数は n で固定する。

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}} |(k)_2\rangle = \sum_{k_1=0,1} \cdots \sum_{k_n=0,1} e^{i\frac{2\pi j(k_1 2^{n-1} + \cdots + k_0 2^0)}{2^n}} |k_1 \cdots k_n\rangle \tag{65}$$

$$= \sum_{k_1=0,1} \cdots \sum_{k_n=0,1} e^{i2\pi j(k_1 2^{-1} + \cdots + k_0 2^{-n})} |k_1 \cdots k_n\rangle \tag{66}$$

$$= \left(\sum_{k_1=0,1} e^{i2\pi j k_1 2^{-1}} |k_1\rangle \right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{k_n=0,1} e^{i2\pi j k_n 2^{-n}} |k_n\rangle \right) \tag{67}$$

$$= \left(|0\rangle + e^{i2\pi j 2^{-1}} |1\rangle \right) \otimes \cdots \otimes \left(|0\rangle + e^{i2\pi j 2^{-n}} |1\rangle \right) \tag{68}$$

ここで、$j2^{-l}$ という因子の 2 進数表記について考える。

$$(j)_2 = j_1 j_2 \cdots j_n \tag{69}$$

とすると、

$$j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \cdots + j_n 2^0 \tag{70}$$

であるから

$$j2^{-l} = j_1 2^{n-l-1} + j_2 2^{n-l-2} + \cdots + j_n 2^{-l} \tag{71}$$

である。よって、これを 2 進数表記すると

$$(j2^{-1})_2 = (\text{整数部分}).j_n \tag{72}$$
$$(j2^{-2})_2 = (\text{整数部分}).j_{n-1}j_n \tag{73}$$
$$\vdots \tag{74}$$
$$(j2^{-l})_2 = (\text{整数部分}).j_{n-l+1}\cdots j_{n-1}j_n \tag{75}$$
$$\vdots \tag{76}$$
$$(j2^{-n})_2 = (\text{整数部分}).j_1\cdots j_{n-1}j_n \tag{77}$$
$$\tag{78}$$

となる。また、一般に

$$e^{i2\pi j_1\cdots j_{l-1}.j_l\cdots j_n} = e^{i2\pi\left(\cdots+j_{l-2}2^1+j_{l-1}+\frac{j_l}{2^1}\cdots+\frac{j_n}{2^{n-l+1}}\right)} \tag{79}$$
$$= \cdots e^{i2\pi j_{l-2}2^1}e^{i2\pi j_{l-1}}e^{i2\pi\frac{j_l}{2^1}}\cdots e^{i2\pi\frac{j_n}{2^{n-l+1}}} \tag{80}$$
$$= e^{i2\pi\frac{j_l}{2^1}}\cdots e^{i2\pi\frac{j_n}{2^{n-l+1}}} \tag{81}$$
$$= e^{i2\pi\left(\frac{j_l}{2^1}\cdots+\frac{j_n}{2^{n-l+1}}\right)} \tag{82}$$
$$= e^{i2\pi 0.j_l\cdots j_n} \tag{83}$$

のように整数部分は効いてこないことに注意すると、

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} e^{i\frac{2\pi jk}{2^n}}\left|(k)_2\right\rangle = \left(|0\rangle + e^{i2\pi j2^{-1}}|1\rangle\right)\otimes\cdots\otimes\left(|0\rangle + e^{i2\pi j2^{-n}}|1\rangle\right) \tag{84}$$
$$= \left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_n}|1\rangle\right)\otimes\cdots\otimes\left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1\cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{85}$$

を得る。よって、求めるべきユニタリー変換 U とは

$$U\left|(j)_2\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_n}|1\rangle\right)\otimes\cdots\otimes\left(|0\rangle + e^{i2\pi 0.j_1\cdots j_n}|1\rangle\right) \tag{86}$$

となるようなものである。

まず、Hadamard ゲートが状態に対して

$$H|j\rangle = \frac{|0\rangle + (-1)^j|1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{87}$$

と作用することを思い出す。ここで、2 進小数を導入すると

$$e^{i2\pi 0.0} = 1, \quad e^{i2\pi 0.1} = e^{\frac{i2\pi}{2}} = -1 \tag{88}$$

であるから、

$$H|j\rangle = \frac{|0\rangle + e^{i2\pi 0.j}|1\rangle}{\sqrt{2}} \tag{89}$$

と表すことができる。

4.3 量子位相推定

4.4 Shor の素因数分解アルゴリズム

5 誤り訂正

5.1 線形符号による古典誤り訂正

最も素朴な誤り訂正の方法は多数決である。例えば、0 というデータがあったとき、これを 000 という風に冗長化したデータを作っておけば、何らかの要因によってビットが部分的に反転してしまい 010 になったとしても、反転前のデータは 000 であろうと推定できる。

k ビットの情報 v（成分が 0 or 1 の k 成分ベクトル）があったとし、これを $n = dk$ ビットのベクトルに冗長化することを考える。冗長化後のベクトルを v', v から v' への変換を G とする。

$$v' = Gv \tag{90}$$

G は $n \times k$ 行列である。この操作を符号化、G を生成行列と呼ぶ。G として冒頭の多数決方式を採用したものを線形符号と呼ぶ。例えば、

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{91}$$

と取れば、

$$v' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{92}$$

となる。

次に、エラーが起きたかどうかを判定する方法を考える。n ビットのベクトルのうち、Gv の形に表されるもの全体の集合を W とする。W の元を符号語と呼ぶ。例えば $(k = 2, d = 3)$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{93}$$

は符号語だが、

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{94}$$

ではない。

各列ベクトルが独立で、$H_c G \equiv 0 \pmod 2$ を満たすような $(n-k) \times n$ 行列 H_c があったとする。これを検査行列と呼ぶ。任意の符号語 w について

$$H_c w = H_c G v = 0 \tag{95}$$

が成り立つ。また逆に、$H_c w = 0$ ならば、w は符号語であることも示せるらしい。このようにして、符号語の 2 通りの特徴付けを得た。

- G を用いた見方: ベクトルが適切に水増しされている。
- H_c を用いた見方: ブロック内の隣接するビットが等しい。

$w \in W$ のときに限りゼロになるようなベクトル $s = H_c w$ を w のシンドローム、その成分をシンドローム値と呼ぶ。ひとつでも 0 でないシンドローム値があれば、w にはエラーが起きていることになる。シンドローム値がすべて 0 のときは、w にはエラーがないか、エラー自身が $H_c e = 0$ を満たしているかのどちらかである。

（例 $k = 3, n = 9$）線形符号 G に対する検査行列は以下を取ればよい。

$$H_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{96}$$

実際

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{97}$$

となり OK である。符号語 w に対して $H_c w$ を計算すると、

$$H_c w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{98}$$

となる。もしエラーが混入していると、

$$H_c w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{99}$$

となる。

5.2 量子誤り訂正

現在知られている量子誤り訂正は、線形符号を量子計算版とでもいうべきものである。具体例から考える。1 ビットの情報を 3 ビットに冗長化することを考える。ここでは、符号化前の量子状態もあらかじめ 3bit で用意しておき、情報は 1bit 目に格納しておくことにする。よって符号化 G として

$$|000\rangle \to |000\rangle \tag{100}$$
$$|100\rangle \to |111\rangle \tag{101}$$

となるようなものを用意できれば良い。これは CNOT ゲート

$$\Lambda_{1,2}(X) = P_0 \otimes I \otimes I + P_1 \otimes X \otimes I \tag{102}$$
$$\Lambda_{1,3}(X) = P_0 \otimes I \otimes I + P_1 \otimes I \otimes X \tag{103}$$

で実現できる。実際、

$$\Lambda_{1,2}(X)\Lambda_{1,3}(X) |000\rangle = |000\rangle \tag{104}$$
$$\Lambda_{1,2}(X)\Lambda_{1,3}(X) |100\rangle = |111\rangle \tag{105}$$

となる。

次にシンドロームを調べる方法を考える。

$$M_0^{(1)} = \frac{I + Z_1 Z_2}{2}, \quad M_1^{(1)} = \frac{I - Z_1 Z_2}{2} \tag{106}$$

という 2 つの演算子を考えると、これらは POVM をなし、

$$M_0^{(1)}|000\rangle = \frac{1+1}{2}|000\rangle = |000\rangle \tag{107}$$
$$M_0^{(1)}|100\rangle = \frac{1-1}{2}|100\rangle = 0 \tag{108}$$
$$M_0^{(1)}|010\rangle = \frac{1-1}{2}|010\rangle = 0 \tag{109}$$
$$M_0^{(1)}|110\rangle = \frac{1+1}{2}|110\rangle = |110\rangle \tag{110}$$

$$M_1^{(1)}|000\rangle = \frac{1-1}{2}|000\rangle = 0 \tag{111}$$
$$M_1^{(1)}|100\rangle = \frac{1+1}{2}|100\rangle = |100\rangle \tag{112}$$
$$M_1^{(1)}|010\rangle = \frac{1+1}{2}|010\rangle = |010\rangle \tag{113}$$
$$M_1^{(1)}|110\rangle = \frac{1-1}{2}|110\rangle = 0 \tag{114}$$

より、

$$\mathrm{tr}(|ij0\rangle\langle ij0| M_0^1) = \delta_{ij}, \tag{115}$$
$$\mathrm{tr}(|ij0\rangle\langle ij0| M_1^1) = 1 - \delta_{ij} \tag{116}$$

となるから、M_1^1 の期待値が、1,2 番のビットに関するシンドローム値を与えることが分かる。全く同様にして、

$$M_0^{(2)} = \frac{I + Z_2 Z_3}{2}, \quad M_1^{(2)} = \frac{I - Z_2 Z_3}{2} \tag{117}$$

も測定すれば、すべてのシンドローム値が得られる。古典的な誤り訂正の場合、シンドローム値は 0 か 1 であったが、量子計算の場合はそれ以外の中途半端な値を取りうる。例えば、$|\psi\rangle = (|000\rangle + |010\rangle)/\sqrt{2}$ のとき、

$$M_0^{(1)}|\psi\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |010\rangle) = \frac{|000\rangle}{\sqrt{2}} \tag{118}$$

より、

$$\mathrm{tr}(|\psi\rangle\langle\psi| M_0^{(1)}) = \frac{1}{2} \tag{119}$$

となる。

以下では簡単のため、このような位相を変化させるエラーはなく、ビット反転を引き起こすエラーのみを考える。そのようなエラーを引き起こす操作は

$$E = X_1^{e_1} X_2^{e_1} X_3^{e_1} \tag{120}$$

と書ける。ただし、$e_1, e_2, e_3 = 0, 1$ である。仮に、$|000\rangle$ がオリジナルのデータで、これに、$e_1 = 1, e_2 = e_3 = 0$ のエラーが乗ったとすると、

$$E|000\rangle = X_1|000\rangle = |100\rangle \tag{121}$$

となる。この状態のシンドローム値を完全に調べると、1 番目のビットに反転があることが分かるから、状態に再度 X_1 を作用させればもとの状態を復元することができる。

$$R\,|100\rangle = X_1\,|100\rangle = |000\rangle \tag{122}$$

これでエラー訂正が完了した。

5.3 スタビライザー符号

6 Summary