Семинар №1
Метод конечных разностей (МКР)

Конечно-разностные аппроксимации производных (конечные разности) - способ приближенного вычисления частных производных

Выражения для конечных разностей можно получить из разложения функции в ряд Тейлора:

$$f(x+\triangle x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x} \triangle x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \triangle x^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \triangle x^3 + ...$$

Короткая запись с использованием индексов точек:

$$f_{i+1} = f_i + \frac{\partial f_i}{\partial x} \triangle x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \triangle x^2 + \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} \triangle x^3 + ... \qquad (1)$$

Отсюда:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} = \frac{f_{i+1} - f_i}{\triangle x} + \Theta(x),$$

где $\Theta(x)$ - остаток.

Отбрасывая остаток можно получить правую разность:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\triangle x}$$

Погрешность такой аппроксимации определяется старшим членом в отброшенном остатке и в данном случае этот член содержит $\triangle x$ в первой степени.

Аналогичным образом, разлагая в ряд функцию $f(x - \triangle x)$ можно получить:

$$f_{i-1} = f_i - \frac{\partial f_i}{\partial x} \triangle x + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \triangle x^2 - \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3} \triangle x^3 + ... \qquad (2)$$

Получим новую аппроксимацию первой производной:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x} \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\triangle x},$$

которая называется левой разностью.

Аппроксимацию второй производной можно получить исходя из ее определения, отношение приращения функции к приращению аргумента, где в качестве функции выступает аппроксимация первой производной. Также ее можно получить из выражений (1) и (2), если из (1) вычесть (2), отбросить члены содержащие производные старше второй, то получим:

$$\frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\triangle x^2}$$