

DM Calcul Numérique

BOUTON Nicolas

November 9, 2020

Exercice 1

1. Utilisons l'interpolation lagrangienne.

On a :

$$f(t) \approx p(t)$$

On veut maintenant approcher l'intégrale de f , on va donc utiliser l'intégrale du polynôme de Lagrange :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \int_a^b p(t)dt$$

Et on a :

$$\int_a^b p(t)dt = \sum_{i=1}^n f(t_i)w_i$$

Avec n le nombre de point et w_i :

$$w_i = \int_a^b L_i(t)dt$$

Essayons donc de calculer les polynôme de Lagrange associés aux points : $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$.

Point $x = 0$:

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})(x - 1)}{(0 - \frac{1}{3})(0 - \frac{2}{3})(0 - 1)} \\ &= \frac{(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9})(x - 1)}{(-\frac{2}{9})} \\ &= \frac{(x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x) - (x^2 - x + \frac{2}{9})}{(-\frac{2}{9})} \\ &= \frac{(x^3 - 2x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{2}{9})}{(-\frac{2}{9})} \\ &= -\frac{9(x^3 - 2x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{2}{9})}{2} \\ &= -\frac{9}{2}x^3 + 9x^2 - \frac{11}{2}x + 1 \end{aligned}$$

Point $x = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{(x - 0)(x - \frac{2}{3})(x - 1)}{(\frac{1}{3} - 0)(\frac{1}{3} - \frac{2}{3})(\frac{1}{3} - 1)} \\ &= \frac{(x^2 - \frac{2}{3}x)(x - 1)}{(\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})} \\ &= \frac{(x^3 - \frac{2}{3}x^2) - (x^2 - \frac{2}{3}x)}{(\frac{2}{27})} \\ &= \frac{(x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x)}{(\frac{2}{27})} \\ &= \frac{27(x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x)}{2} \end{aligned}$$

Point $x = \frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{3})(x - 1)}{(\frac{2}{3} - 0)(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})(\frac{2}{3} - 1)} \\ &= \frac{(x^2 - \frac{1}{3}x)(x - 1)}{(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})} \\ &= \frac{(x^3 - \frac{1}{3}x^2) - (x^2 - \frac{1}{3}x)}{-\frac{2}{27}} \\ &= \frac{(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x)}{-\frac{2}{27}} \\ &= -\frac{27(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x)}{2} \end{aligned}$$

Point $x = 1$:

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{(x-0)(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})}{(1-0)(1-\frac{1}{3})(1-\frac{2}{3})} \\ &= \frac{(x^2 - \frac{1}{3}x)(x - \frac{2}{3})}{(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})} \\ &= \frac{(x^3 - \frac{1}{3}x^2) - (\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}\frac{1}{3}x)}{(\frac{2}{9})} \\ &= \frac{(x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x)}{(\frac{2}{9})} \\ &= \frac{9(x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x)}{2} \end{aligned}$$

Calculons maintenant leurs intégrale :

Point $x = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_0(t) dt &= \int_0^1 \left(-\frac{9}{2}t^3 + 9t^2 - \frac{11}{2}t + 1 \right) dt \\ &= \left[-\frac{9}{8}t^4 + \frac{9}{3}t^3 - \frac{11}{4}t^2 + t \right]_0^1 \\ &= -\frac{9}{8} * 1^4 + \frac{9}{3} * 1^3 - \frac{11}{4} * 1^2 + 1 \\ &= \frac{3}{24} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Point $x = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 L_1(t)dt &= \int_0^1 \frac{27(t^3 - \frac{5}{3}t^2 + \frac{2}{3}t)}{2} dt \\&= \frac{27}{2} \int_0^1 \left(t^3 - \frac{5}{3}t^2 + \frac{2}{3}t \right) dt \\&= \frac{27}{2} \left[\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{9}t^3 + \frac{2}{6}t^2 \right) \right]_0^1 \\&= \frac{27}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{9} + \frac{2}{6} \right) \\&= \frac{27}{2} \left(\frac{9}{36} - \frac{20}{36} + \frac{12}{36} \right) \\&= \frac{27}{2} \left(\frac{1}{36} \right) \\&= \frac{27}{72} \\&= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Point $x = \frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 L_2(t)dt &= \int_0^1 -\frac{27(t^3 - \frac{4}{3}t^2 + \frac{1}{3}t)}{2} dt \\&= -\frac{27}{2} \int_0^1 \left(t^3 - \frac{4}{3}t^2 + \frac{1}{3}t \right) dt \\&= -\frac{27}{2} \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{9}t^3 + \frac{1}{6}t^2 \right]_0^1 \\&= -\frac{27}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{9} + \frac{1}{6} \right) \\&= -\frac{27}{2} \left(\frac{9}{36} - \frac{16}{36} + \frac{6}{36} \right) \\&= -\frac{27}{2} \left(-\frac{1}{36} \right) \\&= \frac{27}{72} \\&= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Point $x = 1$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 L_3(t) dt &= \int_0^1 \frac{9(t^3 - t^2 + \frac{2}{9}t)}{2} dt \\
 &= \frac{9}{2} \int_0^1 \left(t^3 - t^2 + \frac{2}{9}t \right) dt \\
 &= \frac{9}{2} \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{18}t^2 \right]_0^1 \\
 &= \frac{9}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{18} \right) \\
 &= \frac{9}{2} \left(\frac{9}{36} - \frac{12}{36} + \frac{4}{36} \right) \\
 &= \frac{9}{2} \left(\frac{1}{36} \right) \\
 &= \frac{9}{72} \\
 &= \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

Résultat :

$$w_0 = \frac{1}{8}, w_1 = \frac{3}{8}, w_2 = \frac{3}{8}, w_3 = \frac{1}{8}$$

2. Ici la méthode ne fonctionne pas.
Il nous faudra un point en plus tel que :

$$\int_0^1 f(t) dt \approx w_0 f(t_0) + w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3) + w_4 f(t_4)$$

3. Formule de quadrature :

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^3 w_i f \left(i * \frac{x_{k+1} - x_k}{3} \right)$$

4. Formule composite :

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &\approx \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \\
 &\approx \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i=0}^3 w_i f \left(i * \frac{x_{k+1} - x_k}{3} \right)
 \end{aligned}$$

5. Nom de la fonction : **fourpoints**

Paramètre d'entrées :

- **a** : borne inférieur de l'intervale
- **b** : borne supérieur de l'intervale
- **N** : nombre de pas
- **f** : fonction f

Paramètre de sortie :

- **res** : résultat de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$

Explication du code :

- Pour moi $x_k = k * \frac{b-a}{N}$
- Le reste est triviale

Résultat numérique :

1er test : **fourpoints(0, 1, 1, mysquare)**

- $a = 0$
- $b = 1$
- $N = 1$
- f : mysquare fonction $f(x) = x^2$
- **résultat** : 0.333333

2ème test : **fourpoints(0, 1, 10, mysquare)**

- $a = 0$
- $b = 1$
- $N = 10$
- f : mysquare fonction $f(x) = x^2$
- **résultat** : 0.033333

Exercice 2

1. (a)

$$S_f''(x) =$$

(b)

(c)

2.

Eercicio 3