TD Calcul Numérique

BOUTON Nicolas

October 20, 2020

Exercice 1

1. Voir la fonction **pointgauche** dans le fichier "exo1.sci".
2. Voir la fonction **trapeze** dans le fichier "exo1.sci".
3. Voir la fonction **int_simpson** dans le fichier "exo1.sci".
4. Voir la fonction **sin_pi_x** dans le fichier "exo1.sci".

Exercice 2

On a le système suivant :

$$\begin{cases} p(-3) = 3 \\ p(-1) = 7 \\ p(3) = 7 \\ p(5) = -3 \end{cases}$$

Utilisons la métode des **différence divisé** :
Premiére étape :

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -3 & 3 \\ -1 & 7 \end{array}\right\} \frac{7-3}{-1-(-3)} = 2$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -1 & 7 \\ 3 & 7 \end{array}\right\} \frac{7-7}{3-(-1)} = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{array}\right\} \frac{-3-7}{5-3} = -5$$

Deuxième étape :

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{array}\right\} \frac{0-2}{3-(-3)} = -\frac{2}{6}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -1 & 0 \\ 5 & -5 \end{array}\right\} \frac{-5-0}{5-(-1)} = -\frac{5}{6}$$

Troisième étape :

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -3 & -\frac{2}{6} \\ 5 & -\frac{5}{6} \end{array}\right\} \frac{-\frac{5}{6}-(-\frac{2}{6})}{5-(-3)} = \frac{-\frac{3}{6}}{8} = -\frac{3}{48}$$

Maintenant on peut calculer $p(x)$:

$$
\begin{aligned}
p(x) =& 3 + 2(x - (-3)) \\
& + (-\frac{2}{6})(x - (-3))(x - (-1)) \\
& - \frac{3}{48}(x - (-3))(x - (-1))(x - 3) \\
p(x) =& 3 + 2x + 6 \\
& - \frac{2(x + 3)(x + 1)}{6} \\
& - \frac{3(x + 3)(x + 1)(x - 3)}{48} \\
p(x) =& \frac{144 + 96x + 288}{48} \\
& - \frac{(2x + 6)(x + 1)}{6} \\
& - \frac{(3x + 9)(x + 1)(x - 3)}{48} \\
p(x) =& \frac{144 + 96x + 288}{48} \\
& - \frac{2x^2 + 2x + 6x + 6}{6} \\
& - \frac{(3x^2 + 3x + 9x + 9)(x - 3)}{48} \\
p(x) =& \frac{144 + 96x + 288}{48} \\
& - \frac{2x^2 + 8x + 6}{6} \\
& - \frac{3x^3 - 9x^2 + 11x^2 - 33x + 9x - 27}{48} \\
p(x) =& \frac{144 + 96x + 288}{48} \\
& - \frac{16x^2 + 64x + 48}{48} \\
& - \frac{3x^3 + 2x^2 - 24x - 27}{48} \\
p(x) =& \frac{144 + 96x + 288 - (16x^2 + 64x + 48) - (3x^3 + 2x^2 - 24x - 27)}{48} \\
p(x) =& \frac{-3x^3 - 18x^2 + 56x + 411}{48} \\
p(x) =& -\frac{3}{48}x^3 - \frac{6}{16}x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{411}{48}
\end{aligned}
$$

Exercice 3

1. Calculons $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$:
   Calcul de $f(-2)$:

$$f(-2) = \ln(2\cos\left(\frac{\pi(-2)}{4}\right)^2 + 1)$$
$$f(-2) = \ln(2(0)^2 + 1)$$
$$f(-2) = \ln(1)$$
$$f(-2) = 0$$

   Calcul de $f(-1)$:

$$f(-1) = \ln(2\cos\left(\frac{\pi(-1)}{4}\right)^2 + 1)$$
$$f(-1) = \ln(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1)$$
$$f(-1) = \ln(2\left(\frac{2}{4}\right) + 1)$$
$$f(-1) = \ln(1 + 1)$$
$$f(-1) = \ln(2)$$
$$f(-1) = 0.6931471$$

   Calcul de $f(0)$:

$$f(0) = \ln(2\cos\left(\frac{\pi(0)}{4}\right)^2 + 1)$$
$$f(0) = \ln(1)$$
$$f(0) = 0$$

   Calcul de $f(1)$:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \ln(2\cos\left(\frac{\pi(1)}{4}\right)^2 + 1)\\
f(1) &= \ln(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1)\\
f(1) &= \ln(2\left(\frac{2}{4}\right) + 1)\\
f(1) &= \ln(1 + 1)\\
f(1) &= \ln(2)\\
f(1) &= 0.6931471
\end{aligned}
$$

<u>Calcul de $f(2)$:</u>

$$
\begin{aligned}
f(2) &= \ln(2\cos\left(\frac{\pi(2)}{4}\right)^2 + 1)\\
f(2) &= \ln(2(0)^2 + 1)\\
f(2) &= \ln(1)\\
f(2) &= 0
\end{aligned}
$$

<u>Récapitulatif :</u>

$$
\begin{cases}
f(-2) = 0\\
f(-1) = ln(2)\\
f(0) = 0\\
f(1) = ln(2)\\
f(2) = 0
\end{cases}
$$

2. Essayons de trouver un polynôme p de degré inférieur où égale à 3 tel que :

$$
\begin{cases}
p(-2) = f(-2)\\
p(-1) = f(-1)\\
p(-1) = f(1)\\
p(2) = f(2)
\end{cases}
$$

Appliquons la méthodes des différences divisé :

$$\begin{cases} p(-2) = 0 \\ p(-1) = ln(2) \\ p(-1) = ln(2) \\ p(2) = 0 \end{cases}$$

Premiére étape :

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -2 & 0 \\ -1 & ln(2) \end{array}\right\} \frac{ln(2) - O}{-1-(-2)} = ln(2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -1 & ln(2) \\ 1 & ln(2) \end{array}\right\} \frac{ln(2) - ln(2)}{1-(-1)} = 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ 1 & ln(2) \\ 2 & 0 \end{array}\right\} \frac{0 - ln(2)}{2-1} = -ln(2)$$

Deuxième étape :

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -2 & ln(2) \\ 1 & 0 \end{array}\right\} \frac{0 - ln(2)}{1-(-2)} = -\frac{ln(2)}{3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -1 & 0 \\ 2 & -ln(2) \end{array}\right\} \frac{-ln(2) - 0}{2-(-1)} = -\frac{ln(2)}{3}$$

Troisième étape :

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -2 & -\frac{ln(2)}{3} \\ 2 & -\frac{ln(2)}{3} \end{array}\right\} \frac{-\frac{ln(2)}{3} - (-\frac{ln(2)}{3})}{2-(-2)} = 0$$

Essayons de calculer p :

$$
\begin{aligned}
p(x) &= 0 \\
&+ ln(2)(x-(-2)) \\
&- \frac{ln(2)}{3}(x-(-2))(x-(-1)) \\
&+ 0(x-(-2))(x-(-1))(x-1) \\
p(x) &= ln(2)(x+2) \\
&- \frac{ln(2)}{3}(x+2)(x+1) \\
p(x) &= ln(2)x + 2ln(2) \\
&- \frac{ln(2)}{3}(x^2+x+2x+2) \\
p(x) &= ln(2)x + 2ln(2) \\
&- \frac{ln(2)x^2+3ln(2)x+2ln(2)}{3} \\
p(x) &= \frac{3ln(2)x+6ln(2)}{3} \\
&- \frac{ln(2)x^2+3ln(2)x+2ln(2)}{3} \\
p(x) &= \frac{3ln(2)x+6ln(2)-ln(2)x^2-3ln(2)x-2ln(2)}{3} \\
p(x) &= \frac{-ln(2)x^2+4ln(2)}{3} \\
p(x) &= -\frac{ln(2)}{3}x^2 + \frac{4ln(2)}{3}
\end{aligned}
$$

3. Essayons de trouver un polynôme q de degré inférieur où égale à 4 tel que :

$$
\begin{cases}
q(-2) = f(-2) \\
q(-1) = f(-1) \\
q(0) = f(0) \\
q(-1) = f(1) \\
q(2) = f(2)
\end{cases}
$$

Appliquons la méthodes des différences divisé :

$$\begin{cases} q(-2) = 0 \\ q(-1) = ln(2) \\ q(0) = 0 \\ q(-1) = ln(2) \\ q(2) = 0 \end{cases}$$

Premiére étape :

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -2 & 0 \\ -1 & ln(2) \end{array}\right\} \frac{ln(2) - 0}{-1 - (-2)} = ln(2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -1 & ln(2) \\ 0 & 0 \end{array}\right\} \frac{0 - ln(2)}{0 - (-1)} = -ln(2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ 0 & 0 \\ 1 & ln(2) \end{array}\right\} \frac{ln(2) - 0}{1 - 0} = ln(2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ 1 & ln(2) \\ 2 & 0 \end{array}\right\} \frac{0 - ln(2)}{2 - 1} = -ln(2)$$

Deuxième étape :

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -2 & ln(2) \\ 0 & -ln(2) \end{array}\right\} \frac{-ln(2) - ln(2)}{0 - (-2)} = -ln(2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -1 & -ln(2) \\ 1 & ln(2) \end{array}\right\} \frac{ln(2) - (-ln(2))}{1 - (-1)} = ln(2)$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ 0 & ln(2) \\ 2 & -ln(2) \end{array}\right\} \frac{-ln(2) - ln(2)}{2 - 0} = -ln(2)$$

Troisième étape :

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -2 & -ln(2) \\ 1 & ln(2) \end{array}\right\} \frac{ln(2)-(-ln(2))}{1-(-2)} = \frac{2ln(2)}{3}$$

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -1 & ln(2) \\ 2 & -ln(2) \end{array}\right\} \frac{-ln(2)-ln(2)}{2-(-1)} = -\frac{2ln(2)}{3}$$

Quatrième étape :

$$\left.\begin{array}{ll} x_i & y_i \\ -2 & \frac{2ln(2)}{3} \\ 2 & -\frac{2ln(2)}{3} \end{array}\right\} \frac{-\frac{2ln(2)}{3}-\frac{2ln(2)}{3}}{2-(-2)} = -\frac{\frac{4ln(2)}{3}}{4} = -\frac{ln(2)}{3}$$

<u>Essayons de calculer q:</u>

$$
\begin{aligned}
q(x) = {} & 0 \\
& + ln(2)(x-(-2)) \\
& - ln(2)(x-(-2))(x-(-1)) \\
& + \frac{2ln(2)}{3}(x-(-2))(x-(-1))(x-0) \\
& - \frac{ln(2)}{3}(x-(-2))(x-(-1))(x-0)(x-1) \\
q(x) = {} & ln(2)(x+2) \\
& - ln(2)(x+2)(x+1) \\
& + \frac{2ln(2)}{3}(x+2)(x+1)x \\
& - \frac{ln(2)}{3}(x+2)(x+1)x(x-1) \\
q(x) = {} & ln(2)(x+2) \\
& - ln(2)(x^2+x+2x+2) \\
& + \frac{2ln(2)}{3}(x^2+x+2x+2)x \\
& - \frac{ln(2)}{3}(x^2+x+2x+2)x(x-1) \\
q(x) = {} & ln(2)(x+2) \\
& - ln(2)(x^2+3x+2) \\
& + \frac{2ln(2)}{3}(x^3+3x^2+2x) \\
& - \frac{ln(2)}{3}(x^3+3x^2+2x)(x-1) \\
q(x) = {} & ln(2)(x+2) \\
& - ln(2)(x^2+3x+2) \\
& + \frac{2ln(2)}{3}(x^3+3x^2+2x) \\
& - \frac{ln(2)}{3}(x^4+3x^3+2x^2-x^3-3x^2-2x) \\
q(x) = {} & ln(2)(x+2) \\
& - ln(2)(x^2+3x+2) \\
& + \frac{2ln(2)}{3}(x^3+3x^2+2x) \\
& - \frac{ln(2)}{3}(x^4+2x^3-x^2-2x) \\
q(x) = {} & ln(2)x+2ln(2) \\
& - ln(2)x^2-3ln(2)x-2ln(2) \\
& + \frac{2ln(2)}{3}x^3+\frac{6ln(2)}{3}x^2+\frac{4ln(2)}{3}x \\
& - \frac{ln(2)}{3}x^4-\frac{2ln(2)}{3}x^3+\frac{ln(2)}{3}x^2+\frac{2ln(2)}{3}x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q(x) = &-\frac{ln(2)}{3}x^4 \\
&+\frac{2ln(2)}{3}x^3 - \frac{2ln(2)}{3}x^3 \\
&- ln(2)x^2 + \frac{6ln(2)}{3}x^2 + \frac{ln(2)}{3}x^2 \\
&+ ln(2)x - 3ln(2)x + \frac{4ln(2)}{3}x + \frac{2ln(2)}{3}x \\
&+ 2ln(2) - 2ln(2) \\
q(x) = &-\frac{ln(2)}{3}x^4 \\
&- \frac{3ln(2) - 6ln(2) - ln(2)}{3}x^2 \\
&+ \frac{3ln(2) - 9ln(2) + 4ln(2) + 2ln(2)}{3}x \\
q(x) = &-\frac{ln(2)}{3}x^4 + \frac{4ln(2)}{3}x^2
\end{aligned}
$$

4. Différence entre q et p :

$$
\begin{aligned}
q - p &= -\frac{ln(2)}{3}x^4 + \frac{4ln(2)}{3}x^2 - (-\frac{ln(2)}{3}x^2 + \frac{4ln(2)}{3}) \\
q - p &= -\frac{ln(2)}{3}x^4 + \frac{4ln(2)}{3}x^2 + \frac{ln(2)}{3}x^2 - \frac{4ln(2)}{3} \\
q - p &= -\frac{ln(2)}{3}x^4 + \frac{5ln(2)}{3}x^2 - \frac{4ln(2)}{3}
\end{aligned}
$$

Exercice 4

1. Voir la fonction **polyLag** dans le fichier ”exo4.sci”.

2. Voir la fonction **myinterpol** dans le fichier ”exo4.sci”.

Exercice 5

1. Euler Explicite

a. Déterminons y_{i+1} en fonction de y_i :

$$y_{i+1} = y_i + hf(y_i)$$
$$y_{i+1} = y_i + h\frac{1}{2y_i + 1}$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2y_i + 1}$$

b. Voir la fonction **EulerExplicite** dans le fichier "exo5.sci".

2. Heun

a. Déterminons y_{i+1} en fonction de y_i :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(y_i + hf(y_i)) + f(y_i))$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{2\left(y_i + h\frac{1}{2y_i+1}\right) + 1} + \frac{1}{2y_i + 1}\right)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{2y_i + \frac{2h}{2y_i+1} + 1} + \frac{1}{2y_i + 1}\right)$$

b. Voir la fonction **Heun** dans le fichier "exo5.sci".

3. Euler Implicite

a. Déterminons un polynôme :

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + hf(y_{i+1}) \\
y_{i+1} &= y_i + h\frac{1}{2y_{i+1}+1} \\
y_{i+1} &= \frac{y_i(2y_{i+1}+1)+h}{2y_{i+1}+1} \\
y_{i+1}(2y_{i+1}+1) &= y_i(2y_{i+1}+1)+h \\
2y_{i+1}^2 + y_{i+1} &= y_i + 2y_{i+1}y_i + h \\
2y_{i+1}^2 + y_{i+1} - 2y_{i+1}y_i &= y_i + h \\
2y_{i+1}^2 + y_{i+1} - 2y_{i+1}y_i - y_i - h &= 0 \\
2y_{i+1}^2 + (1-2y_i)y_{i+1} - y_i - h &= 0
\end{aligned}
$$

b. Calculons le descriminant :

$$
\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
\Delta &= (1-2y_i)^2 - [4 * 2 * (-y_i - h)] \\
\Delta &= (1-2y_i)^2 + 8y_i + 8h \\
\Delta &= 1 - 4y_i + (2y_i)^2 + 8y_i + 8h \\
\Delta &= 1 + 4y_i + (2y_i)^2 + 8h \\
\Delta &= (2y_i+1)^2 + 8h
\end{aligned}
$$

c. Déterminons y_{i+1} en fontion de y_i et h :

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\
y_{i+1} &= \frac{2y_i - 1 + \sqrt{(2y_i+1)^2+8h}}{4}
\end{aligned}
$$

d. Voir la fonction **EulerImplicite** dans le fichier "exo5.sci".

4. Affichage

a. Correspondances des colonnes :

- C2 : Euler Explicite, car les résultats obtenus sont inférieurs aux résultats exactes.
- C3 : Heun, car c'est la méthode qui à la convergence la plus forte
- C4 : Euler Implicite, car les résultats obtenus sont supérieurs aux résultats exactes.

b. Voir la fonction **AfficheRes** dans le fichier "exo5.sci".

c. Calculons le taux d'erreurs des 3 méthodes :
Taux d'erreur avec la méthode d'Euler Explicite :

$$\begin{aligned}|e - e'| &= |0,5630146 - 0,5731410| \\ &= 0.0101264 \\ &= 1.01264\%\end{aligned}$$

Taux d'erreur avec la méthode d'Heun :

$$\begin{aligned}|e - e'| &= |0,5630146 - 0,5630245| \\ &= 0.0000099 \\ &= 0.00099\%\end{aligned}$$

Taux d'erreur avec la méthode d'Euler Implicite :

$$\begin{aligned}|e - e'| &= |0,5630146 - 0,5535927| \\ &= 0.0094219 \\ &= 0.94219\%\end{aligned}$$

Nous voyons clairement que les deux méthodes d'Euler sont presque équivalentes en termes de convergences exepté qu'elles convergent dans des sens différents, les valeurs d'Euler Explicite sont de plus en plus grandes que celles attendus et les valeurs d'Euler Implicite sont de plus en plus petites des valeurs ettendus. On voit également que le taux d'érreur est quasiment nulle pour la méthode d'Heun.

Exercice 6

Partie I

Dans cette partie on a le système suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) + c(t)u(t) = f(t), t \in [0,1] \\ u(0) = \alpha, u'(0) = \beta \end{cases}$$

Et pour tout $t >= 0$:

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix}$$

1. On a :

$$U'(t) = \begin{bmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{bmatrix}$$

Calculons $A(t)U(t) + B(t)$:

où

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t) & 0 \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -f(t) \end{bmatrix}, t \in I.$$

$$A(t)U(t) = \begin{bmatrix} u'(t) \\ c(t)u(t) \end{bmatrix}$$

$$A(t)U(t) + B(t) = \begin{bmatrix} u'(t) \\ c(t)u(t) - f(t) \end{bmatrix}$$

or

$$U'(t) = \begin{bmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'(t) \\ c(t)u(t) - f(t) \end{bmatrix}$$

Donc si u est solution de (E) et de (C) alors :

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t)$$

2. (a) On a l'équation suivante :

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t)$$

Donc on a :

$$\begin{cases} U_{i+1} = U_i + hf(t_i, U_i) \\ U_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{i+1} = U_i + h \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t) & 0 \end{bmatrix} U_i + h \begin{bmatrix} 0 \\ -f(t) \end{bmatrix} \\ U_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{i+1} = U_i + hA(t)U_i + hB(t) \\ U_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{cases}$$

(b) On a :

$$\begin{cases} U_{i+1} = U_i + hA(t)U_i + hB(t) \\ U_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{cases}$$

Posons

$$U_i = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ w_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ -f(t) \end{bmatrix}$$

(c) Voir la fonction **resouScd** dans "exo6.sci".

Partie II

1. La formule de taylor à l'ordre 4 donne :

$$\begin{cases} u(x_{i+1}) = u(x_i) + h_i u'(x_i) + \frac{h_i^2}{2}u''(x_i) + \frac{h_i^3}{3!}u^{(3)}(x_i) + \frac{h_i^4}{4}u^{(4)}(x_i) + O(h_i^4) \\ u(x_{i-1}) = u(x_i) - h_{i-1} u'(x_i) + \frac{h_{i-1}^2}{2}u''(x_i) - \frac{h_{i-1}^3}{3!}u^{(3)}(x_i) + \frac{h_{i-1}^4}{4}u^{(4)}(x_i) + O(h_i^4) \end{cases}$$

$h_i = x_{i+1} - x_i$

Comme on suppose que la subdivision est uniforme :

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2 u''(x_i) + \frac{h^4}{12}u^{(4)}(x_i) + O(h^4)$$

D'où

$$\begin{aligned} u''(x_i) =& \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{h^2} + O(h^2) \\ =& \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{h^2} \end{aligned}$$

Cela inpire le problème approché :

$$\begin{cases} -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{h^2} = c(x_i)u_i = f(x_i), 1 <= i <= n-1 \\ u_0 = u_n = 0 \end{cases}$$

Ce problème approché est un système linéaire :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} + c(u_1) & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c(u_2) & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c(u_3) & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c(u_{n-3}) & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c(u_{n-2}) & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c(u_{n-1} \end{bmatrix}$$

et

$$X = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ - \\ u_{n-3} \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} f(u_1) \\ f(u_2) \\ f(u_3) \\ - \\ f(u_{n-3}) \\ f(u_{n-2}) \\ f(u_{n-1}) \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}
h^2 W^T A W =& h^2 \left(w_1 \left(\frac{2}{h^2} + c(u_1) \right) w_1 + w_2 \left(-\frac{1}{h^2} \right) w_1 \right) \\
&+ h^2 \left(w_1 \left(-\frac{1}{h^2} \right) w_1 + w_2 \left(\frac{2}{h^2} + c(u_2) \right) w_2 + w_3 \left(-\frac{1}{h^2} \right) w_2 \right) \\
&+ - - - - -- \\
&+ h^2 \left(w_{n-2} \left(\frac{2}{h^2} + c(u_{n-1}) \right) w_{n-2} + w_{n-1} \left(-\frac{1}{h^2} \right) w_{n-2} \right) \\
=& (2 + c(u_1)) w_1^2 - w_1 w_2 \\
&- w_1 w_2 + (2 + c(u_2)) w_2^2 - w_2 w_3 \\
&+ - - - - -- \\
&+ (2 + c(u_{n-1})) w_{n-2}^2 - w_{n-2} w_{n-1} \\
=& \sum_{i=1}^{n-1} (2 + h^2 c(ih)) w_i^2 - 2 \sum_{i=2}^{n-1} w_{i-1} w_i
\end{aligned}$$

3. $A = A^T$ donc A est symétrique car elle est tridiagonale et les valeurs sur les diagonales $i = j - 1$ et $i = j + 1$ sont constant et égaux.

4.

5.

Partie III

Exercice 7

Exercice 8