Devoir maison

Modalités du devoir maison

- Ce devoir maison est à réaliser à domicile.
- Un compte rendu est à rédiger. Ce compte rendu doit comporter les réponses aux questions, les explications, les résultats numériques et une brève description du travail réalisé exercice par exercice.
- Les programmes sources sous scilab doivent être conservés.
- Le rapport et les programmes sources sont à rendre avant le **15 novembre 2020** par courrier électronique à l'adresse `tahar.boulmezaoud@uvsq.fr` et avec comme objet : `COMPTE RENDU DEVOIR MAISON CHPS+ VOS NOMS`.
- Le courriel doit contenir deux pièces jointes :
  1. le compte rendu en format PDF scanné. Le nom de ce fichier PDF **doit comporter vos noms** afin qu'il soit facilement reconnaissable.
     Les listings des programmes sources doivent être insérés en annexe du compte rendu.
  2. un dossier archivé en **un seul fichier** comportant la totalité des programmes (pour l'archivage, on peut utiliser la commande tar par exemple). Le nom de ce fichier **doit comporter vos noms**.

Ce projet est à réaliser individuellement ou en binôme. Dans le cas où vous décidez d'écrire un compte rendu en binôme, vous devez m'informer de la composition du binôme par courriel avant le 25 octobre 2020. Par ailleurs, la distanciation physique entre vous doit être impérativement respectée durant la préparation de ce DM (vous pourrez communiquer par moyens électroniques, comme Zoom, etc.).

Il n'est pas exclu que je vous demande un entretien oral à distance. L'objet de cet entretien pourrait être des clarifications ou des vérifications à propos du travail réalisé.

Une note globale de ce DM vous sera attribuée individuellement (exceptionnellement, les notes de deux membres d'un même binôme peuvent différer, notamment si un entretien oral a eu lieu).

Exercice 1 -

1. Trouver les réels w_i, $0 \leq i \leq 4$, pour que l'approximation
$$\int_0^1 f(t)dt \approx w_0 f(0) + w_1 f(\frac{1}{3}) + w_2 f(\frac{2}{3}) + w_3 f(1),$$
soit exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
2. La méthode est-elle exacte pour les polynômes de degré 4 ?
3. A l'aide de la formule précédente, donner une formule de quadrature pour calculer
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx.$$

4. En déduire une formule composite pour approcher une intégrale
$$\int_a^b f(x)dx$$
(on utilisera un découpage uniforme en N pas de l'intervalle $[a, b]$).
5. Ecrire une fonction `fourpoints` utilisant cette formule composite pour approcher l'intégrale précédente pour une fonction f donnée (on choisira convenablement les paramètres d'entrée et de sortie).

Exercice 2 - Soit $I = [a, b]$ un intervalle, $N \geq 1$ un entier et $x_0 = a < x_1 < ... < x_N = b$ une subdivision <u>uniforme</u> de cet intervalle. On pose $h = (b-a)/N$. Ainsi, $x_k = a + kh$ pour $0 \leq k \leq N$. Soit f une fonction quelconque définie sur $[a, b]$. On cherche à approcher f par une fonction S_f réalisant les conditions suivantes :

— S_f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$.
— La restriction de S à chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, ..., N-1$, est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3.
— $S_f(x_k) = f(x_k)$ pour tout $k \in \{0, \cdots, N\}$.
— $S''(a) = S''(b) = 0$.

On pose pour $0 \leq k \leq N$:
$$y_k = f(x_k), M_k = S_f''(x_k).$$

1. Soit $k \in \{0, \cdots, N-1\}$.
   (a) Soit $x \in [x_k, x_{k+1}]$. Exprimer $S_f''(x)$ en fonction de x, x_k, x_{k+1}, h, M_k et M_{k+1}.
   (b) Trouver les coefficients A_k, B_k, C_k et D_k tels que
   $$\forall x \in [x_k, x_{k+1}],\ S_f(x) = A_k(x - x_{k+1})^3 + B_k(x - x_k)^3 + C_k(x - x_k) + D_k.$$
   (on exprimera A_k, B_k, C_k et D_k en fonction y_k, y_{k+1}, h, M_k et M_{k+1}).
   (c) Montrer que si $1 \leq k \leqslant N-1$ alors
   $$M_{k-1} + 4M_k + M_{k+1} = 6\frac{y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k}{h^2},$$
   puis en déduire que $M_1, \cdots, M_{N-1}$ sont solutions d'un système linéaire dont on précisera la matrice et le second membre.
2. Ecrire deux fonctions `moments` et `interpol` avec
   — la fonction `moments` ayant comme paramètres d'entrée la fonction f (designé par `func` par exemple), a, b et N et renvoyant en sortie les réels $M_0, \cdots, M_N$.
   — la fonction `interpol` ayant comme paramètres d'entrée les moments $M_0, \cdots, M_N$, la fonction `func`, a, b, N et un réel x et renvoyant en sortie la valeur $S_f(x)$.
   — Construire un exemple test et tester les programmes.

Exercice 3 - On considère le problème suivant : trouver $u : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^2$, telle que
$$\begin{cases} -u''(x) = f(x),\ x \in]0, 1[, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$
Ici f désigne une fonctions réelle, continue sur $[0, 1]$. On introduit un maillage de l'intervalle $[0, 1]$ de pas $h = 1/N$, où $N \geq 1$ est le nombre de pas. Les noeuds de ce maillage sont $x_k = kh,\ 0 \leq k \leq N$. On note $z_1, \cdots, z_N$ les milieux des segments $[x_{k-1}, x_k]$ pour $1 \leq k \leq N$:
$$z_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} = (k - \frac{1}{2})h.$$
On veut approcher la solution de l'équation (1) par une fonction u_h appartenant à l'espace
$$V_h = \{v_h \in C^0([0, 1]) \mid v_h(0) = v_h(1) = 0,\ v_{h|[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbb{P}_2,\ k = 0, ..., N-1\},$$
où $\mathbb{P}_2$ désigne l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

1. [TH] Montrer que si u est solution de (1), alors

$$\int_0^1 u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

pour toute fonction v de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ vérifiant $v(0) = v(1) = 0$.

Inspiré de cette formulation, le problème approché qu'on considérera dans toute la suite s'écrit :

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que : } \quad \forall v_h \in V_h, \int_0^1 u_h'(x)v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x)v_h(x)dx.$$

2. [TH] Soit $[a,b]$, $a < b$, un intervalle quelconque. On pose $c = (a+b)/2$. Trouver trois polynômes p_i, $1 \le i \le 3$, de degrés inférieurs où égals à 2 tels que

$$p_1(a) = 1,\ p_1(b) = p_1(c) = 0, \quad p_2(a) = 0,\ p_2(c) = 1,\ p_2(b) = 0.$$

$$p_3(a) = 0,\ p_3(c) = 0,\ p_3(b) = 1.$$

3. Le but maintenant est de construire une base de V_h.
   (a) [TH] Soit $k \in \{1, \cdots, N\}$. On note ω_{2k-1} l'unique fonction de V_h vérifiant

   $$\omega_{2k-1}(x_{k-1}) = \omega_{2k-1}(x_k) = 0,\ \omega_{2k-1}(z_k) = 1,$$

   et

   $$\omega_{2k-1}(x) = 0 \text{ pour tout } x \notin [x_{k-1}, x_k].$$

   Donner l'expression de $\omega_{2k-1}(x)$ pour $x \in [x_{k-1}, x_k]$.

   (b) [TH] On note ω_{2k}, $1 \le k \le N-1$, l'unique fonction de V_h vérifiant

   $$\omega_{2k}(z_k) = \omega_{2k}(x_{k-1}) = 0,\ \omega_{2k}(x_k) = 1,$$

   $$\omega_{2k}(z_{k+1}) = \omega_{2k}(x_{k+1}) = 0,$$

   et

   $$\omega_{2k}(x) = 0 \text{ pour tout } x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}].$$

   Donner l'expression de $\omega_{2k}(x)$ pour $x \in [x_{k-1}, x_k]$, puis pour $x \in [x_k, x_{k+1}]$.

   (c) [TH] Montrer que la famille $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_{2k-1}, \omega_{2k}, \omega_{2k+1}, \cdots, \omega_{2N-2}, \omega_{2N-1})$ forme une base de V_h. En déduire la dimension de V_h. En déduire aussi que le système discret s'écrit : Trouver $u_h = \sum_{j=1}^{2N-1} u_j \omega_j \in V_h$ tel que :

   $$\sum_{j=1}^{2N-1} \left(\int_0^1 \omega_j'(x)\omega_k'(x)dx \right) u_j = \int_0^1 f(x)\omega_k(x)dx \text{ pour } 1 \le k \le 2N-1.$$

4. [NUM] On pose pour $1 \le k \le 2N-1$,

$$f_k = \int_0^1 f(x)\omega_k(x)dx.$$

Ecrire un fonction scilab ayant comme paramètres d'entrée une fonction f (symbolisée par `func`) et l'entier `N` et qui renvoie un tableau `FF` contenant les $2N-1$ valeurs $f_1, \ldots, f_{2N-1}$ (dans cet ordre) (on peut utiliser des fonctions prédéfinies sur Scilab pour calculer ces intégrales).

5. [TH] Calculer pour $2 \le k \le N-1$, les valeurs exactes des intégrales

$$\alpha_{2k-1} = \int_0^1 \omega_{2k-1}'(x)^2 dx,\ \beta_{2k-1} = \int_0^1 \omega_{2k-2}'(x)\omega_{2k-1}'(x)dx, \gamma_{2k} = \int_0^1 \omega_{2k-1}'(x)\omega_{2k}'(x)dx,$$

$$a_{2k} = \int_0^1 \omega_{2k}'(x)^2 dx,\ b_{2k} = \int_0^1 \omega_{2k-2}'(x)\omega_{2k}'(x)dx.$$

On calculera aussi α_{2k-1} pour $k = 1$ ou N, $\quad a_{2k}$ et γ_{2k} pour $k = 1$, et β_{2k-1} pour $k = N$.

6. [NUM] Ecrire une function ayant comme paramètre l'entier `N` et qui renvoie cinq tableaux unidimensionnels `ALPHA`, `BETA`, `GAMMA`, `AA`, `BB` comportant respectivement les coefficients
$[\alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_{2N-1}]$ $(\mathtt{ALPHA(1)} = \alpha_1, \mathtt{ALPHA(2)} = \alpha_3, \cdots, \mathtt{ALPHA(N)} = \alpha_{\mathtt{2N-1}})$
$[\beta_3, \beta_5, \cdots, \beta_{2N-1}]$ $(\mathtt{BETA(1)} = \beta_3, \mathtt{BETA(2)} = \beta_5, \cdots, \mathtt{BETA(N-1)} = \beta_{\mathtt{2N-1}})$
$[\gamma_2, \gamma_4, \cdots, \gamma_{2N-2}]$ $(\mathtt{GAMMA(1)} = \gamma_2, \mathtt{GAMMA(2)} = \gamma_4, \cdots, \mathtt{GAMMA(N-1)} = \gamma_{\mathtt{2N-2}})$
$[a_2, a_4, \cdots, a_{2N-2}]$ $(\mathtt{AA(1)} = \mathtt{a}_2, \mathtt{AA(2)} = \mathtt{a}_4, \cdots, \mathtt{AA(N-1)} = \mathtt{a}_{\mathtt{2N-2}})$
$[b_4, b_6, \cdots, b_{2N-2}]$ $(\mathtt{BB(1)} = \mathtt{b}_4, \mathtt{BB(2)} = \mathtt{b}_6, \cdots, \mathtt{BB(N-2)} = \mathtt{b}_{\mathtt{2N-2}})$

7. [TH] Montrer que les coefficients u_j, $1 \leq j \leq 2N-1$, sont solutions d'un système linéaire de la forme :

$$\begin{array}{rcll}
\alpha_1 u_1 + \gamma_2 u_2 & = & f_1, & (1) \\
\gamma_2 u_1 + a_2 u_2 + \beta_3 u_3 + b_4 u_4 & = & f_2, & (2) \\
\beta_3 u_2 + \alpha_3 u_3 + \gamma_4 u_4 & = & f_3, & (3) \\
b_4 u_2 + \gamma_4 u_3 + a_4 u_4 + \beta_5 u_5 + b_6 u_6 & = & f_4, & (4) \\
\beta_5 u_4 + \alpha_5 u_5 + \gamma_6 u_6 & = & f_5 & (5) \\
b_6 u_4 + \gamma_6 u_5 + a_6 u_6 + \beta_7 u_7 + b_8 u_8 & = & f_6, & (6) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\beta_{2k-1} u_{2k-2} + \alpha_{2k-1} u_{2k-1} + \gamma_{2k} u_{2k} & = & f_{2k-1}, & (2k-1) \\
b_{2k} u_{2k-2} + \gamma_{2k} u_{2k-1} + a_{2k} u_{2k} + \beta_{2k+1} u_{2k+1} + b_{2k+2} u_{2k+2} & = & f_{2k}, & (2k) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
b_{2N-2} u_{2N-4} + \gamma_{2N-2} u_{2N-3} + a_{2N-2} u_{2N-2} + \beta_{2N-1} u_{2N-1} & = & f_{2N-2}, & (2N-2) \\
\beta_{2N-1} u_{2N-2} + \alpha_{2N-1} u_{2N-1} & = & f_{2N-1}. & (2N-1)
\end{array}$$

8. [TH] En exprimant u_{2k-1} en fonction de u_{2k-2} et u_{2k} à partir des équations $(1), (3), \ldots, (2k-1), \cdots (2N-1)$, montrer que le système ci-dessus se ramène à un système tridiagonal :

$$\begin{array}{rcll}
\tilde{a}_1 u_2 + \tilde{b}_1 u_4 & = & \tilde{f}_1, & (1)' \\
\tilde{c}_1 u_2 + \tilde{a}_2 u_4 + \tilde{b}_2 u_6 & = & \tilde{f}_2, & (2)' \\
\tilde{c}_2 u_4 + \tilde{a}_3 u_6 + \tilde{b}_8 u_8 & = & \tilde{f}_3, & (3)' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\tilde{c}_{k-1} u_{2k-2} + \tilde{a}_k u_{2k} + \tilde{b}_k u_{2k+2} & = & \tilde{f}_k, & (4)' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\tilde{c}_{N-2} u_{2N-4} + \tilde{a}_{N-1} u_{2N-2} & = & \tilde{f}_{N-1}, & (N-1)'
\end{array}$$

où $\tilde{c}_1, \cdots, \tilde{c}_{N-2}$, $\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_{N-1}$, $\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_{N-2}$ et $\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_{N-1}$ sont à exprimer en fonction des coefficients et des seconds membres du système $(1), (2), \cdots, (2N-1)$.

9. [NUM] Ecrire une subroutine `TRIDIA` ayant comme entrée le paramètre `N`, les tableaux `ALPHA, BETA, GAMMA, AA`, `BB` et `FF` (destinés à contenir les coefficients et les seconds membres de $(1) - \cdots - (2N-1)$: voir explication ci-dessus) et qui calcule les nouveaux coefficients et le nouveau second membre du système réduit $(1)' - \cdots - (N-1)'$ stokés dans des tableaux en sortie : `TAA` (pour les $\tilde{a}_k$), `TBB` (pour les $\tilde{b}_k$), `TCC` (pour les $\tilde{c}_k$) et `TFF` (pour les $\tilde{f}_k$).

10. [TH] Proposer une méthode numérique pour inverser le système tridiagonal $(1)' - \cdots - (N-1)'$.

11. [NUM] Ecrire une fonction ayant comme entrée N, les tableaux `TAA`, `TBB`, `TCC`, `TFF` et qui renvoie les composantes $\mathtt{UP} = [\mathtt{u(2)}, \mathtt{u(4)}, \cdots, \mathtt{u(2N-2)}]$ solutions du système tridiagonal réduit (en employant la méthode que vous avez proposée à la question précédente).

12. [NUM] Ecrire une fonction qui calcule les composantes $\mathtt{UIMP} = [\mathtt{u}_1, \mathtt{u}_3, \cdots, \mathtt{u}_{\mathtt{2N-1}}]$ à partir de `N, UP, FF, ALPHA, BETA, GAMMA` (donnés comme paramètres d'entrée).

13. [NUM]-[TH] On veut tester la méthode avec l'exemple

$$u(x) = \sin(\pi x), \; f(x) = \pi^2 \sin(\pi x) \text{ pour } x \in [0, 1].$$

On choisit $N = 10$. Afficher (colonne par colonne) pour cette valeur de N

— les valeurs de $z_1, x_1, z_2, x_2, \cdots, x_{N-1}, z_N$,

— les valeurs approchées $u_1, \cdots, u_{2N-1}$,

— les valeurs exactes $u(z_1), u(x_1), u(z_2), u(x_2), \cdots, u(x_{N-1}), u(z_N)$,

— les erreurs relatives correspondantes :
$|u(x_k) - u_{2k}|/|u(x_k)|$, $1 \leq k \leq N-1$, et $|u(z_k) - u_{2k-1}|/|u(z_k)|$, $1 \leq k \leq N$,
(dans le même ordre que les valeurs exactes et approchées).

14. [NUM]-[TH] En utilisant l'exemple de la question précédente, étudier le comportement de l'erreur

$$e = \max(|u(z_1) - u_1|, |u(z_2) - u_3|, \cdots, |u(z_N) - u_{2N-1}|, |u(x_1) - u_2|, \cdots, |u(x_{N-1}) - u_{2N-2}|),$$

en fonction de $h = 1/N$ (on peut dans un premier temps faire varier N et visualiser $\log e$ en fonction de $\log h$ puis évaluer la pente). On écrira les conclusions de ces observations sur la copie.