

TD Calcul Numérique

BOUTON Nicolas

October 16, 2020

1 Exercice 1

1. Voir la fonction **pointgauche** dans le fichier "exo1.sci".
2. Voir la fonction **trapeze** dans le fichier "exo1.sci".
3. Voir la fonction **simpson** dans le fichier "exo1.sci".
4. Voir la fonction **sin_pi_x** dans le fichier "exo1.sci".

2 Exercice 2

On a le système suivant :

$$\begin{cases} p(-3) = 3 \\ p(-1) = 7 \\ p(3) = 7 \\ p(5) = -3 \end{cases}$$

Utilisons la méthode des **différence divisé** :

Première étape :

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -3 & 3 \\ -1 & 7 \end{array} \right\} \frac{7-3}{-1-(-3)} = 2$$

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -1 & 7 \\ 3 & 7 \end{array} \right\} \frac{7-7}{3-(-1)} = 0$$

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{array} \right\} \frac{-3-7}{5-3} = -5$$

Deuxième étape :

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{array} \right\} \frac{0-2}{3-(-3)} = -\frac{2}{6}$$

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -1 & 0 \\ 5 & -5 \end{array} \right\} \frac{-5-0}{5-(-1)} = -\frac{5}{6}$$

Troisième étape :

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -3 & -\frac{2}{6} \\ 5 & -\frac{5}{6} \end{array} \right\} \frac{-\frac{5}{6}-(-\frac{2}{6})}{5-(-3)} = \frac{-\frac{3}{6}}{8} = -\frac{3}{48}$$

Maintenant on peut calculer $p(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) = & 3 + 2(x - (-3)) \\ & + \left(-\frac{2}{6}\right)(x - (-3))(x - (-1)) \\ & - \frac{3}{48}(x - (-3))(x - (-1))(x - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) = & 3 + 2x + 6 \\ & - \frac{2(x+3)(x+1)}{6} \\ & - \frac{3(x+3)(x+1)(x-3)}{48} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) = & \frac{144 + 96x + 288}{48} \\ & - \frac{(2x+6)(x+1)}{6} \\ & - \frac{(3x+9)(x+1)(x-3)}{48} \end{aligned}$$

$$p(x) = \frac{144 + 96x + 288}{48} - \frac{2x^2 + 2x + 6x + 6}{6} - \frac{(3x^2 + 3x + 9x + 9)(x - 3)}{48}$$

$$p(x) = \frac{144 + 96x + 288}{48} - \frac{2x^2 + 8x + 6}{6} - \frac{3x^3 - 9x^2 + 11x^2 - 33x + 9x - 27}{48}$$

$$p(x) = \frac{144 + 96x + 288}{48} - \frac{16x^2 + 64x + 48}{48} - \frac{3x^3 + 2x^2 - 24x - 27}{48}$$

$$p(x) = \frac{144 + 96x + 288 - (16x^2 + 64x + 48) - (3x^3 + 2x^2 - 24x - 27)}{48}$$

$$p(x) = \frac{-3x^3 - 18x^2 + 8x + 411}{48}$$

$$p(x) = -\frac{3}{48}x^3 - \frac{6}{16}x^2 + \frac{1}{6}x + \frac{411}{48}$$

3 Exercie 3

4 Exercie 4

5 Exercie 5

5.1 Euler Explicite

a.

b.

5.2 Heun

a.

b.

5.3 Euler Implicite

a. Déterminons un polynôme :

$$y_{i+1} = y_i + hf(y_{i+1})$$

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{1}{2y_{i+1} + 1}$$

$$y_{i+1} = \frac{y_i(2y_{i+1} + 1) + h}{2y_{i+1} + 1}$$

$$y_{i+1}(2y_{i+1} + 1) = y_i(2y_{i+1} + 1) + h$$

$$2y_{i+1}^2 + y_{i+1} = y_i + 2y_{i+1}y_i + h$$

$$2y_{i+1}^2 + y_{i+1} - 2y_{i+1}y_i = y_i + h$$

$$2y_{i+1}^2 + y_{i+1} - 2y_{i+1}y_i - y_i - h = 0$$

$$2y_{i+1}^2 + (1 - 2y_i)y_{i+1} - y_i - h = 0$$

b. Calculons le discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (1 - 2y_i)^2 - [4 * 2 * (-y_i - h)]$$

$$\Delta = (1 - 2y_i)^2 + 8y_i + 8h$$

$$\Delta = 1 - 4y_i + (2y_i)^2 + 8y_i + 8h$$

$$\Delta = 1 + 4y_i + (2y_i)^2 + 8h$$

$$\Delta = (2y_i + 1)^2 + 8h$$

c. Déterminons y_{i+1} en fonction de y_i et h :

$$y_{i+1} = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$y_{i+1} = \frac{2y_i - 1 + \sqrt{(2y_i + 1)^2 + 8h}}{4}$$

6 Exercice 6

7 Exercice 7

8 Exercice 8