

DM Calcul Numérique

BOUTON Nicolas

November 13, 2020

Exercice 1

1. Utilisons l'interpolation lagrangienne.

On a :

$$f(t) \approx p(t)$$

On veut maintenant approcher l'intégrale de f , on va donc utiliser l'intégrale du polynôme de Lagrange :

$$\int_a^b f(t)dt \approx \int_a^b p(t)dt$$

Et on a :

$$\int_a^b p(t)dt = \sum_{i=1}^n f(t_i)w_i$$

Avec n le nombre de point et w_i :

$$w_i = \int_a^b L_i(t)dt$$

Essayons donc de calculer les polynôme de Lagrange associés aux points : $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$.

Point $x = 0$:

$$\begin{aligned}
L_0 &= \frac{(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})(x - 1)}{(0 - \frac{1}{3})(0 - \frac{2}{3})(0 - 1)} \\
&= \frac{(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9})(x - 1)}{(-\frac{2}{9})} \\
&= \frac{(x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x) - (x^2 - x + \frac{2}{9})}{(-\frac{2}{9})} \\
&= \frac{(x^3 - 2x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{2}{9})}{(-\frac{2}{9})} \\
&= -\frac{9(x^3 - 2x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{2}{9})}{2} \\
&= -\frac{9}{2}x^3 + 9x^2 - \frac{11}{2}x + 1
\end{aligned}$$

Point $x = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{(x - 0)(x - \frac{2}{3})(x - 1)}{(\frac{1}{3} - 0)(\frac{1}{3} - \frac{2}{3})(\frac{1}{3} - 1)} \\
&= \frac{(x^2 - \frac{2}{3}x)(x - 1)}{(\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})(-\frac{2}{3})} \\
&= \frac{(x^3 - \frac{2}{3}x^2) - (x^2 - \frac{2}{3}x)}{(\frac{2}{27})} \\
&= \frac{(x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x)}{(\frac{2}{27})} \\
&= \frac{27(x^3 - \frac{5}{3}x^2 + \frac{2}{3}x)}{2}
\end{aligned}$$

Point $x = \frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{(x - 0)(x - \frac{1}{3})(x - 1)}{(\frac{2}{3} - 0)(\frac{2}{3} - \frac{1}{3})(\frac{2}{3} - 1)} \\
&= \frac{(x^2 - \frac{1}{3}x)(x - 1)}{(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})(-\frac{1}{3})} \\
&= \frac{(x^3 - \frac{1}{3}x^2) - (x^2 - \frac{1}{3}x)}{-\frac{2}{27}} \\
&= \frac{(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x)}{-\frac{2}{27}} \\
&= -\frac{27(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x)}{2}
\end{aligned}$$

Point $x = 1$:

$$\begin{aligned} L_3 &= \frac{(x-0)(x-\frac{1}{3})(x-\frac{2}{3})}{(1-0)(1-\frac{1}{3})(1-\frac{2}{3})} \\ &= \frac{(x^2 - \frac{1}{3}x)(x - \frac{2}{3})}{(\frac{2}{3})(\frac{1}{3})} \\ &= \frac{(x^3 - \frac{1}{3}x^2) - (\frac{2}{3}x^2 - \frac{2}{3}\frac{1}{3}x)}{(\frac{2}{9})} \\ &= \frac{(x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x)}{(\frac{2}{9})} \\ &= \frac{9(x^3 - x^2 + \frac{2}{9}x)}{2} \end{aligned}$$

Calculons maintenant leurs intégrale :

Point $x = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 L_0(t) dt &= \int_0^1 \left(-\frac{9}{2}t^3 + 9t^2 - \frac{11}{2}t + 1 \right) dt \\ &= \left[-\frac{9}{8}t^4 + \frac{9}{3}t^3 - \frac{11}{4}t^2 + t \right]_0^1 \\ &= -\frac{9}{8} * 1^4 + \frac{9}{3} * 1^3 - \frac{11}{4} * 1^2 + 1 \\ &= \frac{3}{24} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Point $x = \frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 L_1(t) dt &= \int_0^1 \frac{27(t^3 - \frac{5}{3}t^2 + \frac{2}{3}t)}{2} dt \\&= \frac{27}{2} \int_0^1 \left(t^3 - \frac{5}{3}t^2 + \frac{2}{3}t \right) dt \\&= \frac{27}{2} \left[\left(\frac{1}{4}t^4 - \frac{5}{9}t^3 + \frac{2}{6}t^2 \right) \right]_0^1 \\&= \frac{27}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{9} + \frac{2}{6} \right) \\&= \frac{27}{2} \left(\frac{9}{36} - \frac{20}{36} + \frac{12}{36} \right) \\&= \frac{27}{2} \left(\frac{1}{36} \right) \\&= \frac{27}{72} \\&= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Point $x = \frac{2}{3}$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 L_2(t) dt &= \int_0^1 -\frac{27(t^3 - \frac{4}{3}t^2 + \frac{1}{3}t)}{2} dt \\&= -\frac{27}{2} \int_0^1 \left(t^3 - \frac{4}{3}t^2 + \frac{1}{3}t \right) dt \\&= -\frac{27}{2} \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{4}{9}t^3 + \frac{1}{6}t^2 \right]_0^1 \\&= -\frac{27}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{9} + \frac{1}{6} \right) \\&= -\frac{27}{2} \left(\frac{9}{36} - \frac{16}{36} + \frac{6}{36} \right) \\&= -\frac{27}{2} \left(-\frac{1}{36} \right) \\&= \frac{27}{72} \\&= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Point $x = 1$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 L_3(t)dt &= \int_0^1 \frac{9(t^3 - t^2 + \frac{2}{9}t)}{2} dt \\&= \frac{9}{2} \int_0^1 \left(t^3 - t^2 + \frac{2}{9}t \right) dt \\&= \frac{9}{2} \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{18}t^2 \right]_0^1 \\&= \frac{9}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{2}{18} \right) \\&= \frac{9}{2} \left(\frac{9}{36} - \frac{12}{36} + \frac{4}{36} \right) \\&= \frac{9}{2} \left(\frac{1}{36} \right) \\&= \frac{9}{72} \\&= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

Résultat :

$$w_0 = \frac{1}{8}, w_1 = \frac{3}{8}, w_2 = \frac{3}{8}, w_3 = \frac{1}{8}$$

2. Ici la méthode ne fonctionne pas.
Il nous faudra un point en plus tel que :

$$\int_0^1 f(t)dt \approx w_0 f(t_0) + w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2) + w_3 f(t_3) + w_4 f(t_4)$$

3. Formule de quadrature : Faisons un changement de variable.
On a $x = \frac{t-x_k}{x_{k+1}-x_k}$ donc $t = (x(x_{k+1} - x_k) + x_k)$

$$\begin{aligned}
\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx &\approx (x_{k+1} - x_k) \int_0^1 f(x(x_{k+1} - x_k) + x_k)dx \\
&\approx (x_{k+1} - x_k) \\
&\quad * [w_0 f((x_{k+1} - x_k)0 + x_k) \\
&\quad + w_1 f\left((x_{k+1} - x_k)\frac{1}{3} + x_k\right) \\
&\quad + w_2 f\left((x_{k+1} - x_k)\frac{2}{3} + x_k\right) \\
&\quad + w_3 f((x_{k+1} - x_k)1 + x_k)] \\
&\approx (x_{k+1} - x_k) \\
&\quad * \left[\frac{1}{8} f((x_{k+1} - x_k)0 + x_k) \right. \\
&\quad + \frac{3}{8} f\left((x_{k+1} - x_k)\frac{1}{3} + x_k\right) \\
&\quad + \frac{3}{8} f\left((x_{k+1} - x_k)\frac{2}{3} + x_k\right) \\
&\quad \left. + \frac{1}{8} f((x_{k+1} - x_k)1 + x_k) \right] \\
&\approx \frac{(x_{k+1} - x_k)}{8} \left[f(x_k) + 3f\left(\frac{1}{3}x_{k+1} + \frac{2}{3}x_k\right) \right. \\
&\quad \left. + 3f\left(\frac{2}{3}x_{k+1} + \frac{1}{3}x_k\right) + f(x_{k+1}) \right]
\end{aligned}$$

4. Formule composite :

On a $x_k = a + kh$ et $h = \frac{b-a}{N}$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\approx \sum_{k=0}^{N-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \\
&\approx \sum_{k=0}^{N-1} h \frac{(x_{k+1} - x_k)}{8} \left[f(x_k) + 3f\left(\frac{1}{3}x_{k+1} + \frac{2}{3}x_k\right) \right. \\
&\quad \left. + 3f\left(\frac{2}{3}x_{k+1} + \frac{1}{3}x_k\right) + f(x_{k+1}) \right] \\
&\approx \sum_{k=0}^{N-1} h \frac{(a * (k+1)h - a - kh)}{8} \left[f(x_k) + 3f\left(\frac{1}{3}x_{k+1} + \frac{2}{3}x_k\right) \right. \\
&\quad \left. + 3f\left(\frac{2}{3}x_{k+1} + \frac{1}{3}x_k\right) + f(x_{k+1}) \right] \\
&\approx \sum_{k=0}^{N-1} \frac{h}{8} \left[f(x_k) + 3f\left(\frac{1}{3}x_{k+1} + \frac{2}{3}x_k\right) \right. \\
&\quad \left. + 3f\left(\frac{2}{3}x_{k+1} + \frac{1}{3}x_k\right) + f(x_{k+1}) \right]
\end{aligned}$$

5. Nom de la fonction : **fourpoints**

Paramètre d'entrées :

- **a** : borne inférieure de l'intervalle
- **b** : borne supérieure de l'intervalle
- **N** : nombre de pas
- **f** : fonction f

Paramètre de sortie :

- **res** : résultat de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$

Explication du code :

- Pour moi $x_k = k * \frac{b-a}{N}$
- Le reste est triviale

Résultat numérique :

1er test : **fourpoints(0, 1, 1, mysquare)**

- $a = 0$
- $b = 1$

- $N = 1$
- f : mysquare fonction $f(x) = x^2$
- **résultat** : 0.3333333

2ème test : **fourpoints(0, 10, 1, mysquare)**

- $a = 0$
- $b = 10$
- $N = 1$
- f : mysquare fonction $f(x) = x^2$
- **résultat** : 0.3333333

3ème test : **fourpoints(0, 100, 1, mypolynome)**

- $a = 0$
- $b = 100$
- $N = 1$
- f : mypolynome fonction $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{67}{4}x^2 + 7$
- **résultat** : -2749300.0

Exercice 2

1. (a) S_f est un polynôme de degré inférieur ou égale à 3.
Donc S_f'' est un polynôme de degré inférieur ou égale à 1.
On connaît deux points :

- au point x_k : $S_f''(x_k) = M_k$
- au point x_{k+1} : $S_f''(x_{k+1}) = M_{k+1}$

Et on sait que $h = \frac{b-a}{N}$

Donc on peut appliquer la méthode de Lagrange :

$$L_0 = \frac{(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k+1})}$$

$$L_1 = \frac{(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_k)}$$

$$\begin{aligned} S_f''(x) &= S_f''(x_k)L_0 + S_f''(x_{k+1})L_1 \\ &= M_k \frac{(x - x_{k+1})}{(x_k - x_{k+1})} + M_{k+1} \frac{(x - x_k)}{(x_{k+1} - x_k)} \\ &= -\frac{M_k}{h}(x - x_{k+1}) + \frac{M_{k+1}}{h}(x - x_k) \end{aligned}$$

car on a : $x_{k+1} - x_k = a + (k+1)h - (a + kh) = h$

- (b) On a :

$$S_f''(x) = -\frac{M_k}{h}(x - x_{k+1}) + \frac{M_{k+1}}{h}(x - x_k)$$

En intégrant une fois on obtient :

$$S_f'(x) = -\frac{M_k}{2h}(x - x_{k+1})^2 + \frac{M_{k+1}}{2h}(x - x_k)^2 + C$$

avec C une constante.

En intégrant une nouvelle fois on obtient ;

$$S_f(x) = -\frac{M_k}{6h}(x - x_{k+1})^3 + \frac{M_{k+1}}{6h}(x - x_k)^3 + Cx + D$$

avec D une constante.

Calculons $S_f(x_k)$:

$$\begin{aligned} S_f(x_k) &= -\frac{M_k}{6h}(x_k - x_{k+1})^3 + \frac{M_{k+1}}{6h}(x_k - x_k)^3 + Cx_k + D \\ &= -\frac{M_k}{6h}(x_k - x_{k+1})^3 + Cx_k + D \end{aligned}$$

Calculons $S_f(x_{k+1})$:

$$\begin{aligned} S_f(x_{k+1}) &= -\frac{M_k}{6h}(x_{k+1} - x_{k+1})^3 + \frac{M_{k+1}}{6h}(x_{k+1} - x_k)^3 + Cx_{k+1} + D \\ &= \frac{M_{k+1}}{6h}(x_{k+1} - x_k)^3 + Cx_{k+1} + D \end{aligned}$$

On a donc le système suivant :

$$\begin{cases} -\frac{M_k}{6h}(x_k - x_{k+1})^3 + Cx_k + D = y_k \\ \frac{M_{k+1}}{6h}(x_{k+1} - x_k)^3 + Cx_{k+1} + D = y_{k+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{M_k}{6h}(x_k - x_{k+1})^3 + Cx_k + D = y_k \\ \frac{M_{k+1}}{6h}(x_{k+1} - x_k)^3 + Cx_{k+1} + D - \left(-\frac{M_k}{6h}(x_k - x_{k+1})^3 + Cx_k + D\right) = y_{k+1} - y_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{M_k}{6h}(x_k - x_{k+1})^3 + Cx_k + D = y_k \\ \frac{1}{6h}(M_{k+1}(x_{k+1} - x_k)^3 + M_k(x_k - x_{k+1})^3) + C(x_{k+1} - x_k) = y_{k+1} - y_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{M_k}{6h}(x_k - x_{k+1})^3 + Cx_k + D = y_k \\ \frac{1}{6h}(M_{k+1}h^3 + M_k(-h^3)) + Ch = y_{k+1} - y_k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{M_k}{6h}(x_k - x_{k+1})^3 + Cx_k + D = y_k \\ C = \frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h^3}{6h^2} + \frac{M_k h^3}{6h^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{M_k}{6h}(x_k - x_{k+1})^3 + Cx_k + D = y_k \\ C = \frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Cx_k + D = y_k + \frac{M_k}{6h}(x_k - x_{k+1})^3 \\ C = \frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Cx_k + D = y_k - \frac{M_k h^2}{6} \\ C = \frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = y_k - \frac{M_k h^2}{6} - \left(\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6}\right)x_k \\ C = \frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \end{cases}$$

Maintenant remplaçons C et D par leurs valeurs :

$$S_f(x) = -\frac{M_k}{6h}(x - x_{k+1})^3 + \frac{M_{k+1}}{6h}(x - x_k)^3 + Cx + y_k - \frac{M_k h^2}{6} - Cx_k$$

$$\begin{aligned} S_f(x) &= -\frac{M_k}{6h}(x - x_{k+1})^3 + \frac{M_{k+1}}{6h}(x - x_k)^3 \\ &\quad + \left(\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \right) x \\ &\quad + y_k - \frac{M_k h^2}{6} \\ &\quad - \left(\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \right) x_k \end{aligned}$$

Donc on a :

$$\begin{aligned} S_f(x) &= -\frac{M_k}{6h}(x - x_{k+1})^3 + \frac{M_{k+1}}{6h}(x - x_k)^3 \\ &\quad + \left(\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \right) (x - x_k) \\ &\quad + y_k - \frac{M_k h^2}{6} \end{aligned}$$

Et on a :

$$S_f(x) = A_k(x - x_{k+1})^3 + B_k(x - x_k)^3 + C_k(x - x_k) + D_k$$

Finalement on trouve :

$$\begin{cases} A_k = -\frac{M_k}{6h} \\ B_k = \frac{M_{k+1}}{6h} \\ C_k = \frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \\ D_k = y_k - \frac{M_k h^2}{6} \end{cases}$$

(c) Commençons par calculer $S'_f(x)$ les calculs seront plus faciles avec :

$$\begin{aligned} S'_f(x) &= 3A_k(x - x_{k+1})^2 + 3B_k(x - x_k)^2 + C_k \\ &= -\frac{M_k}{2h}(x - x_{k+1})^2 + \frac{M_{k+1}}{2h}(x - x_k)^2 \\ &\quad + \left(\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \right) \end{aligned}$$

Calculons maintenant $S'_f(x_k)$:

$$\begin{aligned}
S'_f(x_k) &= -\frac{M_k}{2h}(x_k - x_{k+1})^2 + \frac{M_{k+1}}{2h}(x_k - x_k)^2 \\
&\quad + \left(\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \right) \\
&= -\frac{M_k}{2h}h^2 + \left(\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \right) \\
&= \frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h^2}{6h} + \frac{M_k h^2}{6h} - \frac{3M_k h^2}{6h} \\
&= \frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{h}{6}M_{k+1} - \frac{h}{3}M_k
\end{aligned}$$

Calculons maintenant $S'_f(x_{k-1})$:

Si on pose $k = k - 1$ on a l'équation suivante :

$$S'_f(x_{k-1}) = \frac{y_k - y_{k-1}}{h} - \frac{h}{6}M_k - \frac{h}{3}M_{k-1}$$

Comme on a posé $k = k - 1$ ici, on doit s'assurer que $1 \leq k$ car sinon on aurait un k négatif. Et évidemment $k \leq N - 1$ car sinon $k + 1 > N$.

Supposons maintenant que h est très petit, c'est-à-dire que la différence des dérivés de $S'_f(x_k)$ et $S'_f(x_{k-1})$ est quasiment nulle. On peut donc dire que $S'_f(x_k) = S'_f(x_{k-1})$. Et on a :

$$\begin{aligned}
S'_f(x_k) &= S'_f(x_{k-1}) \\
\frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{h}{6}M_{k+1} - \frac{h}{3}M_k &= \frac{y_k - y_{k-1}}{h} - \frac{h}{6}M_k - \frac{h}{3}M_{k-1} \\
\frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h} &= -\frac{h}{6}M_k - \frac{h}{3}M_{k-1} + \frac{h}{6}M_{k+1} + \frac{h}{3}M_k \\
\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h} &= -\frac{h}{6}M_k - \frac{2h}{6}M_{k-1} + \frac{h}{6}M_{k+1} + \frac{2h}{6}M_k \\
6\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h} &= -hM_k - 2hM_{k-1} + hM_{k+1} + 2hM_k
\end{aligned}$$

Il faut calculer $S_f(x_{k-1})$ et $S''_f(x_{k-1})$.

$$\begin{aligned}
S''_f(x_{k-1}) &= -\frac{M_k}{h}(x_{k-1} - x_{k+1}) + \frac{M_{k+1}}{h}(x_{k-1} - x_k) \\
M_{k-1} &= -\frac{M_k}{h}(-2h) + \frac{M_{k+1}}{h}(-h)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_f(x_{k-1}) &= -\frac{M_k}{6h}(x_{k-1} - x_{k+1})^3 + \frac{M_{k+1}}{6h}(x_{k-1} - x_k)^3 \\
&\quad + \left(\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \right) (x_{k-1} - x_k) \\
&\quad + y_k - \frac{M_k h^2}{6} \\
S_f(x_{k-1}) &= -\frac{M_k}{6h}(-2h)^3 + \frac{M_{k+1}}{6h}(-h)^3 \\
&\quad + \left(\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \right) (-h) \\
&\quad + y_k - \frac{M_k h^2}{6}
\end{aligned}$$

Donc cela nous ramène à :

$$\begin{aligned}
S_f(x_{k-1}) &= -\frac{M_k}{6h}(-2h)(2h)^2 + \frac{M_{k+1}}{6h}(-h)(h)^2 \\
&\quad + \left(\frac{y_{k+1}}{h} - \frac{y_k}{h} - \frac{M_{k+1}h}{6} + \frac{M_k h}{6} \right) (-h) \\
&\quad + y_k - \frac{M_k h^2}{6} \\
y_{k-1} &= -\frac{M_k}{h}(-2h)\frac{(2h)^2}{6} + \frac{M_{k+1}}{h}(-h)\frac{(h)^2}{6} \\
&\quad - \left(y_{k+1} - y_k - \frac{M_{k+1}h^2}{6} + \frac{M_k h^2}{6} \right) \\
&\quad + y_k - \frac{M_k h^2}{6} \\
y_{k-1} &= \left(-\frac{M_k}{h}(-2h) - \frac{M_k}{h}(-2h)4 + \frac{M_{k+1}}{h}(-h) \right) \frac{(h)^2}{6} \\
&\quad - \left(y_{k+1} - y_k - \frac{M_{k+1}h^2}{6} + \frac{M_k h^2}{6} \right) \\
&\quad + y_k - \frac{M_k h^2}{6} \\
y_{k-1} &= \left(-\frac{M_k}{h}(-2h) + \frac{M_{k+1}}{h}(-h) - \frac{M_k}{h}(-2h)4 \right) \frac{(h)^2}{6} \\
&\quad - \left(y_{k+1} - y_k - \frac{M_{k+1}h^2}{6} + \frac{M_k h^2}{6} \right) \\
&\quad + y_k - \frac{M_k h^2}{6}
\end{aligned}$$

Et on voit la relation de M_{k-1}

$$y_{k-1} = \frac{M_{k-1}h^2}{6} + \frac{8M_k h^2}{6} - y_{k+1} + 2y_k + \frac{M_{k+1}h^2}{6} - \frac{2M_k h^2}{6}$$

Après réarrangement :

$$y_{k-1} = -y_{k+1} + 2y_k + \frac{M_{k+1}h^2}{6} - \frac{2M_k h^2}{6} + \frac{M_{k-1}h^2}{6} + \frac{8M_k h^2}{6}$$

$$y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k = \frac{M_{k+1}h^2}{6} + \frac{6M_k h^2}{6} + \frac{M_{k-1}h^2}{6}$$

$$6 \frac{y_{k+1} + y_{k-1} - 2y_k}{h^2} = M_{k+1} + 6M_k + M_{k-1}$$

2.

Esercice 3

Annexe