

TD Calcul Numérique

BOUTON Nicolas

October 26, 2020

Exercice 1

1. Voir la fonction **pointgauche** dans le fichier "exo1.sci".
2. Voir la fonction **trapeze** dans le fichier "exo1.sci".
3. Voir la fonction **int_simpson** dans le fichier "exo1.sci".
4. Voir la fonction **sin_pi_x** dans le fichier "exo1.sci".

Exercice 2

On a le système suivant :

$$\begin{cases} p(-3) = 3 \\ p(-1) = 7 \\ p(3) = 7 \\ p(5) = -3 \end{cases}$$

Utilisons la méthode des **différence divisé** :

Première étape :

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -3 & 3 \\ -1 & 7 \end{array} \right\} \frac{7 - 3}{-1 - (-3)} = 2$$

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -1 & 7 \\ 3 & 7 \end{array} \right\} \frac{7 - 7}{3 - (-1)} = 0$$

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ 3 & 7 \\ 5 & -3 \end{array} \right\} \frac{-3-7}{5-3} = -5$$

Deuxième étape :

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -3 & 2 \\ 3 & 0 \end{array} \right\} \frac{0-2}{3-(-3)} = -\frac{2}{6}$$

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -1 & 0 \\ 5 & -5 \end{array} \right\} \frac{-5-0}{5-(-1)} = -\frac{5}{6}$$

Troisième étape :

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -3 & -\frac{2}{6} \\ 5 & -\frac{5}{6} \end{array} \right\} \frac{-\frac{5}{6}-(-\frac{2}{6})}{5-(-3)} = \frac{-\frac{3}{6}}{8} = -\frac{3}{48}$$

Maintenant on peut calculer $p(x)$:

$$\begin{aligned}
p(x) = & 3 + 2(x - (-3)) \\
& + \left(-\frac{2}{6}\right)(x - (-3))(x - (-1)) \\
& - \frac{3}{48}(x - (-3))(x - (-1))(x - 3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) = & 3 + 2x + 6 \\
& - \frac{2(x+3)(x+1)}{6} \\
& - \frac{3(x+3)(x+1)(x-3)}{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) = & \frac{144 + 96x + 288}{48} \\
& - \frac{(2x+6)(x+1)}{6} \\
& - \frac{(3x+9)(x+1)(x-3)}{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) = & \frac{144 + 96x + 288}{48} \\
& - \frac{2x^2 + 2x + 6x + 6}{6} \\
& - \frac{(3x^2 + 3x + 9x + 9)(x-3)}{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) = & \frac{144 + 96x + 288}{48} \\
& - \frac{2x^2 + 8x + 6}{6} \\
& - \frac{3x^3 - 9x^2 + 11x^2 - 33x + 9x - 27}{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) = & \frac{144 + 96x + 288}{48} \\
& - \frac{16x^2 + 64x + 48}{48} \\
& - \frac{3x^3 + 2x^2 - 24x - 27}{48}
\end{aligned}$$

$$p(x) = \frac{144 + 96x + 288 - (16x^2 + 64x + 48) - (3x^3 + 2x^2 - 24x - 27)}{48}$$

$$p(x) = \frac{-3x^3 - 18x^2 + 56x + 411}{48}$$

$$p(x) = -\frac{3}{48}x^3 - \frac{6}{16}x^2 + \frac{7}{6}x + \frac{411}{48}$$

Exercice 3

1. Calculons $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$:

Calcul de $f(-2)$:

$$f(-2) = \ln(2 \cos \left(\frac{\pi(-2)}{4} \right)^2 + 1)$$

$$f(-2) = \ln(2(0)^2 + 1)$$

$$f(-2) = \ln(1)$$

$$f(-2) = 0$$

Calcul de $f(-1)$:

$$f(-1) = \ln(2 \cos \left(\frac{\pi(-1)}{4} \right)^2 + 1)$$

$$f(-1) = \ln(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 1)$$

$$f(-1) = \ln(2 \left(\frac{2}{4} \right) + 1)$$

$$f(-1) = \ln(1 + 1)$$

$$f(-1) = \ln(2)$$

$$f(-1) = 0.6931471$$

Calcul de $f(0)$:

$$f(0) = \ln(2 \cos \left(\frac{\pi(0)}{4} \right)^2 + 1)$$

$$f(0) = \ln(1)$$

$$f(0) = 0$$

Calcul de $f(1)$:

$$f(1) = \ln(2 \cos \left(\frac{\pi(1)}{4} \right)^2 + 1)$$

$$f(1) = \ln(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 1)$$

$$f(1) = \ln(2 \left(\frac{2}{4} \right) + 1)$$

$$f(1) = \ln(1 + 1)$$

$$f(1) = \ln(2)$$

$$f(1) = 0.6931471$$

Calcul de $f(2)$:

$$f(2) = \ln(2 \cos \left(\frac{\pi(2)}{4} \right)^2 + 1)$$

$$f(2) = \ln(2(0)^2 + 1)$$

$$f(2) = \ln(1)$$

$$f(2) = 0$$

Récapitulatif :

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(-1) = \ln(2) \\ f(0) = 0 \\ f(1) = \ln(2) \\ f(2) = 0 \end{cases}$$

2. Essayons de trouver un polynôme p de degré inférieur ou égale à 3 tel que :

$$\begin{cases} p(-2) = f(-2) \\ p(-1) = f(-1) \\ p(1) = f(1) \\ p(2) = f(2) \end{cases}$$

Appliquons la méthodes des différences divisé :

$$\begin{cases} p(-2) = 0 \\ p(-1) = \ln(2) \\ p(-1) = \ln(2) \\ p(2) = 0 \end{cases}$$

Première étape :

$$\begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -2 & 0 \\ -1 & \ln(2) \end{array} \left\} \frac{\ln(2) - 0}{-1 - (-2)} = \ln(2)$$

$$\begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -1 & \ln(2) \\ 1 & \ln(2) \end{array} \left\} \frac{\ln(2) - \ln(2)}{1 - (-1)} = 0$$

$$\begin{array}{cc} x_i & y_i \\ 1 & \ln(2) \\ 2 & 0 \end{array} \left\} \frac{0 - \ln(2)}{2 - 1} = -\ln(2)$$

Deuxième étape :

$$\begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -2 & \ln(2) \\ 1 & 0 \end{array} \left\} \frac{0 - \ln(2)}{1 - (-2)} = -\frac{\ln(2)}{3}$$

$$\begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -1 & 0 \\ 2 & -\ln(2) \end{array} \left\} \frac{-\ln(2) - 0}{2 - (-1)} = -\frac{\ln(2)}{3}$$

Troisième étape :

$$\begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -2 & -\frac{\ln(2)}{3} \\ 2 & -\frac{\ln(2)}{3} \end{array} \left\} \frac{-\frac{\ln(2)}{3} - (-\frac{\ln(2)}{3})}{2 - (-2)} = 0$$

Essayons de calculer p :

$$\begin{aligned}
p(x) &= 0 \\
&+ \ln(2)(x - (-2)) \\
&- \frac{\ln(2)}{3}(x - (-2))(x - (-1)) \\
&+ 0(x - (-2))(x - (-1))(x - 1) \\
p(x) &= \ln(2)(x + 2) \\
&- \frac{\ln(2)}{3}(x + 2)(x + 1) \\
p(x) &= \ln(2)x + 2\ln(2) \\
&- \frac{\ln(2)}{3}(x^2 + x + 2x + 2) \\
p(x) &= \ln(2)x + 2\ln(2) \\
&- \frac{\ln(2)x^2 + 3\ln(2)x + 2\ln(2)}{3} \\
p(x) &= \frac{3\ln(2)x + 6\ln(2)}{3} \\
&- \frac{\ln(2)x^2 + 3\ln(2)x + 2\ln(2)}{3} \\
p(x) &= \frac{3\ln(2)x + 6\ln(2) - \ln(2)x^2 - 3\ln(2)x - 2\ln(2)}{3} \\
p(x) &= \frac{-\ln(2)x^2 + 4\ln(2)}{3} \\
p(x) &= -\frac{\ln(2)}{3}x^2 + \frac{4\ln(2)}{3}
\end{aligned}$$

3. Essayons de trouver un polynôme q de degré inférieur ou égale à 4 tel que :

$$\begin{cases} q(-2) = f(-2) \\ q(-1) = f(-1) \\ q(0) = f(0) \\ q(1) = f(1) \\ q(2) = f(2) \end{cases}$$

Appliquons la méthode des différences divisées :

$$\begin{cases} q(-2) = 0 \\ q(-1) = \ln(2) \\ q(0) = 0 \\ q(-1) = \ln(2) \\ q(2) = 0 \end{cases}$$

Première étape :

$$\begin{matrix} x_i & y_i \\ -2 & 0 \\ -1 & \ln(2) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} x_i & y_i \\ -2 & 0 \\ -1 & \ln(2) \end{matrix}} \right\} \frac{\ln(2) - 0}{-1 - (-2)} = \ln(2)$$

$$\begin{matrix} x_i & y_i \\ -1 & \ln(2) \\ 0 & 0 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} x_i & y_i \\ -1 & \ln(2) \\ 0 & 0 \end{matrix}} \right\} \frac{0 - \ln(2)}{0 - (-1)} = -\ln(2)$$

$$\begin{matrix} x_i & y_i \\ 0 & 0 \\ 1 & \ln(2) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} x_i & y_i \\ 0 & 0 \\ 1 & \ln(2) \end{matrix}} \right\} \frac{\ln(2) - 0}{1 - 0} = \ln(2)$$

$$\begin{matrix} x_i & y_i \\ 1 & \ln(2) \\ 2 & 0 \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} x_i & y_i \\ 1 & \ln(2) \\ 2 & 0 \end{matrix}} \right\} \frac{0 - \ln(2)}{2 - 1} = -\ln(2)$$

Deuxième étape :

$$\begin{matrix} x_i & y_i \\ -2 & \ln(2) \\ 0 & -\ln(2) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} x_i & y_i \\ -2 & \ln(2) \\ 0 & -\ln(2) \end{matrix}} \right\} \frac{-\ln(2) - \ln(2)}{0 - (-2)} = -\ln(2)$$

$$\begin{matrix} x_i & y_i \\ -1 & -\ln(2) \\ 1 & \ln(2) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} x_i & y_i \\ -1 & -\ln(2) \\ 1 & \ln(2) \end{matrix}} \right\} \frac{\ln(2) - (-\ln(2))}{1 - (-1)} = \ln(2)$$

$$\begin{matrix} x_i & y_i \\ 0 & \ln(2) \\ 2 & -\ln(2) \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} x_i & y_i \\ 0 & \ln(2) \\ 2 & -\ln(2) \end{matrix}} \right\} \frac{-\ln(2) - \ln(2)}{2 - 0} = -\ln(2)$$

Troisième étape :

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -2 & -\ln(2) \\ 1 & \ln(2) \end{array} \right\} \frac{\ln(2) - (-\ln(2))}{1 - (-2)} = \frac{2\ln(2)}{3}$$

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -1 & \ln(2) \\ 2 & -\ln(2) \end{array} \right\} \frac{-\ln(2) - \ln(2)}{2 - (-1)} = -\frac{2\ln(2)}{3}$$

Quatrième étape :

$$\left. \begin{array}{cc} x_i & y_i \\ -2 & \frac{2\ln(2)}{3} \\ 2 & -\frac{2\ln(2)}{3} \end{array} \right\} \frac{-\frac{2\ln(2)}{3} - \frac{2\ln(2)}{3}}{2 - (-2)} = -\frac{\frac{4\ln(2)}{3}}{4} = -\frac{\ln(2)}{3}$$

Essayons de calculer q:

$$\begin{aligned}
q(x) &= 0 \\
&+ \ln(2)(x - (-2)) \\
&- \ln(2)(x - (-2))(x - (-1)) \\
&+ \frac{2\ln(2)}{3}(x - (-2))(x - (-1))(x - 0) \\
&- \frac{\ln(2)}{3}(x - (-2))(x - (-1))(x - 0)(x - 1) \\
q(x) &= \ln(2)(x + 2) \\
&- \ln(2)(x + 2)(x + 1) \\
&+ \frac{2\ln(2)}{3}(x + 2)(x + 1)x \\
&- \frac{\ln(2)}{3}(x + 2)(x + 1)x(x - 1) \\
q(x) &= \ln(2)(x + 2) \\
&- \ln(2)(x^2 + x + 2x + 2) \\
&+ \frac{2\ln(2)}{3}(x^2 + x + 2x + 2)x \\
&- \frac{\ln(2)}{3}(x^2 + x + 2x + 2)x(x - 1) \\
q(x) &= \ln(2)(x + 2) \\
&- \ln(2)(x^2 + 3x + 2) \\
&+ \frac{2\ln(2)}{3}(x^3 + 3x^2 + 2x) \\
&- \frac{\ln(2)}{3}(x^3 + 3x^2 + 2x)(x - 1) \\
q(x) &= \ln(2)(x + 2) \\
&- \ln(2)(x^2 + 3x + 2) \\
&+ \frac{2\ln(2)}{3}(x^3 + 3x^2 + 2x) \\
&- \frac{\ln(2)}{3}(x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x^3 - 3x^2 - 2x) \\
q(x) &= \ln(2)(x + 2) \\
&- \ln(2)(x^2 + 3x + 2) \\
&+ \frac{2\ln(2)}{3}(x^3 + 3x^2 + 2x) \\
&- \frac{\ln(2)}{3}(x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x) \\
q(x) &= \ln(2)x + 2\ln(2) \\
&- \ln(2)x^2 - 3\ln(2)x - 2\ln(2) \\
&+ \frac{2\ln(2)}{3}x^3 + \frac{6\ln(2)}{3}x^2 + \frac{4\ln(2)}{3}x \\
&- \frac{\ln(2)}{3}x^4 - \frac{2\ln(2)}{3}x^3 + \frac{\ln(2)}{3}x^2 + \frac{2\ln(2)}{3}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
q(x) &= -\frac{\ln(2)}{3}x^4 \\
&+ \frac{2\ln(2)}{3}x^3 - \frac{2\ln(2)}{3}x^3 \\
&- \ln(2)x^2 + \frac{6\ln(2)}{3}x^2 + \frac{\ln(2)}{3}x^2 \\
&+ \ln(2)x - 3\ln(2)x + \frac{4\ln(2)}{3}x + \frac{2\ln(2)}{3}x \\
&+ 2\ln(2) - 2\ln(2) \\
q(x) &= -\frac{\ln(2)}{3}x^4 \\
&- \frac{3\ln(2) - 6\ln(2) - \ln(2)}{3}x^2 \\
&+ \frac{3\ln(2) - 9\ln(2) + 4\ln(2) + 2\ln(2)}{3}x \\
q(x) &= -\frac{\ln(2)}{3}x^4 + \frac{4\ln(2)}{3}x^2
\end{aligned}$$

4. Différence entre q et p :

$$\begin{aligned}
q - p &= -\frac{\ln(2)}{3}x^4 + \frac{4\ln(2)}{3}x^2 - \left(-\frac{\ln(2)}{3}x^2 + \frac{4\ln(2)}{3}\right) \\
q - p &= -\frac{\ln(2)}{3}x^4 + \frac{4\ln(2)}{3}x^2 + \frac{\ln(2)}{3}x^2 - \frac{4\ln(2)}{3} \\
q - p &= -\frac{\ln(2)}{3}x^4 + \frac{5\ln(2)}{3}x^2 - \frac{4\ln(2)}{3}
\end{aligned}$$

Exercice 4

1. Voir la fonction **polyLag** dans le fichier "exo4.sci".
2. Voir la fonction **myinterpol** dans le fichier "exo4.sci".

Exercice 5

1. Euler Explicite

- a. Déterminons y_{i+1} en fonction de y_i :

$$y_{i+1} = y_i + hf(y_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \frac{1}{2y_i + 1}$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2y_i + 1}$$

- b. Voir la fonction **EulerExplicite** dans le fichier "exo5.sci".

2. Heun

- a. Déterminons y_{i+1} en fonction de y_i :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(y_i + hf(y_i)) + f(y_i))$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{2 \left(y_i + h \frac{1}{2y_i + 1} \right) + 1} + \frac{1}{2y_i + 1} \right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \left(\frac{1}{2y_i + \frac{2h}{2y_i + 1} + 1} + \frac{1}{2y_i + 1} \right)$$

- b. Voir la fonction **Heun** dans le fichier "exo5.sci".

3. Euler Implicite

- a. Déterminons un polynôme :

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + hf(y_{i+1}) \\
y_{i+1} &= y_i + h \frac{1}{2y_{i+1} + 1} \\
y_{i+1} &= \frac{y_i(2y_{i+1} + 1) + h}{2y_{i+1} + 1} \\
y_{i+1}(2y_{i+1} + 1) &= y_i(2y_{i+1} + 1) + h \\
2y_{i+1}^2 + y_{i+1} &= y_i + 2y_{i+1}y_i + h \\
2y_{i+1}^2 + y_{i+1} - 2y_{i+1}y_i &= y_i + h \\
2y_{i+1}^2 + y_{i+1} - 2y_{i+1}y_i - y_i - h &= 0 \\
2y_{i+1}^2 + (1 - 2y_i)y_{i+1} - y_i - h &= 0
\end{aligned}$$

b. Calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
\Delta &= (1 - 2y_i)^2 - [4 * 2 * (-y_i - h)] \\
\Delta &= (1 - 2y_i)^2 + 8y_i + 8h \\
\Delta &= 1 - 4y_i + (2y_i)^2 + 8y_i + 8h \\
\Delta &= 1 + 4y_i + (2y_i)^2 + 8h \\
\Delta &= (2y_i + 1)^2 + 8h
\end{aligned}$$

c. Déterminons y_{i+1} en fonction de y_i et h :

$$\begin{aligned}
y_{i+1} &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
y_{i+1} &= \frac{2y_i - 1 + \sqrt{(2y_i + 1)^2 + 8h}}{4}
\end{aligned}$$

d. Voir la fonction **EulerImplicite** dans le fichier "exo5.sci".

4. Affichage

a. Correspondances des colonnes :

- C2 : Euler Explicite, car les résultats obtenus sont inférieurs aux résultats exactes.
 - C3 : Heun, car c'est la méthode qui à la convergence la plus forte
 - C4 : Euler Implicite, car les résultats obtenus sont supérieurs aux résultats exactes.
- b. Voir la fonction **AfficheRes** dans le fichier "exo5.sci".
- c. Calculons le taux d'erreurs des 3 méthodes :
- Taux d'erreur avec la méthode d'Euler Explicite :

$$\begin{aligned}
 |e - e'| &= |0,5630146 - 0,5731410| \\
 &= 0.0101264 \\
 &= 1.01264\%
 \end{aligned}$$

Taux d'erreur avec la méthode d'Heun :

$$\begin{aligned}
 |e - e'| &= |0,5630146 - 0,5630245| \\
 &= 0.0000099 \\
 &= 0.00099\%
 \end{aligned}$$

Taux d'erreur avec la méthode d'Euler Implicite :

$$\begin{aligned}
 |e - e'| &= |0,5630146 - 0,5535927| \\
 &= 0.0094219 \\
 &= 0.94219\%
 \end{aligned}$$

Nous voyons clairement que les deux méthodes d'Euler sont presque équivalentes en termes de convergences excepté qu'elles convergent dans des sens différents, les valeurs d'Euler Explicite sont de plus en plus grandes que celles attendus et les valeurs d'Euler Implicite sont de plus en plus petites des valeurs attendus. On voit également que le taux d'erreur est quasiment nulle pour la méthode d'Heun.

Exercice 6

Partie I

Dans cette partie on a le système suivant :

$$\begin{cases} -u''(t) + c(t)u(t) = f(t), t \in [0, 1] \\ u(0) = \alpha, u'(0) = \beta \end{cases}$$

Et pour tout $t \geq 0$:

$$U(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix}$$

1. On a :

$$U'(t) = \begin{bmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{bmatrix}$$

Calculons $A(t)U(t) + B(t)$:

où

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t) & 0 \end{bmatrix}, B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -f(t) \end{bmatrix}, t \in I.$$

$$A(t)U(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'(t) \\ c(t)u(t) \end{bmatrix}$$

$$A(t)U(t) + B(t) = \begin{bmatrix} u'(t) \\ c(t)u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'(t) \\ c(t)u(t) - f(t) \end{bmatrix}$$

or

$$U'(t) = \begin{bmatrix} u'(t) \\ u''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'(t) \\ c(t)u(t) - f(t) \end{bmatrix}$$

Donc si u est solution de (E) et de (C) alors :

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t)$$

2. (a) On a l'équation suivante :

$$U'(t) = A(t)U(t) + B(t)$$

Et on a :

$$\begin{cases} U_{i+1} = U_i + hF(t_i, U_i) \\ U_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{i+1} = U_i + hA(t_i)U_i + hB(t_i) \\ U_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_{i+1} = U_i + h \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t_i) & 0 \end{bmatrix} U_i + h \begin{bmatrix} 0 \\ -f(t_i) \end{bmatrix} \\ U_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{cases}$$

- (b) On a :

$$\begin{cases} U_{i+1} = U_i + hA(t_i)U_i + hB(t_i) \\ U_0 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \end{cases}$$

Posons

$$U_i = \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_{i+1} \\ w_{i+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c(t_i) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ -f(t_i) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_i \\ w_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} w_i \\ c(t_i)u_i \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 0 \\ -f(t_i) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{cases} u_{i+1} = u_i + hw_i \\ w_{i+1} = w_i + hc(t_i)u_i - hf(t_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_i = \frac{-u_{i+1} + u_i}{h} \\ -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + c(t_i)u_i = f(t_i) \end{cases}$$

(c) Voir la fonction **resouScd** dans "exo6.sci".

Partie II

1. La formule de Taylor à l'ordre 4 donne :

$$\begin{cases} u(x_{i+1}) = u(x_i) + h_i u'(x_i) + \frac{h_i^2}{2} u''(x_i) + \frac{h_i^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{h_i^4}{4!} u^{(4)}(x_i) + O(h_i^4) \\ u(x_{i-1}) = u(x_i) - h_{i-1} u'(x_i) + \frac{h_{i-1}^2}{2} u''(x_i) - \frac{h_{i-1}^3}{3!} u^{(3)}(x_i) + \frac{h_{i-1}^4}{4!} u^{(4)}(x_i) + O(h_i^4) \end{cases}$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i$$

Comme on suppose que la subdivision est uniforme :

$$u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) = 2u(x_i) + h^2 u''(x_i) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(x_i) + O(h^4)$$

D'où

$$\begin{aligned} u''(x_i) &= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{h^2} + O(h^2) \\ &= \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{h^2} \end{aligned}$$

Cela inspire le problème approché :

$$\begin{cases} -\frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1}) - 2u(x_i)}{h^2} = c(x_i) u_i = f(x_i), 1 \leq i \leq n-1 \\ u_0 = u_n = 0 \end{cases}$$

Ce problème approché est un système linéaire :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} + c(t_1) & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c(t_2) & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c(t_3) & -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c(t_{n-3}) & -\frac{1}{h^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c(t_{n-2}) & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + c(t_{n-1}) \end{bmatrix}$$

et

$$X = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ - \\ u_{n-3} \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

et

$$B = \begin{bmatrix} f(u_1) \\ f(u_2) \\ f(u_3) \\ - \\ f(u_{n-3}) \\ f(u_{n-2}) \\ f(u_{n-1}) \end{bmatrix}$$

2.

$$\begin{aligned}
h^2 W^T A W &= h^2 W^T \begin{bmatrix} \frac{2w_1}{h^2} + c(u_1)w_1 - \frac{w_2}{h^2} \\ -\frac{w_1}{h^2} + \frac{2w_2}{h^2} + c(u_1)w_2 - \frac{w_3}{h^2} \\ \dots \\ -\frac{w_{n-3}}{h^2} + \frac{2w_{n-2}}{h^2} + c(u_{n-2})w_{n-2} - \frac{w_{n-1}}{h^2} \\ -\frac{w_{n-2}}{h^2} + \frac{2w_{n-1}}{h^2} + c(u_{n-1})w_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= h^2 \begin{pmatrix} w_1 \frac{2w_1}{h^2} + w_1 c(u_1)w_1 - w_1 \frac{w_2}{h^2} \\ -w_2 \frac{w_1}{h^2} + w_2 \frac{2w_2}{h^2} + w_2 c(u_1)w_2 - w_2 \frac{w_3}{h^2} \\ \dots \\ -w_{n-2} \frac{w_{n-3}}{h^2} + w_{n-2} \frac{2w_{n-2}}{h^2} + w_{n-2} c(u_{n-2})w_{n-2} - w_{n-2} \frac{w_{n-1}}{h^2} \\ -w_{n-1} \frac{w_{n-2}}{h^2} + w_{n-1} \frac{2w_{n-1}}{h^2} + w_{n-1} c(u_{n-1})w_{n-1} \end{pmatrix} \\
&= w_1^2 + h^2 c(t_1)w_1^2 - w_1 w_2 \\
&\quad - w_1 w_2 + w_2^2 + h^2 c(t_2)w_2^2 - w_2 w_3 \\
&= \dots \\
&\quad - w_{n-2} w_{n-3} + w_{n-2}^2 + h^2 c(t_{n-2})w_{n-2}^2 - w_{n-2} w_{n-1} \\
&\quad - w_{n-1} w_{n-2} + w_{n-1}^2 + h^2 c(t_{n-1})w_{n-1}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} (2 + h^2 c(ih))w_i^2 - 2 \sum_{i=2}^{n-1} w_{i-1} w_i
\end{aligned}$$

NOTE : [] = matrice, () = equation

3. $A = A^T$ donc A est symétrique car elle est tridiagonale et les valeurs sur les diagonales $i = j - 1$ et $i = j + 1$ sont constant et égaux.
4. Voir la fonction **partie2** dans "exo6.sci".
5. Voir la première et dernière valeur du tableau retourner par la fonction.

Partie III

1. On a :

$$\begin{cases} -u''(t) + c(t)u(t) = f(t) \\ u(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases}$$

Trouver $u \in V$ tq :

$$\begin{aligned} \forall v \in V, \quad & \int_a^b u'(x)v'(x)dx + \int_a^b c(x)u(x)v(x)dx \\ & = \int_a^b f(x)v(x)dx \end{aligned}$$

Le problème s'écrit alors :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tq} \\ \forall v \in V, a(u, v) = l(v) \end{cases}$$

où :

$$\begin{aligned} l : V &\rightarrow R \\ v &\rightarrow \int_a^b f(x)v(x)dx \end{aligned}$$

l est linéaire.

$$\begin{aligned} a : V \times V &\rightarrow R \\ (w, v) &\rightarrow \int_a^b w'(x)v'(x) + c(x)w(x)v(x)dx \end{aligned}$$

2. Approchons le problème :

Considérons un espace $V_h \subset V$ de dimension finie.

Posons $N = \dim(V_h)$

Soit w_1, \dots, w_n une base de V_h

Considérons le problème approché :

$$\iff \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tq :} \\ \forall v_h \in V_h, a(u_h, v_h) = l(v_h) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tq :} \\ \forall 1 \leq i \leq n, a(u_h, w_i) = l(w_i) \end{cases}$$

Cherchons $u_h = \sum_{k=1}^n \alpha_k w_k$ tq :

$$\iff \forall 1 \leq i \leq n, a(\sum_{k=1}^n \alpha_k w_k, w_i) = l(w_i)$$

$$\iff \forall 1 \leq i \leq n, \sum_{k=1}^n a(w_k, w_i) \alpha_k = l(w_i)$$

Ce qui nous donne $AU = F$:

$$\begin{bmatrix} a(w_1, w_1) & \dots & a(w_1, w_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ a(w_n, w_1) & \dots & a(w_n, w_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l(w_1) \\ \dots \\ l(w_n) \end{bmatrix}$$

3. Soit $w_k = I_h^{-1}(e_k)$ où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de R^{n-1} .

$$\begin{aligned} w_k = I_h^{-1}(e_k) &\iff I_h(w_k) = e_k \\ &\iff (w_k(t_1), \dots, w_k(t_k), \dots, w_k(t_{n-1})) \\ &= (0, \dots, 1, \dots, 0) \\ &\iff w_k(t_j) = \delta_{k,j} \quad 1 \leq j \leq n-1 \end{aligned}$$

Mettre la figure.

$$w_k(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{k-1}}{t_k-t_{k-1}} & \text{si } t \in [t_{k-1}, t_k] \\ \frac{t-t_{k+1}}{t_k-t_{k+1}} & \text{si } t \in [t_k, t_{k+1}] \\ 0 & \text{si } t \notin [t_{k-1}, t_{k+1}] \end{cases}$$

Si la subdivision est uniforme on a :

$$w_k(t) = \begin{cases} \frac{t-t_{k-1}}{h} & \text{si } t \in [t_{k-1}, t_k] \\ -\frac{t-t_{k+1}}{h} & \text{si } t \in [t_k, t_{k+1}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

4.

5. Lorsque $|i - j| > 1$, $a(i, j) = 0$. A est une matrice tridiagonale.

6.

7.

Exercise 7

Exercise 8