Mini Projet

Nicolas BOUTON

November 16, 2020

1. Nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &u(t) = ke^{-t} \\ &u(t=0) = 1 = ke^0 = k \\ &u(t) = e^{-t} \end{aligned}$$

2. Appliquons la méthode d'Euler explicite :

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= u_m + \Delta t f(u_m) \\ &= u_m + \Delta t(-u_m) \\ &= u_m(1 - \Delta t) \end{aligned}$$

   Nous remarquons que c'est une suite géométique de raison $1-\Delta t$. Donc on en déduit que $\forall m \in [0, n], u_m = (1 - \Delta t)^m$

3. Calculons la solution exacte en $t = 1$:

$$u(1) = e^{-1} \approx 0,37$$

   Maintenant essayons de voir la convergence de la solution trouvé avec la méthode d'Euler explicite :

   On pose $\Delta t = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} u_n &= (1 - \Delta t)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} 1^n = 0$$

Donc on en conclu que lorsque Δt tend vers 0, alors u_m converge vers 0.

4. Appliquons le développenment limité de taylor :

$$\begin{aligned} u(t_m) &= u(t_{m+1}) + u'(t_{m+1})(t_m - t_{m+1}) + O(t_m - t_{m+1}) \\ &= u(t_{m+1}) + u'(t_{m+1})(-\Delta t) + O(-\delta t) \\ &= u(t_{m+1}) - u'(t_{m+1})\Delta t \\ u'(t_{m+1}) &= \frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Et on a $u'(t_{m+1}) = f(u(t_{m+1})) = -u(t_{m+1})$

Donc

$$\frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} = u'(t_{m+1}) \approx f(u(t_{m+1}))$$

5. Le schéma d'euler implicite :

$$u(t_{m+1}) = u(t_m) + \Delta t f(u(t_{m+1}))$$

6.

$$\begin{aligned} u(t_{m+1}) &= u(t_m) + \Delta t f(u(t_{m+1})) \\ u(t_m) &= u(t_{m+1}) - \Delta t f(u(t_{m+1})) \\ u(t_m) &= u(t_{m+1}) + \Delta t u(t_{m+1}) \\ u(t_m) &= u(t_{m+1})(1 + \Delta t) \\ u(t_{m+1}) &= \frac{u(t_m)}{(1 + \Delta t)} \\ u(t_m) &= \frac{u(t_{m-1})}{(1 + \Delta t)} \\ u(t_m) &= \frac{1}{(1 + \Delta t)^m} \end{aligned}$$

7. Partons d'Euler explicite :

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= u_m + \Delta t f(u_m) \\ \frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta t} &= f(u_m) \end{aligned}$$

or on a :

$$\frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} = f(u(t_{m+1}))$$

Donc

$$\frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} = \frac{f(u(t_{m+1})) + f(u(t_m))}{2}$$

8.

$$\begin{aligned}
\frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} &= \frac{f(u(t_{m+1})) + f(u(t_m))}{2} \\
u(t_{m+1}) - u(t_m) &= \frac{\Delta t f(u(t_{m+1})) + \Delta t f(u(t_m))}{2} \\
u(t_{m+1}) - \frac{1}{2}\Delta t f(u(t_{m+1})) &= u(t_m) + \frac{1}{2}\Delta t f(u(t_m))
\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
u(t_{m+1}) - \frac{1}{2}\Delta t f(u(t_{m+1})) &= u(t_m) + \frac{1}{2}\Delta t f(u(t_m)) \\
u(t_{m+1}) + \frac{1}{2}\Delta t u(t_{m+1}) &= u(t_m) - \frac{1}{2}\Delta t u(t_m) \\
u(t_{m+1}) \left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\right) &= u(t_m) \left(1 - \frac{1}{2}\Delta t\right) \\
u(t_{m+1}) &= u(t_m) \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t}{1 + \frac{1}{2}\Delta t}\right) \\
u(t_{m+1}) &= u(t_m) \left(\frac{1 - \frac{1}{2}\Delta t}{1 + \frac{1}{2}\Delta t}\right) \\
u(t_{m+1}) &= u(t_m) \left(\frac{\frac{2-\Delta t}{2}}{\frac{2+\Delta t}{2}}\right) \\
u(t_{m+1}) &= u(t_m) \left(\frac{2 - \Delta t}{2 + \Delta t}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
u_{m+1} &= u_m \left(\frac{2 - \Delta t}{2 + \Delta t}\right) \\
u_m &= u_{m-1} \left(\frac{2 - \Delta t}{2 + \Delta t}\right) \\
u_m &= \left(\frac{2 - \Delta t}{2 + \Delta t}\right)^m
\end{aligned}$$

10.

11.

12.