

# Mini Projet

Nicolas BOUTON

November 17, 2020

1. Nous avons le système suivant :

$$\begin{cases} u'(t) = -u(t) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} u(t) &= ke^{-t} \\ u(t=0) &= 1 = ke^0 = k \\ u(t) &= e^{-t} \end{aligned}$$

2. Appliquons la méthode d'Euler explicite :

$$\begin{aligned} u_{m+1} &= u_m + \Delta t f(u_m) \\ &= u_m + \Delta t(-u_m) \\ &= u_m(1 - \Delta t) \end{aligned}$$

Nous remarquons que c'est une suite géométrique de raison  $1 - \Delta t$ . Donc on en déduit que  $\forall m \in [0, n], u_m = (1 - \Delta t)^m$

3. Calculons la solution exacte en  $t = 1$  :

$$u(1) = e^{-1} \approx 0,37$$

Maintenant essayons de voir la convergence de la solution trouvée avec la méthode d'Euler explicite :

On pose  $\Delta t = \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned} u_n &= (1 - \Delta t)^n \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Donc on en conclu que lorsque  $\Delta t$  tend vers 0, alors  $u_m$  converge vers 0.

4. Appliquons le développement limité de Taylor :

$$\begin{aligned} u(t_m) &= u(t_{m+1}) + u'(t_{m+1})(t_m - t_{m+1}) + O(t_m - t_{m+1}) \\ &= u(t_{m+1}) + u'(t_{m+1})(-\Delta t) + O(-\delta t) \\ &= u(t_{m+1}) - u'(t_{m+1})\Delta t \\ u'(t_{m+1}) &= \frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} \end{aligned}$$

Et on a  $u'(t_{m+1}) = f(u(t_{m+1})) = -u(t_{m+1})$

Donc

$$\frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} = u'(t_{m+1}) \approx f(u(t_{m+1}))$$

5. Le schéma d'Euler implicite :

$$u(t_{m+1}) = u(t_m) + \Delta t f(u(t_{m+1}))$$

6. D'après la question précédente on a :

$$\begin{aligned} u(t_{m+1}) &= u(t_m) + \Delta t f(u(t_{m+1})) \\ u(t_m) &= u(t_{m+1}) - \Delta t f(u(t_{m+1})) \\ u(t_m) &= u(t_{m+1}) + \Delta t u(t_{m+1}) \\ u(t_m) &= u(t_{m+1})(1 + \Delta t) \\ u(t_{m+1}) &= \frac{u(t_m)}{(1 + \Delta t)} \\ u(t_m) &= \frac{u(t_{m-1})}{(1 + \Delta t)} \\ u(t_m) &= \frac{1}{(1 + \Delta t)^m} \end{aligned}$$

7. Partons d'Euler explicite :

$$u_{m+1} = u_m + \Delta t f(u_m)$$

$$\frac{u_{m+1} - u_m}{\Delta t} = f(u_m)$$

or on a :

$$\frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} = f(u(t_{m+1}))$$

Donc

$$\frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} = \frac{f(u(t_{m+1})) + f(u(t_m))}{2}$$

8. D'après la question précédentes on a :

$$\frac{u(t_{m+1}) - u(t_m)}{\Delta t} = \frac{f(u(t_{m+1})) + f(u(t_m))}{2}$$

$$u(t_{m+1}) - u(t_m) = \frac{\Delta t f(u(t_{m+1})) + \Delta t f(u(t_m))}{2}$$

$$u(t_{m+1}) - \frac{1}{2} \Delta t f(u(t_{m+1})) = u(t_m) + \frac{1}{2} \Delta t f(u(t_m))$$

9. D'après la question précédentes on a :

$$u(t_{m+1}) - \frac{1}{2} \Delta t f(u(t_{m+1})) = u(t_m) + \frac{1}{2} \Delta t f(u(t_m))$$

$$u(t_{m+1}) + \frac{1}{2} \Delta t u(t_{m+1}) = u(t_m) - \frac{1}{2} \Delta t u(t_m)$$

$$u(t_{m+1}) \left( 1 + \frac{1}{2} \Delta t \right) = u(t_m) \left( 1 - \frac{1}{2} \Delta t \right)$$

$$u(t_{m+1}) = u(t_m) \left( \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t}{1 + \frac{1}{2} \Delta t} \right)$$

$$u(t_{m+1}) = u(t_m) \left( \frac{1 - \frac{1}{2} \Delta t}{1 + \frac{1}{2} \Delta t} \right)$$

$$u(t_{m+1}) = u(t_m) \left( \frac{\frac{2 - \Delta t}{2}}{\frac{2 + \Delta t}{2}} \right)$$

$$u(t_{m+1}) = u(t_m) \left( \frac{2 - \Delta t}{2 + \Delta t} \right)$$

Donc

$$\begin{aligned}u_{m+1} &= u_m \left( \frac{2 - \Delta t}{2 + \Delta t} \right) \\u_m &= u_{m-1} \left( \frac{2 - \Delta t}{2 + \Delta t} \right) \\u_m &= \left( \frac{2 - \Delta t}{2 + \Delta t} \right)^m\end{aligned}$$

10. Calculons la solution à  $t = 1$ :

$$u(1) = e^{-1} \approx 0,37$$

Supposons que  $\Delta t$  est petit, c'est-à-dire  $\Delta t = \frac{1}{n}$

Schéma d'Euler explicite :

$$u_n = \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n$$

Schéma d'Euler implicite :

$$u_n = \frac{1}{\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n}$$

Schéma numérique :

$$u_n = \left( \frac{2 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \right)^n$$

Ces schéma sont implémente dans **main.f90**.

---

```

1
2  ! Calcul Euler Explicite
3  function euler_explicite(n)
4
5      real :: euler_explicite
6      real :: n
7
8      euler_explicite = (1 - (1 / n)) ** n
9      return
10
11 end function euler_explicite
12
13 ! Calcul Euler Implicite
14 function euler_implicite(n)
15
16     real :: euler_implicite
17     real :: n
18
19     euler_implicite = 1 / ((1 + (1 / n)) ** n)
20     return
21
22 end function euler_implicite
23
24 ! Calcul numerique
25 function numerique(n)
26
27     real :: numerique
28     real :: n
29
30     numerique = ( (2 - (1 / n)) / (2 + (1 / n)) ) ** n
31     return
32
33 end function numerique
34
35 program main
36
37     implicit none
38     real :: euler_explicite
39     real :: euler_implicite
40     real :: numerique
41     real :: n1, n2
42     real :: ee1, ei1, num1
43     real :: ee2, ei2, num2
44     real :: dee, dei, dnum
45
46     ! Display choice
47     print *, "Choose n1 :"
48     read (*, *) n1
49     print *, "Choose n2 :"
50     read (*, *) n2

```

```

51
52  ! Compute scheme with n2
53  ee1 = euler_explicite(n1)
54  ei1 = euler_implicite(n1)
55  num1 = numerique(n1)
56
57  ! Display result of scheme with n1
58  print *, ""
59  print *, "Avec n = " , n1
60  print *, "euler explicite : ", ee1
61  print *, "euler implicite : ", ei1
62  print *, "numerique      : ", num1
63
64  ! Compute scheme with n2
65  ee2 = euler_explicite(n2)
66  ei2 = euler_implicite(n2)
67  num2 = numerique(n2)
68
69  ! Display result of scheme with n2
70  print *, ""
71  print *, "Avec n = " , n2
72  print *, "euler explicite : ", ee2
73  print *, "euler implicite : ", ei2
74  print *, "numerique      : ", num2
75
76  ! Compute delta
77  dee = abs(ee1 - ee2)
78  dei = abs(ei1 - ei2)
79  dnum = abs(num1 - num2)
80
81  ! Display delta
82  print *, ""
83  print *, "Delta :"
84  print *, "delta euler explicite : ", dei
85  print *, "delta euler implicite : ", dee
86  print *, "delta numerique      : ", dnum
87
88  end program main

```

---

main.f90

En exécutant ce code on obtient :

---

```

1  Choose n1 :
2  10
3  Choose n2 :
4  100
5
6  Avec n =      10.0000000
7  euler explicite :    0.348678350
8  euler implicite :    0.385543197
9  numerique      :    0.367572576

```

```

10
11 Avec n = 100.000000
12 euler explicite : 0.366032690
13 euler implicite : 0.369711548
14 numerique : 0.367877424
15
16 Delta :
17 delta euler explicite : 1.58316493E-02
18 delta euler implicite : 1.73543394E-02
19 delta numerique : 3.04847956E-04

```

---

result.txt

Ici on a choisis  $n_1 = 10$  et  $n_2 = 100$ . On voit que pour les schémas d'Euler le delta est de l'ordre de  $10^{-2}$  et que pour le schéma numérique il est de l'ordre de  $10^{-4}$ .

Donc on peut supposer que si les erreurs relatives des schémas d'Euler sont de l'ordre de  $k\Delta t$  alors l'erreur relative du schéma numérique est de l'ordre de  $k\Delta t^2$ .

#### 11. Solution exacte :

$$\begin{cases} u'(t) = -u^2(t) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

On trouve :

$$u(t) = -\frac{1}{-t + k}$$

Et on a :

$$u(0) = 1 = -\frac{1}{k}$$

Donc

$$k = -1$$

Et donc

$$u(t) = \frac{1}{t + 1}$$

Euler explicite :

$$\begin{aligned}
u_{m+1} &= u_m + \Delta t f(u_m) \\
&= u_m + \Delta t (-u_m^2) \\
&= u_m - \Delta t u_m^2 \\
&= u_m (1 - \Delta t u_m)
\end{aligned}$$

Donc  $u_m = u_{m-1}(1 - \Delta t u_{m-1})$

Euler implicite :

$$\begin{aligned}
u_{m+1} &= u_m + \Delta t f(u_{m+1}) \\
&= u_m + \Delta t (-u_{m+1}^2) \\
&= u_m - \Delta t u_{m+1}^2 \\
\Delta t u_{m+1}^2 + u_{m+1} - u_m &= 0
\end{aligned}$$

Calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= 1^2 - 4\Delta t(-u_m) \\
&= 4\Delta t u_m + 1
\end{aligned}$$

Le résultat de  $u_{m+1}$  est la solution positive :

$$\begin{aligned}
u_{m+1} &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\
&= \frac{-1 + \sqrt{4\Delta t u_m + 1}}{2\Delta t} \\
&= \frac{\sqrt{4\Delta t u_m + 1} - 1}{2\Delta t}
\end{aligned}$$

Donc  $u_{m+1} = \frac{\sqrt{4\Delta t u_m + 1} - 1}{2\Delta t}$  et  $u_m = \frac{\sqrt{4\Delta t u_{m-1} + 1} - 1}{2\Delta t}$

12.