Usos del polinomio de Taylor

Usos del polinomio de Taylor

Naturalmente, como los polinomios de Taylor son funciones de reales entonces podemos hacer operaciones entre ellos, como suma, resta multiplicación, división y composición. En esta lectura abordaremos ejemplos de dichas operaciones.

Introducción

Ejemplo 1. El polinomio de Taylor de orden 2 de la función *f(x) = sen(x) + cos(x)* es la suma de los polinomios de Taylor de orden dos de cada una de las funciones sen*(x)* y *cos(x)*. Estos polinomios vienen dados mediante:

$$T_2(x) = x$$

$$S_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Por lo tanto, el polinomio de orden dos de *f(x)* es:

$$1 + x - \frac{x^2}{2}$$

Ejemplo 2. El polinomio de Taylor de orden tres de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + x$$

es la resta de los polinomios de Taylor de orden tres de cada una de las funciones

$$\frac{1}{1-x} \text{ y } x,$$

y estos polinomios vienen dados mediante:

$$T_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$
$$S_3(x) = x$$

Por lo tanto, el polinomio de orden tres de *f(x)* es:

$1+x+x^2-x$

O equivalentemente:

$1+x^2+x^3$

Ejemplo 3. El polinomio de Taylor de orden tres de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x}\ sen(x)$$

está multiplicando los correspondientes polinomios de Taylor de orden tres de cada una de las funciones

$$\frac{1}{1-x} \text{ y } e^x$$

truncando el resultado en el grado 3. Estos polinomios vienen dados mediante:

$$T_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3$$

$$S_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$$

Por lo tanto, el polinomio de orden tres del truncamiento en el grado 3 del producto:

$$(1 + x + x^2 + x^3)(x - \frac{x^3}{6})$$

O, equivalentemente, debemos truncar a:

$$x + \ x^2 + \frac{5}{6}\,x^3 + \frac{5}{6}\,x^4 - \frac{1}{6}\,x^5 - \frac{1}{6}\,x^6$$

Finalmente, el polinomio buscado es:

$$x + x^2 + \frac{5}{6} x^3$$

Comentario: si conocemos la serie de Taylor de dos funciones *f(x)* y *g(x)*, en cuanto a los polinomios de Taylor de la división

$$\frac{f(x)}{g(x)}.$$

El proceso completo puede encontrado en la bibliografía básica y lo invitamos a estudiarla.

Una de las potencias más amables de los polinomios de Taylor es que permite encontrar valores aproximados de las funciones, tal como veremos a continuación.

Ejemplo 4. Vamos a obtener una aproximación de $\sqrt[3]{9}$. Para ello partimos de considerar la función:

$$f(x) = \sqrt[3]{x},$$

Expandiremos a *f(x)* entorno de:

$\alpha=8$.

Ahora bien, vale que:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^{\frac{1}{3}} \\
f'(x) &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \\
f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \\
f'''(x) &= \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}
\end{aligned}
$$

De otro lado, haciendo $x=8$

$$
\begin{aligned}
f(8) &= 2 \\
f'(8) &= \frac{1}{12} \\
f''(8) &= -\frac{1}{144}
\end{aligned}
$$

De esta manera, el polinomio de Taylor de *f(x)* de orden dos viene dado por:

$$T_2(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2.$$

Ahora estamos en condiciones de aproximar $\sqrt[3]{9}$ calculando T_2 (9), el cual resulta ser:

$$
\begin{aligned}
T_2(9) &= 2 + \frac{1}{12}(9-8) - \frac{1}{288}(9-8)^2 \\
&= 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{288} \\
&= \frac{599}{288} \approx 2.07986.
\end{aligned}
$$

Comentario

Otra de las potencias amables de los polinomios de Taylor es que permite encontrar errores de los valores aproximados de las funciones, tal como se verá a continuación.

Ejemplo 5. Cuando aproximamos $\sqrt[3]{9}$ mediante $T_2\,(x)$ para la función $f(x)=\sqrt[3]{x}$, se comete un error. Aunque no podemos saberlo con exactitud, sí podemos hallar un estimado de él al saber que:

$$
|R_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-8|^3
$$

Donde *M* es una constante que satisface:

| f" (x) | ≤ *M* para *x* ∈ [7, 9]

Ahora bien, como 7 ≤ *x* ≤ 8 vale:

$$0 \leq f'''(x) = \frac{10}{27}\frac{1}{x^{\frac{8}{3}}} \leq \frac{10}{27}\frac{1}{7^{\frac{8}{3}}} \leq 0.0021$$

Por lo que:

$$|R_2(x)| \leq \frac{0.0021}{3!}1^3 < 0.0004,$$

De donde concluimos que, la aproximación no difiere en más de 0.0004 del valor real.

Si *f* es derivable en el intervalo (2,5) y *| f' (x) |* ≤ 5 para todo en el intervalo [3,4], entonces:

Si *f* es derivable en el intervalo (2,5) y *| f' (x) |* ≤ 5 para todo en el intervalo [3,4], entonces:

Opción A. $\left|R_1(x)\right| \leq \frac{5}{2}|x-3.5|^2$ para todo $x \in [3,4]$

Opción B. $\left|R_1(x)\right| \leq \frac{5}{2}|x-5|^2$ para todo $x \in [3,4]$

Opción C. $\left|R_1(x)\right| \leq \frac{5}{2}|x-3|^2$ para todo $x \in [3,4]$

Opción D. $\left|R_1(x)\right| \leq \frac{5}{2}|x-4|^2$ para todo $x \in [3,4]$

Opción E $\left|R_1(x)\right| \leq \frac{5}{2}|x-3.5|^2$ para todo $x \in (2,5)$

- Opción A
- Opción B
- Opción C
- Opción D
- Opción E

SUBMIT

Caso

Un ingeniero quiere resolver un problema complejo y se encuentra con que necesita calcular el valor del √10. Para esto tomó la función *f(x)*=√*x* y calculó el polinomio de Taylor de *f(x)* entorno del *x*=9 de grado 2. Para tener la seguridad de la prolijidad de su cálculo se ha preguntado: ¿cual ha sido el error cometido? Solución: para determinar el error basta recordar que:

$$f(x) = \sqrt{x},$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt[2]{x^3}},$$
$$f'''(x) = -\frac{1}{8\sqrt[2]{x^5}},$$

Para | x - 9 | ≤ 1 vale que 8 ≤ x ≤ 10, 181 ≤ $\sqrt{x}^5$ ≤ 317, por lo tanto:

$$\frac{1}{8}\frac{1}{317} \leq \frac{1}{8\sqrt[2]{x^5}} \leq \frac{1}{8}\frac{1}{181} = \frac{1}{1448}$$

Por lo tanto:

$$|R_2(x)| \leq \frac{1}{1448}\frac{1}{3!}|x-9| \leq \frac{1}{8688} < 10^{-3}$$

Por lo que, la aproximación coincide en al menos 3 decimales.

CONTINUAR

Revisión del módulo

Hasta acá aprendimos

Sucesiones

En términos generales una sucesión es simplemente una función $a: N \to R$ donde N son los números naturales y R son los números reales. Por facilidad se escribe a_n en vez de $a(n)$ y para no depender del conjunto de salida podemos listar la imagen de a mediante el conjunto $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Series

Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, podemos decidir sumar sus términos. En este caso, podemos crear una nueva sucesión de sumas parciales de a_n dadas mediante: $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$. Si esta nueva sucesión converge, nace el concepto de serie.

Fórmula de Taylor

Sea a,b un intervalo abierto de los números reales R. Consideremos el conjunto de funciones f: (a,b) → R. Estamos interesados en abordar las preguntas ¿Qué funciones f pueden ser representadas como series de potencias? y ¿Cómo es posible encontrar esa representación?

Usos del polinomio de Taylor

Naturalmente, como los polinomios de Taylor son funciones reales entonces podemos hacer operaciones entre ellos, como suma, resta multiplicación, división y composición. En esta lectura abordaremos ejemplos de dichas operaciones.