Fórmula de Taylor

Fórmula de Taylor

Sea *(α ,b)* un intervalo abierto de los números reales *R*. Consideremos el conjunto de funciones *f: (α ,b)* → *R*. Estamos interesados en abordar las preguntas ¿qué funciones *f* pueden ser representadas como series de potencias? y ¿cómo es posible encontrar esa representación?

Introducción

Cada vez que tomamos una calculadora y calculamos valores como

$$sen\left(4\frac{\pi}{3}\right), ln(5)\ ...,$$

el dispositivo arroja un número el cual normalmente no tenemos idea de cómo lo encuentra la calculadora. Ahora bien, la forma de hacerlo es aproximar las funciones sen(x), Ln(x),... por medio de polinomios. En esta lectura, abordaremos la técnica de cómo encontrar varios de tales polinomios.

Polinomio de Taylor

Definición 1

Sean $\alpha \in R$ y $f{:}R \rightarrow R$ tal que *f* esté definida en un intervalo abierto que contiene a α . Supongamos que *f* existen las derivadas $f'(\alpha), f''(\alpha), \ldots, f^{(n)}(\alpha)$ entonces el polinomio:

Figura 1. Polinomio de Taylor de *n* -ésimo grado de en α

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$
$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Fuente: Stewart, J. (2013). Polinomio de Taylor de *n*-ésimo grado de *f* en α .

Se llama polinomio de Taylor de *n*-ésimo grado de *f* en α .

Residuos. Estimación

Definición 2

Sea *f* una función con polinomio de Taylor de grado *n* T_n (x). A la función $R_n(x)=f(x) - T_n(x)$, se la llama residuo.

Teorema 1

Sean $\alpha \in R$ y $f : R \to R$ tal que f esté definida en un intervalo abierto que contiene a α. Supongamos que f existen todas las derivadas $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, ..., $f^{(n)}(\alpha)$,... entonces:

Si $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ donde T_n es el polinomio de Taylor de n-ésimo grado de f en a y

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

para $|x - a| < R$ entonces f es igual a la suma de sus series de Taylor en el intervalo $|x - a| < R$.

Fuente: Stewart, J. (2013). Intervalos de la forma.

Figura 2. Intervalos de la forma

Expone que existe un intervalo de la forma $(\alpha - R, \alpha + R)$, tal que $f(x)$ se aproxima por un polinomio de grado arbitrariamente grande.

Ejemplo 1. Las funciones trigonométricas sen(x), cos(x), la función exponencial e^x, la función logarítmica $Ln(1 - x)$, la función arco tangente $\tan^{-1}(x)$ satisfacen el teorema, es decir $Lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$ en ciertos intervalos entorno de $\alpha = 0$.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

Fuente: elaboración propia.

Figura 3. Funciones

Expone que en los intervalos de la forma (- R, R) , las respectiva funciones se aproximan mediante las sumas indicadas.

Pregunta

El polinomio de Taylor de orden 3 de la función fx=ln(1+x) en a=0 es:

Opción A: T3x=x-x22+x33.

Opción B: T3x=x+x22+x33.

Opción C: T3x=x-x22-x33.

Opción D: T3x=-x-x22+x33.

- Opción A
- Opción B
- Opción C
- Opción D

SUBMIT

Teorema 2

Sean α ∈ *R*, *f*: *R* → *R* tal que *f* esté definida en un intervalo abierto que contiene a α. Supongamos que *f* existen las derivadas $f'(\alpha)$, $f''(\alpha)$, ..., $f^{(n+1)}(\alpha)$ y $d > 0$ entonces:

Si $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leqslant M$ para $|x - a| \leqslant d$ entonces el residuo $R_n(x)$ de la serie de Taylor cumple con la desigualdad

$$\left| R_n(x) \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} \left| x - a \right|^{n+1} \qquad \text{para } |x - a| \leqslant d$$

Fuente: Stewart, J. (2013). Cota.

Figura 4. Cota

Muestra una cota para los residuos en el intervalo [α - d, α + d]. Esto es útil para conocer que tanto el valor de T_n *(x)* se acerca al valor de *f(x)* para cada número *x* ∈ [α - *d*, α + *d*]. Sin embargo, esta presenta dos desventajas: la primera es que depende de una cota *M* para la *n*+1 derivada de *f(x)* en el intervalo [α - d, α + d]; la segunda es que tal *M* depende intrínsecamente de *d*.

Caso

Un ingeniero resuelve un problema complejo y se encuentra con que necesita calcular el valor del √10, pero no posee aparatos tecnológicos que le permitan hacer el cálculo. ¿Cómo puede el ingeniero calcular este valor de manera manual? Debe usar una aproximación por medio del polinomio de taylor de la función *f(x)*=√*x*.

Como es posible conocer √(9,) entonces calculamos el polinomio de taylor de *f(x)* entorno del *x*=9. Elegiremos para este caso una aproximación de grado 2. Entonces, procedemos como sigue:

$$f(x) = \sqrt{x}, f(9) = 3$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f(9) = \frac{1}{6}$$
$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt[2]{x^3}}, f''(9) = -\frac{1}{108}$$

Ahora bien, el ingeniero puede formar el polinomio de Taylor:

$$T_2(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{648}(x-9)^2$$

Y se puede aproximar a *f*(10)= √10 mediante *T*(10), se obtiene:

$$\sqrt{10} \approx T_2(10) = 3 + \frac{1}{6}(10-9) - \frac{1}{648}(10-9)^2 = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{648} = \frac{2051}{648}$$

CONTINUAR

Referencias

Stewart, J. (2013). *Cálculo de varias variables: trascendentes tempranas*. (7ma Ed.). México: CENGAGE Learning Editores.