

分类号: TP13

单位代码: 10335

密 级: 公开

学 号: 11710060

浙 江 大 学

博士学位论文



中文论文题目: 有向拓扑下导弹集群
协同制导关键问题研究

英文论文题目: Research on Key Issues of Cooperative
Guidance under Directed Topology

申请人姓名: _____
指导教师: _____
合作导师: _____
学科(专业): _____
研究方向: _____
所在学院: _____

论文递交日期 2022.11.7

有向拓扑下导弹集群
协同制导关键问题研究



论文作者签名: _____

指导教师签名: _____

论文评阅人 1: _____

评阅人 2: _____

评阅人 3: _____

评阅人 4: _____

评阅人 5: _____

答辩委员会主席: _____

委员 1: _____

委员 2: _____

委员 3: _____

委员 4: _____

委员 5: _____

答辩日期 _____

Research on Key Issues of Cooperative

Guidance under Directed Topology



Author's signature: _____

Supervisor's signature: _____

External reviewers: _____

Examining Committee Chairperson: _____

Examining Committee Members: _____

Date of oral defence: _____

浙江大学研究生学位论文独创性声明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得 浙江大学 或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名:

签字日期:

年 月 日

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解 浙江大学 有权保留并向国家有关部门或机构送交本论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权 浙江大学 可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索和传播，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存、汇编学位论文。

(保密的学位论文在解密后适用本授权书)

学位论文作者签名:

导师签名:

签字日期:

年

月

日

签字日期:

年

月

日

摘要

随着数据链、多智能体理论和网络化控制等技术的发展,现代战场环境中的导弹突防与拦截将趋向于多导弹集群协同作战,使得导弹成为现代信息化战争中的有机节点,通过多导弹的协同作战,大大提高了现代战场环境中导弹系统对目标的突防与拦截作战效能,是导弹武器系统未来的重要发展方向。另一方面,多导弹协同制导是多智能体分布式控制的一个重要方面,随着多智能体领域的协同控制技术的发展和相应制导控制系统的完善,多导弹协同制导技术将会得到进一步的发展,在复杂的现代战场环境中发挥越来越重要的作用。然而,已有的协同制导律对全局信息和导弹间的通信拓扑有严格的要求,这大大限制了其使用范围,同时破坏了导弹间的分布式特性。因此,研究有向拓扑下以导弹集群协同拦截或突防敌方机动/静止目标为背景的具有强鲁棒性和快速收敛特性的多导弹协同制导律,具有重要的理论和工程意义,同时研究多智能体分布式控制领域新型算法,如分布式优化以及分布式纳什博弈算法等与导弹集群制导律的有效结合是提升拦截制导作战效能的有效方法。

本文以有向拓扑下导弹集群协同拦截机动目标为研究背景,针对多导弹协同制导末端制导律进行研究,考虑多导弹在拦截过程中可能存在的竞争、合作与避碰问题,基于博弈论、分布式优化和轨迹参数化等相关理论进行协同制导律的设计,使得各导弹能以期望的碰撞角对目标进行有效拦截。主要研究内容包括以下几个方面。

(1) 针对有向拓扑下多导弹协同拦截同一机动目标时的非合作关系,提出了基于分布式纳什策略的协同制导律。基于非合作博弈的纳什均衡理论,将有向拓扑下多导弹间协同制导时的非合作关系用相对碰撞角之差表示,建立了多导弹协同制导非合作纳什博弈模型,给出协同制导律与纳什均衡的一致统一关系,通过所给模型的纳什均衡的搜索实现协同制导律的设计,提出了一种基于纳什策略的集中式协同制导律;其次,针对集中式制导律中需要获取全局终端状态及系统结构等全局信息的情况,引入本地观测器实现全局信息的本地化,提出了基于分布式纳什策略的协同制导律。

(2) 针对有向拓扑下多导弹协同拦截同一机动目标时的合作关系,提出了基于分布式优化算法的协同制导律。基于分布式优化控制理论,将多导弹间协同制导时的合作关系用碰撞角一致性表示,建立了基于碰撞角一致性的全局优化性能指标,针对指标函数不全局可知与一致性收敛速度慢的情况,提出了基于多步次梯度分布式优化算法的协同制导律。首先,针对现有分布式优化算法对一致性收敛速度存在保守与不足估计的情

况，基于优化过程中的历史信息能加快收敛速度的思想，提出了一种多步次梯度的分布式优化算法，建立了系统性能和一致性收敛时间的量化关系，同时证明了所提分布式优化算法的收敛性。其次，基于分布式优化控制理论，将多步次梯度分布式优化的理念应用于最优碰撞角的优化中，提出了基于分布式优化控制算法的协同制导律。

(3) 针对有向拓扑下多导弹协同拦截同一机动目标时存在的碰撞问题，提出了基于轨迹参数化的协同制导律。考虑拦截过程中导弹间的相对距离约束以及拦截终端的飞行路径角约束等问题，在非线性动力学的基础上，提出了基于轨迹参数化的协同制导方法。首先，采用一个四阶多项式对满足边界条件的拦截轨迹进行参数化设计，通过调整最高阶项系数来设计满足特定约束的制导律。随后，为了保证所有导弹的参数化轨迹在拦截过程中不会发生碰撞，提出了最小距离保持的避碰策略。最后，根据导弹自身的动力学约束，提出了实现参数化轨迹平滑跟踪的协同拦截制导方法。

关键词：协同制导，有向拓扑，碰撞角，纳什策略，分布式优化，分布式优化控制，轨迹参数化。

Abstract

With the development of data link, multi-agent systems (MAS) and networked controls, the penetration and interception of missiles tends to in the form of cooperation, making missiles an organic point in the modern combat. The coordination of missiles has greatly improved the penetration and interception possibilities against targets in the battlefield, and plays an important role in the future. Besides, cooperative guidance of multi-missiles is an important aspect of multi-agent distributed control. That is, cooperative guidance technology will be further improved as the improvement of cooperative control in MAS and guidance control in missile, and play an increasingly important role in the complex future battlefield. However, the existing cooperative guidance laws have strong requirements on some global information and topology. Therefore, it is of great theoretical and engineering significance to research the cooperative guidance law with strong robustness and fast convergence under multi-missile cooperative interception or penetration of hostile maneuvering/stationary targets. The combination of new algorithms in the field of multi-missile control, such as distributed optimization and distributed Nash game, and the terminal guidance law of multi-missile systems is an effective method to improve the combat effectiveness of interception guidance.

This paper investigates a cooperative guidance problem against a maneuvering target while considering the competition, cooperation and collision avoidance problems among missiles. The cooperative terminal guidance laws are designed based on game theory, distributed optimization and trajectory parameterization with impact angle and flight path angle constraints respectively. The contributions of this work are as follows.

Firstly, a cooperative guidance law based on distributed Nash equilibrium under directed topology is proposed when considering the competition problem in missile group. Based on the Nash equilibrium (NE) of non-cooperative game, the competition properties among missiles under directed topology are represented by the relative difference among terminal impact angles. Consequently, a non-cooperative Nash game is constructed for multi-missile cooperative guidance, in which the coherence between the guidance law and NE is introduced, and a centralized cooperative guidance law is proposed with searching NE of the proposed game. Moreover, a local observer is introduced to facilitate the local implementation of the proposed

guidance protocol by ensuring the seeking of NE distributive.

Secondly, a cooperative guidance law based on distributed optimization under directed topology is proposed when considering the cooperation problem in missile group. Based on distributed optimization control, the cooperation properties among missiles are represented by the consensus among terminal impact angles. Furthermore, a global performance index on impact angles consensus of the missile group is established, and cooperative guidance law based on multi-step sub-gradient optimization is proposed for the shortcoming on global index and asymptotic consensus velocity. To this end, a novel multi-step subgradient scheme is proposed to solve distributed optimization problem with a balanced digraph. And a momentum term combining the past and current subgradient is introduced to speed up the consensus process. Thus, the proposed strategy can asymptotically obtain an optimal solution, while all networked systems achieve a consensus among estimates in a finite-time. Besides, a cooperative guidance based on distributed optimization control is investigated, while the idea on multi-step subgradient optimization utilized for obtain optimal impact angle.

Thirdly, a cooperative polynomial guidance problem under directed topology is investigated against a maneuvering target based on trajectory parameterization with collision avoidance and flight path angle coordination. To this end, a polynomial reference trajectory satisfying the initial and terminal constraints is introduced with its highest-order coefficient chosen as the guidance gain. Then, a safe distance criterion is enforced to coordinate parameters of the missiles for collision avoidance along the reference trajectories. Finally, the cooperative guidance law is developed by ensuring a smooth tracking of the polynomial reference trajectory.

Keywords: cooperative guidance, directed topology, impact angle, Nash equilibrium, distributed optimization, distributed optimization control, trajectory polynomialization.

目录

摘要	I
Abstract	III
目录	V
图目录	VIII
表目录	X
1 绪论	1
1.1 研究背景与意义	1
1.2 研究现状	2
1.2.1 协同制导理论研究现状	2
1.2.2 基于博弈论的协同制导理论	4
1.2.3 基于分布式优化的协同制导理论	6
1.2.4 基于轨迹参数化的协同制导理论	8
1.3 本文的研究工作	9
1.4 论文的组织架构	10
2 预备知识	12
2.1 图论	12
2.2 矩阵理论	14
2.3 博弈论简介	15
2.4 常用制导律	17
2.5 本章小结	20
3 有向拓扑下基于分布式纳什策略的协同制导问题研究	21
3.1 引言	21
3.2 分布式纳什博弈协同拦截模型	22
3.2.1 协同拦截相对运动方程	22
3.2.2 协同拦截纳什博弈模型	24
3.2.3 基于最优控制和微分博弈的制导律	27
3.3 分布式纳什策略协同制导律设计	33

3.3.1 基于纳什策略的集中式协同制导律	33
3.3.2 基于纳什策略的分布式协同制导律	36
3.3.3 制导律分析	39
3.4 仿真分析	40
3.5 本章小结	46
4 有向拓扑下基于分布式优化算法的协同制导问题研究	47
4.1 引言	47
4.2 多步次梯度分布式优化算法设计	47
4.2.1 分布式优化相关基础理论	47
4.2.2 行随机矩阵收敛性分析	50
4.2.3 多步次梯度分布式优化算法	51
4.3 基于分布式优化的协同制导方法研究	61
4.3.1 离散相对运动模型及状态方程	61
4.3.2 优化制导问题建模	62
4.3.3 基于分布式优化的协同制导方法设计	64
4.4 仿真分析	65
4.5 本章小结	69
5 有向拓扑下基于轨迹参数化的协同制导问题研究	71
5.1 引言	71
5.2 参数化制导问题建模	71
5.2.1 参数化制导简介	71
5.2.2 轨迹参数化	73
5.2.3 参数化制导问题建模	75
5.3 基于轨迹参数化的协同拦截方法设计	75
5.3.1 标准参数化制导律	75
5.3.2 考虑避碰的参数化制导律	77
5.3.3 最优参数搜索方法	81
5.4 仿真分析	87
5.5 本章小结	92

6 总结与展望	93
6.1 全文工作总结.....	93
6.2 对未来工作的展望	94
参考文献	96
攻读博士学位期间的主要研究成果	100

图目录

图 1.1	导弹集群协同反制	1
图 1.2	导弹集群协同拦截	1
图 1.3	协同制导分类	3
图 1.4	章节安排	10
图 2.1	图的相关定义示例	13
图 2.2	博弈论分类	17
图 2.3	相对运动关系示意图	18
图 3.1	平面内相对运动示意图	22
图 3.2	导弹间通信拓扑示意	41
图 3.3	拦截轨迹 (CGL, DGL, \mathcal{G}_1)	42
图 3.4	飞行路径角变化 (CGL, DGL, \mathcal{G}_1)	42
图 3.5	终端碰撞角变化 (CGL, \mathcal{G}_1)	42
图 3.6	法向加速度变化 (CGL, \mathcal{G}_1)	42
图 3.7	估计终端碰撞角变化 (DGL, \mathcal{G}_1)	43
图 3.8	法向加速度变化 (DGL, \mathcal{G}_1)	43
图 3.9	相对终端碰撞角差 (CGL, \mathcal{G}_1)	43
图 3.10	估计终端碰撞角估计值之差 (DGL, \mathcal{G}_1)	43
图 3.11	切换拓扑下拦截轨迹	44
图 3.12	切换拓扑下飞行路径角变化	44
图 3.13	切换拓扑下估计终端碰撞角变化	45
图 3.14	切换拓扑下估计终端碰撞角估计值之差	45
图 3.15	切换拓扑下法向加速度变化	45
图 4.1	分布式优化算法通信拓扑	66
图 4.2	MSSM 和 DSM 算法的优化收敛速度对比	67
图 4.3	MSSM 和 DSM 算法的一致性收敛速度对比	67
图 4.4	导弹间通信拓扑示意	68
图 4.5	拦截轨迹	69

图 4.6	飞行路径角变化	69
图 4.7	终端碰撞角变化	69
图 4.8	法向加速度变化	69
图 4.9	最优碰撞角估计变化	70
图 5.1	平面内相对运动示意图	72
图 5.2	标准参数化轨迹示意	76
图 5.3	通信拓扑示意	80
图 5.4	牛顿法示意图	82
图 5.5	标准参数化制导拦截轨迹	89
图 5.6	标准参数化制导导弹飞行路径角变化	89
图 5.7	标准参数化制导导弹间距离变化	89
图 5.8	标准参数化制导法向加速度变化	89
图 5.9	固定距离约束下拦截轨迹	90
图 5.10	固定距离约束下飞行路径角变化	90
图 5.11	固定距离约束下导弹间距离变化	90
图 5.12	固定距离约束下法向加速度变化	90
图 5.13	时变距离约束下拦截轨迹	91
图 5.14	时变距离约束下飞行路径角变化	91
图 5.15	时变距离约束下导弹间距离变化	91
图 5.16	时变距离约束下法向加速度变化	91

表目录

表 3.1	导弹和目标的初始状态	41
表 3.2	不同拓扑下拦截结果	42
表 4.1	导弹和目标的初始状态	68
表 5.1	粒子群算法计算流程	86
表 5.2	禁忌搜索算法计算流程	87
表 5.3	导弹和目标的初始状态	88

1 绪论

1.1 研究背景与意义

在现代复杂战场环境中，导弹是中远程攻击武器中最典型的精确打击武器，在对敌攻击和拦截中发挥着巨大的作用。其中，导弹系统的制导技术在导弹作战效能起到关键性作用，对最终制导效果有着巨大的影响。导弹的制导过程一般包括初制导段、中制导段和末制导段。初制导段为导弹的初始调整阶段，使得导弹朝着目标飞行，中制导段为中段调整阶段，使得末制导初始时导弹处于合理的位置，末制导完成对敌方目标的拦截及打击。其中，末制导段制导性能决定导弹打击目标的准确程度和毁伤程度，是整个制导过程中最主要阶段。值得注意的是，在末制导阶段中决定制导性能好坏的关键技术是末制导律，末制导律的不同会使导弹接近目标的弹道不同，从而产生不同的制导结果。于是，末制导律的性能直接决定着拦截与突防的成败，是制导律设计的重中之重。因此，针对具有较高末制导精度的制导律研究是十分必要的。



图 1.1 导弹集群协同反制



图 1.2 导弹集群协同拦截

随着数据链、多信息处理和网络化控制等技术的发展，现代战场环境中的导弹突防与拦截将趋向于多导弹协同作战，使得导弹成为现代信息化战争网络中的有机节点，通过多枚导弹的协同作战，大大提高了现代战场环境中导弹系统对目标的突防与拦截作战效能，是导弹武器系统未来的重要发展方向。另一方面，随着导弹武器系统的快速发展，多导弹协同攻击和防御以其特有的优势正在受到越来越多的关注，而多弹协同制导作为保证攻击和防御性能的关键技术也得到了快速发展。目前，世界各国对多导弹协同制导保持着积极的研究，并研制了相应的导弹系统^[1]。如：俄罗斯应用领弹和从弹协同

作战策略研制的“花岗岩”超声速反舰导弹，美国军方与洛马公司和雷锡恩公司合作研制了“网火”导弹系统等。实际上，多导弹协同制导是多智能体分布式控制的一个重要方面，随着多智能体领域的分布式控制技术的发展和相应制导控制系统的完善，多导弹协同制导技术将会得到更进一步的发展，同时在复杂的现代战场环境中发挥越来越重要的作用。

因此，研究以多导弹协同拦截或突防敌方机动/静止目标为背景的具有强鲁棒性和快速收敛特性的新型制导律和多导弹协同制导律，具有重要的理论和实际工程意义，同时研究多智能体分布式控制领域新型算法，如分布式优化以及分布式纳什博弈算法等与多导弹系统末制导律的有效结合是提升拦截制导作战效能的有效方法。

1.2 研究现状

近年来，随着群体智能理论与体系化作战的发展，现代战争中多导弹协同作战的重要性日渐突显，多弹协同制导方法的研究也日益受到重视^[2,3]。与传统的一对一拦截制导相比，多导弹协同具有更好的鲁棒性、灵活性与适应性，能显著提升整体系统的作战效能，是近年来拦截制导领域的热点问题。通过合理的设计协同制导律能显著地提升末制导阶段的拦截性能、减少单个导弹的能量消耗同时降低对导弹的性能要求^[4]。现有的协同制导律大多通过将经典的一对一制导律与多智能体中的一致性协同控制理论相结合得到^[5]，根据协同制导中协同变量的不同，可以将多导弹协同制导律分为三类。1) 基于时间控制的协同制导，包含固定碰撞时间协同和飞行时间协同；2) 基于碰撞几何约束的协同制导，包含碰撞角协同、视线角协同以及视场角协同等；3) 同时考虑碰撞时间和碰撞几何约束的协同制导。此外，还可以根据协同控制理论对协同制导分类，包括博弈论、一致性理论和分布式优化理论等，协同制导的分类如图1.3所示。

1.2.1 协同制导理论研究现状

本节对基于协同变量分类的协同制导理论研究现状进行简要描述，为后续基于博弈论、分布式优化及参数化理论的协同制导研究现状奠定基础。在基于时间控制的协同制导上，Jeon 等首先提出了碰撞时间控制制导律（Impact Time Control Guidance, ITCG），并证明该制导律能导引多个导弹同时攻击一个固定目标，该制导律在比例导引法（Pro-

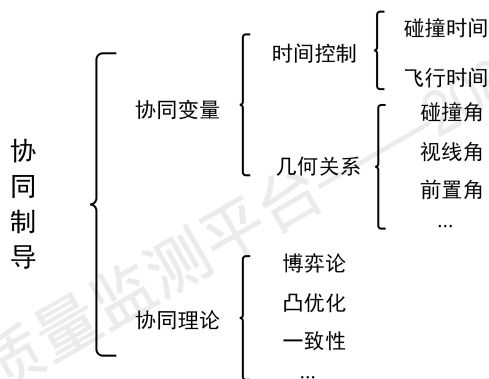


图 1.3 协同制导分类

portional Navigation Guidance, PNG) 的基础上, 给每个导弹设置相同的碰撞时间以实现协同攻击^[6], 在此基础上, 文献 [7] 和 [8] 分别将最优控制理论和滑模控制理论与 ITCG 制导律相结合实现了同时带碰撞时间和碰撞角约束的协同制导。文献 [9] 在纯比例导引 (Pure proportional navigation guidance, PPNG) 律的基础上, 将非线性交战动力学下剩余飞行时间的精确估计作为其时变导引系数, 针对固定时间设计了一种新的 ITCG 制导律, 该制导律能避免此前的 ITCG 法存在的窄捕获区及可行初始条件受限等缺陷。

与 ITCG 制导律不同, 文献 [10] 考虑了制导过程中的剩余飞行时间协同问题, 提出了协同比例导引 (Cooperative Proportional Navigation, CPN) 的寻的导引律, 其采用与剩余飞行时间相关的时变参数作为导弹过载的导引系数, 实现不同导弹之间的剩余飞行时间一致, 从而完成对固定目标的同时攻击。CPN 制导律不需要预先设置导弹的碰撞时间, 具有更好的灵活性, 易于分布式实现。然而, CPN 制导律会使导弹的前置角趋于 0, 从而导致制导律产生奇异, 修正 CPN 制导律可对这类奇异性进行辨识同时进行消除, 能有效提升 CPN 算法的适用性^[11]。在此基础上, 文献 [12] 提出了基于视场约束的协同寻的制导律, 用以实现对固定目标的齐射攻击。此外, 文献 [13] 基于领航-跟随者的原理将协同制导问题转换为非线性状态跟踪问题, 从而实现对目标的同时攻击。类似地, 通过将前置角的正连续非线性函数集成在滑模控制制导律中能有效防止奇异性同时保证齐射攻击^[14]。文献 [15] 提出了一种混合协同制导律用以解决滑模控制制导的局限性, 文献 [16] 在固定有限时间一致性的基础上进行了协同齐射制导律的设计, 该制导律基于循环有向图拓扑, 能同时拦截恒定速度目标。

在基于碰撞几何关系的协同制导中, 最常用的协调变量是碰撞角, 这类制导律通常要求导弹在制导过程中或碰撞时导弹间的碰撞角满足一定差值, 而不要求其是否在同

一时刻攻击目标,对碰撞几何关系的协同控制能保证多导弹从不同方向攻击目标,从而实现打击概率最大化,能有效提升作战效能^[17,18]。碰撞角控制制导律(Impact Angle Control Guidance, IACG)起初主要用于一对一拦截场景中,能保证导弹以最佳角度命中目标,从而达到最佳攻击效果^[19-21],随着集群控制理论的发展,逐渐应用在协同制导中。Shaferman等以导弹的终端碰撞角为协同变量提出了一种协同最优制导律用以攻击机动目标,该制导律能保证导弹在碰撞目标时导弹间的相对碰撞角之差满足一定大小,从而实现多方位攻击^[22],随后在该制导律的基础上又提出了一种基于微分博弈的制导律,该制导律不需要目标机动的先验信息,具有更好的适应性^[23]。文献[24]针对双导弹拦截同一机动目标的碰撞角协同问题,提出了基于微分博弈的协同制导律,同时考虑博弈三方的控制系统动态,具有解析解。文献[25]针对机动目标拦截过程中的多导弹间碰撞角与碰撞时间约束问题,设计了一个两阶段的协同制导策略。此外,文献[26]在仅考虑终端脱靶量的情况下基于微分博弈进行了机动目标拦截的协同制导律设计,文献[27]考虑了有向通信拓扑下多导弹协同攻击固定目标问题,并提出了带相对视线(Line-of-Sight, LOS)约束的协同制导律。

1.2.2 基于博弈论的协同制导理论

在多导弹协同制导过程中,当目标存在机动时,导弹与目标之间存在对抗性,同时导弹间可能存在合作的性质,这些性质可用博弈论中的相关理论进行建模与求解^[28]。博弈论在导弹制导中的应用较为广泛,以微分博弈^[29,30]、矩阵博弈^[31]为主。其中,微分博弈(微分对策)在导弹-目标追逃问题以及防御导弹-来袭导弹-目标的‘三体攻防对抗’问题等动态博弈中发挥着重要作用,能有效的给出各方的最优机动方式或策略,因此在博弈制导问题中占据主体地位,被广泛用于一对一或多对一的拦截制导场景中^[32]。

微分博弈最初应用在动态系统中的追逃问题中,Isaacs等将控制论中的部分概念和原理与博弈论结合,将其应用于追逃问题中,初步形成了微分博弈理论,随后出版专著《微分博弈》,标志着这一理论的诞生^[33]。基于该理论,国内外学者在拦截制导领域对其应用展开了深入研究并取得许多成果。在一对一拦截制导领域,J. Shinar等通过仿真证明了在速度时变和加速度约束的情况下,基于微分博弈的制导律比传统导引律有更好的性能^[34]。文献[35]考虑了导弹和目标的过载受限情况下的追逃博弈问题,并证明了在该情况下导弹具有更大的捕获区,能更好地拦截机动目标。随后,K. Horie等将追逃博弈

的目标机动优化问题建模成一个双边优化问题。利用微分博弈理论进行求解,并给出了相应的数值解法^[36]。文献[37]针对带碰撞角约束的一对一拦截制导问题,在任意阶动力学下,给出了基于微分博弈的解析形式的制导律,同时证明了鞍点的存在条件。文献[38]基于 $L2/L\infty$ 性能指标设计了微分博弈制导律,证明了开环鞍点的存在性与初始交战条件有关,同时给出了鞍点不存在时的闭环制导律。其它博弈也被用于拦截制导场景中,文献[39]将导弹和目标的多个制导律分别作为自身的策略集构建了基于矩阵博弈的拦截问题,同时给出在该制导律下捕获区的解析形式。

在多对一拦截制导领域,Hagedorn 等研究了二对一追逃博弈问题,并给出了目标在不同速度下的拦截弹闭环机动^[40]。T.Shima 等在来袭导弹信息已知及线性相对运动方程的假设下,研究了非合作情况下的目标最优逃逸策略。当目标和防御弹协同时,目标的协同机动可有效减小防御弹的过载需求^[41]。文献[42]针对三体制导模型运用线性二次型理论求解了该模型连续和离散的两种形式的纳什均衡解,并根据解的形式分别得出了来袭导弹的制导律、目标与防御器的协同机动策略以及目标的最优规避策略。文献[23]针对带碰撞角约束的多导弹协同拦截同一机动目标给出了微分博弈下的解析解。郭志强等针对线性二次型形式的制导策略不能考虑侧向加速度限制的问题,基于微分博弈理论对飞行器和防御弹的制导律进行了设计和分析,利用范数型的性能指标推导了博弈三方的最优制导策略^[43]。文献[44]考虑导弹和目标的过载受限及一阶动力学下的二对一追逃博弈问题,利用零和微分博弈对其进行求解。此外,矩阵博弈也常用于协同制导中。M. Wei 等利用矩阵博弈理论研究了多目标拦截时各导弹的目标分配问题,同时采用微分博弈制导律实现对目标的拦截^[45,46]。文献[47]针对多导弹协同攻击问题,将多枚导弹视为一个纯合作团体并建立了追逃博弈模型,将每个时刻的策略选择问题转化为矩阵博弈的形式并给出多导弹攻击时的实时策略选择算法,该制导律能实现对目标的合围攻击。

从一对一微分博弈制导开始,到如今的多导弹协同博弈制导,博弈论在导弹制导中的应用经历了从无到有,从简单到复杂的过程。然而,现有的多导弹协同博弈制导律大都仅适用于二对一拦截等小规模协同拦截系统,且对拓扑有严格要求,不利于分布式求解,基于有向拓扑下的分布式协同博弈制导问题仍有待研究。

1.2.3 基于分布式优化的协同制导理论

在分布式优化方面, 网络化系统的分布式优化问题已经成为优化领域的关键问题, 吸引了不同应用领域的学者, 如协同控制^[48, 49]、分布式学习^[50, 51]、同步控制^[52]以及资源定位^[53]等。在实际应用中, 由于分布式优化具有较好的可拓展性和分布式特性, 使得其能自然的融入到大规模网络化系统以及复杂系统中。另一方面, 与集中式算法相比, 分布式优化算法能具有更好的鲁棒性灵活性, 同时能更好的适应多智能体系统 (Multi-Agent System, MAS)。作为 MAS 中的典型系统, 研究分布式优化问题在协同制导中的应用不仅有理论价值同时还有实践意义。

在实际应用中, 目标函数的 (次) 梯度能直接的反映其最优值的收敛方向, 因此目前大多数的分布式优化算法都是在基于 (次) 梯度法的基础上展开的。如, 文献 [54] 针对切换/无向拓扑下的无约束优化问题提出了一种分布式次梯度算法, 同时证明该算法能实现渐近的一致性收敛, 紧接着, 文献 [55] 将该算法拓展到更为一般的收敛步长以及不一致/一致的本地约束优化问题中。此外, 为了获得更好的收敛速率, 可以将该算法的收敛步长进一步拓宽, 使该步长仅需满足正的递减不可积的约束要求^[56]。此外, 文献 [56] 和 [57] 基于分布式次梯度优化算法分别提出了 Push-sum 算法和 Push-DIGing 算法, 能分别实现网络拓扑为切换有向图时的渐近收敛和几何收敛。除了上述方法, 也可以通过将次梯度算法和均值一致性跟踪算法相结合来求解优化问题, 通过加快一致性的过程的提高整个系统的收敛速度^[58, 59]。文献 [60] 将拉格朗日 (Lagrangian) 对偶变量引入乘子方向交替法 (Alternating Direction Method of Multipliers, ADMM) 中将目标优化问题转换为拉格朗日对偶问题进行了求解。文献 [61] 和 [62] 在原始和对偶分解的基础上提出了分布式原始-对偶梯度法用以求解优化问题。

次梯度法的收敛特性反应了优化过程的收敛速度, 具有十分重要的理论意义, 因此大多数的分布式优化算法致力于提升优化过程的收敛速度以及收敛数列。如, 文献 [63] 提出了加速协调下降法并证明了其在处理超大规模优化问题时计算量损耗要优于梯度法。文献 [64] 通过本地同步化对加速协调下降法进行了提升, 同时证明了该算法在解决分布式均值一致性收敛问题时能达到更好的一致性速度。近年来, 多步优化法被逐步应用在次梯度法中, 与常规的优化方法相比, 多步优化在迭代过程中同时考虑了当前信息和之前的信息, 能有效加快收敛速度^[65-68]。文献 [65] 提出了多步加权梯度法, 其主要

原理是用于解决带约束的优化问题的重球法^[69], 多步加权梯度法将其拓展到具有利普西兹连续 (Lipschitz-continuous) 梯度的强凸函数上, 同时证明了其在大多数场景下具有更快的收敛速度。此外, 文献 [66] 建立了基于重球法的凸优化问题的收敛速率全局上界, 文献 [67] 基于 Nesterov 梯度法提出了两个快速分布式梯度法实现了更快的收敛速度。文献 [68] 通过添加梯度过程的动量项设计了分布式多步次梯度算法, 用以求解切换/无向拓扑下的分布式带约束优化问题。总而言之, 上述算法都通过当前和过去的梯度信息流的组合方式获得了更为有效的收敛结果。

随着分布式优化理论的发展与协同控制领域的需求, 分布式优化控制理论应运而生, 其在协同制导领域也逐渐受到重视, 主要体现在分布式模型预测控制 (Model Prediction Control, MPC) 为主的协同制导理论^[70, 71]。与基于最优控制的制导律不同, 基于分布式优化的协同制导律仅考虑每个导弹自身的优化指标同时保证整个系统达到理想的拦截制导效果, 能实现真正意义上的分布式协同制导。B.Johansson 和 E.Camponogara 分别针对分布式 MPC 的基本原理和分布式 MPC 的一致性给出了基本方法, 这些方法成为分布式优化算法在 MAS 系统中应用的基础^[72, 73]。文献 [74] 研究了分布式优化算法在分布式 MPC 一致性中的应用, 并利用 ADMM 算法对其进行求解, 同时实现了飞行器的三维编队仿真。文献 [74] 基于分布式 MPC 研究了针对固定目标的协同制导问题, 将碰撞时间的协同问题转化为弹目相对距离及相对距离变化率的求解, 利用分布式 MPC 将导弹的过载和视场角约束纳入制导律的求解, 从而保证整体系统的作战性能。文献 [75] 同时考虑了碰撞时间和碰撞角约束的协同制导问题, 构建了基于分布式 MPC 的协同制导模型, 并利用粒子群优化算法对其求解得到最终的拦截制导律, 该制导律能实现三维空间的小机动目标协同拦截。文献 [76] 考虑了速度时变情况下的多导弹对同一目标的同时攻击问题, 利用滚动时域控制 (Receding Horizon Control, RHC) 和凸优化相结合来解决多约束的最优比例导引问题同时实现了剩余飞行时间的一致性, 从而保证在不同速度下对目标的有效攻击。

现有的分布式优化算法在收敛速度估计上较为保守, 且相应的分布式优化控制算法在协同制导问题中尚未得到有效应用, 如何以更为直接的方式准确的描述分布式优化算法收敛速度则值得商榷, 其在协同制导中的应用也有待拓展。

1.2.4 基于轨迹参数化的协同制导理论

轨迹参数化通常被用于解决具有非线性动力学以及边界条件约束的最优制导问题,在设计制导拦截轨迹上具有更好的灵活性。基于轨迹参数化的协同制导能减少大多是现有制导律对线性动力学的要求^[18, 77],同时达到一致的拦截效果,是协同拦截领域内的一大重要方向。

如前所述,轨迹参数化在解决具有非线性动力学和边界条件约束的优化问题中有着重要的作用,同时已成功应用在移动飞行器的轨迹规划^[78]和参数化制导中^[79]。现有的参数化制导律可由不同的参数化变量推导得到,如归一化过载^[80]、剩余飞行距离^[81]以及视角^[82]等。与传统的协同制导律相比,基于参数化的制导律能满足更多的边界约束条件,在未来的作战场景有更广阔的应用前景。文献[80]基于剩余飞行时间参数化进行了制导律设计,该制导律的约束条件包括终端碰撞角和过载约束,能实现对固定和小移动目标的拦截,其结果在参数化拦截轨迹的基础可实现带碰撞时间约束的拦截^[82]。此外,文献[83]将导弹的拦截轨迹分为四段进行参数化,并在碰撞时间约束的条件下进行了制导律设计,实现对固定目标的精准打击。文献[84]对不同阶数的参数化制导律进行了详细讨论,其所用的参数化变量为相对距离和视角,并指出满足终端过载约束的参数化相对距离制导律的最小阶数为四阶。文献[85]提出了一种带碰撞时间和碰撞角约束的基于视角参数化的制导律,并提出了一种参数自适应方案用以解决无法进行建模的非线性约束问题。此外,文献[86]通过跟踪参数化的参考轨迹实现了战术弹道导弹制导律的设计,同时能实现终端速度约束(终端速度和飞行路径角)。

注意到,现有大部分的参数化制导律仅适用于一对一的拦截/打击场景,而适用于多导弹拦截的协同参数化制导律研究则相对较少。在参数化协同制导方面,文献[87]研究了机动目标的协同参数化制导律,该制导律结合了传统的轨迹参数化原理和分布式控制中的相应变量的协同。文献[88]通过基于相对距离的视线角参数化设计了带碰撞时间约束的协同拦截制导律,其制导指令可通过跟踪参数化后的轨迹得到。基于轨迹参数化理论的系统制导问题能有效反映导弹间的距离关系,是对协同参数化制导应用的提升,值得深入研究。

1.3 本文的研究工作

基于上述的研究背景和意义,结合已有的研究成果,本论文以多导弹攻防对抗问题为研究背景,拟针对有向拓扑下多导弹协同制导末段制导律进行研究,基于博弈论、分布式优化和轨迹参数化等相关理论进行协同制导律的设计。具体的研究内容概括如下:

(1) 基于分布式纳什策略的协同制导问题研究:针对有向拓扑下多导弹拦截同一机动目标的协同制导问题,重点考虑带终端碰撞角约束的协同制导律设计,基于非合作博弈的纳什均衡理论,将导弹间协同制导问题用非合作博弈中可能存在的竞争关系建模,通过对该模型的求解以实现制导律的设计,提出了一种基于纳什策略的集中式协同制导律;其次,考虑到集中式制导律中需要获取全局终端状态及系统结构等全局信息,通过引入本地观测器实现全局信息的本地化,从而实现基于纳什策略的协同制导律完全分布式化。

(2) 基于分布式优化算法的协同制导问题研究:针对有向拓扑下多导弹协同制导过程中可能存在的合作优化关系以及指标函数不全局可知的情况,探索其在分布式优化算法下的制导律设计。首先,考虑到现有分布式优化算法收敛性分析对收敛速度存在保守与不足估计的情况,基于优化过程中的历史信息能加快收敛速度的思想,提出了一种有向平衡拓扑下基于多步次梯度的分布式优化算法,同时引入邻接矩阵的直径和半径对该算法的一致性收敛进行了分析,建立系统性能和一致性收敛时间的量化关系,同时证明了所提分布式优化算法的收敛性。其次,考虑协同制导过程中可能存在的合作关系,以终端碰撞角为变量构建多导弹系统的协同优化指标函数,基于分布式优化控制理论,将分布式多步次梯度优化的理念应用于最优碰撞角的估计中,同时通过分布式优化控制算法求解协同制导律,从而实现对目标的攻击。

(3) 基于轨迹参数化的协同制导问题研究:针对有向拓扑下多导弹协同制导过程中可能存在的导弹间碰撞与终端碰撞角度约束的情况,重点考虑拦截过程中导弹间的相对距离约束以及拦截终端的飞行路径角约束等问题,同时在非线性动力学的基础上开展制导方法的研究,提出了基于轨迹参数化的协同制导方法。首先,采用一个四阶多项式对满足初始条件和终端条件的拦截轨迹进行参数化,同时将其最高阶项系数作为制导系数进行调整从而获取满足特定需求的拦截轨迹。随后,为了保证所有导弹的参数化轨迹在拦截过程中不会发生碰撞,提出了最小距离保持的避碰策略。最后,根据导弹自身的动

力学约束，提出了实现参数化轨迹平滑跟踪的协同拦截制导方法。

1.4 论文的组织架构

本论文共分为六章，章节安排如图1.4所示。

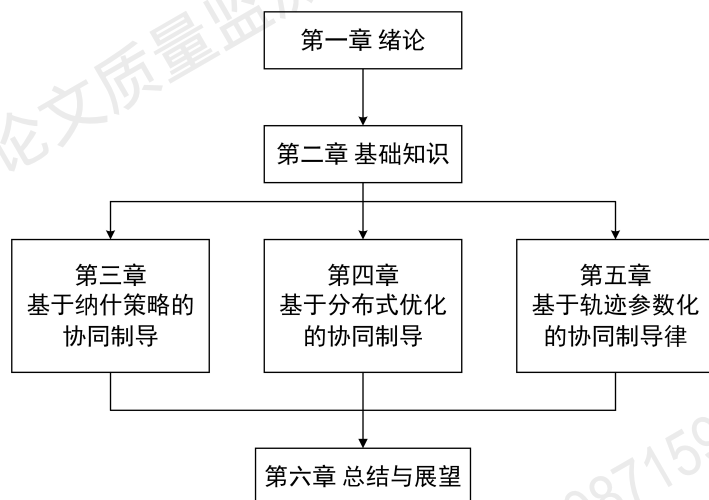


图 1.4 章节安排

第2章：介绍了与多导弹协同制导相关的图论、矩阵理论和博弈论的一些基本概念，同时介绍了多导弹协同制导问题的基本相对运动方程与常用的制导律，为全文奠定了理论基础。

第3章：研究了基于纳什策略的协同制导律，给出基于纳什均衡搜索的集中式制导律和分布式制导律。与现有的基于最优控制和微分博弈的制导相比，本工作导弹间可能存在竞争特性出发，构建了导弹的本地性能指标函数，导弹仅需优化自身的性能指标同时满足整个系统的协同攻击需求，更具有指导意义。同时，进一步探究了基于有向拓扑下纳什均衡搜索问题，通过引入分布式估计器以实现完全分布式的制导律，并指出了此条件下的协同制导律能使整个导弹系统达到 ϵ -纳什均衡，最后针对制导律中相应状态进行了分析。

第4章：研究了基于分布式优化算法的协同制导律，给出基于多步次梯度分布式优化算法的协同制导律。首先，提出了一种多步次梯度分布式优化算法，该算法能利用当前和过去的梯度信息，能有效加快优化算法的一致性收敛过程，其收敛速度受邻接矩阵的直径和半径约束，同时证明了该优化算法能一致收敛到最优值。其次，基于分布式优化控制理论，探索多导弹系统在具有一致的优化指标时的各导弹本地性能指标构建，从

而得到系统的分布式优化性能指标函数，同时给出将多步次梯度优化理念应用于协同制导律的设计，从而实现对目标的协同攻击。

第 5 章：针对轨迹参数化的协同制导问题，在非线性和动力学约束的条件下，给出导弹制导轨迹的多项式参数化形式，通过调整该多项式的最高项以实现对轨迹的调整，导弹通过跟踪该轨迹从而得到需求的制导律。首先，给出了不考虑导弹间避碰的标准制导律，同时证明了所求参数的最优性。其次，利用导弹间距离约束对每个导弹的性能指标函数进行增强，从而提出了考虑避碰的轨迹参数化协同制导律，同时给出了该制导律分布式实现的拓扑需求。最后，针对轨迹参数化多项式最高项系数的搜索需求，给出几类最优参数搜索算法。

第 6 章：对上述工作进行总结，针对不足阐述未来的工作。

2 预备知识

本章主要介绍了本文所研究的多导弹协同制导问题中所需的理论知识，主要包括图论、矩阵理论、纳什博弈和相关引理，同时给出协同拦截问题中导弹和目标的运动学、相对运动方程以及常用的制导律，方便读者阅读后续的章节。

2.1 图论

导弹间的通信拓扑通常图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 表示，简记 \mathcal{G} ，其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为非空点集， $\mathcal{E} = \{(i, j) | i, j \in \mathcal{V}\}$ 为边集，边 $(j, i) \in \mathcal{E}$ 表示节点 i 能接收节点 j 的信息，即节点 j 是节点 i 的邻居。节点 i 的邻接点集定义为 $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$ 。本文需要用到图论的下列定义、引理和定理^[89]。

图的基本类型相关定义如下，其相应的示例见图2.1。

定义 2.1: 对于图 \mathcal{G} ，若所有边都不存在方向，则其是无向图；反之，若存在一条有向边，则其是有向图 (Digraph)；若图的每一条边都附有权值，则称图为加权图 (Weighted Graph)。

定义 2.2: 在有向图中，节点 i 的入度 (In-degree) 定义为终点是节点 i 的有向边数，出度 (Out-degree) 定义为起点是节点 i 的有向边数。若对于所有节点 $i \in \mathcal{V}$ ，其相应的入度都等于出度，则该图是平衡图，无向图一定是平衡图。

图的路径及特殊节点相关定义如下。

定义 2.3: 从节点 i 到节点 j 的路径 (Path) 是节点 i 到节点 j 的边序列，该序列中边的数量是路径长度。

定义 2.4: 在有向图中，若存在一个节点，该节点到其他节点都存在一条有向路径，则称此节点为有向图的一个根节点，又称全局可达点，该节点和这些有向路径构成有向图的一个有向生成树。

图的连通性相关定义如下。

定义 2.5: 在无向图中，若节点 i 到节点 j 存在一条路径，则称节点 i 和节点 j 是连通的。若图中任意一对节点都是连通的，则称此图是连通图。在有向图中，若任意一

对节点 (节点 i 和节点 j), 从节点 i 到节点 j 和节点 j 到节点 i 都存在路径, 则称此图是强连通图。在有向图中, 将图中的所有的有向边替换为无向边得到该图的基图, 若其基图是连通图, 则称此图是弱连通图。在有向图中, 若其至少包含一个全局可达点, 则称此图是最小连通图。

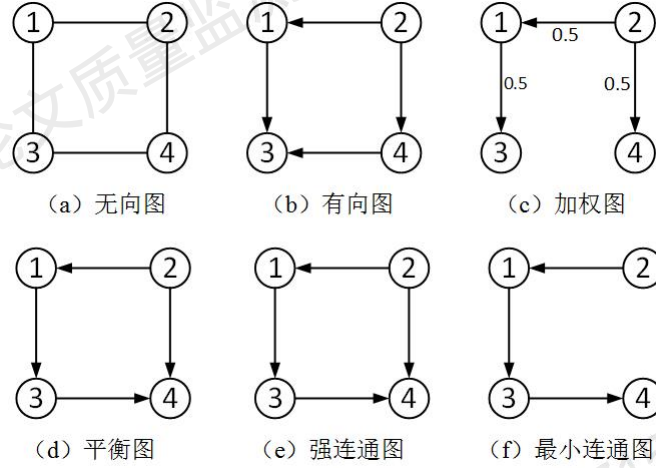


图 2.1 图的相关定义示例

图 \mathcal{G} 的邻接矩阵 (Adjacent matrix) $\mathbf{A}[\mathcal{G}] = [a_{ij}]_{N \times N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 定义如下

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{ij} > 0, & j \in \mathcal{N}_i \\ 0, & j \notin \mathcal{N}_i \end{cases} \quad (2-1)$$

式中, a_{ij} 是边 $(j, i) \in \mathcal{E}$ 的权重, 当 \mathbf{A} 的所有行和值都为 1 时, 则称此矩阵为归一化加权邻接矩阵。其对应的拉普拉斯矩阵 (Laplacian Matrix) $\mathbf{L}[\mathcal{G}] = [l_{ij}]_{N \times N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 定义如下

$$l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & j \in \mathcal{N}_i \\ 0, & j \notin \mathcal{N}_i \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}, & j = i \end{cases} \quad (2-2)$$

图的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵具有如下性质:

对于平衡图, 其邻接矩阵满足: 对于所有的节点 $i \in \mathcal{V}$, 有 $\sum_{j=1}^N a_{ij} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ 。

引理 2.1 ([90]): 图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 的特征值具有非负实部, 且至少有一个零特征值。特别地, \mathbf{L} 仅有一个零特征值, 当且仅当图 \mathcal{G} 包含一条生成树。

引理 2.2 ([90]): 无向图 \mathcal{G} 的邻接矩阵 \mathbf{A} 和拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 是对称矩阵, 且 \mathbf{L} 是一个半正定矩阵。

2.2 矩阵理论

本文需要用到矩阵论的下列定义、引理和定理。

定理 2.1 (Gershgorin 圆盘定理 [91]): 矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 的所有特征值位于下列 N 个圆盘的集合内。

$$\bigcup_{i=1}^N \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\}$$

进一步地, 若存在 k 个圆盘组成与其它 $N - k$ 个圆盘都不连接的连通域, 那么在该连通域内有且仅有 \mathbf{A} 的 k 个特征值。

若一个矩阵 \mathbf{A} 或向量 \mathbf{x} 的所有元素均非负 (或正), 则该矩阵或向量是非负 (或正) 的, 表示为 $\mathbf{x} \geq 0$ (或 $\mathbf{x} > 0$) 和 $\mathbf{A} \geq 0$ (或 $\mathbf{A} > 0$)。

定义 2.6 ([91]): 设矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是非负矩阵, 若 \mathbf{A} 满足

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

则称 \mathbf{A} 为行随机矩阵, 若 \mathbf{A} 同时满足

$$\sum_{i=1}^N a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

则称 \mathbf{A} 为双随机矩阵。

由定义 2.6 可知, 行随机矩阵具有特征值 1, 且其对应的特征向量为 $\mathbf{1}_N$ 。由定理 2.1 可知, 行随机矩阵的谱半径为 1。若有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{A}^k = \mathbf{1}_N \mathbf{v}^T$, 其中 \mathbf{v} 是适维的列向量, 那么矩阵 \mathbf{A} 是不可分解且非周期的 (Indecomposable and aperiodic, SIA) 矩阵^[92]。对于图 \mathcal{G} 的邻接矩阵, 有如下引理。

引理 2.3 ([90]): 若有向图 \mathcal{G} 至少包含一条有向生成树或无向图 \mathcal{G} 为连通图, 它们对应的归一化加权邻接矩阵 $\mathbf{A}[\mathcal{G}]$ 是 SIA 矩阵。

定义 2.7 ([48]): 设矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是行随机矩阵, 那么其半径 (Radius) 和直径 (Diameter) 定义如下:

$$\Delta_r(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \|\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j\|_1, \quad \delta_d(\mathbf{A}) = \max_{i,j} \|\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j\|_\infty \quad (2-3)$$

当且仅当 $\delta_d(\mathbf{A}) = 0$ 时 $\Delta_r(\mathbf{A}) = 0$, 反之亦然, 其中 \mathbf{A}_i 或 $[\mathbf{A}]_i$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的第 i 个行向量。

由定义 2.7 可得 $0 \leq \Delta_r, \delta_d \leq 1$ 。半径 Δ_r 可表示矩阵 \mathbf{A} 任意两列之间的最大距离，直径 δ_d 可表示任意两行之间的最大距离。

引理 2.4 ([48]): 考虑 \mathbf{A} , \mathbf{B} 和 \mathbf{C} 三个适维的行随机矩阵, 且有 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, 那么下式成立。

$$\delta_d(\mathbf{C}) \leq \Delta_r(\mathbf{B})\delta_d(\mathbf{A}), \text{ 且 } \Delta_r(\mathbf{C}) \leq \Delta_r(\mathbf{B})\Delta_r(\mathbf{A}) \quad (2-4)$$

引理 2.5 ([93]): 设矩阵 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是双随机矩阵, 那么其幂序列能实现全局指数收敛, 即存在一个有界常数 m^* 使得下式成立

$$\mathbf{A}^k = \bar{\mathbf{A}}, \text{ 且 } \mathbf{A}_{ij}^k = \frac{1}{N}, \forall k \geq m^*$$

式中 $\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{N}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$, $\mathbf{1}$ 为适维列向量, \mathbf{A}_{ij}^k 或 $[\mathbf{A}^k]_{ij}$ 是矩阵 \mathbf{A}^k 的第 ij 个元素。

定义 2.8: 设 $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$, 它们的 Kronecker 积定义如下:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & a_{m2}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$$

引理 2.6 ([48]): 矩阵的 Kronecker 积具有如下的性质:

- (1) 对任意标量 k , $(k\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathbf{A} \otimes (k\mathbf{B}) = k(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$;
- (2) $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$;
- (3) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$;
- (4) $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$;
- (5) 若 \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} 是适维矩阵, 则 $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD})$ 。

2.3 博弈论简介

博弈论 (Game Theory), 又称对策论, 是现代数学的一重要领域, 主要研究当多个参与人员之间存在利益冲突或合作时, 各参与者在自身能力和已知信息的条件, 做出最优决策, 从而获取最大利益 (或最小代价) 的问题。1944 年, Von Neumann 和 Morgenstern 合作发表了著作《博弈论与经济行为》, 标志着博弈论的正式诞生。该书不仅汇集了当时博弈论的主要研究成果, 而且系统性的阐述了博弈论的研究框架和基本公理, 其对二人零和博弈的研究成果是现代博弈论研究的标准样式。随后, John Nash 与 20 世纪 50

年代提出了非合作博弈场景下的解——纳什（Nash）均衡，纳什均衡几乎适用于所有的博弈问题。纳什均衡及其存在性为现代非合作博弈一般化奠定了坚实的理论基础，极大地促进了博弈论的研究。经过几十年的发展，博弈论已成为一个较完善的学科，在军事、经济与工程等领域有着重要的应用。

一个基本博弈模型可由**参与者**、**策略集**和**收益函数**完全确定，它们被称为博弈的三要素，各部分介绍如下。

参与者：参与者也称局中人，是指博弈中具有制定自身决策动作的主体（包含个体和团体组织），如果有 $n(n \geq 2)$ 参与者，那么参与者集合可表示为 $N = \{1, 2, \dots, n\}$ 。在博弈中，如无特别说明，一般假设所有参与者都是完全理性的，完全理性意味着每个参与者都以当前自身利益最大化为决策目标。

策略集：在博弈中，可供参与者选择的一个实际可用决策称为一个**策略**，每个参与者都有一组策略，称为策略集，参与者 i 的有限策略集表示为 $S_i = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ ，其中 m 为正整数。

收益函数：在博弈中，收益函数是指当前策略能获取期望收益，该收益不仅取决于参与者 i 的策略，还与其它参与者的策略有关，同时还可能受环境与时间等因素的影响。一般地，收益函数定义为所有策略的函数，参与者 i 的收益函数定义为 $P_i = p_i(s_i, s_{-i})$ ，其中， s_i 为参与者 i 的策略， $s_{-i} = \{s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n\}$ 为其它参与者的策略。

综上，一个基本的博弈模型可表示为：

$$G = \{N; S_1, S_2, \dots, S_n; P_1, P_2, \dots, P_n\}$$

根据不同的标准，博弈论可分为不同的类（如图2.2所示）。根据参与者做决策的时间顺序可分为静态博弈与动态博弈；根据参与者收益函数之间的关系可分为合作博弈与非合作博弈；根据参与者间的信息结构可分为完全信息博弈与不完全信息博弈。特别地，根据博弈问题的抽象数学模型可以分为矩阵博弈、连续博弈和微分博弈等。

需要注意的是，在非合作博弈中，行业内习惯上将博弈问题分为完全信息静态博弈、不完全信息静态博弈、完全信息动态博弈和不完全信息动态博弈，同时针对这四类博弈问题，分别研究其对应博弈形式与对应的均衡解，分别对应纳什均衡、贝叶斯纳什均衡（Bayesian Nash Equilibrium）、子博弈精炼纳什均衡（Sub-game-perfect Equilibrium）与精炼贝叶斯纳什均衡（Perfect Bayesian Equilibrium）。

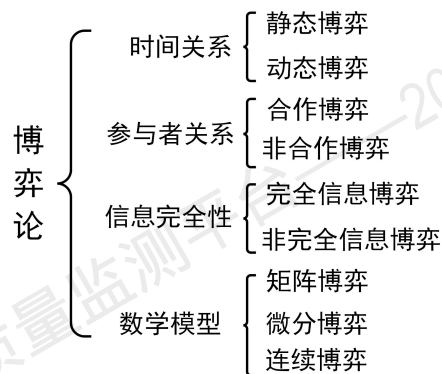


图 2.2 博弈论分类

在传统的博弈问题中，纳什均衡是一个十分重要的概念，一般都将其视为博弈的解。纳什均衡的定义如下：

定义 2.9: 给定一个有 n 个参与者的博弈 $G = \{N; S_1, S_2, \dots, S_n; P_1, P_2, \dots, P_n\}$ ，策略组合 $s^* = (s_1^*, \dots, s_i^*, \dots, s_n^*)$ 是一个纳什均衡，当其仅当 $\forall i \in N, \forall s_i^* \in S_i$ 时，有

$$s_i^* \in \arg \max_{s_i \in S_i} P_i(s_i, s_{-i}^*)$$

其中， $s_{-i} = \{s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*\}$ 。

由定义 2.9 可知，纳什均衡意味着任何参与者都不能通过改变策略以达到更大的收益，否则它的收益会因此降低。另一方面，对于一个博弈问题，其纳什均衡点可能存在多个，也可能不存在，由其基本要素决定。

2.4 常用制导律

本文主要考虑多导弹协同制导的末制导阶段，同时将导弹和目标视为质点模型。另一方面，导弹在三维空间中的运动可解耦为侧向平面和纵向平面内的运动，本文重点关注导弹在二维平面内的制导问题。在末制导阶段，导弹和目标的速度变化较小，因此本文假设在末制导过程中导弹和目标的速度大小不变，仅通过法向过载改变速度方向。基于此，二维平面内导弹和目标的相对运动关系如图 2.3 所示。其中， $O_I X_I Y_I$ 是参考惯性坐标系。速度、法向加速度以及飞行路径角分别表示为 v 、 a 和 θ ，其中下标 i 和 T 分别表示该状态属于导弹 i 和目标。 r_i 为导弹 i 与目标的距离， q_i 为其弹目视线角， ε_i 为其前置角，定义为导弹 i 的速度与视线方向的夹角。

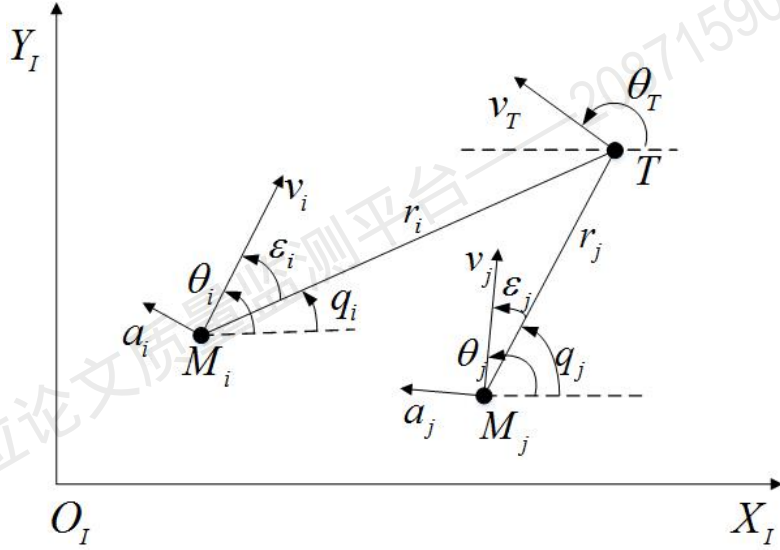


图 2.3 相对运动关系示意图

本文中导弹和目标采用相同的运动学模型，导弹 i 的运动学模型如下：

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \cos(\theta_i) \\ \dot{y}_i = v_i \sin(\theta_i) \\ \dot{\theta}_i = \frac{a_i}{v_i} \end{cases} \quad (2-5)$$

其中， x_i 和 y_i 表示导弹在惯性系内的位置坐标。导弹 i 和目标的相对运动方程如下：

$$\begin{cases} \dot{r}_i = -v_T \cos(\theta_T - q_i) - v_i \cos(\theta_i - q_i) \\ r_i \dot{q}_i = v_T \sin(\theta_T - q_i) + v_i \sin(\theta_i - q_i) \end{cases} \quad (2-6)$$

其中， $v_r = -v_T \cos(\theta_T - q_i) - v_i \cos(\theta_i - q_i)$ 称为导弹 i 在视线 q_i 方向的接近速度。

基于导弹和目标的相对运动方程，业内进行各种制导律的研究，目前较为常用的一对一攻击制导律为比例导引法（Proportional Navigation Guidance, PNG），PNG 是指在导弹攻击目标的过程中，导弹速度矢量的旋转角速度与视线的旋转角速度成正比，如式(2-7)所示。

$$a_i(t) = K_i v_i \dot{q}_i \quad (2-7)$$

比例导引法弹道前段较为弯曲，能充分利用导弹的机动能力，而后段比较平直，导弹的需用过载较小，导弹攻击不易脱靶，通过选择合适的参数，易于实现全向攻击。比例导引法在命中目标时需用过载与命中点的导弹速度和方向有关，当攻击目标存在机动时，还受到目标过载与速度的影响。为了对这些因素进行补偿，增强比例导引律（Argument Proportional Navigation, APN）被提出，其在拦截机动目标时具有更为平直的弹道后段

与较小的需用过载，APN 的基本形式如下。

$$a_i(t) = \left[1 + \frac{K_i}{\cos(\theta_i - q_i)} \right] v_i \dot{q}_i + \frac{\hat{a}_{iT}}{\cos(\theta_i - q_i)} \quad (2-8)$$

其中， \hat{a}_{iT} 为目标在导弹 i 的视线法向上分量的估计值。

在上述经典的一对一制导律基础上，业内对协同制导律也进行了研究，其中较为经典的制导律是协同比例导引 (CPN)，通过将式(2-7)中的导引系数 K_i 设为与剩余飞行时间相关的变量从而飞行时间的协同拦截，其主要内容如下。

针对 N 个导弹协同攻击一个静止目标的场景，给定式(2-7)中时变导引系数如下。

$$\bar{K}_i(t) = K(1 - \Omega_i(t)) \quad (2-9)$$

其中， K 是导引常数， $\Omega_i(t)$ 是待确定的时变增益。

定义导弹 i 的相对剩余飞行时间误差如下

$$\Delta t_{go_i}(t) = \frac{N}{N-1} [\bar{t}_{go}(t) - t_{go_i}(t)] \quad (2-10)$$

其中，

$$\bar{t}_{go}(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N t_{go_j}(t), \quad t_{go_i}(t) \approx \frac{r_i(t)}{v_i} \left[1 + \frac{\varepsilon_i^2(t)}{4K-2} \right]$$

定义系统的剩余飞行时间方差如下

$$\Sigma^2(t) = \frac{1}{N} [\bar{t}_{go}(t) - t_{go_i}(t)]^2 \quad (2-11)$$

CPN 的目的为通过合理设置 $\Omega_i(t)$ 使得 $\Sigma^2(t) \rightarrow 0$ 。在上述定义的基础上，导弹和目标的相对运动方程可重写如下

$$\begin{cases} \dot{r}_i(t) = v_i \cos \varepsilon_i(t) \\ r_i(t) \dot{\varepsilon}_i(t) = -(K-1)v_i \sin \varepsilon_i(t) + K v_i \sin \varepsilon_i(t) \Omega_i(t) \end{cases} \quad (2-12)$$

由此可得，CPN 制导律的主要形式如下

$$\Omega_i(t) = K r_i(t) \Delta t_{go_i}(t) \quad (2-13)$$

对于给定的正导引系数 K ，协同比例导引(2-13)在式(2-12)的约束下能使系统剩余飞行时间方差 $\Sigma^2(t)$ 趋于 0，从而实现对目标的同时攻击。然而其包含了全局变量 $\Delta t_{go_i}(t)$ ，这意味了导弹系统是集中式的或通信拓扑为全联通形式。

除了上述基于相对运动方程(2-6)的协同制导律外,国内外学者在相对运动方程进行线性化的基础上利用最优控制和微分博弈也开展了相应的制导律设计(详见 3.2.3 节),然而这些制导律都要求集中式处理信息或无向拓扑的形式,这大大限制了其适用范围,因此开展有向拓扑以及切换拓扑下的协同制导律设计具有重要的价值。

2.5 本章小结

本章根据多导弹协同拦截系统的特点,介绍了与多导弹协同制导相关的图论、矩阵论和博弈论等知识,为后续内容展开奠定了理论知识。同时建立了协同制导律设计的相对运动方程,给出经典的一对一拦截和多对一拦截制导律的基本形式,指出已有的协同制导律在有向拓扑下的分布式协同仍纯在不足,需进一步研究。

3 有向拓扑下基于分布式纳什策略的协同制导问题研究

3.1 引言

针对有向拓扑下多导弹拦截同一机动目标的协同制导问题,本章基于分布式纳什策略提出了带终端碰撞角约束的协同制导律,该问题的主要难点在于如何通过有限局部信息实现对目标的多方位拦截。基于此,本章将多导弹协同制导问题转化为纳什均衡搜索问题,其中每个导弹仅需优化自身的性能指标,而不需要考虑整个系统指标。进一步,通过引入本地观测器对全局信息进行本地化,以实现该制导律在单个导弹上的独立运行,从而得到完全分布式的基于纳什策略的协同制导律。

与统一对一拦截制导相比,多导弹协同拦截制导能有效提升整个系统的鲁棒性和灵活性,能较好地适应不同拦截场景,是近年来拦截制导领域的热点话题。已有的多导弹协同制导律大多仅针对固定或移动目标,且通常采用集中式方法求解系统整体目标函数以获得最终的制导律。然而这些多导弹系统的整体目标函数通常是 Pareto 最优的,它要求所有导弹达到一个相对平衡的状态。尽管已有协同制导律在多导弹拦截系统中具有很大的应用前景,但却忽略了协同制导问题中导弹间可能存在的竞争性质,该性质意味着参与拦截的每个导弹需要在不连续的观测信息和有限的计算资源下实现目标拦截,导弹需要具有较高的通信与计算能力。导弹间的竞争性质指出可以将协同制导问题视为纳什博弈问题,在该问题中每个导弹仅需对自身的目标函数进行求解,能进一步降低系统需求。然而,考虑目标机动的协同制导问题在纳什均衡的求解上尚未得到充足研究,这也是本章所关注的重点内容。具体来说,本章将带碰撞角约束的协同制导问题转换为纳什博弈问题,其对应纳什平衡点恰是原制导问题的一个可行解。然后利用多导弹系统中导弹间不存在无意识协同竞争的性质,可以在弱通信拓扑的情况下,使得每个导弹仅利用本地和环境信息优化自身性能指标,从而使整个系统达到纳什均衡,同时得到在纳什博弈下的协同制导律。

3.2 分布式纳什博弈协同拦截模型

本节重点介绍协同拦截相关基础理论，主要内容包括协同拦截相对运动方程以及协同拦截纳什博弈模型两大部分，用以进行拦截制导律的求解，各部分介绍如下。

3.2.1 协同拦截相对运动方程

本章主要考虑多导弹协同拦截同一机动目标的末制导阶段，如图3.1所示，其中 $O_I X_I Y_I$ 是参考惯性坐标系。速度、法向加速度以及飞行路径角分别表示为 v 、 a 和 θ ，其中下标 i 和 T 分别表示该状态属于第 i 个导弹和目标。 r_i 为导弹 i 与目标的距离， q_i 为导弹 i 的弹目视线角与 X_I 轴的夹角，目标和导弹 i 垂直于视线角方向的加速度分别用 a_{Tq} 和 a_{iq} 表示。此外，定义导弹 i 的参考坐标系的 X 轴为图3.1中的 LOS_{i0} ，该坐标系可由参考惯性坐标系旋转导弹 i 的初始视线角 q_{i0} 得到， y_{qi} 为目标点到坐标轴 LOS_{i0} 的距离。基于上述相关定义，导弹 i 和目标垂直于初始视线 LOS_{i0} 的过载满足以下等式：

$$\begin{aligned} a_{iq0} &= k_i a_i; & k_i &= \cos(\theta_{i0} - q_{i0}) \\ a_{Tq0} &= k_{Ti} a_T; & k_{Ti} &= \cos(\theta_{T0} + q_{i0}) \end{aligned} \quad (3-1)$$

式中， θ_{i0} 和 θ_{T0} 分别式导弹 i 和目标的初始飞行路径角。

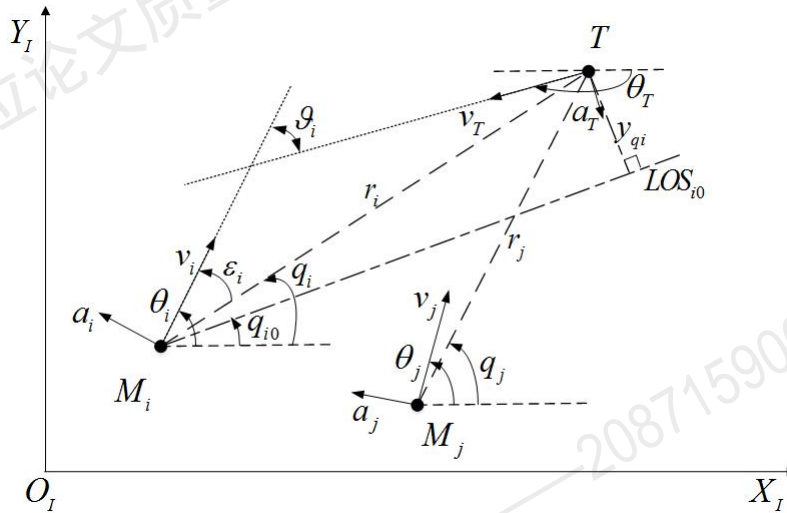


图 3.1 平面内相对运动示意图

导弹 i 与目标间的碰撞角为 ϑ_i ，定义如下：

$$\vartheta_i = \theta_i - \theta_T - \pi. \quad (3-2)$$

目标点到坐标轴 LOS_{i0} 的距离 y_{qi} 常被用于标定导弹 i 的零控脱靶量 (Zero Effort Miss, ZEM), 其大小能反映拦截结束时的脱靶量大小, 是衡量拦截制导效果的重要指标, 结合 y_{qi} 的导数, 可定义协同制导问题的状态变量:

$$\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} y_{qi} & \dot{y}_{qi} & \vartheta_i \end{bmatrix}^T \quad (3-3)$$

在对相对运动方程进行线性化之前, 首先对导弹和目标的速度以下假设, 该假设是线性化的基础, 其主要内容如下。

假设 3.1: 在整个末制导过程中, 导弹和目标的速度保持不变。

假设 3.1被广泛应用于各类制导问题中^[10], 在该假设下, 导弹 i 的碰撞时间可由下式估计:

$$t_{fi} = \frac{-r_{i0}}{v_{r_i}} \quad (3-4)$$

其中, $v_{r_i} = -[v_i \cos(\theta_i - q_i) + v_T \cos(\theta_T + q_i)]$ 是导弹 i 在视线方向的接近速度。

在**假设 3.1**以及相关定义的基础上, 导弹和目标在末制导段的碰撞三角形在拦截过程中的变化较小, 可忽略不计。因此, 可得导弹 i 的线性相对运动方程, 也即协同拦截相对运动方程:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_i u_i + \mathbf{C}_i u_T \quad (3-5)$$

其中, $\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ -k_i \\ 1/v_i \end{bmatrix}$, 且 $\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{Ti} \\ -1/v_T \end{bmatrix}$, k_i 和 k_{Ti} 的定义见式 (3-1)。

此外, 导弹间的通信拓扑可用有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 描述, 其中 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 为表示图 \mathcal{G} 的顶点集。 $\mathcal{E} = \{(v_i, v_j) | v_i, v_j \in \mathcal{V}\}$ 为有向边, 边 (v_j, v_i) 表示导弹 j 是导弹 i 的邻居, 导弹 i 的邻接点集定义为 $\mathcal{N}_i = \{v_j \in \mathcal{V} | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$, 其相应的邻接矩阵 $\mathbf{D} = [\mathbf{D}_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 定义为:

$$\mathbf{D}_{ij} = \begin{cases} d_{ij}, & \text{if } j \in \mathcal{N}_i \\ 0, & \text{if } j \notin \mathcal{N}_i \end{cases} \quad (3-6)$$

其中, $d_{ij} > 0$ 是边 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ 的权重。邻接矩阵 \mathbf{D} 对应的拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L} = [\mathbf{L}_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 可定义为:

$$\mathbf{L}_{ij} = \begin{cases} -d_{ij}, & \text{if } j \in \mathcal{N}_i \\ 0, & \text{if } j \notin \mathcal{N}_i \\ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} d_{ij}, & \text{if } j = i \end{cases} \quad (3-7)$$

有向图 \mathcal{G} 的连通性可用以表示导弹间通信情况, 当导弹间通信拓扑更改时, 对应的有向图也会发生改变, 可用这种性质来描述协同拦截的动态性, 本节对 \mathcal{G} 的连通性做出如下假设。

假设 3.2: 通信拓扑 \mathcal{G} 是有向的且是极小连通的^[94]。

假设 3.2 意味着图 \mathcal{G} 至少包含一条有向生成树, 导弹间的协同信息可通过全局可达点在有限时间内传递到各节点, 从而实现对目标的协同拦截。

3.2.2 协同拦截纳什博弈模型

在基于纳什策略的多导弹协同拦截场景中, 每个导弹仅需优化自身的性能指标, 为保证各导弹都能顺利完成目标拦截, 其性能指标应根据需求合理设置。对于导弹 i , 其主要目的是寻找合适的制导律 u_i^* 使得: 1) 脱靶量最小; 2) 以特定的碰撞角拦截目标; 3) 能量消耗最小。在这些指标中, 脱靶量和能量消耗指标与常规的优化拦截制导问题一致, 能保证对目标的顺利拦截, 碰撞角指标则反映拦截过程中的导弹间的博弈性质, 即碰撞时导弹间的碰撞角之差。因此, 导弹 i 的性能指标定义如下:

$$J_i = \frac{l_i}{2} \mathbf{x}_{i1}^2(t_{f_i}) + \frac{\ell_i}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\mathbf{x}_{i3}(t_{f_i}) - \mathbf{x}_{j3}(t_{f_j}) - \Delta c_{ij}]^2 + \frac{s_i}{2} \int_0^{t_{f_i}} u_i^2(\tau) d\tau \quad (3-8)$$

其中, l_i , ℓ_i 和 s_i 为非负常数, Δc_{ij} 是导弹 i 和 j 间的期望碰撞角之差, $x_{i\ell}$ 是 x_i 的第 ℓ 个元素。

与文献 [22] 中的基于最优控制的协同制导问题不同, 性能指标(3-8)仅考虑每个导弹的本地信息, 且当导弹间通信拓扑矩阵 \mathcal{G} 完全独立 (即 $\mathcal{N}_i = \emptyset, \forall i \in \mathcal{V}$) 或 $\ell_i = 0$ 时, 该指标仅包含脱靶量和控制量信息, 即可简化为经典最优控制问题。

注意到, 性能指标(3-8)包含了脱靶量 $\mathbf{x}_{i1}(t_{f_i})$ 及碰撞角 $\mathbf{x}_{i3}(t_{f_i})$ 约束, 而没有考虑终端脱靶量的导数 $\mathbf{x}_{i2}(t_{f_i})$ (即 \dot{y}_{qi})。如果采用模型(3-5)求解式(3-8)会导致终端值在 $x_{i2}(t_{f_i})$ 处产生奇异, 从而无法得到有效的制导律, 不能实现有效拦截, 因此需要对线性相对运动方程(3-5)进行降阶处理^[22]。式(3-5)降阶后的状态变量如下:

$$\mathbf{Z}_i(t) = \mathbf{W} \Phi_i(t_{go_i}) \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{W} \int_t^{t_{f_i}} \Phi_i(t_{f_i}, \tau) \mathbf{C}_i u_T d\tau \quad (3-9)$$

式中 $t_{go_i} = t_{f_i} - t$ 是导弹 i 的剩余飞行时间, $\Phi_i(t_{f_i}, t)$ 是的状态方程(3-5)系统矩阵 \mathbf{A}_i 相应的状态转移矩阵, \mathbf{W} 是一个定常转换矩阵用以从状态变量(3-3)提取脱靶量和碰撞角

状态，定义如下

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3-10)$$

由于 $\Phi_i(t_{f_i}, t)$ 满足

$$\dot{\Phi}_i(t_{f_i}, t) = -\Phi_i(t_{f_i}, t)\mathbf{A}_i$$

对式(3-9)求导可得 $\mathbf{Z}_i(t)$ 的状态方程。

$$\dot{\mathbf{Z}}_i(t) = \mathbf{W}\Phi_i(t_{f_i}, t)\mathbf{B}_i u_i \quad (3-11)$$

显然， $\dot{\mathbf{Z}}_i(t)$ 是 u_i 的独立函数且与其余状态无关，在合适的性能指标下可用于求解各种制导律，如基于最优控制的线性制导律等。

式(3-11)所定义的状态变量包含了导弹 i 的脱靶量与碰撞角信息，分别对应 $\mathbf{Z}_{i1}(t)$ 和 $\mathbf{Z}_{i2}(t)$ 。对于本章所定义的单边优化问题(3-8)而言， $\mathbf{Z}_{i1}(t)$ 和 $\mathbf{Z}_{i2}(t)$ 分别是零控脱靶量和零控碰撞角（Zero Effort Angle, ZEA），它们的定义为从当前时刻起，导弹不施加控制量而目标执行已知机动策略得到的拦截脱靶量和碰撞角，它们对应状态方程的具体形式如下。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}_{i1}(t) = -k_i t_{go_i} u_i \\ \dot{\mathbf{Z}}_{i2}(t) = \frac{u_i}{v_i} \end{cases} \quad (3-12)$$

当 $t > t_{f_i}$ 时，导弹 i 拦截结束，需从通信拓扑 \mathcal{G} 中移除相应节点，从而导致 \mathcal{G} 的维度降低，容易使所得的控制量发生畸变。为了消除这种由导弹拦截结束引起不连续性，假设导弹 i 各状态保持与拦截结束时一致，该状态保持可通过引入单位阶跃函数实现，即

$$\dot{\mathbf{Z}}_i(t) = [\mathbf{W}\Phi_i(t_{f_i}, t)\mathbf{B}_i u_i]1(t_{f_i} - t) \quad (3-13)$$

式中， $1(\tau)$ 为单位阶跃函数，满足下式

$$1(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{if } \tau \geq 0 \\ 0, & \text{if } \tau < 0 \end{cases}$$

同样地，对于所有导弹 $i \in \{1, \dots, N\}$ ，有 $\mathbf{Z}_i(t) \equiv \mathbf{Z}_i(t_{f_i})$ ， $\forall t > t_{f_i}$ 。

基于上述讨论，为了得到与状态方程(3-11)匹配的性能指标，将式(3-8)重写为

$$J_i = \frac{l_i}{2} \mathbf{Z}_{i1}^2(t_{f_n}) + \frac{\ell_i}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\mathbf{Z}_{i2}(t_{f_n}) - \mathbf{Z}_{j2}(t_{f_n}) - \Delta c_{ij}]^2 + \frac{s_i}{2} \int_0^{t_{f_i}} u_i^2(\tau) d\tau \quad (3-14)$$

式中, $t_{f_n} = \max_{i \in \{1, \dots, N\}} t_{f_i}$ 是拦截过程中的最大碰撞时间。

为了便于后续内容的展开与推理, 将上式重写如下矩阵形式:

$$J_i = \frac{1}{2} \|\mathbf{Z}_i(t_{f_n})\|_{\mathbf{F}_{Z_i}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|\mathbf{Z}_i(t_{f_n}) - \mathbf{Z}_j(t_{f_n}) - \mathbf{c}_{ij}\|_{\mathbf{F}_{\theta_i}}^2 + \frac{s_i}{2} \int_0^{t_{f_i}} u_i^2(\tau) d\tau \quad (3-15)$$

式中, $\mathbf{F}_{Z_i} = \begin{bmatrix} l_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{F}_{\theta_i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \ell_i \end{bmatrix}$, $\mathbf{c}_{ij} = [0 \ \Delta c_{ij}]^T$, 且 $\|\mathbf{x}\|_{\mathbf{F}_{Z_i}}^2 = \mathbf{x}^T \mathbf{F}_{Z_i} \mathbf{x}$, l_i , ℓ_i 和 s_i 为非负常数。

至此, 协同拦截的纳什博弈模型的基本要素构建完毕, 它由状态方程(3-5)或(3-13)和性能指标(3-15)组成, 基于纳什策略的协同制导问题即是对它的纳什平衡点进行搜索从而得到制导律的问题。

在给定协同拦截纳什博弈模型的基础上, 本章使用博弈论思想解决开环的协同拦截问题, 即所得制导律仅是时间和初始状态的函数, 重点关注如何求解纳什平衡点, 从而得到相应的协同制导律。开环纳什平衡的定义如下:

定义 3.1: 对于由状态方程(3-5)和性能指标(3-14)组的系统, 当下列不等式对所有的 $i = 1, \dots, N$ 都成立时, 其对应的控制策略 $\{u_1^*, \dots, u_N^*\}$ 是一个开环纳什平衡解。

$$J_i(u_1^*, \dots, u_i^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, \dots, u_i, \dots, u_N^*) \quad (3-16)$$

在实际应用中, 理论上的纳什平衡解通常难以得到, 而实际的纳什平衡与理论的纳什平衡常常存在一个微小偏差, 这种平衡状态通常被称为 ϵ 纳什平衡, 其定义如下:

定义 3.2: 对于由状态方程(3-5)和性能指标(3-14)组成的系统, 当下列不等式对所有的 $i = 1, \dots, N$ 都成立时, 其对应的控制策略 $\{u_1^*, \dots, u_N^*\}$ 是组成一个 ϵ 开环纳什均衡解。

$$J_i(u_1^*, \dots, u_i^*, \dots, u_N^*) \leq J_i(u_1^*, \dots, u_i, \dots, u_N^*) + \epsilon \quad (3-17)$$

注 3.1: 式(3-16)和(3-17)中的纳什策略均能使得性能指标(3-14)达到最优值 (即最小脱靶量和预期终端碰撞角之差), 这与多导弹系统的拦截目标一致。因此, 可通过对整个交战过程的纳什均衡解的协同搜索以获取相应的协同制导律, 从而导引导弹组以预期的终端条件拦截目标。

在给出协同制导律前, 本节先给出部分矩阵的收敛性质, 以便后续内容的展开。由邻接矩阵 \mathbf{D} 、拉普拉斯矩阵 \mathbf{L} 以及权重矩阵 \mathbf{F}_{Z_i} 和 \mathbf{F}_{θ_i} 按一定形式组成矩阵的具有收敛特性, 其具体结论和证明由以下引理给出。

引理 3.1: 给定 $F_Z = \text{diag}\{F_{Z_1}, \dots, F_{Z_N}\}$, $F_\theta = \text{diag}\{F_{\theta_1}, \dots, F_{\theta_N}\}$, 邻接矩阵 D 和拉普拉斯矩阵 L 分别定义如式(3-6)和(3-7)。令 $G = \text{diag}\{s_1^{-1}G_1, \dots, s_N^{-1}G_N\}$, G_i 定义如下

$$G_i = \int_t^{t_{f_i}} W \Phi_i(t_{f_i}, \tau) B_i B_i^T \Phi_i^T(t_{f_i}, \tau) W^T d\tau \quad (3-18)$$

那么, 下列矩阵的特征值具有正实部。

$$H = I_N \otimes I_2 + G[F_Z + F_\theta(L \otimes I_2)] \quad (3-19)$$

式中, I_n 表示 n 维的单位阵, \otimes 表示克罗内克 (Kronecker) 积。

证明. 令 $S = F_Z + F_\theta(L \otimes I_2)$, 式(3-19)可重写为

$$H = I_N \otimes I_2 + GS$$

根据 L , F_{Z_i} 和 F_{θ_i} 的定义可得

$$S = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ell_1 l_{11} & \cdots & 0 & \ell_1 l_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_N & 0 \\ 0 & \ell_N l_{N1} & \cdots & 0 & \ell_N l_{NN} \end{bmatrix}$$

显然, 对于所有的 $i = 1, \dots, 2N$, $S_{ii} \geq \sum_{j \neq i} |S_{ij}|$ 恒成立, 且 S 的对角元素均为非负数。根据盖尔圆盘定理, S 的特征值具有非负实部。

对式(3-18)积分可得:

$$G_i = \begin{bmatrix} \frac{k_i^2}{3} t_{go_i}^3 & -\frac{k_i}{2v_i} t_{go_i}^2 \\ -\frac{k_i}{2v_i} t_{go_i}^2 & \frac{1}{v_i^2} t_{go_i} \end{bmatrix}. \quad (3-20)$$

显然 G_i 是正定矩阵, 同时 S 的特征值具有非负实部。因此, GS 的特征值也具有非负实部, 引理3.1得证。 ■

3.2.3 基于最优控制和微分博弈的制导律

如前所述, 线性化相对运动方程(3-5)与通过零控终端状态 (脱靶量和碰撞角) 降阶后的状态方程(3-11)或(3-13)是研究末制导律常用的相对运动模型, 在不同的性能指标(3-8)或(3-14)下, 可通过最优控制理论与微分博弈理论分别进行制导律设计, 这些制导律介绍如下。

3.2.3.1 基于最优控制的制导律

不考虑导弹间协同制导时, 在状态方程(3-11)下, 定义导弹 i 的性能指标如下

$$J_i = \frac{1}{2} \|\mathbf{Z}_i(t_{f_i}) - \mathbf{z}_{if}\|_{\mathbf{F}_{f_i}}^2 + \frac{s_i}{2} \int_0^{t_{f_i}} u_i^2(\tau) d\tau \quad (3-21)$$

式中, $\mathbf{F}_{f_i} = \begin{bmatrix} l_i & 0 \\ 0 & \ell_i \end{bmatrix}$, $\mathbf{z}_{if} = [0 \ \vartheta_{id}]^T$, ϑ_{id} 是期望的终端碰撞角, l_i 、 ℓ_i 和 s_i 为非负常数。

性能指标(3-21)表示导弹以最小脱靶量、预定终端碰撞角与最小能量消耗对目标进行拦截, 在完全信息条件下, 可以得到带终端碰撞角约束的最优制导律。其主要求解过程如下。

定义如下 Hamiltonian 函数

$$\mathcal{H}_i = \frac{s_i}{2} \|u_i\|^2 + \lambda_{i1} \dot{\mathbf{Z}}_{i1}(t) + \lambda_{i2} \dot{\mathbf{Z}}_{i2}(t) \quad (3-22)$$

其中, $\boldsymbol{\lambda}_i = [\lambda_{i1} \ \lambda_{i2}]^T$ 是协态变量。其对应的协态方程如下

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_{i1} = -\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial \mathbf{Z}_{i1}} = 0, & \lambda_{i1}(t_{f_i}) = l_i \mathbf{Z}_{i1}(t_{f_i}) \\ \dot{\lambda}_{i2} = -\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial \mathbf{Z}_{i2}} = 0, & \lambda_{i2}(t_{f_i}) = \ell_i [\mathbf{Z}_{i2}(t_{f_i}) - \vartheta_{id}] \end{cases}$$

那么有

$$\begin{cases} \lambda_{i1}(t) = l_i \mathbf{Z}_{i1}(t_{f_i}) \\ \lambda_{i2}(t) = \ell_i [\mathbf{Z}_{i2}(t_{f_i}) - \vartheta_{id}] \end{cases}$$

根据横截条件与最优性条件可得其对应的控制量为

$$u_i^*(t) = \frac{l_i k_i t_{go_i}}{s_i} \mathbf{Z}_{i1}(t_{f_i}) - \frac{\ell_i}{s_i v_i} [\mathbf{Z}_{i2}(t_{f_i}) - \vartheta_{id}] \quad (3-23)$$

带终端碰撞角约束的最优制导律是由对应的零控脱靶量与零控碰撞角误差组成。将上式代入式(3-12), 从时间 t 到 t_{f_i} 积分可得

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{i1}(t_{f_i}) = \mathbf{Z}_{i1}(t) - \frac{l_i k_i^2 t_{go_i}^3}{3 s_i} \mathbf{Z}_{i1}(t_{f_i}) + \frac{\ell_i k_i t_{go_i}^2}{2 s_i v_i} [\mathbf{Z}_{i2}(t_{f_i}) - \vartheta_{id}] \\ \mathbf{Z}_{i2}(t_{f_i}) = \mathbf{Z}_{i2}(t) + \frac{l_i k_i t_{go_i}^2}{2 s_i v_i} \mathbf{Z}_{i1}(t_{f_i}) - \frac{\ell_i t_{go_i}}{s_i v_i^2} [\mathbf{Z}_{i2}(t_{f_i}) - \vartheta_{id}] \end{cases} \quad (3-24)$$

依据式(3-24)求解 $\mathbf{Z}_i(t_{f_i})$ 并将其代入式(3-23)可得最优制导律如下。

$$u_i^*(t) = \frac{N_{ZEM}}{t_{go_i}^2} \mathbf{Z}_{i1}(t) + \frac{N_{ZEA}}{t_{go_i}^2} [\mathbf{Z}_{i2}(t) - \vartheta_{id}] \quad (3-25)$$

其中,

$$N_{ZEM} = \frac{6l_i\ell_i k_i t_{go_i}^4 + 12l_i k_i s_i v_i^2 t_{go_i}^3}{K_Z(t_{go_i})}$$

$$N_{ZEA} = \frac{2l_i\ell_i k_i^2 v_i t_{go_i}^3 + 2\ell_i s_i v_i}{K_Z(t_{go_i})}$$

$$K_Z(t_{go_i}) = l_i\ell_i k_i^2 t_{go_i}^4 + 4l_i k_i^2 s_i v_i^2 t_{go_i}^3 + 12s_i\ell_i t_{go_i} + 12s_i^2 v_i^2$$

在理想拦截条件下, 仅考虑对目标的零脱靶量拦截时, 即 $l_i \rightarrow \infty$, $\ell_i \rightarrow 0$ 时, 有

$$N_{ZEM} = \frac{3}{k_i}, \quad N_{ZEA} = 0$$

由式(3-1)中 k_i 的定义可得 $N_{ZEM} \geq 3$, 基于最优控制的制导律与常用的比例导引律一致。另一方面, 当 $\ell_i \in (0, \infty)$ 时基于最优控制的制导律与增强比例导引律一致。

3.2.3.2 基于微分博弈的制导律

与基于最优控制的制导律不同, 基于微分博弈的制导律需要同时考虑导弹和目标的控制量, 属于一个双边控制问题。因此, 它们对应的降阶变量(零控脱靶量与零控碰撞角)定义也不同, 在考虑微分博弈制导律下的线性相对运动方程(3-5)降阶后状态变量定义为

$$\mathbf{Z}_{i,DG}(t) = \mathbf{W}\Phi_i(t_{go_i})\mathbf{x}_i(t) \quad (3-26)$$

上式对应的状态方程如下

$$\dot{\mathbf{Z}}_{i,DG}(t) = \mathbf{W}\Phi_i(t_{f_i}, t)\mathbf{B}_i u_i + \mathbf{W}\Phi_i(t_{f_i}, t)\mathbf{C}_i u_T \quad (3-27)$$

在不考虑导弹间协同时, 在状态方程(3-27)下, 微分博弈制导律对应的性能指标定义如下

$$J_i = \frac{1}{2}\|\mathbf{Z}_{i,DG}(t_{f_i}) - \mathbf{z}_{if}\|_{\mathbf{F}_{f_i}}^2 + \frac{1}{2}\int_0^{t_{f_i}} s_i u_i^2(\tau) d\tau - \frac{1}{2}\int_0^{t_{f_i}} s_T u_T^2(\tau) d\tau \quad (3-28)$$

式中, \mathbf{F}_{f_i} , \mathbf{z}_{if} , l_i , ℓ_i , s_i 与式(3-21)中的定义一致, s_T 为非负常数。

微分博弈制导律将目标作为一个独立的受控对象进行考虑, 与最优制导律的性能指标(3-21)不同, 除了考虑拦截弹的最小能量消耗、最小脱靶量与期望碰撞角外, 性能指标(3-28)还考虑了目标的机动情况。基于微分博弈的制导律求解如下。

定义 Hamiltonian 函数如下

$$\mathcal{H}_i = \frac{s_i}{2}\|u_i\|^2 - \frac{s_T}{2}\|u_T\|^2 + \boldsymbol{\lambda}_i^T \dot{\mathbf{Z}}_{i,DG}(t) \quad (3-29)$$

其中, $\lambda_i = [\lambda_{i1} \ \lambda_{i2}]^T$ 是协态变量。其对应的协态方程如下

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial \mathbf{Z}_{i,DG}} = 0 \\ \lambda_i(t_{fi}) = F_{fi}[\mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fi}) - \mathbf{z}_{if}] \end{cases}$$

那么有

$$\lambda_i(t) = F_{fi}[\mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fi}) - \mathbf{z}_{if}]$$

根据边界条件与最优控制方程可得导弹和目标的最优控制量为

$$u_i^*(t) = -s_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T \lambda_i(t_{fi}) \quad (3-30)$$

$$u_T^*(t) = s_T^{-1} \mathbf{C}_i^T \Phi_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T \lambda_i(t_{fi}) \quad (3-31)$$

将式(3-30)和(3-31)代入式(3-27), 所得结果经过一系列代数变换后可得,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fi}) &= \mathbf{Z}_{i,DG}(t) - s_i^{-1} \int_t^{t_{fi}} \mathbf{W} \Phi_i(t_{fi}, \tau) \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{fi}, \tau) \mathbf{W}^T d\tau \lambda_i(t_{fi}) \\ &\quad + s_T^{-1} \int_t^{t_{fi}} \mathbf{W} \Phi_i(t_{fi}, \tau) \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i^T \Phi_i^T(t_{fi}, \tau) \mathbf{W}^T d\tau \lambda_i(t_{fi}) \end{aligned} \quad (3-32)$$

与式(3-18)中定义的矩阵 \mathbf{G}_i 类似, 可定义与目标机动相关的变换矩阵 \mathbf{G}_{iT}

$$\mathbf{G}_{iT} = \int_t^{t_{fi}} \mathbf{W} \Phi_i(t_{fi}, \tau) \mathbf{C}_i \mathbf{C}_i^T \Phi_i^T(t_{fi}, \tau) \mathbf{W}^T d\tau \quad (3-33)$$

那么有

$$\left[\mathbf{I} + \left(\frac{1}{s_i} \mathbf{G}_i - \frac{1}{s_T} \mathbf{G}_{iT} \right) \mathbf{F}_{fi} \right] [\mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fi}) - \mathbf{z}_{if}] = [\mathbf{Z}_{i,DG}(t) - \mathbf{z}_{if}]$$

求解上式并代入式(3-30)可得基于微分博弈的导弹最优制导律。

$$u_i^*(t) = -s_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T [\mathbf{I} + (s_i^{-1} \mathbf{G}_i - s_{iT}^{-1} \mathbf{G}_{iT}) \mathbf{F}_{fi}]^{-1} [\mathbf{Z}_{i,DG}(t) - \mathbf{z}_{if}] \quad (3-34)$$

导弹的微分博弈制导律(3-34)由零控脱靶量、零控碰撞角及目标的运动信息组成, 能较好的适应机动目标。但对性能指标(3-28)中目标机动的加权系数有要求, 一般不宜过大。

3.2.3.3 基于最优控制和微分博弈的协同制导

如上所述, 性能指标(3-21)和(3-28)与制导律(3-23)和(3-34)分别基于最优控制和微分博弈给出了一对一拦截制导问题的带碰撞角约束的求解方案。在这些制导律的基础上,

带碰撞角约束的协同最优制导律和协同微分博弈制导律得到进一步的发展，它们对应的性能指标和制导律简介如下，详细的求解过程可参阅文献 [22, 23]。

对于由 N 个导弹和一个目标组成的协同制导系统，假设每个导弹的拦截时间满足下式。

$$t_{f_n} \geq \cdots \geq t_{f_2} \geq t_{f_1} \quad (3-35)$$

那么，在状态方程(3-11)下，对于 N 个导弹，带碰撞角约束的协同最优制导律的性能指标可定义为

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{Z}_i(t_{f_n})\|_{\mathbf{F}_{Z_i}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \|\mathbf{Z}_i(t_{f_n}) - \mathbf{Z}_{i+1}(t_{f_n}) - \Delta\vartheta_i\|_{\mathbf{F}_{\theta_i}}^2 \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{2} \int_0^{t_{f_i}} u_i^2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-36)$$

其中， \mathbf{F}_{Z_i} ， \mathbf{F}_{θ_i} ， l_i ， ℓ_i 和 s_i 与式(3-15)中定义一致， $\Delta\vartheta_i = [0 \ \Delta\vartheta_{i,i+1}]^T$ ， $\Delta\vartheta_{i,i+1}$ 为第 i 导弹与 $i+1$ 个导弹的期望相对碰撞角之差。

在状态方程(3-11)和性能指标(3-36)下，多导弹协同制导系统对应的 Hamiltonian 函数定义如下

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{2} \|u_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\lambda}_i^T \dot{\mathbf{Z}}_i(t) \quad (3-37)$$

其中， $\boldsymbol{\lambda}_i = [\lambda_{i1} \ \lambda_{i2}]^T$ 是导弹 i 对应的协态变量。

令

$$\Delta\mathbf{Z}_i(t_{f_n}) = \mathbf{Z}_i(t_{f_n}) - \mathbf{Z}_{i+1}(t_{f_n}) - \Delta\vartheta_i$$

那么，根据横截条件与最优性条件可得协同最优制导律如下

$$u_i^*(t) = -s_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\Phi}_i^T(t_{goi}) \mathbf{W}^T \boldsymbol{\lambda}_i(t), \quad i \in \{1, \dots, N\} \quad (3-38)$$

其中， $\boldsymbol{\lambda}_i(t)$ 满足下式。

$$\boldsymbol{\lambda}_i(t) = \begin{cases} \mathbf{F}_{Z_i} \mathbf{Z}_i(t_{f_n}) + \mathbf{F}_{\theta_i} \Delta\mathbf{Z}_i(t_{f_n}), & i \in \{1\} \\ \mathbf{F}_{Z_i} \mathbf{Z}_i(t_{f_n}) - \mathbf{F}_{\theta_{i-1}} \Delta\mathbf{Z}_{i-1}(t_{f_n}) + \mathbf{F}_{\theta_i} \Delta\mathbf{Z}_i(t_{f_n}), & i \in \{2, \dots, N-1\} \\ \mathbf{F}_{Z_i} \mathbf{Z}_i(t_{f_n}) - \mathbf{F}_{\theta_i} \Delta\mathbf{Z}_i(t_{f_n}), & i \in \{N\} \end{cases}$$

在此基础上， $\mathbf{Z}_i(t_{f_n})$ 可通过将式(3-38)代入式(3-11)并积分求得，再将其代入式(3-38)即可得最终的协同最优制导律。

同樣地，與協同最優制導律不同，協同微分制導律在求解的過程中將目標作為一個獨立受控對象進行制導律求解，其簡要的求解過程如下。

在狀態方程(3-27)下，對於 N 個導彈，帶碰撞角約束的協同微分博弈制導律的性能指標為。

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fn})\|_{\mathbf{F}_{Z_i}}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} \|\mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fn}) - \mathbf{Z}_{i+1,DG}(t_{fn}) - \Delta\boldsymbol{\vartheta}_i\|_{\mathbf{F}_{\theta_i}}^2 + \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{2} \int_0^{t_{f_i}} u_i^2(\tau) d\tau - \frac{s_T}{2} \int_0^{t_{f_i}} u_T^2(\tau) d\tau \quad (3-39)$$

其中， \mathbf{F}_{Z_i} ， \mathbf{F}_{θ_i} ， l_i ， ℓ_i 和 s_i 與式(3-15)中定義一致， $\Delta\boldsymbol{\vartheta}_i$ 如式(3-36)所示， s_T 為非負常數。

在狀態方程(3-27)和性能指標(3-39)下，多導彈協同制導系統對應的 Hamiltonian 函數定義如下

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{s_i}{2} \|u_i\|^2 + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\lambda}_i^T \dot{\mathbf{Z}}_{i,DG}(t) - \frac{s_T}{2} u_T^2 \quad (3-40)$$

其中， $\boldsymbol{\lambda}_i = [\lambda_{i1} \ \lambda_{i2}]^T$ 是導彈 i 對應的協態變量。

令

$$\Delta\mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fn}) = \mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fn}) - \mathbf{Z}_{i+1,DG}(t_{fn}) - \Delta\boldsymbol{\vartheta}_i$$

那麼，根據橫截條件與最優性條件可得協同微分博弈制導律如下：

$$u_i^*(t) = -s_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \boldsymbol{\Phi}_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T \boldsymbol{\lambda}_i(t) \quad (3-41)$$

$$u_T^*(t) = s_T^{-1} \sum_{i=1}^N \mathbf{C}_i^T \boldsymbol{\Phi}_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T \boldsymbol{\lambda}_i(t) \quad (3-42)$$

其中， $\boldsymbol{\lambda}_i(t)$ 滿足

$$\boldsymbol{\lambda}_i(t) = \begin{cases} \mathbf{F}_{Z_i} \mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fn}) + \mathbf{F}_{\theta_i} \Delta\mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fn}), & i \in \{1\} \\ \mathbf{F}_{Z_i} \mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fn}) - \mathbf{F}_{\theta_{i-1}} \Delta\mathbf{Z}_{i-1,DG}(t_{fn}) + \mathbf{F}_{\theta_i} \Delta\mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fn}), & i \in \{2, \dots, N-1\} \\ \mathbf{F}_{Z_i} \mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fn}) - \mathbf{F}_{\theta_i} \Delta\mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fn}), & i \in \{N\} \end{cases}$$

可通過將導彈和目標的微分博弈制導律(3-41)和(3-42)代入式(3-27)以並通過積分求取零控脫靶量與零控碰撞角 $\mathbf{Z}_{i,DG}(t_{fn})$ 從而得到協同微分博弈制導律。

式(3-38)与(3-41)分别为多导弹协同制导问题的协同最优制导律和协同微分博弈制导律,根据其推导过程与最终形式可知,它们都属于集中式制导律。另一方面,其 Hamiltonian 函数对应的协态变量求解困难,通常要求解至少 $2N$ 个线性方程组,从而导致制导律求解困难,不适用于导弹数较多 ($N \geq 3$) 的协同制导系统,因此在实际的研究中通常考虑二对一的协同制导问题。

协同最优制导律(3-38)和协同微分博弈制导律(3-41)是在线性相对运动方程(3-5)基础上对性能指标(3-36)和(3-39)求解得到的,然而这些性能指标为包含了协同制导问题中所有导弹的零控终端状态和过载指标,不利于制导律的分布式求解,因此考虑协同制导过程中性能指标的本地化与分布式求解是必要的。性能指标的本地化与分布式求解恰与定义3.1中所示的纳什均衡要求一致,因此采用分布式纳什策略进行分布式协同制导律是可行的,其推导过程将在下节介绍。

3.3 分布式纳什策略协同制导律设计

在上一节中,针对多导弹对同一机动目标的协同拦截过程中的导弹间存在的竞争性质,以提高系统的拦截性能及降低导弹的通信和计算需求为目标,设计了协同拦截纳什博弈模型。如前所述,协同制导律设计可视为对该博弈模型的纳什平衡解的搜索过程,其对应的纳什策略可以作为当前导弹的控制量。基于此,本节研究了带碰撞角约束的协同制导问题,提出了基于开环纳什平衡解搜索的协同制导律,根据具体情况分别设计集中式与分布式的协同制导律,各部分的主要内容如下。

3.3.1 基于纳什策略的集中式协同制导律

基于纳什策略的集中式协同制导律是在对开环纳什平衡问题(3-16)搜索的基础上得到的,在搜索过程中需要知道所有导弹的终端信息,从而实现对每个导弹的制导律设计。集中式协同制导律的主要内容可用如下定理概括。

定理 3.1: 对于由 N 个导弹和一个目标组成的协同拦截系统,式(3-5)和(3-14)分别是其相对运动方程与性能指标。假设导弹间的通信拓扑为 \mathcal{G} , 令导弹 i 的开环纳什均衡为 u_i^* 。那么,在假设3.1和3.2的条件下,对于所有的导弹 $i = 1, \dots, N$, 其对应的制导律

为

$$\begin{aligned}
 u_i^* = & \frac{N_{ii}^{(1)}}{t_{go_i}^2} \mathbf{Z}_{i1}(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{N_{ij}^{(1)}}{t_{go_i}^2} \mathbf{Z}_{j1}(t) + \frac{N_{ii}^{(2)}}{t_{go_i}^2} \mathbf{Z}_{i2}(t) \\
 & + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{N_{ij}^{(2)}}{t_{go_i}^2} \mathbf{Z}_{j2}(t) + \frac{N_{ii}^{(3)}}{t_{go_i}^2} \Delta c_i + \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{N_{ij}^{(3)}}{t_{go_i}^2} \Delta c_j
 \end{aligned} \quad (3-43)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 N_{ii}^{(1)} &= \varphi_i^{(11)}(j, i) t_{go_i}^2 + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \varphi_i^{(12)}(j, i) t_{go_i}^2, \\
 N_{ij}^{(1)} &= \varphi_i^{(11)}(j, j) t_{go_i}^2 + \sum_{p \in \mathcal{N}_i} \varphi_i^{(12)}(p, j) t_{go_i}^2,
 \end{aligned} \quad (3-44a)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_i^{(11)}(j, p) &= \frac{l_i k_i t_{go_i}}{s_i} \bar{\mathbf{H}}_{(2i-1)(2p-1)}, \quad \varphi_i^{(12)}(j, p) = \frac{-\ell_i}{s_i v_i} [\bar{\mathbf{H}}_{(2i)(2p-1)} - \bar{\mathbf{H}}_{(2j)(2p-1)}] \\
 N_{ii}^{(2)} &= \varphi_i^{(21)}(j, i) t_{go_i}^2 + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \varphi_i^{(22)}(j, i) t_{go_i}^2, \\
 N_{ij}^{(2)} &= \varphi_i^{(21)}(j, j) t_{go_i}^2 + \sum_{p \in \mathcal{N}_i} \varphi_i^{(22)}(p, j) t_{go_i}^2,
 \end{aligned} \quad (3-44b)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_i^{(21)}(j, p) &= \frac{l_i k_i t_{go_i}}{s_i} \bar{\mathbf{H}}_{(2i-1)(2p)}, \quad \varphi_i^{(22)}(j, p) = \frac{-\ell_i}{s_i v_i} [\bar{\mathbf{H}}_{(2i)(2p)} - \bar{\mathbf{H}}_{(2j)(2p)}] \\
 N_{ii}^{(3)} &= \frac{\ell_i}{s_i v_i} t_{go_i}^2 + \varphi_i^{(31)}(j, i) t_{go_i}^2 + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \varphi_i^{(32)}(j, i) t_{go_i}^2, \\
 N_{ij}^{(3)} &= \varphi_i^{(31)}(j, j) t_{go_i}^2 + \sum_{p \in \mathcal{N}_i} \varphi_i^{(32)}(p, j) t_{go_i}^2
 \end{aligned} \quad (3-44c)$$

$$\begin{aligned}
 \varphi_i^{(31)}(j, p) &= \frac{k_p \ell_p t_{go_p}^2}{2 s_p v_p} \varphi_i^{(11)}(j, p) - \frac{\ell_p t_{go_p}}{s_p v_p^2} \varphi_i^{(21)}(j, p) \\
 \varphi_i^{(32)}(j, p) &= \frac{-k_p \ell_p t_{go_p}^2}{2 s_p v_p} \varphi_i^{(12)}(j, p) + \frac{\ell_p t_{go_p}}{s_p v_p^2} \varphi_i^{(22)}(j, p)
 \end{aligned}$$

$\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{H}^{-1}$ 是 \mathbf{H} 的逆矩阵, Δc_i 定义如下

$$\Delta c_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \Delta c_{ij} \quad (3-45)$$

证明. 定义导弹 i 的 Hamiltonian 函数如下:

$$\mathcal{H}_i = \frac{s_i}{2} \|\mathbf{u}_i\|^2 + \lambda_i^T \dot{\mathbf{Z}}_i(t) \quad (3-46)$$

其中, λ_i 是协态变量。

那么, 对所有的 $i = 1, \dots, N$, 式(3-46)的协态方程和边界条件满足下式。

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial \mathbf{Z}_i} = 0, \quad (3-47a)$$

$$\lambda_i(t_{f_i}) = \mathbf{F}_{Z_i} \mathbf{Z}_i(t_{f_n}) + \mathbf{F}_{\theta_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\mathbf{Z}_i(t_{f_n}) - \mathbf{Z}_j(t_{f_n}) - \mathbf{c}_{ij}], \quad (3-47b)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}_i}{\partial u_i} = s_i u_i + \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T \lambda_i = 0, \quad (3-47c)$$

解式(3-47a)并将其结果代入式(3-47c)得

$$u_i(t) = -s_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T \lambda_i(t_{f_i}) \quad (3-48)$$

将上式代入式(3-11)得

$$\mathbf{Z}_i(t_{f_i}) = \mathbf{Z}_i(t) - s_i^{-1} \int_t^{t_{f_i}} \mathbf{W} \Phi_i(t_{f_i}, \tau) \mathbf{B}_i \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{f_i}, \tau) \mathbf{W}^T d\tau \lambda_i(t_{f_i}) \quad (3-49)$$

将式(3-47b)代入式(3-49)得

$$\mathbf{Z}_i(t_{f_i}) = \mathbf{Z}_i(t) - s_i^{-1} \mathbf{G}_i \left\{ \mathbf{F}_{Z_i} \mathbf{Z}_i(t_{f_n}) + \mathbf{F}_{\theta_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\mathbf{Z}_i(t_{f_n}) - \mathbf{Z}_j(t_{f_n}) - \mathbf{c}_{ij}] \right\} \quad (3-50)$$

紧接着, 从 $i = 1$ 到 $i = N$ 对上式进行整合得

$$\mathbf{Z}(t_{f_n}) = \mathbf{Z}(t) - \mathbf{G} \{ \mathbf{F}_Z \mathbf{Z}(t_{f_n}) + \mathbf{F}_\theta [(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) \mathbf{Z}(t_{f_n}) - \mathbf{c}] \}$$

其中, $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_1^T, \dots, \mathbf{c}_N^T]^T$, \mathbf{c}_i 定义为

$$\mathbf{c}_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} d_{ij} \mathbf{c}_{ij} \quad (3-51)$$

那么有

$$\mathbf{Z}(t_{f_n}) = \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{Z}(t) + \mathbf{G} \mathbf{F}_\theta \mathbf{c}] \quad (3-52)$$

将式(3-52)和(3-47b)代入(3-48)得

$$u_i^* = -s_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T (\mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{I}_2) \left\{ [\mathbf{F}_Z + \mathbf{F}_\theta (\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)] \mathbf{H}^{-1} [\mathbf{Z}(t) + \mathbf{G} \mathbf{F}_\theta \mathbf{c}] - \mathbf{c} \right\} \quad (3-53)$$

其中, \mathbf{e}_i 是适维的列向量, 其第 i 个元素为 1 其余元素全为 0。

上式可重写为

$$u_i^* = -s_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T \left\{ \mathbf{F}_{Z_i} \mathbf{Z}_i(t_{f_n}) + \mathbf{F}_{\theta_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\mathbf{Z}_i(t_{f_n}) - \mathbf{Z}_j(t_{f_n}) - \mathbf{c}_{ij}] \right\} \quad (3-54)$$

将式(3-52)依据元素 $\mathbf{Z}_i(t_{f_n})$ 展开并代入上式, 经过一系列代数变换后可得式(3-43), 定理3.1得证。■

集中式协同制导律(3-43)由两个部分组成: 1) 所有导弹的脱靶量; 2) 所有导弹的碰撞角及邻接导弹间期望碰撞角之差。具体地, 式(3-54)指出集中式制导律主要由导弹 i 及其邻居的终端状态决定, 而这些状态的计算需要系统全局矩阵 \mathbf{H} 和所有导弹的终端信息, 它们都属于全局信息。当每个导弹都能获取这些全局信息时, 它们能以期望的碰撞角和尽可能小的脱靶量拦截目标。尽管在基于最优控制和微分博弈的协同制导中要求全局信息是一个共识, 然而在本章中每个导弹仅能获取自身和邻接导弹的本地信息, 全局信息的获取十分困难, 需要另做考虑。此外, 式(3-47)中的制导系数包含了时变矩阵 \mathbf{H} 的逆矩阵, 除了需要知道 \mathbf{H} 矩阵这一全局信息外还会导致计算爆炸的问题, 因此研究协同制导律(3-43)的分布式实现是十分必要的。

3.3.2 基于纳什策略的分布式协同制导律

分布式制导律相较于集中式制导律能有效减少导弹对全局信息的依赖, 在面对复杂多变的交战环境中具有更好的鲁棒性、稳定性及适应性, 是协同制导律设计中的重点内容。本节研究实现前节中集中式协同制导律(3-43)的分布式化, 重点研究实现导弹组全局信息的分布式化。

由式(3-53)可知, 集中式协同制导律(3-43)需要的全局信息包括所有导弹的当前状态 $\mathbf{Z}(t)$ 以及系统结构矩阵 \mathbf{H} , 而这些全局信息都可以通过终端状态 $\mathbf{Z}(t_{f_n})$ (见式(3-54))作用在协同制导律上。因此, 实现协同制导律(3-43)分布式化的关键在于如何实现 $\mathbf{Z}(t_{f_n})$ 在导弹本地的分布式估计。为此, 本节引入了一个分布式估计算法用以对 $\mathbf{Z}(t_{f_n})$ 的本地估计。

分布式估计算法的主要内容为: 在假设 3.2 的条件下, 导弹 i 按照下式更新自身对 $\mathbf{Z}_i(t_{f_i})$ 估计值

$$\dot{\hat{\mathbf{Z}}}_{if} = m_i \left\{ \mathbf{Z}_i(t) - \hat{\mathbf{Z}}_{if} - s_i^{-1} \mathbf{G}_i [\mathbf{F}_{Z_i} \hat{\mathbf{Z}}_{if} + \mathbf{F}_{\theta_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\hat{\mathbf{Z}}_{if} - \hat{\mathbf{Z}}_{jf} - \mathbf{c}_{ij})] \right\} \quad (3-55)$$

式中, $\hat{\mathbf{Z}}_{if}$ 是导弹 i 对 $\mathbf{Z}_i(t_{fi})$ 或 $\mathbf{Z}_i(t_{fn})$ 的估计值, $m_i > 0$ 是可调节的增益。

基于上述讨论, 带分布式估计器的协同制导律可用如下定理概括。

定理 3.2: 对于由 N 个导弹和一个目标组成的协同拦截系统, 式(3-5)和(3-14)分别为其相对运动方程与性能指标, 式(3-55)为其终端状态估计器。设导弹 i 的分布式制导律如下

$$\hat{u}_i^* = \frac{\hat{N}_i^{(1)}}{t_{go_i}^2} \hat{\mathbf{Z}}_{i1}(t_{fi}) - \frac{\hat{N}_i^{(2)}}{t_{go_i}^2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\hat{\mathbf{Z}}_{i2}(t_{fi}) - \hat{\mathbf{Z}}_{j2}(t_{fj}) - \Delta \mathbf{c}_{ij}] \quad (3-56)$$

且

$$\hat{N}_i^{(1)} = \frac{l_i k_i t_{go_i}^3}{s_i}, \hat{N}_i^{(2)} = \frac{\ell_i t_{go_i}^2}{s_i v_i} \quad (3-57)$$

令分布式制导律(3-56)和集中式制导律(3-43)之间存在以下偏差:

$$\Delta u_i(t) = \hat{u}_i^*(t) - u_i^*(t) \quad (3-58)$$

那么, 在假设3.1和3.2的条件下, 偏差(3-58)全局指数稳定收敛, 且当 $t \in [0, t_{fi}]$ 时, 其收敛性可用下式度量:

$$\|\Delta u_i(t)\|_2 \leq K_i(t) e^{-\eta t} \|\Delta \mathbf{Z}_f(0)\|_2 \quad (3-59)$$

式中, $\|\cdot\|_2$ 表示 Euclidean 范数, $K_i(t)$ 是待定的正标量函数, η 满足

$$\eta = \min_j \operatorname{Re}[\lambda_j(\mathbf{M}\mathbf{H})] \quad (3-60)$$

其中, $\operatorname{Re}[\lambda_j(\mathbf{M}\mathbf{H})]$ 表示矩阵 $\mathbf{M}\mathbf{H}$ 第 j 个特征值的实部, $\mathbf{M} = \operatorname{diag}\{m_1, \dots, m_N\} \otimes \mathbf{I}$ 。

此外, 带估计器(3-55)的制导律 (3-56) 构成一个 ϵ 纳什均衡, 即

$$\epsilon = \max_i \xi_i \|\Delta \mathbf{Z}_f(0)\|_2^2, \quad (3-61a)$$

$$\xi_i = \frac{\lambda_{\max}^{\mathbf{F}_{\theta_i}} + \lambda_{\max}^{\mathbf{F}_{Z_i}}}{2} e^{-2\eta t_{fi}} + \frac{s_i}{2} \int_0^{t_{fi}} K_i^2(t) e^{-2\eta t} dt, \quad (3-61b)$$

式中, $\lambda_{\max}^{\mathbf{F}_{\theta_i}}$ 和 $\lambda_{\max}^{\mathbf{F}_{Z_i}}$ 表示 \mathbf{F}_{θ_i} 和 \mathbf{F}_{Z_i} 的最大特征值。□

证明. 首先定义下式

$$\hat{u}_i^* = -s_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T [\mathbf{F}_{Z_i} \hat{\mathbf{Z}}_{if} + \mathbf{F}_{\theta_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\hat{\mathbf{Z}}_{if} - \hat{\mathbf{Z}}_{jf} - \Delta \mathbf{c}_{ij})] \quad (3-62)$$

将式(3-62)展开得

$$\hat{u}_i^* = \frac{l_i k_i t_{go_i}}{s_i} \hat{\mathbf{Z}}_{i1}(t_{f_i}) - \frac{\ell_i}{s_i v_i} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [\hat{\mathbf{Z}}_{i2}(t_{f_i}) - \hat{\mathbf{Z}}_{j2}(t_{f_j}) - \Delta c_{ij}]$$

将上式与式(3-56)对比可得式(3-56)与(3-62)等价。

随后, 从 $i = 1, \dots, N$ 对(3-55)进行整合得

$$\dot{\hat{\mathbf{Z}}}_f = \mathbf{M}\mathbf{Z}(t) - \mathbf{M}\mathbf{G}[\mathbf{F}_Z \hat{\mathbf{Z}}_f + \mathbf{F}_\theta(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2) \hat{\mathbf{Z}}_f - \mathbf{F}_\theta \mathbf{c}]$$

即

$$\dot{\hat{\mathbf{Z}}}_f = -\mathbf{M}\mathbf{H}\hat{\mathbf{Z}}_f + \mathbf{M}\mathbf{Z}(t) + \mathbf{M}\mathbf{G}\mathbf{F}_\theta \mathbf{c} \quad (3-63)$$

式中, $\hat{\mathbf{Z}}_f = [\hat{\mathbf{Z}}_{1f}^T, \dots, \hat{\mathbf{Z}}_{Nf}^T]^T$ 。令 $\Delta \mathbf{Z}_f(t) = \hat{\mathbf{Z}}_f - \mathbf{Z}(t_{f_n})$, 那么有

$$\frac{d}{dt} \Delta \mathbf{Z}_f(t) = -\mathbf{M}\mathbf{H} \Delta \mathbf{Z}_f(t)$$

将式(3-53)、(3-62)及(3-47b)代入式(3-58)得^[95]

$$\Delta u_i(t) = -s_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T (\mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{F}_i) \left\{ [\mathbf{F}_Z + \mathbf{F}_\theta(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)] \Delta \mathbf{Z}_f(t) \right\} \quad (3-64)$$

对上式两边同时取 Euclidean 范数得

$$\begin{aligned} \|\Delta u_i(t)\|_2 &\leq \| -s_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T (\mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{I}_2) [\mathbf{F}_Z \\ &\quad + \mathbf{F}_\theta(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)] \|_2 \|e^{-\mathbf{M}\mathbf{H}t}\|_2 \|\Delta \mathbf{Z}_f(0)\|_2 \\ &\leq \mathbf{K}_i(t) e^{-\eta t} \|\Delta \mathbf{Z}_f(0)\|_2 \end{aligned} \quad (3-65)$$

式中, $\mathbf{K}_i(t) = \| -s_i^{-1} \mathbf{B}_i^T \Phi_i^T(t_{go_i}) \mathbf{W}^T (\mathbf{e}_i^T \otimes \mathbf{F}_i) [\mathbf{F}_Z + \mathbf{F}_\theta(\mathbf{L} \otimes \mathbf{I}_2)] \|_2$, 易得 $\mathbf{K}_i(t)$ 具有上界, 式(3-59)得证。

令 $\mathbf{Z}_i(t)$ 和 $\mathbf{Z}_i^*(t)$ 分别表示分布式制导律(3-56)以及集中式制导律(3-43)下的状态变化, $\Delta \mathbf{Z}_i(t) = \mathbf{Z}_i(t) - \mathbf{Z}_i^*(t)$ 表示导弹 i 在不同制导律下的偏差, 那么有

$$\Delta \dot{\mathbf{Z}}_i(t) = \mathbf{W} \Phi_i(t_{f_i}, t) \mathbf{B}_i \Delta u_i \quad (3-66)$$

对上式进行积分得

$$\Delta \mathbf{Z}_i(t_f) = \int_t^{t_{f_i}} \mathbf{W} \Phi_i(t_{f_i}, \tau) \mathbf{B}_i \Delta u_i(\tau) d\tau$$

設性能指標(3-14)在帶估計器(3-55)的分布式納什策略(3-62)下的值為 J_i ，在集中式協同制導律(3-43)中的納什策略 $u_i^*(t)$ 下的值為 J_i^* ，那麼有^[95]

$$\begin{aligned} J_i - J_i^* &= \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|\Delta \mathbf{Z}_i(t_{f_i})\|_{F_{\theta_i}}^2 + \frac{1}{2} \|\Delta \mathbf{Z}_i(t_{f_i})\|_{F_{Z_i}}^2 + \frac{s_i}{2} \int_0^{t_{f_i}} \|\Delta u_i\|^2 dt \\ &\leq \frac{\lambda_{\theta_i}^{F_{\theta_i}}}{2} \|\Delta \mathbf{Z}_i(t_{f_i})\|^2 + \frac{\lambda_{Z_i}^{F_{Z_i}}}{2} \|\Delta \mathbf{Z}_i(t_{f_i})\|^2 + \frac{s_i}{2} \int_0^{t_{f_i}} \|\Delta u_i\|^2 dt \\ &\leq \left[\frac{\lambda_{\theta_i}^{F_{\theta_i}} + \lambda_{Z_i}^{F_{Z_i}}}{2} e^{-2\eta t_{f_i}} + \frac{s_i}{2} \int_0^{t_{f_i}} K_i^2(t) e^{-2\eta t} dt \right] \|\Delta \mathbf{Z}_f(t)\|^2 \end{aligned} \quad (3-67)$$

顯然，當 ϵ 的值依據式(3-61)选取時，帶估計器(3-55)的分布式協同制導律(3-56)構成一個 ϵ 納什均衡，**定理3.2**得證。 ■

注 3.2： 分布式協同制導律(3-56)中 ϵ 的存在將會導致脫靶量存在一定的偏差，該偏差由理論納什均衡和 ϵ 納什均衡間的誤差導致。此外，根據式(3-60)和(3-61)可知，如果 m_i 的选取足夠大，將會有 $\xi_i \rightarrow 0$ 成立，初始狀態 ($\|\Delta \mathbf{Z}_f(t)\|_2$) 對 ϵ 的影響可以忽略不計，即此時能保證對目標的有效攔截。

式(3-56)所示的分布式制導律僅由兩部分組成：1) 導彈 i 自身的脫靶量；2) 導彈 i 與其鄰居的碰撞角之差。這些值都可以經過分布式估計器(3-55)在導彈 i 的本地得到，所提算法是完全分布式的。值得注意的是，制導律(3-56)的形式指出當導彈間無通信或者碰撞角對應的係數 $\ell_i \rightarrow 0$ 時，所提的制導問題可簡化為簡單的最優制導問題，此時導彈 i 的制導律僅由脫靶量和能量消耗約束。

3.3.3 制導律分析

如前所述，本章所提的協同制導律(3-43)和(3-56)主要由其零控脫靶量和零控碰撞角組成的變量(3-9)決定，然而在目標的機動未知的情況下，對其求解比較困難，為了解決這一問題，通常在計算制導律的時候假設在時間 $[t, t_{f_i}]$ 內，目標的機動保持不變。在此基礎上，可以得到 $\mathbf{Z}_i(t)$ 的表达式近似為：

$$\mathbf{Z}_{i1}(t) = y_{qi} + \dot{y}_{qi} t_{go_i} + \frac{k_{Ti} a_T t_{go_i}^2}{2} \quad (3-68a)$$

$$\mathbf{Z}_{i2}(t) = \frac{a_T}{v_T} t_{go_i} + \vartheta_i \quad (3-68b)$$

上式對零控脫靶量和零控碰撞角的近似計算在攔截制導問題中是通用的，已成功應用在各制導律的求解中^{[96][37]}。為了更方便地對其進行求解，在對碰撞三角形的小扰动

假设的基础上, 目标点到坐标轴 LOS_{i0} 的距离 y_{qi} 用下式近似

$$y_{qi} \approx (q_i - q_{i0})r_i$$

对上式求导可得

$$y_{qi} + \dot{y}_{qi}t_{go_i} = -v_{r_i}t_{go_i}\dot{q}_i$$

那么, 导弹 i 的零控脱靶量变量 $\mathbf{Z}_{i1}(t)$ 也可用下式计算

$$\mathbf{Z}_{i1}(t) = -v_{r_i}t_{go_i}\dot{q}_i + \frac{k_{Ti}a_T t_{go_i}^2}{2} \quad (3-69)$$

式(3-68a)和(3-69)从不同方面简化了零控脱靶量的计算, 式(3-69)中的变量可以通过机载雷达获得的数据直接或间接的估算, 适用于常用的拦截制导系统中。然而, 两式均假设在求解过程目标的机动保持不变, 而实际交战过程中目标的机动是变化的, 如目标机动形式为蛇形机动和滚筒机动等, 因此在拦截制导过程中需时刻更新状态变量 $\mathbf{Z}_i(t)$ 。

另一方面, 分布式制导律(3-56)指出在基于纳什策略的协同制导问题中, 多导弹间的博弈竞争关系主要体现在它们的相对碰撞角之差, 该关系由当前时刻的零控碰撞角 $\mathbf{Z}_{i2}(t)$ 体现。式(3-68b)中指出当目标的机动和速度不变的情况下, 导弹 i 的零控碰撞角 $\mathbf{Z}_{i2}(t)$ 保持不变, 同时在导弹间的通信拓扑不变及碰撞三角形的小扰动假设条件下, 根据式(3-52)所得的终端碰撞角将会保持不变。

通过上述分析可知, 本章所提的基于纳什策略的制导律实际上是在每一 t ($t \in [0, t_f]$) 时刻进行 $[t, t_f]$ 区间上的开环纳什策略搜索得到的, 此时的分布式制导律(3-56)形成了在当前区间上的一个开环 ε -纳什平衡。尽管在每一时刻对 $\mathbf{Z}_i(t)$ 的处理增加了导弹的计算负担, 但能使所提算法能更好地适应机动目标, 且其对应的近似计算方法能减少这种计算负担, 在实际中是可行的。

3.4 仿真分析

考虑三枚导弹 M_1 , M_2 和 M_3 对同一机动目标 T 的协同拦截, 各导弹和目标的初始状态如表3.1所示。在本节中, 为了便于阅读, 用 CGL 和 DGL 分别表示本章所提的集中式制导律(3-43)和分布式制导律(3-56)。

目标的机动如下:

$$a_T = 10g[\sin(0.1\pi t) - 0.5].$$

表 3.1 导弹和目标的初始状态

-	位置 (km)	速度 (m/s)	飞行路径角 ($^{\circ}$)	最大过载 (g)
M_1	(0,0)	500	0	20
M_2	(0,0)	500	0	20
M_3	(0,0)	500	0	20
T	(0,5)	500	0	15

导弹间的通信拓扑如图3.2所示，各通信链路的权重为 1，即对应的邻接矩阵中非 0 元素为 1，其中 \mathcal{G}_1 和 \mathcal{G}_2 分别是强连通图和最小连通图，用以衡量所提制导律在不同通信拓扑下的性能。仿真中期望的终端相对碰撞角之差为 $\Delta c_{12} = \Delta c_{23} = 10^{\circ}$ 。针对不同的制导律、剩余飞行时间估计误差及通信拓扑切换的情况，本节进行以下两种不同类型的数值仿真。

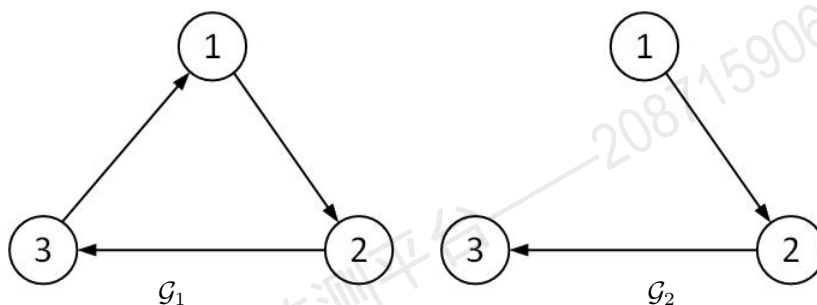


图 3.2 导弹间通信拓扑示意

算例 1: 针对本章所提的集中式制导律和分布式制导律在拓扑 \mathcal{G}_1 和 \mathcal{G}_2 下的拦截效果进行数值仿真，取脱靶量和终端相对碰撞角之差权重为 $l_i = \ell_i = 10^8$ ，控制量权重为 $s_i = 1$ ，终端估计器权重为 $m_i = 10$ 。

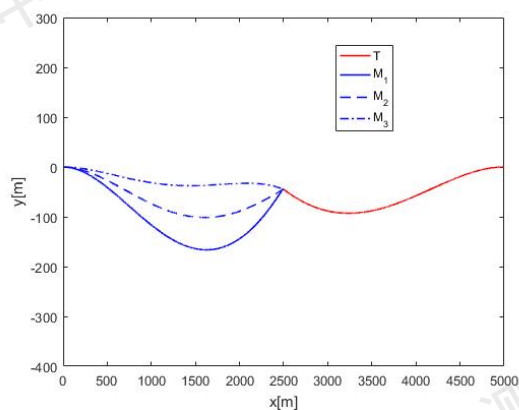
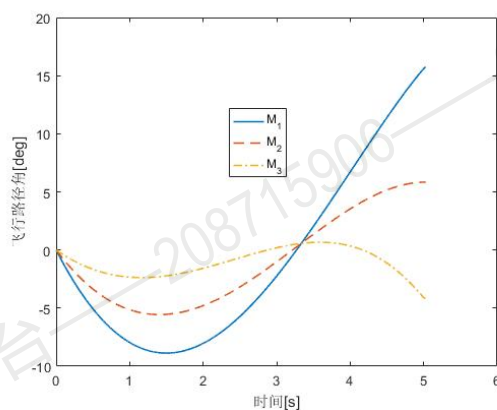
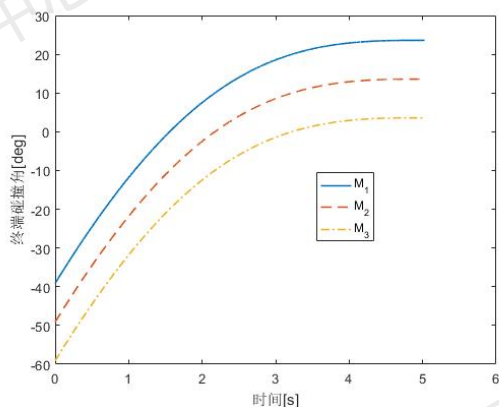
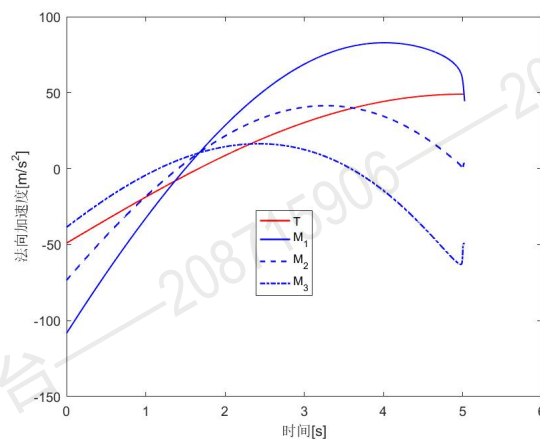
不同制导律在拓扑 \mathcal{G}_1 和 \mathcal{G}_2 下的终端拦截结果如表3.2所示。在两个拓扑下，基于集中式协同制导律和分布式协同制导律都能有效的对目标进行拦截，然而基于集中式制导律所得的最小拦截脱靶量及相对碰撞角的误差均小于分布式制导律的结果，映证了分布式协同制导律所得的纳什策略是一个 ϵ -纳什。

在拓扑 \mathcal{G}_1 下各制导律的拦截结果如图3.3-图3.8所示。图3.3-图3.6为集中式制导律下的拦截轨迹、飞行路径角、终端碰撞角以及法向加速度变化情况，分布式制导律下的拦截轨迹和飞行路径角变化与集中式制导律下的结果几乎一致，如图3.3和3.4所示，图3.7和3.8分别为分布式制导律下的终端碰撞角估计值和过载变化。

图3.5为通过式(3-52)所得的终端碰撞角变化，再加上脱靶量，它们一起构成了基于

表 3.2 不同拓扑下拦截结果

拓扑	制导律	脱靶量 (m)			相对碰撞角差 (°)	
		M_1	M_2	M_3	Δc_{12}	Δc_{23}
\mathcal{G}_1	CGL	0.050	0.780	0.023	10.00	9.996
	DGL	0.923	0.209	0.976	10.00	9.986
\mathcal{G}_2	CGL	0.790	0.018	0.081	9.995	9.994
	DGL	0.203	0.981	0.601	9.985	9.979

图 3.3 拦截轨迹 (CGL, DGL, \mathcal{G}_1)图 3.4 飞行路径角变化 (CGL, DGL, \mathcal{G}_1)图 3.5 终端碰撞角变化 (CGL, \mathcal{G}_1)图 3.6 法向加速度变化 (CGL, \mathcal{G}_1)

纳什博弈制导问题(3-16)的一个纳什均衡。由于目标存在机动,导致在每一时刻的导弹目标相对占位不同,即最终的纳什均衡对应的状态会发生改变,如图3.5中终端碰撞角的变化所示,因此在每一时刻需要重新计算制导律。值得注意的是,尽管不同时刻的纳什策略对应的终端状态不一致,但它们对应的终端纳什均衡始终保持,如图3.9所示,它们的相对终端碰撞角之差始终满足条件。

与集中式制导律相比,分布式制导律多了终端状态估计器(3-55),因此它的纳什均衡搜索存在短暂的估计过程,如图3.7和3.10所示,从而导致基于纳什策略的分布式协同制导律最终得到一个 ϵ -纳什均衡,具体体现在分布式制导律的最小脱靶量大于集中式的最小脱靶量,如表3.2所示。

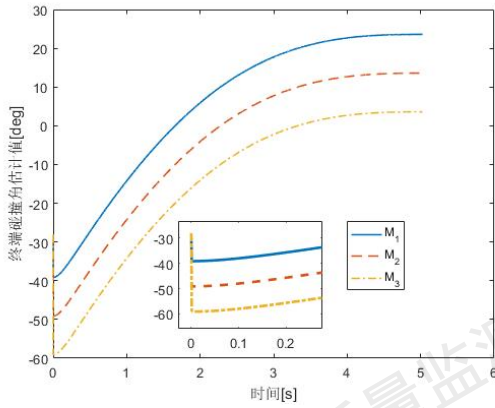


图 3.7 估计终端碰撞角变化 (DGL, \mathcal{G}_1)

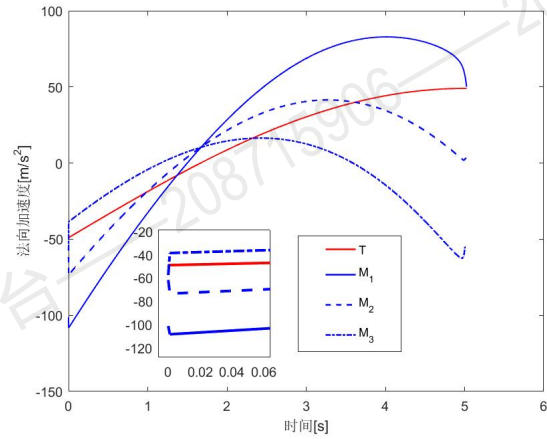


图 3.8 法向加速度变化 (DGL, \mathcal{G}_1)

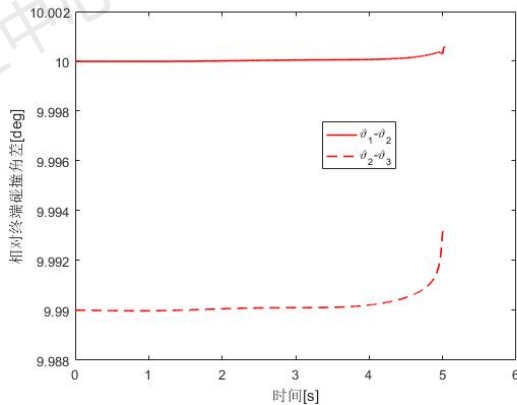


图 3.9 相对终端碰撞角差 (CGL, \mathcal{G}_1)

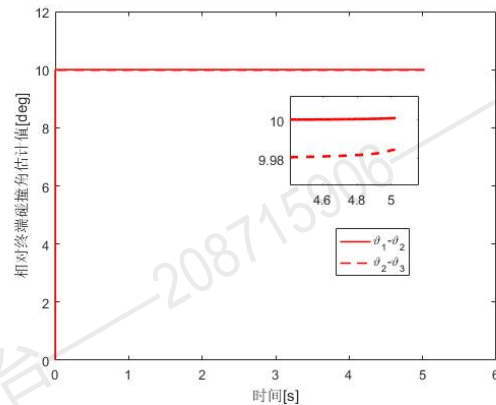


图 3.10 估计终端碰撞角估计值之差 (DGL, \mathcal{G}_1)

此外,为了验证分布式协同制导律的收敛性与稳定性,同时也对 DGL 中的终端估

计器权重和剩余飞行时间估计误差进行了单独仿真验证，其中终端估计器权重为 $m_i = \{10, 100, 1000\}$ ，剩余飞行时间估计误差为 3%。得到以下结论。

随着终端估计器增益 m_i 的增加，导弹 i 对终端状态的估计收敛速度加快，从而使得其能更快地得到预期的纳什均衡。当 $m_i = 100$ ，分布式制导律的终端拦截结果已经十分接近集中式制导律的结果（最小脱靶量和相对终端碰撞角差接近），被认为是一个可行的值。然而，由于初始估计误差的存在，无论 m_i 的取值如何，分布式制导律所得的纳什均衡仍是一个 ϵ -纳什均衡。

随着估计误差的增加，导弹间的相对碰撞角差也会逐渐增大，导弹 i 对最终达到的 ϵ -纳什均衡中 ϵ 值逐渐增加。当误差的值小于 3% 时，分布式制导律得到的纳什均衡脱靶量变化较少同时相对碰撞角误差在容许的范围内，该值被认为是本章所提的分布式制导一个容许值，此时的终端拦截结果为：各导弹脱靶量分别为 $\{0.485, 0.288, 0.218\}m$ ，相对碰撞角差分别为 10.25° 和 10.55° ，可以看出本章所提的分布式协同制导律对 3% 的剩余飞行时间估计误差具有较高的鲁棒性。

算例 2：针对本章所提的分布式制导律的通信拓扑存在切换的拦截效果进行数值仿真，取脱靶量和终端相对碰撞角之差权重为 $l_i = \ell_i = 10^8$ ，控制量权重为 $s_i = 1$ ，终端估计器权重为 $m_i = 10$ 。令 \mathcal{G}_3 为导弹间无通信时的拓扑，即 $D_3 = L_3 = 0$ ，那么依据图 3.3 的结果，可假定导弹间拓扑的切换遵循顺序： $\mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_3 \rightarrow \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathcal{G}_1$ 。

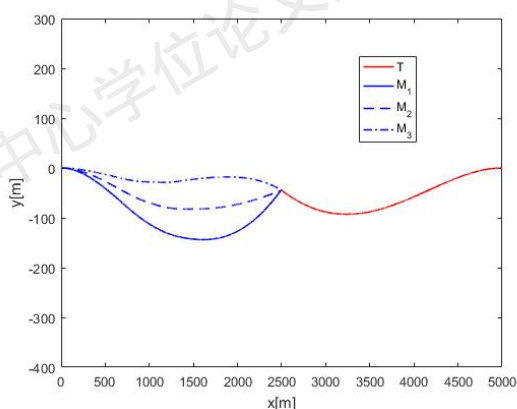


图 3.11 切换拓扑下拦截轨迹

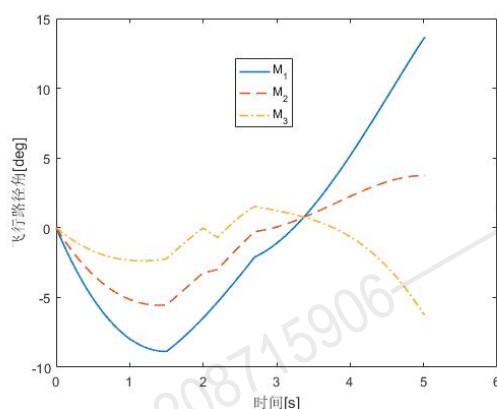


图 3.12 切换拓扑下飞行路径角变化

切换拓扑下分布式制导律的拦截结果如图 3.11-图 3.15 所示，该结果由导弹的拦截轨迹、飞行路径角、终端碰撞角估计值及其差值和法向加速度变化情况构成。当拓扑切换时，其相应的终端碰撞角会发生改变，进而引发法向加速度的突变，如图 3.13 和 3.15 所示。特

别地, 当切换后的拓扑仍满足**假设 3.2**的条件时, 其相应的终端碰撞角估计值之差仍能满足需求, 如图3.14所示。拓扑的切换导致终端状态的改变, 导弹需要不断的调整以满足拦截需求, 因此切换拓扑下的轨迹和飞行路径角较固定拓扑下的变化较大。

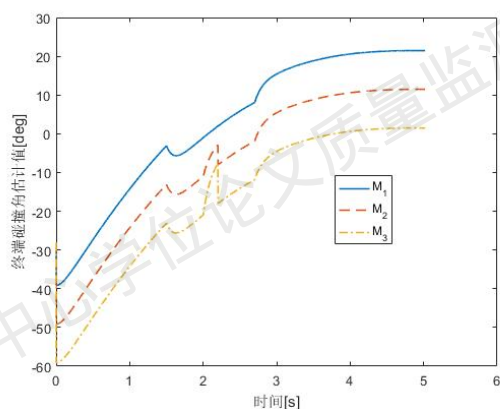


图 3.13 切换拓扑下估计终端碰撞角变化

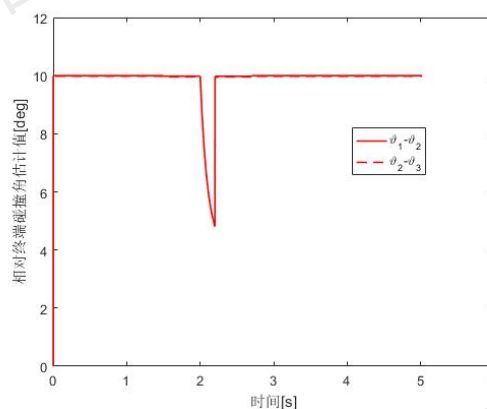


图 3.14 切换拓扑下估计终端碰撞角估计值之差

切换拓扑下的终端拦截结果为：各导弹脱靶量分别为 $\{0.308, 0.043, 0.550\}$ m，相对碰撞角差分别为 10.00° 和 9.985° ，仍能满足拦截需求。因此，只要导弹在最终的拦截阶段的通信拓扑满足**假设 3.2**，并且拥有足够的时间调整，本章所提的分布式制导律总是能实现对目标实现纳什博弈均衡意义上的拦截。

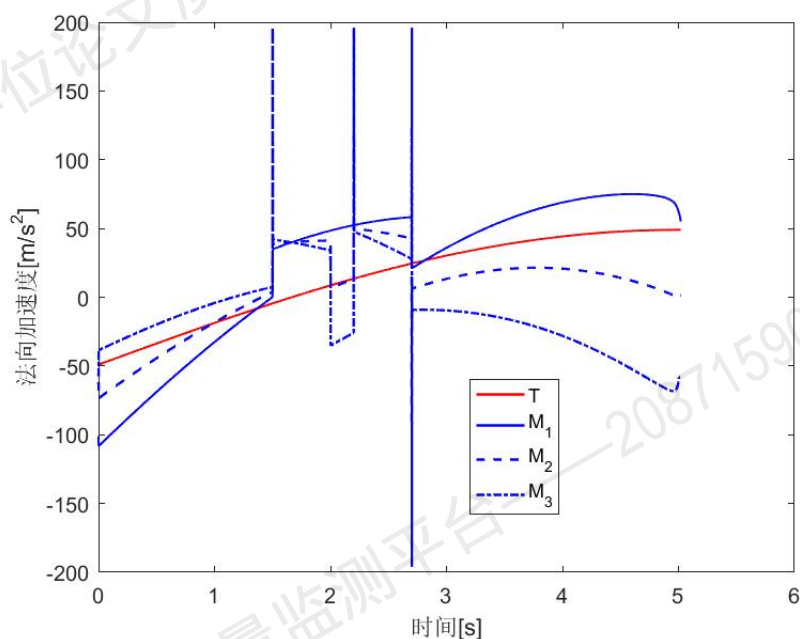


图 3.15 切换拓扑下法向加速度变化

3.5 本章小结

本章在基于开环纳什策略的基础上提出了一种针对机动目标的新型协同制导律。特别地，本章引入了一个整合碰撞角协调、脱靶量和能量消耗的性能指标函数以确保纳什均衡的存在。首先，本章提出了一个基于纳什策略的集中式协同制导律，通过在整个交战过程中不断的搜索纳什均衡策略以保证对目标的有效拦截。紧接着，本章证明了所提的协同制导问题能通过对终端状态的分布式估计以实现本地执行，此时分布式协同制导律通过搜索一个 ϵ 纳什均衡得到。最后，通过仿真分析验证了所提算法的有效性。

4 有向拓扑下基于分布式优化算法的协同制导问题研究

4.1 引言

本章研究了基于多步次梯度的分布式优化算法以及其在协同制导问题中的应用。一方面, 现有的分布式优化算法对整个优化过程的收敛速度分析上尚未有清晰且准确的结论。同时, 与多智能系统的其余网络化控制算法相较而言, 已知的分布式优化算法收敛性分析略显保守与不足, 这是本章的重点关注内容之一。基于此, 本章提出了一个基于多步次梯度的分布式优化算法, 该算法能实现有限时间一致性, 具有更快的收敛速度。为了证明该算法的稳定性和收敛性, 本章首先证明了任意有向平衡图的邻接矩阵的一致性收敛速度与其对应的矩阵直径和半径呈指数关系, 随后建立系统性能和一致性收敛时间的量化关系同时证明了所提算法的收敛性, 能准确收敛到最优值。

另一方面, 分布式优化算法在协同制导问题中的应用主要以分布式模型预测控制 (Model Prediction Control, MPC) 的形式实现, 该方法又称为分布式优化控制, 广泛应用于多智能体系统的分布式控制中。然而, 现有的分布式优化控制算法在协同制导问题中尚未得到有效应用, 已有基于分布式优化控制的协同制导算法大多基于多导弹系统的分布式剩余飞行时间一致性实现^[75, 97]。基于此, 本章在基于多步次梯度分布式优化算法的基础上, 提出了基于分布式优化控制的协同制导律, 该制导律以一个终端碰撞角作为多导弹系统的协同优化指标, 在拦截过程中, 各导弹对该参数进行优化估计, 从而达到对目标进行多方位拦截的目的。

4.2 多步次梯度分布式优化算法设计

4.2.1 分布式优化相关基础理论

本节重点考虑由 n 个智能体 (导弹) 组成的 MAS 系统的协同优化, 带约束的凸优化问题可用下式表示:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n f_i(\mathbf{x})$$

式中, $\chi \subset \mathbb{R}^m$ 为非空闭凸集, $f_i(\mathbf{x})$ 为智能体 i 的本地目标函数。此外, 凸函数 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 在点 $\mathbf{x} \in \text{dom} f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m | f(\mathbf{x}) < \infty\}$ 的次梯度为向量 $\mathbf{d}_f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$, 定义如下

$$f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + \mathbf{d}_f^T(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{y} \in \text{dom} f \quad (4-1)$$

其中上标 T 表示矩阵或向量的转置。

令 $\pi_\chi[\mathbf{z}]$ 表示向量 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$ 在集合 χ 上的映射, 即满足

$$\pi_\chi[\mathbf{z}] = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in \chi} \|\mathbf{z} - \mathbf{x}\|_p$$

其中, $\|\mathbf{x}\|_p$ 表示向量 \mathbf{x} 的 p 范数包括 $p = \{1, 2, \dots, \infty\}$ 同时 $\|\mathbf{x}\|$ 表示标准欧拉范数。对任意的 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, 映射 $\pi_\chi: \mathbb{R}^m \rightarrow \chi$ 具有如下的性质:

$$\|\pi_\chi[\mathbf{x}] - \mathbf{y}\|^2 \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 - \|\pi_\chi[\mathbf{x}] - \mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{y} \in \chi \quad (4-2)$$

将导弹之间的通信拓扑用有向图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ 表示, 其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, n\}$ 表示顶点集, \mathcal{E} 表示有向边。特别地, 导弹 i 邻居集合定义为 $\mathcal{N}_i \subseteq \mathcal{V}$ 且对于任意 $j \in \mathcal{N}_i$ 满足 $(j, i) \in \mathcal{E}$ 。那么, 该有向图的加权归一化邻接矩阵 $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ 如下^[94, 98]:

$$[\mathbf{A}(\mathcal{G})]_{ij} = \begin{cases} \mathbf{A}_{ij} > 0, & j \in \mathcal{N}_i \\ 1 - \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \mathbf{A}_{ij}, & j = i \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (4-3)$$

其中, 对任意的 $j \in \mathcal{N}_i$ 满足 $0 < \mathbf{A}_{ij} \leq 1$, $[\mathbf{A}]_{ij}$ 或 \mathbf{A}_{ij} 表示矩阵 \mathbf{A} 第 ij 个元素。当 $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ 是双随机矩阵时, 有向图 \mathcal{G} 是平衡图。

在给出分布式优化算法之前, 需要下列关于凸集 χ 、网络连通性以及优化步长等的相关假设, 这些假设是优化算法设计的基础。

假设 4.1: 凸集 χ 是闭合且有界的, 即存在正的常数 C_b 和 C_g 满足下式:

$$\|\mathbf{x}\| \leq C_b, \quad \|\mathbf{d}_i(\mathbf{x})\| \leq C_g, \quad \forall \mathbf{x} \in \chi, \quad \forall i \in \mathcal{V}.$$

假设 4.2: 最优策略集 $\chi^* = \{\mathbf{x} \in \chi | f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{y} \in \chi\}$ 非空。

假设 4.3: 有向图 \mathcal{G} 是平衡图且在每一间隔内是连通的。

假设 4.4: 对所有的 $k \geq 0$, 优化步长 $s(k)$ 满足 $s(k+1) \leq s(k) \leq 1$ 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(k) = 0, \quad \sum_{k=0}^{\infty} s(k) = \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} s^2(k) < \infty.$$

特别地, 可以采用满足**假设 4.4**的优化步长^[68, 99]

$$s(k) = \frac{c}{(k+a)^b} \quad (4-4)$$

其中, $a > 0$, $c > 0$, $b \in (\frac{1}{2}, 1]$, 且 $a^b \geq c$ 。定义 $s(k)$ 的连续形式为 $s(t) = \frac{c}{(t+a)^b}$, 那么对于所有的 $k \geq 1$, 下式始终满足

$$\int_0^{k+1} s(t)dt \leq \sum_{r=0}^k s(r) \leq 1 + \int_0^k s(t)dt. \quad (4-5)$$

下列引理总结与优化步长相关的标量数列的一致性收敛结果, 其相应的证明详见文献 [55, 56], 读者可自行查阅, 本节仅对其进行简单介绍。

引理 4.1 ([55]): 假设 $0 < p < 1$, $\{\gamma(k)\}$ 为正的标量数列且 $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(k) = 0$ 。那么有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\ell=0}^k p^{k-\ell} \gamma(\ell) = 0.$$

此外, 如果 $\sum_k \gamma(k) < \infty$, 那么有

$$\sum_k \sum_{\ell=0}^k p^{k-\ell} \gamma(\ell) < \infty.$$

引理 4.2 ([56]): 令 $\{\alpha(k)\}$ 为非负标量数列且满足

$$\alpha(k+1) \leq [1 + \beta(k)]\alpha(k) - \theta(k) + \pi(k), \quad \forall k \geq 0$$

式中, 对于所有的 $k \geq 0$, 有

$$\beta(k) \geq 0, \quad \theta(k) \geq 0, \quad \pi(k) \geq 0$$

且

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta(k) < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k) < \infty$$

那么, 数列 $\{\alpha(k)\}$ 收敛至 $\alpha \geq 0$ 且 $\sum_{k=0}^{\infty} \theta(k) < \infty$ 。

引理 2.5介绍了行随机矩阵时的一致收敛特性, 是后续进行分布式优化算法收敛性分析的基础, 为了便于阅读, 重写如下。

引理 4.3 ([93]): 考虑式(4-3)中所定义的行随机矩阵 \mathbf{A} , 在**假设 4.3**条件下, 矩阵 \mathbf{A} 能实现全局收敛, 即存在一个有界常数 m^* 使得下式成立

$$\mathbf{A}^k = \bar{\mathbf{A}}, \quad \text{且} \quad \mathbf{A}_{ij}^k = \frac{1}{n}, \quad \forall k \geq m^*$$

式中 $\bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{n} \mathbf{1}\mathbf{1}^T$, $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ 为全为 1 的向量。

引理 4.3 指出邻接矩阵本质上具有收敛的特性, 同时可以实现有限时间收敛。然而, 如何以更为直接的方式准确的描述其收敛速度则需要进一步研究, 本章将在后续章节对其进行完善。

4.2.2 行随机矩阵收敛性分析

行随机矩阵的收敛性决定了分布式优化算法的最终收敛效果, 对其收敛性的精确描述的是评估分布式算法优劣的重要方式。式(4-3)中的邻接矩阵 $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ 是一个行随机矩阵, 本节对该邻接矩阵的收敛性进行分析, 重点分析收敛速度与矩阵 $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ 的半径和直径之间的关系。

矩阵 $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ 的半径和直径的定义如下:

$$\Delta_r(\mathbf{A}) = \frac{1}{2} \max_{i,j} \|\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j\|_1, \quad \delta_d(\mathbf{A}) = \max_{i,j} \|\mathbf{A}_i - \mathbf{A}_j\|_\infty \quad (4-6)$$

当且仅当 $\delta_d(\mathbf{A}) = 0$ 时 $\Delta_r(\mathbf{A}) = 0$, 反之亦然。因此有, $0 \leq \Delta_r, \delta_d \leq 1$, 同时 Δ_r 可表示矩阵 $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ 任意两列之间的最大距离, δ_d 可表示矩阵 $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ 任意两行之间的最大距离。下列引理概括了 Δ_r 和 δ_d 之间的归一性, 其证明详见 [48], 读者可自行查阅。

引理 4.4 ([48]): 考虑 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 三个由式 (4-3) 定义的行随机矩阵, 且有 $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ 。那么, 在假设 4.3 的条件下, 有

$$\delta_d(\mathbf{C}) \leq \Delta_r(\mathbf{B})\delta_d(\mathbf{A}), \text{ 且 } \Delta_r(\mathbf{C}) \leq \Delta_r(\mathbf{B})\Delta_r(\mathbf{A}) \quad (4-7)$$

式中, δ_d 和 Δ_r 如式 (4-6) 所定义。

基于上述引理, 可以将行随机矩阵的收敛速度用其直径和半径描述, 具体结论和证明由以下引理给出。

引理 4.5: 考虑式(4-3)所定义的行随机矩阵 $\mathbf{A}(\mathcal{G})$ 。那么, 在假设 4.3 的条件下, 下列命题成立:

- 由式(4-6) 定义的直径和半径一致非增, 同时满足

$$\Delta_r(\mathbf{A}^k) \leq \Delta_r^k(\mathbf{A}), \text{ 且 } \delta_d(\mathbf{A}^{k+1}) \leq \delta_d(\mathbf{A}^k) \leq \delta_d(\mathbf{A}).$$

- \mathbf{A}^k 几何收敛至 $\bar{\mathbf{A}}$, 即对于所有的 $k \geq 1$,

$$\|\mathbf{A}^k - \bar{\mathbf{A}}\|_1 \leq 2\Delta_r^k(\mathbf{A}).$$

特别地, 对每一个 $(i, j) \in \mathcal{E}$, 当 $k \rightarrow m^*$ 时, 元素 \mathbf{A}_{ij}^k 收敛至 $\frac{1}{n}$

$$\left| \mathbf{A}_{ij}^k - \frac{1}{n} \right| \leq 2\Delta_r^k(\mathbf{A}).$$

证明. 根据式(4-7), 命题 1 的结论易证, 即

$$\delta_d(\mathbf{A}^{k+1}) \leq \Delta_r(\mathbf{A})\delta_d(\mathbf{A}^k) \leq \delta_d(\mathbf{A}^k) \leq \delta_d(\mathbf{A}),$$

$$\Delta_r(\mathbf{A}^k) \leq \Delta_r(\mathbf{A})\Delta_r(\mathbf{A}^{k-1}) \leq \dots \leq \Delta_r^k(\mathbf{A}).$$

此外, $\delta_d(\mathbf{A})$ 和 $\Delta_r(\mathbf{A})$ 均是一致性非增的, 且 $\Delta_r(\mathbf{A})$ 以几何收敛的速度构成一个压缩映射。进一步, 通过代入**假设 4.3**和**引理 4.3**, 有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}^k - \bar{\mathbf{A}}\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \left\| \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_{ij}^{m^*-k} [\mathbf{A}^k]_i - [\mathbf{A}^k]_j \right\|_1 \\ &\leq \max_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq i \leq n} \|[\mathbf{A}^k]_i - [\mathbf{A}^k]_j\|_1 \leq 2\Delta_r^k(\mathbf{A}) \end{aligned} \quad (4-8)$$

上式意味着 $\|\mathbf{A}^k - \bar{\mathbf{A}}\| \leq 2\Delta_r^k(\mathbf{A})$ 和 $|\mathbf{A}_{ij}^k - \frac{1}{n}| \leq 2\Delta_r^k(\mathbf{A})$ 成立, 那么第二个命题也成立, **引理 4.5**得证。■

4.2.3 多步次梯度分布式优化算法

本节对所提出的多步次梯度分布式优化算法进行介绍, 同时对该算法进行理论分析, 证明该算法能实现有限时间一致性以及保证对最优解的估计误差会逐渐趋于 0。首先, 令 k 时刻智能体 i 的估计状态和动量项分别为 $\mathbf{x}_i(k) \in \mathbb{R}^m$ 和 $\mathbf{v}_i(k) \in \mathbb{R}^m$, 对所有的 $i = \{1, \dots, n\}$, 其估计器按照下式更新:

$$\mathbf{v}_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{v}_j(k) + s(k) \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{d}_j(k), \quad (4-9a)$$

$$\mathbf{u}_i(k+1) = \tau(k) [\mathbf{v}_i(k+1) - \mathbf{v}_i(k)], \quad (4-9b)$$

$$\mathbf{y}_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{u}_i(k+1), \quad (4-9c)$$

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \pi_{\mathcal{X}}[\mathbf{y}_i(k+1)] \quad (4-9d)$$

且 $\mathbf{x}_i(0) \in \mathcal{X}$, $\mathbf{v}_i(0) = \mathbf{0}_m$, $\mathbf{0}_m \in \mathbb{R}^m$ 是全为 0 的向量。 $\mathbf{d}_i(k)$ 是目标函数 $f_i(\mathbf{x})$ 在点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i(k)$ 的次梯度, $s(k)$ 和 $\tau(k)$ 分别为优化步长和加速参数, 满足**假设4.4**。

式(4-9)是完整的分布式优化算法, 其中式(4-9a)和(4-9b)组成两步估计器, 通过估计整个系统次梯度的均值以获取优化方向, 式(4-9c)和(4-9d)是标准的分布式优化步骤, 用以从约束集中获取最优解。

4.2.3.1 一致性分析

为了便于描述, 令 $q = \Delta_r(\mathbf{A})$, 那么对于所有的 $k > 0$ 有, $\|\mathbf{A}^k - \bar{\mathbf{A}}\| \leq 2q^k$ 和 $|\mathbf{A}_{ij}^k - \frac{1}{n}| \leq 2q^k$ 。因此, 由式(4-9a)和(4-9b)得

$$\mathbf{v}_i(k+1) = \sum_{r=0}^k \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij}^{k+1-r} s(r) \mathbf{d}_j(r). \quad (4-10)$$

$$\mathbf{u}_i(k+1) = \tau(k) \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^{k+1-r} - \mathbf{A}_{ij}^{k-r}) s(r) \mathbf{d}_j(r) + \tau(k) \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} s(k) \mathbf{d}_j(k). \quad (4-11)$$

根据引理 4.5 可得, 对于所有的 $k \geq 0$ 有

$$\|\mathbf{u}_i(k+1)\| \leq 2\sqrt{n}C_1\tau(k) \sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r) \quad (4-12)$$

其中, $C_1 = (1+q)C_g$ 。

易得 $\mathbf{u}_i(k+1)$ 有界, 令 $\mathbf{e}_i(k)$ 表示 k 时刻的映射误差

$$\mathbf{e}_i(k+1) = \mathbf{x}_i(k+1) - \mathbf{y}_i(k+1). \quad (4-13)$$

那么 $\mathbf{e}_i(k+1)$ 的收敛性可由如下引理概括。

引理 4.6: 考虑式(4-13)中定义的映射误差 $\mathbf{e}_i(k)$, 在假设 4.3 的条件下, 下式成立:

$$\|\mathbf{e}_i(k+1)\| \leq \|\mathbf{u}_i(k+1)\|, \quad \forall k \geq 0 \quad (4-14)$$

证明. 对于所有的 $i \in \mathcal{V}$ 都有 $\mathbf{x}_i(k+1) \in \chi$, 且 \mathbf{A} 是双随机矩阵, 那么下式成立

$$\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) \in \chi$$

因此, 根据式(4-2)和(4-9c)可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_i(k+1) - \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k)\|^2 &\leq \|\mathbf{y}_i(k+1) - \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k)\|^2 - \|\mathbf{e}_i(k+1)\|^2 \\ &\leq \|\mathbf{u}_i(k+1)\|^2 - \|\mathbf{e}_i(k+1)\|^2 \end{aligned}$$

易得式(4-14)成立, 引理 4.6 得证。 ■

将式 (4-9c) 和 (4-13) 代入式 (4-9d) 得

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{u}_i(k+1) + \mathbf{e}_i(k+1)$$

对上式进行迭代计算可得下一时刻的估计状态, 即:

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij}^{k+1} \mathbf{x}_j(0) - \sum_{r=1}^{k+1} \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij}^{k+1-r} \mathbf{u}_j(r) + \sum_{r=1}^{k+1} \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij}^{k+1-r} \mathbf{e}_j(r) \quad (4-15)$$

定义 k 时刻所有估计状态的均值如下:

$$\bar{\mathbf{x}}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i(k)$$

由式(4-15) 得

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(k+1) = & \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij}^{k+1} \mathbf{x}_j(0) - \sum_{r=1}^{k+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij}^{k+1-r} \mathbf{u}_j(r) \right. \\ & \left. + \sum_{r=1}^{k+1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij}^{k+1-r} \mathbf{e}_j(r) \right] \end{aligned}$$

由于 \mathbf{A} 是双随机矩阵, 通过一系列代数计算可得

$$\bar{\mathbf{x}}(k+1) = \frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j(0) - \sum_{r=1}^{k+1} \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j(r) + \sum_{r=1}^{k+1} \sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j(r) \right] \quad (4-16)$$

那么, 对于所有的 $i \in \{1, \dots, n\}$, 最优值的估计状态 \mathbf{x}_i 将会在有限时间内收敛至 $\bar{\mathbf{x}}$, 即基于分布式优化算法(4-9)的多智能体(导弹)系统会实现状态一致性, 该结果可概括为如下定理。

定理 4.1: 考虑式(4-9)中定义的分布式优化算法与式(4-16)中定义的平均估计状态 $\bar{\mathbf{x}}(k)$, 那么在假设 4.1-4.4 的条件下, 对于所有的 $i \in \{1, \dots, n\}$, $\mathbf{x}_i(k)$ 在有限时间内收敛至 $\bar{\mathbf{x}}(k)$ 。即, 对任意小的常数 $\epsilon > 0$, 存在一个时刻

$$k^* = \left\lceil \operatorname{argmin}_k \left| s(k) - \frac{(1-q)\epsilon}{2nC_1\tau} \right| \right\rceil + m^* \quad (4-17)$$

使得下式成立

$$\|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| \leq \epsilon, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall k \geq k^*$$

其中, m^* 在引理 4.3 中定义。

证明. 动量项 $\mathbf{u}_i(k+1)$ 满足:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_i(k+1) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tau(k) s(k) \mathbf{d}_j(k)\| &\leq \tau(k) \left[\left\| \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^{k+1} - \mathbf{A}_{ij}^k) s(0) \mathbf{d}_j(0) \right\| \right. \\ &\quad + \left\| \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^k - \mathbf{A}_{ij}^{k-1}) s(1) \mathbf{d}_j(1) \right\| + \dots \\ &\quad + \left\| \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^2 - \mathbf{A}_{ij}) s(k-1) \mathbf{d}_j(k-1) \right\| \\ &\quad \left. + \left\| \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij} - \frac{1}{n}) s(k) \mathbf{d}_j(k) \right\| \right] \end{aligned}$$

对于所有的 $k \geq m^*$ 有, $\mathbf{A}_{ij}^k = \frac{1}{n}$, $s(k)$ 单调递减且 $\|\mathbf{d}_j(k)\| \leq C_g$ 。因此, 随着 k 的增加, 下式成立

$$\begin{aligned} \lim_{k \geq m^*} \|\mathbf{u}_i(k+1) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tau(k) s(k) \mathbf{d}_j(k)\| &\leq \tau(k) \left[\left\| \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^k - \mathbf{A}_{ij}^{k-1}) s(1) \mathbf{d}_j(1) \right\| + \dots \right. \\ &\quad + \left\| \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^2 - \mathbf{A}_{ij}) s(k-1) \mathbf{d}_j(k-1) \right\| \quad (4-18) \\ &\quad \left. + \left\| \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij} - \frac{1}{n}) s(k) \mathbf{d}_j(k) \right\| \right] \end{aligned}$$

由式(4-18)可得, 仅最新的 m^* 项梯度对最终的误差产生影响。因此, 根据引理 4.5, 可将式(4-18)重写如下

$$\lim_{k \geq m^*} \|\mathbf{u}_i(k+1) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tau(k) s(k) \mathbf{d}_j(k)\| \leq 2\sqrt{n} \frac{1-q^{m^*}}{1-q} \tau(k-m^*) s(k-m^*) C_1 \quad (4-19)$$

根据式(4-19), 下式成立^[93]

$$\mathbf{u}_i(k+1) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tau(k) s(k) \mathbf{d}_j(k), \quad \forall i \in \mathcal{V}, k \geq m^* \quad (4-20)$$

且其误差上限由 $\frac{2C_1\sqrt{n}}{1-q} \tau(k-m^*) s(k-m^*)$ 约束。

式(4-20)意味着 $\mathbf{u}_i(k+1)$ 随着 k 的递增将会实现一致性收敛, 接下来分析 $\mathbf{x}_i(k+1)$ 的一致性结果。由于 $\|\mathbf{e}_i(k+1)\| \leq \|\mathbf{u}_i(k+1)\|$, 那么有

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_i(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)\| &\leq \left\| \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^{k+1} - \frac{1}{n}) \mathbf{x}_j(0) \right\| + \left\| 2 \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^k - \frac{1}{n}) \mathbf{u}_j(1) \right\| \\ &\quad + \left\| 2 \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^{k-1} - \frac{1}{n}) \mathbf{u}_j(2) \right\| + \dots + \left\| 2 \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^{\circ} - \frac{1}{n}) \mathbf{u}_j(k+1) \right\| \end{aligned}$$

根据引理4.3可得

$$\begin{aligned} \lim_{k \geq m^*} \|\mathbf{x}_i(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)\| &\leq \|2 \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^{k-1} - \frac{1}{n}) \mathbf{u}_j(2)\| + \dots \\ &+ \|2 \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^0 - \frac{1}{n}) \mathbf{u}_j(k+1)\| \end{aligned}$$

式(4-20)表明 $\mathbf{u}_i(k)$ 随着 k 的增加逐渐减小。那么上述不等式右边的项也会随着时间逐渐减小, 即

$$\lim_{k \geq m^*} \|\mathbf{x}_i(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)\| \leq 2n \frac{1-q^{m^*}}{1-q} \tau(k-m^*) s(k-m^*) C_1 \quad (4-21)$$

根据假设 4.4 易得 $\mathbf{x}_i(k)$ 将会在有限时间内达到一致, 其收敛时间上界由式(4-17)给定的 k^* 约束, 定理 4.1 证毕。 ■

注 4.1: 由式(4-17)可知 $\tau(k)$ 和 $s(k)$ 的选择对整个过程的收敛速度由有至关重要的作用。特别地, 当 $\tau(k) = 1$, $s(k)$ 依据式 (4-4) 选取时, 式(4-17)可简写为

$$k^* = \left\lceil \left[\frac{2nc(1+q)C_g}{(1-q)\varepsilon} \right]^{\frac{1}{b}} \right\rceil - a + m^*$$

显然, 矩阵的半径和直径给出了一个直接且保守的收敛速度计算方法, 由一致性分析结果可知本章所提出的多步分布式优化算法不会损害平衡拓扑的平均一致性过程。

4.2.3.2 收敛性分析

加权优化步长的数列性质概括为以下引理, 其结果是证明分布式优化算法收敛性的重要支撑。

引理 4.7: 在假设 4.1, 4.3 和 4.4 的前提下, 以下命题为真。

- 数列 $\{(\sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r))^2\}$ 是可求和的:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r) \right)^2 < \infty$$

- 数列 $\{s(k) \|\mathbf{x}_i(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)\|\}$ 是可求和的:

$$\sum_{k=0}^{\infty} s(k) \|\mathbf{x}_i(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)\| < \infty$$

另外，由 $\sum_{k=0}^{\infty} s(k) \|\mathbf{x}_i(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)\| < \infty$ 可得當 $\sum_{k=0}^{\infty} s(k) = \infty$ 時，能實現一致性（即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)\| = 0$ ）。

證明. 重寫引理 4.7 的第一個命題如下

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r) \right]^2 = s^2(0) + [qs(0) + s(1)]^2 + \cdots + [q^k s(0) + q^{k-1} s(1) + \cdots + s(k)]^2$$

定義數列 $w(n) = qw(n-1) + s(n-1)$ 且 $w(1) = s(0)$ ，那麼上式的前 n 項和可表示為 $S_n = \sum_{i=1}^n w^2(i)$ 。即

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r) \right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{r=0}^{n-1} s^2(r) + 2q \sum_{r=1}^{n-1} w(r)s(r) + q^2 S_{n-1}$$

那麼，對上式進行迭代計算得，

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{r=0}^{n-k} q^{2(k-1)} s^2(r) + 2q \left[\sum_{k=1}^{n-1} q^{2(k-1)} \sum_{r=1}^{n-k} \sum_{\ell=0}^{r-1} q^{r+\ell-1} s(r)s(\ell) \right] + q^{2(n-1)}$$

根據 q 的定義（矩陣 A 的半徑）以及假設 4.3 和 4.4 有

$$\sum_{r=1}^{n-k} \sum_{\ell=0}^{r-1} q^{r+\ell-1} s(r)s(\ell) < \frac{1 - q^{n-k}}{1 - q} \sum_{r=0}^{n-k} s^2(r)$$

因此有

$$S_n < \frac{1 - q^{2(n-1)}}{1 - q^2} \sum_{r=0}^{n-1} s^2(r) + 2q \left(\sum_{k=1}^{n-1} q^{2(k-1)} \frac{1 - q^{n-k}}{1 - q} \right) \sum_{r=0}^{n-1} s^2(r) + q^{2(n-1)}$$

由於 $\sum_{k=0}^{\infty} s^2(k) < \infty$ 成立，那麼有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r) \right]^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n < \frac{1}{(1 - q)^2} \sum_{k=0}^{\infty} s^2(k) < \infty \quad (4-22)$$

上式證明了引理 4.7 的第一個命題成立，接下來對第二個命題進行證明。由假設 4.1，式 (4-15) 和 (4-16) 以及引理 4.5 可得

$$\|\mathbf{x}_i(k+1) - \bar{\mathbf{x}}(k+1)\| \leq 2nC_b q^{k+1} + 8nC_1 \sum_{r=0}^k (k+1-r) q^{k-r} s(r)$$

那麼有

$$\sum_{k=0}^{\infty} s(k) \|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| \leq 2nC_b \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+1} s(k) + 8nC_1 \sum_{k=0}^{\infty} s(k) \sum_{r=0}^k \sum_{\ell=r}^k q^{k-r} s(r) \tau(\ell) \quad (4-23)$$

由于 $q < 1$, $s(k) \leq 1$ 以及 $\tau(k) \leq 1$, 式(4-23)的第一项可求和, 其余项可重写如下

$$\sum_{k=0}^{\infty} s(k) \sum_{r=0}^k \sum_{\ell=r}^k q^{k-r} s(r) \tau(\ell) < \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) q^k \right] \sum_{k=0}^{\infty} s^2(k) < \frac{2-2q+q^2}{1-2q+q^2} \sum_{k=0}^{\infty} s^2(k)$$

由此可得

$$\sum_{k=0}^{\infty} s(k) \|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| < 2nC_b \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+1} s(k) + 8nC_1 \frac{2-2q+q^2}{1-2q+q^2} \sum_{k=0}^{\infty} s^2(k) \quad (4-24)$$

根据**假设 4.4**可得 $\sum_{k=0}^{\infty} s^2(k) < \infty$. 因此, $\sum_{k=0}^{\infty} s(k) \|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| < \infty$ 成立, 第二项命题得证, **引理 4.7**证毕. \blacksquare

基于一致性分析以及**引理 4.7**的结论, 本节进行所提分布式优化算法的收敛性分析, 其主要结果概括为如下定理.

定理 4.2: 考虑如式 (4-9)所定义的分布式优化算法, 令 $f(\mathbf{x})$ 的最优解为 $\mathbf{x}^* \in \mathcal{X}^*$, 那么在**假设 4.1-4.4**的条件下, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(k+1) - \mathbf{x}^*\| = 0, \quad \forall i \in \mathcal{V}$$

证明. 估计状态 $\mathbf{x}_i(k+1)$ 和最优值 \mathbf{x}^* 之间的误差满足

$$\|\mathbf{x}_i(k+1) - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \sum_{j=1}^n \|\mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^*\|^2 + \|\mathbf{u}_i(k+1)\|^2 - 2\mathbf{u}_i^T(k+1) \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^* \right]$$

因此有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i(k+1) - \mathbf{x}^*\|^2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|\mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^*\|^2 + \sum_{i=1}^n \|\mathbf{u}_i(k+1)\|^2 \\ &\quad - 2 \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i^T(k+1) \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^* \right] \end{aligned} \quad (4-25)$$

由于邻接矩阵 \mathbf{A} 是双随机矩阵, 因此下式成立。

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|\mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \|\mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^*\|^2 = \sum_{j=1}^n \|\mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^*\|^2 \quad (4-26)$$

根据式 (4-11)和(4-12) 以及 $\|\mathbf{x}_i(k)\| \leq C_b$, 将式(4-25)的最后一项重写为

$$\begin{aligned}
-2 \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i^T(k+1) \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^* \right] &= -2 \sum_{i=1}^n \left[\tau(k) \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_{ij}^{k+1-r} - \mathbf{A}_{ij}^{k-r}) s(r) \mathbf{d}_j(r) \right. \\
&\quad \left. + \tau(k) \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} s(k) \mathbf{d}_j(k) - s(k) \mathbf{d}_i(k) \right]^T \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^* \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^n 2s(k) \mathbf{d}_i^T(k) \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^* \right] \\
&\leq -2s(k) \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i^T(k) \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^* \right] \\
&\quad + 4nC_1 C_b \tau(k) \sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r)
\end{aligned} \tag{4-27}$$

根据式 (4-1)得

$$\begin{aligned}
-\mathbf{d}_i^T(k) \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^* \right] &= \mathbf{d}_i^T(k) \left[\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{x}_i(k) - \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) \right] \\
&\leq -[f_i(\bar{\mathbf{x}}(k)) - f_i(\mathbf{x}^*)] + [f_i(\bar{\mathbf{x}}(k)) - f_i(\mathbf{x}_i(k))] \tag{4-28} \\
&\quad + C_g \|\mathbf{x}_i(k) - \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k)\|
\end{aligned}$$

因此有

$$C_g \|\mathbf{x}_i(k) - \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k)\| \leq C_g \sum_{j=1}^n A_{ij} \|\mathbf{x}_i(k) - \mathbf{x}_j(k)\| \leq 2C_g \max_{i \in \mathcal{V}} \|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| \tag{4-29}$$

又 $\|\mathbf{d}_i(k)\| \leq C_g$ 成立, 那么有

$$[f_i(\bar{\mathbf{x}}(k)) - f_i(\mathbf{x}_i(k))] \leq \bar{\mathbf{d}}_i^T [\bar{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}_i(k)] \leq C_g \max_{i \in \mathcal{V}} \|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| \tag{4-30}$$

其中, $\bar{\mathbf{d}}_i$ 是 f_i 在点 $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}(k)$ 处的次梯度。将式(4-29) 和 (4-30) 代入式 (4-28)可得

$$-\mathbf{d}_i^T(k) \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^* \right] \leq -[f_i(\bar{\mathbf{x}}(k)) - f_i(\mathbf{x}^*)] + 3C_g \max_{i \in \mathcal{V}} \|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| \tag{4-31}$$

将式 (4-31) 代入式 (4-27)得

$$\begin{aligned}
-2 \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_i^T(k+1) \left[\sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - \mathbf{x}^* \right] &\leq -2s(k) \sum_{i=1}^n [f_i(\bar{\mathbf{x}}(k)) - f_i(\mathbf{x}^*)] \\
&\quad + 6nC_g s(k) \max_{i \in \mathcal{V}} \|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| + 4nC_1 C_b \tau(k) \sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r)
\end{aligned} \tag{4-32}$$

然后将式 (4-32) 和 (4-26) 代入式 (4-25) 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i(k+1) - \mathbf{x}^*\|^2 &\leq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i(k) - \mathbf{x}^*\|^2 - 2s(k) [f(\bar{\mathbf{x}}(k)) - f(\mathbf{x}^*)] \\ &\quad + 4n^2 C_1^2 \left(\sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r) \right)^2 + 6nC_g s(k) \max_{i \in \mathcal{V}} \|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| \quad (4-33) \\ &\quad + 4nC_1 C_b \left[\tau^2(k) + \left(\sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

根据假设4.4和引理4.7有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r) \right)^2 < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} s(k) \max_{i \in \mathcal{V}} \|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \tau^2(k) < \infty$$

那么下式成立。

$$\begin{aligned} &4n^2 C_1^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r) \right)^2 + 6nC_g \sum_{k=0}^{\infty} s(k) \max_{i \in \mathcal{V}} \|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| \\ &+ 4nC_1 C_b \sum_{k=0}^{\infty} \left[\tau^2(k) + \left(\sum_{r=0}^k q^{k-r} s(r) \right)^2 \right] < \infty \end{aligned}$$

由于 $f(\bar{\mathbf{x}}(k)) - f(\mathbf{x}^*) \geq 0$ 对于所有的 k 都成立, 根据引理4.2可得下式成立

$$\sum_{k=0}^{\infty} s(k) (f(\bar{\mathbf{x}}(k)) - f(\mathbf{x}^*)) < \infty$$

且对于每一个 $\mathbf{x}^* \in \chi^*$, 数列 $\{\sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i(k+1) - \mathbf{x}^*\|^2\}$ 是收敛的。进一步地, 代入假设4.4有 $\sum_{k=0}^{\infty} s(k) = \infty$, 可得

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} f(\bar{\mathbf{x}}(k)) = f(\mathbf{x}^*) \quad (4-34)$$

定理4.1表明 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(k) - \bar{\mathbf{x}}(k)\| = 0$ 成立, 因此对于每一个 $\mathbf{x}^* \in \chi^*$, $\{\|\bar{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}^*\|^2\}$ 都是收敛的且 $\bar{\mathbf{x}}(k)$ 是有界的。此外, 由于目标函数 f 是连续凸函数, 因此由式 (4-34) 易得 $\bar{\mathbf{x}}(k)$ 能收敛至 $\mathbf{x}^* \in \chi^*$ 。这也说明数列 $\{\|\bar{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}^*\|^2\}$ 是收敛的, $\bar{\mathbf{x}}(k)$ 具有唯一有限解, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{\mathbf{x}}(k) - \mathbf{x}^*\| = 0$ 成立, 也表明 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}_i(k) - \mathbf{x}^*\| = 0$ 成立, **定理4.2**得证。 ■

定理4.2表明本章所提的分布式优化算法能实现对最优值的有效估计, 其收敛速度的结果可概括为如下引理。

引理 4.8: 对于式(4-9)中所示的分布式优化算法, 令 $\sigma_k = \min_k f(\bar{\mathbf{x}}(k)) - f(\mathbf{x}^*)$ 表示 k 步时的最优估计误差。那么在**假设 4.1-4.4**的条件下, σ_k 的收敛速度由下式决定

$$\sigma_k = O \left[\frac{1}{\int_0^{k+1} s(t) dt} \right] \quad (4-35)$$

证明. 对式(4-33) 进行求和, 加上条件 $\|\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i(k+1) - \mathbf{x}^*\|^2 \geq 0$ 可得

$$\begin{aligned} 2 \sum_{r=0}^k s(r) [f(\bar{\mathbf{x}}(r)) - f(\mathbf{x}^*)] &\leq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{x}_i(0) - \mathbf{x}^*\|^2 + 4n^2 C_1^2 \sum_{r=0}^k \left(\sum_{\ell=0}^r q^{r-\ell} s(\ell) \right)^2 \\ &\quad + 6nC_g \sum_{r=0}^k s(r) \max_{i \in \mathcal{V}} \|\mathbf{x}_i(r) - \bar{\mathbf{x}}(r)\| \\ &\quad + 4nC_1 C_b \sum_{r=0}^k \left[\tau^2(r) + \left(\sum_{\ell=0}^r q^{r-\ell} s(\ell) \right)^2 \right] \end{aligned}$$

将式 (4-22) 和 (4-23) 代入上式, 由**假设 4.1**可得

$$\begin{aligned} 2 \sum_{r=0}^k s(r) \sigma_k &< 2nC_b^2 + 12n^2 C_b C_g \sum_{r=0}^k q^{r+1} s(r) + 4nC_1 C_b \sum_{r=0}^k \tau^2(r) \\ &\quad + \frac{4nC_1}{(1-q)^2} \left[nC_1 + C_b + 12nC_g(2-2q+q^2) \right] \sum_{r=0}^k s^2(r) \end{aligned}$$

因此有,

$$\sigma_k < \frac{\tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 \sum_{r=0}^k \tau^2(r) + \tilde{C}_3 \sum_{r=0}^k s^2(r)}{\sum_{r=0}^k s(r)}$$

其中,

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 &= nC_b^2 + \frac{6n^2 C_b C_g}{1-q}, \quad \tilde{C}_2 = 2nC_1 C_b \\ \tilde{C}_3 &= \frac{2nC_1}{(1-q)^2} \left[nC_1 + C_b + 12nC_g(2-2q+q^2) \right] \end{aligned}$$

根据**假设 4.4**, 有

$$\begin{aligned} s(k+1) &\leq s(k) \leq 1, \quad \tau(k+1) \leq \tau(k) \leq 1 \\ \sum_{k=0}^{\infty} s^2(k) &< \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \tau^2(k) < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} s(k) = \infty \end{aligned}$$

因此可得分布式优化算法的收敛速度主要由 $\sum_{r=0}^k s(r)$ 决定。那么, 根据式(4-5)可得 σ_k 的收敛速度可由式(4-35)决定, **引理 4.8**证毕。 ■

特别地, 当 $s(k)$ 取式(4-4)中的值时, 式 (4-35) 可简化为

$$\sigma_k = \begin{cases} O(\frac{1}{k^{1-b}}), & b \in (\frac{1}{2}, 1) \\ O(\frac{1}{\log k}), & b = 1 \end{cases}$$

根据上式可知, 当 $b \in (\frac{1}{2}, 1)$ 所提算法收敛速度为 $O(\frac{1}{k^{1-b}})$; 当 $b = 1$ 所提算法收敛速度为 $O(\frac{1}{\log k})$ 。

4.3 基于分布式优化的协同制导方法研究

4.3.1 离散相对运动模型及状态方程

本节考虑如何实现分布式优化算法在协同制导问题中的应用, 目前常用的是分布式优化控制, 其在进行优化的同时也考虑了控制量的影响, 是分布式优化算法较好的应用方式。如前节所述, 基于次梯度的分布式优化算法需要在离散时间系统中实现, 因此首先要对导弹、目标及其相对运动方程进行离散化处理。令离散采样时间为 T_s , 那么导弹和目标的离散运动学方程为:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + T_s v_i(k) \cos \theta_i(k) \quad (4-36a)$$

$$y_i(k+1) = y_i(k) + T_s v_i(k) \sin \theta_i(k) \quad (4-36b)$$

$$\theta_i(k+1) = \frac{a_i(k)}{v_i(k)} \quad (4-36c)$$

其中, $\mathbf{P}_i(k) = [x_i(k), y_i(k)]^T$, v_i 和 a_i 分别为导弹 i 在 k 时刻的位置, 速度和过载信息。同样地, 导弹 i 在 k 时刻的离散线性化相对运动方程如下

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{G}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{H}_i u_i(k) + \mathbf{H}_{T_i} u_T(k) \quad (4-37)$$

其中, $\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} 1 & T_s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{H}_i = \begin{bmatrix} -0.5k_i T_s^2 \\ -k_i T_s \\ T_s/v_i \end{bmatrix}$, 且 $\mathbf{H}_{T_i} = \begin{bmatrix} 0.5k_{T_i} T_s^2 \\ k_{T_i} T_s \\ -T_s/v_T \end{bmatrix}$, k_i 和 k_{T_i} 的定义见式 (3-1)。

上式定义了多导弹协同拦截问题的离散相对运动关系, 为了更好地对其进行求解, 同样需要进行降阶处理, 提取出零控脱靶量和零控碰撞角信息。根据(3-9)的可得离散终端估计状态 $z_i(k)$ 为:

$$z_i(k) = \mathbf{W} \mathbf{G}_i^{T_{N_i}-k} \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{W} \sum_{l=k}^{T_{N_i}-1} \mathbf{G}_i^{T_{N_i}-l-1} \mathbf{H}_{T_i} u_T(l) \quad (4-38)$$

其中, $T_{Ni} = \lceil \frac{t_{go_i}}{T_s} \rceil$ 为离散化后导弹 i 的剩余飞行时间, \mathbf{W} 的定义见式(3-10)。相应地, 可以得到 $\mathbf{z}_i(k)$ 的离散状态方程。即,

$$\mathbf{z}_i(k+1) = \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{W}\mathbf{G}_i^{T_{Ni}-k-1} \mathbf{H}_i u_i(k) \quad (4-39)$$

本节所提的分布式优化控制问题是在分布式模型预测控制的基础上完成的, 模型预测控制指在当前采样时刻通过求解一个有限时域开环最优控制问题获取当前控制序列, 仅采用该序列中第一个值实施模型控制的一类特殊控制方法, 将其与分布式优化算法相结合即得到一类常用的分布式优化控制方法, 即分布式模型预测控制。

令模型预测控制的预测控制区间为 T_p , $\mathbf{Z}_i(k) = [\mathbf{z}_i^T(k+1), \dots, \mathbf{z}_i^T(k+T_p)]^T$, $\mathbf{U}_i(k) = [u_i^T(k), \dots, u_i^T(T_p+k-1)]^T$ 表示每个时刻的状态以及控制量, 那么式(4-39)在模型预测控制下的离散时间状态方程可表示为

$$\mathbf{Z}_i(k) = \mathbf{A}_p \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{B}_p \mathbf{U}_i(k) \quad (4-40)$$

其中, $\mathbf{A}_p = \mathbf{1}_{T_p} \otimes \mathbf{I}_2$

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{W}\mathbf{G}_i^{T_{Ni}-k-1} \mathbf{H}_i & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \mathbf{W}\mathbf{G}_i^{T_{Ni}-k-2} \mathbf{H}_i & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{W}\mathbf{G}_i^{T_{Ni}-k-1} \mathbf{H}_i & \mathbf{W}\mathbf{G}_i^{T_{Ni}-k-2} \mathbf{H}_i & \dots & \mathbf{W}\mathbf{G}_i^{T_{Ni}-k-T_p} \mathbf{H}_i \end{bmatrix}.$$

至此, 经过离散以后多导弹协同制导系统的运动学、动力学、相对运动方程以及用以求解的状态方程构建完毕, 分别由式(4-36)、(4-37)与(4-40)构成, 接下来完成用于分布式优化制导问题对应的性能指标函数建模。

为了便于描述与阅读, 如无特别说明, 在本章后续内容中 $\mathbf{Z}_i(k)$ 和 $\mathbf{U}_i(k)$ 统一用 \mathbf{Z}_i 和 \mathbf{U}_i 表示。

4.3.2 优化制导问题建模

优化制导问题建模通过分析导弹间的协同变量与分布式优化问题之间的关系, 构建用以分布式求解的协同制导问题性能指标, 本节以导弹的终端拦截状态作为协同变量,

导弹 i 的本地优化目标函数可定义为如下问题：

$$\begin{aligned}
 \min \quad & J_i(\mathbf{Z}_i, \mathbf{U}_i, \mathbf{z}_{fi}) \\
 \text{s.t.} \quad & \mathbf{Z}_i(T_p) = \mathbf{z}_{fi} = \mathbf{z}_f + \delta \mathbf{z}_i \\
 & \mathbf{z}_f \in \mathcal{Z} \\
 & \mathbf{U}_i \in \mathcal{U}_i
 \end{aligned} \tag{4-41}$$

其中, \mathbf{z}_f 为协同变量, 包含脱靶量和碰撞角两部分, \mathcal{Z} 为其对应的约束集, $\delta \mathbf{z}_i$ 是导弹 i 相对于一致性值的偏移量, \mathcal{U}_i 是导弹 i 的过载约束集合。 J_i 是需要优化的目标函数, 定义如下：

$$J_i(\mathbf{Z}_i, \mathbf{U}_i, \mathbf{z}_{fi}) = [\mathbf{Z}_i - \mathbf{1}_{T_p} \otimes \mathbf{z}_{fi}]^T \mathbf{Q}_i [\mathbf{Z}_i - \mathbf{1}_{T_p} \otimes \mathbf{z}_{fi}] + \mathbf{U}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{U}_i \tag{4-42}$$

其中, $\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} l_i & 0 \\ 0 & \ell_i \end{bmatrix}$, $\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} r_i & 0 \\ 0 & r_i \end{bmatrix}$, 均为正定矩阵, 且 l_i , ℓ_i 以及 r_i 为正常数, 分别表示优化过程中脱靶量、碰撞角及控制量的占比。

式(4-41)定义了导弹 i 的本地优化目标函数, 然而其包含了无法进行分布式求解的变量, 如 \mathbf{Z}_i 和 \mathbf{U}_i 。因此, 需要对这些变量进行等价变换, 使之满足基于分布式优化求解的条件。将状态方程(4-40)代入上式可得

$$\begin{aligned}
 J_i(\mathbf{U}_i, \mathbf{z}_f) = & [\mathbf{A}_p \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{B}_p \mathbf{U}_i - \mathbf{1}_{T_p} \otimes (\mathbf{z}_f + \delta \mathbf{z}_i)]^T \\
 & \mathbf{Q}_i [\mathbf{A}_p \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{B}_p \mathbf{U}_i - \mathbf{1}_{T_p} \otimes (\mathbf{z}_f + \delta \mathbf{z}_i)] + \mathbf{U}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{U}_i
 \end{aligned} \tag{4-43}$$

式中,

$$\mathbf{z}_f = \mathbf{C}_p [\mathbf{A}_p \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{B}_p \mathbf{U}_i] - \delta \mathbf{z}_i$$

且 $\mathbf{C}_p = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{I}_2]$ 。将 \mathbf{z}_f 的表达式代入式(4-43), 可得：

$$\begin{aligned}
 J_i(\mathbf{U}_i) = & [\mathbf{A}_p \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{B}_p \mathbf{U}_i - \mathbf{1}_{T_p} \otimes (\mathbf{C}_p (\mathbf{A}_p \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{B}_p \mathbf{U}_i))]^T \mathbf{Q}_i \\
 & [\mathbf{A}_p \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{B}_p \mathbf{U}_i - \mathbf{1}_{T_p} \otimes (\mathbf{C}_p (\mathbf{A}_p \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{B}_p \mathbf{U}_i))] + \mathbf{U}_i^T \mathbf{R}_i \mathbf{U}_i
 \end{aligned} \tag{4-44}$$

可定义导弹 i 相对于 \mathbf{z}_f 的目标函数, 即

$$\begin{aligned}
 f_i(\mathbf{z}_f) = & \min_{\mathbf{U}_i} J_i(\mathbf{U}_i) \\
 \text{s.t.} \quad & \mathbf{C}_p [\mathbf{A}_p \mathbf{z}_i(k) + \mathbf{B}_p \mathbf{U}_i] - \delta \mathbf{z}_i = \mathbf{z}_f \\
 & \mathbf{U}_i \in \mathcal{U}_i
 \end{aligned} \tag{4-45}$$

易得 $J_i(\mathbf{U}_i)$ 是关于 \mathbf{U}_i 的凸函数, 而 \mathbf{U}_i 与 \mathbf{z}_f 线性相关, J_i 也是关于 \mathbf{z}_f 的凸函数。因此多导弹协同制导在分布式优化意义下的问题可定义为:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{z}_f) &= \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{z}_f) \\ \text{s.t. } \mathbf{z}_f &\in \mathcal{Z} \end{aligned} \quad (4-46)$$

至此, 多导弹协同制导问题的分布式优化模型定义完毕, 接下来考虑基于该模型的分布式优化制导方法设计及实现。

4.3.3 基于分布式优化的协同制导方法设计

基于分布式优化算法的协同制导问题的基本原理是通过对多导弹系统的分布式优化模型(4-46)进行求解以得到合适的终端状态 \mathbf{z}_f^* , 然后再根据式(4-45)获取当前预测区间内的最优制导律 \mathbf{U}_i^* 。多导弹系统的终端状态 \mathbf{z}_f 包含脱靶量和碰撞角两部分, 其中与脱靶量相关的部分通常设为 0, 而终端碰撞角则由分布式优化模型(4-46)得到。

由于导弹 i 对 \mathbf{z}_f^* 的估计是一个动态过程, 同时目标机动不实时可知, 基于分布式优化的协同制导方法应该是一个重复迭代计算的过程, 即在每一个循环重新计算最优值 \mathbf{z}_f^* 和制导律 \mathbf{U}_i^* 。因此, 本章所提出的协同制导方法可总结为如下算法:

算法 1 基于分布式优化的协同制导方法

初始化: 导弹和目标的初始位置 \mathbf{P}_{i0} 和 \mathbf{P}_{T0} , 收敛步长 $s(0)$ 和 $\tau(0)$, 计算 $\mathbf{Z}_i(0)$, 次梯度 $\mathbf{d}_i(0)$;

循环: 基于分布式优化的协同制导律;

- 1: **while do** 拦截未结束
 - 2: 计算次梯度 $\mathbf{d}_i(k)$, 收敛步长 $s(k)$ 和 $\tau(k)$;
 - 3: 利用分布式优化算法(4-9)更新导弹 i 对终端状态的估计 \mathbf{z}_{fi} ;
 - 4: 利用导弹 i 的目标函数(4-45)计算制导律 \mathbf{U}_i ;
 - 5: 利用 $\mathbf{U}_i(1)$ 更新导弹和目标的位置信息, 判断拦截是否结束。
 - 6: **end while**
-

注 4.2: 注意到对所有的导弹 i , 它们离散后的剩余飞行时间 T_{Ni} 是不一致的, 因此同样需要对离散估计状态 $\mathbf{z}_i(k)$ 进行约束处理, 即当 $k > T_{Ni}$ 时, 令 $\mathbf{z}_i(k) = \mathbf{z}_i(T_{Ni})$ 。同样地, 当导弹接近目标时, 所设置的预测控制区间会出现大于剩余飞行时间的现象, 即 $T_p > T_{Ni} - k$, 此时也要对相应的 \mathbf{B}_p 矩阵进行调整。

式(4-45)不显含 z_f ，它的次梯度求解十分困难，因此需要寻求其它求解方法。下列引理给出了利用式(4-45)的拉格朗日乘子作为次梯度计算的替代方案。

引理 4.9： 给定如式(4-45)所定义的目标函数 $f_i(z_f)$ ，当其为凸函数时，该函数的次梯度可用约束式 $C_p[A_p z_i(k) + B_p U_i] - \delta z_i = z_f$ 对应的拉格朗日乘子 λ_i 代替。

证明. 式(4-45)的拉格朗日方程如下：

$$L(U_i, z_f, \lambda_i) = J_i(U_i) - \lambda_i^T [C_p(A_p z_i(k) + B_p U_i) - \delta z_i - z_f] \quad (4-47)$$

其中， λ_i 是拉格朗日乘子。那么其相应的对偶函数如下：

$$D(z_f, \lambda_i) = \min_{U_i} J_i(U_i) - \lambda_i^T [C_p(A_p z_i(k) + B_p U_i) - \delta z_i - z_f] \quad (4-48)$$

注意到，函数 J_i 以及控制量 U_i 的约束集都是凸的，且约束条件 $C_p(A_p z_i(k) + B_p U_i) - \delta z_i = z_f$ 与 U_i 线性相关，根据拉格朗日方程的强对偶性条件，可将式(4-45)与下式等价

$$f_i(z_f) = \max_{\lambda_i} D(z_f, \lambda_i) \quad (4-49)$$

令 z_f^* 和 z_f^{**} 为式(4-45)或(4-49)的两个可行解， λ_i 为 z_f^* 对应的拉格朗日乘子，那么有

$$\begin{aligned} f_i(z_f^{**}) &= \max_{\lambda_i} \min_{U_i} J_i(U_i) - \lambda_i^T [C_p(A_p z_i(k) + B_p U_i) - \delta z_i - z_f^{**}] \\ &\geq \min_{U_i} J_i(U_i) - (\lambda_i^*)^T [C_p(A_p z_i(k) + B_p U_i) - \delta z_i - z_f^{**}] \\ &= f_i(z_f^*) + (\lambda_i^*)^T \end{aligned} \quad (4-50)$$

根据次梯度的定义(4-1)可知， λ_i^* 是函数 $f_i(z_f)$ 在点 z_f^* 处的次梯度，引理 4.9 得证。 ■

综上分析，可以用式(4-45)对应的拉格朗日乘子代替算法1中次梯度的求解，从而快速得到预期的拦截碰撞角。

4.4 仿真分析

本节分为两部分，一是对所提分布式多步次梯度算法的仿真验证，二是对基于分布式优化拦截方案的仿真分析，各部分介绍如下。

(一) 多步次梯度分布式优化算法算例

为了直观的展示算法的收敛效果,本节采用带约束的分布式次梯度算法(Distributed Subgradient Method, DSM)进行对比仿真,同时为了方便描述,用 MSSM 表示本章所提的多步次梯度优化算法。DSM 算法仅由梯度搜索、一致性优化和投影映射组成,其主要计算步骤如下

$$\mathbf{y}_i(k+1) = \sum_{j=1}^n \mathbf{A}_{ij} \mathbf{x}_j(k) - s(k) \mathbf{d}_i(k),$$

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \pi_{\chi}[\mathbf{y}_i(k+1)]$$

考虑 5 个智能体的分布式优化问题,它们的通信拓扑如图 4.1 所示,其对应的邻接矩阵如下。

$$\mathbf{A} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 9 \end{bmatrix}.$$

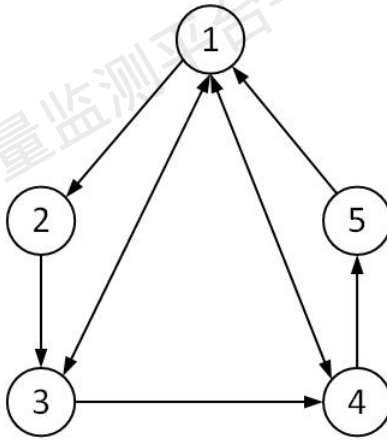


图 4.1 分布式优化算法通信拓扑

智能体 i 的目标函数为

$$f_i(\mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \|\mathbf{P}_i \mathbf{x}_i - \mathbf{Q}_i\|^2 + 0.2 \|\mathbf{x}_i\|_1, \quad \forall i \in \mathcal{V}$$

其中, $\chi = \{\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}_i\| \leq 10\}$, $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ 为一正定矩阵, $\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}$ 。 \mathbf{P}_i 和 \mathbf{Q}_i 的元素通过均值为 0 标准差为 1 高斯分布随机生成, \mathbf{x}_i 的初值在约束集能随机生成。加速参数为 $\tau(k) = \frac{1000}{k+1000}$, 优化步长为 $s(k) = \frac{c}{k+10}$, 其中 $c = \{1, 2, 5\}$ 用以分析不同步长下算法的收敛速度。

仿真结果如图4.2和4.3所示。图4.2显示了两类算法的优化速度,可得MSSM算法的优化收敛速度在较大的初始化步长的情况下收敛速度明显快于DSM算法,反之两者则比较接近。图4.3展示了两类算法的一致性收敛速度,可得MSSM算法的一致性收敛速度明显快于DSM算法,但随着初始步长的增加,收敛速度会略微下降。

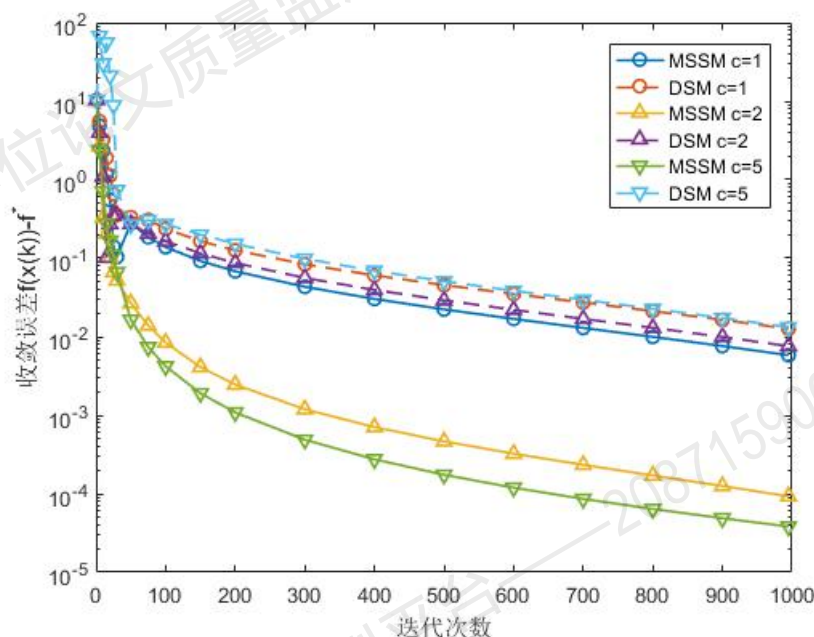


图 4.2 MSSM 和 DSM 算法的优化收敛速度对比

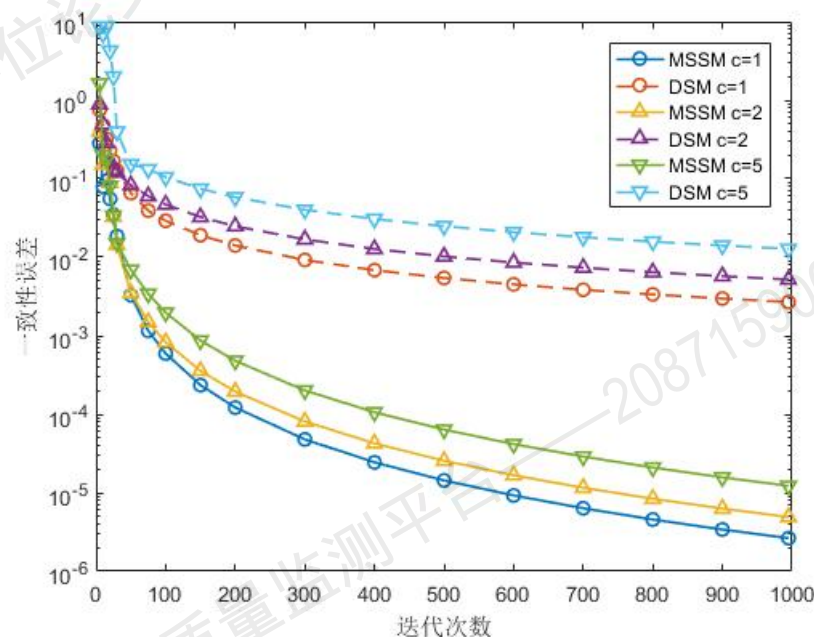


图 4.3 MSSM 和 DSM 算法的一致性收敛速度对比

(二) 基于分布式优化的协同制导方法算例

考虑三枚导弹 M_1 , M_2 和 M_3 对同一机动目标 T 的协同拦截, 各导弹和目标的初始状态如表4.1所示。

表 4.1 导弹和目标的初始状态

-	位置 (km)	速度 (m/s)	飞行路径角 ($^{\circ}$)	最大过载 (g)
M_1	(0,0)	500	0	20
M_2	(0,0)	500	0	20
M_3	(0,0)	500	0	20
T	(0,5)	500	0	15

目标的机动如下:

$$a_T = 10g[\sin(0.1\pi t) - 0.5].$$

导弹间的通信拓扑如图4.4所示, 邻接矩阵中各项权重为 0.5。仿真中各导弹与最优碰撞角之间的期望差分别为 $\delta z_{12} = 10^{\circ}$, $\delta z_{22} = 0^{\circ}$, $\delta z_{32} = -10^{\circ}$, 离散采样时间为 $T_s = 0.1s$, 预测控制区间为 $T_p = 20$ 。优化目标函数中各项参数分别为 $l_i = 1e3$, $\ell_i = 1e5$ 及 $r_i = 1$, 各导弹最优碰撞角的初始估计值均为 0, 碰撞角的约束为 $[-50^{\circ}, 50^{\circ}]$ 。

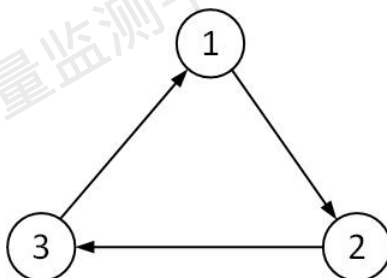


图 4.4 导弹间通信拓扑示意

基于分布式优化的协同制导律仿真结果如图4.5-4.9所示。图4.5-图4.8分别为拦截轨迹、飞行路径角、零控碰撞角以及法向加速度变化情况, 在拦截开始时, 由于各导弹设置的最优碰撞角估计值的初值及初始状态一致, 而此时零控脱靶量变化也保持一致, 因此根据式(4-43)所得的法向加速度无较大差别, 因此在初期每个导弹的各状态变化基本相同。随着最优碰撞角的估计值以及目标的机动变化, 导致式(4-43)中的最优终端碰撞角估计值及零控碰撞角发生了改变, 此时各导弹相应的做出调整, 以满足拦截约束。

图4.9为基于分布式优化制导过程中的最优碰撞角估计值变化过程, 可以看出, 所提的分布式优化算法能使各导弹在较快的时间内收敛到一致性, 从而保持这个角度不

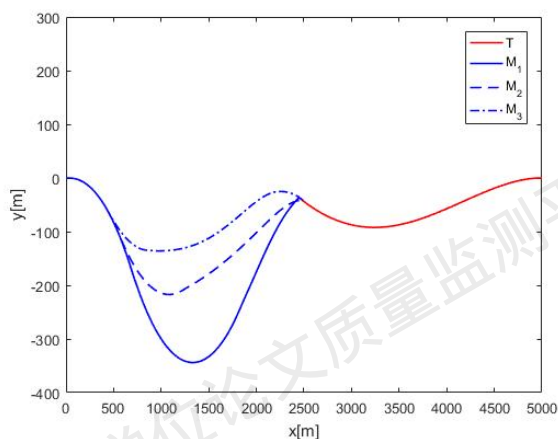


图 4.5 拦截轨迹

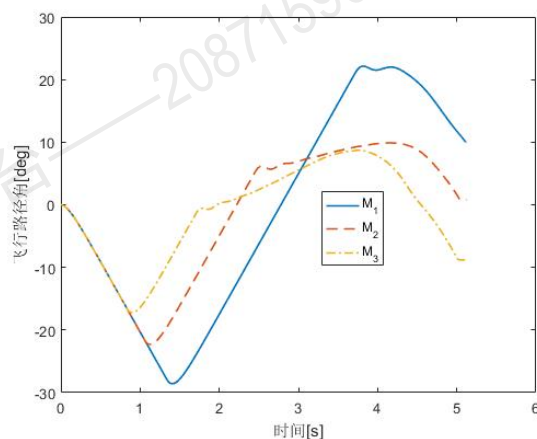


图 4.6 飞行路径角变化

变, 在没有其它因素影响的条件下以及最终的拦截效果所示, 可以认定, 该值为基于分布式优化制导的一个最优值。整个优化制导仿真的终端结果为: 各导弹脱靶量分别为 $\{0.574, 0.725, 0.432\}\text{m}$, 终端碰撞角分别为 18.41° 、 8.794° 和 -0.9277° , 最优碰撞角的估计值为 8.742° 。各导弹的终端拦截结果都能满足各自的拦截约束, 所提的基于分布式优化的协同制导律能在实现对整个系统的拦截碰撞角优化的基础上实现对目标的拦截。

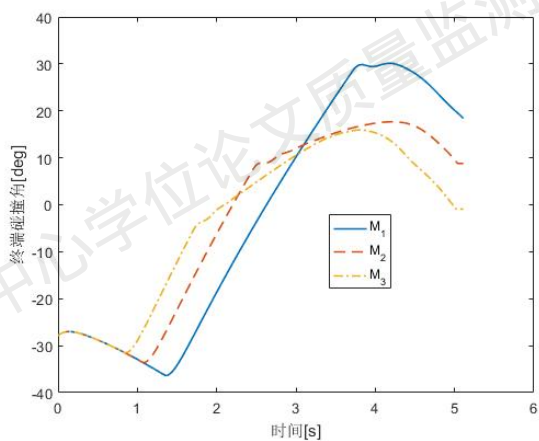


图 4.7 终端碰撞角变化

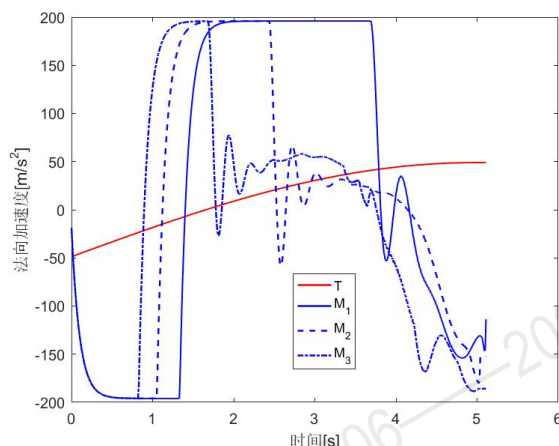


图 4.8 法向加速度变化

4.5 本章小结

本章研究了基于多步次梯度的分布式优化算法以及其在协同制导问题中的应用。首先提出了一个基于多步次梯度的分布式优化算法, 在矩阵直径与半径的基础对该算法进

行了收敛性分析,从理论上验证了该算法具有有限时间一致性同时能渐近收敛至最优值,仿真结果表明所提算法较经典的分布式次梯度优化算法具有更快的一致性收敛速度。然后在分布式优化控制理论的支撑上,结合模型预测控制理论,本章将所提的多步次梯度分布式优化算法应用在协同制导问题中多导弹系统的最优碰撞角估计上,各导弹根据该估计值确定自身的制导律,通过不断反复迭代计算,从而实现对目标的拦截。仿真结果表明,所提基于分布式优化控制的制导律能在保证目标拦截的基础上以期望的最优碰撞角对目标进行拦截。

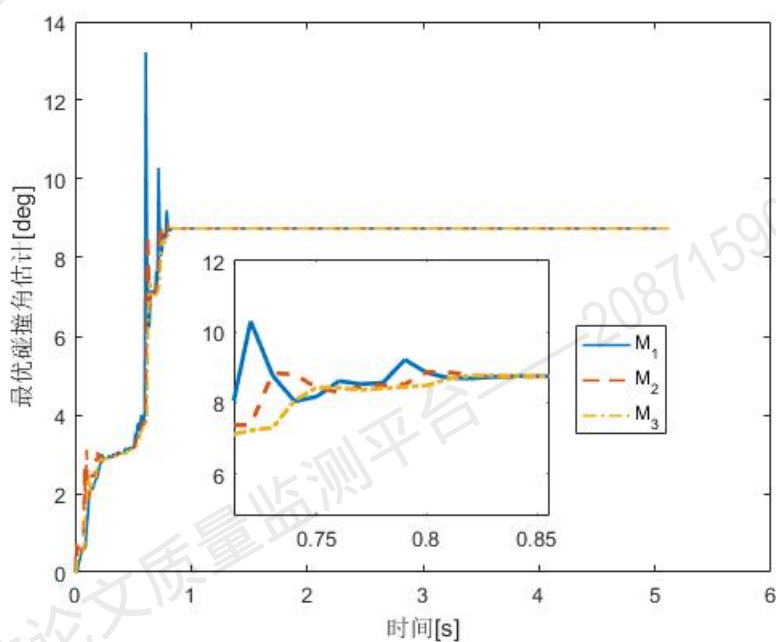


图 4.9 最优碰撞角估计变化

5 有向拓扑下基于轨迹参数化的协同制导问题研究

5.1 引言

本章考虑多导弹对同一机动目标的协同拦截问题，与前两章不同，本章重点考虑拦截过程中导弹间的相对距离约束以及拦截终端的飞行路径角约束等问题，同时在线性动力学的基础上开展制导方法的研究，提出了基于轨迹参数化的协同制导方法。首先，采用一个四阶多项式对满足初始条件和终端条件的拦截轨迹进行参数化，同时将其最高阶项系数作为制导系数进行调整从而获取满足特定需求的拦截轨迹。随后，为了保证所有导弹的参数化轨迹在拦截过程中不会发生碰撞，提出了最小距离保持的避碰策略。最后，根据导弹自身的动力学约束，提出了实现参数化轨迹平滑跟踪的协同拦截制导方法。

5.2 参数化制导问题建模

5.2.1 参数化制导简介

本章主要考虑如图5.1所示的多导弹拦截同一机动目标的制导律设计，其中 $O_I X_I Y_I$ 是参考惯性坐标系。速度、法向加速度以及飞行路径角分别表示为 v 、 a 和 θ ，下标 i 和 T 分别表示该变量属于第 i 个导弹和目标。 r_i 为导弹 i 与目标的距离， q_i 和 ε_i 分别为其弹目视线角和前置角。导弹和目标具有相同的运动模型，导弹 i 的运动模型如下。

$$\dot{x}_i = v_i \cos \theta_i \quad (5-1a)$$

$$\dot{y}_i = v_i \sin \theta_i \quad (5-1b)$$

$$\dot{\theta}_i = \frac{a_i}{v_i} \quad (5-1c)$$

参数化制导是研究上述变量的数学多项式建模，及在给定初始条件、终端条件和相关约束的基础上，求解给定多项式的系数，从而获取拦截制导律的问题，因此又被为多项式制导。与传统制导律相比，大多数的参数化制导律不需要对导弹和目标的运动模型进行线性化，同时能满足不同的约束需求，具有十分重要的研究意义。

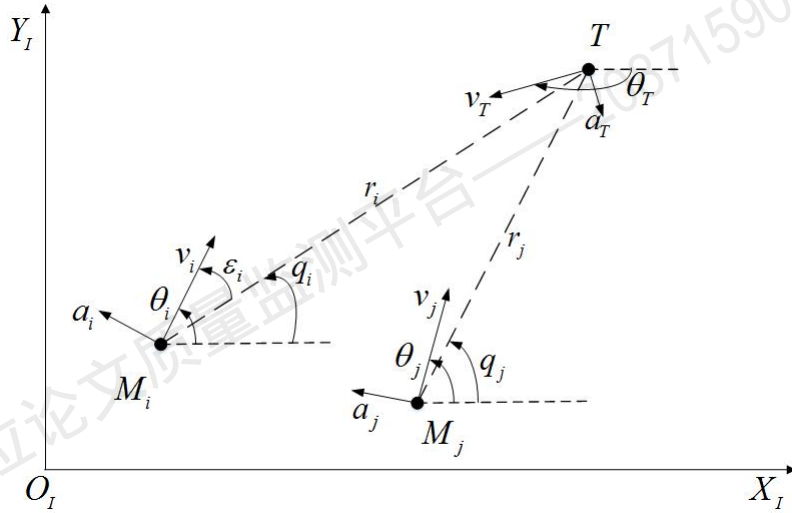


图 5.1 平面内相对运动示意图

参数化制导中变量的多项式建模基本形式如下。

$$y = f(x) = c_n^n x^n + \cdots + c_1 x + c_0 \quad (5-2)$$

其中, y 是需要进行参数化的变量, 可以是导弹的过载、视线角及与目标的相对距离等; x 是其对应的自变量, 通常采用时间 t 、剩余飞行时间及导弹的 x 坐标代替; $\{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$ 是多项式的系数, n 为多项式的阶数, 通常 3-5 阶的多项式就能满足大多数的约束条件。参数化制导的主要目标即依据约束条件反求系数 $\{c_0, c_1, \cdots, c_n\}$, 然后再根据相关条件 (如式(5-1)) 从参数化后的变量 y 中反求过载。

依据被参数化变量的类型, 可以将参数化制导问题分为不同的类。根据参数化变量与弹目相对运动状态的关系, 可以将参数化制导分为两类, 一类是以导弹自身的变量为建模对象, 如导弹 i 的位置坐标和过载等, 这类制导律形式简单, 易于实现, 但容易受到目标机动的影响, 因此通常需采用剩余飞行时间作为自变量。一类以弹目相对运动状态作为参数化变量, 如导弹的相对距离、视线角和前置角等, 这类制导律应用较广, 但约束条件复杂, 且难以描述导弹间的协同关系。因此, 为了更好地对导弹间的避碰关系进行描述, 本章选用导弹的位置坐标作为协同拦截制导问题研究中参数化变量, 又称轨迹参数化, 其主要建模过程将在下一节中介绍。

在整个拦截过程中导弹和目标的速度有如下假设。

假设 5.1: 在整个拦截过程中, 导弹和目标速度保持不变。

基于**假设 5.1**，导弹 i 的碰撞时间可以通过下式近似估计：

$$t_{fi} = \frac{-r_i}{v_{r_i}} \quad (5-3)$$

其中， $v_{r_i} = -[v_i \cos(\theta_i - q_i) + v_T \cos(\theta_T + q_i)]$ 是导弹 i 沿着视线方向的接近速度。

5.2.2 轨迹参数化

经典的轨迹参数化包含两部分：一是对 x 坐标的参数化，二是对 y 坐标的参数化，它们合在一起即是目标的完整轨迹，能满足绝大多数的制导拦截要求。如前所述，其制导性能受参数化后多项式阶数制约，文献 [100] 中指出要满足式(5-1)的导弹运动模型，其参数化多项式最小阶数为三阶，更高阶的多项式能为导弹提供更多的选择以满足规避、距离保持以及过载等约束。导弹 i 的轨迹可分别对 x_i 和 y_i 进行多项式参数化得到，其中 x_i 表示为以时间 t_i 为自变量三阶多项式， y_i 表示为以 x_i 为自变量的四阶多项式表示，即

$$x_i(t_i) = b_{i3}t_i^3 + b_{i2}t_i^2 + b_{i1}t_i + b_{i0} \quad (5-4a)$$

$$y_i(x_i) = c_{i4}x_i^4 + c_{i3}x_i^3 + c_{i2}x_i^2 + c_{i1}x_i + c_{i0} \quad (5-4b)$$

给定导弹 i 的初始时间 t_{i0} 和终端时间 t_{if} 以及动力学方程(5-1)，参数化变量 x_i 和 y_i 的边界条件如下：

$$x_i(t_{i0}) = x_{i0}, \quad \dot{x}_{i0} = v_{i0} \cos \theta_{i0} \quad (5-5a)$$

$$x_i(t_{if}) = x_{if}, \quad \dot{x}_{if} = v_{if} \cos \theta_{if} \quad (5-5b)$$

$$y_i(x_{i0}) = y_{i0}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_{i0}} = \tan \theta_{i0} \quad (5-6a)$$

$$y_i(x_{if}) = y_{if}, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_{if}} = \tan \theta_{if} \quad (5-6b)$$

那么，参数化后的多项式(5-4)的部分系数可通过求解边界条件 (5-5)和(5-6)得到，即

$$\begin{bmatrix} b_{i0} & b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} \end{bmatrix}^T = \mathbf{B}_i^{-1} \mathbf{X}_{iB} \quad (5-7)$$

B_i 和 X_{iB} 满足

$$B_i = \begin{bmatrix} 1 & t_{i0} & t_{i0}^2 & t_{i0}^3 \\ 0 & 1 & 2t_{i0} & 3t_{i0}^2 \\ 1 & t_{if} & t_{if}^2 & t_{if}^3 \\ 0 & 1 & 2t_{if} & 3t_{if}^2 \end{bmatrix}, X_{iB} = \begin{bmatrix} x_{i0} \\ V_{i0} \cos \theta_{i0} \\ x_{if} \\ V_{if} \cos \theta_{if} \end{bmatrix}. \quad (5-8)$$

以及

$$\begin{bmatrix} c_{i0} & c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} \end{bmatrix}^T = C_{i1}^{-1}(\mathbf{Y}_{iB} - C_{i2}c_{i4}) \quad (5-9)$$

且

$$C_{i1} = \begin{bmatrix} 1 & x_{i0} & x_{i0}^2 & x_{i0}^3 \\ 0 & 1 & 2x_{i0} & 3x_{i0}^2 \\ 1 & x_{if} & x_{if}^2 & x_{if}^3 \\ 0 & 1 & 2x_{if} & 3x_{if}^2 \end{bmatrix} \quad (5-10)$$

$$C_{i2} = \begin{bmatrix} x_{i0}^4 \\ 4x_{i0}^3 \\ x_{if}^4 \\ 4x_{if}^3 \end{bmatrix}, \mathbf{Y}_{iB} = \begin{bmatrix} y_{i0} \\ \tan \theta_{i0} \\ y_{if} \\ \tan \theta_{if} \end{bmatrix}. \quad (5-11)$$

那么, 参数化轨迹(5-4)可重写为:

$$x_i(t_i) = \begin{bmatrix} 1 & t_i & t_i^2 & t_i^3 \end{bmatrix} B_i^{-1} X_{iB} \quad (5-12a)$$

$$y_i(x_i) = f_{i1}c_{i4} + f_{i2} \quad (5-12b)$$

其中, $f_{i1} = x_i^4 - \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \end{bmatrix} C_{i1}^{-1} C_{i2}$, $f_{i2} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & x_i^2 & x_i^3 \end{bmatrix} C_{i1}^{-1} \mathbf{Y}_{iB}$ 。

终端条件 (x_{if}, y_{if}) 可用下式估计:

$$x_{if} = x_T + v_T \cos \theta_T t_{if} \quad (5-13a)$$

$$y_{if} = y_T + v_T \sin \theta_T t_{if} \quad (5-13b)$$

注意到, 在碰撞时间和边界条件给定的情况下, x_i 的值可唯一确定, 且 y_i 是系数 c_{i4} 的函数, 这意味着通过求解 y_i 的最高阶系数 c_{i4} 可以决定最终的拦截轨迹, 其对应的制导律也可得到。给定导弹和目标的动力学模型 (5-1) 以及轨迹参数化多项式(5-12)的条件下, 通过一系列的代数变换可得导弹 i 的过载 a_i 。

$$a_i = \frac{\dot{x}_i^3}{v_i} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\dot{x}_i^3}{v_i} (\ddot{f}_{i1}c_{i4} + \ddot{f}_{i2}) \quad (5-14)$$

5.2.3 参数化制导问题建模

如前所述, 多导弹协同制导问题可通过对每个导弹的轨迹进行多项式参数化解决, 同时通过调整其对应的最高阶系数 c_{i4} 以获取制导律。此外, 参数化轨迹可用通过合理选择最高项系数使其满足给定物理约束, 如最短路径约束和最小时间约束等。令 $J_i(c_{i4})$ 表示导弹 i 中与物理约束相关的性能指标。那么, 在动力学模型 (5-1), 边界条件 (5-5) 和 (5-6), 以及最短相对距离给定的条件下, 参数化轨迹下的协同制导问题可建模为如下带约束的优化问题:

$$\min J_i(c_{i4}) \quad (5-15a)$$

$$s.t. \quad \mathbf{P}_{i0}, \theta_{i0}, \mathbf{P}_{if}, \theta_{if} \quad (5-15b)$$

$$r_{ij} \geq r_s, \forall j \in \mathcal{N}_i \quad (5-15c)$$

其中, $\mathbf{P}_i = [x_i \ y_i]^T$ 表示导弹 i 的位置, $r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ 是导弹 i 和 j 之间的距离, 且 r_s 是需求的最短距离, 即安全距离。

5.3 基于轨迹参数化的协同拦截方法设计

本节针对上述所提的优化问题 (5-15), 研究其在相对距离和飞行路径角约束下的协同参数化制导律。本节首先考虑了无相对距离约束下最优系数以及制导律求解问题, 然后将该系数映射到由相对距离和飞行路径角约束的可行域中以获取在给定物理约束下的制导律。各部分介绍如下。

5.3.1 标准参数化制导律

对于导弹 i 与固定目标 T , 其标准参数化轨迹如图 5.2 所示。其中, 参考轨迹是导弹 i 目标之间的直线 (视线角方向), 在不考虑过载约束以及导弹速度恒定的情况下, 该轨迹能满足最小碰撞时间以及最小控制能量的需求, 可以作为参数化制导法的一条标准参考轨迹。图中所示的标准参数化轨迹为导弹 i 在考虑实际物理约束下得到的参数化轨迹。在对移动目标进行拦截时, 标准参考轨迹为每一采样时刻导弹与目标之间的直线,

由此生成这一采样时间内的标准参数化轨迹，不同采样时间内的标准参数化轨迹组合即是最终的参数化轨迹，其对应的制导律即是标准参数化制导律。

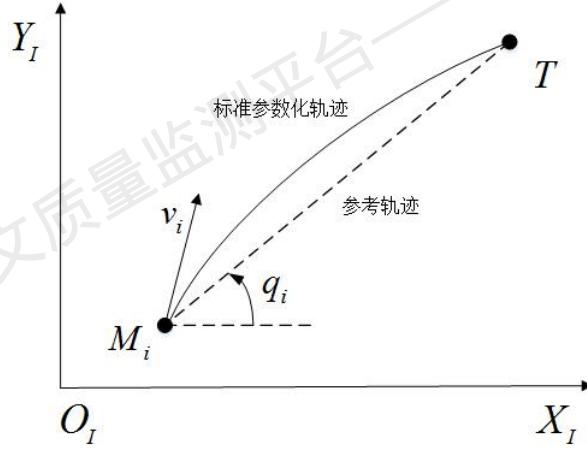


图 5.2 标准参数化轨迹示意

如前所述，为使导弹 i 的参数化轨迹尽可能满足实际需求，选择导弹 i 与估计碰撞点之间的直线作为其在 t 时刻标准参考轨迹，其性能指标定义如下：

$$J_i(c_{i4}) = \int_t^{t_{if}} [(x_i - x_{ie})^2 + (y_i - y_{ie})^2] dt \quad (5-16)$$

且 $x_{ie} = x_i$,

$$y_{ie} = \frac{y_{if} - y_{i0}}{x_{if} - x_{i0}}(x_i - x_{i0}) + (y_i - y_{i0}). \quad (5-17)$$

其中， $P_{ie}(t) = (x_{ie}, y_{ie})$ 是参考轨迹上一点， (x_{i0}, y_{i0}) 是导弹 i 在初始时刻的位置，为了保证解的连续性，通常用上一位置信息代替。此外，性能指标(5-16)描述了参数化轨迹与标准参考轨迹间的偏差，其最小值对应的系数可作为标准参数化制导律的控制系数。性能指标(5-16)的最优系数 c_{i4} 求解可用如下引理概括。

引理 5.1： 对于由 N 个导弹和一个目标组成的协同制导系统，其动力学和性能指标分别由式 (5-1)和(5-16)定义，导弹的参数化轨迹由式 (5-12)定义。那么在给定边界条件下，导弹 i 的标准参数化制导轨迹可由如下最优系数生成，即

$$c_{i4}^* = \frac{\int_t^{t_{if}} f_{i1}(f_{i2} - y_{ie})dt}{\int_t^{t_{if}} f_{i1}^2 dt} \quad (5-18)$$

证明. 由式 (5-12) 和 $x_{ie} = x_i$ 可得

$$\begin{aligned} J_i(c_{i4}) &= \int_t^{t_{if}} (f_{i1}c_{i4} + f_{i2} - y_{ie})^2 dt \\ &= \left[\int_t^{t_{if}} f_{i1}^2 dt \right] c_{i4}^2 + \left[\int_t^{t_{if}} 2f_{i1}(f_{i2} - y_{ie}) dt \right] c_{i4} \\ &\quad + \int_t^{t_{if}} (f_{i2} - y_{ie})^2 dt \end{aligned} \quad (5-19)$$

显然 f_{i1} , f_{i2} 和 y_{ie} 都是时间 t 的多项式, 且与系数 c_{i4} 无关。因此, $J_i(c_{i4})$ 是与系数 c_{i4} 相关的一元二次多项式, 且在由式(5-18)所确定的系数 c_{i4}^* 达到最优值, 引理5.1得证。 ■

引理5.1 给出导弹 i 在标准参数化轨迹下的最优制导系数 c_{i4}^* , 用其替换式(5-14)中的系数能得到标准参数化制导律。通过该制导律得到的拦截轨迹接近于给定的标准参考轨迹, 与平行接近法得到的制导轨迹相近。

注 5.1: 最优系数(5-18)是终端条件 (x_{if}, y_{if}) 的函数, 这意味了更为精确的碰撞时间和碰撞点估计对最终拦截效能至关重要。在碰撞时间估计方面, 文献 [101] 给出了较为精确的计算方法; 在碰撞点的精确估计上, 文献 [102] 进行了相关研究。此外, 本章给出的估计方法(5-3)和(5-13)的估计误差会随着导弹接近目逐渐减小, 以保证在拦截末段有更精确的估计信息。

5.3.2 考虑避碰的参数化制导律

本节通过在性能指标中增加导弹间避碰规则对上节所提的标准参数化轨迹进行修改以完成制导律设计, 该规则能保证在拦截过程中导弹间的距离始终大于某个值。另外, 对于多个导弹拦截同一目标的场景, 由式(5-14)和 (5-18) 所得的标准参数化制导律将会使所有导弹在拦截过程聚集, 即导弹间的距离有一上限约束。此外, 为了保证在拦截过程的安全性和有效性, 需考虑导弹间的最短距离约束。为此, 本节提出了一个导弹间相对距离约束规则, 通过该规则产生满足避碰要求的约束集, 最终的最优系数即式(5-18)在该约束集上的投影, 通过该系数生成的参数化轨迹能满足能避免在拦截结束前导弹间的碰撞。

令 t_e 为终端拦截时间, 即导弹组结束避碰保持至拦截结束的时间, 在该时间内导弹组距离目标较近, 此时需重点考虑对目标的有效拦截。那么在时间 $t \in [t_0, t_{if} - t_e]$ 内,

对任一导弹 i 以及所有的邻居弹 $j \in \mathcal{N}_i$, 应保持如下的相对距离约束规则:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq r_s^2 \quad (5-20)$$

将式 (5-12) 代入 (5-20), 对于时间 $t \in [t, t + T_s] \in [t_0, t_{i_f} - t_e]$ 内, 导弹 i 和 j 间最短距离准则可重写如下:

$$g_{ij}(c_{i4}, c_{j4}) = (f_{i1}c_{i4} - f_{j1}c_{j4} + f_{i2} - f_{j2})^2 + r_{x_{ij}}^2 - r_s^2 \geq 0 \quad (5-21)$$

其中, $r_{x_{ij}} = |x_i - x_j|$, T_s 是采样时间。

$g_{ij}(c_{i4}, c_{j4})$ 是系数 c_{i4} 和 c_{j4} 的二阶多项式, 即导弹 i 和 j 间的最短距离可通过搜索算法对 c_{i4} 及 c_{j4} 寻优得到, 如 Newton-Raphson 法, 序列二次规划 (Sequential Quadratic Programming, SQP) 等。令 $\mathbf{c}_4 = (c_{14}, \dots, c_{i4}, \dots, c_{j4}, \dots, c_{n4})^T$ 表示所有导弹的最高阶系数集, Ω_{ij} 表示由式 5-21 限定的 c_4 约束集。那么对于所有导弹, 其系数 c_4 应满足以下约束:

$$\Omega \triangleq \{\mathbf{c}_4 : \mathbf{c}_4 \in \bigcap_{i=1, j=1, i \neq j}^N \Omega_{ij}\} \quad (5-22)$$

带避碰规则的增强参数化制导律可概括为以下定理。

定理 5.1: 对于由 N 个导弹和一个目标组成的协同制导系统, 其动力学和性能指标分别定义为式 (5-1) 和 (5-16), 导弹的参数化轨迹定义为式 (5-12)。在给定边界条件及相对距离约束下, 所有导弹的近最优避碰轨迹由式 (5-18) 所得的最优系数 \mathbf{c}_4^* 在约束集 Ω 上的投影产生, 即

$$\mathbf{c}_4^{**} \triangleq \{\mathbf{c}_4^* \in \Omega : \|\mathbf{c}_4^{**} - \mathbf{c}_4^*\| \leq \|\mathbf{c}_4 - \mathbf{c}_4^*\|, \forall \mathbf{c}_4 \in \Omega\} \quad (5-23)$$

那么, 导弹 i 的最优系数 \mathbf{c}_{i4}^{**} 即是 \mathbf{c}_4^{**} 的第 i 个元素, 其对应的参数化制导律可由式 (5-14) 得到。

证明. 根据性能指标 (5-16) 定义整个导弹组的系统性能指标

$$J(\mathbf{c}_4) = \sum_{i=1}^N J_i(\mathbf{c}_{i4}) \quad (5-24)$$

$J_i(c_{i4})$ 是系数 c_{i4} 的二次多项式且与其余系数 $c_{j4}, j \neq i$ 无关。那么 $J(\mathbf{c}_4)$ 也是系数集 \mathbf{c}_4 的二次多项式, 且在 $J_i(c_{i4})$ 的最优值点达到最优, 也即 \mathbf{c}_4^* 是 $J(\mathbf{c}_4)$ 标准参数化制导下的最优系数。

随后, 将式(5-21)重写为变量 \mathbf{c}_4 的函数, 即

$$g_{ij}(\mathbf{c}_4) = \mathbf{c}_4^T \mathbf{G}_{ij} \mathbf{c}_4 + 2\mathbf{H}_{ij}^T \mathbf{c}_4 + (f_{i2} - f_{j2})^2 + r_{x_{ij}}^2 - r_s^2 \geq 0 \quad (5-25)$$

其中,

$$(\mathbf{G}_{ij})_{N \times N} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & f_{i1}^2 & \cdots & f_{i1}f_{j1} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & f_{i1}f_{j1} & \cdots & f_{j1}^2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{H}_{ij})_{N \times 1}$ 是一个列向量, 且其第 i 和 j 个元素分别为 $(f_{i2} - f_{j2})f_{i1}$ 及 $(f_{i2} - f_{j2})f_{j1}$, 其余元素全为 0。显然, \mathbf{G}_{ij} 是一个半正定矩阵。

另外, $g_{ij}(\mathbf{c}_4)$ 是与系数 \mathbf{c}_4 相关的开口向上的抛物线簇。只要 \mathbf{G}_{ij} 是半正定矩阵, 系数 \mathbf{c}_4 就存在一个可行解, 约束集 Ω_{ij} 也存在一个可行解。因此, 可将整个系统的不等式约束集 Ω 定义如下:

$$G(\mathbf{c}_4) = \bigcap_{i=1, j=1, i \neq j}^N \mathbf{c}_4^T \mathbf{G}_{ij} \mathbf{c}_4 + 2\mathbf{H}_{ij}^T \mathbf{c}_4 + (f_{i2} - f_{j2})^2 + r_{x_{ij}}^2 - r_s^2 \geq 0 \quad (5-26)$$

由于 $G(\mathbf{c}_4)$ 中每一个矩阵 \mathbf{G}_{ij} 都是半正定矩阵, 约束集 Ω 始终存在。另外, 因为 $g_{ij}(\mathbf{c}_4)$ 和 $J(\mathbf{c}_4)$ 都是系数 \mathbf{c}_4 的二次多项式, \mathbf{c}_4^* 在集合 Ω 上的映射会使性能指标 $J(\mathbf{c}_4)$ 达到带相对距离约束时的最优值。对于导弹 i , 其最优解存在于该映射内, 定理5.1得证。 ■

导弹间相对距离约束在拦截过程中具有实际的物理意义, 能保证导弹间无碰撞同时又能达到预期的拦截效果。当导弹组在目标附近时, 由最优系数(5-18)所得的制导律能有效拦截目标。因此, 本章所提的协同参数化制导律分为两个阶段: 1) 第一阶段, 通过增强制导律导引导弹组在无碰的情况下接近目标; 2) 通过标准参数化导引律完成对目标的拦截。所提的制导方案可概括为如下算法。

注 5.2: 本节所提的参数化协同制导律本质上是集中式算法, 其对 $G(\mathbf{c}_4)$ 的最优系数 \mathbf{c}_4^{**} 的搜索需要所有导弹的 b_i , f_{i1} 以及 f_{i2} 信息, 通过对这些全局信息的分布式估计实现完全分布式, 然而在实际中难以实现。此外, 在特定类型的导弹通信拓扑间可以达到本章所提算法的分布式化, 如领航-跟随者通信拓扑以及链式通信拓扑, 如图5.3所示。在这些拓扑中, 每个导弹仅需自身及其相邻一个导弹的信息。

算法 2 协同参数化制导方案

初始化: 初始化导弹和目标的初始位置 P_{i_0} 和 P_{T_0} ;

循环: 协同制导律;

- 1: **while** $r_i > 0$ and $\dot{r}_i < 0$ **do**
- 2: 计算 t_{go_i} 和终端条件 (x_{i_f}, y_{i_f}) ;
- 3: 计算系数 b_i , f_{i1} , f_{i2} 和最优系数 c_{i4}^* ;
- 4: **if** $t_{go_i} \geq t_e$ **then**
- 5: 系数交互, 计算协同参数化系数 c_4^{**} ;
- 6: 计算 c_4^{**} 下的协同制导指令 a_i^{**} ;
- 7: **else**
- 8: 计算 c_{i4}^* 下的协同制导指令 a_i^* ;
- 9: **end if**
- 10: 若求解失败, 采用上一时刻的协同制导指令;
- 11: 更新导弹 i 和目标的运动信息。
- 12: 更新位置信息 P_{i_0} 和 P_{T_0} 。
- 13: **end while**

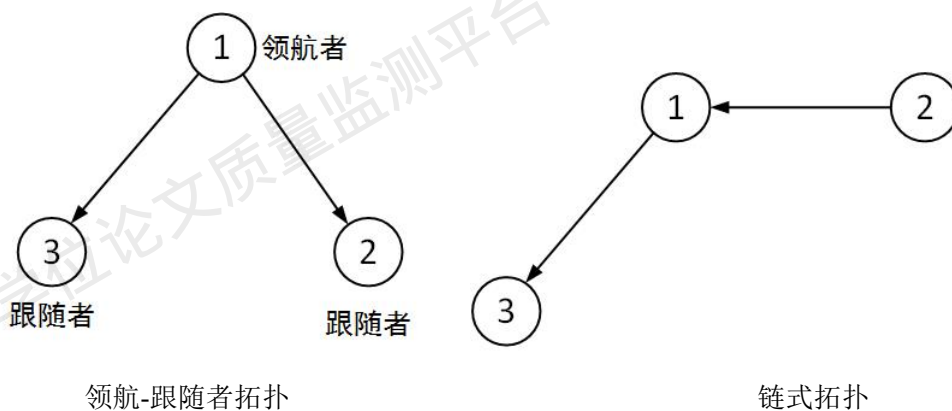


图 5.3 通信拓扑示意

注 5.3: 在导弹 i 的参数化轨迹(5-4)中, 其将终端飞行路径角约束应设为接近终端视线角 (即, 预估碰撞点(5-13)相对于导弹当前位置的视线角) 的值, 以得到更为平滑的轨迹和更小的过载。同样地, 可以在**算法 2**中增加飞行路径角约束同时对协同参数 c_4^{**}

进行寻优。对于导弹 i ，带飞行路径角约束的参数化轨迹性能指标定义如下

$$g'_{ij}(c_{i4}, c_{j4}) = \min_{(c_{i4}, c_{j4})} l_i g_{ij}(c_{i4}, c_{j4}) + \ell_i [(\arctan(\dot{f}_{i1}c_{i4} + \dot{f}_{i2}) - \arctan(\dot{f}_{j1}c_{j4} + \dot{f}_{j2}) - \Delta\theta_{ij})^2] \geq 0 \quad (5-27)$$

其中， $g_{ij}(c_{i4}, c_{j4})$ 为式(5-21)， l_i 和 ℓ_i 是正常数， $\Delta\theta_{ij} = q_i - q_j$ 是应满足的相对飞行路径角约束。基于上式，能够得到同时满足相对距离和飞行路径角约束的协同制导律。

5.3.3 最优参数搜索方法

如前节所述，带避碰规则的增强协同参数化制导律需求对最优协同参数化系数 \mathbf{c}_4^{**} 求解，其为标准参数化制导律的最优系数 \mathbf{c}_4^* 在约束集 Ω 上的投影，然而通过常规的数学方法难以直接求解 Ω 的范围，因此通常考虑用最优参数搜索算法直接求解 \mathbf{c}_4^{**} 。

常规的最优参数搜索算法分为以下几类：1) 传统搜索算法，通过目标函数的梯度给定搜索的方向和大小，包含梯度法、牛顿法以及序列二次规划等；2) 启发式算法，通过模拟生物的进化过程或群体的社会行为实现优化计算，包含遗传算法（Genetic Algorithm, GA）、差分进化算法（Differential Evolution, DE）、蚁群算法（Ant Colony Optimization, ACO）和粒子群算法（Particle Swarm Optimization, PSO）等；3) 神经网络算法，以人工神经网络（Artificial Neural Network, ANN）为主的一类算法，最常用的算法是 BP 网络，即误差反向传播（Back Propagation, BP）学习算法。本节针对上述部分搜索算法进行简要介绍，同时结合避碰参数化制导律进行算法设计。

5.3.3.1 牛顿法

牛顿法本质上是一类迭代方法，主要用于求解方程的根和最优参数搜索中。迭代法是参数寻优问题中一种常用的数值方法，可用于求解非线性规划、最优化等问题，其基本思想是：对于给定的寻优问题和初始，按照一定规律给出一系列的寻优值数列，期望该数列的极限是给定问题的一个可行解。牛顿法即是将给定问题的进行一阶或二阶泰勒展开，通过近似方程给定迭代寻优规律的方法，其主要原理介绍如下。

1. 求解方程的根

牛顿法可用于求解复杂方程式的根。当给定方程 $y = f(x)$ 求根公式较为复杂或者不存在，可以使用牛顿法进行迭代求解。设 x^* 为 $y = f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的一个根，那

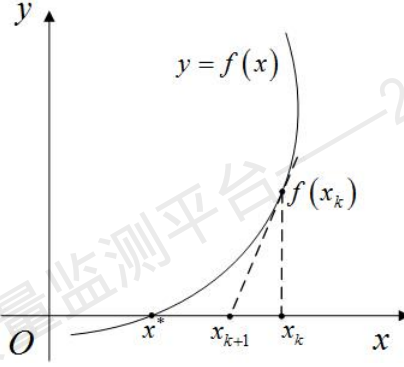


图 5.4 牛顿法示意图

么使用牛顿法对其进行搜索应满足条件：1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上处处可导；2) $\forall x \in [a, b]$ 有 $\dot{f}(x) \neq 0$ 。

牛顿法的迭代公式由 $f(x)$ 在 x_k 处的一阶泰勒展开得到，即

$$f(x) \approx f(x_k) + \dot{f}(x_k)(x - x_k)$$

其中， x_k 表示第 k 步迭代。方程的根满足 $f(x) = 0$ ，代入上式可近似得 $x = x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dot{f}(x_k)}$ 。由此所得的 x_{k+1} 并不一定是方程的根，但与 x_k 相比， $f(x_{k+1})$ 更趋近于 0，如图 5.4 所示。由此可得基于牛顿法对方程求根的迭代公式为：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\dot{f}(x_k)} \quad (5-28)$$

通过迭代计算，式(5-28)会在 $f(x^*) = 0$ 处收敛。其收敛性可由如下引理概括。

引理 5.2: 设 x^* 为 $y = f(x)$ 的一个根，若 $f(x)$ 在 x^* 的邻域内二阶连续可导且满足 $\dot{f}(x) \neq 0$ ，那么存在一个 x^* 的邻域，使得该邻域内的所有初值 x_0 ，牛顿法所产生的迭代数列收敛到 x^* 。

引理 5.2 表明用牛顿法求解方程的根的收敛性对初值 x_0 的要求较高，即要求初值要在方程根 x^* 的特定领域内，否则牛顿法将会收敛很慢，甚至发散。为了消除初值对牛顿法可能产生的发散性影响，可以在迭代过程中增加一项单调性约束项，即 $|f(x_{k+1})| \leq |f(x_k)|$ ，满足这种单调性的牛顿法成为牛顿下山法。其迭代公式为：

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{\dot{f}(x_k)} \quad (5-29)$$

其中， $0 < \lambda \leq 1$ 为下山因子。当所选的 x_k 不满足单调性约束时，选择下山因子从 $\lambda = 1$ 开始，逐次减半，直至 $|f(x_{k+1})| \leq |f(x_k)|$ 成立。

牛顿下山法在保证了解牛顿法的快速收敛的同时利用下山法保证了函数值的稳定下降，是一类较好的方程的根求解方法。

2. 参数寻优

除了应用于方程求根，牛顿法还能用于求解优化问题的最优值，与求根问题不同，牛顿法用于参数寻优中主要考虑由函数的二阶泰勒近似得到。对于一个二阶可微函数 $f(x)$ ，其在 x_k 出的二阶泰勒近似为

$$f(x) \approx f(x_k) + \nabla f(x_k)^T(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T \nabla^2 f(x_k)(x - x_k)$$

其中， $\nabla f(x_k)$ 和 $\nabla^2 f(x_k)$ 为函数 $f(x)$ 在 x_k 处的梯度和黑塞（Hesse）矩阵。若 x_k 在函数 $f(x)$ 的极值附近，则存在关系 $f(x) - f(x_k) \approx 0$ ，将其代入上式并忽略高阶项可得

$$\nabla f(x_k)^T(x - x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^T \nabla^2 f(x_k)(x - x_k) = 0$$

当 $\nabla^2 f(x_k)$ 非奇异时，与基于牛顿法的方程求根相似，可以基于牛顿法的优化参数寻优迭代公式，即

$$x_{k+1} = x_k - \nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k) \quad (5-30)$$

上式即是经典的牛顿迭代法，其收敛性可用如下引理概括。

引理 5.3: 设 x^* 为函数 $f(x)$ 的一个极值，若 $f(x)$ 在 x^* 的邻域内二阶连续可微，且存在一个 x^* 的邻域 $\mathcal{X}_\delta(x^*)$ 及常数 C 使得下式成立

$$\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \leq C\|x - y\|, \quad \forall x, y \in \mathcal{X}_\delta(x^*)$$

若 $f(x)$ 在 x^* 的黑塞矩阵正定，那么对于 x^* 邻域内的初值 x_0 ，牛顿法所产生的迭代数列收敛到 x^* 。

与基于牛顿法的方程求根类似，基于牛顿法的参数寻优收敛速度非常快，但也存在初值选取困难，较差的初始条件可能达不到收敛的结果。此外，当目标函数较为复杂或 x 的维度较高时，求解黑塞矩阵及其逆矩阵也十分困难。因此需要对牛顿法进行修正，即修正搜索方向，常规的修正牛顿法包含变尺度法、带线搜索的修正牛顿法以及非精确牛顿法等，读者可自行查阅。

如前所述，基于牛顿法的最优参数搜索算法包含两类：1) 用于求解方程的根的牛顿法和 2) 用于参数寻优的牛顿法。在本章中，最优参数 \mathbf{c}_4^{**} 的搜索可分别用这两类方

法实现。对于求解方程的根的牛顿法,若每个导弹 i 仅考虑其一个邻居的约束,那么其带避碰的参数化制导问题可以转化为对式(5-25)或(5-27)的根的搜索,即可使用牛顿法对其进行求解。对于参数寻优的牛顿法,可以直接对带避碰的参数化制导问题(5-26)进行搜索得到。

5.3.3.2 粒子群算法

粒子群算法是一类典型的群体智能算法,与其它群体智能算法相似,该算法主要通过模拟鸟群觅食过程中的迁徙和群聚行为来实现对特定目标的优化,是一类基于群体智能的全局随机搜索算法。粒子群算法的建模基于对鸟群捕食行为的研究:假设一群鸟在区域内随机搜寻唯一食物,所有鸟无法获知食物的确切位置,但知道自身的位置和距离食物的远近,那么最直接和有效的方式就是搜索距离食物最近鸟的附近区域。基于鸟群的这种觅食行为,粒子群算法将每个优化问题的潜在解视为搜索空间中的一只鸟,称之为粒子,每个粒子都有速度和位置两个基本属性,用以决定它们的飞翔方向和距离,同时每个粒子根据特定函数确定其自身的适应度值,用以确定当前的最优搜索区域。

假设由 Q 个粒子组成的群体对 N 维目标空间进行搜索,那么对于粒子群算法中的所有粒子 $i = 1, 2, \dots, Q$, 其主要变量包含自身的位置 $\mathbf{X}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iN})$ 、速度 $\mathbf{V}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iN})$ 以及到目前为止其搜索到的最优位置(即个体极值) $\mathbf{P}_i^* = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iN})$ 信息,整个粒子群到目前为止搜索到的最优位置(即全局极值)为 $\mathbf{G}^* = (g_{i1}, g_{i2}, \dots, g_{iN})$ 。当搜索到粒子群中个体极值和全局极值时,粒子 i 根据如下迭代公式更新自身的速度和位置信息。

$$v_{ij}(k+1) = v_{ij}(k) + l_1 r_1(k)[p_{ij}(k) - x_{ij}(k)] + l_2 r_2(k)[g_{ij}(k) - x_{ij}(k)] \quad (5-31)$$

$$x_{ij}(k+1) = x_{ij}(k) + v_{ij}(k+1) \quad (5-32)$$

其中, l_1 和 l_2 是加速常数,用以调节算法的收敛速度; r_1 和 r_2 是服从 $[0, 1]$ 之间的均匀分布的随机数,用以增加算法搜索的随机性;粒子的速度满足 $|v_{ij}| \leq v_{max}$,用以限制粒子的速度。

粒子 i 的迭代公式(5-31)包含粒子群算法的运动特性、个体最优解求解特性以及群体最优解求解特性,这些特性分别由式(5-31)中的第一、第二和第三部分表征。基于此,

粒子群算法不断迭代求解自身和群体的历史最优位置，从而向着最优位置逼近。

令粒子 i 的适应度函数为 $f_i(\mathbf{X})$ ，那么其历史最优位置 P_i^* 依据下式进行迭代

$$P_i^*(k+1) = \begin{cases} P_i^*(k), & f_i(P_i^*(k)) < f_i(\mathbf{X}_i(k+1)) \\ \mathbf{X}_i(k+1), & f_i(P_i^*(k)) \geq f_i(\mathbf{X}_i(k+1)) \end{cases} \quad (5-33)$$

整个粒子群的群体历史最优位置迭代公式如下：

$$G_i^*(k) = \arg\{P_i^*(k) | \min_{i=1,2,\dots,Q} f_i(P_i^*(k))\} \quad (5-34)$$

由式(5-31)和(5-32)组成的迭代公式被称为基本粒子群算法，为了平衡该算法的全局搜索能力和局部搜索能力，进一步提高粒子群算法的收敛能力，一种带有惯性权重的改进粒子群算法被提出，该算法具有较好的收敛效果，又称为标准粒子群算法。对于粒子 i ，标准粒子群算法的迭代公式为

$$v_{ij}(k+1) = \omega v_{ij}(k) + l_1 r_1(k)[p_{ij}(k) - x_{ij}(k)] + l_2 r_2(k)[g_{ij}(k) - x_{ij}(k)] \quad (5-35)$$

$$x_{ij}(k+1) = x_{ij}(k) + v_{ij}(k+1) \quad (5-36)$$

其中， ω 为惯性权重。

式(5-31)中，右边第一部分为粒子当前速度，表示算法的全局收敛能力；右边第二和第三部分表示算法的局部收敛能力。通过控制权重 ω 的大小即可实现对算法中全局收敛能力和局部收敛能力的平衡，当 ω 较大时，算法的全局收敛能力强，反之则局部收敛能力强。

粒子群算法的计算流程如表5.1所示。将粒子群算法应用于带避碰的参数化协同制导中需要调整的控制参数分别为：1) 搜索空间维度为参与协同拦截的导弹数；2) 粒子的初始位置为当前标准参数化制导律得到的最优系数 \mathbf{c}_4^* 及其随机分布；3) 粒子的适应度函数均系数 \mathbf{c}_4^* 与带避碰参数化制导律的避碰指标(5-26)的距离。

5.3.3.3 禁忌搜索算法

禁忌搜索算法 (Tabu Search, TS) 是一种亚启发式迭代搜索算法，在局部邻域搜索算法的基础上，TS 通过引入“记忆”能力和禁忌准则模拟人类智力思考的过程，避免重复搜索，进而保证多样化的有效搜索从而实现搜索算法的全局优化。禁忌搜索算法的

表 5.1 粒子群算法计算流程

粒子群算法流程
1 初始化粒子群, 包括种群规模 Q , 搜索空间维度 N , 每个粒子的初始位置 \mathbf{X}_i 和速度 \mathbf{V}_i , 以及适应度函数 f_i ;
2 依据式(5-33)和(5-34)计算粒子历史最佳位置和群体历史最佳位置;
3 依据式(5-35)和(5-35)更新粒子的位置和速度;
4 边界条件判断;
5 停止条件判断, 若满足, 则停止算法; 若不满足, 则返回步骤 2。

五个基本要素为: 适配值函数、邻域 (Neighborhood)、禁忌表 (Tabu List)、藐视准则 (Aspiration Criterion) 及终止准则 (Stopping Criterion), 各组成部分介绍如下。

(1) 适配值函数: 适配值函数用于评估当前搜索解的优劣性, 进而依据禁忌准则和藐视准则实现当前状态的更新。通常用所要求解的目标函数或其变形作为适配值函数, 这样构建的适配值函数较为直观, 易于设计禁忌表、藐视准则和终止准则, 后续内容中适配值函数表示为 $f(\cdot)$ 。

(2) 邻域: 邻域又被称为邻域结构, 其是指从当前解通过简单变形操作 (又称“移动”操作) 产生另一个解的途径, 邻域结构设计的合理成都将决定搜索产生新解的优劣性, 同时也会影响算法搜索效率和速度。常用的邻域设计方法有插值、互换、逆序等。

禁忌搜索算法是在局部邻域搜索算法的基础上进行的。局部邻域搜索一种基于贪婪思想且利用邻域结构进行搜索的算法, 它的形式简单, 易于实现, 其主要求解过程如下。

STEP 1: 将初始值 \mathbf{x}_0 作为当前最优值 \mathbf{x}^* , 求解当前的邻域集合 $\mathbf{P} = \mathcal{N}(\mathbf{x}^*)$;

STEP 2: 若 \mathbf{P} 为空集或满足终止条件, 停止搜索; 否则继续执行 STEP 3;

STEP 3: 从 $\mathcal{N}(\mathbf{x}^*)$ 选一集合 \mathbf{Q} , 求解集合 \mathbf{Q} 内的最优解 \mathbf{x}_Q^* ; 若 $f(\mathbf{x}_Q^*) < f(\mathbf{x}^*)$ 成立。则令 $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_Q^*$, 更新 $\mathbf{P} = \mathcal{N}(\mathbf{x}^*)$; 否则 $\mathbf{P} = \mathbf{P} - \mathbf{Q}$, 返回 STEP 2。

(3) 禁忌表: 禁忌表用以存储或“记忆”前若干次的移动操作, 同时禁止当前搜索过程中再次执行这行操作, 随着搜索的过程逐渐用新的移动替换禁忌表中的旧移动, 因此禁忌表是一个循环表, 其长度为存储移动的个数, 称为禁忌长度。禁忌表的设置能避免搜索过程中重复操作, 解决了搜索陷入局部最优的问题, 同时合适的禁忌表长度能避免搜索过程进入死循环。

(4) 藐视准则: 藐视准则用以解决搜索过程中所有候选解全都处于禁忌状态的情形, 此时若禁忌表中存在一个由于当前最优解的候选解, 则藐视准则会将该候选解解除禁止

状态,从而实现高效的优化性能。为了便于直观的描述,藐视准则通常采用基于适配值函数或搜索方向确定。

(5) 终止准则:终止准则即是搜索算法的终止条件,常用的终止准则有两种,一种是最大迭代次数,二是根据目标问题的具体要求设定,如在拦截问题中可设为脱靶量小于一个小量。

禁忌搜索算法的计算流程如表5.1所示。将禁忌搜索算法应用于带避碰的参数化协同制导中需要调整的控制参数分别为:1)初始解为标准制导律得到的系数 \mathbf{c}_4^* ;2)藐视准则和适度值函数都用系数 \mathbf{c}_4^* 与带避碰参数化制导律的避碰指标(5-26)的距离表示;3)终止准则为避碰指标(5-26)达到最优或满足最大迭代次数。

一般地,牛顿迭代法适合处理小规模参数寻优,粒子群算法和禁忌搜索法适合求解大规模参数寻优。在本章中,考虑到分布式协同制导的需要,导弹的数目较少,因此主要采用牛顿迭代法作为最终的参数寻优算法。

表 5.2 禁忌搜索算法计算流程

禁忌搜索算法流程
1 初始化算法中各参数数值,产生初始解 \mathbf{x}_0 , 并设置当前解以及最优解为 $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_c = \mathbf{x}_0$, 同时将禁忌表设为空;
2 若满足终止准则, 则结束搜索并输出寻优结果; 否则, 继续执行下列步骤;
3 通过邻域结构生成当前解的邻域解集 $\mathcal{N}(\mathbf{x}_c)$, 并根据一定的规则从中选取若干个解构成候选解集 C_N ;
4 判断候选解集 C_N 中的候选解是否满足藐视准则。若存在满足该准则的候选解 \mathbf{x}_c , 则用其替代当前解及最优解, 即 $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_c = \mathbf{x}_c$, 然后更新禁忌表中 \mathbf{x}_c 对应禁忌对象替换为最早进入禁忌表的禁忌对象, 转步骤 (2) 继续执行; 否则, 继续执行以下步骤;
5 判断候选解集 C_N 中各候选解的禁忌属性, 并将 \mathbf{x}_c 用其中没有被禁忌的最优候选解 \mathbf{x}_c^* 替换, 并将禁忌表中 \mathbf{x}_c^* 对应禁忌对象替换为最早进入禁忌表的禁忌对象, 然后转回步骤 (2) 继续执行。

5.4 仿真分析

考虑三枚导弹 M_1 , M_2 和 M_3 对同一机动目标 T 的协同拦截, 同时考虑导弹 M_4 以比例导引律对同一机动目标进行拦截以进行对比仿真, 各导弹和目标的初始状态如表5.3所示。在本节中, 为了便于阅读, 用 PNG 和 CPG 分别表示比例导引律和协同参数

化制导律。

表 5.3 导弹和目标的初始状态

-	位置 (km)	速度 (m/s)	飞行路径角 ($^{\circ}$)	最大过载 (g)
M_1	(0,0.4)	500	30	15
M_2	(0,0.2)	500	30	15
M_3	(0,0)	500	30	15
M_4	(0,0.2)	500	30	15
T	(9,9)	300	0	7

目标的机动如下：

$$a_T = 7g[\sin(0.1\pi t)].$$

在协同拦截仿真中，本节以 M_2 作为一个领航者（根据表5.3中的初始相对关系设定）， M_1 和 M_3 作为跟随者，组成一个领航-跟随者形式的协同拦截模式，即 M_2 依据标准参数化制导律飞行， M_1 和 M_3 依据 M_2 的参数进行调整，以满足协同拦截的约束。同时，为了获得更好的拦截效果，对终端飞行路径角的约束都用终端视线角限制。根据不同性能指标的要求，本节针对标准参数化制导律以及带避碰规则的参数化制导律分别进行以下仿真。

算例 1：针对最优参数(5-18)下的标准参数化制导律的拦截效果进行数值仿真，取各导弹的终端碰撞角约束为终端视线角，即尽可能沿着标准参数化制导轨迹飞行。图5.5-图5.8为无约束参数化制导下的拦截轨迹、飞行路径角、导弹间距离以及法向加速度变化，可以看出，标准参数化制导拦截轨迹与比例导引得到的拦截轨迹相近，所提的参数化制导律能较好地满足需求。相较于比例导引律，标准参数化制导律在拦截初始阶段和终端阶段的法向加速度较大，如图5.8所示。在初始阶段，终端碰撞点的估计误差导致较大的过载需求；而终端阶段的较大过载需求则是由于接近目标时视线角变化较大导致。

标准参数化轨迹下各导弹最终会聚集在目标周围，如图5.7所示， M_1 和 M_2 以及 M_3 和 M_2 间的距离逐渐减少，在该制导律下各导弹间的最大距离得到保证，因此需重点考虑导弹间的避碰问题。此外，在标准参数化制导下的导弹 M_1 ， M_2 和 M_3 以及比例导引律下的导弹 M_4 的终端状态为：脱靶量分别为 0.013m，0.011m，0.008m 和 0.021m；终端飞行路径角分别为：39.51°，40.80°，42.05° 和 52.96°； M_1 ， M_2 和 M_3 的期望终端飞行路径角分别为 39.61°，40.88°，42.1°。所得结果与算法要求一致。

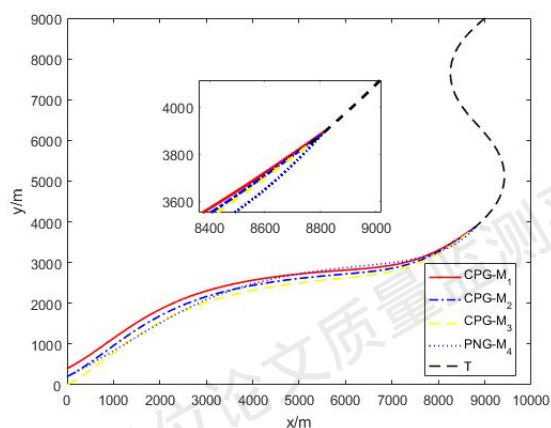


图 5.5 标准参数化制导拦截轨迹

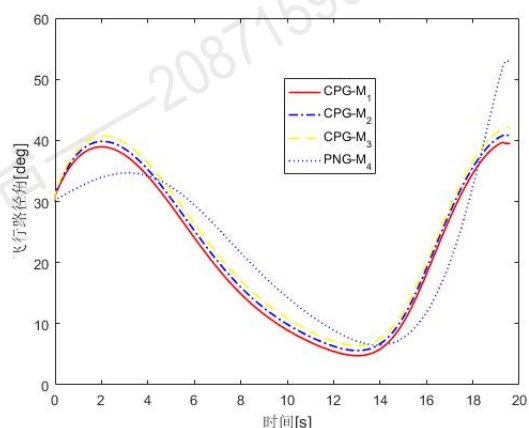


图 5.6 标准参数化制导导弹飞行路径角变化

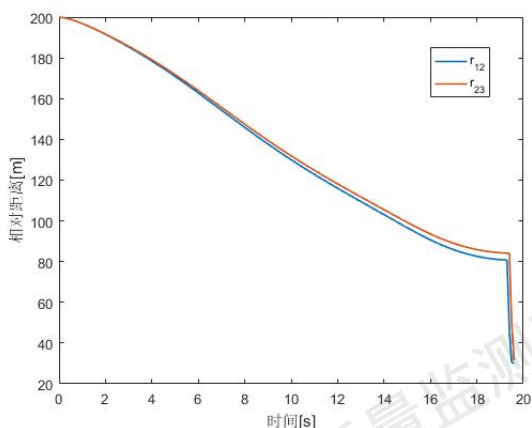


图 5.7 标准参数化制导导弹间距离变化

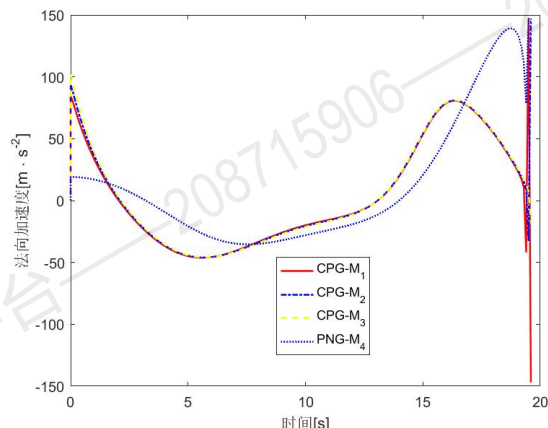


图 5.8 标准参数化制导法向加速度变化

算例 2: 针对最优避碰系数(5-23)下的参数化制导律的拦截效果进行数值仿真, 取各导弹的终端碰撞角约束为终端视线角, 即尽可能沿着标准参数化制导轨迹飞行, 导弹间的避碰距离为 $r_s = 100\text{m}$, 协同参数化制导律的结束时间为 $t_e = 1\text{s}$ 。特别地, 本节同时针对导弹间的距离约束随时间变化时协同拦截效果进行仿真, 此时

$$r_s = (200 - 5t \pm 10)\text{m}$$

其中, $\pm 10\text{m}$ 指导弹间的距离保持在 r_s 的 10m 范围内即可。图5.9-图5.12为 $r_s = 100\text{m}$ 时带避碰的参数化制导下的拦截轨迹、飞行路径角、导弹间距离以及法向加速度变化, 与标准参数化制导的拦截结果相比, 带避碰的参数化制导会在导弹间距离小于 r_s 时进行调整, 使之始终满足条件, 如图5.11所示。同时, 为了满足避碰需求, 导弹需要提供额外的过载来进行调节, 如图5.8, 也导致导弹偏离标准参数化拦截轨迹, 因此终端状

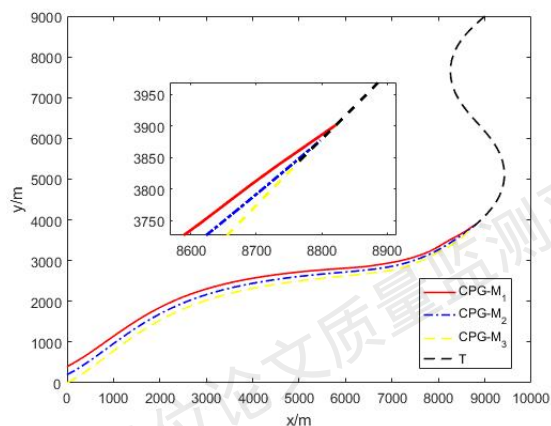


图 5.9 固定距离约束下拦截轨迹

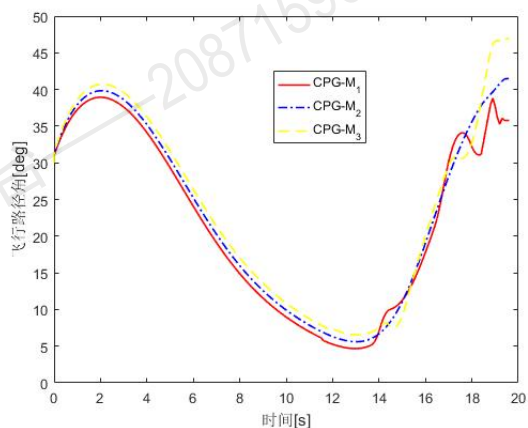


图 5.10 固定距离约束下飞行路径角变化

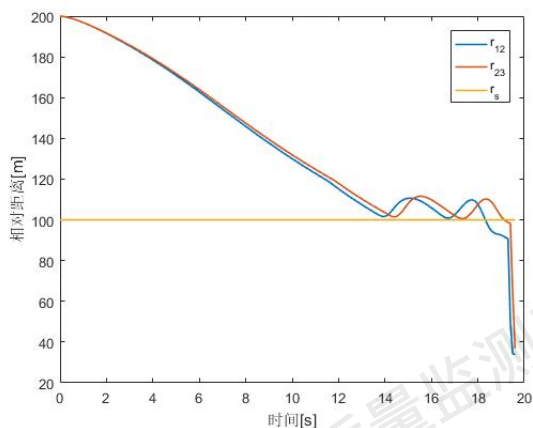


图 5.11 固定距离约束下导弹间距离变化

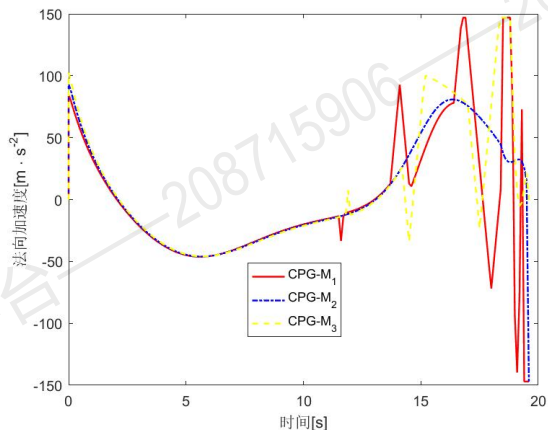


图 5.12 固定距离约束下法向加速度变化

态也会相应产生偏移。此时，导弹 M_1 ， M_2 和 M_3 终端状态为：脱靶量分别为 0.152m，0.015m 和 0.013m；终端飞行路径角分别为：35.78°，41.48° 和 46.94°；期望终端飞行路径角分别为 34.95°，41.44°，46.95°。尽管由于避碰的需求导致导弹 M_1 的脱靶量以及终端飞行路径角的跟踪误差略微增加，但其所得结果实际的反应了算法的需求，是可以接受的。

图5.13-图5.16展示了 r_s 时变时带避碰的参数化制导下的拦截轨迹、飞行路径角、导弹间距离以及法向加速度变化。当 r_s 时变时，所求的带避碰的参数化轨迹是一个距离保持问题，因此导弹需要在飞行过程中时刻对相对距离进行求解，以保证相对距离在合理范围内，因此在某些时刻过载变化较大，如图5.15和5.16所示。同样地，与标准参数化制导律相比， r_s 时变时带避碰的参数化制导律的终端状态也会发生偏移。导弹 M_1 ， M_2

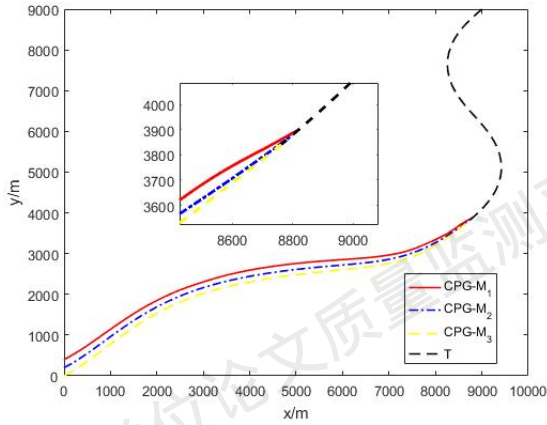


图 5.13 时变距离约束下拦截轨迹

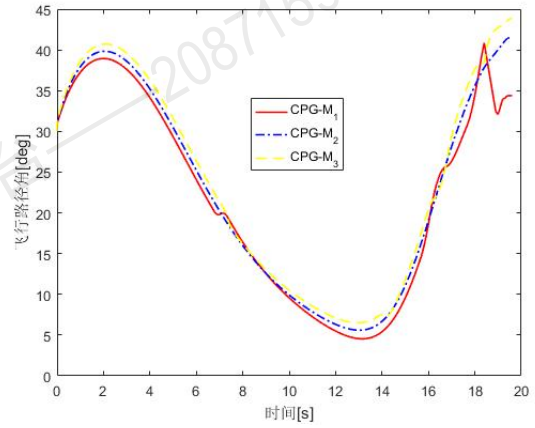


图 5.14 时变距离约束下飞行路径角变化

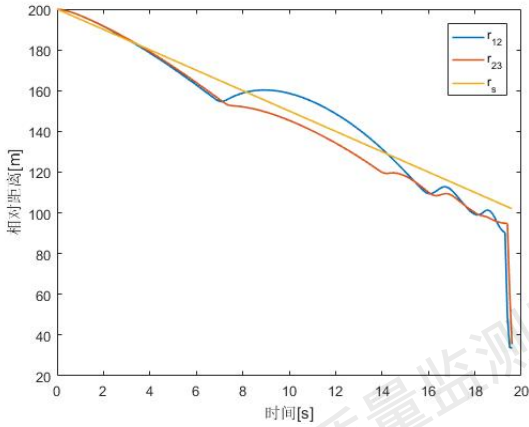


图 5.15 时变距离约束下导弹间距离变化

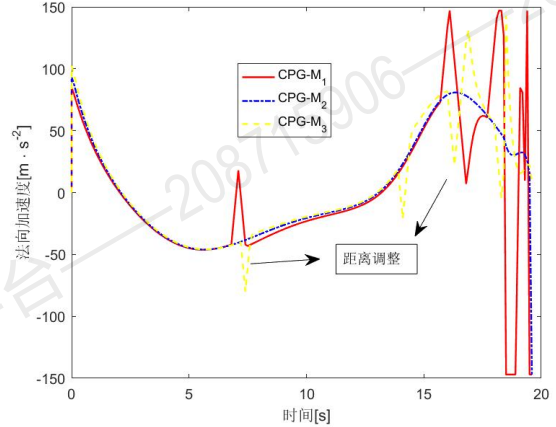


图 5.16 时变距离约束下法向加速度变化

和 M_3 终端状态为：脱靶量分别为 0.061m, 0.015m 和 0.015m；终端飞行路径角分别为： 34.39° , 41.48° 和 43.87° ；期望终端飞行路径角分别为 34.59° , 41.44° , 43.84° 。

算例 1 和 **算例 2** 分别对标准参数化制导律和带避碰的参数化制导律进行了仿真分析。同时指出，在对机动目标的拦截上，标准参数化制导律的拦截效果与比例导引律效果一致，带避碰的参数化制导律能较好的保证拦截过程中导弹间的距离以及最终的拦截效果。需要注意的是，在带避碰的参数化制导中，终端拦截脱靶量与终端拦截时间 t_e 以及此时的导弹间相对距离有关，如果设置的避碰距离较大，则需要更大的终端拦截时间进行调整。另一方面，导弹间约束距离 r_s 的设置需考虑导弹自身的机动性能有关，如果设置的约束距离较大，通过参数搜索算法可能得不到可行解，将会沿用标准参数化制导轨迹进行拦截。

5.5 本章小结

针对多导弹对同一机动目标的协同拦截过程可能存在的碰撞问题,本章采用轨迹参数化的方法进行了协同制导律的研究,该制导律基于非线性动力学设计,通过跟踪参数化后的轨迹实现制导律的设计。同时能满足给定的初始条件和终端拦截条件。首先,针对不考虑导弹间碰撞的拦截需求,设计了用于机动目标拦截的标准参数化制导律,并通过仿真验证了该制导律的拦截效果与比例导引律的拦截效果一致,同时能满足终端飞行路径角约束,但在拦截的初始阶段和终端阶段过载较大。然后,针对拦截过程的避碰需求,设计了拦截过程中的避碰准则,并使用智能搜索算法对各导弹参数化轨迹的最优系数进行求解,从而得到满足避碰的协同制导律,同时通过仿真验证了该制导律能实现避碰或者保持特定距离拦截。

6 总结与展望

6.1 全文工作总结

本文针对有向拓扑下多导弹协同攻击同一机动目标的制导律设计问题展开研究,基于多导弹间可能存在的竞争、协同优化及避碰等特性,研究其在这些特性下的问题及性能指标构建,重点研究基于分布式纳什策略、分布式优化算法以及轨迹参数化的协同制导律设计问题,并探究了多步次梯度分布式优化算法的快速收敛问题及最优参数搜索方法,本文提出的分布式协同制导律从三个方面阐述了多导弹系统可能面临的问题,其中基于分布式纳什策略的协同制导律为完全分布式的算法,其摆脱了对全局信息、无向拓扑的依赖,提升了算法的分布特性。本文的主要工作和创新点包括:

(1) 探索了非合作博弈问题与协同制导问题一致性,并给出在有向拓扑下非合作博弈的纳什均衡的集中式和分布式搜索策略,从理论上分析了该搜索策略的有效性。

(2) 探索了基于纳什策略搜索的集中式与分布式协同制导律,拓展了传统博弈论在协同制导领域的应用。

(3) 突破了传统优化算法在一致性收敛速度分析上的不足,针对有向平衡拓扑设计多步次梯度分布式优化算法,从理论上分析了该算法具有有限一致性收敛速度与渐近的最优值收敛速度,指出了该算法的优点和特性。

(4) 探索了分布式优化算法在协同制导问题中的应用,同时基于分布式优化控制理论与多步优化方法给出了有向拓扑下基于分布式优化算法的协同制导律,并对所提算法进行了仿真验证。

(5) 考虑到导弹间在攻击过程中可能存在的碰撞问题,以及非线性动力学约束问题,基于轨迹参数化理论,设计了带避碰约束的协同制导律,从理论上分析了该制导律的有效性,同时给出了该制导律分布式实现的拓扑需求。

然而,本文存在以下不足。首先需要指出的是,基于纳什策略的协同制导律在每一制导周期需要对当前状态下的开环纳什均衡进行求解,该结果保证每一时刻的制导律都是纳什均衡解从而保证整个协同制导过程的可靠性,然而所得结果仍是开环的纳什策略。同时,当多导弹系统的通信拓扑变化剧烈或目标机动过大时,会导致整个系统的纳

什均衡变化过大从而无法得到满足要求的制导律,因此在有向切换拓扑与过载受限情况下能否得到合适的协同制导律,是值得深入研究的。另一方面,尽管基于多步次梯度的分布式优化算法将通信拓扑的要求降低到有向平衡图,然而在实施过程中求解其邻接矩阵仍有一定难度,因此在协同制导过程中应尽量采用无向通信拓扑,这在一定程度上限制上其适用度。

其次,本论文探讨了非合作完全信息静态博弈的纳什均衡分布式求解与协同制导问题,然而,在实际交战过程中,多导弹间导弹与目标关系通常呈现信息不能完全获取、交战过程动态变化的情况,因此研究非合作的完全信息动态、非完全信息静态博弈和非完全信息动态博弈下的协同制导问题仍需进一步探讨,其对应的纳什均衡搜索策略仍待解决。

6.2 对未来工作的展望

多导弹协同制导通过各导弹间的信息实现对目标的协同突防或拦截,是提升现代战场环境中作战效能的有利手段。然而,目前此领域的研究依然存在不完善、不充分的情况,如二维制导律适用范围窄,导弹和目标速度过快使得算法的落地比较困难,导弹和目标速度时变时制导算法不适用等问题。结合本论文现有成果,未来的工作主要分为以下两点:

(1) 三维协同拦截制导律研究

在实际的拦截过程中,导弹和目标都是在三维空间中飞行,仅在特殊控制条件下(拦截到采用 STT 控制)可以解耦成两个平面的制导问题。本文采用了二维的弹目相对运动方程,对二维协同制导问题进行了研究,所提算法需要在线性相对运动方程下进行,这限制了其在三维协同制导律中的应用。因此,如何对三维空间内导弹目标相对运动方程的线性建模及相应的协同制导律研究,拓宽本文所提二维协同制导律的适用范围是未来的研究方向之一。

(2) 高速高机动目标的协同拦截制导问题

对于常规的制导方法,拦截导弹的速度和机动过载显著高于目标才能实施有效拦截,本文所提的协同制导律亦然。然而,新一代高机动、超高速飞行器的快速发展对拦截弹的速度的机动能力提出了巨大的挑战,若继续采用这些制导律显然不满足要求。另

一方面,随着多智能体控制理论的发展,多导弹协同以低速弱机动拦截高速、高机动目标成为可能,但仍处于起步阶段,如何发挥多导弹系统的整体优势的制导律仍待研究。因此,如何实现多拦截弹以低速弱机动对高速高机动目标的协同拦截,是未来研究方向之一。

参考文献

- [1] 樊昊, 高晓光, 王云辉. 子母拦截器集群拦截策略研究[J]. 系统工程与电子技术, 2010(8): 4.
- [2] 姚禹正, 余文斌, 杨立军, 等. 多导弹协同制导技术综述[J]. 飞航导弹, 2021, 1(6): 112-121.
- [3] 魏明英, 崔正达, 李运迁. 多弹协同拦截综述与展望[J]. 航空学报, 2020, 41: 29-36.
- [4] Wu S. Cooperative Guidance & Control of Missiles Autonomous Formation[M]. [S.l.]: Springer, 2019.
- [5] 吕腾. 基于一致性的多巡航导弹协同末制导律设计[D]. 哈尔滨工业大学, 2019.
- [6] Jeon I S, Lee J I, Tahk M J. Impact-time-control guidance law for anti-ship missiles[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(2): 260-266.
- [7] Lee J I, Jeon I S, Tahk M J. Guidance law to control impact time and angle[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(1): 301-310.
- [8] Harl N, Balakrishnan S. Impact time and angle guidance with sliding mode control[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, 20(6): 1436-1449.
- [9] Cho N, Kim Y. Modified pure proportional navigation guidance law for impact time control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(4): 852-872.
- [10] Jeon I S, Lee J I, Tahk M J. Homing guidance law for cooperative attack of multiple missiles[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2010, 33(1): 275-280.
- [11] Chen Y, Wang J, Wang C, et al. A modified cooperative proportional navigation guidance law[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(11): 5692-5705.
- [12] Chen Y, Wang J, Wang C, et al. Three-Dimensional Cooperative Homing Guidance Law with Field-of-View Constraint[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2020, 43(2): 389-397.
- [13] Zhang Y, Ma G, Wang X. Time-cooperative guidance for multi-missiles: a leader-follower strategy[J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2009, 30(6): 1109-1118.
- [14] Cho D, Kim H J, Tahk M J. Nonsingular sliding mode guidance for impact time control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2016, 39(1): 61-68.
- [15] Lyu S, Zhu Z H, Tang S, et al. Hybrid cooperative guidance law for active aircraft defense against a guided missile[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2018, 41(2): 535-541.
- [16] Kumar S R, Mukherjee D. Cooperative salvo guidance using finite-time consensus over directed cycles[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2019, 56(2): 1504-1514.
- [17] Wang X, Zhang Y, Wu H. Distributed cooperative guidance of multiple anti-ship missiles with arbitrary impact angle constraint[J]. Aerospace Science and Technology, 2015, 46: 299-311.
- [18] Song J, Song S, Xu S. Three-dimensional cooperative guidance law for multiple missiles with finite-time convergence[J]. Aerospace Science and Technology, 2017, 67: 193-205.
- [19] Kim M, Grider K V. Terminal guidance for impact attitude angle constrained flight trajectories[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1973(6): 852-859.
- [20] Ryoo C K, Cho H, Tahk M J. Optimal guidance laws with terminal impact angle constraint[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2005, 28(4): 724-732.
- [21] 李朝旭, 郭军, 李雪松. 带有碰撞角约束的三维纯比例导引律研究[J]. 电光与控制, 2009, 16(5): 9-12.
- [22] Shaferman V, Shima T. Cooperative optimal guidance laws for imposing a relative intercept angle[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2015, 38(8): 1395-1408.
- [23] Shaferman V, Shima T. Cooperative differential games guidance laws for imposing a relative intercept angle[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017, 40(10): 2465-2480.
- [24] 花文华, 张拥军, 张金鹏, 等. 双导弹拦截角度协同的微分对策制导律[J]. 中国惯性技术学报, 2016, 24(6): 838-844.
- [25] Zhang S, Guo Y, Liu Z, et al. Finite-Time Cooperative Guidance Strategy for Impact Angle and Time Control[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2020, 57(2): 806-819.
- [26] Guo Z, Zhou S. Cooperative Guidance Law Based on Differential Games for Multi-Interceptor versus One Maneuvering Target[C]//IEEE CSAA Guidance, Navigation and Control Conference. [S.l. : s.n.], 2018: 1-5.
- [27] Lyu T, Guo Y, Li C, et al. Multiple missiles cooperative guidance with simultaneous attack requirement under directed topologies[J]. Aerospace Science and Technology, 2019, 89: 100-110.

- [28] Ho E, Rajagopalan A, Skvortsov A, et al. Game Theory in defence applications: a review[J]. *Sensors*, 2022, 22(3): 1032.
- [29] Shinar J, Shima T. A game theoretical interceptor guidance law for ballistic missile defence[C]// *Proceedings of 35th IEEE Conference on Decision and Control*:vol. 3. [S.l. : s.n.], 1996: 2780-2785.
- [30] Faruqi F A. Differential game theory with applications to missiles and autonomous systems guidance[M]. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2017.
- [31] 李博文. 基于博弈论的导弹拦截制导律研究[D]. 沈阳理工大学, 2017.
- [32] Isaacs R. Differential games: a mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization[M]. [S.l.]: Courier Corporation, 1999.
- [33] Ho Y. Differential games[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1965, 10(4): 501-503.
- [34] Shinar J, Kebke A, Shima T. On the validity of linearized analysis in the interception of reentry vehicles[C]// *Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*. [S.l. : s.n.], 1998: 4303.
- [35] Turetsky V, Shinar J. Missile guidance laws based on pursuit-evasion game formulations[J]. *Automatica*, 2003, 39(4): 607-618.
- [36] Horie K, Conway B A. Optimal fighter pursuit-evasion maneuvers found via two-sided optimization[J]. *Journal of guidance, control, and dynamics*, 2006, 29(1): 105-112.
- [37] Shaferman V, Shima T. Linear quadratic guidance laws for imposing a terminal intercept angle[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2008, 31(5): 1400-1412.
- [38] Hayoun S Y, Weiss M, Shima T. A mixed L^2/L^α differential game approach to pursuit-evasion guidance[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2016, 52(6): 2775-2788.
- [39] Ratnoo A, Shima T. Guidance laws against defended aerial targets[C]// *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*. [S.l. : s.n.], 2011: 6419.
- [40] Hagedorn P, Breakwell J. A differential game with two pursuers and one evader[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1976, 18(1): 15-29.
- [41] Shima T. Optimal cooperative pursuit and evasion strategies against a homing missile[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, 34(2): 414-425.
- [42] Perelman A, Shima T, Rusnak I. Cooperative differential games strategies for active aircraft protection from a homing missile[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, 34(3): 761-773.
- [43] 郭志强, 孙启龙, 周绍磊, 等. 主动防御飞行器的范数型微分对策制导律[J]., 2019.
- [44] Hayoun S Y, Shima T. A Two-on-One Linear Pursuit-Evasion Game with Bounded Controls[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2017, 174(3): 837-857.
- [45] Wei M, Chen G, Cruz J, et al. Game Theoretic Strategies for Intercepting Intelligent Cruise Missiles[C]// *AIAA guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit*. [S.l. : s.n.], 2007: 6836.
- [46] Wei M, Chen G, Cruz J B, et al. Multi-missile interception integrating new guidance law and game theoretic resource management[C]// *2008 IEEE Aerospace Conference*. [S.l. : s.n.], 2008: 1-13.
- [47] 肖增博, 雷虎民. 多导弹协同攻击对策制导规律研究[J]. *弹箭与制导学报*, 2010, 30(5): 32-34.
- [48] Qu Z. Cooperative Control of Dynamical Systems: Applications to Autonomous Vehicles[M]. London: Springer, 2009.
- [49] Meng Z, Lin Z, Ren W. Robust cooperative tracking for multiple non-identical second-order nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2013, 49(8): 2363-2372.
- [50] Yin D, Pananjady A, Lam M, et al. Gradient diversity: A key ingredient for scalable distributed learning[J]. *ArXiv preprint arXiv:1706.05699*, 2017.
- [51] Yu M, Li C. Robust adaptive iterative learning control for discrete-time nonlinear systems with time-iteration-varying parameters[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2017, 47(7): 1737-1745.
- [52] Meng Z, Yang T, Li G, et al. Synchronization of coupled dynamical systems: tolerance to weak connectivity and arbitrarily bounded time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2018, 63(6): 1791-1797.
- [53] Yi P, Lei J, Hong Y. Distributed resource allocation over random networks based on stochastic approximation[J]. *Systems & Control Letters*, 2018, 114: 44-51.
- [54] Nedic A, Ozdaglar A. Distributed subgradient methods for multi-agent optimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(1): 48-61.

- [55] Nedic A, Ozdaglar A, Parrilo P A. Constrained consensus and optimization in multi-agent networks[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 55(4): 922-938.
- [56] Nedić A, Olshevsky A. Distributed optimization over time-varying directed graphs[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(3): 601-615.
- [57] Nedic A, Olshevsky A, Shi W. Achieving geometric convergence for distributed optimization over time-varying graphs[J]. SIAM Journal on Optimization, 2017, 27(4): 2597-2633.
- [58] Johansson B, Keviczky T, Johansson M, et al. Subgradient methods and consensus algorithms for solving convex optimization problems[C]//IEEE Conference on Decision and Control. [S.l. : s.n.], 2008: 4185-4190.
- [59] Yuan D, Xu S, Zhao H, et al. Distributed dual averaging method for multi-agent optimization with quantized communication[J]. Systems & Control Letters, 2012, 61(11): 1053-1061.
- [60] Terelius H, Topcu U, Murray R. Decentralized multi-agent optimization via dual decomposition[C]//18th IFAC World Congress, Milano, Italy. [S.l. : s.n.], 2011: 11245-11251.
- [61] Zargham M, Ribeiro A, Ozdaglar A, et al. Accelerated dual descent for network flow optimization[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(4): 905-920.
- [62] Zhu M, Martínez S. On distributed convex optimization under inequality and equality constraints[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(1): 151-164.
- [63] Nesterov Y, Stich S U. Efficiency of the accelerated coordinate descent method on structured optimization problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 2017, 27(1): 110-123.
- [64] Hendrikx H, Massoulié L, Bach F. Accelerated decentralized optimization with local updates for smooth and strongly convex objectives[J]. ArXiv preprint arXiv:1810.02660, 2018.
- [65] Ghadimi E, Shames I, Johansson M. Multi-Step Gradient Methods for Networked Optimization.[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2013, 61(21): 5417-5429.
- [66] Ghadimi E, Feyzmahdavian H R, Johansson M. Global convergence of the heavy-ball method for convex optimization[C]//European Control Conference. [S.l. : s.n.], 2015: 310-315.
- [67] Chen A I, Ozdaglar A. A fast distributed proximal-gradient method[C]//50th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing. [S.l. : s.n.], 2012: 601-608.
- [68] Kajiyama Y, Hayashi N, Takai S. Distributed multi-step subgradient algorithm for constrained convex optimization with undirected time-varying communications[C]//IEEE Conference on Decision and Control. [S.l. : s.n.], 2017: 4650-4655.
- [69] Polyak B T. Introduction to optimization. Translations series in mathematics and engineering[J]. Optimization Software, 1987.
- [70] Christofides P D, Scattolini R, de la Pena D M, et al. Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions[J]. Computers & Chemical Engineering, 2013, 51: 21-41.
- [71] Nedić A, Liu J. Distributed optimization for control[J]. Annual Review of Control, Robotics, and Autonomous Systems, 2018, 1: 77-103.
- [72] Camponogara E, Jia D, Krogh B H, et al. Distributed model predictive control[J]. IEEE control systems magazine, 2002, 22(1): 44-52.
- [73] Johansson B, Speranzon A, Johansson M, et al. Distributed model predictive consensus[C]//International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, Kyoto, Japan, July 24-28 2006. [S.l. : s.n.], 2006: 2438-2444.
- [74] Summers T H, Lygeros J. Distributed model predictive consensus via the alternating direction method of multipliers[C]//2012 50th annual Allerton conference on communication, control, and computing (Allerton). [S.l. : s.n.], 2012: 79-84.
- [75] Cong M, Cheng X, Zhao Z, et al. Studies on Multi-Constraints Cooperative Guidance Method Based on Distributed MPC for Multi-Missiles[J]. Applied Sciences, 2021, 11(22): 10857.
- [76] Jiang H, An Z, Chen S, et al. Cooperative guidance with multiple constraints using convex optimization[J]. Aerospace science and technology, 2018, 79: 426-440.
- [77] Balhance N, Weiss M, Shima T. Cooperative guidance law for intrasalvo tracking[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2017, 40(6): 1441-1456.
- [78] Yang J, Daoui A, Qu Z, et al. An optimal and real-time solution to parameterized mobile robot trajectories in the presence of moving obstacles[C]//International Conference on Robotics and Automation. [S.l. : s.n.], 2005: 4412-4417.

- [79] Hirwani V, Ratnoo A. Field-of-view constrained polynomial guidance law for dual-seeker interceptors[C]//AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. [S.l. : s.n.], 2018: 1325.
- [80] Lee C H, Kim T H, Tahk M J, et al. Polynomial guidance laws considering terminal impact angle and acceleration constraints[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49(1): 74-92.
- [81] Kim T H, Lee C H, Tahk M J. Time-to-go polynomial guidance with trajectory modulation for observability enhancement[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49(1): 55-73.
- [82] Kim T H, Lee C H, Jeon I S, et al. Augmented polynomial guidance with impact time and angle constraints[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2013, 49(4): 2806-2817.
- [83] Snyder M, Qu Z, Hull R, et al. Quad-segment polynomial trajectory guidance for impact-time control of precision-munition strike[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2016, 52(6): 3008-3023.
- [84] Erer R T. A New Design Framework For Impact Time Control[D]. Universitätsbibliothek der TU München, 2018.
- [85] Kang S, Tekin R, Holzapfel F. Generalized impact time and angle control via look-angle shaping[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2019, 42(3): 695-702.
- [86] Moon G H, Tahk M J, Han D H, et al. Generalized polynomial guidance for terminal velocity control of tactical ballistic missiles[J]. International Journal of Aeronautical and Space Sciences, 2021, 22(1): 163-175.
- [87] Wu Z, Fang Y, Fu W, et al. Three-dimensional cooperative mid-course guidance law against the maneuvering target[J]. IEEE Access, 2020, 8: 18841-18851.
- [88] Chen Y, Ding X, Wang J, et al. Impact Time Constrained Cooperative Guidance Law Design via Line-of-Sight Shaping[C]//40th Chinese Control Conference. [S.l. : s.n.], 2021: 7777-7782.
- [89] Bondy J A, Murty U S R. Graph Theory With Applications[J]., 1982.
- [90] Ren W, Beard R W. Distributed Consensus in Multi-vehicle Cooperative Control[M]. [S.l.]: Springer London, 2008.
- [91] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. [S.l.]: false, 1985.
- [92] Wolfowitz, J. Products of indecomposable, aperiodic, stochastic matrices[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1963, 14(5): 733-733.
- [93] Li C, Xin H, Wang J, et al. Dynamic average consensus with topology balancing under a directed graph[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 1-13.
- [94] Li C, Qu Z. Distributed finite-time consensus of nonlinear systems under switching topologies[J]. Automatica, 2014, 50(6): 1626-1631.
- [95] Lin W, Li C, Qu Z, et al. Distributed formation control with open-loop Nash strategy[J]. Automatica, 2019, 106: 266-273.
- [96] Garber V. Optimum intercept laws for accelerating targets[J]. AIAA Journal, 1968, 6(11): 2196-2198.
- [97] Kang S, Wang J, Li G, et al. Optimal cooperative guidance law for salvo attack: An MPC-based consensus perspective[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2018, 54(5): 2397-2410.
- [98] Peng J, Li C, Ye X. Cooperative control of high-order nonlinear systems with unknown control directions[J]. Systems & Control Letters, 2018, 113: 101-108.
- [99] Boyd S, Vandenberghe L. Convex Optimization[M]. [S.l.]: Cambridge University Press, 2004.
- [100] Yang J, Qu Z, Wang J, et al. Real-time optimized trajectory planning for a fixed-wing vehicle flying in a dynamic environment[J]. Journal of Aerospace Engineering, 2009, 22(4): 331-341.
- [101] Tahk M J, Ryoo C K, Cho H. Recursive time-to-go estimation for homing guidance missiles[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2002, 38(1): 13-24.
- [102] Cho N, Lee Y I. Guidance Synthesis with Separate Impact Point Prediction Considering Speed Variations[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2021, 44(2): 428-440.

攻读博士学位期间的主要研究成果

学术成果

- [1] Cooperative Guidance Law with Impact Angle Coordination: A Nash Approach[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2022, 58(5): 3924-3931. (中科院 2 区 SCI 期刊, 第一作者, 发表)
- [2] Distributed multi-step subgradient optimization for multi-agent system[J]. Systems & Control Letters, 2019, 128: 26-33. (中科院 3 区 SCI 期刊, 第二作者 (导师一作), 发表)
- [3] Cooperative polynomial guidance law with collision avoidance and flight path angle coordination[J]. Aerospace Science and Technology, 2022, 130: 107809. (中科院 1 区 SCI 期刊, 第一作者, 发表)
- [4] Distributed game strategy for formation flying of multiple spacecraft with disturbance rejection[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2020, 57(1): 119-128. (中科院 2 区 SCI 期刊, 第二作者, 发表)
- [5] Adaptive control of underactuated flight vehicles with moving mass[J]. Aerospace Science and Technology, 2019, 85: 75-84. (中科院 1 区 SCI 期刊, 第二作者, 发表)
- [6] A distributed coverage algorithm for multi-UAV with average voronoi partition[C]//2017 17th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS). IEEE, 2017: 1083-1086. (国际会议, 第一作者, 发表)