

多智能体系统（给定）有限时间 控制问题研究



重庆大学博士学位论文

学生姓名：王玉娟

指导教师：宋永端 教授

专 业：控制理论与控制工程

学科门类：工 学

重庆大学自动化学院

二〇一六年十二月

(Pre-given) Finite Time Control of Multi-Agent Systems



A Thesis Submitted to Chongqing University
in Partial Fulfillment of the Requirement for the
Doctor's Degree of Engineering

By
Wang Yujuan

Supervised by Prof. Song Yongduan

Specialty: Control Theory and Control Engineering

School of Automation in Chongqing University,

Chongqing, China

December 2016

摘 要

大规模化网络系统具有复杂动态特性，其控制问题既十分重要又极具挑战性。传统的集中式控制（Centralized Control）方法已经很难满足复杂大系统实现协调、稳定、高效运行的要求。不同于传统的集中式控制方法，分布式控制（Distributed Control）方法具有所用信息量少，协作性好，灵活性高，可扩展性强等诸多优点，旨在只有局部通信而没有中央调控条件下各子系统通过局部耦合协调合作来达到整体共同目标，因此是大规模网络化局部信息交互系统控制机构的理想选择，近年来已被广泛应用于卫星姿态控制，智能交通系统，大规模电力调度等领域。协同一致性（Cooperative Consensus）问题是网络化多智能体系统（Networked Multi-agent Systems, NMAS）分布式控制研究中最基本的问题，是解决其他分布式控制问题的基础。如何保证复杂多智能体系统在尽可能弱的通讯拓扑条件下实现高稳定度、高精度、高速度收敛是研究多智能体系统一致性问题重点和难点。本文紧紧围绕：a) 带有复杂不确定性因素的非线性多智能体系统的自适应有限时间一致性控制问题；b) 多智能体系统的给定有限时间一致性控制问题，展开研究，主要完成了以下创新性工作：

有限时间一致性控制

① 针对单向通讯拓扑条件下二阶非线性多智能体系统有限时间一致性控制问题，通过构造一个新的 Laplacian 矩阵并通过严格的理论分析证明得出该矩阵的一个重要性质，将该矩阵引入合适的 Lyapunov 候选函数中，提出了适用于单向通讯网络下非线性多智能体系统的分布式自适应有限时间一致性控制算法。该方法解决了现有有限时间控制理论几乎无法对其进行严格解析分析的理论难题。在此基础上，将上述有限时间稳定性分析方法进一步推广应用到该系统的编队-合围控制问题中，解决了单向拓扑条件下二阶非线性多智能体系统的连续有限时间编队-合围问题。

② 针对同时具有未知时变控制增益，不可线性参数化分解的不确定非线性因素以及未知不可测执行器故障的二阶复杂非线性多智能体系统，研究了其在单向通讯拓扑下的有限时间一致性控制问题，结合加幂积分技术，核心函数技术以及自适应方法，设计出了基于分数阶状态反馈以及分数阶自适应律的容错有限时间一致性控制算法，通过引入虚拟参数估计误差以及局部滑膜误差的概念，巧妙构造了 Lyapunov 候选函数，给出了系统有限时间稳定性的严格理论分析与证明，从而解决了对存在未知时变控制增益以及未知不可测执行器故障条件下复杂多智能体系统有限时间一致性控制的难题。在此基础上，进一步将该方法推广到了高

阶非仿射多智能系统，结合反衍控制设计思想，归纳法思想，高阶加幂积分技术，核心函数技术以及自适应方法，建立了有限时间一致性协议，解决了高阶非仿射多智能体系统的有限时间一致性控制问题。

③ 针对带有非匹配不确定性的高阶纯反馈（Pure-feedback）多智能体系统，通过引入基于虚拟分数阶滤波的分数阶-动态面设计概念，设计出了基于分数阶状态反馈的有限时间神经网络自适应一致性追踪控制算法，并通过应用 Lyapunov 稳定性分析方法、反衍控制设计方法以及打包函数（packaged function）技术，给出了系统稳定的严格理论分析与证明，解决了此类带有非匹配不确定性的高阶复杂系统的有限时间一致性追踪控制问题，并进一步将此稳定性分析方法拓展应用到了该类系统的有限时间合围控制中。

给定有限时间控制

④ 提出了一种全新的有限时间控制理论与分析方法，不同于传统的依赖符号函数或分数阶状态反馈的有限时间控制，该方法中所得的有限收敛时间不依赖于任何初始条件和其他设计参数，因此可以提前统一给定。基于该有限时间控制理论思想，针对一阶线性多智能体系统，分别在无向拓扑和有向拓扑条件下建立了在提前统一给定有限时间内实现协同一致的结果，解决了现有有限时间控制理论无法提前给定统一的有限时间表达式的难题，更进一步解决了现有有限时间控制理论不连续或不平滑的难题。更进一步，将此有限时间控制理论拓展应用到高阶多智能体系统领导-跟随一致性控制问题中，解决了高阶系统有限时间控制中存在的控制器设计复杂以及分析过程复杂导致的难以应用于实际，并且难以提前统一给定有限收敛时间的难题。

关键词：网络化多智能体系统；分布式控制；协同一致性控制；（给定）有限时间控制；编队-合围控制

ABSTRACT

Large-scale networked systems have complex dynamic characteristics, making it important and challenging to control such systems. The traditional centralized control method cannot fulfill the requirements to guarantee the coordinated, stable and efficient operation of the complicated multiple systems. Different from the traditional centralized control method, distributed control method, dedicated to achieving a global common objective by using only local communication in the absence of central coordination, is more promising due to the advantages such as limited communication/sensing range, cooperative fashion, flexibility, and scalability. Thus it is the ideal control of the large-scale networked systems, and has been extensively applied to various fields such as attitude control of satellites, intelligent transportation systems, large-scale power dispatching. Cooperative consensus is known as the most fundamental issue in the distributed control of networked multi-agent systems (NMAS), which is the basis for solving other distributed control problems. How to ensure multi-agent systems to achieve high-stability, high-precision and high-speed convergence under the weakest communication topology condition is the important and difficult point of the consensus control research. The finite time consensus control of nonlinear multi-agent systems with complicated uncertainties and the pre-given finite time control of multi-agent systems are studied in this thesis and the following innovative achievements have been accomplished:

Finite time control

① Regarding to the finite-time consensus control problem of second-order nonlinear MAS under single-way communication topology, a distributed adaptive control scheme is established by introducing the newly constructed Laplacian matrix into the properly chosen Lyapunov function candidate, in which the rigorous theoretical analysis and proof verifying an important property of the new Laplacian matrix are given. The proposed method relieves a bottleneck in the finite-time control for NMAS under one-way directed topology in which the modern finite-time control theory cannot analyze it analytically. In addition, the finite-time stability analysis method is further extended to the formation-containment control of this class of nonlinear NMAS. This work provides a solution to the continuous finite-time formation-containment problem for second-order nonlinear NMAS under one-way topology.

② The problem of finite time consensus for a class of second-order uncertain nonlinear NMAS, which involves unknown time-varying control gain, non-parametric system uncertainties, and undetectable actuation failures, is investigated under single-way directed communication topology. By using the adding integrator technology, core function theory, and adaptive control method, a fault-tolerant finite-time consensus control scheme based on fraction state feedback and fraction adaptive law is proposed. The rigorous theoretical analysis and proof verifying the effectiveness of the proposed control scheme are given by introducing the concept of the virtual parameter estimation error and the local filtered error and incorporating them into a skillfully chosen Lyapunov function candidate, which breaks through a dilemma in the distributed finite-time control of NMAS in the presence of uncertain time-varying control gain and undetectable actuator faults. In addition, the stability analysis method is further extended to a class of high-order non-affine NMAS, and a finite-time consensus algorithm is established by using backstepping control design method, inductive argument, adding an integrator technology in high-order case, core function theory and adaptive control method, which solves the finite-time consensus control problem for the nonlinear NMAS with high-order non-affine dynamics.

③ In order to solve the problem of finite-time consensus for a class of high-order pure-feedback NMAS with mismatched non-parametric uncertainties, a distributed neural adaptive control scheme based on fraction state feedback is developed. Such finite time feature is made possible by the fraction dynamic surface control (F-DSC) design technique based upon the concept of virtual fraction filter. The rigorous stability analysis and proof are given by using the Lyapunov stability theory, backstepping control method, and packaged function technique, through which the finite-time consensus tracking control problem of such complicated NMAS with mismatched uncertainties is resolved. In addition, the stability analysis method is extended successfully to the finite-time containment control of such class of NMAS.

Pre-given finite-time control

④ A new finite-time control theory with new analysis method is proposed, which is not the usual one that is based on the signum function or fractional power feedback. The finite convergence time with this method does not depend on any initial conditions and any other design parameters such that it can be uniformly pre-specified. With this finite time control theory, the results of cooperative consensus achieved within a uniformly pre-specified finite time are derived under both bidirectional and

unidirectional interactions for first-order NMAS, which breaks through the control dilemma that the finite convergence time cannot be pre-assigned uniformly and also the dilemma that the control input signals are not continuous or non-smooth among the existing finite-time methods. Furthermore, this theory is extended to apply to the finite-time leader-follower consensus problem of high-order NMAS, in which the dilemmas that both the design of the controller and the stability analysis are too complex to be applicable to the practical systems and that the finite convergence time is hard to pre-given uniformly are removed.

Keywords : Networked Multi-agent Systems, Distributed Control, Cooperative Consensus, (Pre-given) Finite-time Control, Formation-Containment.

目 录

中文摘要	I
英文摘要	III
符号及缩写表	XI
1 绪论	1
1.1 研究背景与意义	1
1.1.1 分布式控制是大规模网络化系统控制的理想选择	1
1.1.2 有限时间一致性控制是多智能体系统分布式控制的重点和难点	3
1.2 国内外研究现状	4
1.2.1 多智能体系统分布式一致性问题研究概述	4
1.2.2 多智能体系统有限时间一致性控制问题研究概述	7
1.3 多智能体系统有限时间一致性控制目前存在的问题	12
1.4 本文的研究工作和主要内容安排	14
2 预备知识	17
2.1 代数图论	17
2.1.1 图论基本概念	17
2.1.2 图论矩阵分析	18
2.2 矩阵理论	20
2.3 有限时间稳定性理论	20
2.4 本章小结	22
3 可参数化分解非线性多智能体系统的有限时间一致性控制	23
3.1 引言	23
3.2 多智能体系统有限时间一致性控制	23
3.2.1 问题描述	23
3.2.2 相关定义和引理	24
3.2.3 主要结果	27
3.2.4 仿真实验与结果分析	33
3.3 本章小结	37
4 具有时变未知增益及持续扰动多智能体系统的自适应有限时间一致性控制	39
4.1 引言	39
4.2 有向拓扑条件下二阶复杂多智能体系统有限时间一致性控制	39

4.2.1 问题描述	40
4.2.2 主要结果	41
4.2.3 对比分析	50
4.2.4 仿真验证及结果分析	51
4.3 未知故障情形下二阶复杂多智能体系统容错有限时间一致性控制	55
4.3.1 问题描述	55
4.3.2 控制器设计与稳定性分析	56
4.4 有向拓扑条件下高阶非仿多智能体系统有限时间一致性控制	61
4.4.1 问题描述	61
4.4.2 控制器设计与稳定性分析	62
4.4.3 与一般线性反馈非有限时间方法的对比分析	73
4.4.4 仿真验证及结果分析	74
4.5 本章小结	82
5 高阶纯反馈多智能体系统的有限时间一致性追踪控制	83
5.1 引言	83
5.2 高阶纯反馈多智能体系统的有限时间一致性追踪控制	83
5.2.1 问题描述	83
5.2.2 相关定义和引理	84
5.2.3 递归神经网络控制器设计与稳定性分析	85
5.2.4 与一般线性反馈非有限时间方法的对比分析	95
5.3 本章小结	96
6 一阶线性多智能体系统的给定有限时间一致性控制	97
6.1 引言	97
6.2 无向拓扑条件下一阶线性多智能体系统给定有限时间一致性控制	97
6.2.1 问题描述以及研究背景	97
6.2.2 控制器设计和稳定性分析	98
6.2.3 仿真验证	104
6.3 有向拓扑条件下一阶线性多智能体系统的给定有限时间一致性控制	107
6.3.1 问题描述	107
6.3.2 控制器设计和稳定性分析	108
6.4 本章小结	110
7 高阶多智能体系统的给定有限时间一致性追踪控制	111
7.1 引言	111
7.2 有向拓扑条件下高阶多智能体系统给定有限时间一致性追踪控制	111

7.2.1 问题描述	111
7.2.2 控制器设计和稳定性分析	112
7.2.3 仿真实例	121
7.3 本章小结	126
8 多智能体系统（给定）有限时间编队合围应用研究	127
8.1 引言	127
8.2 二阶可参数化分解非线性多智能体系统的有限时间编队-合围控制	127
8.2.1 问题描述	127
8.2.2 主要结果	128
8.2.3 仿真结果与分析	135
8.3 二阶不可参数化分解非线性多智能体系统的有限时间编队控制	140
8.3.1 问题描述	140
8.3.2 主要结果	140
8.3.3 仿真结果与分析	142
8.4 高阶纯反馈多智能体系统的有限时间合围控制	146
8.4.1 问题描述	146
8.4.2 主要结果	147
8.4.3 仿真验证及结果分析	149
8.5 一阶线性多智能体系统的给定有限时间合围控制	154
8.5.1 问题描述	154
8.5.2 合围控制器设计与稳定性分析	155
8.5.3 仿真验证	157
8.6 高阶线性多智能体系统的给定有限时间合围控制	162
8.6.1 问题描述	162
8.6.2 合围控制器设计与稳定性分析	163
8.7 本章小结	164
9 总结与展望	165
9.1 总结	165
9.2 展望	166
致 谢	167
参考文献	169
附 录	181
A. 攻读博士学位期间取得的主要学术成果	181
B. 攻读博士学位期间参与的主要科研项目及贡献	183

C. 攻读博士学位期间担任高水平 SCI 杂志审稿人情况	183
D. 攻读博士学位期间所获奖励	184

符号及缩写表

\Re	全体实数集合 (set of real numbers)
\Re^n	n 维实欧氏空间 (n -dimensional real Euclidean space)
$\Re^{n \times m}$	全体 $m \times n$ 实矩阵集合 (set of $n \times m$ real matrix)
$\ \cdot\ _1$	矩阵 1-范数 (1-norm of matrix)
$\ \cdot\ _2 (\ \cdot\)$	矩阵 2-范数 (2-norm of matrix)
$\ \cdot\ _\infty$	矩阵 ∞ 范数 (∞ -norm of matrix)
$ \cdot $	实数绝对值 (absolute value of a real number)
$\text{sgn}(\cdot)$	符号函数 (sign function)
$\text{Re}(s)$	复数 s 的实部 (real-part of s)
$\text{Im}(s)$	复数 s 的虚部 (imaginary-part of s)
$\tanh(\cdot)$	双曲正切函数 (Hyperbolic tangent function)
I_n	n 维单位矩阵 (n -dimensional identity matrix)
$1_n(0_n)$	元素全为 1 (0) 的 n 维列向量 (n -dimensional vector with each entry being 1 (0))
A^T	矩阵 A 的转置 (transpose of matrix A)
A^{-1}	方阵 A 的逆 (inverse of square matrix A)
$\det(A)$	矩阵 A 的行列式 (determinant of A)
$\lambda_{\max}(A)$	实方阵 A 的最大特征值 (maximum eigenvalue of real square matrix A)
$\lambda_{\min}(A)$	实方阵 A 的最小特征值 (minimum eigenvalue of real square matrix A)
$\bar{\sigma}(A)$	矩阵的最大奇异值 (the maximum singular value of matrix A)
$\underline{\sigma}(A)$	矩阵的最小奇异值 (the minimum singular value of matrix A)
$\text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$	以 a_1, a_2, \dots, a_n 为元素的对角矩阵 (diagonal matrix with a_1, a_2, \dots, a_n on the diagonal)
$\text{diag}\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$	以 A_1, A_2, \dots, A_n 为元素的块对角矩阵 (block diagonal matrix with A_1, A_2, \dots, A_n on the diagonal)
$A > (\geq, <, \leq) 0$	实对称正定 (半正定, 负定, 半负定) 矩阵 A (symmetric

\otimes	and positive (semi-positive, negative, semi-negative) definite matrix A)
$\begin{bmatrix} A & B \\ * & D \end{bmatrix}$	Kronecker 积 (Kronecker product)
	$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}$
MAS	多智能体系统 (multi-agent systems)
MIMO	多输入多输出 (multiple input and multiple out put)
SISO	单输入单输出 (single input and single output)
LMI	线性矩阵不等式 (linear matrix inequality)
LTI	线性时不变 (linear time invariant)

1 绪论

1.1 研究背景与意义

1.1.1 分布式控制是大规模网络化系统控制的理想选择

随着近年来计算机的广泛应用和电子信息技术、网络通信技术的快速发展，很多控制系统呈现出规模庞大、网络化、局部信息交互等显著特点，同时控制系统的内部要素之间的关系也日益复杂化。特别是这些技术的相互渗透与融合，对控制系统的控制方法提出更高的要求：网络化、分布化、集成化、智能化等等。大规模网络化系统的控制问题已经成为制约现代控制技术发展的关键因素。对于这样的大规模网络化系统，传统的集中式控制（Centralized Control）方法由于计算量巨大，将会导致发生故障的机率变大，一旦集中式控制器出现故障，可能引起整个系统发生瘫痪，因此很难满足复杂大系统实现协调、稳定、高效运行的要求，这就促使人们寻求新的方法和方案以实现对大规模网络化系统的分析和控制^[1-2]。传统的集中式控制系统的典型结构如图 1.1 所示。

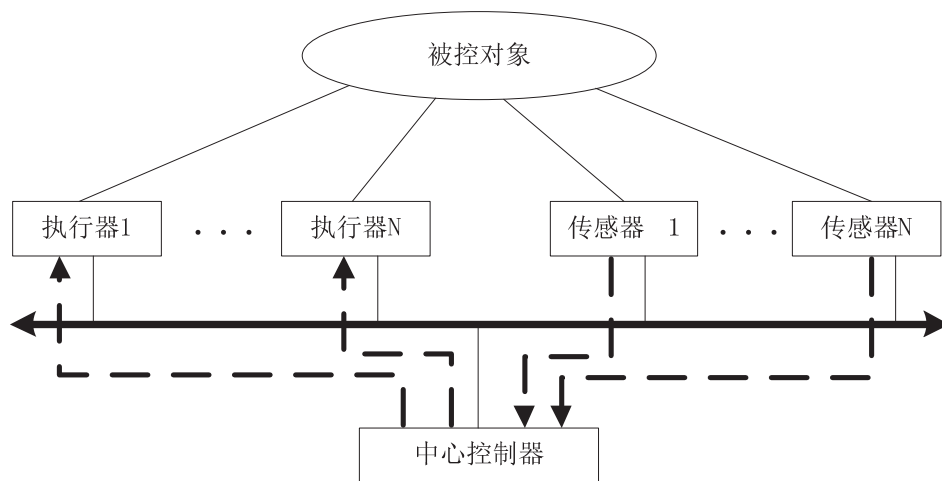


图 1.1 传统的集中式控制系统结构图

Figure 1.1 The structure of traditional centralized control systems

正是在这种大规模网络化复杂系统背景下，一种新的控制模式——分布式协同控制（Distributed Cooperative Control）^[1-4]就应运而生了。分布式协同控制，简称分布式控制，是指多个智能体通过局部信息通讯来相互协作，根据目标要求改变自身状态，从而共同完成整体复杂任务。所谓智能体，就是具有独立功能的个体，具有存储、通信和计算能力，例如：无人机、机器人、卫星、监测系统、供电设备、鱼类等等都可以成为智能体^[5]。网络化多智能体系统（Networked Multi-agent

Systems) 是由多个智能体组成的集合, 其中多个智能体之间存在局部网络通讯, 它的目标是将规模庞大而复杂的大系统建设成简单、彼此相互独立且能相互通信协调, 并且易于管理的系统。许多大规模网络化系统都可以被建设成为这种网络化多智能体系统, 如多机器人系统、智能交通系统、大规模电力调度系统、高级监测系统以及自主感知系统等。网络化多智能体分布式控制系统如图 1.2 所示。

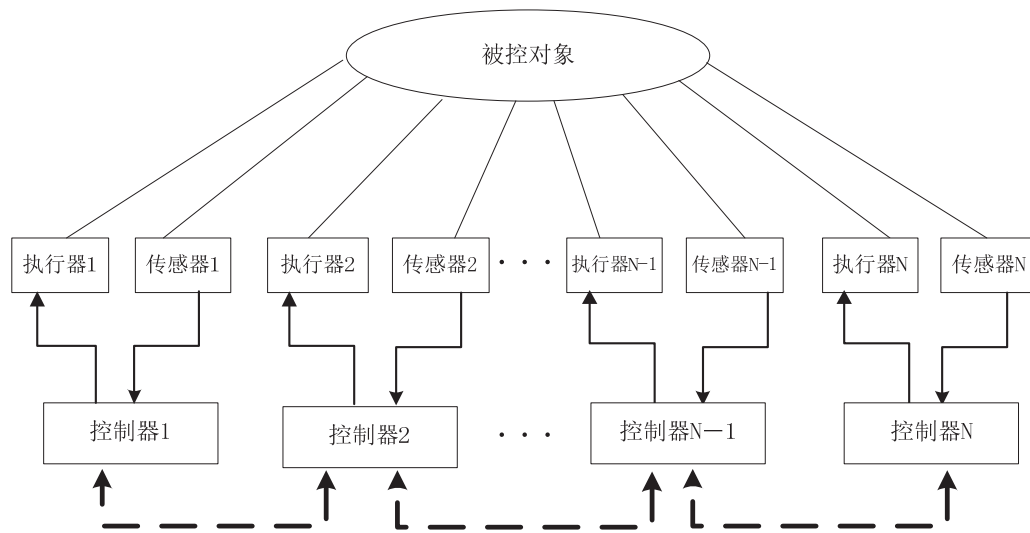


图 1.2 分布式控制系统结构图

Figure 1.2 The structure of distributed control systems

网络化多智能体系统的一个最大优势就是通过各个智能体之间的相互协作, 能将整个复杂系统由大变小, 由复杂变简单, 从而完成单个系统无法胜任的任务, 实现相对复杂的目标, 从而使得多智能体系统的优势得到充分的发挥。除此之外, 多智能体系统还具有如下显著优点^[6]:

- ① 有效降低成本: 多智能体系统可以用于取代传统的人工操作系统, 因此可以有效降低生产成本, 且安全性也大幅度提高;
- ② 提高容错能力: 多智能体系统中某一个智能体出现故障, 不会影响整个系统的运行;
- ③ 增强灵活性: 多智能体系统可以通过改变多智能体之间的局部网络通讯结构, 完成不同的任务, 从而相较于单个系统具有更高的灵活性。

综上所述, 不同于传统的集中式控制方法, 多智能体系统分布式协同控制方法旨在只有局部通信而没有中央调控条件下各子系统通过局部耦合协调合作来达到整体共同目标, 具有所用信息量少, 协作性好, 灵活性高, 可扩展性强等诸多优点, 因此可以规避传统的集中式控制的一系列不足, 并充分体现了复杂大系统网络化、分布化、智能化这一发展趋势, 因此是大规模网络化局部信息交互系统

控制机构的理想选择。

1.1.2 有限时间一致性控制是多智能体系统分布式控制的重点和难点

一致性 (Consensus) 问题是多智能体系统分布式协同控制研究领域中最经典的问题, 是多个智能体之间协同合作的基础^[7]。一致性就是指随着时间的演化, 多智能体系统中各个智能体在一致性控制协议或控制算法下, 通过局部通信协调, 最终达到某个共同一致状态目标^[8]。一致性问题的关键在于设计适当的一致性协议或算法使得整个多智能体系统中的各个智能体状态趋向于同一个值。一致性控制协议或算法是指各个智能体在遵循局部信息传递原则的前提下, 相互协作、相互影响, 从而完成与它相邻智能体之间信息传递以及交换的全过程^[9]。一致性理论是多个智能体相互协作完成共同目标的依据。因此, 一致性问题无论是在理论还是在实践方面都有着相当重要的研究价值, 目前已被广泛应用于编队控制、聚集控制、蜂拥控制、同步以及协调决策控制等问题中^[10-12]。如图 1.3、图 1.4 和图 1.5 所示, 多智能体协同一致控制被分别应用于多机器人的聚集、卫星的姿态协同控制以及无人机编队控制中。

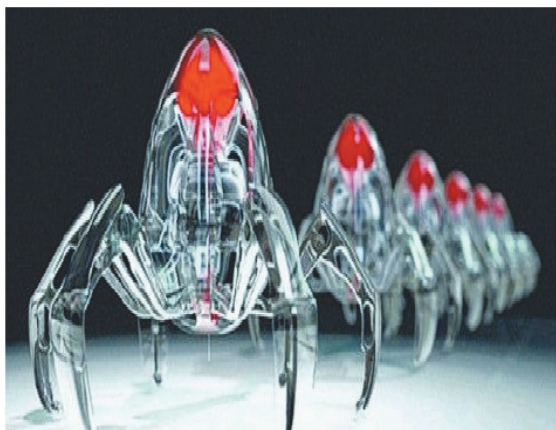


图 1.3 机器人的聚集

Figure 1.3 Gathering of robots

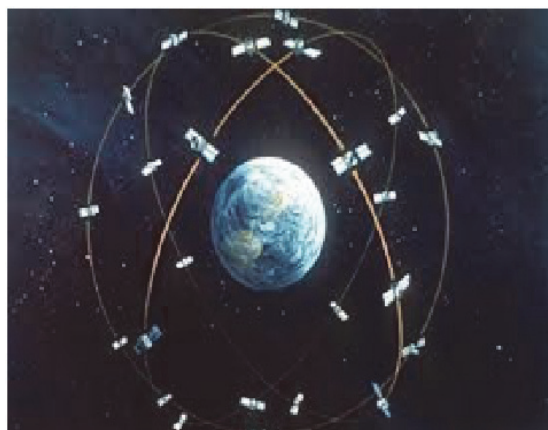


图 1.4 卫星的姿态协同控制

Figure 1.4 Attitude control of satellites



图 1.5 有(无)领航者的无人机编队

Figure 1.5 Formation control of UAVs with (without) a leader

在多智能体系统分布式协同控制中,高稳定度、高精度、高速度收敛是系统稳定运行的基础保证,因此收敛速度和精度也是评价一致性算法好坏的重要指标。目前关于分布式一致性算法的研究已经比较成熟,但是已有的大多数控制算法都是基于渐进稳定性理论或一致最终有界稳定性理论,使得多智能体系统中各智能体的状态达到渐进一致或收敛到接近一致值的某个小邻域内,也就是说各个智能体的状态在时间趋于无穷大时可以达到一个共同值或趋近于一个共同值。然而在实际应用当中,特别是某些控制精度较高的系统,往往对收敛时间要求比较苛刻,会要求所有智能体状态在有限时间内达到一致或以给定精度达到一致。常规的渐进稳定或一致最终有界稳定,特别是在存在不确定因素以及外界干扰的影响时,已不能满足实际需求,因此多智能体系统有限时间一致性问题就显得尤为重要。所谓有限时间一致性,是指系统中各个智能体在合适的控制算法(控制协议/控制律)下能够在有限的时间内达到某个共同的状态。相较于渐进稳定和一致最终有界稳定控制,有限时间稳定控制除了可以保证系统能够获得更快的收敛速度和收敛精度,还可以保证在系统外部有干扰时有更好的抗干扰能力和更强的鲁棒性^[13-14]。因此有限时间稳定性控制有着明显的优点,研究有限时间一致性是很有实际意义的。

虽然分布式控制相较集中式控制有诸多优点,但多智能体系统是一个多变量、强耦合和非线性的复杂网络系统,只能通过局部信息交互来达到整体目标,这使其达到有限时间稳定,实现高稳定度以及高精度控制成为了难题。另外,多智能体系统中各个子系统之间的单向通讯拓扑结构使得上述特性更加明显,对系统高稳定度以及高精度控制,尤其是有限时间稳定控制带来了更大的挑战。因此多智能体系统有限时间稳定控制是分布式控制的重点和难点。虽然目前关于多智能体系统有限时间一致性控制问题已经取得比较丰富的研究成果,但仍有许多有待改进和尚未解决的问题。因此,研究多智能体系统有限时间一致性问题是有必要的,也是极具研究价值和挑战意义的。

1.2 国内外研究现状

1.2.1 多智能体系统分布式一致性问题研究概述

一致性问题作为多智能体系统分布式协同控制研究领域的基础问题,已持续成为国内外研究者的关注热点。一致性问题最早起源于对管理学和统计学的研究,并且在计算科学领域中已经有很长一段时间的历史,这也初步形成了分布式计算理论。在多智能体系统研究领域,一致性是指系统中所有智能体的状态最终趋于相同值。到目前为止,一致性控制已经形成了比较系统的理论体系。

1995年,Vicsek^[15]等人最先研究了自组织粒子群的一致性問題,指出如果粒

子群中的每个粒子均朝其邻居和自身的平均方向移动, 则所有粒子的运动方向随着时间变化将会趋于并保持一致。这一工作为之后其他研究一致性问题的研究提供了基础。2003 年, Jadbabaie 等^[16]对 Vicsek 模型通过仿真得出结论并进行了理论上的分析, 证明了当系统的网络通信拓扑是无向联合连通时, 一阶多智能体系统可最终实现一致, 首次给出了分布式一致性问题的理论分析结果。Olfati-Saber 和 Murray^[17] 于 2004 年提出了用于描述和分析多智能体系统一致性问题的一般性框架, 设计出了单积分器多智能体系统一致性控制算法的基础形式, 进而总结出了研究一致性问题的理论体系, 为多智能体的一致性研究做出了开创性的工作。与此同时, Moreau^[18]应用凸性理论和集值 Lyapunov 方法分析了离散多智能体系统的一致性, 指出当智能体之间的耦合满足一定的凸性条件并且通信拓扑结构是联合连通时, 则多智能体系统将会达到一致。在 Jadbabaie 等人工作的基础上, Ren 和 Bread 进一步展开研究, 针对单积分器多智能体系统, 将系统能够实现一致性的充分条件推广到更一般的情形——含有一个有向生成树^[19-20]。Cortés 在文献^[21]中分析和设计了一致性算法使得多智能体系统最终实现 χ -一致性, 即最终的一致性状态是关于所有智能体初始状态的某个函数。在文献[22]中, Ren 和 Atkins 针对双积分器模型得出即使网络拓扑含有一棵有向生成树, 多智能体系统也不一定能够达到一致, 只有控制器中的参数 γ 大于一个与网络拓扑所对应 Laplacian 矩阵的特征值有关的常数, 多智能体系统才能达到一致。在文献[23]和[24]中, Yu 给出了有向双积分器多智能体系统达到一致的充分条件: 第一, 网络拓扑含有一棵有向生成树; 第二, 网络拓扑所对应 Laplacian 矩阵的实部和虚部需满足一定条件。文献[25]和[26]分别给出了在输入饱和限制下双积分器多智能体系统分布式一致性控制协议。Wang[27]等针对一类含有时变控制增益以及不可线性分解的不确定非线性因素的二阶多智能体系统, 设计了分布式自适应控制算法, 有效解决了非线性多智能体系统一致性问题。

以上文献关于一致性的算法, 都是使得系统最终实现一致性, 并且最终的一致性状态都是和所有智能体初始状态有关的某个函数, 也就是所谓的 χ -一致性^[21], 其中包括平均一致性^[28-31]。更多关于多智能体系统一致性研究的结果可参考综述[20]和[32]。然而在一些实际应用中, 所有智能体状态需最终收敛于某个指定值或者参量。这就是一致性跟踪问题, 即所谓的领导-跟随 (Leader-Follower) 一致性, 其中领导者 (Leader) 是发布命令 (信息) 者, 它可以向跟随者 (Follower) 发布信息, 但不接收来自跟随者的信息, 所以它的运动通常独立于跟随者, 但又会对其行为造成一定影响。在这类问题中, 领导者的状态决定了控制系统最终的一致状态。在多智能体系统一致性问题当中, 具有领导者的一致性跟踪问题是非常重要的一类问题, 迄今为止已经吸引了学者们的广泛关注, 也已经有很多关于

这方面的研究结果^[16,33-44]。Ren^[33]针对一阶多智能体系统在含有一个时变领导者的情况下,设计出了几种分布式控制算法,解决了系统的协调跟踪一致的问题。Qin^[34]等考虑了二阶多智能体系统对于时变参考信号的协调跟踪控制问题。Cao^[35]等针对含时变参考信号的多智能体系统,在离散形式下研究了其一致性追踪控制问题。在文献[39]中, Ren 等人对一类二阶连续时间多智能体系统的一致性进行了更为详尽的研究,证明了在无向通信拓扑和有向通信拓扑这两种情况下系统的一致性与控制增益和采样周期均有关,并给出了系统实现一致的充要条件。在文献[41]和[42]中, Hong 等假设每个跟随者都能够获得领导者的信息,在此情况下设计出了分布式控制算法,实现了多智能体系统的一致跟踪。在文献[43]中, Cao 等给出了一种非连续的滑模控制协议,在多智能体系统含有动态领导者的情况下实现了精确追踪。Wang 和 Song^[44]等对一类含有时变控制增益以及不可线性参数分解化的不确定非线性因素的高阶多智能体系统进行了研究,设计了分布式自适应控制算法,解决了高阶非线性多智能体系统的跟踪控制问题。Cao 和 Ren^[45]针对于多智能体系统中有多个领导者的情况,定义了分布式包含控制,并给出了多智能体单积分器系统的相关结果。在文献[46]中, Cao 等针对双积分器多智能体系统,给出了相应的分布式包含控制协议。在此基础上, Mei^[47]等进一步研究了多拉格朗日系统的分布式包含控制。Li^[48]等将前面所得分布式包含控制结果进一步推广到一般线性系统中。

由于收敛速度是评价多智能体系统一致性控制协议好坏的一个重要性能指标,近几年来许多研究者们投入大量精力在如何提高多智能体系统达到一致性的收敛速度^[17,49-54]上面。Olfati-Saber 等人[17]通过研究发现多智能体系统通信拓扑所对应拉普拉斯 (Laplacian) 矩阵的第二最小特征值是影响一致性收敛速度的关键因素,增大第二最小特征值,则可以使得收敛速度加快。在文献[49]中, Olfati-Saber 又进一步对小规模网络中的超快一致性问题进行了研究,发现可以通过仅改变各智能体间的内部信息流而不增加通信拓扑结构边数来增大通信拓扑拉普拉斯矩阵的第二最小特征值,而这种改变对其最大特征值的影响并不大。然而随后在文献[50]中, Nosrati 等人通过研究指出忽略这种改变对通信拓扑最大特征值的影响其实并不正确。Xiao^[51]等基于半定凸规划理论研究了多智能体系统通信拓扑中边的权值设计问题,发现小规模的连接拓扑可以有大的代数连通度。在文献[52]中, Kim 等通过确定通信拓扑图中的最佳顶点位置,来寻找带有更大代数连通度的拓扑结构。Jin 等人在文献[53]中提出一个新的多点接力控制策略来代替使用重边策略,指出在不改变通信拓扑结构的情况下,这种控制策略不仅可以使多智能体系统实现一致,还可以提高代数连通度。Yang^[54]等在卡尔曼滤波的基础上设计出了一个一致性算法,发现只改变通信拓扑结构中的小部分连接就可以大幅度提高一致性的收

敛速度。

1.2.2 多智能体系统有限时间一致性控制问题研究概述

上一小节提到的文献虽然可以通过最大化代数连通度来加快收敛速度，但这些文献都只是试图寻找和构造合适的通信拓扑结构，而不是设计有效高性能的一致性控制协议，并且多智能体系统仍然是渐进达到一致而不是在有限时间内实现一致。收敛精度和速度是衡量控制好坏的重要指标，在某些实际应用中渐进一致收敛已不能满足要求了，系统往往被要求在有限时间内达到稳定一致，所以研究有限时间一致性就显得尤为重要。与渐近一致性相比较，有限时间一致性不但具备更快的收敛速度而且对外界扰动有更强的鲁棒性^[13-14]。凭借其显著的优点，有限时间一致性控制法在近几年已经引起了众多研究者们的关注^[55-113]。

Weiss 等于 1965 年在文献[55]中最早提出了有限时间收敛稳定的概念，并深入分析了非线性系统的有限时间稳定性，接着又在文献[56]中进一步将有限时间稳定性理论推广到带有扰动的非线性系统中，给出了有限时间有界概念的雏形。不过这些研究还只是局限在稳定性能的分析上，并没有关于控制器设计的分析。目前关于有限时间稳定性控制的相关文献中提及到的有限时间控制方法按控制信号连续性主要分为三大类：不连续性控制、连续性控制和连续且光滑性控制。其中不连续有限时间控制方法主要包括符号函数反馈控制法和终端滑膜（Terminal Sliding Mode, TSM）控制法；连续有限时间控制方法主要包括单分数阶状态反馈控制法、齐次有限时间控制法和加幂积分控制法；连续且光滑有限时间控制方法主要是基于速度转换的一般状态反馈法。

符号函数反馈控制：符号函数反馈控制法是基于系统状态符号函数的一类断续控制方法。以简单的一阶线性系统 $\dot{x} = u$ 为例，其中 x, u 分别为系统状态和控制输入，断续控制的基本形式就是

$$u = -c \operatorname{sgn}(x)$$

其中 $c > 0$ 为任意设计常参数。此种控制是基于符号函数的控制，因此是断续的，在此种断续控制下，系统状态在有限时间收敛到平衡点，其有限收敛时间满足

$$T \leq x(t_0) / c。$$

基于符号函数的控制可以保证系统的有限时间稳定性，并且也可以有效抑制扰动，但是不连续控制项的存在会引起系统出现抖振现象。Cortes^[57]将这种基于符号函数的断续控制方法用于一阶多智能体系统当中，并分析了多智能体系统如何在这种不连续梯度流控制下达到有限时间一致。Chen^[58]等将该方法应用到了满足特定条件的有向通信拓扑下的一阶线性多智能体系统中，得到有限时间收敛结果。Li 和 Qu^[59]进一步将该方法拓展应用到有向切换拓扑以及联合强连通拓扑条件下的一阶非线性多智能体系统中，得到有限时间一致性结果。Zhang^[60]等针对满足细

节平衡的固定有向拓扑条件下带有扰动的一阶多智能体系统，设计了基于符号函数的相对状态反馈的不连续控制协议，并深入分析了系统的有限时间收敛特性。Franceschelli^[61]等在切换拓扑条件下设计出了分散式控制算法，通过不连续协议来消除未知有界时变扰动的影响，从而使得多智能体系统在有限时间内达到近似一致性。Zuo^[62-63]等针对一类非线性多智能体系统，设计出了整体连续时不变的一致性控制协议，使得对于任意给定的初始条件，系统的收敛时间都是有限的并且有固定上界。Wen 等在文献[64]中，分别在无向和有向通信拓扑结构下，利用符号函数断续控制方法设计了仅基于位置信息的不连续协议，解决了系统的有限时间跟踪问题。在文献[65]中，Meng 等针对带有动态领导者（Leader）并含有有界外部扰动的多智能体系统，仅利用位置信息设计出了基于 super-twisting 算法的分布式观测器，并基于该观测器进一步设计出了不连续一致性追踪协议，使得所有跟随者的状态在有限时间内和领导者的状态达到同步。Fu 和 Wang^[66]针对一类含有匹配扰动不确定性的高阶多智能体系统，基于分布式观测器和相对状态，设计出了一致性协议，解决了该系统的有限时间稳定性问题。

终端滑膜控制：滑膜控制是一类特殊的变结构控制，由 Emelyanov 和 Taran 在文献[67]中提出，因其具有独特的鲁棒性，因此为不确定系统提供了一种有效的控制方法，其控制思想则是通过滑膜控制作用，系统轨迹在有限时间内到达滑膜面并在滑膜面上产生滑膜动态^[64]。Yu 和 Man 在文献[68]中提出了终端滑膜（TSM）控制的概念，其中 TSM 和快速 TSM 的基本形式分别如下：

$$s = \dot{x} + \beta x^{q/p} = 0,$$

$$s = \dot{x} + \alpha x + \beta x^{q/p} = 0,$$

其中 $x \in R$, $\alpha, \beta > 0$, $q > p > 0$ 为任意正整数，且 p, q 为奇数。则上述 TSM 系统状态和快速 TSM 系统状态分别在有限时间内收敛，其中有限收敛时间分别满足：

$$T = \frac{1}{\beta(1-q/p)} |x_0|^{1-q/p},$$

$$T = \frac{1}{\alpha(1-q/p)} \ln \frac{\alpha |x_0|^{1-q/p} + \beta}{\beta}.$$

这种形式的终端滑膜控制可以使得系统在有限时间内收敛，并且对于抑制扰动也是一种非常有效的方法^[69-70]，但缺点就是存在奇异性问题。在文献[71]中，Khoo 首次设计出了一个基于多滑膜面的观测器来观测时变并且未知的领导者的速度，并基于终端滑膜设计出了分布式一致控制协议，使得系统在有限时间达到一致。Zou^[72]等将终端滑膜控制应用到了刚性航天器姿态协同的控制中，设计出了基于快速终端滑膜的一致性协议，并且利用鲁棒控制项有效抑制了外界扰动。基于非奇异终端滑膜控制方法，Chen^[73]等针对多欧拉—拉格朗日系统，设计出了非奇异不

连续一致性控制协议，解决了该系统的有限时间一致性追踪问题。在文献 [74] 中，Ghasemi 等针对由全激励欧拉-拉格朗日动态组成的多智能体系统，基于非光滑滑膜面设计出了一致性控制协议，使得当系统轨迹在滑膜面上滑动时，系统状态可以在有限时间内到达指定位置从而实现一致性。基于非奇异终端滑膜控制算法，He^[75]等针对包含加速度未知的动态领航者和带有界扰动的跟随者的多刚性航天器系统，设计出了非线性一致性控制协议，实现了有限时间姿态同步和跟踪控制。Cao^[76]等分别针对单积分器和双积分器多智能体系统，设计出了基于滑膜观测器的分布式一致性协议，并成功运用到了编队控制问题中。Kamble 等在文献[77]中设计出了一个新颖的扭曲的滑膜面，在有向拓扑以及动态领导者输入未知的情况下，解决了多智能体系统的有限时间一致性跟踪问题。Li 等在文献[78]中针对带有不确定非线性动态的二阶多智能体系统，基于快速终端滑膜方法设计出了一致性追踪协议，实现了系统的有限时间一致性跟踪。Zhao^[79]等基于非奇异终端滑膜控制算法，针对有向拓扑条件下带有有界输入的领导者 and 受扰动影响的跟随者的二阶多智能体系统，设计出了一致性追踪协议，使得系统在有限时间内实现了一致性跟踪。Yang^[80]等针对多欧拉-拉格朗日系统，利用所设计的扰动观测器来补偿低通耦合不确定端，并进一步设计出了滑膜一致性追踪协议，抑制了观测器没有完全补偿的扰动，最后通过扰动观测器和滑膜控制器共同作用，使得多智能体系统在有限时间内实现精确同步跟踪。

以上提到的两种控制策略都是不连续的，而不连续控制项的存在会导致系统出现抖振现象，这在实际系统中是不希望出现的，因此能够避免抖振现象的连续控制器是非常有必要的。

目前关于有限时间控制的相关工作中，有大量连续性有限时间控制结果都是基于 Haimo 于 1986 年在文献[13]中提出的有限时间稳定性理论。该理论简述如下：假设存在一个连续函数 $V(x): D \rightarrow R$ ，满足条件：i) $V(x)$ 是正定的；ii) $\dot{V}(x)$ 在 $D \setminus \{0\}$ 上连续且负定；iii) 存在实常数 $c > 0$ 和 $\alpha \in (0,1)$ 以及邻域 $U \subset D$ 使得在 $U \setminus \{0\}$ 上，成立

$$\dot{V}(x) \leq -cV(x)^\alpha,$$

则系统的平衡点是有限时间稳定平衡点，并且有限收敛时间满足

$$T(x) \leq \frac{1}{c(1-\alpha)} V(x)^{1-\alpha}.$$

单分数阶状态反馈控制：以上述理论为基础，Bhat 等在文献[81]中进一步提出连续自治系统的有限时间稳定性理论，指出连续自治系统是有限时间稳定当且仅当该系统是 Lyapunov 稳定并且系统状态在有限时间收敛到平衡点，并设计出了一类基于分数阶状态反馈的有限时间控制方法。Wang 和 Xiao^[82]将该有限时间稳定性

理论应用到了一阶线性多智能体系统分布式一致控制中，设计出了基于单分数阶连续状态反馈的有限时间控制算法，建立了两个有限时间一致性结果，分别是系统在无向连通拓扑条件下达到有限时间平均一致以及系统在含有一棵生成树且满足细节平衡的有向拓扑条件下达到有限时间一致。Xiao 和 Wang^[83]等进一步将此有限时间一致性控制协议拓展应用到一阶线性多智能体系统的编队控制中。在此基础上，Xiao 和 Wang 等针对一阶线性多智能体系统，在文献[84]中又进一步提出一个更一般的连续有限时间一致性控制协议，该协议是基于一类一般非线性连续函数下的连续状态反馈，不但可以得到有限时间稳定性结果，还可以通过调节控制参数得到渐进一致性结果。Cao 和 Ren^[85]研究了一阶非线性多智能体系统的有限时间一致性控制问题，在有向切换拓扑条件下，建立了有限时间一致性控制结果。

齐次系统有限时间控制：目前还有一大部分关于连续有限时间控制的工作是基于齐次系统的有限时间稳定性理论，该理论最早由 Bhat 于 1997 年在文献[86]中提出，指出齐次系统是有限时间稳定当且仅当满足系统是渐近稳定并且带有负齐次度。在此基础上，Hong^[87-90]等进一步深化了该理论，并将其用于系统有限时间控制中。该理论主要基于齐次系统以及齐次系统的相关性质。一个数量函数 $V(x)$ 被称之为齐次函数，如果对于所有的 $\varepsilon > 0$ ，有

$$V(\varepsilon^{r_1}x_1, \dots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^\sigma V(x)$$

成立，其中 $r_i > 0$ ， $i = 1, \dots, n$ ， $\sigma > 0$ 为齐次度。一个向量 $f(x) = [f_1(x), \dots, f_n(x)]^T$ 是齐次的，若对于所有的 $\varepsilon > 0$ ，成立有

$$f_i(\varepsilon^{r_1}x_1, \dots, \varepsilon^{r_n}x_n) = \varepsilon^{k+r_i} f_i(x), \quad i = 1, \dots, n$$

其中 $k \in \mathbb{R}$ ， $r_i > 0$ ， $i = 1, \dots, n$ 。其中齐次系统的一个重要性质为：对于系统

$$\dot{x} = f(x) + \hat{f}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

其中 $f(x)$ 是齐次度为 $k < 0$ 的 n 维连续齐次向量， \hat{f} 是一个连续向量，且满足 $\hat{f}(0) = 0$ 。如果 $\dot{x} = f(x)$ 的零解是渐进稳定的，并且对于所有的 $x \in S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ ，成立

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \hat{f}_i(\varepsilon^{r_1}x_1, \dots, \varepsilon^{r_n}x_n) / \varepsilon^{k+r_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

则系统 $\dot{x} = f(x) + \hat{f}(x)$ 是局部有限时间稳定的。Hui 和 Bhat^[91]等将该齐次有限时间稳定性理论应用到一阶齐次线性多智能体系统分布式协同控制中，指出一个齐次系统是有限时间半稳定当且仅当该系统是半渐近稳定并且满足负齐次度条件。Du^[92]等结合有限时间控制以及齐次系统理论，针对一类二阶非线性多智能体系统，设计出了基于观测器的有限时间输出反馈控制器，实现了有限时间一致性跟踪控制。基于齐次有限时间稳定性理论，Zhang^[93]等研究了有向拓扑条件下二阶线性多智能体系统的有限时间追踪问题，分别针对含有一个领导者和多个领导者情况设计出了不依赖于速度信息的有界控制率，分别实现了有限时间追踪和有限时间合

围。Guan^[94]等利用齐次有限时间控制理论,研究了二阶线性多智能体系统分别在固定拓扑和切换拓扑条件下的有限时间一致性追踪控制问题。在文献[95]中,Lu等针对带虚拟领导者的多智能体系统,设计出了基于齐次性的分布式有限时间一致性协议,并进一步利用饱和函数来取代符号函数,消除了 Non-Lipschitzian 系统中的抖振现象,实现了有限时间一致性跟踪。Zhao^[96]等研究了多欧拉-拉格朗日系统的一致性跟踪问题,设计出了基于相对状态反馈的有限时间一致性协议,并通过齐次有限时间稳定性理论和 Lyapunov 理论深入分析了系统的稳定性。Li^[97]等研究了多水下机器人系统的有限时间一致性和避碰撞问题,基于齐次有限时间稳定理论,首先针对无领导者情况设计出了有限时间一致性协议,然后针对领导-跟随者系统,设计出了基于分布式观测器的一致跟踪协议,最后将两种协议用于多水下机器人系统,实现了避碰撞以及有限时间一致性目标。Lu^[98]等针对带有有界控制输入二阶线性多智能体系统,设计出了基于齐次性的有限时间一致性协议,分析了有界一致性协议下系统的稳定性,实现了有限时间一致性追踪。Zhang^[99]等考虑了双积分器多智能体系统在速度不可直接测量以及输入饱和情况下的有限时间一致追踪问题,基于齐次性理论设计出了基于一阶和高阶有限时间观测器的一致性协议,实现了有限时间追踪,并进一步将该方法应用到了有限时间合围控制问题中。在文献[100]中,Yu 等针对高阶多智能体系统,结合自适应方法和齐次有限时间稳定性理论,设计出了自适应有限时间一致性控制算法,实现了有限时间一致性追踪,并利用齐次 Lyapunov 函数和齐次矢量场理论深入分析了系统的稳定性。

加幂积分 (Adding Power Integration) 控制: 还有大量连续有限时间控制是基于加幂积分技术。该技术最早由 Caron 在文献[101]中提出,之后被 Lin^[102-104]等广泛应用于含非匹配不确定性的非线性系统控制中。Li^[105]等将加幂积分技术引入到二阶多智能体系统分布式协同控制中,从而将基于单分数阶状态反馈的有限时间控制方法从一阶多智能体系统的应用成功拓展到二阶线性多智能体系统的应用,在无向连通拓扑条件下,设计出了基于虚拟控制器的一致性控制协议,建立了无领导者情形下有限时间一致性结果,并针对领导-跟随者情形,进一步设计出了用于观测领导者速度的分布式观测器,然后基于此观测器给出了一致性跟踪协议,完成了有限时间一致性跟踪目标。Du^[106] 等针对带有扰动的二阶线性多智能体系统,运用非光滑反步法结合加幂积分技术设计出了连续非光滑一致性协议,通过调整控制协议中的幂积分项增强了系统抑制扰动的能力。在 Li^[105]等工作的基础上,Du^[107] 等进一步研究了二阶线性多智能体系统在速度状态未知以及无向拓扑条件下的有限时间协同控制问题,结合加幂积分技术,设计出了基于输出反馈分布式观测器的有限时间一致性协议,并进一步将该协议应用到编队控制中,其中不仅包括固定编队还包括动态编队。Wang^[108]等利用加幂积分技术,设计出了基

于分布式有限时间观测器的控制协议，解决了无向拓扑条件下二阶线性多智能体系统的有限时间合围问题。Huang^[109]等在Li^[105]等工作的基础上，进一步研究了无向拓扑条件下含有非线性的二阶多智能体一致性控制当中，其中系统非线性满足可线性化分解条件。Khoo等在文献[110]中，针对带有不确定动态的高阶单输入单输出（Single Input Single Output, SISO）的非线性多智能体系统，运用加幂积分技术，解决了该系统的有限时间一致性问题。Ou^[111]等针对多个非完整机器人系统，结合加幂积分技术，设计出了连续的分布式一致性追踪控制协议，使得系统中所有的跟随者（Followers）在有限时间内与给定的期望状态达到同步。

基于速度转化的一般状态反馈控制：Song等在2016年针对一般高阶非线性系统，提出基于速度转换的一般状态反馈有限时间控制方法^[112-113]，该控制是连续光滑的，并且可以保证有限收敛时间可以由设计者提前给定，和初始状态以及其他任何设计参数均无关。其基本思想是基于系统转换，利用一个在有限时间内趋于无穷的时变比例函数将原系统转化为一个新的系统，通过证明新系统输入-状态-稳定（Input-State-Stability, ISS）^[114-118]，得出原系统是有限时间输入-状态-稳定（Finite Time Input-State-Stability, FT-ISS）^[119-120]，从而得出原系统状态在有限时间收敛到平衡点。其中起关键作用的是速度转化函数，

$$\mu(t-t_0) = \left(\frac{T}{T+t_0-t} \right)^{n+m}$$

其中 n 为系统阶数， $m \geq 1$ ， T 为系统收敛的有限时间。利用该速度转化函数，引入如下系统转换，

$$\begin{aligned} w_1(t) &= \mu(t-t_0)x_1(t), \\ w_q(t) &= dw_{q-1}(t)/dt, \quad q=1, \dots, n. \end{aligned}$$

该方法是通过引入速度转换函数来实时调节控制增益，控制输入是基于一般状态反馈，因此不仅是连续的，并且可以由控制输入导数连续得出控制输入是光滑有界的，因此该控制是连续光滑有限时间控制。该有限时间方法中的有限收敛时间 T 是可以由设计者提前设定，和任何初始状态以及其他系统设计参数均无关，这也是此方法相较于其他有限时间控制方法一个很大的优势。

1.3 多智能体系统有限时间一致性控制目前存在的问题

由上一小节对相关文献的总结分析可知，多智能体系统有限时间控制问题已经引起国内外研究者的广泛关注，并且很多研究者都针对该问题进行了深入的研究并取得了一些突破，但在针对带有复杂非线性多智能体系统的有限时间控制以及控制输入为连续光滑的有限时间控制方面还存在不少问题有待解决：

- ① 对于含有未知时变控制增益以及不可线性参数化分解的非线性因素的多

智能体系统，保证其实现高稳定度以及高精度收敛一直是研究的重点和难点。目前存在的关于多智能体系统分布式协同控制的大部分工作都是针对线性系统或者含可线性参数化分解的不确定性因素的非线性系统。Wang 等在文献[27]中针对含有未知时变控制增益以及不可线性参数化分解的非线性因素的二阶多智能体系统设计出了分布式一致性控制算法，保证了系统的稳定性，但只是一致最终有界（Uniformly Ultimately Bounded, UUB）收敛结果。对于这样的复杂多智能体系统，实现一致最终有界已经是比较困难也是很有挑战性的，更不用说实现有限时间稳定。因此，如何设计分布式控制器，使得具有如此复杂不确定性因素的非线性多智能体系统实现有限时间稳定，是亟待解决的理论问题。

② 目前大多数文献研究的都是关于一阶或二阶非线性多智能体系统的有限时间一致性问题，并且系统动态模型中的控制增益大都假设为单位控制增益以及系统中存在的非线性因素都假设为可线性参数化分解或者已知上界，而针对高阶非线性多智能体系统的有限时间一致性控制问题的研究工作比较少，尤其是针对含有未知时变控制增益以及不可参数化分解的非线性扰动影响下多智能体系统的有限时间一致性跟踪控制问题的研究工作还几乎没有。

③ 对于含有非匹配不确定性的严格反馈（Strict-Feedback）系统或纯反馈（Pure-Feedback）系统，设计分布式控制器使得系统实现有限时间稳定是多智能体系统控制中的难点问题，其中系统所含的非匹配不确定性因素，特别是纯反馈系统中每一阶动态都含有未知时变控制增益以及未知有界扰动，使得分布式控制器的设计和分析都比较困难。实际系统中很多系统模型都可以归结为此种形式，因此考虑此类系统的有限时间稳定性控制问题具有重要的意义，同时也具有很大的挑战性。

④ 对于分布式控制问题，在宽松的通信拓扑条件下达到好的稳定性和收敛效果，是除了收敛速度之外，衡量分布式控制器好坏的另一个重要的指标。目前有关有限时间分布式控制的工作中，大部分都是在无向拓扑条件基础上所做的研究[105-109]。有向拓扑条件下得到的有限时间稳定性结果，一部分是基于符号函数的断续控制，还有一部分是假设系统非线性因素满足齐次性条件，而断续控制会导致系统出现抖振现象，同时系统非线性因素满足齐次性也是很强的假设条件，这无疑限制了此两类方法在实际系统中的应用。因此，设计合适且连续的有限时间分布式控制算法，使其适用于有向通讯拓扑情况，是迫切需要解决的理论问题。

⑤ 目前存在的有限时间分布式控制方法要么是断续控制，要么是连续但不光滑控制，如何设计出即可避免奇异性又满足绝对连续且光滑的有限时间分布式控制器，并且保证收敛时间可以人为提前设定，不受初始条件和其他任何设计参数影响，是非常有意义同时也是非常有挑战性的一项工作。

1.4 本文的研究工作和主要内容安排

本文以多智能体系统有限时间控制问题为研究对象，紧紧围绕以上提到的目前多智能体系统有限时间一致性控制研究中存在的问题进行研究，解决了含有未知时变控制增益以及不可线性参数化分解非线性因素的二阶和高阶多智能体系统在有向拓扑条件下的有限时间一致性控制问题；并研究了高阶纯反馈系统的有限时间一致性问题，进一步将该一致性控制算法应用到高阶纯反馈系统合围控制中；针对一阶线性多智能体系统，基于新的给定有限时间稳定性理论，设计出了连续光滑有限时间一致性控制协议，并将该一致性协议应用到了合围控制中；解决了高阶线性多智能体系统的给定有限时间全状态一致性跟踪问题，采用给定有限时间观测器在提前给定有限时间内观测出领导者的各阶状态，结合高阶系统转换矩阵理论，设计出了给定有限时间一致性追踪控制协议，使得系统在提前给定有限时间内达到稳定，该算法保证了闭环系统内所有信号均光滑有界，并基于该控制思想成功解决了高阶线性多智能体系统的给定有限时间合围控制问题。

本文共分九章，每一章的研究内容具体安排如下：

第 1 章为绪论。首先介绍了多智能体系统有限时间一致性控制研究的背景和意义，然后较为详细地阐述了多智能体系统有限时间一致性控制国内外研究的现状，最后介绍了论文的主要研究内容与论文结构安排。

第 2 章为预备知识。首先介绍了图论相关知识，然后介绍了有限时间稳定性相关定义与性质，最后给出了分数阶有限时间控制理论知识以及给定有限时间控制相关理论。

第 3 章研究了有向拓扑条件下二阶可参数化分解非线性多智能体系统的有限时间一致性控制问题，该系统含有未知常数控制增益以及可线性参数化分解的不确定非线性因素。

第 4 章研究了有向拓扑条件下二阶不可参数化分解非线性多智能体系统的有限时间一致性控制问题，该系统不仅含有未知时变控制增益，而且含有不可线性参数化分解的不确定非线性因素，并进一步研究了该系统在出现未知执行器故障情况下的自适应容错有限时间一致性控制问题，之后研究了高阶非仿射多智能体系统的在有向拓扑条件下的有限时间一致性控制问题。

第 5 章研究了含非匹配不确定性因素的高阶纯反馈多智能体系统的有限时间一致性追踪控制问题，在无向拓扑条件下，结合分数阶动态面技术、反衍控制技术、自适应控制方法以及分数阶状态反馈法，设计出了有限时间一致性追踪控制协议，从而解决了高阶纯反馈多智能体系统的有限时间一致性追踪控制问题。

第 6 章针对一阶线性多智能体系统，基于给定有限时间稳定性理论，设计出了连续光滑给定有限时间一致性控制协议，使得系统分别在无向拓扑和有向拓扑

条件下在提前给定有限时间内达到一致，并且保证闭环系统内所有信号（包括控制输入信号）均光滑有界。

第 7 章研究了有向拓扑条件下高阶线性多智能体系统的给定有限时间全状态一致性追踪控制问题。基于给定有限时间稳定性理论，首先设计出了有限时间观测器，使得每一个跟随者(follower)能在提前给定有限时间内精确观测出领导者(leader)的各阶状态值，在此基础上，进而给出针对该多智能体系统的给定有限时间分布式控制协议，使得该系统在提前统一给定的有限时间内达到稳定，并且跟随者的各阶状态都与领导者相应的各阶状态达到精确同步，同时保证了闭环系统的所有信号，包括控制输入信号，都是平滑有界的，并给出了严格理论证明。

第 8 章是编队合围应用部分，主要基于前面几章中所提出的（给定）有限时间稳定性控制理论，研究了多智能体系统的（给定）有限时间合围或编队-合围控制问题。

第 9 章是结论与展望。对全文的研究工作及创新点进行了总结，并对下一步的工作进行了展望。

图 1.6 给出了论文研究内容结构图以及各章之间的关系。

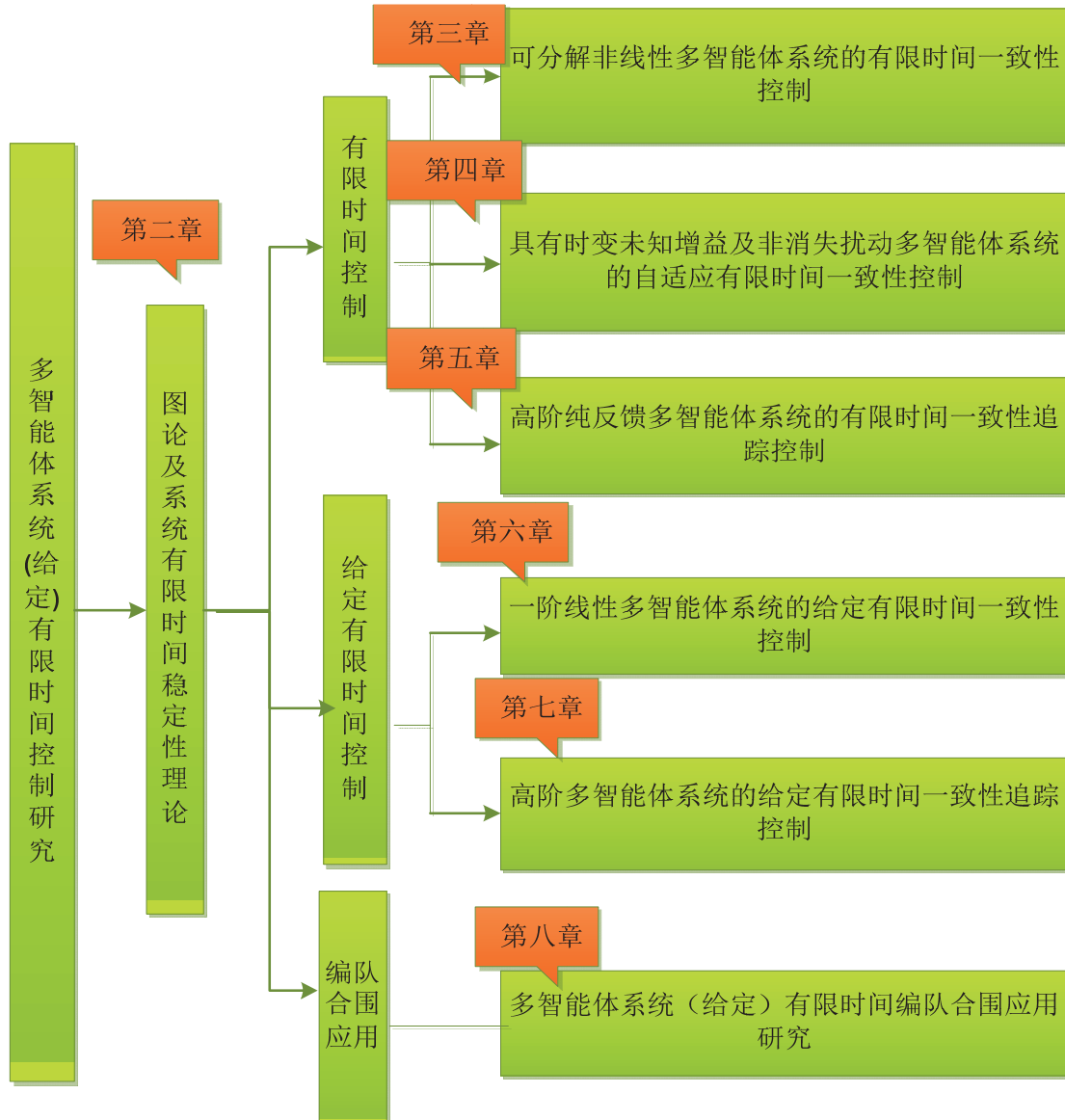


图 1.6 论文研究内容结构图

Figure 1.6 Content structure of the thesis

2 预备知识

本章主要介绍论文所用到的一些概念和相关定理，为后续章节奠定理论基础。首先，介绍代数图论的有关知识和矩阵理论的相关内容；其次，分别给出一般系统渐进稳定性以及有限时间稳定性的相关定义、定理以及性质；最后，给出与多智能体系统分布式控制相关的一些一致性、编队、合围等概念。

2.1 代数图论

2.1.1 图论基本概念

本课题主要研究具有局部网络通讯的多智能体系统的协调分布式控制行为，其中多智能体系统中各个智能体之间的网络通讯关系可以由代数图论中有（无）向图中的节点以及有向边的关系完美地诠释出来。多智能体系统中各个智能体可视为一个‘节点’，各智能体之间的信息交互路径可由一条有方向性的‘边’表示，整个多智能体系统之间的网络通讯关系可以映射为一张具有节点和边的图。本小节主要介绍代数图论的相关内容，其主要内容来自参考文献[1]。图是由若干顶点和连接两顶点的边构成，记为 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ ，其中 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$ 表示节点集合，而 $\mathcal{E} \in (\mathcal{V} \times \mathcal{V})$ 是连接两顶点的边组成的集合， $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 表示边权值的邻接矩阵。若连接两顶点之间的边是有向的，则图 \mathcal{G} 是有向图；否则，图 \mathcal{G} 是无向图。无向图是有向图的一种特例。有向边 $\varepsilon_{ij} = (v_i, v_j)$ 代表智能体 j 可以获得智能体 i 的信息，但智能体 i 不一定可以获得智能体 j 的信息，其中， v_j 是母顶点， v_i 是子顶点。如果 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ ，则称顶点 j 是顶点 i 的一个邻居， $\mathcal{N}_i = \{v_j \in \mathcal{V} \mid (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$ 表示智能体 i 的邻居集合。有向图的路径是由边 $(v_{i_1}, v_{i_2}), (v_{i_2}, v_{i_3}), \dots$ 组成的有向序列，其中 $v_{i_k} \in \mathcal{V}$ 。对于邻接矩阵 $\mathcal{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，其中 a_{ij} 表示边 (v_j, v_i) 的权值，若 $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$ ， $a_{ij} > 0$ ；否则， $a_{ij} = 0$ 。本文假设单个顶点与自身没有连通性，即认为 $a_{ii} = 0$ 。对于无向图，有 $a_{ij} = a_{ji}$ ，所以无向图的邻接矩阵 \mathcal{A} 是实对称矩阵。对于任意一个顶点 i ，其权值入度和权值出度分别定义为 $d_{in}(v_i) = \sum_{j=1}^N a_{ij}$ 和 $d_{out}(v_i) = \sum_{j=1}^N a_{ji}$ 。在有向图中，如果从节点 v_i 到节点 v_j 存在一条有向路径，即 $\{(v_i, v_k), (v_k, v_l), \dots, (v_m, v_j)\}$ ，则称节点 v_j 与节点 v_i 连通。如果有向图内任意两个顶点之间都有路径连接，则称该有向图是强连通（Strongly Connected）图，如图 2.1（b）所示。而对于无向图，如果任意两个顶点之间都存在一条无向路径相连，则称该无向图是连通（Connected）的，如图 2.1（a）所示。如果有向图中任意一个顶点的入度和出度相等，则称该有向图为平衡（Balanced）图；所有无向图均是平

衡图。如果图 \mathcal{G} 中除了一个顶点，该顶点称为根（Root）节点，其余每个顶点均有且仅有一个母顶点，并且如果对于除根顶点外的任意一个顶点，都存在一条有向路径从根顶点到该顶点，则称图 \mathcal{G} 为一个有向树（Directed Tree）。如果有向树含有图内所有节点，则构成了该图的一个有向生成树（Directed Spanning Tree），即图内的所有节点都可以通过有向路径从根节点得到信息，如图 2.1（c）所示。一个图内可以存在多条生成树，例如图 2.1（b）所示的强连通图内每个节点都可以作为根节点，并且存在至少一条有向生成树。

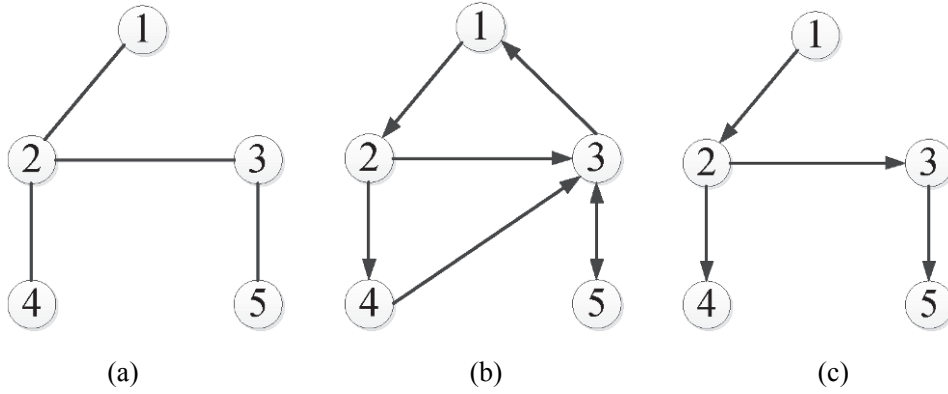


图 2.1 不同网络拓扑图 (a) 无向图 (b) 强连通图 (c) 含有生成树的有向图

Figure 2.1 Different network graph topologies: (a) Undirected connected graph (b) Strongly connected graph (c) Directed graph containing a spanning tree

基于以上不同类型图的介绍，可以看出，有向连通图相较于无向连通图是比较弱的连通类型，可以大大减弱实际系统中对传感器网络以及通讯条件的要求，也更能符合实际多智能体系统中的网络通讯连接关系，因此本论文也主要致力于在有向通讯拓扑条件下研究多智能体系统的分布式协同控制问题。

2.1.2 图论矩阵分析

定义 2.1^[1] 有向图 \mathcal{G} 的拉普拉斯（Laplacian）矩阵定义为：

$$\mathcal{L} = \mathcal{D} - \mathcal{A} \quad (2.1)$$

其中 $\mathcal{D} = \text{diag}\{d_1, \dots, d_N\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是权值入度矩阵， \mathcal{A} 为邻接矩阵。

对于无向图，由于其邻接矩阵 \mathcal{A} 对称，所以 \mathcal{L} 也是对称的，直接称之为拉普拉斯矩阵。但对于有向图， \mathcal{L} 不一定是对称的，往往称之为非对称拉普拉斯矩阵或有向拉普拉斯矩阵。

定义 2.2^[121] 对于矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ，如果对任意 $i \neq j$ ，都有 $a_{ij} < 0$ ，且其所有特征值均具有非负（正）实部，则称为奇异（非奇异） M -矩阵。

引理 2.1^[1] 设 $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是有向图（无向图） \mathcal{G} 的非对称拉普拉斯（拉普拉斯）

矩阵, 则对于有向图(无向图) \mathcal{G} , 其对应的 \mathcal{L} 至少有一个零特征值, 并且其他非零特征值都具有正实部(是正实数)。 \mathcal{L} 仅有一个零特征值且其他非零特征值都具有正实部(是正实数)当且仅当图 \mathcal{G} 有一个有向生成树(是连通的)。另外, $\mathcal{L}1_N = 0_N$, 并且存在一个非负向量 $p \in \mathbb{R}^N$ 使得 $p^T \mathcal{L} = 0_{1 \times N}$, 其中 $p^T 1_N = 1$ 。

引理 2.2^[1] 若图 \mathcal{G} 是无向图, 则成立 $x^T \mathcal{L} x = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (x_i - x_j)^2$ 。若图 \mathcal{G} 是无向连通图, 则有, $\mathcal{L}x = 0_N$ 或者 $x^T \mathcal{L} x = 0$ 当且仅当 $x_i = x_j$ ($i, j = 1, \dots, N$)。

引理 2.3^[1] 设 $x = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T$, 其中 $x_i \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是有向图 \mathcal{G} 的非对称拉普拉斯矩阵, 则以下五个条件是相互等价的:

- 1) 有向图 \mathcal{G} 含有一颗有向生成树;
- 2) $\text{rank}(\mathcal{L}) = N - 1$;

3) \mathcal{L} 有且仅有一个 0 特征值, 其几何重数和代数重数均为 1, 且该特征值所对应的右特征向量为 1_N , 其他非零特征值均具有负实部;

- 4) $(\mathcal{L} \otimes I_m)x = 0_{Nm}$ 当且仅当 $x_1 = \dots = x_N$;

5) 闭环系统 $\dot{x} = -(\mathcal{L} \otimes I_m)x$ 达到渐进一致。特别对于任意初值 $x_i(0)$, $x_i(t)$ 渐进收敛到 $\sum_{i=1}^N p_i x_i(0)$, 其中 $p = [p_1, \dots, p_N]^T \in \mathbb{R}^N$ 是 \mathcal{L} 的 0 特征值所对应的左特征向量, 满足 $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ ($p_i \geq 0, i = 1, \dots, N$)。

对于包含一个领导者和多个跟随者的多智能体系统, 其中领导者是发布命令者, 只发布信息但并不接收来自跟随者的信息, 而只有部分跟随者可以接收来自领导者的信息, 并且每个跟随者与其它跟随者协同合作, 最后达到一致性跟踪, 设领导者 v_0 和跟随者 v_i 之间的权重连接为 b_i , 若跟随者 v_i 和领导者 v_0 之间存在一条有向路径, 则 $b_i > 0$, 否则 $b_i = 0$ 。

引理 2.4^[122] 设 $\mathcal{B} = \text{diag}\{b_1, \dots, b_N\}$, 设 $\mathcal{L} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 是有向图 \mathcal{G} 的非对称拉普拉斯矩阵。如果 \mathcal{G} 含有一颗有向生成树, 则 $\mathcal{L} + \mathcal{B}$ 是非奇异矩阵, 且其所有特征值都有正实部。

对于包含多个领导者和多个跟随者的多智能体系统, 若智能体至少存在一个邻居, 则称该智能体是跟随者, 否则该智能体是领导者。假设该多智能体系统中存在 N 个跟随者和 M 个领导者。用含有 $N + M$ 个顶点的有向图 \mathcal{G} 表示该多智能体系统, 其中每个顶点代表一个智能体。如果在有向图 \mathcal{G} 中, 每个跟随者至少和一个领导者之间存在一条有向路径, 则有向图 \mathcal{G} 含有一颗联合生成树。在此种情况下, 有向图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵可以写为:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

其中 $\mathcal{L}_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}^{N \times M}$ 。

引理 2.5^[123] 若有向图 \mathcal{G} 含有一颗联合生成树, 则 \mathcal{L}_1 是非奇异矩阵, 并且所有 \mathcal{L}_1 特征值的实部均大于零。进一步, 矩阵 $-\mathcal{L}_1^{-1}\mathcal{L}_2$ 中所有元素都是非负的, 且其每一行元素的和均为 1。

2.2 矩阵理论

定义 2.3^[124] 对于矩阵 $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 如果其所有特征值均在左半开平面, 则称 A 是 Hurwitz 矩阵。

定义 2.4^[125] 设矩阵 $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{p \times q}$, 则矩阵 A 与 B 的 Kronecker 积, 也称直积, 定义为:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$$

引理 2.6^[126, 127] Kronecker 积具有以下性质:

- ① $k(A \otimes B) = (kA) \otimes B = A \otimes (kB)$;
- ② $A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C$; $(B + C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A$;
- ③ $(A + B) \otimes (C + D) = A \otimes C + A \otimes D + B \otimes C + B \otimes D$;
- ④ $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C) = A \otimes B \otimes C$;
- ⑤ $(A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T$;
- ⑥ 若矩阵 A, B, C 和 D 是维数合适的矩阵, 则 $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ 。

2.3 有限时间稳定性理论

在系统有限时间控制研究中, 有限时间稳定性理论起着主导作用, 因此本小节主要介绍本论文中要用到的两种稳定性理论, 一种是 Bhat 等在文献[14]和[81]中提到的有限时间稳定性理论, 一种是有限时间输入-状态-稳定性理论^[119]。

定义 2.5^[81] 考虑自治动力学系统:

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0, \quad x(0) = x_0 \quad (2.2)$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在 $x = 0$ 的一个开邻域 D 上连续。如果存在一个 $x = 0$ 的开邻域 $U \subseteq D$ 和一个函数 $T_x: U \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$, 使得 $\forall x_0 \in U$, 系统(2.2)的解 $s_t(0, x_0)$ 有定义, 并且对所有的 $t \in [0, T_x(x_0)]$ 成立 $s_t(0, x_0) \in U \setminus \{0\}$, 以及 $\lim_{t \rightarrow T_x(x_0)} s_t(0, x_0) = 0$ 。则称 $T_x(x_0)$ 为镇定时间。如果系统(2.2)的零解是 Lyapunov 稳定并且是有限时间收敛的, 则称其是有限时间稳定的。若 $U = D = \mathbb{R}^n$, 则称该零解是整体有限时间稳定。

在给出有限时间输入-状态-稳定定义之前, 先给出 \mathcal{K} 类函数和有限时间 \mathcal{KL} 类

函数的定义。

定义 2.7^[115] 如果一个函数 $\gamma(x)$ 是连续, 递增, 并且有 $\gamma(0)=0$, 则称 $\gamma(x)$ 是 \mathcal{K} 类函数。

定义 2.8 考虑函数 $\beta: \mathfrak{R}_+ \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}_+$ 。如果对于每一个固定的时间 t , 函数 $\beta(\cdot, t)$ 是属于 \mathcal{K} 类函数, 对于每一个固定的 s , 函数 $\beta(s, \cdot)$ 是非递增的, 并且当 $t \rightarrow t_0 + T$ 时, $\beta(s, \cdot) \rightarrow 0$, 其中 $T > 0$ 是一个给定有限时间常数, 则称 $\beta(\cdot, t)$ 是有限时间 \mathcal{KL} 类函数。

定义 2.9^[112] 考虑包含未知动态以及未知有界干扰的的动力学系统:

$$\dot{x} = f(x, t, d) \quad (2.3)$$

其中 x 是系统状态, d 是未知系统不确定性和外界干扰, x, d 是任意合适维数的向量。如果存在一个有限时间 \mathcal{KL} 类函数 β 和一个 \mathcal{K} 函数 γ , 使得, 对于所有 $t \in [t_0, t_0 + T)$, 成立:

$$|x(t)| \leq \beta(|x_0|, \mu_1(t-t_0)-1) + \gamma(\|d\|_{[t_0, t]}) \quad (2.4)$$

则称系统(2.3)是有限时间输入-状态-稳定的。

引理 2.7^[87] 考虑自治动力学系统(2.2)。假设存在一个连续函数 $V(x): D \rightarrow R$, 满足如下条件:

- i) $V(x)$ 是正定的;
- ii) $\dot{V}(x)$ 在 $D \setminus \{0\}$ 上连续且负定;
- iii) 存在实常数 $c > 0$ 和 $\alpha \in (0, 1)$ 以及邻域 $U \subset D$ 使得在 $U \setminus \{0\}$ 上, 成立:

$$\dot{V}(x) \leq -cV(x)^\alpha \quad (2.5)$$

则系统的平衡点是有限时间稳定平衡点, 并且有限收敛时间满足:

$$T(x_0) \leq \frac{1}{c(1-\alpha)} V(x_0)^{1-\alpha} \quad (2.6)$$

引理 2.8^[128] 考虑自治动力学系统(2.2)。假设存在一个连续函数 $V(x): D \rightarrow R$, 满足如下条件:

- i) $V(x)$ 是正定的;
- ii) $\dot{V}(x)$ 在 $D \setminus \{0\}$ 上连续且负定;
- iii) 存在实常数 $c > 0$, $0 < \alpha < 1$, $0 < \theta_0 < 1$, $0 < d < \infty$ 以及邻域 $U \subset D$, 使得在 $U \setminus \{0\}$ 上, 成立:

$$\dot{V}(x) \leq -cV(x)^\alpha + d \quad (2.7)$$

则系统在有限时间内达到稳定, 并且有限收敛时间满足:

$$T(x_0) \leq \frac{V(x_0)^{1-\alpha}}{c\theta_0(1-\alpha)} \quad (2.8)$$

并且当 $t \geq T(x_0)$ 时, 系统的状态轨迹收敛到一个紧集集合 Ω 内, 其中

$$\Omega = \left\{ x \left| V(x) \leq \left(\frac{d}{c(1-\theta_0)} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \right. \right\} \quad (2.9)$$

2.4 本章小结

本章主要介绍了多智能体系统协同一致性以及有限时间稳定性问题所用到的基本概念和定理。首先给出代数图理论的基本概念和基本性质，为研究多智能体系统分布式一致性控制提供理论基础，然后给出了有限时间稳定性理论的相关概念和性质，为本文的研究提供理论依据。

3 可参数化分解非线性多智能体系统的有限时间一致性控制

3.1 引言

本章主要研究了有向拓扑条件下二阶可参数化分解非线性多智能体系统的有限时间一致性控制问题，该系统含有未知定常控制增益以及可线性参数化分解的不确定非线性因素。在本章第二节中，结合加幂积分技术，自适应方法和有限时间稳定性理论，首先设计出了基于分数阶状态反馈以及自适应律的有限时间一致性控制协议，并给出了基于 Lyapunov 稳定性理论的有限时间稳定性的严格理论证明。该结果将文献[105-109]中针对二阶多智能体的有限时间一致性控制结果由无向拓扑条件拓展到了有向拓扑条件，大大放宽了加幂积分有限时间控制方法中对通讯拓扑结构的要求。通过进行仿真实验，对所设计的有限时间一致性控制算法的有效性和优越性进行了验证。

本章引理 3.4-3.6 在 Automatica 发表，见攻读博士期间所取得主要学术成果[4]，本章主要内容已被 IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems 杂志接收，见攻读博士期间所取得主要学术成果[8]。

3.2 多智能体系统有限时间一致性控制

将二阶非线性多智能体系统的有限时间一致性控制由双向连通图拓展到单向连通图是迫切需要解决的问题，同样也是非常具有挑战性的问题。其中单向连通图中非对称 Laplacian 矩阵无论对有限时间控制器设计还是对有限时间稳定性分析都带来了难题。本文通过构造一个新的 Laplacian 矩阵并通过严格理论证明得出相应矩阵的一个重要性质，构造出合适的 Lyapunov 函数，从而解决了有向拓扑条件下二阶非线性多智能体系统的有限时间一致性控制问题。

3.2.1 问题描述

考虑具有二阶非线性动态的 N 个多智能体，其动态系统为：

$$\begin{aligned}\dot{x}_k(t) &= v_k(t), \\ g_k \dot{v}_k(t) &= u_k(t) + F_k(x_k, v_k), \quad k \in J\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中 $x_k = [x_{k1}, \dots, x_{ks}]^T \in R^s$ ， $v_k = [v_{k1}, \dots, v_{ks}]^T \in R^s$ 和 $u_k = [u_{k1}, \dots, u_{ks}]^T \in R^s$ 分别代表 k -阶子系统的位置，速度以及控制输入； $g_k = \text{diag}\{g_{ki}\} \in R^{s \times s}$ ，其中 $g_{ki} > 0$ ，是未知常数增益矩阵； $F_k(\cdot)$ 代表系统不确定性因素，满足 $F_k(\cdot) = \beta_k^T \phi_k(x_k, v_k)$ ，其中 $\beta_k \in R^{m \times s}$ 是未知常参数矩阵， $\phi_k(\cdot) \in R^m$ 是已知基函数向量。并且， $\|\phi_k(\cdot)\|_1 \leq P(\|v_k\|_1)$ ，其中 $P(\cdot)$ 是一个多项式满足 $P(0) = 0$ ，并且假设 β_k 在一个已知紧集内。

注 3.1 系统动力模型(3.1)已被广泛应用关于多智能体系统一致性控制问题研究中^[109,129]。本文中我们在更一般的有向拓扑条件下研究该系统的有限时间一致性控制问题。注意到虽然 g_k 是未知的，但我们仍然可以给出 g_k 上界的鲁棒估计值，即存在某已知常数 $\bar{g} > 0$ 使得 $g_{ki} \leq \bar{g} < \infty$ 成立。

假设 3.1 假设多智能体系统(3.1)中所有智能体之间的通讯拓扑结构由有向图 \mathcal{G} 表示。图 \mathcal{G} 是有向并且强连通的。

定义 3.1 考虑多智能体系统(3.1)。如果对于任意给定初始状态，都存在某个有限时间 T^* 使得，对于所有 $t \geq T^*$ ，都成立：

$$x_1(t) = x_2(t) = \cdots = x_N(t) \quad (3.2)$$

则称系统(3.1)在有限时间 T^* 内达到一致。

本节的目标为，在假设 3.1 所设的通讯拓扑条件下，设计有限时间一致性协议，使得多智能体系统(3.1)在有限时间内达到一致。

3.2.2 相关定义和引理

定义 3.2^[130] 设 $\hat{\chi}$ 是一个未知参数 χ 的估计，其中 χ 位于一个已知半径 r_D 的闭球体上。则利普希茨连续映像算法 $\text{Proj}(\varrho, \hat{\chi})$ 定义为：

$$\text{Proj}(\varrho, \hat{\chi}) = \begin{cases} \varrho, & \text{if } \bar{h}(\hat{\chi}) \leq 0, \\ \varrho, & \text{if } \bar{h}(\hat{\chi}) \geq 0 \text{ and } \frac{\partial \bar{h}(\hat{\chi})}{\partial \hat{\chi}} \varrho \leq 0, \\ \varrho - \bar{h}(\hat{\chi})\varrho, & \text{if } \bar{h}(\hat{\chi}) > 0 \text{ and } \frac{\partial \bar{h}(\hat{\chi})}{\partial \hat{\chi}} \varrho > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

其中 $\bar{h}(\hat{\chi}) = \frac{\hat{\chi}^2 - r_D^2}{\epsilon^2 + 2\epsilon r_D}$ ， ϵ 是一个任意小的正常数。

引理 3.1^[131] 对于 $x_i \in R$ ($i = 1, 2, \dots, N$)， $0 < h \leq 1$ ，成立有 $(\sum_{i=1}^N |x_i|)^h \leq \sum_{i=1}^N |x_i|^h \leq N^{1-h} (\sum_{i=1}^N |x_i|)^h$ 。

引理 3.2^[132] 如果 $h = h_2 / h_1 \geq 1$ ，其中 $h_1, h_2 > 0$ 是奇整数，则有 $|x - y|^h \leq 2^{h-1} |x^h - y^h|$ 。相反，如果 $0 < h = h_1 / h_2 \leq 1$ ，则 $|x^h - y^h| \leq 2^{1-h} |x - y|^h$ 。

引理 3.3^[132] 对于 $x, y \in R$ ，如果 $c, d > 0$ ，则有 $|x|^c |y|^d \leq c / (c + d) |x|^{c+d} + d / (c + d) |y|^{c+d}$ 。

下面定义第 k 个智能体的邻居误差如下：

$$e_{ki} = \sum_{j \in \mathcal{N}_k} a_{kj} (x_{ki} - x_{ji}), \quad i = 1, \dots, s \quad (3.4)$$

其中 \mathcal{N}_k 是第 k 个智能体的邻居集合。令 $x = [x_1^T, x_2^T, \dots, x_s^T]^T$ ， $E = [e_1^T, e_2^T, \dots, e_s^T]^T$ ，

其中 $x_i = [x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Ni}]^T$ ， $e_i = [e_{1i}, e_{2i}, \dots, e_{Ni}]^T$ ($i = 1, 2, \dots, s$)，则成立：

$$E = (I_s \otimes \mathcal{L})x \quad (3.5)$$

值得注意的是，相对于无向连通拓扑图中拉普拉斯矩阵具有对称、半正定、有且仅有一个零特征值的性质，有向拓扑图所对应的拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 不具有对称的性质。这对于构造 Lyapunov 函数带来困难，从而对于基于 Lyapunov 理论的控制设计过程以及理论分析过程带来挑战。为了解决这一难题，本文基于拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 零特征值的左特征向量 $\mathbf{p} = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$ ，构造出如下新对称矩阵：

$$Q = \frac{1}{2}(\text{diag}(\mathbf{p})\mathcal{L} + \mathcal{L}^T \text{diag}(\mathbf{p})) \quad (3.6)$$

其中 $\text{diag}(\mathbf{p}) = \text{diag}\{p_1, \dots, p_n\} \in R^{N \times N} > 0$ ，并结合代数图理论、向量空间理论以及矩阵理论，推导出该矩阵的一个重要性质，通过三个引理给出了该性质的严格理论证明。

引理 3.4 假设有向图 \mathcal{G} 是强连通的，则(3.6)中定义的矩阵 Q 是对应某个无向连通图的拉普拉斯矩阵。特别是， Q 是对称、半正定矩阵，并且有且仅有一个零特征值，其余非零特征值都是正实数。

证明：由文献[122]可知，具有此形式的矩阵 Q 是对称半正定的。下面进一步证明 Q 是对应某个无向连通图的拉普拉斯矩阵，由此得出 Q 有且仅有一个零特征值。

由 $\mathbf{p}^T \mathcal{L} = 0_{1 \times N}$ 得出 $\sum_{j=1}^N a_{ij} p_i = \sum_{j=1}^N a_{ji} p_j$ ($i, j = 1, \dots, N$)，并进一步得出：

$$Q = \frac{1}{2} P \mathcal{L} + \mathcal{L}^T P$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^N (a_{1j} p_1 + a_{j1} p_j) & \cdots & -a_{1N} p_1 - a_{N1} p_N \\ -a_{21} p_2 - a_{12} p_1 & \cdots & -a_{2N} p_2 - a_{N2} p_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{N1} p_N - a_{1N} p_1 & \cdots & \sum_{j=1}^N (a_{Nj} p_N + a_{jN} p_j) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

令 $z_{ij} = a_{ij} p_i + a_{ji} p_j$ ($i, j = 1, \dots, N$)， $Z = [z_{ij}]$ 。由于 $p_i > 0$ ([3])，可以得出 $z_{ij} > 0 \Leftrightarrow a_{ij} > 0$ or $a_{ji} > 0$ ； $z_{ii} = 0 \Leftrightarrow a_{ii} = 0$ 。由于 $z_{ij} = z_{ji}$ ($i, j = 1, \dots, N$)，所以矩阵 Z 是对称的。注意到 $A = [a_{ij}]$ 是强连通图 \mathcal{G} 的加权邻接矩阵，由图理论中邻接矩阵的定义可知，这样定义的矩阵 Z 是相应某个无向连通图的加权邻接矩阵。定义 $b_i = \sum_{j=1}^N z_{ij}$ 以及 $B = \text{diag}(b_1, \dots, b_N) \in R^{N \times N}$ 。由(3.7)可以看出 $Q = \frac{1}{2}(B - Z)$ ，从而由拉普拉斯矩阵定义得出 Q 是相应某个无向连通图的拉普拉斯矩阵。进而由引理 2.1 可以得出， Q 是对称半正定的，有且仅有一个零特征值，并且其他非零特征值都是正实数。

证明完毕。

引理 3.5 对于强连通图 \mathcal{G} 下如(3.6)中定义的矩阵 Q ， $\forall X \neq 0$ ，

$$X^T Q X = 0 \quad (3.8)$$

当且仅当

$$X = c 1_N \quad (3.9)$$

其中 $c \neq 0$ 为常数。更进一步， $\min_{X \neq c 1_N} \frac{X^T Q X}{X^T X}$ 存在并且成立：

$$0 < \min_{X \neq c 1_N} \frac{X^T Q X}{X^T X} \leq \sum_{i=2}^N \lambda_i(Q) \quad (3.10)$$

证明：由引理 3.4 可知， Q 是相应于某个无向连通图的拉普拉斯矩阵，由此得出存在一个正交矩阵 $R = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ 使得 $Q = R \Lambda R^T$ 成立。令 $y = R^T X$ ，则

$$\begin{aligned} X^T Q X &= X^T R \Lambda R^T X = Y^T \Lambda Y = \sum_{i=1}^N \lambda_i(Q) y_i^2 \\ &= 0 \cdot y_1^2 + \lambda_2(Q) y_2^2 + \dots + \lambda_N(Q) y_N^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

由(3.11)可以得出，对 $\forall X \neq 0$ (i.e., $\forall Y \neq 0$)，有

$$X^T Q X = Y^T \Lambda Y = 0 \quad (3.12)$$

当且仅当

$$\begin{cases} y_1 \neq 0, \\ y_i = 0, \quad i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (3.13)$$

由 r_1, r_2, \dots, r_N 是矩阵 Q 的 N 个不同特征值所分别对应的 N 个特征向量，故 $R^N = \text{span}\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ ，并且对所有的 $i \neq j$ ($i, j = 1, \dots, N$)，有 $r_i \perp r_j$ 成立。存在某些常数 a_i ($i = 1, 2, \dots, N$) 使得

$$X = a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_N r_N \quad (3.14)$$

成立，并且

$$y_i = r_i^T X = r_i^T (a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots + a_N r_N) = a_i r_i^T r_i \quad (3.15)$$

从而(3.13)中的条件等价于：

$$\begin{cases} a_1 r_1^T r_1 \neq 0, \\ a_i r_i^T r_i = 0, \quad i = 2, \dots, N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 \neq 0, \\ a_i = 0, \quad i = 2, \dots, N \end{cases} \quad (3.16)$$

故

$$X = a_1 r_1 \quad (3.17)$$

由于 1_N 是 Q 的零特征值， $\lambda_1(Q)$ ，所对应的特征向量，因此 $r_1 = k 1_N$ ，其中 k 为非零常数。故

$$X = a_1 k 1_N = c 1_N \quad (3.18)$$

其中 $c = a_1 k$ 。注意到

$$\begin{aligned} \min_{X \neq c 1_N} \frac{X^T Q X}{X^T X} &= \min_{X \neq c 1_N, X^T X=1} X^T Q X = \min_{X \neq c 1_N, Y^T Y=1} Y^T \Lambda Y \\ &= \min_{X \neq c 1_N, Y^T Y=1} \sum_{i=1}^N \lambda_i(Q) y_i^2 \leq \sum_{i=2}^N \lambda_i(Q) \end{aligned} \quad (3.19)$$

由于 $X \neq c1_N$ ，则 $X^T Q X \neq 0$ ，同时由于 Q 是半正定矩阵，故

$$0 < \min_{X \neq c1_N} \frac{X^T Q X}{X^T X} \leq \sum_{i=2}^N \lambda_i(M) \quad (3.20)$$

证明完毕。

引理 3.6 令 $\mathfrak{K} = \{E^h \in \mathfrak{R}^N : (E^h)^T E^h = 1\}$ ，则存在 $k_m = \min_{E^h \in \mathfrak{K}} (E^h)^T (I_l \otimes Q) E^h$ ，使得：

$$\frac{(E^h)^T (I_s \otimes Q) E^h}{(E^h)^T E^h} \geq k_m > 0 \quad (3.21)$$

成立。

证明：由于 $p^T L = 0_{1 \times N}$ ，故可得 $1_N^T e_i = 1_N^T \text{diag}(p) \mathcal{L} x = 0$ ($i=1, 2, \dots, s$)，即 $e_{1i} + \dots + e_{Ni} = 0$ ，这意味着对于 $e_i \neq 0$ ，以及对于所有的 $k=1, 2, \dots, N$ ， $\text{sgn}(e_{ki})=1$ 或 $\text{sgn}(e_{ki})=-1$ 是不可能成立的。故 $e_i \neq c1_N$ ，其中 c 为非零常数。注意到对所有的 $k=1, 2, \dots, N$ ， $\text{sgn}(e_{ki}) = \text{sgn}(e_{ki}^h)$ ，则 $e_i^h \neq c1_N$ 。故由引理 3.5 可得， $(e_i^h)^T Q e_i^h > 0$ 。由于 \mathfrak{K} 是一个有界闭集， $(E^h)^T (I_s \otimes Q) E^h$ 对于 E^h 是连续的，并且对于任意 $E^h \in \mathfrak{K}$ ，均有 $(E^h)^T (I_s \otimes Q) E^h > 0$ 。故可以得出结论，存在常数 $k_m = \min_{E^h \in \mathfrak{K}} (E^h)^T (I_s \otimes Q) E^h$ ，

使得(3.21)成立。

证明完毕。

3.2.3 主要结果

由于 \mathcal{L} 是有向强连通图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵，则由引理 2.3 可知 $E = (I_s \otimes \mathcal{L})x = 0_{Ns}$ 当且仅当 $x_{1i} = x_{2i} = \dots = x_{Ni}$ ($i=1, \dots, s$)。所以本节中有限时间一致性目标达到当且仅当在有限时间内 $E \rightarrow 0_{Ns}$ 。

为了设计有限时间一致性协议，我们引入局部虚拟误差如下：

$$\delta_{ki} = v_{ki}^{1/h} - v_{ki}^{*1/h}, \quad k=1, \dots, N, i=1, \dots, s \quad (3.22)$$

其中 $h = \frac{2l-1}{2l+1}$ ， $l \in \mathbb{Z}^+$ ， v_{ki}^* 是相对于 v_{ki} 的虚拟控制，其定义如下：

$$v_{ki}^* = -c_2 e_{ki}^h \quad (3.23)$$

其中 $c_2 > 0$ 是设计参数，由设计者选取。

本文主要的设计思想就是设计分布式控制器使得局部邻居位移误差 e_{ki} 和局部虚拟误差 δ_{ki} 在有限时间收敛到零，从而达到有限时间一致性目标。基于此设计思想，本文提出如下分布式一致性控制协议：

$$u_k = -c_1 \delta_k^{2h-1} - \hat{\beta}_k^T \phi_k, \quad k=1, \dots, N \quad (3.24)$$

其中估计参数 $\hat{\beta}_k$ 的自适应律为：

$$\dot{\hat{\beta}}_k(j, i) = \text{Proj}((\Gamma_k \phi_k \delta_k^T)(j, i), \hat{\beta}_k(j, i)), \quad k=1, \dots, N \quad (3.25)$$

其中 $i=1, \dots, s$ ， $j=1, \dots, m$ ， $\delta_k^{2h-1} = [\delta_{k1}^{2h-1}, \dots, \delta_{ks}^{2h-1}]^T$ ， $\bullet(j, i)$ 代表 \bullet 的第 j 行第 i 列元素， $c_1 > 0$ 为设计参数， $\Gamma_k = \text{diag}\{\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{km}\} \in R^{m \times m} > 0$ 是设计参数矩阵， $\hat{\beta}_k$ 为

未知常参数 β_k 的估计值, $\phi_k(\cdot)$ 是可计算的已知数量函数向量。该控制器包含两部分: $-c_1 \delta_k^{2h-1}$, 确保有限时间收敛; $\hat{\beta}_k^T \phi_k$, 对非线性不确定因素进行有效补偿。

本节的主要结果阐述如下:

定理 3.1 在假设 3.1 所设有向强连通拓扑条件下, 分布式一致性协议(3.24)-(3.25)可以保证二阶非线性多智能体系统(3.1)在有限时间内达到一致。有限时间 T^* 满足

$$T^* = T_1^* + T_2^* \quad (3.26)$$

其中

$$T_1^* \leq (V(0) - \zeta) / d_\zeta \quad (3.27)$$

$$T_2^* \leq \frac{V_2(0)^{\frac{1-h}{1+h}} k_v^{\frac{2h}{1+h}} (1+h)}{(1-\rho_2) \rho_1 k_d (1-h)} \quad (3.28)$$

其中 $0 < \rho_1 \leq 1$, $0 < \rho_2 < 1$ 。

证明: 整个证明过程分为四步。

第一步: 注意到对于有向通讯拓扑, 其拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 不满足对称性, 这为构造 Lyapunov 候选函数带来困难。为了解决这个难题, 特引入一个主对角矩阵 $P = \text{diag}\{p\}$, 其中 $p = [p_1, p_2, \dots, p_N]^T$ 是矩阵 \mathcal{L} 零特征值对应的左特征向量, 到如下 Lyapunov 函数中:

$$V_1 = \frac{1}{(1+h)k_m} (E^{\frac{1+h}{2}})^T (I_s \otimes P) E^{\frac{1+h}{2}} \quad (3.29)$$

其中 $k_m > 0$ 是一个常数, 由式(3.21)给出。通过对 V_1 求导得出:

$$\dot{V}_1 = \frac{1}{k_m} (E^h)^T (I_s \otimes P) \dot{E} = \frac{1}{k_m} (E^h)^T (I_s \otimes (P\mathcal{L})) v \quad (3.30)$$

其中 $v = \dot{x}$ 。通过将虚拟控制 $v^* = -c_2 E^h$ 带入(3.30), 得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\frac{c_2}{k_m} (E^h)^T (I_s \otimes (P\mathcal{L})) E^h + \frac{1}{k_m} (E^h)^T (I_s \otimes (P\mathcal{L})) (v - v^*) \\ &= -\frac{c_2}{k_m} (E^h)^T \left[I_s \otimes \left(\frac{1}{2} (P\mathcal{L} + \mathcal{L}^T P) \right) \right] E^h + \frac{1}{k_m} (E^h)^T (I_s \otimes (P\mathcal{L})) (v - v^*) \\ &= -\frac{c_2}{k_m} (E^h)^T [I_s \otimes Q] E^h + \frac{1}{k_m} (E^h)^T (I_s \otimes (P\mathcal{L})) (v - v^*) \end{aligned} \quad (3.31)$$

由引理 3.6 可得存在某个常数 $k_m > 0$ 使得:

$$(E^h)^T (I_s \otimes Q) E^h \geq k_m (E^h)^T E^h \quad (3.32)$$

将(3.32)代入(3.31)得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq -c_2 (E^h)^T E^h + \frac{1}{k_m} (E^h)^T (I_s \otimes (P\mathcal{L})) (v - v^*) \\ &= -c_2 \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N (e_{ki})^{2h} + \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^s \left[(v_{ki} - v_{ki}^*) \sum_{j=1}^N \ell_{jk} (e_{ji})^h \right] \end{aligned} \quad (3.33)$$

其中 ℓ_{jk} 是 $(P\mathcal{L})^T$ 的第 j 行第 k 列元素。

由引理 3.3 可得 $|v_{ki} - v_{ki}^*| \leq 2^{1-h} |\delta_{ki}|^h$ ，并且 $(\sum_{i=1}^N x_i)^2 \leq N \sum_{i=1}^N x_i^2$ ，故等式(3.33)右边第二项为：

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^s \left[\sum_{k=1}^N (v_{ki} - v_{ki}^*) \sum_{j=1}^N \ell_{jk} (e_{ji})^h \right] \\
 & \leq \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^s \left[\sum_{k=1}^N 2^{1-h} |\delta_{ki}|^h \sum_{j=1}^N |\ell_{jk}| |e_{ji}|^h \right] \\
 & \leq 2^{1-h} \ell_{\max} \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^s \left[\sum_{k=1}^N |\delta_{ki}|^h \sum_{j=1}^N |e_{ji}|^h \right] \\
 & \leq 2^{1-h} \ell_{\max} \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^s \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=1}^N |\delta_{ki}|^h \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N |e_{ji}|^h \right)^2 \right] \\
 & \leq 2^{-h} \ell_{\max} \frac{1}{k_m} \sum_{i=1}^s \left[N \sum_{k=1}^N |\delta_{ki}|^{2h} + N \sum_{k=1}^N |e_{ki}|^{2h} \right]
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

其中 $\ell_{\max} = \max_{j,k \in \{1, \dots, N\}} |\ell_{jk}|$ 。将(3.34)代入(3.33)得：

$$\dot{V}_1 \leq -c_2 \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N (e_{ki})^{2h} + 2^{-h} k_m^{-1} N \ell_{\max} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \left[(\delta_{ki})^{2h} + (e_{ki})^{2h} \right] \tag{3.35}$$

第二步：令 $\bar{g} = \max_{k \in \{1, \dots, N\}} \{g_{ki}\}$ 。构造一个 Lyapunov 函数如下：

$$V_2 = V_1 + \frac{1}{2^{1-h} \bar{g}} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N g_{ki} \int_{v_{ki}^*}^{v_{ki}} (\zeta^{\frac{1}{h}} - (v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}}) d\zeta \tag{3.36}$$

该函数是半正定并且是连续可微的^[101]。注意到式(3.36)中含有分数阶积分，该技术最初是由Caron在文献[101]中提出。对 V_2 求导可得：

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2 &= \dot{V}_1 + \frac{1}{2^{1-h} \bar{g}} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \left[g_{ki} \left((v_{ki})^{\frac{1}{h}} - (v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}} \right) \dot{v}_{ki} + g_{ki} (v_{ki} - v_{ki}^*) \frac{d(-(v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}})}{dt} \right] \\
 &= \dot{V}_1 + \frac{1}{2^{1-h} \bar{g}_{\mathcal{A}}} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \left[g_{ki} \delta_{ki} \dot{v}_{ki} + g_{ki} (v_{ki} - v_{ki}^*) c_2^{1/h} \sum_{j \in \mathcal{N}_k} a_{kj} (v_{ki} - v_{ji}) \right] \\
 &\leq \dot{V}_1 + \frac{1}{2^{1-h} \bar{g}} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N g_{ki} \delta_{ki} \dot{v}_{ki} + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N |\delta_{ki}|^h c_2^{1/h} r \sum_{j \in \mathcal{N}_k} (|v_{ki}| + |v_{ji}|)
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

其中 $r = \max_{\forall k, j \in \{1, \dots, N\}} \{a_{kj}\}$ 。

下面检测式子(3.37)右边第二项。定义 $\delta_k = [\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots, \delta_{ks}]^T$ 。应用由(3.24)所定义的控制协议，则成立有：

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N g_{ki} \delta_{ki} \dot{v}_{ki} &= \sum_{k=1}^N \delta_k^T g_k \dot{v}_k = \sum_{k=1}^N \delta_k^T (u_k + F_k) \\
 &= \sum_{k=1}^N \delta_k^T (-c_1 \delta_k^{2h-1} - \hat{\beta}_k^T \phi_k + \beta_k^T \phi_k) \\
 &= -c_1 \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} + \sum_{k=1}^N \delta_k^T (\beta_k - \hat{\beta}_k)^T \phi_k
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

注意到对所有的 $k, j \in \{1, \dots, N\}$ ，由引理 3.2 和引理 3.3 可得：

$$\begin{aligned}
 c_2^{1/h} r |\delta_{ki}|^h |v_{ji}| &\leq c_2^{1/h} r (|\delta_{ki}|^h |v_{ji} - v_{ji}^*| + |\delta_{ki}|^h |v_{ji}^*|) \\
 &\leq c_2^{1/h} r (2^{1-h} |\delta_{ki}|^h |\delta_{ji}|^h + c_2 |\delta_{ki}|^h |e_{ji}|^h) \\
 &\leq 2^{-h} c_2^{1/h} r (|\delta_{ki}|^{2h} + |\delta_{ji}|^{2h}) + c_2^{2(1+1/h)} r^2 |\delta_{ki}|^{2h} + \frac{1}{4} |e_{ji}|^{2h}
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

故式(3.37)右边的最后一项可以写为:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N |\delta_{ki}|^h c_2^{1/h} r \sum_{j \in \mathcal{N}_k} (|v_{ki}| + |v_{ji}|) \\
 &\leq \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \sum_{j \in \mathcal{N}_k} [2^{1-h} c_2^{1/h} r |\delta_{ki}|^{2h} + c_2^{2(1+1/h)} r^2 |\delta_{ki}|^{2h} \\
 &\quad + \frac{1}{4} |e_{ki}|^{2h} + 2^{-h} c_2^{1/h} r (|\delta_{ki}|^{2h} + |\delta_{ji}|^{2h}) + c_2^{2(1+1/h)} r^2 |\delta_{ki}|^{2h} + \frac{1}{4} |e_{ji}|^{2h}] \\
 &\leq \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \left[(2^{2-h} c_2^{1/h} r + 2 c_2^{2(1+1/h)} r^2) \bar{n} \delta_{ki}^{2h} + \frac{\bar{n}}{2} e_{ki}^{2h} \right] \\
 &= k_{10} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} + k_{20} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

其中 \bar{n} 表示在所有的智能体邻居集合中所包含元素个数最多的数目, $k_{10} = (2^{2-h} c_2^{1/h} r + 2 c_2^{2(1+1/h)} r^2) \bar{n}$, $k_{20} = \bar{n} / 2$ 。

将(3.35), (3.38)和(3.40)代入(3.37)中得:

$$\dot{V}_2 \leq -k_1 \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} - k_2 \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{2^{1-h} \bar{g}} \delta_k^T (\beta_k - \hat{\beta}_k)^T \phi_k \tag{3.41}$$

其中

$$k_1 = -2^{-h} k_m^{-1} N \ell_{\max} + \frac{c_1}{2^{1-h} \bar{g}} - k_{10}, \quad k_2 = c_2 - 2^{-h} k_m^{-1} N \ell_{\max} - k_{20} \tag{3.42}$$

第三步: 选取 Lyapunov 候选函数为:

$$V = V_2 + \sum_{k=1}^N \frac{\text{tr}\{\tilde{\beta}_k^T \Gamma_k^{-1} \tilde{\beta}_k\}}{2^{2-h} \bar{g}} \tag{3.43}$$

其中 $\tilde{\beta}_k = \beta_k - \hat{\beta}_k$ ($k=1, \dots, N$)。对 V 求导, 并应用式(3.25)中给出的对估计参数 $\hat{\beta}_k$ ($k=1, \dots, N$) 的自适应律, 得出:

$$\dot{V} = \dot{V}_2 + \sum_{k=1}^N \frac{\text{tr}\left\{\tilde{\beta}_k^T \Gamma_k^{-1} \left(-\dot{\hat{\beta}}_k\right)\right\}}{2^{1-h} \bar{g}} \leq -k_1 \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} - k_2 \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} \tag{3.44}$$

由此进一步得出 $\dot{V} \leq 0$, 故得 $V(t) \leq V(0) < \infty$ 。并且, 对于所有的 $k=1, \dots, N$, 成立:

$$\|\tilde{\beta}_k\|_{\infty} \leq \sqrt{\text{tr}\{\tilde{\beta}_k^T \tilde{\beta}_k\}} \leq 2^{2-h} \bar{g} \bar{\gamma} V(t) \leq 2^{2-h} \bar{g} \bar{\gamma} V(0) \tag{3.45}$$

其中 $\bar{\gamma} = \max_{k \in \{1, \dots, N\}} \{\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{km}\}$ ($\Gamma_k = \text{diag}\{\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{km}\}$)。

第四步: 这一步主要证明若一开始所有智能体的初始状态在一个紧集外, 则存在某一个有限时间 $T_1^* > 0$, 使得所有智能体的状态在该有限时间内进入该整体吸引集。一旦所有智能体的状态进入该吸引集, 则证明存在另一个有限时间 $T_2^* > 0$, 使得在该有限时间 T_2^* 之后, $V_2 \equiv 0$ 。即, 若所有智能体初始状态不在紧集内, 则所有

智能体的状态将在有限时间 $T_1^* + T_2^*$ 内收敛到零。另一方面, 若一开始所有智能体的初始状态均在一个紧集内, 则在 T_2^* 之后, $V_2 \equiv 0$ 。即, 若所有智能体初始状态在一个紧集内, 则所有智能体状态将在有限时间 T_2^* 之内收敛到零。

通过观察式(3.44), 可以推断得出如果所有智能体初始状态若在一个紧集 Θ 之外, 其中 Θ 定义为:

$$\Theta = \{(x, v) : |\delta_{ki}| < \zeta_1, |e_{ki}| < \zeta_2\} \quad (3.46)$$

其中 $\zeta_1 = (\frac{1}{2^{2-h} s})^{1/h}$, $\zeta_2 = (\frac{1}{2c_2 s})^{1/h}$, 则存在一个正常数 d_ζ 满足 $d_\zeta \geq \min\{k_1 s N \zeta_1^{2h}, k_2 s N \zeta_2^{2h}\}$, 使得:

$$\dot{V} < -d_\zeta \quad (3.47)$$

令 ζ 为紧集 Θ 的边界值, 即 $\zeta = \min_{(x,v) \in \Theta} \{V(t)\}$ 。故从(3.47)中可以推出, 存在一个有限时间 T_1^* , 满足:

$$T_1^* \leq (V(0) - \zeta) / d_\zeta \quad (3.48)$$

使得所有智能体的状态在有限时间 T_1^* 内进入紧集 Θ 内。由于在该紧集内 $\dot{V}_2 < 0$ (将于后面给出该证明), 则所有智能体状态一旦进入该紧集, δ_{ki} 和 e_{ki} 将一直保持在该紧集之内不再出来。

下面证明在紧集 Θ 内, $\dot{V}_2 < 0$ 。首先观察式子(3.41)右边第三项。注意到 $|v_{ki}| \leq (|v_{ki} - v_{ki}^*| + |v_{ki}^*|) \leq 2^{1-h} |\delta_{ki}|^h + c_2 |e_{ki}|^h$, 故在紧集 Θ 内成立 $|v_{ki}| \leq 2^{1-h} \zeta_1^h + c_2 \zeta_2^h \leq 1/s$, 由此可得 $\|v_k\|_1 \leq 1$ 。假设多项式 $P(\cdot)$ 形如 $P(x) = \eta_1 x + \eta_2 x^2 + \dots + \eta_{n_p} x^{n_p}$, 其中 $n_p \geq 2$ 为整数, $\eta_j (j=1, \dots, n_p)$ 为正常数。令 $\bar{\eta} = \max\{\eta_1, \dots, \eta_{n_p}\}$ 。则有 $\|\phi_k(\cdot)\|_1 \leq P(\|v_k\|_1) \leq n_p \bar{\eta} \|v_k\|_1$ 成立, 即 $\sum_{j=1}^m |\phi_{kj}| \leq n_p \bar{\eta} \sum_{j=1}^s |v_{kj}|$ 。由此不等式以及(3.45)可得:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\delta_k^T \tilde{\beta}_k^T \phi_k}{2^{1-h} \bar{g}} \leq \sum_{k=1}^N \frac{\|\tilde{\beta}_k\|_\infty}{2^{1-h} \bar{g}} \sum_{i=1}^s |\delta_{ki}| \left(\sum_{j=1}^m |\phi_{kj}| \right) \leq 2\bar{\gamma} V(0) n_p \bar{\eta} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^s |\delta_{ki}| \left(\sum_{j=1}^s |v_{kj}| \right) \quad (3.49)$$

类似证明(3.39)的过程, 可以得出:

$$\begin{aligned} |\delta_{ki}| \|v_{kj}\| &\leq 2^{1-h} |\delta_{ki}| |\delta_{kj}|^h + c_2 |\delta_{ki}| |e_{kj}|^h \\ &\leq \frac{2^{1-h}}{1+h} (|\delta_{ki}|^{1+h} + h |\delta_{kj}|^{1+h}) + \frac{1}{1+h} (c_2^{1+h} |\delta_{ki}|^{1+h} + h |e_{kj}|^{1+h}) \end{aligned} \quad (3.50)$$

将上式代入(3.49), 则有:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{\delta_k^T \tilde{\beta}_k^T \phi_k}{2^{1-h} \bar{g}} &\leq 2\bar{\gamma} V(0) n_p \bar{\eta} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^s |\delta_{ki}| \left(\sum_{j=1}^s |v_{kj}| \right) \\ &\leq 2\bar{\gamma} V(0) n_p \bar{\eta} \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^s \left[\frac{2^{1-h}}{1+h} \left(\sum_{j=1}^s |\delta_{ki}|^{1+h} + h \sum_{j=1}^s |\delta_{kj}|^{1+h} \right) + \frac{1}{1+h} \left(\sum_{j=1}^s c_2^{1+h} |\delta_{ki}|^{1+h} + h \sum_{j=1}^s |e_{kj}|^{1+h} \right) \right] \\ &\leq k_3 \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^s \delta_{ki}^{1+h} + k_4 \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^s e_{ki}^{1+h} \end{aligned} \quad (3.51)$$

其中

$$k_3 = 2\bar{\gamma}V(0)n_p\bar{\eta}(2^{1-h}s + \frac{c_2^{1+h}s}{1+h}), \quad k_4 = 2\bar{\gamma}V(0)n_p\bar{\eta}\frac{sh}{1+h} \quad (3.52)$$

由(3.51), 式(3.41)可以表示为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 \leq & -\frac{k_1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} - \frac{k_2}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} \\ & + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \left(k_3 \delta_{ki}^{1+h} - \frac{k_1}{2} \delta_{ki}^{2h} \right) + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \left(k_4 e_{ki}^{1+h} - \frac{k_2}{2} e_{ki}^{2h} \right) \end{aligned} \quad (3.53)$$

注意到通过选择合适设计参数 c_1 和 c_2 可以使得 $k_1 > 2k_3$, $k_2 > 2k_4$, 以及 $\zeta_2 \leq 1$, 故由(3.53)可得:

$$\dot{V}_2 \leq -\frac{k_1}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} - \frac{k_2}{2} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} \frac{k_2}{2} \quad (3.54)$$

值得提出的是可以选择设计参数 c_1 和 c_2 使其分别满足 $c_1 > 2^{1-h} \bar{g}(2^{-h} k_m^{-1} N \ell_{\max} + 2^{2-h} c_2^{1/h} r_A \bar{n}_A + 2c_2^{2(1+1/h)} r^2 \bar{n} + 4\bar{\gamma}V(0)n_p\bar{\eta}(2^{1-h}s + \frac{c_2^{1+h}s}{1+h}))$ 和 $c_2 > \max \left\{ 1/2s, 2^{-h} k_m^{-1} N \ell_{\max} + \frac{\bar{n}}{2} + 4\bar{\gamma}V(0)n_p\bar{\eta}\frac{sh}{1+h} \right\}$, 从而使得 $k_1 > 2k_3 > 0$, $k_2 > 2k_4 > 0$ 以及 $\zeta_2 \leq 1$ 成立。

下面将证明存在常数 $c > 0$ 和 $0 < \alpha < 1$ 使得关系式 $\dot{V}_2 + cV_2^\alpha \leq 0$ 成立。注意到:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1 + \frac{1}{2^{1-h} \bar{g}} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N g_{ki} \int_{v_{ki}^*}^{v_{ki}} \left(\varsigma^{\frac{1}{h}} - (v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}} \right) d\varsigma \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{(1+h)k_m} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N e_{ki}^{1+h} + \frac{1}{2^{1-h}} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N |v_{ki} - v_{ki}^*| \delta_{ki} \\ &\leq \frac{\lambda_{\max}(P)}{(1+h)k_m} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N e_{ki}^{1+h} + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{1+h} \\ &\leq k_v \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N e_{ki}^{1+h} + k_v \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{1+h} \end{aligned} \quad (3.55)$$

其中 $k_v = \max \left\{ \frac{\lambda_{\max}(P)}{(1+h)k_m}, 1 \right\}$ 。根据引理3.1, 则由(3.55)可得:

$$V_2^{\frac{2h}{1+h}} \leq k_v^{\frac{2h}{1+h}} \left(\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} \right) \quad (3.56)$$

令 $k_d = \min \{k_1/2, k_2/2\}$ 以及 $\tilde{c} = \rho_1 k_d / k_v^{1+h}$, 其中 $0 < \rho_1 \leq 1$ 。则由(3.54)和(3.56)可以得出:

$$\dot{V}_2(t) + \tilde{c} V_2^{\frac{2h}{1+h}}(t) \leq 0 \quad (3.57)$$

故根据引理 2.7 可知, 存在一个有限时间 T^* 满足(3.26)使得当 $t \geq T^*$ 时, $V_2 \equiv 0$ 。并且 T_2^* 满足:

$$T_2^* \leq \frac{V_2(0)^{\frac{1-h}{1+h}} k_v^{\frac{2h}{1+h}} (1+h)}{(1-\rho_2)\rho_1 k_d (1-h)} \quad (3.58)$$

其中 $0 < \rho_2 < 1$ 。由式(3.36)所定义的 $V_2(t)$ ，可以看出 $E = 0$ ，从而在假设 3.1 的条件下可得 $x_1 = \dots = x_N$ ，这意味着多智能体系统(3.1)在有限时间达到一致，其中有限时间 T^* 达到一致。

证明完毕。

注 3.2 注意到本节中所提出的有限时间一致性控制协议(3.23)-(3.24)中包含设计参数 c_1 和 c_2 ，这两个设计参数需要被选择以确保 $k_1 > 2k_3 > 0$ 和 $k_2 > 2k_4 > 0$ 。在定理 3.1 中式(3.54)下面已经给出如何选择参数 c_1 和 c_2 以使得 $k_1 > 2k_3 > 0$ 和 $k_2 > 2k_4 > 0$ 成立，不过该选择条件是充分但非必要的。事实上，通过对式(3.40)的证明过程可以看出，如果灵活应用杨不等式，则可以得到相应不同的 k_{10} 和 k_{20} 的表达式。换句话说， k_{10} 和 k_{20} 的表达式并不是唯一的。注意到式(3.42)中 k_1 和 k_2 的表达式依赖于 k_{10} 和 k_{20} ，故上面所得到的如何选取设计参数 c_1 和 c_2 的条件（该条件依赖于 k_{10} 和 k_{20} ）可以相应是不同的。也就是说该条件只是针对选取设计参数 c_1 和 c_2 的充分条件，但非必要条件。

注 3.3 文献[109]研究了具有形式如(3.1)的二阶非线性多智能体系统在无向拓扑条件下的有限时间一致性问题。本文解决了此系统在有向通讯拓扑条件下的有限时间一致性控制问题，解决途径主要是通过引入对称矩阵 Q ，并通过几个引理（引理 3.4，3.5，3.6）证明得出该对称矩阵的一个重要性质，从而使得加幂积分有限时间控制方法可以应用于有向拓扑条件中。

3.2.4 仿真实验与结果分析

本节考虑如下仿真例子来验证所设计有限时间一致性协议的有效性与其可行性。实验中仿真环境为 64 位系统，CPU 为 Intel Core T6600 2.20GHz，系统内存为 4G，仿真软件为 Matlab R2012a。

考虑一组由 6 个具有非线性动态的网络无人机(unmanned aerial vehicles, UAVs)系统。其动态模型表示如下：

$$\begin{bmatrix} m_{x,k} & 0 & 0 \\ 0 & m_{y,k} & 0 \\ 0 & 0 & m_{z,k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v}_{x,k} \\ \dot{v}_{y,k} \\ \dot{v}_{z,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{x,k} \\ f_{y,k} \\ f_{z,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_{x,k} \\ u_{y,k} \\ u_{z,k} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

其中 $f_{x,k} = (A_k + B_k |v_{x,k}|)v_{x,k} - m_{y,k}v_{z,k}v_{y,k}$ ， $f_{y,k} = [m_{x,k}v_{z,k}v_{x,k} + (C_k + D_k |v_{y,k}|)v_{y,k}]$ ， $f_{z,k} = (E_k + F_k |v_{z,k}|)v_{z,k}$ ； $M_k = \text{diag}\{m_{x,k}, m_{y,k}, m_{z,k}\}$ 代表无人机质量矩阵； $r_k = [x_k, y_k, z_k]^T$ ， $\dot{r}_k = v_k = [v_{x,k}, v_{y,k}, v_{z,k}]^T$ ，和 $u_k = [u_{x,k}, u_{y,k}, u_{z,k}]^T$ 分别代表无人机位置、速度和控制输入； $f_k = [f_{x,k}, f_{y,k}, f_{z,k}]^T$ 表示作用在无人机机身上的向心力以及流体阻尼力。在仿真中，物理参数分别取为：

$M_k = \text{diag}\{600 + 6(-1)^k, 800 + 8(-1)^k, 700 + 7(-1)^k\}$, $A_k = -1 + 0.1(-1)^k$,
 $B_k = -25 + 2.5(-1)^k$, $C_k = -10 + (-1)^k$, $D_k = -200 + 20(-1)^k$, $E_k = -0.5 + 0.05(-1)^k$,
 $F_k = -1500 + 150(-1)^k$ ($k = 1, \dots, 6$)。该无人机系统中 6 个无人机之间的网络拓扑关系如图 3.1 所示。其中每条边的权重取为 0.1。

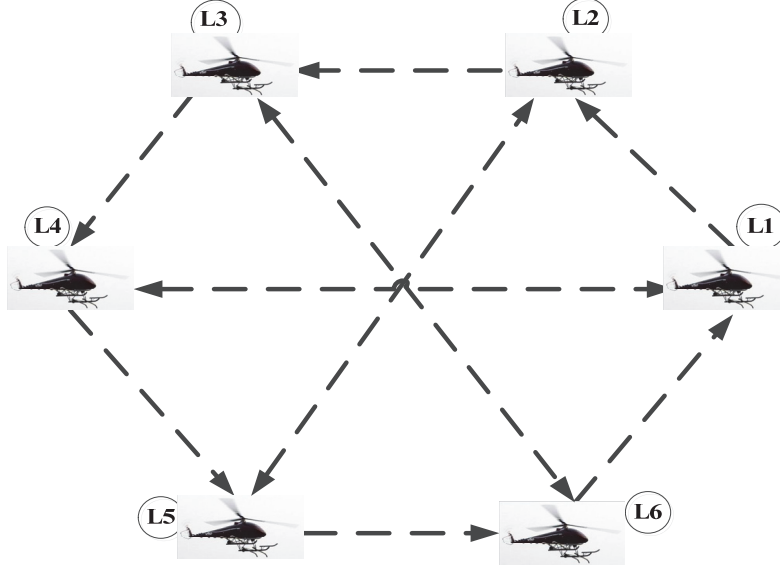


图 3.1 6 架无人机之间的有向通讯关系

Figure 3.1 The directed communication among 6 UAVs

仿真目标为通过应用所设计的有限时间一致性协议 (3.22)–(3.23)，验证无人机系统 (3.59) 中 6 个无人机是否在有限时间内达到一致。仿真中 6 个无人机的初始位置和初始速度分别为： $x_k(0) \in [-2, 2]$ ， $y_k(0) \in [1, -1]$ ， $z_k(0) \in [-2, 2]$ ， $v_k(0) = (0, 0, 0)$ ($k = 1, \dots, 6$)。设计参数选取为： $s = 2$ ， $c_1 = 20000$ ， $c_2 = 5$ 。另外，估计参数 $\hat{\beta}_k$ 的初始值选取为： $\hat{\beta}_k(0) = 0_{3 \times 3}$ ($k = 1, \dots, 6$)。

图 3.2–图 3.5 分别给出了仿真测试结果。图 3.2 和 3.3 分别描绘了所有 6 架无人机从初始状态到最终状态在 x -维方向以及 y -维方向的运动轨迹。从图 3.2 和 3.3 可以看出，在本节所提出的有限时间控制协议 (3.22)–(3.23) 下，6 架无人机在 x -维和 y -维方向的状态均在有限时间（不到 2 秒）内达到一致性，表明系统在有限时间内达到稳定并且实现有限时间一致。图 3.4 和 3.5 分别描述了 6 架无人机在 x -维方向以及 y -维方向的局部位移误差。从图 3.4 和图 3.5 可以看出，6 架无人机在 x -维方向以及 y -维方向的局部位移误差在有限时间（不到 2 秒）内收敛到零，由前面理论分析部分对局部位移误差的定义可知，在满足有向强连通通讯拓扑关系的网络系统中，所有子系统的局部位移误差为 0 意味着系统中所有子系统达到一致值，即，图 3.4 和图 3.5 再次验证了在本节所设计的控制协议 (3.22)

-(3.23) 下, 6个具有非线性动态的网络无人机系统在有限时间内达到稳定并实现了有限时间一致。

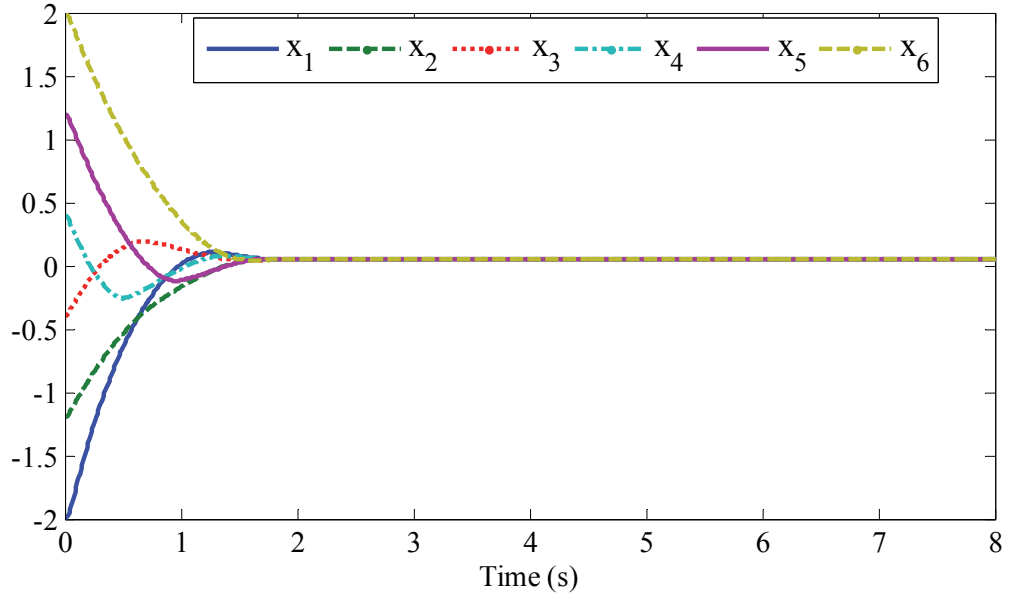


图 3.2 6架无人机在 x -维方向的轨迹图

Figure 3.2 The trajectories of the 6 UAVs in x -direction

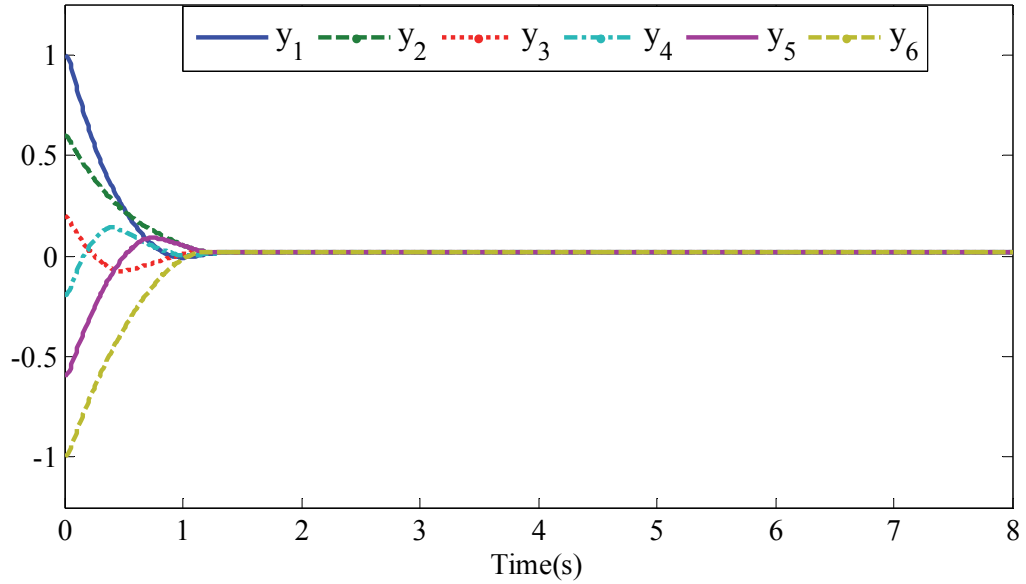


图 3.3 6架无人机在 y -维方向的轨迹图

Figure 3.3 The trajectories of the 6 UAVs in y -direction

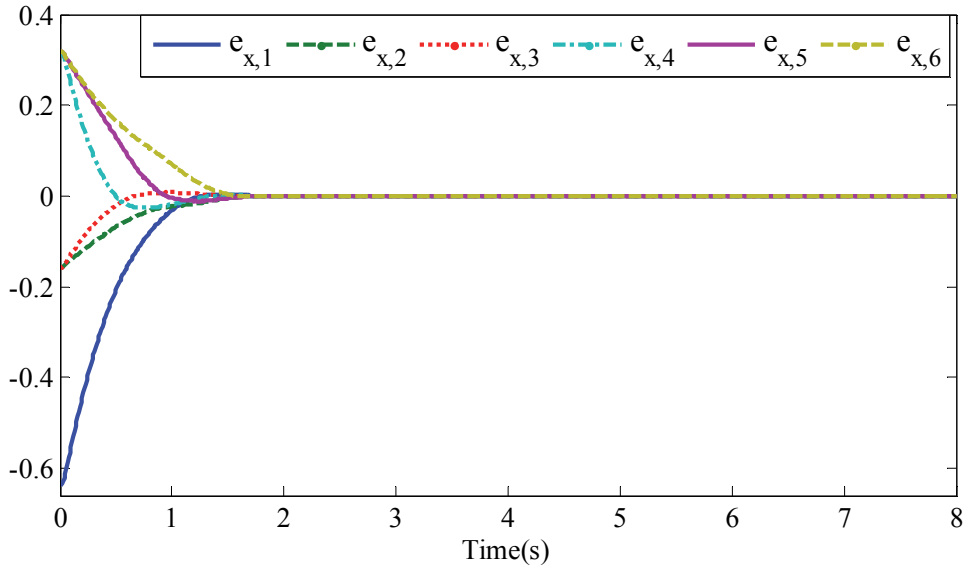

 图 3.4 6 架无人机在 x 维方向的局部误差图

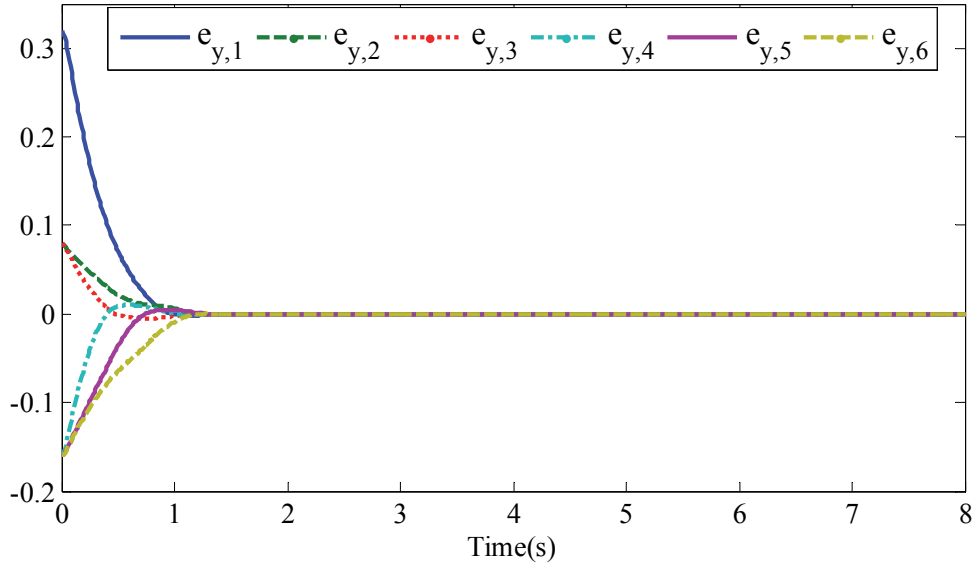
 Figure 3.4 The neighborhood errors of the 6 UAVs in x -direction

 图 3.5 6 架无人机在 y 维方向的局部误差图

 Figure 3.5 The neighborhood errors of the 6 UAVs in y -direction

为了更好地验证本节中所设计有限时间控制器的控制效果，在以上仿真的基础上，采用同样的参数对两种控制器下的误差收敛效果：所设计有限时间控制器与非有限时间控制器（对应所设计算法 $h=1$ 的情形），如图 3.6–3.7 所示。从图 3.6 和图 3.7 可以看出，在本节所设计有限时间控制算法下的误差收敛效果，包括收敛速度和收敛精度，都明显优于非有限时间控制算法下的误差收敛效果。

综上所述，所有的仿真效果都很好地验证了前面所得的理论结果。

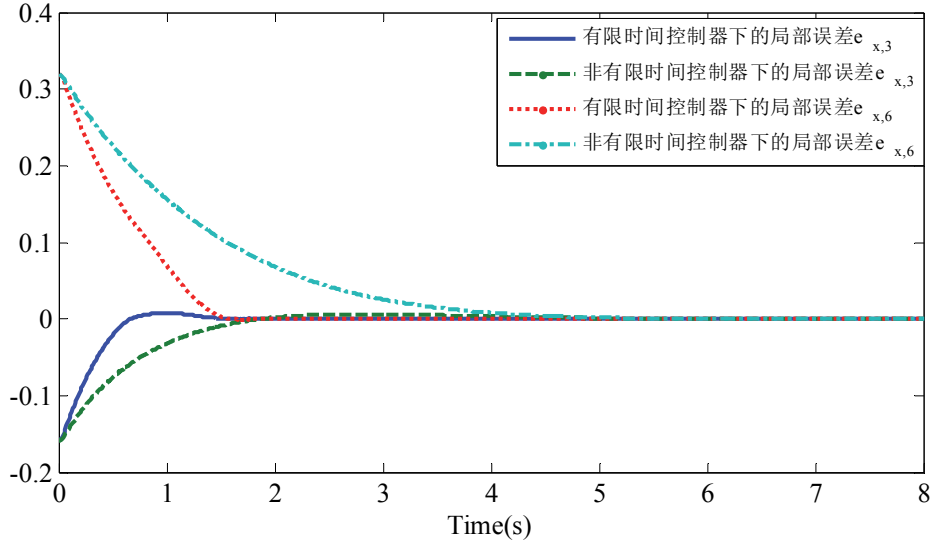


图 3.6 两种不同控制器下在 x 维方向的局部误差比较图

Figure 3.6 The neighborhood error comparison in x -direction under two contorollers

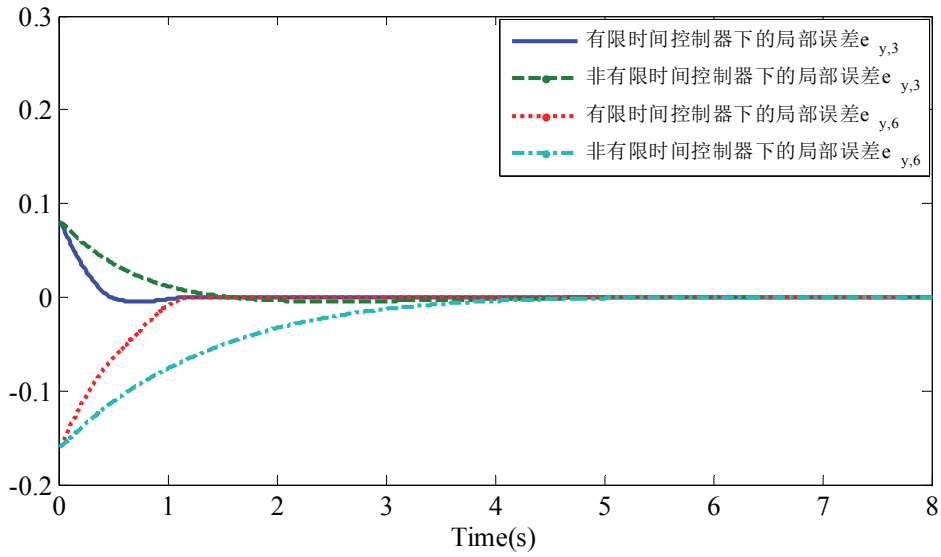


图 3.7 两种不同控制器下在 y 维方向的局部误差比较图

Figure 3.7 The neighborhood error comparison in y -direction under two contorollers

3.3 本章小结

本章研究了含有未知常数控制增益以及可线性参数化分解的二阶非线性多智能体系统在单向通讯拓扑条件下的有限时间一致性控制问题，首先结合加幂积分技术以及自适应控制方法设计出了自适应有限时间一致性协议，然后由 Lyapunov

稳定性理论给出了多智能体系统有限时间稳定的严格理论证明，最后通过仿真实例验证了所设计有限时间一致性协议的有效性。本章的创新点主要在于将二阶非线性多智能体系统的有限时间一致性控制由双向连通条件拓展到了单向连通条件，解决了加幂积分有限时间控制方法在有向拓扑条件下应用的问题。问题难点主要在于单向连通图中 Laplacian 矩阵是非对称的，这对有限时间控制器设计和有限时间稳定性分析都带来了难题，因为 Lyapunov 稳定性分析理论需要构造对称正定的 Lyapunov 候选函数，因此需要用到对称正定的 Laplacian 矩阵，而这与有向图中 Laplacian 矩阵非对称是相矛盾的。本章中主要通过构造了一个新的 Laplacian 矩阵，并通过严格的理论分析证明得出该矩阵的一个重要性质，基于 Laplacian 矩阵的左特征向量，加幂积分，以及自适应参数估计误差，构造出合适的 Lyapunov 候选函数，设计出分布式自适应有限时间一致性控制算法，从而解决了此单向通讯网络拓扑条件下非线性多智能体系统的有限时间一致性控制难题。

4 具有时变未知增益及持续扰动多智能体系统的自适应有限时间一致性控制

4.1 引言

本章主要研究了有向拓扑条件下具有时变未知控制增益以及持续扰动的复杂非线性多智能体系统的有限时间自适应一致性控制问题。本章第二节主要针对二阶复杂非线性多智能体系统的有限时间一致性问题展开研究，该系统不仅含有未知时变控制增益，而且含有不可线性参数化分解的不确定性因素以及未知有界外界干扰，第三节进一步研究了存在未知执行器故障情形下二阶复杂多智能体系统在有向通讯拓扑条件下的有限时间一致性控制问题，第四节针对高阶非仿射非线性多智能体系统的有限时间一致性问题展开研究。

本章第二、三节内容在 *Automatica* 发表，见攻读博士期间所取得主要学术成果[4]，本章第四节内容在 *Information Sciences* 发表，见攻读博士期间所取得主要学术成果[9]。

4.2 有向拓扑条件下二阶复杂多智能体系统有限时间一致性控制

本节主要研究一组具有复杂二阶动态的非线性多智能体系统在有向通讯拓扑条件下的有限时间一致性控制问题，首先结合加幂积分技术，自适应方法和有限时间稳定性理论，设计出基于分数阶状态反馈以及分数阶自适应律的有限时间一致性控制协议，然后给出基于 Lyapunov 稳定性理论的有限时间稳定性的严格理论证明，最后通过进行仿真实验，对比分析，验证所设计的有限时间一致性控制算法的有效性和优越性。问题难点在于系统中一些内在的未知不确定因素的存在，导致系统的控制增益不可测并且实时变化，这使得所设计的控制输入对系统的影响不确定，同时系统内部不可参数化分解的未知非线性因素以及系统外部干扰的影响，使得该类系统的有限时间控制问题变得非常复杂，也很有挑战性，而当多智能体系统中的网络通讯关系是局部并且是单向连接时，该系统的有限时间控制问题变得更为复杂。本节主要采用三大策略来对付上述所面临的问题，给出了解决该问题的分布式自适应容错有限时间一致性控制解。首先，基于原有向图的拉普拉斯矩阵及其左特征向量，构造出一个新的拉普拉斯矩阵，并基于其左特征向量构造出 Lyapunov 函数，从而解决基于加幂积分有限时间控制方法的有向拓扑问题；第二，通过引入虚拟参数估计误差概念，并将其引入一个巧妙构造的 Lyapunov 函数中，成功解决未知时变不确定控制增益问题；第三，结合核心函数技术、自适应控制方法以及有限时间稳定性理论，设计出基于分数阶反馈的自适应律，从

而有效补偿系统中不可线性参数化分解的非线性不确定因素以及未知有界外界干扰的影响。

4.2.1 问题描述

考虑如下一组含有 N 个智能体且具有复杂非线性动态的二阶多智能体系统：

$$\begin{aligned} \dot{r}_k(t) &= v_k(t) \\ g_k(t)\dot{v}_k(t) &= u_{ak} + F_k(r_k, v_k) + D_k(r_k, v_k, t), \quad k=1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.1)$$

其中 $r_k = [r_{k1}, r_{k2}, \dots, r_{kl}]^T \in \mathfrak{R}^l$, $v_k = [v_{k1}, v_{k2}, \dots, v_{kl}]^T \in \mathfrak{R}^l$, $u_{ak} = [u_{ak1}, u_{ak2}, \dots, u_{akl}]^T \in \mathfrak{R}^l$ 分别代表第 k 个子系统的位置, 速度, 控制输入; $g_k \in \mathfrak{R}^{l \times l}$ 代表控制增益矩阵, 未知并且时变; $F_k(\cdot)$ 代表系统的非线性不确定因素; $D_k(\cdot)$ 是作用在第 k 个子系统的未知外界干扰。

假设多智能体系统(4.1)中多个子系统之间的网络通讯拓扑关系用有向图 \mathcal{G} 表示, 其满足如下假设条件:

假设 4.1 有向通讯拓扑 \mathcal{G} 是强连通的。

系统的未知控制增益以及未知非线性因素分别满足如下假设条件:

假设 4.2 系统控制增益矩阵 $g_k = \text{diag}\{g_{ki}\}$, 其中 g_{ki} ($k=1, \dots, N$, $i=1, 2, \dots, l$) 是未知时变但有界, 并且非零, 即存在未知有界常数 \underline{g}_k 和 \bar{g}_k 使得 $0 < \underline{g}_k \leq g_{ki}(\cdot) \leq \bar{g}_k < \infty$ 。 $g_{ki}(\cdot)$ ($k=1, \dots, N$, $i=1, 2, \dots, l$) 的符号是定的。不失一般性, 本文中假设 $\text{sgn}(g_{ki}) = +1$ ($k=1, \dots, N$, $i=1, 2, \dots, l$)。

假设 4.3 对于非线性项 $F_k(\cdot)$, 存在一个有界常数矩阵 $c_{fk} = \text{diag}\{c_{fki}, \dots, c_{fkl}\} \in \mathfrak{R}^{l \times l}$ ($0 < c_{fki} < \infty$ 是未知常数) 和一个函数向量 $\phi_k(r_k, v_k, t) = [\phi_{k1}, \phi_{k2}, \dots, \phi_{kl}]^T \in \mathfrak{R}^l$ ($\phi_{ki}(r_{ki}, v_{ki}, t) \geq 0$ 是已知数量函数), 使得 $|F_k(\cdot)| \leq c_{fk} \phi_k(\cdot)$ 成立, 并且当 r_{ki} 和 v_{ki} 有界时, $\phi_{ki}(\cdot)$ 才会有界。对于外界干扰项 $D_k(\cdot)$, 存在未知常数向量 $d_k^{\max} = [d_{k1}^{\max}, \dots, d_{kl}^{\max}]^T$ ($0 \leq d_{ki}^{\max} < \infty$ ($i=1, \dots, l$) 是未知有界常数), 使得 $|D_k(\cdot)| \leq d_k^{\max}$ 成立。

注 4.1 在最近的关于多智能体系统有限时间一致性控制的相关工作中, 文献 [105]-[108] 中所考虑系统的控制增益都是单位增益, [109] 中系统的控制增益未知但定常。在本节中, 系统的控制增益是未知且时变的, 因此假设 4.2 中所设条件相比单位增益和未知定常增益更加一般化也更符合大多实际系统中的情况。假设 4.3 中非线性不确定因素只涉及到了系统的部分核心信息, 而并不用知道系统精确模型信息以及系统中非线性的精确表达式, 这在任何实际系统中都可以很容易操作, 只需用到系统的大致信息即可。更重要的是, 利用核心函数思想, 不可线性分解化的非线性不确定性以及不随时间消除的外界干扰影响, 其中包括很多含有未知时变因素的影响以及隐含的未知不确定性因素的影响, 都可以被很好地处理。例如: 具有如下形式的未知不确定非线性因素

$$f_{ki}(\cdot) = 1 + 2\sin(a + 2t)x_{ki}^2 + 3\cos(bt)x_{ki} + \frac{4}{\exp^{(cx_{ki})^2+1}}x_{ki}^3 \quad (4.2)$$

其中 a , b 和 c 是三个未知常数。很明显, 由于 a , b 和 c 是以耦合形式内嵌在非线性函数 $f_{ki}(\cdot)$ 中的, 故该非线性函数不可能进行线性化参数分解以写成 $f_{ki}(\cdot) = p_{ki}\phi_{ki}(x)$ 的形式, 其中 p_{ki} 是未知参数向量, $\phi_{ki}(x)$ 是回归算子。但是利用核心函数假设, 则很容易建立形如 $|f_{ki}(\cdot)| \leq c\phi_{ki}(x)$ 的关系式, 其中 $c = \max\{1, 2, 3, 4\}$, $\phi_{ki}(x) = (1 + x_{ki}^2 + |x_{ki}| + |x_{ki}|^2)$ 。由此可知假设 4.3 涵盖了一大类不确定非线性因素。

本节的目标为设计一个分布式自适应有限时间控制器, 使得多个非线性子系统在有向拓扑条件下在有限时间内达到一致。

4.2.2 主要结果

定义局部位移误差如下:

$$e_{ki} = \sum_{j \in \mathcal{N}_k} a_{kj}(r_{ki} - r_{ji}) \quad (4.3)$$

令 $r_k = [r_{k1}, r_{k2}, \dots, r_{kl}]^T$, $e_k = [e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kl}]^T$, ($k = 1, 2, \dots, N$), $r = [r_1^T, r_2^T, \dots, r_N^T]^T$, $E = [e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T]^T$, 则可得下面关系式成立:

$$E = (\mathcal{L} \otimes I_l)r \quad (4.4)$$

其中 \mathcal{L} 是对应有向图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵。由引理 2.3 可知, $E = (\mathcal{L} \otimes I_l)r = 0_{lN}$ 当且仅当 $r_{1i} = r_{2i} = \dots = r_{Ni}$ ($i = 1, \dots, l$), 即有限时间一致性达到当且仅当存在一个有限时间 T^* , 使得 $t \rightarrow T^*$ 时, $E \rightarrow 0_{lN}$ 成立。

在给出本节主要结果之前, 先给出一个有用引理。

引理 4.1 对于 $x \in \mathfrak{R}$, $y \in \mathfrak{R}$, $0 < h = h_1 / h_2 \leq 1$, 其中 $h_1, h_2 > 0$ 是正奇整数, 下式成立:

$$x^h(y - x) \leq \frac{1}{1+h}(y^{1+h} - x^{1+h}) \quad (4.5)$$

证明: 令 $g(x) = x^h(c - x) - \frac{1}{1+h}(c^{1+h} - x^{1+h})$ 。对函数 $g(x)$ 针对变量 x 求导得:

$$\frac{d}{dx}g(x) = hx^{h-1}(c - x) - x^h + x^h = hx^{h-1}(c - x) \quad (4.6)$$

由(4.6)很容易看出函数 $g(x)$ 在 $x = c$ 处达到最大值, 进而得出对 $\forall x \in \mathfrak{R}$, 有 $g(x) \leq g(c) = 0$ 。故 $x^h(y - x) \leq \frac{1}{1+h}(y^{1+h} - x^{1+h})$ 成立。

证明完毕。

本节针对二阶非线性多智能体系统(4.1)中第 k ($k = 1, \dots, N$) 个子系统, 提出有限时间一致性控制协议如下:

$$u_{ki} = u_{0ki} + u_{cki} \quad (4.7)$$

该控制协议包括两部分: 1) 负反馈控制项 u_{0ki} :

$$u_{0ki} = -c_1 \delta_{ki}^{2h-1} \quad (4.8)$$

其中 $\delta_{ki} = v_{ki}^{1/h} + c_2^{1/h} e_{ki}$ ，以及 2) 自适应补偿控制项 u_{cki} ：

$$u_{cki} = -\hat{\beta}_{ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) - \hat{\chi}_{ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) \quad (4.9)$$

及其带有分数阶反馈的自适应律：

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\beta}}_{ki} &= -\gamma_{1,ki} \sigma_{1,ki} \hat{\beta}_{ki}^{3h-1} + \gamma_{1,ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki} \\ \dot{\hat{\chi}}_{ki} &= -\gamma_{2,ki} \sigma_{2,ki} \hat{\chi}_{ki}^{3h-1} + \gamma_{2,ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki} \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中 $i=1,2,\dots,l$ ， $h = \frac{4s-1}{4s+1}$ ， $s \in \mathbb{Z}^+$ ， $c_1, c_2 > 0$ 是设计参数， $\hat{\beta}_{ki}$ 和 $\hat{\chi}_{ki}$ 分别是虚拟参数 β_{ki} 和 χ_{ki} 的估计值， $\phi_{ki}(\cdot)$ 是可计算的数量函数， τ_{ki} ， $\gamma_{1,ki}$ ， $\gamma_{2,ki}$ ， $\sigma_{1,ki}$ 和 $\sigma_{2,ki}$ 是正自由设计参数。

注 4.2 由控制协议(4.7)-(4.10)可以看出所提出的控制结构是“非线性”形式，其中控制算法是基于分数阶状态反馈，并且自适应律也是分数阶形式，而不是简单的一般状态反馈。正是因为这两种分数阶控制项，使得有限时间控制方法与自适应方法结合起来，解决了含有时变控制增益以及不可线性化参数分解的非线性项的复杂非线性多智能体系统的有限时间一致性问题。

定理 4.1 考虑在假设 4.1-4.3 条件下的复杂非线性多智能体系统(4.1)。在所设计的一致性算法下，有限时间稳定性一致达到，其中 1) 邻居位移和速度误差在有限时间 T^* 内收敛到一个小的邻域 Ω_1 内，该邻域定义如下：

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{ |e_{ki}| \leq [(1+h)k_v]^{1+h} \left(\frac{d}{\eta_2 \eta_1 k_d} \right)^{\frac{1}{2h}}, \\ |v_{ki} - v_{ji}| &\leq 2 \left[\left(\frac{c_2^{1+1/h} (1+h)}{2^{h-1/h} h} \right)^{\frac{h}{1+h}} + c_2 (1+h)^{\frac{h}{1+h}} \right] \left(\frac{dk_v^{1+h}}{\eta_2 \eta_1 k_d} \right)^{\frac{1}{2}}, \forall k, j=1, \dots, N \} \end{aligned} \quad (4.11)$$

2) 一般化参数估计误差在有限时间 T^* 内收敛到一个小的邻域 Ω_{1p} 内，其中

$$\begin{aligned} \Omega_{1p} &= \{ |\tilde{\beta}_{ki}| \leq \sqrt{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \bar{g}^{-1} \gamma_{1,ki} k_v} \left(\frac{d}{\eta_2 \eta_1 k_d} \right)^{\frac{1+h}{4h}}, \\ |\tilde{\chi}_{ki}| &\leq \sqrt{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \bar{g}^{-1} \gamma_{2,ki} k_v} \left(\frac{d}{\eta_2 \eta_1 k_d} \right)^{\frac{1+h}{4h}}, \forall k, j=1, \dots, N \} \end{aligned} \quad (4.12)$$

3) 闭环系统中的所有信号都有界。另外，有限收敛时间 T^* 满足：

$$T^* \leq \frac{V(t_0)^{\frac{1-h}{1+h}} k_v^{\frac{2h}{1+h}}}{(1-\eta_2) \eta_1 k_d \frac{1-h}{1+h}} \quad (4.13)$$

其中 $0 < \eta_1 \leq 1$ ， $0 < \eta_2 < 1$ ， $V(t_0)$ 由(4.33)给出， d 由 (4.40)给出， k_d 和 k_v 分别由(4.41)和(4.48)给出。

证明：该定理的证明分为六步。

第一步：构造第一部分 Lyapunov 函数如下：

$$V_1(t) = \frac{1}{1+h} (E^{\frac{1+h}{2}})^T (\text{diag}(p) \mathcal{L} \otimes I_l) E^{\frac{1+h}{2}} \quad (4.14)$$

其中 $p = [p_1, \dots, p_N]^T$ 是拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 零特征值对应的左特征向量。对 $V_1(t)$ 针对时间 t 求导得：

$$\dot{V}_1(t) = (E^h)^T \dot{E} = (E^h)^T (\text{diag}(p) \mathcal{L} \otimes I_l) v \quad (4.15)$$

其中 $v = \dot{r}$ 。令 $v^* = -c_2 E^h$ 为 v 的虚拟控制，其中 $c_2 > 0$ 为设计常数。则有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= -c_2 (E^h)^T (\text{diag}(p) \mathcal{L} \otimes I_l) E^h + (E^h)^T (\text{diag}(p) \mathcal{L} \otimes I_l) (v - v^*) \\ &= -\frac{c_2}{2} (E^h)^T \underbrace{((\text{diag}(p) \mathcal{L} + \mathcal{L}^T \text{diag}(p)) \otimes I_l)}_Q E^h + (E^h)^T (\text{diag}(p) \mathcal{L} \otimes I_l) (v - v^*) \end{aligned} \quad (4.16)$$

由引理 3.6 可知，存在一个正常数 k_m 使得：

$$(E^h)^T (Q \otimes I_l) E^h \geq k_m (E^h)^T E^h \quad (4.17)$$

成立，由此可得下式：

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq -\frac{c_2 k_m}{2} (E^h)^T E^h + (E^h)^T (\text{diag}(p) \mathcal{L} \otimes I_l) (v - v^*) \\ &= -\frac{c_2 k_m}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N (e_{ki})^{2h} + \sum_{i=1}^l \left[\sum_{k=1}^N (v_{ki} - v_{ki}^*) \sum_{j=1}^N \ell_{jk} (e_{ji})^h \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

成立，其中 ℓ_{jk} 是矩阵 $\text{diag}(p) \mathcal{L}$ 的第 j 行第 k 列元素。

令 $\delta_{ki} = (v_{ki})^{\frac{1}{h}} - (v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}}$ 。由引理 3.1 和引理 3.3 推导得出：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \left[\sum_{k=1}^N (v_{ki} - v_{ki}^*) \sum_{j=1}^N \ell_{jk} (e_{ji})^h \right] &\leq \sum_{i=1}^l \left[\sum_{k=1}^N 2^{1-h} |\delta_{ki}|^h \sum_{j=1}^N |\ell_{jk}| |e_{ji}|^h \right] \\ &\leq 2^{1-h} \ell_{\max} \sum_{i=1}^l \left[\sum_{k=1}^N |\delta_{ki}|^h \sum_{j=1}^N |e_{ji}|^h \right] \leq 2^{1-h} \ell_{\max} \sum_{i=1}^l \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{k=1}^N |\delta_{ki}|^h \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N |e_{ji}|^h \right)^2 \right] \\ &\leq 2^{1-h} \cdot \frac{1}{2} \ell_{\max} \sum_{i=1}^l \left[N \sum_{k=1}^N |\delta_{ki}|^{2h} + N \sum_{k=1}^N |e_{ki}|^{2h} \right] \\ &= 2^{-h} N \ell_{\max} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N [(\delta_{ki})^{2h} + (e_{ki})^{2h}] \end{aligned} \quad (4.19)$$

其中 $\ell_{\max} = \max_{j,k \in \{1, \dots, N\}} |\ell_{jk}|$ ，上式用到了关系式 $(\sum_{i=1}^N x_i)^2 \leq N \sum_{i=1}^N x_i^2$ 。将式(4.19)代入

式(4.18)中得：

$$\dot{V}_1(t) \leq -\frac{c_2 k_m}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N (e_{ki})^{2h} + 2^{-h} N \ell_{\max} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N [(\delta_{ki})^{2h} + (e_{ki})^{2h}] \quad (4.20)$$

第二步：定义第二部分 Lyapunov 函数如下：

$$V_2(t) = \frac{1}{2^{1-h} c_2^{\frac{1+1/h}{h}}} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \int_{v_{ki}^*}^{v_{ki}} (\varsigma^{\frac{1}{h}} - (v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}}) d\varsigma \quad (4.21)$$

该函数是半正定的，也是连续的^[101]。对 $V_2(t)$ 针对变量 t 求导可得：

$$\begin{aligned}\dot{V}_2(t) &= \frac{1}{2^{1-h}c_2^{1+1/h}} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N [((v_{ki})^{\frac{1}{h}} - (v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}}) \dot{v}_{ki} + (v_{ki} - v_{ki}^*) \frac{d(-(v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}})}{dt}] \\ &= \frac{1}{2^{1-h}c_2^{1+1/h}} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N [\delta_{ki} \dot{v}_{ki} + (v_{ki} - v_{ki}^*) \cdot c_2^{1/h} \sum_{j \in \mathcal{N}_k} a_{kj} (v_{ki} - v_{ji})]\end{aligned}\quad (4.22)$$

令 $a = \max_{\forall k \in \{1, \dots, N\}} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{N}_k} a_{kj} \right\}$, $b = \max_{\forall k, j \in \{1, \dots, N\}} \{a_{kj}\}$ 。从等式(4.22)右边第二项可以推

出下式:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2^{1-h}c_2^{1+1/h}} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N |v_{ki} - v_{ki}^*| \cdot c_2^{1/h} \cdot \left| \sum_{j \in \mathcal{N}_k} a_{kj} (v_{ki} - v_{ji}) \right| \\ & \leq \frac{1}{c_2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N |\delta_{ki}|^h (a |v_{ki}| + b \sum_{j \in \mathcal{N}_k} |v_{ji}|)\end{aligned}\quad (4.23)$$

由引理 3.1 和引理 3.3 可得, 对所有的 $k, j = 1, \dots, N$, 成立:

$$\begin{aligned}|\delta_{ki}|^h |v_{ji}| &\leq |\delta_{ki}|^h |v_{ji} - v_{ji}^*| + |\delta_{ki}|^h |v_{ji}^*| \leq 2^{1-h} |\delta_{ki}|^h |\delta_{ji}|^h + c_2 |\delta_{ki}|^h |e_{ji}|^h \\ &\leq 2^{-h} (|\delta_{ki}|^{2h} + |\delta_{ji}|^{2h}) + \frac{c_2}{2} (|\delta_{ki}|^{2h} + |e_{ji}|^{2h})\end{aligned}\quad (4.24)$$

则式(4.23)可以重新写为如下形式:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{c_2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N |\delta_{ki}|^h (a |v_{ki}| + b \sum_{j \in \mathcal{N}_k} |v_{ji}|) \\ & \leq \frac{1}{c_2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N [a(2^{1-h} + \frac{c_2}{2}) |\delta_{ki}|^{2h} + b(2^{-h} + \frac{c_2}{2}) \sum_{j \in \mathcal{N}_k} |\delta_{ki}|^{2h} \\ & \quad + \frac{ac_2}{2} |e_{ki}|^{2h} + b2^{-h} \sum_{j \in \mathcal{N}_k} |\delta_{ji}|^{2h} + \frac{bc_2}{2} \sum_{j \in \mathcal{N}_k} |e_{ji}|^{2h}] \\ & \leq \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N (\frac{2^{1-h}a}{c_2} + \frac{a}{2} + \frac{2^{1-h}b\bar{n}}{c_2} + \frac{b\bar{n}}{2}) \delta_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N (\frac{a}{2} + \frac{b\bar{n}}{2}) e_{ki}^{2h}\end{aligned}\quad (4.25)$$

其中 $\bar{n} = \max_{k \in \{1, \dots, N\}} \{n_k\}$, n_k 指邻居集合 \mathcal{N}_k 中元素的个数。

为了简化式(4.22)右边第一项, 将系统模型(4.1)写成如下形式:

$$\dot{v}_k = g_k^{-1}(u_k - F_k - D_k) \quad (4.26)$$

注意到 $|g_k^{-1}D_k| \leq \underline{g}_k^{-1}d_k^{\max} = \chi_k$, $|-g_k^{-1}F_k| \leq \underline{g}_k^{-1}c_{fk}\phi_k = \beta_k\phi_k$, 其中 $\beta_k = \underline{g}_k^{-1}c_{fk} = \text{diag}\{\beta_{k1}, \dots, \beta_{kl}\}$ 。令 $\delta_k = [\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots, \delta_{kl}]^T$ 。通过应用控制算法(4.7)-(4.10), 以及关系式 $0 \leq |s| - s \cdot \tanh(s/k) \leq 0.2785k$ ([135]), 可以得到下式:

$$\begin{aligned}& \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki} \dot{v}_{ki} = \sum_{k=1}^N \delta_k^T [g_k^{-1}(u_k - F_k - D_k)] = \sum_{k=1}^N \delta_k^T g_k^{-1}(u_{0k} + u_{ck}) + \delta_k^T [g_k^{-1}(-F_k - D_k)] \\ & \leq \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N [-c_1 g_{ki}^{-1} \delta_{ki}^{2h} - \delta_{ki} g_{ki}^{-1} \hat{\beta}_{ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) \\ & \quad - \delta_{ki} g_{ki}^{-1} \hat{\chi}_{ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) + |\delta_{ki}| (\beta_{ki} \phi_{ki} + \chi_{ki})]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N [-c_1 \bar{g}^{-1} \delta_{ki}^{2h} - \bar{g}^{-1} \hat{\beta}_{ki} \delta_{ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) \\
 &\quad - \bar{g}^{-1} \hat{\chi}_{ki} \delta_{ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) + (\delta_{ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) \\
 &\quad + 0.2785 \tau_{ki}) \beta_{ki} + (\delta_{ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) + 0.2785 \tau_{ki}) \chi_{ki}] \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N [-c_1 \bar{g}^{-1} \delta_{ki}^{2h} + \delta_{ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) (\beta_{ki} - \bar{g}^{-1} \hat{\beta}_{ki}) \\
 &\quad + \delta_{ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) (\chi_{ki} - \bar{g}^{-1} \hat{\chi}_{ki}) + 0.2785 \tau_{ki} (\beta_{ki} + \chi_{ki})]
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

其中 $\bar{g} = \max_{k \in \{1, \dots, N\}} \{\bar{g}_k\}$, $u_{0k} = [u_{0k1}, \dots, u_{0kl}]^T$, $u_{ck} = [u_{ck1}, \dots, u_{ckl}]^T$ 。

将式(4.23), (4.25)以及(4.27)代入(4.22)中得:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(t) &\leq -k_1 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} - k_2 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{2^{1-h} c_2^{1+1/h}} \times [0.2785 \tau_{ki} (\beta_{ki} + \chi_{ki}) \\
 &\quad + \delta_{ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) (\beta_{ki} - \bar{g}^{-1} \hat{\beta}_{ki}) + \delta_{ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) (\chi_{ki} - \bar{g}^{-1} \hat{\chi}_{ki})]
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

其中

$$k_1 = \frac{c_1 \bar{g}^{-1}}{2^{1-h} c_2^{1+1/h}} - \frac{2^{1-h} a}{c_2} - \frac{a}{2} - \frac{2^{1-h} b \bar{n}}{c_2} - \frac{b \bar{n}}{2}, \quad k_2 = -\frac{a}{2} - \frac{b \bar{n}}{2} \tag{4.29}$$

第三步: 注意到式(4.28)中出现形如 $\tilde{\beta} = \beta - \bar{g}^{-1} \hat{\beta}$ 的参数估计误差, 因此引入如下形式一般化参数估计误差:

$$\tilde{\beta} = \beta - \bar{g}^{-1} \hat{\beta}, \quad \tilde{\chi} = \chi - \bar{g}^{-1} \hat{\chi} \tag{4.30}$$

其中 $\tilde{\beta} = \text{diag}\{\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_l\} \in \mathbb{R}^{N \times Nl}$, $\tilde{\beta}_i = \text{diag}\{\tilde{\beta}_{1i}, \dots, \tilde{\beta}_{Ni}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ($i = 1, \dots, l$), $\tilde{\chi} = [\tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_l]^T \in \mathbb{R}^N$, $\tilde{\chi}_i = [\tilde{\chi}_{1i}, \dots, \tilde{\chi}_{Ni}]^T \in \mathbb{R}^N$ ($i = 1, \dots, l$)。

下面构造第三部分 Lyapunov 函数如下:

$$V_3(t) = \frac{\bar{g}}{2k_\gamma} \text{tr}(\tilde{\beta}^T \Gamma_1^{-1} \tilde{\beta}) + \frac{\bar{g}}{2k_\gamma} \tilde{\chi}^T \Gamma_2^{-1} \tilde{\chi} \tag{4.31}$$

其中 $k_\gamma = 2^{1-h} c_2^{1+1/h}$, $\Gamma_1 = \text{diag}\{\gamma_{1,1}, \dots, \gamma_{1,l}\} \in \mathbb{R}^{Nl \times Nl}$, $\Gamma_2 = \text{diag}\{\gamma_{2,1}, \dots, \gamma_{2,l}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\gamma_{1,i} = \text{diag}\{\gamma_{1,1i}, \dots, \gamma_{1,Ni}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\gamma_{2,i} = \text{diag}\{\gamma_{2,1i}, \dots, \gamma_{2,Ni}\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ($i = 1, \dots, l$)。对 $V_3(t)$ 针对变量 t 求导, 并应用由式(4.10)给出的对估计参数 $\hat{\beta}_{ki}$ 和 $\hat{\chi}_{ki}$ 的自适应律得:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_3(t) &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{k_\gamma} \tilde{\beta}_{ki} \left(-\frac{\dot{\hat{\beta}}_{ki}}{\gamma_{1,ki}} \right) + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{k_\gamma} \tilde{\chi}_{ki} \left(-\frac{\dot{\hat{\chi}}_{ki}}{\gamma_{2,ki}} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{k_\gamma} \tilde{\beta}_{ki} (\sigma_{1,ki} \hat{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} - \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki}) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{k_\gamma} \tilde{\chi}_{ki} (\sigma_{2,ki} \hat{\chi}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} - \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_{1,ki}}{k_\gamma} \tilde{\beta}_{ki} \hat{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_{2,ki}}{k_\gamma} \tilde{\chi}_{ki} \hat{\chi}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} \\
 &\quad - \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{k_\gamma} (\beta_{ki} - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\beta}_{ki}) \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki} \\
 &\quad - \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{k_\gamma} (\chi_{ki} - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\chi}_{ki}) \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki}
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

第四步：定义 Lyapunov 候选函数如下：

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \tag{4.33}$$

其中 $V_1(t)$, $V_2(t)$ 和 $V_3(t)$ 分别由式(4.14), (4.21)和(4.31)给出。

合并式(4.20), (4.28)和(4.32)得到：

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(t) &\leq -k_3 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} - k_4 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_{1,ki}}{k_\gamma} \tilde{\beta}_{ki} \hat{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_{2,ki}}{k_\gamma} \tilde{\chi}_{ki} \hat{\chi}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{0.2785 \tau_{ki} (\beta_{ki} + \chi_{ki})}{k_\gamma}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

其中

$$\begin{aligned}
 k_3 &= -2^{-h} N \ell_{\max} + \frac{c_1 \bar{g}^{-1}}{2^{1-h} c_2^{1+1/h}} - \frac{2^{1-h} a}{c_2} - \frac{a}{2} - \frac{2^{1-h} b \bar{n}}{c_2} - \frac{b \bar{n}}{2} \\
 k_4 &= \frac{c_2 k_m}{2} - 2^{-h} N \ell_{\max} - \frac{a}{2} - \frac{b \bar{n}}{2}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

故可以选择 c_1 和 c_2 分别如下： $c_1 > 2^{1-h} c_2^{1+1/h} \bar{g} (2^{-h} N \ell_{\max} + \frac{2^{1-h} a}{c_2} + \frac{a}{2} + \frac{2^{1-h} b \bar{n}}{c_2} + \frac{b \bar{n}}{2})$,

$c_2 > k_m^{-1} (2^{1-h} n \ell_{\max} + a + b \bar{n})$, 从而 $k_3 > 0$, $k_4 > 0$ 。

由于 $h = \frac{4s-1}{4s+1}$, 直接推导可得出 $\frac{3h-1}{1+h} = \frac{2s-1}{2s}$, 因此

$$\begin{aligned}
 |\beta_{ki} - \tilde{\beta}_{ki}| \|\beta_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} - \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}}\| &= (\beta_{ki} - \tilde{\beta}_{ki}) (\beta_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} - \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}}). \text{ 依据引理 4.1, 可得:} \\
 \tilde{\beta}_{ki} (\beta_{ki} - \tilde{\beta}_{ki})^{\frac{3h-1}{1+h}} &\leq \frac{1+h}{4h} [\beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} - (\beta_{ki} - \tilde{\beta}_{ki})^{\frac{4h}{1+h}}] = \frac{1+h}{4h} [\beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} - |\beta_{ki} - \tilde{\beta}_{ki}| \|\beta_{ki} - \tilde{\beta}_{ki}\|^{\frac{3h-1}{1+h}}] \\
 &\leq \frac{1+h}{4h} [\beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} |\beta_{ki} - \tilde{\beta}_{ki}| \|\beta_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} - \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}}\|] \\
 &= \frac{1+h}{4h} [\beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} (\beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} - \tilde{\beta}_{ki} \beta_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} - \beta_{ki} \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} + \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}})] + 2^{\frac{2h-2}{1+h}} \beta_{ki} \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \\
 &\leq \frac{1+h}{4h} [\beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} \beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} + \frac{(1+h)(2^{\frac{2h-2}{1+h}} \tilde{\beta}_{ki})^{\frac{4h}{1+h}}}{4h} + \frac{(3h-1)\beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}}}{4h} + \frac{(1+h)(2^{-4(\frac{h-1}{1+h})^2} \beta_{ki})^{\frac{4h}{1+h}}}{4h} \\
 &\quad + \frac{(3h-1)(2^{\frac{2h-2}{1+h}} \tilde{\beta}_{ki})^{\frac{4h}{1+h}}}{4h} - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}}]
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1+h}{4h} \left[\left(2^{\frac{8h(h-1)}{(1+h)^2}} - 2^{\frac{2(h-1)}{1+h}} \right) \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} + \left(1 - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} + \frac{3h-1}{4h} + \frac{(1+h)2^{\frac{-16h(h-1)^2}{(1+h)^3}}}{4h} \right) \beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right] \quad (4.36)$$

注意到 $\tilde{\beta}_{ki} \hat{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} = \tilde{\beta}_{ki} [\bar{g}(\beta_{ki} - \tilde{\beta}_{ki})]^{\frac{3h-1}{1+h}}$, 故由(4.36)可得:

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{ki} \hat{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} &\leq \frac{1+h}{4h} \bar{g}^{\frac{3h-1}{1+h}} \left[\left(2^{\frac{8h(h-1)}{(1+h)^2}} - 2^{\frac{2(h-1)}{1+h}} \right) \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} + \frac{3h-1}{4h} + \frac{(1+h)2^{\frac{-16h(h-1)^2}{(1+h)^3}}}{4h} \right) \beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

同理可以推得:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{ki} \hat{\chi}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} &\leq \frac{1+h}{4h} \bar{g}^{\frac{3h-1}{1+h}} \left[\left(2^{\frac{8h(h-1)}{(1+h)^2}} - 2^{\frac{2(h-1)}{1+h}} \right) \tilde{\chi}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} + \frac{3h-1}{4h} + \frac{(1+h)2^{\frac{-16h(h-1)^2}{(1+h)^3}}}{4h} \right) \chi_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

将(4.37)和(4.38)代入(4.34)中得:

$$\dot{V}(t) \leq -k_3 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} - k_4 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} - k_5 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} - k_6 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\chi}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} + d \quad (4.39)$$

其中

$$\begin{aligned} k_5 &= \frac{\sigma_{1,ki} (1+h) \bar{g}^{\frac{3h-1}{1+h}} \left(2^{\frac{2(h-1)}{1+h}} - 2^{\frac{8h(h-1)}{(1+h)^2}} \right)}{2^{3-h} c_2^{1+1/h} h}, \quad k_6 = \frac{\sigma_{2,ki} (1+h) \bar{g}^{\frac{3h-1}{1+h}} \left(2^{\frac{2(h-1)}{1+h}} - 2^{\frac{8h(h-1)}{(1+h)^2}} \right)}{2^{3-h} c_2^{1+1/h} h}, \\ d &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \left[\left(1 - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} + \frac{3h-1}{4h} + \frac{(1+h)2^{\frac{-16h(h-1)^2}{(1+h)^3}}}{4h} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{(1+h) \bar{g}^{\frac{3h-1}{1+h}} (\sigma_{1,ki} \beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} + \sigma_{2,ki} \chi_{ki}^{\frac{4h}{1+h}})}{2^{3-h} c_2^{1+1/h} h} + \frac{0.2785 \tau_{ki} (\beta_{ki} + \chi_{ki})}{2^{1-h} c_2^{1+1/h}} \right] < \infty \end{aligned} \quad (4.40)$$

注意到 $\frac{2(h-1)}{1+h} - \frac{8h(h-1)}{(1+h)^2} = \frac{2(h-1)(1-3h)}{(1+h)^2} > 0$, 故 $2^{\frac{2(h-1)}{1+h}} - 2^{\frac{8h(h-1)}{(1+h)^2}} > 0$, 因此保证了 $k_5 > 0$ 以及 $k_6 > 0$ 。令

$$k_d = \min \{k_3, k_4, k_5, k_6\} \quad (4.41)$$

由此(4.40)可以表示成如下形式:

$$\dot{V}(t) \leq -k_d \left(\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\chi}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right) + d \quad (4.42)$$

第五步: 下面证明存在一个有限时间 $T_1^* > 0$ 和以及有界常数 $0 < \zeta < \infty$ 使得当 $t \geq T_1^*$ 时 $V(t) < \zeta$ 。注意到:

$$V_1(t) = \frac{1}{1+h} (E^{\frac{1+h}{2}})^T E^{\frac{1+h}{2}} = \frac{1}{1+h} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{1+h} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned}
 V_2(t) &= \frac{1}{2^{1-h} c_2^{1+1/h}} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \int_{v_{ki}^*}^{v_{ki}} (\varsigma^{\frac{1}{h}} - (v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}}) d\varsigma \\
 &\leq \frac{1}{2^{1-h} c_2^{1+1/h}} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \|v_{ki} - v_{ki}^*\| \delta_{ki} \leq \frac{1}{c_2^{1+1/h}} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{1+h}
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

$$V_3(t) \leq \frac{\bar{g}}{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \gamma_{1m}} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N (\tilde{\beta}_{ki}^{\frac{2}{1+h}})^{1+h} + \frac{\bar{g}}{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \gamma_{2m}} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N (\tilde{\chi}_{ki}^{\frac{2}{1+h}})^{1+h} \tag{4.45}$$

其中 $\gamma_{1m} = \min_{k,i \in \{1, \dots, N\}} \{\gamma_{1,ki}\}$, $\gamma_{2m} = \min_{k,i \in \{1, \dots, N\}} \{\gamma_{2,ki}\}$ 。将式(4.43)-(4.45)合并得:

$$V(t) \leq k_v \left(\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{1+h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{1+h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N (\tilde{\beta}_{ki}^{\frac{2}{1+h}})^{1+h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N (\tilde{\chi}_{ki}^{\frac{2}{1+h}})^{1+h} \right) \tag{4.46}$$

则由引理3.2进一步得到:

$$V^{\frac{2h}{1+h}}(t) \leq k_v^{\frac{2h}{1+h}} \left(\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\chi}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right) \tag{4.47}$$

其中

$$k_v = \max \left\{ \frac{1}{1+h}, \frac{1}{c_2^{1+1/h}}, \frac{\bar{g}}{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \gamma_{1m}}, \frac{\bar{g}}{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \gamma_{2m}} \right\} \tag{4.48}$$

令 $\tilde{c} = \eta_1 k_d / k_v^{\frac{2h}{1+h}}$, 其中 k_d 和 k_v 分别由(4.41)和(4.48)给出, $0 < \eta_1 \leq 1$ 。故由式(4.42)和(4.47)得出:

$$\dot{V}(t) \leq -\tilde{c} V^{\frac{2h}{1+h}}(t) + d \tag{4.49}$$

令 $\Theta = \{(r, v) : V(t) < (\frac{d}{\eta_2 \tilde{c}})^{\frac{1+h}{2h}}, 0 < \eta_2 < 1\}$ 。根据文献[14]中定理 5.2 可知, 对于任意的

$(r, v) \notin \Theta$ 以及所有的 $t \in [0, t_x]$, 成立 $V(t) \geq (d / \eta_2 \tilde{c})^{\frac{1+h}{2h}}$, 即对所有的 $t \in [0, t_x]$, 有 $d \leq \eta_2 \tilde{c} V^{\frac{2h}{1+h}}(t)$ 。则由(4.49)可得, 对于所有的 $t \in [0, t_x]$, 成立:

$$\dot{V}(t) \leq -\tilde{c} V^{\frac{2h}{1+h}}(t) + \eta_2 \tilde{c} V^{\frac{2h}{1+h}}(t) = -(1 - \eta_2) \tilde{c} V^{\frac{2h}{1+h}}(t) \tag{4.50}$$

注意到对于所有的 $t \in [0, t_x]$, $V(t) \geq (d / \eta_2 \tilde{c})^{\frac{1+h}{2h}} > 0$ 。故根据引理 2.8, 由(4.50)可得

$$t_x < \frac{V(t_0)^{1-\frac{2h}{1+h}}}{(1-\eta_2) \tilde{c} (1-\frac{2h}{1+h})}。因此对于 \forall t \geq T^*, 其中有限时间 T^* 满足$$

$$T^* = \frac{V(t_0)^{1-\frac{2h}{1+h}}}{(1-\eta_2) \tilde{c} (1-\frac{2h}{1+h})}, 成立 V(t) < (\frac{d}{\eta_2 \tilde{c}})^{\frac{1+h}{2h}} = \zeta。$$

第六步: 给出所有子系统的稳态误差的估计值。

注意到对于所有的 $k = 1, \dots, N$ 以及 $i = 1, 2, \dots, l$, 下式成立:

$$\begin{aligned}
 |e_{ki}| &= (e_{ki}^{1+h})^{\frac{1}{1+h}} \leq \left(\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^n e_{ki}^{1+h} \right)^{\frac{1}{1+h}} \leq [(1+h)V_1(t)]^{\frac{1}{1+h}} \\
 &\leq [(1+h)V(t)]^{\frac{1}{1+h}} \leq (1+h)^{\frac{1}{1+h}} \left(\frac{d}{\eta_2 \tilde{c}} \right)^{\frac{1}{2h}}
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

由引理 3.3 可知 $|\varsigma^{1/h} - (v_{ki}^*)^{1/h}| \geq 2^{1-1/h} |\varsigma - v_{ki}^*|^{1/h}$, 故, 若 $v_{ki} \geq v_{ki}^*$ 时, 成立有:

$$\begin{aligned}
 V_2(t) &\geq \frac{1}{2^{1-h} c_2^{1+1/h}} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \int_{v_{ki}^*}^{v_{ki}} 2^{1-1/h} (\varsigma - v_{ki}^*)^{1/h} d\varsigma \\
 &= \frac{2^{h-1/h} h}{c_2^{1+1/h} (1+h)} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N (v_{ki} - v_{ki}^*)^{1+1/h}
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

若 $v_{ki} < v_{ki}^*$, 类似可以证明得出如(4.52)的关系式成立。由此可得:

$$\begin{aligned}
 |v_{ki} - v_{ki}^*| &= ((v_{ki} - v_{ki}^*)^{1+1/h})^{\frac{1}{1+1/h}} \leq \left(\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N (v_{ki} - v_{ki}^*)^{1+1/h} \right)^{\frac{1}{1+1/h}} \\
 &\leq \left(\frac{c_2^{1+1/h} (1+h)}{2^{h-1/h} h} V_2(t) \right)^{\frac{1}{1+1/h}} \leq \left(\frac{c_2^{1+1/h} (1+h)}{2^{h-1/h} h} \right)^{\frac{h}{1+h}} \left(\frac{d}{\eta_2 \tilde{c}} \right)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

另一方面, 由式(4.51)可以得出 $|v_{ki}^*| = -c_2 e_{ki}^h \leq c_2 (1+h)^{\frac{h}{1+h}} \left(\frac{d}{\eta_2 \tilde{c}} \right)^{\frac{1}{2}}$, 因此下式成立:

$$|v_{ki}| \leq |v_{ki} - v_{ki}^*| + |v_{ki}^*| \leq \left[\left(\frac{c_2^{1+1/h} (1+h)}{2^{h-1/h} h} \right)^{\frac{h}{1+h}} + c_2 (1+h)^{\frac{h}{1+h}} \right] \left(\frac{d}{\eta_2 \tilde{c}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.54}$$

由上式进一步可得, 对于所有的 $k, j \in \{1, \dots, N\}$, 每个子系统之间的相对速度误差满足:

$$|v_{ki} - v_{ji}| \leq |v_{ki}| + |v_{ji}| \leq 2 \left[\left(\frac{c_2^{1+1/h} (1+h)}{2^{h-1/h} h} \right)^{\frac{h}{1+h}} + c_2 (1+h)^{\frac{h}{1+h}} \right] \left(\frac{d}{\eta_2 \tilde{c}} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.55}$$

下面考察一般参数估计误差的界。对于所有的 $k, j \in \{1, \dots, N\}$ 以及 $i = 1, 2, \dots, l$, $\tilde{\beta}_{ki}$ 的界满足:

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\beta}_{ki}| &= \sqrt{\tilde{\beta}_{ki}^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\beta}_{ki}^2} \leq \sqrt{2k_{\gamma} \bar{g}^{-1} \gamma_{1,ki} V_3(t)} \\
 &\leq \sqrt{2k_{\gamma} \bar{g}^{-1} \gamma_{1,ki} V(t)} \leq \sqrt{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \bar{g}^{-1} \gamma_{1,ki}} \left(\frac{d}{\eta_2 \tilde{c}} \right)^{\frac{1+h}{4h}}
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

以及 $\tilde{\chi}_{ki}$ 的界满足:

$$|\tilde{\chi}_{ki}| \leq \sqrt{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \bar{g}^{-1} \gamma_{2,ki}} \left(\frac{dk_v^{\frac{2h}{1+h}}}{\eta_2 \eta_1 k_d} \right)^{\frac{1+h}{4h}} \tag{4.57}$$

故在所设计的分布式有限时间控制算法(4.7)-(4.10)下, 多智能体系统(4.1)中多个子系统之间的邻居位移误差和相对速度误差在有限时间 T^* 之内, 将会收敛到一个精度可调的小紧集 Ω_1 之内, 其中 Ω_1 由下式给出:

$$\Omega_1 = \{ |e_{ki}| \leq [(1+h)k_v]^{1+h} \left(\frac{d}{\eta_2 \eta_1 k_d} \right)^{\frac{1}{2h}}, \quad (4.58)$$

$$|v_{ki} - v_{ji}| \leq 2 \left[\left(\frac{c_2^{1+1/h} (1+h)}{2^{h-1/h} h} \right)^{\frac{h}{1+h}} + c_2 (1+h)^{\frac{h}{1+h}} \right] \left(\frac{dk_v^{1+h}}{\eta_2 \eta_1 k_d} \right)^{\frac{1}{2}}, \forall k, j = 1, \dots, N$$

同样，一般化参数估计误差在有限时间 T^* 内也收敛到一个精度可调的小的紧集 Ω_{1p} 之内，该紧集由下式给出：

$$\Omega_{1p} = \{ |\tilde{\beta}_{ki}| \leq \sqrt{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \bar{g}^{-1} \gamma_{1,ki} k_v} \left(\frac{d}{\eta_2 \eta_1 k_d} \right)^{\frac{1+h}{4h}}, \quad (4.59)$$

$$|\tilde{\chi}_{ki}| \leq \sqrt{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \bar{g}^{-1} \gamma_{2,ki} k_v} \left(\frac{d}{\eta_2 \eta_1 k_d} \right)^{\frac{1+h}{4h}}, \forall k, j = 1, \dots, N$$

综合以上证明可以看出，在有限时间 T^* 之内，局部位移误差以及相对速度误差都收敛到一个精度可调的小的紧集之内，并且一般化参数估计误差也收敛到一个精度可调的紧集之内。故系统在有限时间实现一致性，并且闭环系统中的所有信号都有界。

证明完毕。

注 4.2 注意到在所设计的有限时间一致性控制算法中，可以通过调节其中一些设计参数使得收敛时间 T^* 变小，并且使得位移误差和速度误差收敛到的紧集， Ω_1 ，的精度变小，以及一般参数估计误差所收敛到的紧集， Ω_{1p} ，的精度变小，这些参数可以大致分为三组：1) 属于 k_d 定义的范围；2) 属于 k_v 定义的范围；3) 属于 d 定义的范围。通过调节参数使得 k_v^{1+h} / k_d 变小，即调节参数使得 k_v 减小，同时使得 k_d 增大，则可以最终使得有限收敛时间 T^* 变小；通过调节参数使得 k_v^{2h} / k_d 变小，即调节参数使得 k_v 和 d 减小，同时使得 k_d 增大，则可以最终使得误差收敛到的有界区域 Ω_1 的界缩小。通过检查 k_v ， k_d 和 d 的定义，可以看出增大参数 c_1 和 c_2 可以使得 k_d 增大；增大 c_2 ， $\gamma_{1,ki}$ 和 $\gamma_{2,ki}$ 可以使得 k_v 减小；增大 c_2 ，减小 $\sigma_{1,ki}$ ， $\sigma_{2,ki}$ 以及 τ_{ki} ，将会使得 d 缩小。另外，通过减小参数 $\sigma_{1,ki}$ ， $\sigma_{2,ki}$ ， $\gamma_{1,ki}$ 以及 $\gamma_{2,ki}$ ，会加快估计参数 $\hat{\beta}_{ki}$ 和 $\hat{\chi}_{ki}$ 的自适应律的收敛速度。在实际中，在控制精度以及收敛平滑度之间应该取一个平衡。上述分析令如何选择合适的控制参数使得收敛时间 T^* 变小，并且同时使得误差收敛精度， Ω_1 和 Ω_{1p} ，变小，变得清晰明了。

4.2.3 对比分析

下面给出所设计有限时间控制算法所对应的非有限时间控制算法，并进一步分析对比两种控制算法下多智能体系统中每个子系统位移误差、速度误差以及估计参数误差的收敛速度以及收敛精度。

注意到，如果令分数阶指数 $h=1$ ，则所设计的有限时间控制算法(4.7)-(4.10)对

应成为下面的一般状态反馈控制，即非有限时间控制：

$$\begin{aligned}
 u_{ki} &= -c_1(v_{ki} + c_2 e_{ki}) + u_{dki} \\
 u_{dki} &= -\hat{\theta}_{ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) - \hat{\zeta}_{ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) \\
 \dot{\hat{\theta}}_{ki} &= -\gamma_{1,ki} \sigma_{1,ki} \hat{\theta}_{ki} + \gamma_{1,ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki} \\
 \dot{\hat{\zeta}}_{ki} &= -\gamma_{2,ki} \sigma_{2,ki} \hat{\zeta}_{ki} + \gamma_{2,ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki}
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

其中 $k=1, \dots, N$, $i=1, \dots, l$ 。

定理 4.2 考虑在假设 4.1-4.3 条件下的复杂非线性多智能体系统(4.1)。在非有限时间一致性算法(4.60)下，一致最终有界一致性达到，其中 1) 位移和速度邻居误差渐进收敛到一个小的邻域 Ω_2 内，该邻域定义如下：

$$\Omega_2 = \{ |e_{ki}| \leq \sqrt{2k_v d / \eta_2 k_d}, \quad |v_{ki} - v_{ji}| \leq 4c_2 \sqrt{2k_v d / \eta_2 k_d}, \forall k, j=1, \dots, N \} \tag{4.61}$$

2) 一般化参数估计误差渐进收敛到一个小的邻域 Ω_{2p} 内，该邻域定义如下：

$$\begin{aligned}
 \Omega_{2p} &= \{ |\tilde{\beta}_{ki}| \leq \sqrt{2c_2^2 \bar{g}^{-1} \gamma_{1,ki} k_v d / \eta_2 k_d}, \\
 &\quad |\tilde{\chi}_{ki}| \leq \sqrt{2c_2^2 \bar{g}^{-1} \gamma_{2,ki} k_v d / \eta_2 k_d}, \forall k, j=1, \dots, N \}
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

证明：通过令 $h=1$ ，按照定理 4.1 中的证明步骤一步一步类似证明，即可得到上述结果。

证明完毕。

注 4.3 注意到上述两种控制算法，有限时间算法(4.7)-(4.10)以及非有限时间算法(4.60)，通过选择足够大的控制增益 c_1 和 c_2 ，所有的收敛域，包括 Ω_1 ， Ω_{1p} ， Ω_2 和 Ω_{2p} 都会相应缩小。但是，由于控制中有输入饱和的限制，即不可能允许 c_1 和 c_2 无限制的增大。而在本节所提出的相应有限时间算法(4.7)-(4.10)中，可以通过选择合适的分数阶 h 以使得收敛速度加快，并且使得收敛精度缩小，而并不用无限制的增大控制增益 c_1 和 c_2 。

4.2.4 仿真实验及结果分析

本节考虑如下仿真例子来验证所设计有限时间自适应一致性协议的有效性与可行性。实验中仿真环境为 64 位系统，CPU 为 Intel Core T6600 2.20GHz，系统内存为 4G，仿真软件为 Matlab R2012a。

考虑一组由 4 个具有非线性动态的网络自主水面舰艇 (Autonomous Surface Vessels, ASVs) 系统^[136]。其动态模型表示如下：

$$M_k \dot{v}_k = f_k(r_k, v_k) + u_k + D_k \tag{4.63}$$

其中 $M_k = \text{diag}\{m_{x,k}, m_{y,k}, m_{z,k}\}$ 代表自主水面舰艇系统的质量矩阵； $r_k = [x_k, y_k, z_k]^T$ ， $v_k = [v_{x,k}, v_{y,k}, v_{z,k}]^T$ 和 $u_k = [u_{x,k}, u_{y,k}, u_{z,k}]^T$ 分别代表位置，速度以及控制输入向量； D_k 是外界环境干扰， $f_k(r_k, v_k)$ 代表作用在系统上的向心力、流体阻尼力以及力矩，其中 $f_k(r_k, v_k) = \Delta \cdot v_k$ ， $v_k = [v_{x,k}, v_{y,k}, v_{z,k}]^T$ ，以及

$$\Delta = \begin{bmatrix} A_{x,k} + A_{|x,k|} |v_{x,k}| & -m_{y,k} v_{z,k} & 0 \\ m_{x,k} v_{z,k} & B_{y,k} + B_{|y,k|} |v_{y,k}| & 0 \\ 0 & 0 & C_{z,k} + C_{|z,k|} |v_{z,k}| \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

在仿真中,所有的物理参数选择如下:对于 $k=1,2,3,4$, $\Delta m(t) = \sin(\pi t / 50 - \pi)$, $M_k = \text{diag}\{500 + 5(-1)^k + 5\Delta m(t), 1000 + 10(-1)^k + 10\Delta m(t), 800 + 8(-1)^k + 8\Delta m(t)\}$, $A_{x,k} = -1 + 0.1(-1)^k$, $A_{|x,k|} = -25 + 2.5(-1)^k$, $B_{y,k} = -10 + (-1)^k$, $B_{|y,k|} = -200 + 20(-1)^k$, $C_{z,k} = -0.5 + 0.05(-1)^k$, $C_{|z,k|} = -1500 + 150(-1)^k$ 。外界干扰为: $D_k = [3 + 3(-1)^k \sin(t/50) + 2 \sin(t/10), -1 + 3(-1)^k \sin(t/20 - \pi/6) + 2 \sin(t), -5(-1)^k \sin(0.1t) - \sin(t + \pi/3)]^T$ 。4个自主水面舰艇之间的网络通讯拓扑关系是有向强连通的,可以由图 4.1 表示出来。其中每一条边的权重取为 0.1。

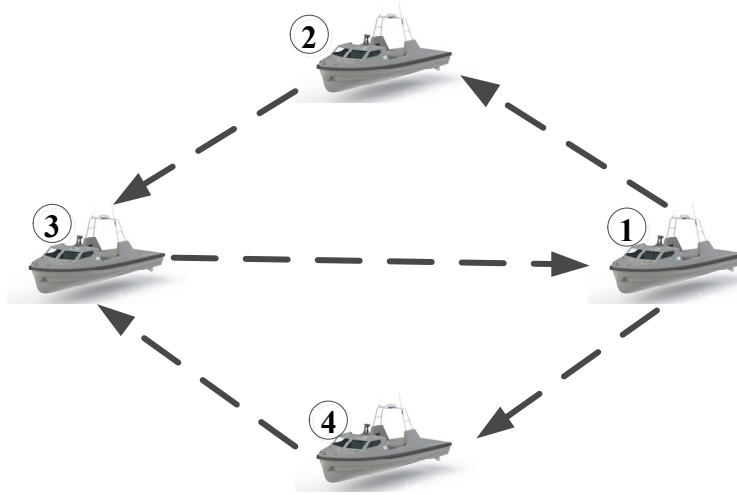


图 4.1 4 个自主水面舰艇之间的有向通讯关系

Figure 4.1 The directed communication among the 4 ASVs

仿真运行时间为 12 秒。4 个舰艇的初始状态取为 $r_1(0) = (-1.5m, 0m, \pi/3rad)$, $r_2(0) = (-1m, 2m, -\pi/4rad)$, $r_3(0) = (1.5m, 2m, -\pi/9rad)$, $r_4(0) = (2m, 1m, \pi/4rad)$, 以及 $v_k(0) = (0, 0, 0)$ ($k=1,2,3,4$)。仿真中应用所设计有限时间控制算法(4.7)-(4.10), 其中控制参数选取为: $s=2, c_1=5 \times 10^3$, $c_2=4$ 。另外,估计参数的初始值选取为 $\hat{\theta}_{ki} = 0$, $\hat{\zeta}_{ki} = 0$ ($k=1,2,3,4$, $i=1,2,3$)。

图 4.2-图 4.4 给出了仿真测试结果,其中图 4.2 描绘了 4 个自主水面舰艇在 2 维平面上从初始状态到最终状态的运动轨迹,图 4.3 和 4.4 分别给出了 4 个自主水面舰艇在 x -维方向的局部位移误差以及局部速度误差。

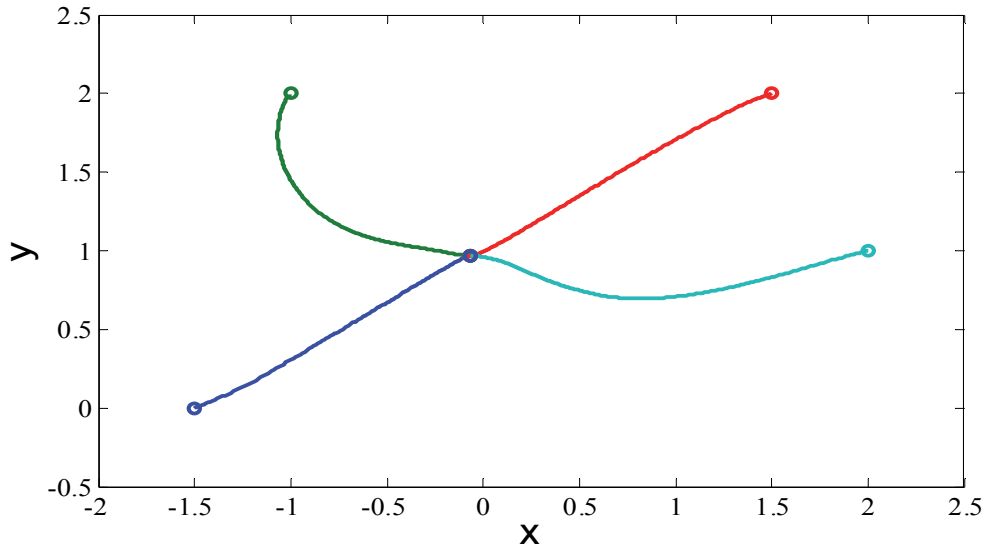
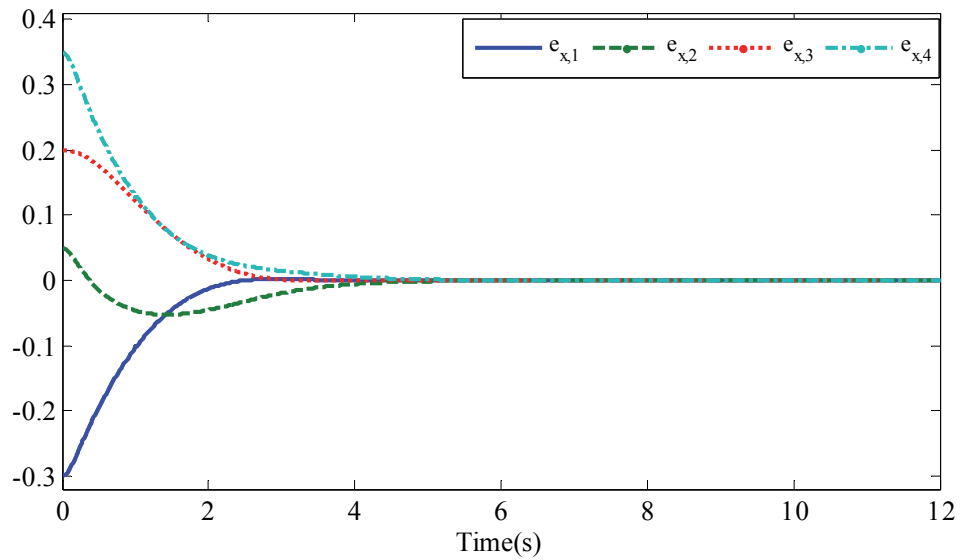


图 4.2 4 个自主水面舰艇的运动轨迹图

Figure 4.2 Position trajectories of the 4 ASVs

从图 4.2 可以看出, 系统中 4 个舰艇在有限时间内达到稳定, 在 2 维平面上的状态在有限时间内实现一致。从图 4.3 和图 4.4 可以看出, 所有自主水面舰艇在 x -维方向的位移误差和速度误差都在有限时间内平稳收敛到 0, 这进一步验证了所有自主水面舰艇在 x -维方向的位移状态和速度状态均在有限时间内达到一致。

图 4.3 4 个自主水面舰艇在 x -维方向的局部位移误差Figure 4.3 Position neighborhood errors of the 4 ASVs in x -direction

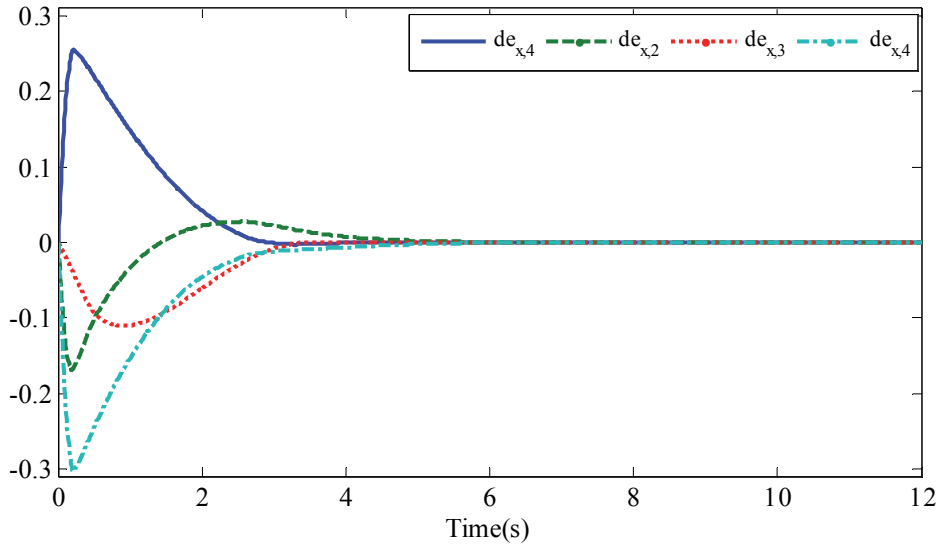

 图 4.4 4 个自主水面舰艇在 x -维方向的局部速度误差

 Figure 4.4 Velocity neighborhood errors of the 4 ASVs in x -direction

为了更好地验证本节中所设计的有限时间控制器的控制效果，我们比较了两种控制器下的误差收敛效果：有限时间控制器和非有限时间控制器（对应所设计算法 $h=1$ 的情形），仿真测试结果如图 4.5-4.6 所示，其中图 4.5 和图 4.6 分别给出了自主水面舰艇在 x -维方向的位移误差对比和速度误差对比。从图 4.5 和图 4.6 可以看出，在本节所设计有限时间控制算法下的位移误差和速度误差收敛效果，包括收敛速度和收敛精度，都明显优于非有限时间控制算法下的误差收敛效果。

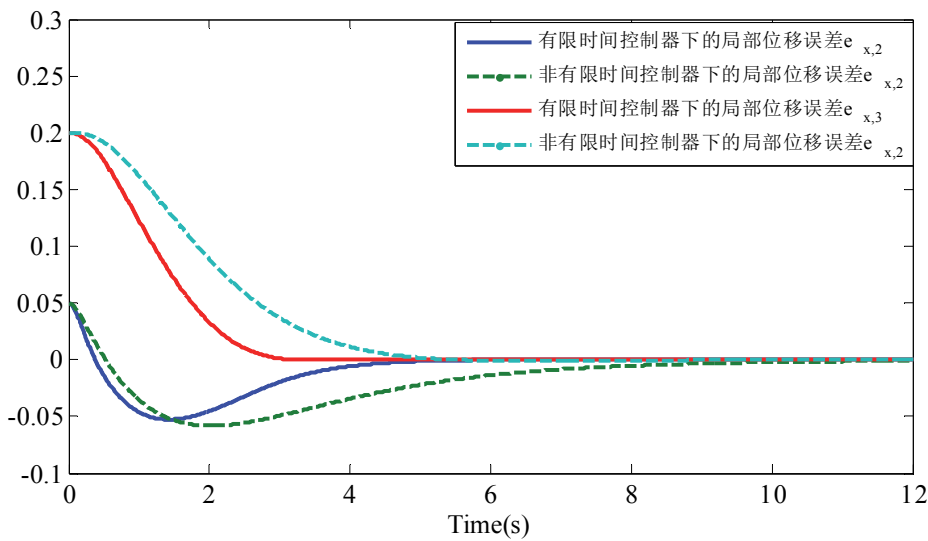


图 4.5 自主水面舰艇在不同控制器下的位移误差比较

Figure 4.5 Position errors comparison of the ASVs under different controllers

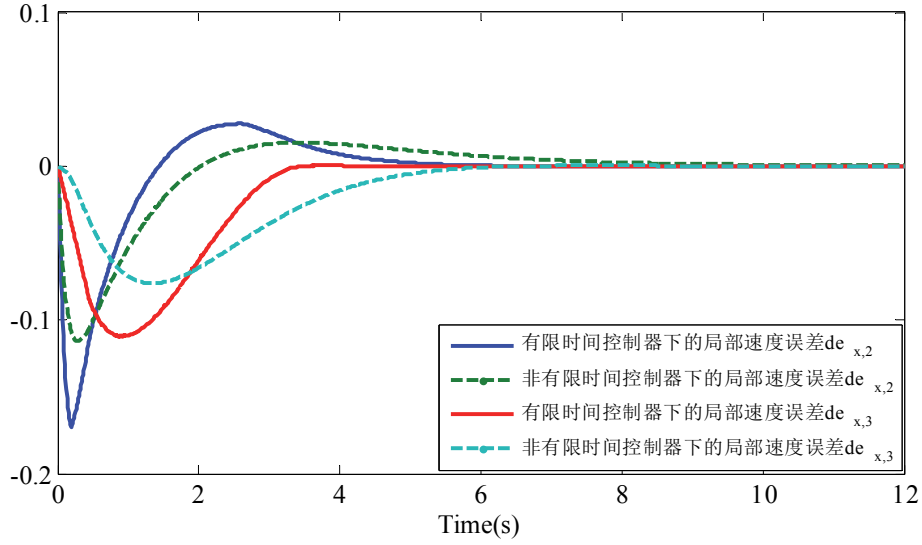


图 4.6 自主水面舰艇在不同控制器下的速度误差比较

Figure 4.6 Velocity errors comparison of the ASVs under different controllers

注 4.4 需要指出的是在上述仿真中所选取的控制参数 c_1 ，相对于参数 c_2 的选取，被设置的相对大。这是因为在任何控制系统中控制力与控制前面的增益系数是成反比的。在此仿真中， $\max\{m_{x,k}, m_{y,k}, m_{z,k}\} = 1020$ ，这导致相对控制增益为原来的 $1/1020$ ，故为了有足够的力(power)驱动系统，应选取相对大的控制参数 c_1 以抵消控制前面的增益系数 $1/1020$ 的作用。

4.3 未知故障情形下二阶复杂多智能体系统容错有限时间一致性控制

本节主要研究了在存在未知执行器故障情形下的二阶复杂非线性多智能体系统在有向通讯拓扑条件下的容错有限时间一致性控制问题。由于执行器故障的不可测性以及未知时变性，使得该复杂多智能体系统的有限时间控制问题变得更具挑战性。本节中通过引入新的虚拟参数估计误差以及新的核心函数，解决了未知有效性故障以及不可控额外执行器故障两种未知故障问题，设计出了自适应容错有限时间控制协议，保证了所研究的二阶复杂多智能体系统在存在未知执行器故障以及有向通讯拓扑条件下仍能在有限时间内达到一致。

4.3.1 问题描述

注意到未知执行器故障常会不可预期地出现，这是在实际系统长时间运行过程中不可避免的现象。当执行器出现故障时，实际的控制输入 u_{ak} 和所设计的控制输入 u_k 将不会保持一致，即两者之间存在一定差异，其关系如下^[137-139]：

$$u_{ak} = \rho_k(t, t_{\rho k})u_k + u_{rk}(t, t_{rk}), \quad k = 1, \dots, N \quad (4.65)$$

其中 $\rho_k = \text{diag}\{\rho_{k1}, \dots, \rho_{kl}\} \in R^{l \times l}$ 代表第 k 个子系统的执行器有效性； $u_{rk}(\cdot) \in R^l$ 代表不可控的额外执行器故障； $t_{\rho k} = [t_{\rho k1}, \dots, t_{\rho kl}]^T$ ， $t_{rk} = [t_{rk1}, \dots, t_{rkl}]^T$ ， 其中 $t_{\rho ki}$ 和 t_{rki} ($i=1, 2, \dots, l$) 分别代表第 k 个子系统的第 i 个执行器出现失去部分有效性故障和不可控额外执行器故障的未知时间点。

假设 4.4 执行器有效性故障 $\rho_k(\cdot)$ 以及不可控额外执行器故障 $u_{rk}(\cdot)$ 都是未知，可能快速时变以及不可预测的，但是二者皆有界，即存在未知有界常数矩阵 $\rho_k^{\min} = \text{diag}\{\rho_{k1}^{\min}, \dots, \rho_{kl}^{\min}\}$ ，其中 $0 < \rho_{ki}^{\min} \leq 1$ ($i=1, \dots, l$)，使得 $\rho_k^{\min} \leq \rho_k(\cdot) \leq I_l$ ，以及存在未知有界常数向量 $u_{rk}^{\max} = [u_{rk1}^{\max}, \dots, u_{rkl}^{\max}]^T$ ，其中 $0 \leq u_{rki}^{\max} < \infty$ ($i=1, \dots, l$)，使得 $|u_{rk}(\cdot)| \leq u_{rk}^{\max}$ 。

注 4.5 对于上述故障出现的时间点 $t_{\rho k}$ 和 t_{rk} 都是完全未知的，并且 ρ_k 和 u_{rk} 也是未知时变的，这意味着何种故障，将会在什么时候出现，都是不可预测的，这使得相应的控制器设计以及稳定性分析变得更复杂，也更有挑战性。 $0 < \rho_{ki} \leq 1$ 是确保容错问题得以解决的必要条件，意味着即使第 k 个子系统的第 i 个执行器失去了其中一部分执行有效性，但仍可以保持部分有效性，从而实际的控制输入 u_{ak} 仍可以受到所设计控制输入 u_k 的影响。

本节控制目标为设计一个自适应容错有限时间一致性控制协议，使得多个非线性子系统在存在未知执行器故障以及有向拓扑条件下在有限时间内达到一致。

4.3.2 控制器设计与稳定性分析

在存在执行器故障情形下，多智能体系统(4.1)变为如下形式：

$$\begin{aligned} \dot{r}_k(t) &= v_k(t) \\ g_k(t)\dot{v}_k(t) &= \rho_k(t, t_{\rho k})u_k + u_{rk}(t, t_{rk}) + F_k(r_k, v_k) + D_k(r_k, v_k, t), \quad k=1, \dots, N \end{aligned} \quad (4.66)$$

相对于执行器健康的情形，执行器故障影响到的是控制器的未知时变控制增益以及未知外界干扰，这两部分需要引入新的核心函数，即新的估计参数，以及引入新的一般化参数估计误差来处理。对于设计控制器而言，影响到的是所设计控制器中新的参数估计误差的应用。而对于稳定性分析而言，影响到的是需要引入新的一般化参数估计误差到新的 Lyapunov 函数中。下面在上一节针对健康执行器情形的分析基础上，着重从这两点不同处针对执行器故障情况进行分析。

注意到：

$$\dot{v}_k = g_k^{-1}(\rho_k u_k + u_{rk} + F_k + D_k) \quad (4.67)$$

其中 $|g_k^{-1}(u_{rk} + D_k)| \leq \underline{g}^{-1}(u_{rk}^{\max} + d_k^{\max}) = \theta_k$ ，其中 $\theta_k = \underline{g}^{-1}(u_{rk}^{\max} + d_k^{\max})$ ， $|g_k^{-1}F_k| \leq \underline{g}^{-1}c_{fk}\phi_k = \beta_k\phi_k$ ，其中 $\beta_k = \underline{g}^{-1}c_{fk} = \text{diag}\{\beta_{k1}, \dots, \beta_{kl}\}$ 。相比健康执行器情形，这里出现新的估计参数 θ_k ，而估计参数 β_k 并未改变。为了引入故障情形下控制器设计以及稳定性分析，首先引入相关变量定义。邻居误差 e_{ki} 以及 E 分别如前(4.3)和(4.4)所定义， δ_{ki} 亦如前所定义， $\delta_{ki} = v_{ki}^{1/h} + c_2^{1/h} e_{ki}$ 。下面引入新的一般化参数估计

误差:

$$\tilde{\beta} = \beta - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\beta}, \quad \tilde{\theta} = \theta - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\theta} \quad (4.68)$$

其中 $\rho_m = \min_{k \in J, j=1, \dots, l} \{\rho_{ki}^{\min}\}$ 。由此设计出有限时间自适应容错控制器如下:

$$\begin{aligned} u_{ki} &= -c_1 \delta_{ki}^{2h-1} + u_{cki} \\ u_{cki} &= -\hat{\beta}_{ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) - \hat{\theta}_{ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) \\ \dot{\hat{\beta}}_{ki} &= -\gamma_{1,ki} \sigma_{1,ki} \hat{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} + \gamma_{1,ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki} \\ \dot{\hat{\theta}}_{ki} &= -\gamma_{2,ki} \sigma_{2,ki} \hat{\theta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} + \gamma_{2,ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki} \end{aligned} \quad (4.69)$$

其中 $\hat{\beta}_{ki}$ 和 $\hat{\theta}_{ki}$ 分别是虚拟参数 β_{ki} 和 θ_{ki} 的估计值, 其余参数 $h, s, c_1, c_2, \phi_{ki}(\cdot), \tau_{ki}, \gamma_{1,ki}, \gamma_{2,ki}, \sigma_{1,ki}$ 和 $\sigma_{2,ki}$ 都如前定义。

定理 4.3 考虑在假设 4.1-4.4 条件下的复杂非线性故障多智能体系统(4.66)。在所设计的自适应容错控制算法(4.69)下, 有限时间稳定性一致达到, 其中 1) 邻居位移和速度误差在有限时间 \bar{T}^* 内收敛到一个小的邻域 Ω_3 内, 该邻域定义如下:

$$\Omega_3 = \{ |e_{ki}| \leq [(1+h)k'_v]^{\frac{1}{1+h}} \left(\frac{d'}{\eta_2 \eta_1 k'_d} \right)^{\frac{1}{2h}}, \quad (4.70)$$

$$|v_{ki} - v_{ji}| \leq 2 \left[\left(\frac{c_2^{1+1/h} (1+h)}{2^{h-1/h} h} \right)^{\frac{h}{1+h}} + c_2 (1+h)^{\frac{h}{1+h}} \right] \left(\frac{d' k'_v{}^{\frac{2h}{1+h}}}{\eta_2 \eta_1 k'_d} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall k, j=1, \dots, N\}$$

2) 一般化参数估计误差在有限时间 \bar{T}^* 内收敛到一个小的邻域 Ω_{3p} 内, 其中

$$\begin{aligned} \Omega_{3p} &= \{ |\tilde{\beta}_{ki}| \leq \sqrt{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \bar{g}^{-1} \rho_m \gamma_{1,ki} k'_v} \left(\frac{d'}{\eta_2 \eta_1 k'_d} \right)^{\frac{1+h}{4h}}, \\ |\tilde{\theta}_{ki}| &\leq \sqrt{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \bar{g}^{-1} \rho_m \gamma_{2,ki} k'_v} \left(\frac{d'}{\eta_2 \eta_1 k'_d} \right)^{\frac{1+h}{4h}}, \quad \forall k, j=1, \dots, N \} \end{aligned} \quad (4.71)$$

3) 闭环系统中所有的信号都有界。另外, 有限收敛时间 \bar{T}^* 满足:

$$\bar{T}^* \leq \frac{V'(t_0)^{\frac{1-h}{1+h}} k'_v{}^{\frac{2h}{1+h}}}{(1-\eta_2) \eta_1 k'_d \frac{1-h}{1+h}} \quad (4.72)$$

其中 $0 < \eta_1 \leq 1, 0 < \eta_2 < 1$, $V'(t_0)$ 由(4.73)给出, 是已知的, d' 由(4.84)给出, k'_d 和 k'_v 分别由(4.85)和(4.88) 给出, 这些都是精确可计算的。

证明: 构造 Lyapunov 函数如下:

$$V'(t) = V'_1(t) + V'_2(t) + V'_3(t) \quad (4.73)$$

其中

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= \frac{1}{1+h} (E^{\frac{1+h}{2}})^T (\text{diag}(p) \mathcal{L} \otimes I_l) E^{\frac{1+h}{2}} \\
 V_2(t) &= \frac{1}{2^{1-h} c_2^{1+1/h}} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \int_{v_{ki}^*}^{v_{ki}} (\varsigma^{\frac{1}{h}} - (v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}}) d\varsigma \\
 V_3'(t) &= \frac{\bar{g}}{2k_\gamma \rho_m} \text{tr}(\tilde{\beta}^T \Gamma_1^{-1} \tilde{\beta}) + \frac{\bar{g}}{2k_\gamma \rho_m} \tilde{\theta}^T \Gamma_2^{-1} \tilde{\theta}
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

注意到 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 的定义和定理 4.1 中 $V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 定义相同, 对 $V_1(t)$ 的求导过程和定理 4.1 中过程相同, 在此就不再重复证明, 直接给出如下求导结果:

$$\dot{V}_1(t) \leq -\frac{c_2 k_m}{2} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N (e_{ki})^{2h} + 2^{-h} N \ell_{\max} \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N [(\delta_{ki})^{2h} + (e_{ki})^{2h}] \tag{4.75}$$

由于对 $V_2(t)$ 求导会涉及到对 v_k 的求导, 而由式 (4.67) 得 $\dot{v}_k = g_k^{-1}(\rho_k u_k + u_{rk} + F_k + D_k)$, 因此导致求导结果和健康情形不同。首先重复(4.22)-(4.25)的步骤, 再由式(4.67)得:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki} \dot{v}_{ki} &= \sum_{k=1}^N \delta_k^T [g_k^{-1}(\rho_k u_k + u_{rk} - F_k - D_k)] \\
 &= \sum_{k=1}^N \delta_k^T g_k^{-1} \rho_k (u_{0k} + u_{ck}) + \delta_k^T [g_k^{-1}(u_{rk} - F_k - D_k)] \\
 &\leq \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N [-c_1 \bar{g}^{-1} \rho_m \delta_{ki}^{2h} - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\beta}_{ki} \delta_{ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) \\
 &\quad - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\theta}_{ki} \delta_{ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) + |\delta_{ki}| (\beta_{ki} \phi_{ki} + \theta_{ki})] \\
 &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N [-c_1 \bar{g}^{-1} \rho_m \delta_{ki}^{2h} + \delta_{ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) (\beta_{ki} - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\beta}_{ki}) \\
 &\quad + \delta_{ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) (\theta_{ki} - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\theta}_{ki}) + 0.2785 \tau_{ki} (\beta_{ki} + \theta_{ki})]
 \end{aligned} \tag{4.76}$$

故相应可得下式:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(t) &\leq -k'_1 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} - k'_2 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{2^{1-h} c_2^{1+1/h}} \times [0.2785 \tau_{ki} (\beta_{ki} + \theta_{ki}) \\
 &\quad + \delta_{ki} \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) (\beta_{ki} - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\beta}_{ki}) + \delta_{ki} \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) (\theta_{ki} - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\theta}_{ki})]
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

其中

$$k'_1 = \frac{c_1 \bar{g}^{-1} \rho_m}{2^{1-h} c_2^{1+1/h}} - \frac{2^{1-h} a}{c_2} - \frac{a}{2} - \frac{2^{1-h} b \bar{n}}{c_2} - \frac{b \bar{n}}{2}, \quad k'_2 = -\frac{a}{2} - \frac{b \bar{n}}{2} \tag{4.78}$$

下面对 $V_3'(t)$ 求导。通过应用对估计参数 $\hat{\beta}_{ki}$ 和 $\hat{\theta}_{ki}$ 的自适应律(4.69)以及一般化参数估计误差 $\tilde{\beta}_{ki}$ 和 $\tilde{\theta}_{ki}$ 的定义(4.68), 可得 $V_3'(t)$ 的导数为

$$\begin{aligned}
\dot{V}_3'(t) &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{k_\gamma} \tilde{\beta}_{ki} \left(-\frac{\dot{\beta}_{ki}}{\gamma_{1,ki}} \right) + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{k_\gamma} \tilde{\chi}_{ki} \left(-\frac{\dot{\theta}_{ki}}{\gamma_{2,ki}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_{1,ki}}{k_\gamma} \tilde{\beta}_{ki} \hat{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_{2,ki}}{k_\gamma} \tilde{\theta}_{ki} \hat{\theta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} \\
&\quad - \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{k_\gamma} (\beta_{ki} - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\beta}_{ki}) \phi_{ki} \tanh(\delta_{ki} \phi_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki} \\
&\quad - \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{1}{k_\gamma} (\theta_{ki} - \bar{g}^{-1} \rho_m \hat{\theta}_{ki}) \tanh(\delta_{ki} / \tau_{ki}) \delta_{ki}.
\end{aligned} \tag{4.79}$$

将式(4.75), (4.77)以及(4.79)合并得:

$$\begin{aligned}
\dot{V}'(t) &\leq -k'_3 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} - k'_4 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_{1,ki}}{k_\gamma} \tilde{\beta}_{ki} \hat{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} \\
&\quad + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{\sigma_{2,ki}}{k_\gamma} \tilde{\theta}_{ki} \hat{\theta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \frac{0.2785 \tau_{ki} (\beta_{ki} + \theta_{ki})}{k_\gamma}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

其中

$$\begin{aligned}
k'_3 &= -2^{-h} N \ell_{\max} + \frac{c_1 \bar{g}^{-1} \rho_m}{2^{1-h} c_2^{1+1/h}} - \frac{2^{1-h} a}{c_2} - \frac{a}{2} - \frac{2^{1-h} b \bar{n}}{c_2} - \frac{b \bar{n}}{2} \\
k'_4 &= \frac{c_2 k_m}{2} - 2^{-h} N \ell_{\max} - \frac{a}{2} - \frac{b \bar{n}}{2}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

故可选择 c_1 和 c_2 分别如下: $c_1 > 2^{1-h} c_2^{1+1/h} \bar{g} \rho_m^{-1} (2^{-h} N \ell_{\max} + \frac{2^{1-h} a}{c_2} + \frac{a}{2} + \frac{2^{1-h} b \bar{n}}{c_2} + \frac{b \bar{n}}{2})$,

$c_2 > k_m^{-1} (2^{1-h} n \ell_{\max} + a + b \bar{n})$, 从而 $k'_3 > 0$, $k'_4 > 0$ 。类似定理 4.1 中推导可得:

$$\begin{aligned}
\tilde{\beta}_{ki} \hat{\beta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} &\leq \frac{1+h}{4h} (\bar{g} \rho_m^{-1})^{\frac{3h-1}{1+h}} \left[(2^{\frac{8h(h-1)}{(1+h)^2}} - 2^{\frac{2(h-1)}{1+h}}) \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right. \\
&\quad \left. + (1 - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} + \frac{3h-1}{4h} + \frac{(1+h)2^{\frac{-16h(h-1)^2}{(1+h)^3}}}{4h}) \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right] \\
\tilde{\theta}_{ki} \hat{\theta}_{ki}^{\frac{3h-1}{1+h}} &\leq \frac{1+h}{4h} (\bar{g} \rho_m^{-1})^{\frac{3h-1}{1+h}} \left[(2^{\frac{8h(h-1)}{(1+h)^2}} - 2^{\frac{2(h-1)}{1+h}}) \tilde{\theta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right. \\
&\quad \left. + (1 - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} + \frac{3h-1}{4h} + \frac{(1+h)2^{\frac{-16h(h-1)^2}{(1+h)^3}}}{4h}) \tilde{\theta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right]
\end{aligned} \tag{4.82}$$

将上式代入(4.80)中得:

$$\dot{V}'(t) \leq -k'_3 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} - k'_4 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} - k'_5 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} - k'_6 \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\theta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} + d' \tag{4.83}$$

其中

$$\begin{aligned}
 k'_5 &= \frac{\sigma_{1,ki}(1+h)(\bar{g}\rho_m^{-1})^{\frac{3h-1}{1+h}}(2^{\frac{2(h-1)}{1+h}} - 2^{\frac{8h(h-1)}{(1+h)^2}})}{2^{3-h}c_2^{1+1/h}h} \\
 k'_6 &= \frac{\sigma_{2,ki}(1+h)(\bar{g}\rho_m^{-1})^{\frac{3h-1}{1+h}}(2^{\frac{2(h-1)}{1+h}} - 2^{\frac{8h(h-1)}{(1+h)^2}})}{2^{3-h}c_2^{1+1/h}h} \\
 d &= \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \left[(1 - 2^{\frac{2h-2}{1+h}} + \frac{3h-1}{4h} + \frac{(1+h)2^{\frac{-16h(h-1)^2}{(1+h)^3}}}{4h}) \right. \\
 &\quad \times \frac{(1+h)(\bar{g}\rho_m^{-1})^{\frac{3h-1}{1+h}}(\sigma_{1,ki}\beta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} + \sigma_{2,ki}\theta_{ki}^{\frac{4h}{1+h}})}{2^{3-h}c_2^{1+1/h}h} + \left. \frac{0.2785\tau_{ki}(\beta_{ki} + \theta_{ki})}{2^{1-h}c_2^{1+1/h}} \right] < \infty
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

令

$$k'_d = \min\{k'_3, k'_4, k'_5, k'_6\} \tag{4.85}$$

则式(4.83)可以表示成如下形式:

$$\dot{V}'(t) \leq -k'_d \left(\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\theta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right) + d' \tag{4.86}$$

采用类似(4.43)-(4.47)的步骤, 可得:

$$V'(t)^{\frac{2h}{1+h}} \leq k'_v{}^{\frac{2h}{1+h}} \left(\sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N e_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \delta_{ki}^{2h} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\beta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} + \sum_{i=1}^l \sum_{k=1}^N \tilde{\theta}_{ki}^{\frac{4h}{1+h}} \right) \tag{4.87}$$

其中

$$k'_v = \max\left\{ \frac{1}{1+h}, \frac{1}{c_2^{1+1/h}}, \frac{\bar{g}}{2^{2-h}c_2^{1+1/h}\gamma_{1m}\rho_m}, \frac{\bar{g}}{2^{2-h}c_2^{1+1/h}\gamma_{2m}\rho_m} \right\} \tag{4.88}$$

令 $\tilde{c}' = \eta_1 k'_d / k'_v{}^{\frac{2h}{1+h}}$, 其中 k'_d 和 k'_v 分别由(4.85)和(4.88)给出, $0 < \eta_1 \leq 1$ 。故由式(4.86)和(4.87)得出:

$$\dot{V}'(t) \leq -\tilde{c}' V'(t)^{\frac{2h}{1+h}} + d' \tag{4.89}$$

采用类似(4.50)-(4.59)的步骤可得, 在有限时间 \bar{T}^* 内, 其中 \bar{T}^* 满足:

$$\bar{T}^* = \frac{V'(t_0)^{1-\frac{2h}{1+h}}}{(1-\eta_2)\tilde{c}'(1-\frac{2h}{1+h})} \tag{4.90}$$

故障多智能体系统(4.66)中多个子系统之间的邻居位移误差和相对速度误差在有限时间 \bar{T}^* 之内, 将会收敛到一个精度可调的小紧集 Ω_3 之内, 其中 Ω_3 由(4.70)给出。

同样, 一般化参数估计误差在有限时间 \bar{T}^* 内也收敛到一个精度可调的小的紧集 Ω_{3p} 之内, 该紧集由(4.71)给出。

证明完毕。

4.4 有向拓扑条件下高阶非仿多智能体系统有限时间一致性控制

本节主要针对高阶非仿射多智能体系统，研究了其在有向拓扑条件下的有限时间一致性控制问题，该系统不仅含有未知非仿射动态，而且含有复杂不确定非线性因素，其中包括不可线性参数化分解的不确定性因素以及未知有界外界干扰，基于反衍控制设计思想以及归纳法思想，结合针对高阶系统的加幂积分技术，核心函数技术以及自适应方法，设计出了基于可调的分数阶状态反馈以及分数阶自适应律的有限时间一致性协议，并给出了基于 Lyapunov 稳定性理论的有限时间稳定性的严格理论证明。该结果将第二节中针对二阶复杂多智能体系统的有限时间一致性控制结果拓展到了高阶系统，这中间面临了很多的技术困难与挑战。其中最大的阻力在于，通常情况下应用于针对高阶系统的滑膜误差 (Filtering Error) 方法结合 Babarlat 引理或一致最终有界 (Uniformly Ultimately Bounded, UUB) 理论得出渐进收敛结果的思路在有限时间控制中行不通，这主要是因为滑膜误差在有限时间内收敛到零或收敛到某个零值的小邻域并不能保证初始误差同样在有限时间内收敛到零或收敛到某个零值的小邻域。本节主要借用 Huang 等在文献[140]中所采用的针对高阶单输入单输出系统的加幂积分技术思想，将该方法引入到多智能体系统分布式协同控制，从而解决高阶多智能体系统的有限时间控制问题，而如何总结出一个统一规律以利用归纳法并结合 Lyapunov 稳定性理论来给出严格的稳定性分析证明成为解决该问题的关键点。

4.4.1 问题描述

考虑如下一组含有 N 个智能体，且具有未知非仿射动态的高阶多智能体系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i,m} &= x_{i,m+1}, \quad m=1, \dots, n-1, \\ \dot{x}_{i,n} &= f_i(\bar{x}_i, u_i) + f_{di}(\bar{x}_i, t), \\ y_i &= x_{i,1}, \quad i=1, \dots, N\end{aligned}\tag{4.91}$$

其中 $\bar{x}_i = [x_{i,1}, \dots, x_{i,n}]^T \in R^n$; $x_{i,m} \in \mathfrak{X}$, $u_i \in \mathfrak{U}$ 和 $y_i \in \mathfrak{Y}$ 分别代表第 i 个子系统的状态，控制输入和控制输出； $f_i(\cdot): \mathfrak{X}^n \times \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{X}$ 是平滑但未知的非仿射函数； $f_{di}(\cdot)$ 代表所有作用在第 i 个子系统上的不确定性因素以及外界干扰。

注意到对于非仿射系统，其中包含的未知非仿射动态使得控制输入通过一种隐含并且不确定的方式进入系统，使得控制器设计更加具有挑战性。为了对未知非仿射系统(4.91)进行控制器设计，首先利用平均值定理^[141]将其转换为仿射系统，即存在一个未知常数 $\xi_i \in (0, u_i)$ ($i=1, \dots, N$) 使得下式成立：

$$f_i(\bar{x}_i, u_i) = f_i(\bar{x}_i, 0) + \frac{\partial f_i(\bar{x}_i, \xi_i)}{\partial u_i} u_i\tag{4.92}$$

令 $g_i(\bar{x}_i, \xi_i) = \partial f_i(\bar{x}_i, \xi_i) / \partial u_i$ 。将上式(4.92)代入式(4.91)中得：

$$\dot{x}_{i,n} = g_i(\bar{x}_i, \xi_i) u_i + L_{f_i}(\bar{x}_i, t)\tag{4.93}$$

其中 $L_{fi}(\bar{x}_i, t) = f_i(\bar{x}_i, 0) + f_{di}(\bar{x}_i, t)$ 代表综合不确定性。

假设多智能体系统(4.91)中多个子系统之间的网络通讯拓扑用有向图 \mathcal{G} 表示, 其满足如下假设条件:

假设 4.5 有向通讯拓扑 \mathcal{G} 是强连通的。

系统的未知控制增益以及未知非线性因素分别满足如下假设条件:

假设 4.6 $g_i(\cdot) (i=1, \dots, N)$ 未知时变但有界, 并且非零, 即存在未知有界常数 g_{li} 和 g_{ui} 使得 $0 < g_{li} \leq g_i(\cdot) \leq g_{ui} < \infty$ 成立, 并且 $g_i(\cdot) (i=1, \dots, N)$ 的符号是固定的。不失一般性, 本文中假设 $\text{sgn}(g_i) = +1 (i=1, \dots, N)$ 。

假设 4.7 对于综合不确定非线性项 $L_{fi}(\cdot)$, 存在一个有界常数 $\alpha_i \geq 0$ 和一个已知数量函数 $\psi_i(\bar{x}_i) \geq 0$ 使得 $|L_{fi}(\cdot)| \leq \alpha_i \psi_i(\cdot)$ 成立, 并且当 \bar{x}_i 有界时, $\psi_i(\bar{x}_i)$ 才有界。

注 4.6 在假设 4.6 中, 虽然 g_{li} 是未知的, 仍可以比较容易地估计到它的最低下界, 即存在某常数 $\underline{g} > 0$ 使得 $\underline{g} < g_{li}$ 。假设 4.6 是许多关于非仿射系统追踪控制问题研究工作中所做的通常的假设^[139, 142-144]。假设 4.7 中不确定非线性因素只涉及到了系统的部分核心信息, 而不用知道系统精确模型信息以及系统中非线性的精确表达式, 只需知道系统的大致信息即可。

本节的控制目标为: 针对具有未知非仿射动态以及不可线性参数化分解的不确定性因素的高阶多智能体系统(4.91), 建立分布式自适应有限时间一致性控制算法, 使得多个非线性子系统在有向拓扑条件下在有限时间内达到输出状态一致。

4.4.2 控制器设计与稳定性分析

本小节主要集中于针对系统(4.91)进行有限时间一致性控制器设计。首先引入局部邻居误差和局部虚拟误差的定义, 然后得到一些有用的相关性质, 这些性质对于控制器设计和稳定性分析都起到了很重要的作用, 最后利用归纳法思想进行控制器设计和稳定性分析。

为了建立针对高阶多智能体系统的有限时间控制算法, 引入如下局部位移误差 $e_{i,1}$ 以及局部虚拟误差 $e_{i,m}$:

$$\begin{aligned} e_{i,1} &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (y_i - y_j), \quad i, j = 1, \dots, N \\ e_{i,m} &= x_{i,m}^{1/q_m} - x_{i,m}^{*1/q_m}, \quad i = 1, \dots, N, \quad m = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4.94)$$

其中 $q_m = (4ln + 3 - 2m) / (4ln + 1) > 0$ ($l \in \mathbb{Z}_+$); $x_{i,m}^*$ ($m = 2, \dots, n$) 为虚拟控制信号, 定义为 $x_{i,m}^* = -\beta_{i,m-1} e_{i,m-1}^{q_m}$, 其中 $\beta_{i,m-1}$ 为要设计的正常数。令 $y = [y_1, \dots, y_N]^T$, $E = [e_{1,1}, \dots, e_{N,1}]^T$, 则成立 $E = \mathcal{L}y$ 。

注 4.7 和 Huang 等在文献[140]中定义分数阶 q_m 的方式不同, 本文将可调整数 l 引入到 q_m 中, 这种处理方式使得所设计的基于分数阶状态反馈的有限时间控制算法可通过选择不同的整数 l 来达到灵活调节误差收敛精度以及收敛时间的目标。

在给出主要结果之前，首先给出四个有用的性质。

性质 4.1 令 $\Xi = 1/2(P\mathcal{L} + \mathcal{L}^T P)$ ，其中 $P = \text{diag}\{p\}$ ， $p = [p_1, \dots, p_N]^T$ 是拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 零特征值所对应的左特征向量。在假设 4.5 的条件下， $\forall E^s \neq 0_N$ ，存在一个常数 $k_s > 0$ 使得：

$$(E^s)^T \Xi E^s \geq k_s (E^s)^T E^s \quad (4.95)$$

其中 $s = (4ln - 1)/(4ln + 1)$ ， $l \in \mathbb{Z}_+$ 。

证明：该证明过程可以参照第三章引理 3.6 的证明，在此就不再重复。

证明完毕。

性质 4.2 假设 $V: \mathcal{D} \rightarrow \mathfrak{R}$ 为连续函数，满足如下条件：

(i) V 是正定的；

(ii) 存在实常数 $\tilde{c} > 0$ ， $\alpha \in (0, 1)$ 和 $0 < \zeta < \infty$ ，以及一个开邻域 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D}$ 使得：

$$\dot{V}(x, t) \leq -\tilde{c}V(x, t)^\alpha + \zeta, x \in \mathcal{U} \setminus \{0\} \quad (4.96)$$

则存在一个有限时间 T^* ，满足：

$$T^* \leq \frac{V(x, 0)^{1-\alpha}}{(1-\mu_1)\tilde{c}(1-\alpha)}, \quad 0 < \mu_1 < 1 \quad (4.97)$$

并且对于 $\forall t \geq T^*$ ， $V(x, t)$ 有如下界限：

$$V(x, t) < (\zeta / (\mu_1 \tilde{c}))^{\frac{1}{\alpha}} \quad (4.98)$$

证明：令 $\Delta = \{x : V(x, t) < (\frac{\zeta}{\mu_1 \tilde{c}})^{\frac{1}{\alpha}}, 0 < \mu_1 < 1\}$ 。根据文献[14]中定理 5.2 可知对任意的

$x \notin \Delta$ 和 $t \in [0, t_x]$ ，成立有 $V(x, t) \geq (\zeta / \mu_1 \tilde{c})^{\frac{1}{\alpha}}$ ，即对所有的 $t \in [0, t_x]$ ， $\zeta \leq \mu_1 \tilde{c} V(x, t)^\alpha$ 。

故结合式(4.96)，对所有的 $t \in [0, t_x]$ ，可得：

$$\dot{V}(x, t) \leq -\tilde{c}V(x, t)^\alpha + \mu_1 \tilde{c} V(x, t)^\alpha = -(1-\mu_1)\tilde{c}V(x, t)^\alpha \quad (4.99)$$

注意到对所有的 $t \in [0, t_x]$ ， $V(x, t) \geq (\zeta / \mu_1 \tilde{c})^{\frac{1}{\alpha}} > 0$ 。由引理 2.7 以及式(4.99)可知

$$t_x < \frac{V(x, 0)^{1-\alpha}}{(1-\mu_1)\tilde{c}(1-\alpha)} = T^*。由此可得式(4.98)对 $\forall t \geq T^*$ 皆成立。$$

证明完毕。

性质 4.3 考虑具有如下形式的连续函数：

$$\dot{\vartheta}(t) = -k_\vartheta \vartheta(t)^h + q\zeta(t) \quad (4.100)$$

其中 $k_\vartheta > 0$ ， $0 < h = h_1 / h_2 \leq 1$ （ $h_1, h_2 > 0$ 为奇整数）， $q > 0$ 为常数， $\zeta(t) \geq 0$ 为数量函数。则对任意给定的有界初始条件 $\vartheta(0) \geq 0$ 以及 $\forall t \geq 0$ ，成立 $\vartheta(t) \geq 0$ 。

证明：当 $\zeta(t) \equiv 0$ 时该结论显然成立。事实上，当 $\zeta(t) \equiv 0$ 时，式(4.100)为：

$$\dot{\vartheta}(t) = -k_\vartheta \vartheta(t)^h \quad (4.101)$$

通过直接对式(4.101)进行积分运算，得到：

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= [| \vartheta(0) |^{1-h} - k_\vartheta(1-h)t]^{\frac{1}{1-h}}, t < \bar{T}, \vartheta(0) \neq 0 \\ &= 0, \quad \text{其他} \end{aligned} \quad (4.102)$$

其中 $\bar{T} = \frac{|\vartheta(0)|^{1-h}}{k_\vartheta(1-h)}$ 。该式意味着对 $\forall t \geq 0$ 以及任意有界的初始条件 $\vartheta(0) \geq 0$ ，有 $\vartheta(t) \geq 0$ 。下面考虑 $\varsigma(t)$ 并不恒为 0 的情形。如果存在时间常数 $t_1 > 0$ 从而使得 $\varsigma(t_1) = 0$ ，则由函数连续性性质可知存在一个小邻域 $[t_1, t_1 + \Delta t_1)$ 使得 $t \in [t_1, t_1 + \Delta t_1)$ ($\Delta t_1 > 0$) 时有 $\vartheta(t) \geq 0$ ；如果存在某个时间常数 $t_2 > 0$ 使得 $\varsigma(t_2) > 0$ 以及 $\vartheta(t_2) > (\frac{q\varsigma(t_2)}{k_\vartheta})^{\frac{1}{h}} > 0$ ，则由函数连续性性质可知存在一个小邻域 $[t_2, t_2 + \Delta t_2)$ ，从而当 $t \in [t_2, t_2 + \Delta t_2)$ ($\Delta t_2 > 0$) 时 $\vartheta(t) > 0$ ；如果存在某个时间常数 $t_3 > 0$ 使得 $\varsigma(t_3) > 0$ 以及 $\vartheta(t_3) = (\frac{q\varsigma(t_3)}{k_\vartheta})^{\frac{1}{h}} > 0$ ，则由式(4.100)得 $\dot{\vartheta}(t_3) = -k_\vartheta[(\frac{q\varsigma(t_3)}{k_\vartheta})^{\frac{1}{h}}]^h + q\varsigma(t_3) = 0$ ，并且由函数连续性性质可知存在一个小邻域 $[t_3, t_3 + \Delta t_3)$ ，从而 $t \in [t_3, t_3 + \Delta t_3)$ ($\Delta t_3 > 0$) 时 $\vartheta(t) = (\frac{q\varsigma(t_3)}{k_\vartheta})^{\frac{1}{h}} > 0$ ；如果存在某个常数 $t_4 > 0$ 使得 $\varsigma(t_4) > 0$ 以及 $0 < \vartheta(t_4) < (\frac{q\varsigma(t_4)}{k_\vartheta})^{\frac{1}{h}}$ ，则由式(4.100)得 $\dot{\vartheta}(t_4) > -k_\vartheta[(\frac{q\varsigma(t_4)}{k_\vartheta})^{\frac{1}{h}}]^h + q\varsigma(t_4) = 0$ ，故由函数连续性性质可知，存在一个小邻域 $[t_4, t_4 + \Delta t_4)$ ($\Delta t_4 > 0$)，使得当 $t \in [t_4, t_4 + \Delta t_4)$ 时，有 $\vartheta(t) > \vartheta(t_4) > 0$ 。最后由函数 $\vartheta(t)$ 的整体连续性性质可得，对于 $\forall t \geq 0$ 和任意有界的初始条件 $\vartheta(0) \geq 0$ ，都成立 $\vartheta(t) \geq 0$ 。

证明完毕。

性质 4.4 令 $\tilde{\zeta} = \zeta - \hat{\zeta}$ 。则如下关系式成立：

$$\tilde{\zeta} \hat{\zeta}^{\frac{3s-1}{1+s}} \leq \frac{1+s}{4s} \left[\left(2^{\frac{8s(s-1)}{(1+s)^2}} - 2^{\frac{2(s-1)}{1+s}} \right) \tilde{\zeta}^{\frac{4s}{1+s}} + \left(1 - 2^{\frac{2s-2}{1+s}} + \frac{3s-1}{4s} + \frac{(1+s)2^{\frac{-16s(s-1)^2}{(1+s)^3}}}{4s} \right) \zeta^{\frac{4s}{1+s}} \right] \quad (4.103)$$

其中 $s = (4ln - 1) / (4ln + 1)$ ， $l \in \mathbb{Z}_+$ 。

证明：根据上一章引理 4.1 中的式(4.5)以及引理 3.2 可得：

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(\zeta - \tilde{\zeta})^{\frac{3s-1}{1+s}} &\leq \frac{1+s}{4s} \left[\zeta^{\frac{4s}{1+s}} - (\zeta - \tilde{\zeta})^{\frac{4s}{1+s}} \right] \\ &= \frac{1+s}{4s} \left[\zeta^{\frac{4s}{1+s}} - |\zeta - \tilde{\zeta}| \zeta - \tilde{\zeta} \left| \zeta - \tilde{\zeta} \right|^{\frac{3s-1}{1+s}} \right] \\ &\leq \frac{1+s}{4s} \left[\zeta^{\frac{4s}{1+s}} - 2^{\frac{2s-2}{1+s}} |\zeta - \tilde{\zeta}| \zeta^{\frac{3s-1}{1+s}} - \tilde{\zeta}^{\frac{3s-1}{1+s}} \right] \end{aligned} \quad (4.104)$$

注意到 $s = \frac{4ln-1}{4ln+1}$ ，则通过直接推导即得到 $\frac{3s-1}{1+s} = \frac{2ln-1}{2ln}$ ，因此

$|\zeta - \tilde{\zeta}| \zeta^{\frac{3s-1}{1+s}} - \tilde{\zeta}^{\frac{3s-1}{1+s}} = (\zeta - \tilde{\zeta})(\zeta^{\frac{3s-1}{1+s}} - \tilde{\zeta}^{\frac{3s-1}{1+s}})$ 。通过应用引理 3.3，则得：

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\zeta}(\zeta - \tilde{\zeta})^{\frac{3s-1}{1+s}} \\
 & \leq \frac{1+s}{4s} [\zeta^{\frac{4s}{1+s}} - 2^{\frac{2s-2}{1+s}} \zeta^{\frac{4s}{1+s}} + 2^{\frac{2s-2}{1+s}} \tilde{\zeta} \zeta^{\frac{3s-1}{1+s}} + 2^{\frac{2s-2}{1+s}} \zeta \tilde{\zeta}^{\frac{3s-1}{1+s}} - 2^{\frac{2s-2}{1+s}} \tilde{\zeta}^{\frac{4s}{1+s}}] \\
 & \leq \frac{1+s}{4s} [\zeta^{\frac{4s}{1+s}} - 2^{\frac{2s-2}{1+s}} \zeta^{\frac{4s}{1+s}} + \frac{(1+s)(2^{\frac{2s-2}{1+s}} \tilde{\zeta}^{\frac{4s}{1+s}})}{4s} + \frac{(3s-1)\zeta^{\frac{4s}{1+s}}}{4s} \\
 & \quad + \frac{(1+s)(2^{-4(\frac{s-1}{1+s})^2} \zeta^{\frac{4s}{1+s}})}{4s} + \frac{(3s-1)(2^{\frac{2s-2}{1+s}} \tilde{\zeta}^{\frac{4s}{1+s}})}{4s} - 2^{\frac{2s-2}{1+s}} \tilde{\zeta}^{\frac{4s}{1+s}}] \\
 & \leq \frac{1+s}{4s} [(2^{\frac{8s(s-1)}{(1+s)^2}} - 2^{\frac{2(s-1)}{1+s}}) \tilde{\zeta}^{\frac{4s}{1+s}} + (1 - 2^{\frac{2s-2}{1+s}} + \frac{3s-1}{4s} + \frac{(1+s)2^{\frac{-16s(s-1)^2}{(1+s)^3}}}{4s}) \zeta^{\frac{4s}{1+s}}]
 \end{aligned} \tag{4.105}$$

证明完毕。

下面将利用反衍法以及数学归纳法针对高阶非仿射多智能体系统(4.91)进行控制器设计。整个控制器设计过程分为 n 步。在前 $n-1$ 步的每个第 m ($m=1,2,\dots,n-1$) 步中, 都将设计一个虚拟控制 $x_{i,m+1}^*$, 并且在第 n 步中将设计控制率 u_i 。整个下文中 x_k ($k=1,\dots,n$) 代表 $x_k = [x_{1,k}, \dots, x_{N,k}]^T$ 。

第一步: 构造第一部分 Lyapunov 函数:

$$V_1(x_1) = \frac{1}{(1+s)k_s} (E^{\frac{1+s}{2}})^T P E^{\frac{1+s}{2}} \tag{4.106}$$

其中 s 和 k_s 都如性质 4.1 中所定义。通过简单地计算, 可得 $V_1(x_1)$ 的导数为:

$$\dot{V}_1(x_1) = \frac{1}{k_s} (E^s)^T P \dot{E} = \frac{1}{k_s} (E^s)^T P \mathcal{L} x_2 = \frac{1}{k_s} (E^s)^T P \mathcal{L} x_2^* + \frac{1}{k_s} (E^s)^T P \mathcal{L} (x_2 - x_2^*) \tag{4.107}$$

其中 $x_2 = [x_{1,2}, \dots, x_{N,2}]^T$ 。将虚拟控制 $x_2^* = -\beta_1 E^s$ ($\beta_1 > 0$ 为设计常数) 代入到式(4.107)中得:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(x_1) &= -\frac{\beta_1}{k_s} (E^s)^T P \mathcal{L} E^s + \frac{1}{k_s} (E^s)^T P \mathcal{L} (x_2 - x_2^*) \\
 &= -\frac{\beta_1}{k_s} (E^s)^T \Xi E^s + \frac{1}{k_s} \sum_{i=1}^N (x_{i,2} - x_{i,2}^*) \sum_{j=1}^N \ell_{ji} (e_{j,1})^s
 \end{aligned} \tag{4.108}$$

其中 ℓ_{ji} 是 $P\mathcal{L}$ 矩阵第 j 行第 i 列的元素。令 $\ell_{\max} = \max_{j,i \in \{1,\dots,N\}} |\ell_{ji}|$, 则由引理 3.2 和引理 3.3 可得:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{k_s} \sum_{i=1}^N (x_{i,2} - x_{i,2}^*) \sum_{j=1}^N \ell_{ji} (e_{j,1})^s \leq \frac{1}{k_s} \sum_{i=1}^N 2^{1-s} |e_{i,2}|^s \sum_{j=1}^N |\ell_{ji}| |e_{j,1}|^s \\
 & \leq 2^{1-s} \ell_{\max} \frac{1}{k_s} \sum_{i=1}^N |e_{i,2}|^s \sum_{j=1}^N |e_{j,1}|^s \leq \frac{1}{2N} (\sum_{i=1}^N |e_{i,1}|^s)^2 + \tilde{C}_2 (\sum_{i=1}^N |e_{i,2}|^s)^2 \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_{i,1})^{2s} + C_2 \sum_{i=1}^N (e_{i,2})^{2s}
 \end{aligned} \tag{4.109}$$

其中 $C_2 = N\tilde{C}_2$ 为一个固定常数。在上式最后一个不等式中应用了关系式

$$(\sum_{i=1}^N x_i)^2 \leq N \sum_{i=1}^N x_i^2.$$

将式(4.109)代入到式(4.108)中, 并同时应用性质 4.1 得到:

$$\dot{V}_1(x_1) \leq -\beta_1 \sum_{i=1}^N (e_{i,1})^{2s} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (e_{i,1})^{2s} + C_2 \sum_{i=1}^N (e_{i,2})^{2s} \quad (4.110)$$

第二步: 考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V_2(x_1, x_2) = V_1(x_1) + W_2(x_1, x_2) \quad (4.111)$$

其中

$$W_2(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i,2}^*}^{x_{i,2}} (\tau^{\frac{1}{q_2}} - x_{i,2}^{*\frac{1}{q_2}})^{1+s-q_2} d\tau \quad (4.112)$$

容易看出 $W_2(\cdot)$ 是 C^1 的, 故 $V_2(\cdot)$ 也是 C^1 的, 并且 $V_2(\cdot)$ 正定且满足

$$V_2(\cdot) \leq \bar{k}_b \sum_{i=1}^N (e_{i,1}^{1+s} + e_{i,2}^{1+s}), \text{ 其中 } \bar{k}_b = \max\left\{\frac{1}{(1+s)k_s}, 2\right\}. \text{ 注意到:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_2}{\partial x_{i,2}} &= e_{i,2}^{1+s-q_2} = e_{i,2}, \\ \frac{\partial W_2}{\partial x_{j,1}} &= -(1+s-q_2) \frac{\partial x_{i,2}^{\frac{1}{q_2}}}{\partial x_{j,1}} \int_{x_{i,2}^*}^{x_{i,2}} (\tau^{\frac{1}{q_2}} - x_{i,2}^{*\frac{1}{q_2}})^{s-q_2} d\tau \\ &= -\frac{\partial x_{i,2}^{\frac{1}{q_2}}}{\partial x_{j,1}} (x_{i,2} - x_{i,2}^*), \quad j \in \bar{\mathcal{N}}_i = \mathcal{N}_i \cup i. \end{aligned} \quad (4.113)$$

故对 $W_2(\cdot)$ 求导得到:

$$\begin{aligned} \dot{W}_2(\cdot) &= \sum_{i=1}^N [e_{i,2} \dot{x}_{i,2} - (x_{i,2} - x_{i,2}^*) \sum_{j \in \bar{\mathcal{N}}_i} \frac{\partial x_{i,2}^{\frac{1}{q_2}}}{\partial x_{j,1}} \dot{x}_{j,1}] \\ &\leq \sum_{i=1}^N [e_{i,2} (x_{i,3} - x_{i,3}^*) + e_{i,2} x_{i,3}^* + 2^{1-q_2} \beta_1^{1/q_2} |e_{i,2}|^{q_2} |\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_{i,2} - x_{j,2})|] \end{aligned} \quad (4.114)$$

下面对上式(4.114)右边的第三项进行估计。首先根据引理 3.1 得如下不等式:

$$|x_{i,2}| \leq |e_{i,2} + x_{i,2}^{*1/q_2}|^{q_2} \leq |e_{i,2}|^{q_2} + \beta_1 |e_{i,1}|^{q_2} \quad (4.115)$$

而由上式进一步可得:

$$\begin{aligned} 2^{1-q_2} \beta_1^{1/q_2} \sum_{i=1}^N |e_{i,2}|^{q_2} |\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_{i,2} - x_{j,2})| &\leq 2^{1-q_2} \beta_1^{1/q_2} \sum_{i=1}^N |e_{i,2}|^{q_2} (r_1 |x_{i,2}| + r_2 |\sum_{j \in \mathcal{N}_i} |x_{j,2}|) \\ &\leq 2^{1-q_2} \beta_1^{1/q_2} \sum_{i=1}^N [r_1 |e_{i,2}|^{2q_2} + r_1 \beta_1 |e_{i,2}|^{q_2} |e_{i,1}|^{q_2} + r_2 |e_{i,2}|^{q_2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (|e_{j,2}|^{q_2} + \beta_1 |e_{j,1}|^{q_2})] \end{aligned} \quad (4.116)$$

其中 $r_1 = \max_{\forall i \in J} \{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}\}$, $r_2 = \max_{\forall i, j \in J} \{a_{ij}\}$ 。对不等式(4.116)右边后面三项分别应

用 Young's 不等式, 得如下三个关系式:

$$2^{1-q_2} \beta_1^{1+1/q_2} r_1 |e_{i,2}|^{q_2} |e_{i,1}|^{q_2} \leq 2^{2(1-q_2)} \beta_1^{2(1+1/q_2)} r_1^2 |e_{i,2}|^{2q_2} + \frac{1}{4} |e_{i,1}|^{2q_2} \quad (4.117)$$

$$2^{1-q_2} \beta_1^{1/q_2} r_2 |e_{i,2}|^{q_2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |e_{j,2}|^{q_2} \leq 2^{-q_2} \beta_1^{1/q_2} r_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (|e_{i,2}|^{2q_2} + |e_{j,2}|^{2q_2}) \quad (4.118)$$

$$2^{1-q_2} \beta_1^{1+1/q_2} r_2 |e_{i,2}|^{q_2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} |e_{j,1}|^{q_2} \leq \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (2^{2(1-q_2)} \beta_1^{2(1+1/q_2)} r_2^2 c_{\mathcal{N}} |e_{i,2}|^{2q_2} + \frac{1}{4c_{\mathcal{N}}} |e_{j,1}|^{2q_2}) \quad (4.119)$$

其中 $c_{\mathcal{N}} = \max_{i \in J} \{\dim\{\mathcal{N}_i\}\}$, $\dim\{\mathcal{N}_i\}$ 代表第 i 个智能体邻居集合 \mathcal{N}_i 中的元素个数。

进而将式(4.117)-(4.119)代入到式(4.116)中即可得到如下关系式:

$$2^{1-q_2} \beta_1^{1/q_2} \sum_{i=1}^N |e_{i,2}|^{q_2} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_{i,2} - x_{j,2}) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_{i,1}^{2q_2} + \bar{C}_2 \sum_{i=1}^N e_{i,2}^{2q_2} \quad (4.120)$$

其中 $\bar{C}_2 = 2^{1-q_2} \beta_1^{1/q_2} r_1 + 2^{2(1-q_2)} \beta_1^{2(1+1/q_2)} r_1^2 + 2^{1-q_2} \beta_1^{1/q_2} r_2 c_{\mathcal{N}} + 2^{2(1-q_2)} \beta_1^{2(1+1/q_2)} r_2^2 c_{\mathcal{N}}^2$ 。

下面将式(4.120)代入到式(4.114)中, 并结合式(4.110)得:

$$\dot{V}_2 \leq -(\beta_1 - 1) \sum_{i=1}^N (e_{i,1})^{2s} + (C_2 + \bar{C}_2) \sum_{i=1}^N (e_{i,2})^{2s} + \sum_{i=1}^N [e_{i,2} (x_{i,3} - x_{i,3}^*) + e_{i,2} x_{i,3}^*] \quad (4.121)$$

注意到 $q_3 = q_2 - 2/(4ln+1)$, 由此可得 $1+q_3 = 2q_2 = 2s$ 。故选择 $\beta_1 > n-1+k_c$, 其中 $k_c > 0$ 为一个设计参数, 并选择虚拟控制 $x_{i,3}^* = -\beta_{i,2} e_{i,2}^{q_3}$, 其中 $\beta_{i,2} \geq n-2+k_c+C_2+\bar{C}_2$, 并将 β_1 和 $x_{i,3}^*$ 代入式(4.121)中, 即可得下式成立:

$$\dot{V}_2 \leq -(n-2+k_c) \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^2 (e_{i,m})^{2s} + \sum_{i=1}^N e_{i,2} (x_{i,3} - x_{i,3}^*) \quad (4.122)$$

第 k ($3 \leq k \leq n-1$) 步: 从此步开始主要运用归纳法进行推导与分析。假设在第 $k-1$ 步, 存在一个 C^1 Lyapunov 函数 $V_{k-1}(x_1, \dots, x_{k-1})$, 该函数不仅正定并且满足:

$$V_{k-1}(\cdot) \leq \bar{k}_b \sum_{i=1}^N (e_{i,1}^{1+s} + \dots + e_{i,k-1}^{1+s}) \quad (4.123)$$

从而使得 $V_{k-1}(\cdot)$ 的导数具有如下形式:

$$\dot{V}_{k-1}(\cdot) \leq -(n-k+1+k_c) \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{k-1} e_{i,m}^{2s} + \sum_{i=1}^N e_{i,k-1}^{1+s-q_{k-1}} (x_{i,k} - x_{i,k}^*) \quad (4.124)$$

下面开始证明式(4.123)和式(4.124)在第 k 步成立。首先考虑如下 Lyapunov 函数:

$$V_k(x_1, \dots, x_k) = V_{k-1}(\cdot) + W_k(x_1, \dots, x_k) \quad (4.125)$$

其中

$$W_k(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i,k}^*}^{x_{i,k}} (\tau^{q_k} - x_{i,k}^{*q_k})^{1+s-q_k} d\tau \quad (4.126)$$

不难看出 $W_k(\cdot)$ 是 C^1 的, 并且

$$\frac{\partial W_k}{\partial x_{i,m}} = -(1+s-q_k) \frac{\partial x_{i,k}^{q_k}}{\partial x_{i,m}} \int_{x_{i,k}^*}^{x_{i,k}} (\tau^{q_k} - x_{i,k}^{*q_k})^{s-q_k} d\tau, \quad m=1, \dots, k-1 \quad (4.127)$$

$$\frac{\partial W_k}{\partial x_{i,k}} = e_{i,k}^{1+s-q_k} \quad (4.128)$$

由此得到 $V_k(\cdot)$ 是 C^1 的, 正定的, 并且满足 $V_k(\cdot) \leq \bar{k}_b \sum_{i=1}^N (e_{i,1}^{1+s} + \cdots + e_{i,k}^{1+s})$ 。

由式(4.127)和式(4.128)对 $W_k(\cdot)$ 求导, 并合并式(4.124)中 $\dot{V}_{k-1}(\cdot)$ 的表达式, 可得到 $V_k(\cdot)$ 的导数满足如下不等式关系:

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(\cdot) \leq & -(n-k+1+k_c) \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{k-1} e_{i,m}^{2s} + \sum_{i=1}^N e_{i,k-1}^{1+s-q_{k-1}} (x_{i,k} - x_{i,k}^*) \\ & + \sum_{i=1}^N e_{i,k}^{1+s-q_k} x_{i,k+1} + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial W_k}{\partial x_{i,m}} \dot{x}_{i,m} + \sum_{j \in \bar{N}_i} \frac{\partial W_k}{\partial x_{j,1}} \dot{x}_{j,1} \right) \end{aligned} \quad (4.129)$$

下面检查式(4.129)不等号右边的第二项和第四项。首先, 对于第二项, 根据引理 3.2 可得下式成立:

$$|e_{i,k-1}^{1+s-q_{k-1}} (x_{i,k} - x_{i,k}^*)| \leq 2^{1-q_k} |e_{i,k-1}|^{1+s-q_{k-1}} |e_{i,k}|^{q_k} \leq \frac{e_{i,k-1}^{2s}}{2} + C_{i,k} e_{i,k}^{2s} \quad (4.130)$$

其中 $C_{i,k}$ 为一个常数。对于第四项, 首先可得下式成立:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^N \left(\sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial W_k}{\partial x_{i,m}} \dot{x}_{i,m} + \sum_{j \in \bar{N}_i} \frac{\partial W_k}{\partial x_{j,1}} \dot{x}_{j,1} \right) \right| \\ & \leq \sum_{i=1}^N (1+s-q_k) 2^{1-q_k} |e_{i,k}|^s \left| \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial x_{i,k}^{q_k}}{\partial x_{i,m}} \dot{x}_{i,m} + \sum_{j \in \bar{N}_i} \frac{\partial x_{i,k}^{q_k}}{\partial x_{j,1}} \dot{x}_{j,1} \right| \end{aligned} \quad (4.131)$$

下面利用归纳法证明存在某个常数 $\varrho_{ki,m} \geq 0$ 使得如下不等式成立:

$$\sum_{i=1}^N \left| \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial x_{i,k}^{q_k}}{\partial x_{i,m}} \dot{x}_{i,m} + \sum_{j \in \bar{N}_i} \frac{\partial x_{i,k}^{q_k}}{\partial x_{j,1}} \dot{x}_{j,1} \right| \leq \sum_{i=1}^N \left(\sum_{m=1}^k \varrho_{ki,m} |e_{i,m}|^s \right) \quad (4.132)$$

首先由(4.113)-(4.115)得:

$$\left| \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \bar{N}_i} \frac{\partial x_{i,2}^{q_2}}{\partial x_{j,1}} \dot{x}_{j,1} \right| \leq \sum_{i=1}^N \beta_1^{1/q_2} \left| \sum_{j \in \bar{N}_i} a_{ij} (x_{i,2} - x_{j,2}) \right| \leq \sum_{i=1}^N \left(\sum_{m=1}^2 \varrho_{2i,m} |e_{i,m}|^s \right) \quad (4.133)$$

其中 $\varrho_{2i,m} \geq 0$ 是一个常数。假设对于 $k-1$, 成立:

$$\sum_{i=1}^N \left| \left(\sum_{m=2}^{k-2} \frac{\partial x_{i,k-1}^{q_{k-1}}}{\partial x_{i,m}} \dot{x}_{i,m} + \sum_{j \in \bar{N}_i} \frac{\partial x_{i,k-1}^{q_{k-1}}}{\partial x_{j,1}} \dot{x}_{j,1} \right) \right| \leq \sum_{i=1}^N \left(\sum_{m=1}^{k-1} \varrho_{(k-1)i,m} |e_{i,m}|^s \right) \quad (4.134)$$

其中 $\varrho_{(k-1)i,m} \geq 0$ ($m=1, \dots, k-1$) 为常数。注意到 $e_{i,m} = x_{i,m}^{1/q_m} - x_{i,m}^{*1/q_m}$ 和 $x_{i,m}^* = -\beta_{i,m-1} e_{i,m-1}^{q_m}$, 因此 $x_{i,m}^{*1/q_m} = -\beta_{i,m-1}^{1/q_m} e_{i,m-1}$, 并且

$$|x_{i,m}| \leq |e_{i,m} + x_{i,m}^{*1/q_m}|^{q_m} \leq |e_{i,m}|^{q_m} + \beta_{i,m-1} |e_{i,m-1}|^{q_m} \quad (4.135)$$

上式连同式(4.134)将使得:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \left| \sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial x_{i,k}^{q_k}}{\partial x_{i,m}} \dot{x}_{i,m} + \sum_{j \in \bar{N}_i} \frac{\partial x_{i,k}^{q_k}}{\partial x_{j,1}} \dot{x}_{j,1} \right| \\
 &= \sum_{i=1}^N \left| -\beta_{i,k-1}^{1/q_k} \left(\sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial e_{i,k-1}}{\partial x_{i,m}} \dot{x}_{i,m} + \sum_{j \in \bar{N}_i} \frac{\partial e_{i,k-1}}{\partial x_{j,1}} \dot{x}_{j,1} \right) \right| \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \beta_{i,k-1}^{1/q_k} \left| \frac{x_{i,k-1}^{q_{k-1}}}{q_{k-1}} \dot{x}_{i,k-1} - \sum_{m=2}^{k-2} \frac{\partial x_{i,k-1}^{q_{k-1}}}{\partial x_{i,m}} \dot{x}_{i,m} - \sum_{j \in \bar{N}_i} \frac{\partial x_{i,k-1}^{q_{k-1}}}{\partial x_{j,1}} \dot{x}_{j,1} \right| \quad (4.136) \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \beta_{i,k-1}^{1/q_k} \left[\frac{1}{q_{k-1}} \cdot (e_{i,k-1}^{1-q_{k-1}} + \beta_{i,k-2}^{1/q_{k-1}} e_{i,k-2}^{1-q_{k-1}}) \right. \\
 &\quad \cdot (|e_{i,k}|^{q_k} + |e_{i,k-1}|^{q_k} \beta_{i,k-1}) + \sum_{m=1}^{k-1} \varrho_{(k-1)i,m} |e_{i,m}|^s \left. \right] \\
 &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^k \varrho_{ki,m} |e_{i,m}|^s
 \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^N \left(\sum_{m=2}^{k-1} \frac{\partial W_k}{\partial x_{i,m}} \dot{x}_{i,m} + \sum_{j \in \bar{N}_i} \frac{\partial W_k}{\partial x_{j,1}} \dot{x}_{j,1} \right) \right| \leq \sum_{i=1}^N (1+s-q_k) 2^{1-q_k} |e_{i,k}|^s \left(\sum_{m=1}^k \varrho_{ki,m} |e_{i,m}|^s \right) \quad (4.137) \\
 & \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{k-1} e_{i,m}^{2s} + \sum_{i=1}^N \bar{C}_{i,k} e_{i,k}^{2s}
 \end{aligned}$$

其中 $\bar{C}_{i,k} > 0$ 为一个常数。

下面将式(4.130)和式(4.137)代入式(4.129)中即可得到如下关系式:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_k(\cdot) &\leq -(n-k+k_c) \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{k-1} e_{i,m}^{2s} + \sum_{i=1}^N (C_{i,k} + \bar{C}_{i,k}) e_{i,k}^{2s} \quad (4.138) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^N e_{i,k}^{1+s-q_k} (x_{i,k+1} - x_{i,k+1}^*) + \sum_{i=1}^N e_{i,k}^{1+s-q_k} x_{i,k+1}^*
 \end{aligned}$$

通过将虚拟控制 $x_{i,k+1}^* = -\beta_{i,k} e_{i,k}^{q_{k+1}}$, 其中 $\beta_{i,k} \geq n-k+k_c + C_{i,k} + \bar{C}_{i,k} > 0$, 代入上式, 则得到:

$$\dot{V}_k(\cdot) \leq -(n-k+k_c) \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^k e_{i,m}^{2s} + \sum_{i=1}^N e_{i,k}^{1+s-q_k} (x_{i,k+1} - x_{i,k+1}^*) \quad (4.139)$$

第 n 步: 考虑如下Lyapunov函数:

$$V_n(x_1, \dots, x_n) = V_{n-1}(\cdot) + W_n(x_1, \dots, x_n) \quad (4.140)$$

其中

$$W_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i,n}^*}^{x_{i,n}} (\tau^{q_n} - x_{i,n}^{q_n})^{1+s-q_n} d\tau \quad (4.141)$$

很明显, 如此定义的 $V_n(\cdot)$ 是 C^1 的, 正定的, 并且满足 $V_n(\cdot) \leq \bar{k}_b \sum_{i=1}^N (e_{i,1}^{1+s} + \dots + e_{i,n}^{1+s})$ 。

由以上的归纳总结分析, 可以得到如下结论:

$$\dot{V}_n(\cdot) \leq -k_c \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} e_{i,m}^{2s} + \sum_{i=1}^N e_{i,n}^{1+s-q_n} \dot{x}_{i,n} + \sum_{i=1}^N (C_{i,n} + \bar{C}_{i,n}) e_{i,n}^{2s} \quad (4.142)$$

其中 $C_{i,n} > 0$ 和 $\bar{C}_{i,n} > 0$ 为常数。

设计实际的控制输入 u_i 为:

$$u_i = -\beta_{i,n} e_{i,n}^{q_{n+1}} - \frac{\hat{\zeta}_i}{\eta_i^2} \psi_i^2 e_{i,n}^{1+s-q_n} \quad (4.143)$$

以及自适应律为:

$$\dot{\hat{\zeta}}_i = -\sigma_i \gamma_i \hat{\zeta}_i^{\frac{3s-1}{1+s}} + \frac{\sigma_i}{\eta_i^2} \psi_i^2 e_{i,n}^{2(1+s-q_n)} \quad (4.144)$$

其中 $\hat{\zeta}_i$ 是虚拟参数 ζ_i (ζ_i 在后面给出定义) 的估计值, $\psi_i(\cdot)$ 为可计算的数量函数, $\beta_{i,n}$, σ_i , γ_i 和 η_i 是由设计者选择的正设计参数。

下面给出本节的主要结果。

定理 4.4 考虑假设 4.5-4.7 成立条件下的高阶非仿射多智能体系统(4.91)。若对该系统应用所设计的控制算法 (4.143)-(4.144) 以及设计的各阶虚拟控制 $x_{i,m}^*$ ($m=1, \dots, n$), 则对于任意满足 $\hat{\zeta}_i(0) \geq 0$ 以及 $V(0) \leq \mu$ ($\mu > 0$ 为一个有界常数)

的初始状态, 系统(4.91)在有限时间 T^* 达到一致, 其中

1) 邻居位移误差 E 收敛到一个足够小的小区域 Θ_0 内, 其中 Θ_0 的定义如下:

$$\Theta_0 = \left\{ \|E\| \leq \left(\frac{[(1+s)k_s k_b]^{1+s} \varsigma}{\mu_1 \mu_2 k_a} \right)^{\frac{1}{2s}} \right\} \quad (4.145)$$

以及参数估计误差 $\tilde{\zeta}$ 收敛到小区域 Θ_1 之内, 其中 Θ_1 由下式给出:

$$\Theta_1 = \left\{ \|\tilde{\zeta}\| \leq \left[\left(\frac{2\sigma_{\max} k_b}{\underline{g}} \right)^{\frac{2s}{1+s}} \frac{\varsigma}{\mu_1 \mu_2 k_a} \right]^{\frac{1+s}{4s}} \right\} \quad (4.146)$$

其中有限收敛时间 T^* 满足:

$$T^* \leq \frac{V(0)^{\frac{1-2s}{1+s}}}{(1-\mu_1)\tilde{c}(1-\frac{2s}{1+s})} \quad (4.147)$$

其中 $0 < \mu_1 < 1$, $0 < \mu_2 \leq 1$, $\tilde{\zeta} = [\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_N]^T$, $\sigma_{\max} = \max\{\sigma_i\}$,

$k_a = \min\{k_c, \frac{1+s}{4s} \underline{g} \gamma_i (2^{\frac{2(s-1)}{1+s}} - 2^{\frac{8s(s-1)}{(1+s)^2}})\}$, $k_b = \max\{\bar{k}_b, \frac{\underline{g}}{2\sigma_i}\}$,

$\varsigma = \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i^2}{4} + \sum_{i=1}^N \frac{1+s}{4s} \underline{g} \gamma_i (1 - 2^{\frac{2s-2}{1+s}} + \frac{3s-1}{4s} + \frac{(1+s)2^{\frac{-16s(s-1)^2}{(1+s)^3}}}{4s}) \zeta_i^{\frac{4s}{1+s}}$ 。

2) 闭环系统中所有信号都一致最终有界。

证明: 选择如下 Lyapunov 函数:

$$V = V_n + \sum_{i=1}^N \frac{\underline{g}}{2\sigma_i} \tilde{\zeta}_i^2 \quad (4.148)$$

对 V 求导, 并利用式(4.93)中所表示的系统动态方程, 得 \dot{V} 如下:

$$\dot{V}(\cdot) \leq -k_c \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} e_{i,m}^{2s} + \sum_{i=1}^N e_{i,n}^{1+s-q_n} (g_i u_i + L_{fi}) + \sum_{i=1}^N (C_{i,n} + \bar{C}_{i,n}) e_{i,n}^{2s} + \sum_{i=1}^N \tilde{\zeta}_i \left(-\frac{\underline{g}}{\sigma_i} \dot{\zeta}_i \right) \quad (4.149)$$

通过应用 Young's 不等式以及假设 4.7 的条件, 对于任意的 $\eta_i > 0$, 可以得到:

$$e_{i,n}^{1+s-q_n} L_{fi} \leq \alpha_i \psi_i |e_{i,n}|^{1+s-q_n} \leq \frac{\alpha_i^2}{\eta_i^2} \psi_i^2 e_{i,n}^{2(1+s-q_n)} + \frac{\eta_i^2}{4} \quad (4.150)$$

令 $\zeta_i = \underline{g}^{-1} \alpha_i^2$ 。通过应用式(4.143)给出的控制输入 u_i 以及式(4.150)得不等关系式, 则从式(4.149)中得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\cdot) \leq & -k_c \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} e_{i,m}^{2s} - \sum_{i=1}^N (g_i \beta_{i,n} - C_{i,n} - \bar{C}_{i,n}) e_{i,n}^{2s} \\ & + \sum_{i=1}^N \left(-\frac{g_i \hat{\zeta}_i}{\eta_i^2} \psi_i^2 e_{i,n}^{2(1+s-q_n)} + \frac{g_i \zeta_i}{\eta_i^2} \psi_i^2 e_{i,n}^{2(1+s-q_n)} \right) + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i^2}{4} + \sum_{i=1}^N \tilde{\zeta}_i \left(-\frac{\underline{g}}{\sigma_i} \dot{\zeta}_i \right) \end{aligned} \quad (4.151)$$

由式(4.144)中给出的 $\hat{\zeta}_i$ 的表达式, 可根据性质 4.3 得对任给的初始估计值 $\hat{\zeta}_i(0) \geq 0$ 都有 $\hat{\zeta}_i(t) \geq 0$ 成立。若我们选择 $\beta_{i,n}$ 以使得 $\beta_{i,n} \underline{g} - C_{i,n} - \bar{C}_{i,n} > k_c$ 成立, 并将其代入式(4.151)中则得:

$$\dot{V}(\cdot) \leq -k_c \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n e_{i,m}^{2s} + \sum_{i=1}^N \frac{\underline{g}}{\eta_i^2} \psi_i^2 e_{i,n}^{2(1+s-q_n)} (\zeta_i - \hat{\zeta}_i) + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i^2}{4} + \sum_{i=1}^N \tilde{\zeta}_i \left(-\frac{\underline{g}}{\sigma_i} \dot{\zeta}_i \right) \quad (4.152)$$

进一步应用式(4.144)给出的估计参数 $\hat{\zeta}_i$ 的自适应律, 则式(4.152)成为:

$$\dot{V}(\cdot) \leq -k_c \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n e_{i,m}^{2s} + \sum_{i=1}^N \underline{g} \gamma_i \tilde{\zeta}_i \hat{\zeta}_i^{\frac{3s-1}{1+s}} + \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i^2}{4} \quad (4.153)$$

注意到, 由性质 4.4 可以推出如下关系式:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_i \hat{\zeta}_i^{\frac{3s-1}{1+s}} \leq & -\frac{1+s}{4s} \left(2^{\frac{2(s-1)}{1+s}} - 2^{\frac{8s(s-1)}{(1+s)^2}} \right) \tilde{\zeta}_i^{\frac{4s}{1+s}} \\ & + \frac{1+s}{4s} \left(1 - 2^{\frac{2s-2}{1+s}} + \frac{3s-1}{4s} + \frac{(1+s)2^{\frac{-16s(s-1)^2}{(1+s)^3}}}{4s} \right) \tilde{\zeta}_i^{\frac{4s}{1+s}} \end{aligned} \quad (4.154)$$

其中 $2^{\frac{2(s-1)}{1+s}} - 2^{\frac{8s(s-1)}{(1+s)^2}} > 0$, 将其代入式(4.153)中则得出:

$$\dot{V}(\cdot) \leq -k_c \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n e_{i,m}^{2s} - \sum_{i=1}^N \frac{1+s}{4s} \underline{g} \gamma_i \left(2^{\frac{2(s-1)}{1+s}} - 2^{\frac{8s(s-1)}{(1+s)^2}} \right) \tilde{\zeta}_i^{\frac{4s}{1+s}} + \varsigma \quad (4.155)$$

其中

$$\varsigma = \sum_{i=1}^N \frac{\eta_i^2}{4} + \sum_{i=1}^N \frac{1+s}{4s} \underline{g} \gamma_i \left(1 - 2^{\frac{2s-2}{1+s}} + \frac{3s-1}{4s} + \frac{(1+s)2^{\frac{-16s(s-1)^2}{(1+s)^3}}}{4s} \right) \tilde{\zeta}_i^{\frac{4s}{1+s}} \quad (4.156)$$

令 $k_a = \min \{ k_c, \frac{1+s}{4s} \underline{g} \gamma_i (2^{\frac{2(s-1)}{1+s}} - 2^{\frac{8s(s-1)}{(1+s)^2}}) \}$ 。则由式(4.155)可得:

$$\dot{V}(\cdot) \leq -k_a \left(\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n e_{i,m}^{2s} + \sum_{i=1}^N (\tilde{\zeta}_i^{\frac{2}{1+s}})^{2s} \right) + \varsigma \quad (4.157)$$

下面我们将证明：存在一个有限时间常数 $T^* > 0$ 以及一个有界常数 c_V ，从而当 $t \geq T^*$ 时有 $V(t) \leq c_V$ 成立。

令 $k_b = \max \{ \bar{k}_b, \frac{\underline{g}}{2\sigma_i} \}$ 。故由式(4.148)给出的 $V(t)$ 的表达式以及关系式

$V_n(\cdot) \leq \bar{k}_b \sum_{i=1}^N (e_{i,1}^{1+s} + \dots + e_{i,n}^{1+s})$ 可得：

$$V(\cdot) \leq k_b \left(\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n e_{i,m}^{1+s} + \sum_{i=1}^N (\tilde{\zeta}_i^{\frac{2}{1+s}})^{1+s} \right) \quad (4.158)$$

对上式应用引理 3.1，得到：

$$V^{\frac{2s}{1+s}}(\cdot) \leq k_b^{\frac{2s}{1+s}} \left(\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n e_{i,m}^{2s} + \sum_{i=1}^N \tilde{\zeta}_i^{\frac{4s}{1+s}} \right) \quad (4.159)$$

令 $\tilde{c} = \mu_2 k_a / k_b^{\frac{2s}{1+s}}$ ，其中 $0 < \mu_2 \leq 1$ 。则由如此定义的 \tilde{c} 并通过合并式(4.157)和式(4.159)可得：

$$\dot{V}(\cdot) \leq -\tilde{c} V^{\frac{2s}{1+s}}(\cdot) + \varsigma \quad (4.160)$$

故由性质 4.2 则可得如下结论：存在一个有限时间 T^* ，满足：

$$T^* \leq \frac{V(0)^{1-\frac{2s}{1+s}}}{(1-\mu_1)\tilde{c}(1-\frac{2s}{1+s})} \quad (4.161)$$

使得对 $\forall t \geq T^*$ ，成立：

$$V(\cdot) < \left(\frac{\varsigma}{\mu_1 \tilde{c}} \right)^{\frac{1+s}{2s}} = k_b \left(\frac{\varsigma}{\mu_1 \mu_2 k_a} \right)^{\frac{1+s}{2s}} = c_V \quad (4.162)$$

接下来，我们检测多智能体系统中所有智能体的稳态误差收敛情况。注意到：

$$\|E\| \leq [(1+s)k_s V_1(\cdot)]^{\frac{1}{1+s}} \leq [(1+s)k_s V(\cdot)]^{\frac{1}{1+s}} \leq \left(\frac{[(1+s)k_s k_b]^{\frac{2s}{1+s}} \varsigma}{\mu_1 \mu_2 k_a} \right)^{\frac{1}{2s}} \quad (4.163)$$

令 $\tilde{\zeta} = [\tilde{\zeta}_1, \dots, \tilde{\zeta}_N]^T$ 以及 $\sigma_{\max} = \max \{\sigma_i\}$ ，则由式(4.148)易知：

$$\|\tilde{\zeta}\| \leq \sqrt{\frac{2\sigma_{\max}}{\underline{g}}} V(\cdot) \leq \left[\left(\frac{2\sigma_{\max} k_b}{\underline{g}} \right)^{\frac{2s}{1+s}} \frac{\varsigma}{\mu_1 \mu_2 k_a} \right]^{\frac{1+s}{4s}} \quad (4.164)$$

故由式(4.163)和式(4.164)，我们建立如下结果：在所设计的有限时间控制算法(4.143)-(4.144)以及设计的各阶虚拟控制 $x_{i,m}^*$ ($m=1, \dots, n$) 下，在形如(4.161)的有限时间 T^* 内，邻居位移误差收敛到如下可调小区域 Θ_0 中，其中

$$\Theta_0 = \{ \|E\| \leq \left(\frac{[(1+s)k_s k_b]^{\frac{2s}{1+s}} \varsigma}{\mu_1 \mu_2 k_a} \right)^{\frac{1}{2s}} \} \quad (4.165)$$

并且参数估计误差收敛到一个可调小区域 Θ_1 中, 其中

$$\Theta_1 = \{\|\tilde{\zeta}\| \leq [(\frac{2\sigma_{\max}k_b}{\underline{g}})^{\frac{2s}{1+s}} \frac{\varsigma}{\mu_1\mu_2k_a}]^{\frac{1+s}{4s}}\} \quad (4.166)$$

证明完毕。

4.4.3 与一般线性反馈非有限时间方法的对比分析

注意到如果令分数阶 $s=1$, $q_1=q_2=\dots=q_n=1$, 则上一节中所设计提出的有限时间控制算法相应变为一般非有限时间控制算法并且收敛结果为一般一致最终有界收敛。在这种情况下, 上一节中定义的高阶分数阶局部误差 $e_{i,m}$ ($i=1,\dots,N, m=2,\dots,n$) 相应变为 $e_{i,m}=x_{i,m}-x_{i,m}^*$ 。

下面给出在一般非有限时间控制算法下的控制结果。

定理 4.5 考虑相同非线性多智能体系统(4.91)。若应用如下虚拟控制 $x_{i,m}^*$:

$$x_{i,m}^* = -\beta_{i,m-1}e_{i,m-1}, \quad m=1,\dots,n \quad (4.167)$$

以及实际控制输入 u_i :

$$u_i = -\beta_{i,n}e_{i,n} - \frac{\hat{\zeta}_i}{\eta_i^2} \psi_i^2 e_{i,n} \quad (4.168)$$

其中估计参数 $\hat{\zeta}_i$ 的自适应律相应为:

$$\dot{\hat{\zeta}}_i = -\sigma_i \gamma_i \hat{\zeta}_i + \frac{\sigma_i}{\eta_i^2} \psi_i^2 e_{i,n} \quad (4.169)$$

则对于任意满足 $\hat{\zeta}_i(0) \geq 0$ 以及 $V(0) \leq \mu$ ($\mu > 0$ 为一个有界常数) 的初始状态, 系统(4.91)达到一致最终有界收敛结果。特别地, 局部邻居位移误差 E 收敛到如下小区域:

$$\Theta_2 = \{\|E\| \leq (\frac{2k_b\varsigma}{\mu_1\mu_2k_a})^{\frac{1}{2}}\} \quad (4.170)$$

并且参数估计误差 $\tilde{\zeta}$ 收敛到如下小区域:

$$\Theta_3 = \{\|\tilde{\zeta}\| \leq (\frac{2\sigma_{\max}k_b\varsigma}{\underline{g}\mu_1\mu_2k_a})^{\frac{1}{2}}\} \quad (4.171)$$

其中 \tilde{c} 和 ς 分别对应 $s=1$ 和 $q_1=\dots=q_n=1$ 对应的值。

证明: 令分数阶 $s=1$, $q_1=q_2=\dots=q_n=1$, 由此采用定理 4.4 中的证明方法, 即可类推得到上述结论。

证明完毕。

注 4.8 注意到对于上两节中分别提出的两种控制算法下稳态误差所分别对应的收敛域: Θ_0 , Θ_1 以及 Θ_2 , Θ_3 , 都可以通过选择合适的设计参数使其变得足够小, 即可以通过增大所设计的控制增益使得误差收敛区域缩小。然而, 由于受到控制饱和和限制, 所设定的控制增益不能无限制增大, 因此相应限制了收敛区域可随意调控的范围。而在本章中所提的有限时间控制算法中, 可以通过合理设定分数阶

$s = (4ln - 1) / (4ln + 1)$ 的大小来增强对外界干扰的抗干扰能力以及提高控制收敛精度，而不需要额外增大控制增益。例如：假设不等式 $\frac{[(1+s)k_s k_b]^{1+s} \zeta}{\mu_1 \mu_2 k_a} < 1$ 成立（这是成立的，因为所有影响 k_a 以及 k_b 的参数，即 k_c ， γ_i 和 σ_i 都是自由设计参数）。注意到 $1/s$ 远远大于 1，这使得 $\left(\frac{[(1+s)k_s k_b]^{1+s} \zeta}{\mu_1 \mu_2 k_a}\right)^{\frac{1}{2s}} \ll \left(\frac{2k_b k_s \zeta}{\mu_1 \mu_2 k_a}\right)^{\frac{1}{2}}$ ，由此对比误差收敛区域 Θ_0 以及 Θ_2 可得，所设计有限时间控制算法下的误差收敛精度远高于基于一般线性反馈的非有限时间控制算法下的误差收敛精度。

注 4.9 值得注意的是，本章中所设计的有限时间一致性控制算法与一般的 UUB 控制算法是基本不同的。在本章所设计的有限时间控制算法中，误差反馈以及自适应补偿并没有被直接应用于建立控制率以及自适应律，而是，将带有分数阶的误差反馈项， $e_{i,m}^{q_m}$ ，以及带有分数阶的自适应项， $\hat{\zeta}_i^{\frac{3s-1}{1+s}}$ ，嵌入所设计控制算法，也正是这样的处理方法才使得系统在有限时间内可以达到任意可调的足够小控制精度，即对于所设计的有限时间控制算法，收敛精度和收敛时间都是易调节的，而不用通过设定相对高的控制增益来达到预定的控制精度。然而，对于一般 UUB 控制，虽然亦可使得系统误差在有限时间内达到某个界，但无论是误差所达到的界还是收敛时间都不能得出具体表达形式，并且只能通过增大控制增益来达到一个相对好的控制精度，而实际中存在的控制输入饱和和极限将极大地限制其应用。

4.4.4 仿真验证及结果分析

本节给出两个仿真实验来验证所设计有限时间自适应一致性协议的有效性与可行性。实验中仿真环境为 64 位系统，CPU 为 Intel Core T6600 2.20GHz，系统内存为 4G，仿真软件为 Matlab R2012a。

仿真实验 1

考虑一组由 4 个具有三阶非仿射动态的多智能体多构成的智能体系统，其动态模型表示如下：

$$\dot{x}_{i,3} = (0.6 + 0.1\exp(-x_{i,2}^2 - x_{i,3}^2))u_i + 0.1\sin(u_i) + f_{di}(\cdot) \quad (4.172)$$

其中 $i = 1, 2, 3, 4$ ，系统未知不确定项 f_{di} 为 $f_{di}(\cdot) = d_i + 0.5(-1)^i x_{i,1}^2 + 0.5(-1)^i x_{i,2}^2 + 0.5x_{i,3}^2$ ，其中外界干扰 d_i 随机选取并满足 $|d_i| \leq 0.1$ 。由系统模型 (4.172) 可以看出，该系统的控制增益为 $g_i(\cdot) = (0.6 + 0.1\exp(-x_{i,2}^2 - x_{i,3}^2))$ ($i = 1, 2, 3, 4$)，因此是未知时变的，同时满足有界并且非零的条件，并且控制增益满足 $g_i(\cdot) \geq 0.6 > 0$ ，因此控制方向是定的，故满足假设 4.6 中的条件。该系统的综合不确定非线性项为 $L_{fi}(\cdot) = 0.1\sin(u_i) + f_{di}(\cdot)$ ，由 $f_{di}(\cdot)$ 的表达式可以得出存在一个有界常数 $\alpha_i \geq 0$ 和一个已知数量函数 $\psi_i(\bar{x}_i) \geq 0$ 使

得 $|L_f(\cdot)| \leq \alpha_i \psi_i(\cdot)$ 成立, 并且当 \bar{x}_i 有界时, $\psi_i(\bar{x}_i)$ 才有界, 即,

$$\begin{aligned} |L_f(\cdot)| &= |0.1 \sin(u_i) + d_i + 0.5(-1)^i x_{i,1}^2 + 0.5(-1)^i x_{i,2}^2 + 0.5x_{i,3}^2| \\ &\leq 0.1 + 0.1 + 0.5x_{i,1}^2 + 0.5x_{i,2}^2 + 0.5x_{i,3}^2 \\ &\leq 1 \times (0.2 + x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2) = \alpha_i \psi_i(\cdot) \end{aligned} \quad (4.173)$$

其中 $\alpha_i = 1$, $\psi_i(\cdot) = 0.2 + x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2$, 故满足假设 4.7 的条件。智能体之间的网络通讯拓扑是单向强连通的, 如图 4.7 所示, 因此满足假设 4.5 的条件。拓扑图中每条边的权重取为 0.1。该有向图所对应的拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 零特征值所对应的左特征向量为 $[1, 1, 1, 1]^T$ 。

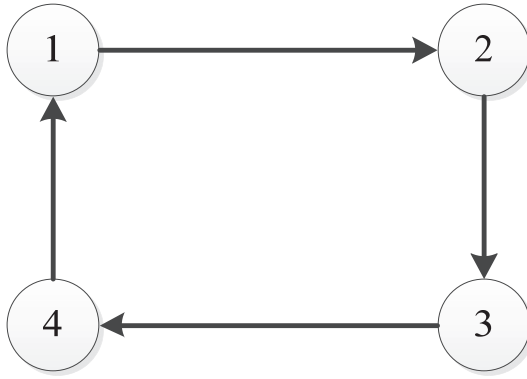


图 4.7 4 个智能体之间的网络通讯关系

Figure 4.7 The communicaiton among the 4 agents

仿真运行时间为 $20s$, 其中 4 个智能体的各阶初始状态分别取为 $x_1(0) = [-0.2, -0.3, 0, 0.2]^T$, $x_2(0) = [0.2, 0.3, 0, -0.2]^T$, $x_3(0) = \mathbf{0}_4$ 。仿真中采用所设计有限时间控制算法(4.143)-(4.144)以及各阶虚拟控制 $x_{i,m}^*$ ($m=1, 2, 3$), 其中控制参数分别取为: $l=1$, $\beta_1=4$, $\beta_{i,2}=12$, $\beta_{i,3}=40$, $\sigma_i=1$, $\gamma_i=1$ 和 $\eta_i=0.8$ 。已知数量函数取为 $\psi_i(\bar{x}_i) = 0.2 + x_{i,1}^2 + x_{i,2}^2 + x_{i,3}^2$ 。另外, 估计参数的初始值取为 $\hat{\zeta}_i(0) = 0.5$ ($i=1, 2, 3, 4$)。

仿真测试结果分别由图 4.8, 图 4.9 和图 4.10 给出, 其中图 4.8 给出了 4 个多智能体的位移状态轨迹, 图 4.9 给出了 4 个多智能体的局部位移误差收敛结果, 图 4.10 给出了 4 个多智能体的参数估计值 $\hat{\zeta}_i$ ($i=1, 2, 3, 4$) 随时间变化的情况。从图 4.8 可以看出, 系统中 4 个智能体的状态在有限时间内达到稳定, 即系统实现了有限时间稳定。由图 4.9 可以看出, 4 个智能体的局部误差在有限时间内均趋于 0, 由前面理论分析中给出的局部误差的定义可知, 所有智能体的局部误差趋于 0 意味着系统中所有智能体达到一个一致值, 则图 4.9 表明系统在有限时间实现了一致。从图 4.10 可以看出, 4 个多智能体的参数估计值 $\hat{\zeta}_i$ ($i=1, 2, 3, 4$) 在有限时间

内呈现趋于平稳的趋势。综合图 4.8-图 4.10 的结果可以得出结论，针对三阶非仿射多智能体系统(4.172)（该系统满足假设 4.5-4.7），应用所设计的有限时间控制算法(4.143)-(4.144)以及设计的虚拟控制 $x_{i,m}^*$ ($m=1,2,3$)，则对于任意满足 $\hat{\zeta}_i(0) \geq 0$ 以及 $V(0) \leq \mu$ 的初始状态，该系统在有限时间内实现了一致，因此与本节所得的理论结果相吻合。

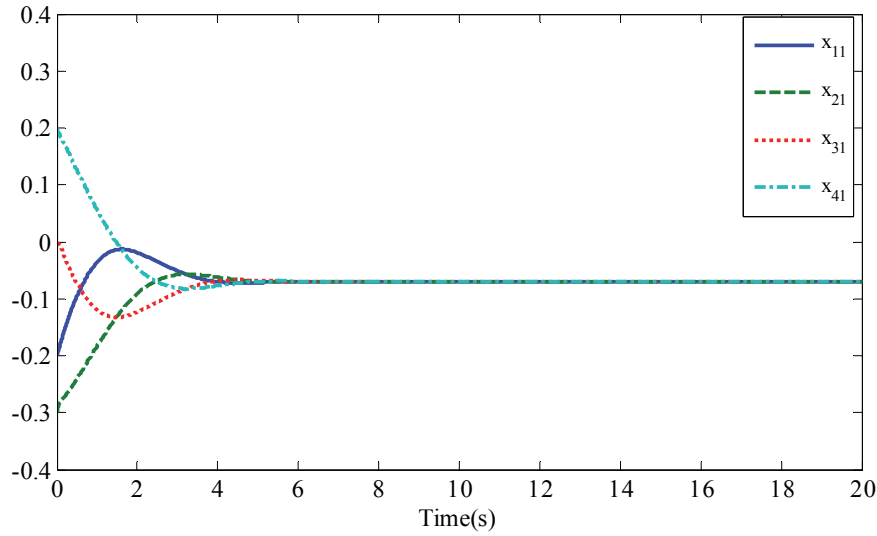


图 4.8 4 个多智能体的位移状态轨迹图

Figure 4.8 The position trajectory of the 4 agents

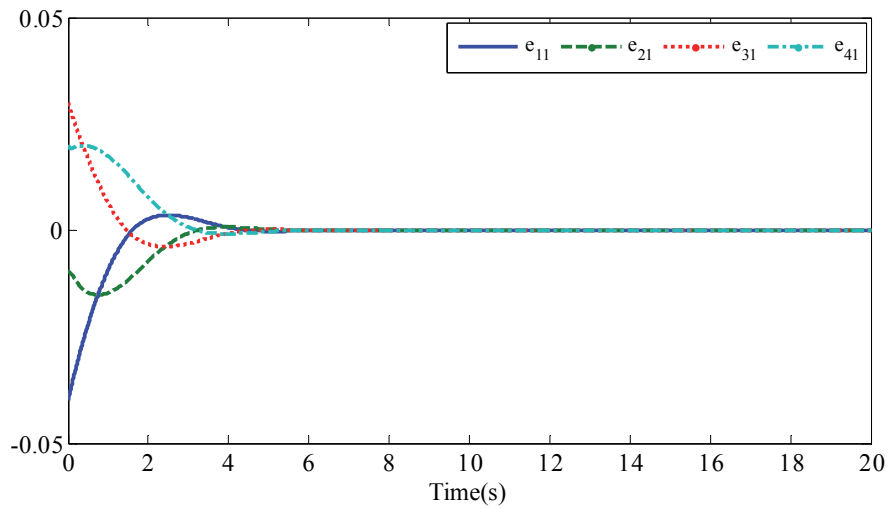
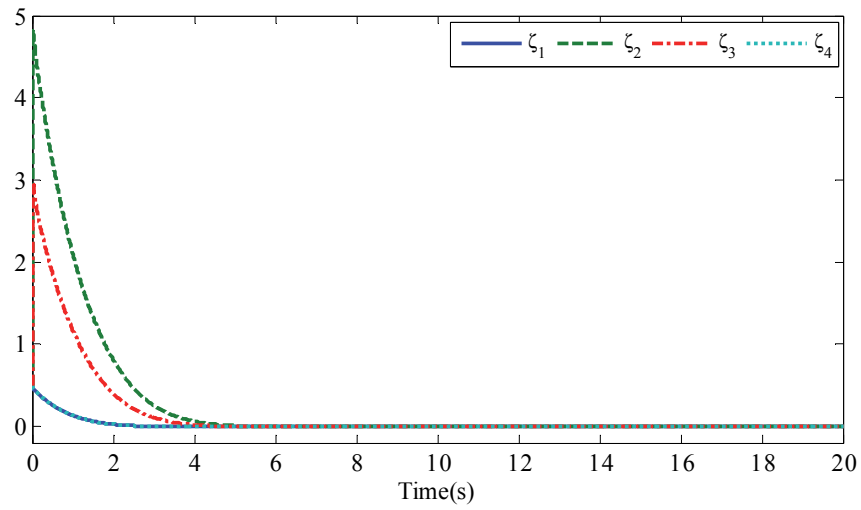


图 4.9 4 个多智能体的局部位移误差

Figure 4.9 The position neighborhood errors of the 4 agents

图 4.10 参数 ζ_i ($i=1,2,3,4$) 的估计值Figure 4.10 The parameter estimation values of ζ_i ($i=1,2,3,4$)

为了验证本章所提出有限时间控制算法的优越性, 我们同时测试并比较了两种控制算法下系统(4.172)中所有智能体局部邻居误差的收敛效果, 即所提出的有限时间自适应控制算法(4.143)-(4.144)以及典型的非有限时间自适应控制算法(4.167)-(4.169), 其中两种控制算法中除了分数阶 s 取值不同, 其他设计参数都取相同值。两种控制算法下的误差收敛对比结果由图 4.11 给出。从图 4.11 可以看出, 本章中所提出的有限时间自适应控制算法下智能体的误差收敛速度和误差收敛精度都优于相应典型非有限时间控制算法下智能体的收敛效果。

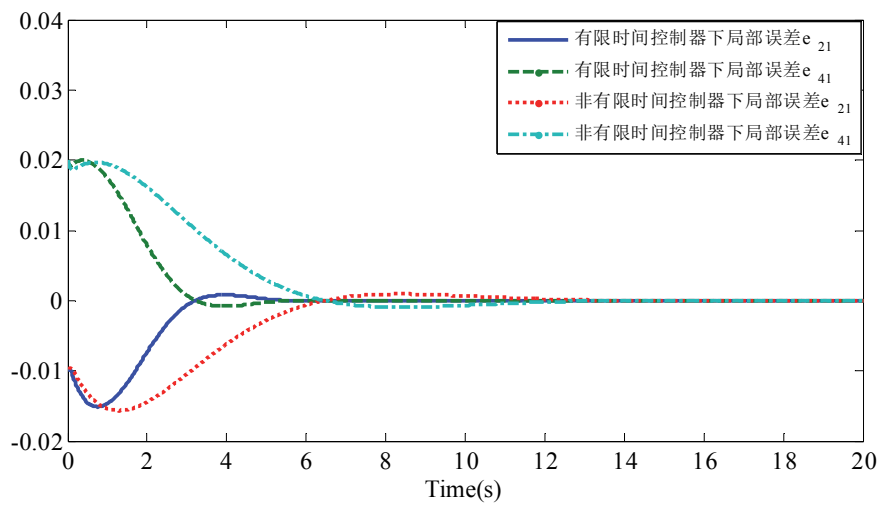


图 4.11 智能体在不同控制器下的局部误差比较

Figure 4.11 The neighborhood error comparison under different controllers

仿真实验 2

考虑一组由 4 个具有非仿射动态的双关节机器人构成的多机器人系统^[153]，其动态模型表示如下：

$$D_i \ddot{q}_i + B_i \dot{q}_i + N_i \sin(q_i) + G_{gi}(t) = f(u_i) \quad (4.174)$$

其中 $i=1,2,3,4$ ， q_i ， \dot{q}_i 和 \ddot{q}_i 分别表示第 i 个机器人关节的角位移，角速度，角加速度； $f(u_i) = u_i + 0.5 \cos(u_i)$ 代表驱动力矩，其中 u_i 代表电机电流（控制输入）； $G_{gi}(t) = -0.1 \sin(t)$ 为外界干扰；系统参数为 $D_i = 1$ ， $B_i = 1$ ， $N_i = 1$ 。容易看出，系统 (4.174) 满足假设 4.6 的条件。该系统的综合不确定非线性项为 $L_{fi}(\cdot) = -B_i \dot{q}_i - N_i \sin(q_i) - G_{gi}(t) + 0.5 \cos(u_i)$ ，故在 x -维方向上，由 $G_{gi}(\cdot)$ 的表达式可以得出存在一个有界常数 $\alpha_{xi} \geq 0$ 和一个已知数量函数 $\psi_{xi}(\bar{q}_{xi}) \geq 0$ 使得 $|L_{fi}(\cdot)| \leq \alpha_{xi} \psi_{xi}(\cdot)$ 成立，并且只有当 \bar{q}_{xi} 有界时， $\psi_{xi}(\bar{q}_{xi}) \geq 0$ 才有界，即，

$$\begin{aligned} |L_{fi}(\cdot)| &= |-B_i \dot{q}_{xi} - N_i \sin(q_{xi}) - G_{gi}(t) + 0.5 \cos(u_{xi})| \\ &\leq |\dot{q}_{xi}| + 1 + 0.1 + 0.5 \leq 0.5 + 0.5 \dot{q}_{xi}^2 + 1 + 0.1 + 0.5 \\ &\leq 2.1(1 + \dot{q}_{xi}^2) = \alpha_{xi} \psi_{xi}(\cdot) \end{aligned} \quad (4.175)$$

其中 $\alpha_{xi} = 2.1$ ， $\psi_{xi}(\cdot) = 1 + \dot{q}_{xi}^2$ ，同理可以得出在 y -维方向上，存在一个有界常数 $\alpha_{yi} \geq 0$ 和一个已知数量函数 $\psi_{yi}(\cdot) = 1 + \dot{q}_{yi}^2$ 使得 $|L_{fi}(\cdot)| \leq \alpha_{yi} \psi_{yi}(\cdot)$ 成立，并且只有当 \bar{q}_{yi} 有界时， $\psi_{yi}(\bar{q}_{yi}) \geq 0$ 才有界，故满足假设 4.7 的条件。为了方便，我们假设 4 个机器人的通讯拓扑满足和仿真实验 1 中相同的通讯关系，其中拓扑中每条边的权重为 0.1。

仿真运行时间为 20s，其中 4 个智能体的各阶初始状态分别取为 $x_1(0) = [-1.5, -1, 1.5, 2]^T$ ， $y_1(0) = [0, 2, 2, 1]^T$ ， $x_2(0) = \mathbf{0}_4$ ， $y_2(0) = \mathbf{0}_4$ ， $\hat{\zeta}_x(0) = 0.5 \times \mathbf{1}_4$ ， $\hat{\zeta}_y(0) = 0.5 \times \mathbf{1}_4$ 。4 个机器人需满足的最终相对位置结构配置为 $\varpi_x = [-0.5, 0, 0.5, 0]^T$ ， $\varpi_y = [1, 0.5, 1, 1.5]^T$ 。仿真中采用所设计有限时间控制算法(4.143)-(4.144)以及各阶虚拟控制 $x_{i,m}^*$ ($m=1,2$)，其中控制参数分别取为： $l=1$ ， $\beta_1=4$ ， $\beta_{i,2}=20$ ， $\sigma_i=1$ ， $\gamma_i=1$ 和 $\eta_i=0.8$ 。已知数量函数取为 $\psi_{xi}(\cdot) = 1 + \dot{q}_{xi}^2$ ， $\psi_{yi}(\cdot) = 1 + \dot{q}_{yi}^2$ 。

仿真测试结果分别由图 4.12-图 4.14 给出，其中图 4.12 给出了 4 个机器人的运行轨迹，图 4.13 和图 4.14 分别给出了 4 个机器人在 x -维方向和 y -维方向的局部位移误差收敛结果，图 4.15 和图 4.16 分别给出了 4 个机器人在 x -维方向和 y -维方向的参数估计值 $\hat{\zeta}_{xi}$ 和 $\hat{\zeta}_{yi}$ ($i=1,2,3,4$) 随时间变化的情况。从图 4.13 和图 4.14 可以看出，4 个机器人在 x -维方向和在 y -维方向的局部误差在有限时间内均趋于 0，表明系统中 4 个机器人在有限时间内达到了一致性位置配置。从图 4.15 和图 4.16 可以看出，4 个多智能体在 x -维方向和 y -维方向的参数估计值 $\hat{\zeta}_{xi}$ 和 $\hat{\zeta}_{yi}$ ($i=1,2,3,4$) 在有限时间内均呈现趋于平稳的趋势。综合图 4.12-图 4.16 的结果可以得出结论，

针对含有非仿射动态的多机器人系统(4.174) (该系统满足假设 4.5-4.7), 应用所设计的有限时间控制算法(4.143)-(4.144)以及设计的虚拟控制 $q_{i,m}^*$ ($m=1,2$), 则对于任意满足 $\hat{\zeta}_i(0) \geq 0$ 以及 $V(0) \leq \mu$ 的初始状态, 该系统在有限时间内实现了一致, 因此与本节所得的理论结果相吻合。

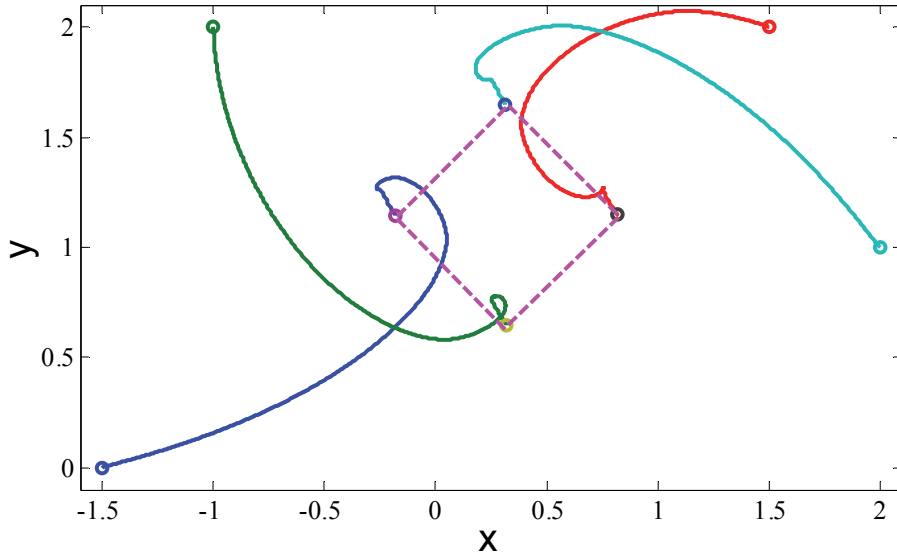


图 4.12 4 个机器人的位移轨迹图

Figure 4.12 The position trajectory of the 4 robots

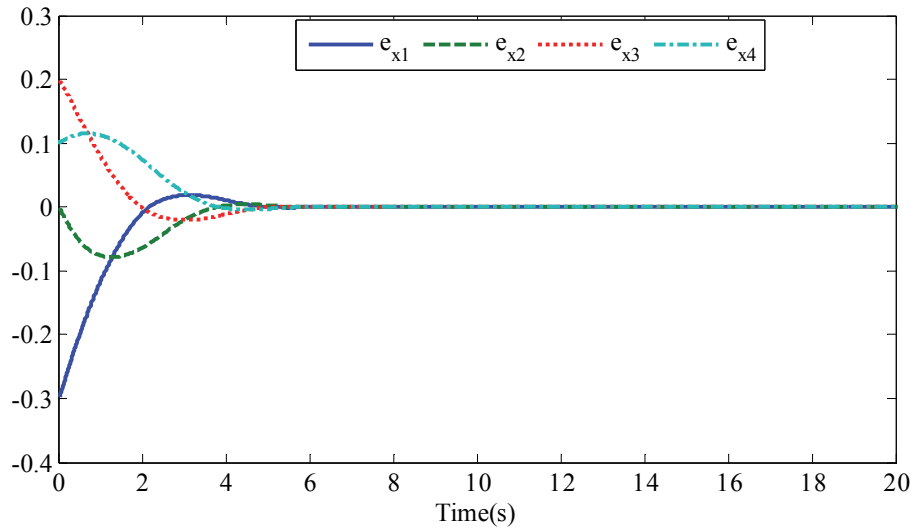


图 4.13 4 个机器人在 x -维方向的局部位移误差

Figure 4.13 The position neighborhood errors of the 4 robots in x -dimension

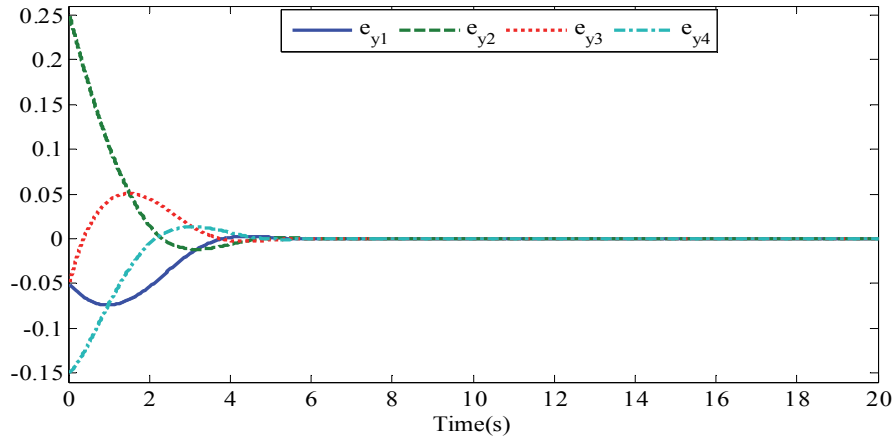


图 4.14 4 个机器人在 y -维方向的局部位移误差

Figure 4.14 The position neighborhood errors of the 4 robots in y -dimension

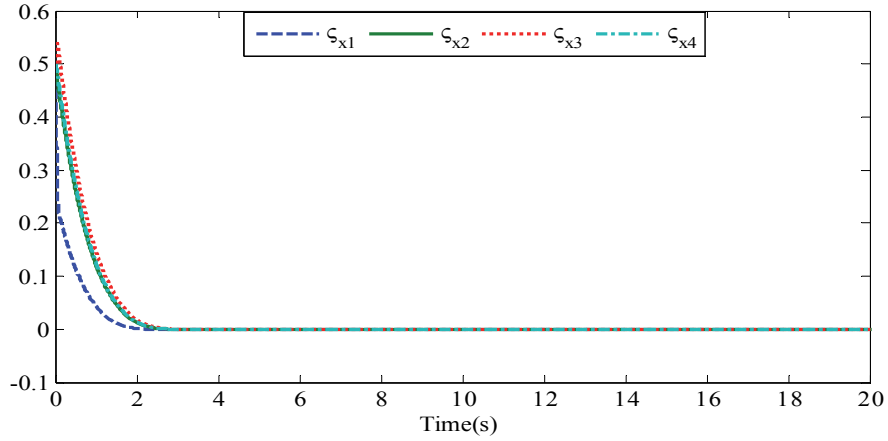


图 4.15 参数 ς_i ($i=1,2,3,4$) 在 x -维方向的估计值

Figure 4.15 The parameter estimation values of ς_i ($i=1,2,3,4$) in x -dimension

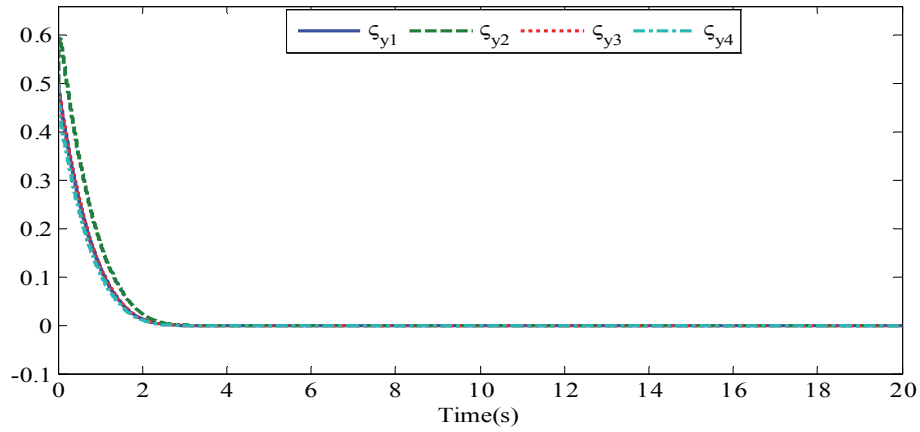


图 4.16 参数 ς_i ($i=1,2,3,4$) 在 y -维方向的估计值

Figure 4.16 The parameter estimation values of ς_i ($i=1,2,3,4$) in y -dimension

为了验证本章所提出有限时间控制算法的优越性, 我们同时测试并比较了两种控制算法下机器人系统(4.174)中所有机器人的局部邻居误差的收敛效果, 即所提出的有限时间自适应控制算法(4.143)-(4.144)以及典型的非有限时间自适应控制算法(4.167)-(4.169), 其中两种控制算法中除了分数阶 s 取值不同, 其他设计参数都取相同值。两种控制算法下的误差收敛对比结果由图 4.17-图 4.18 给出。

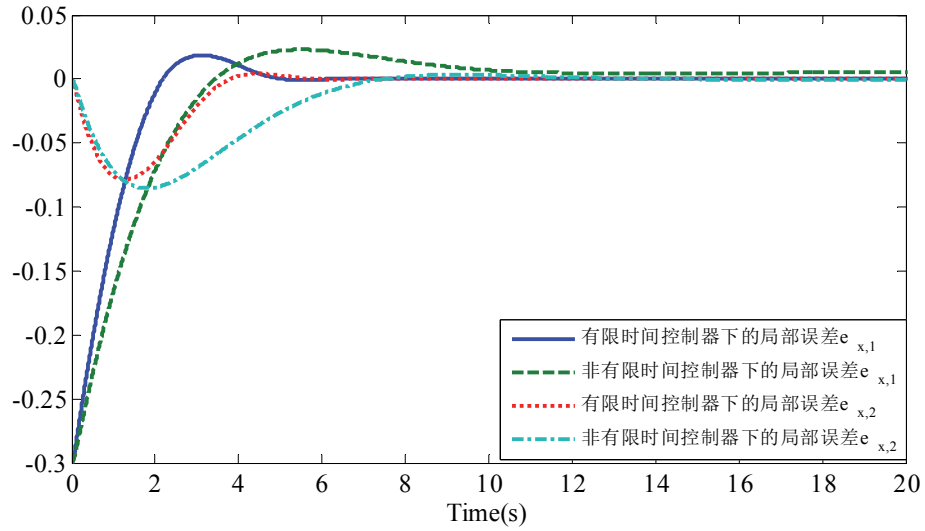


图 4.17 机器人在不同控制器下在 x -维方向上的局部误差比较

Figure 4.17 The neighborhood error comparison under different controllers in x -dimension

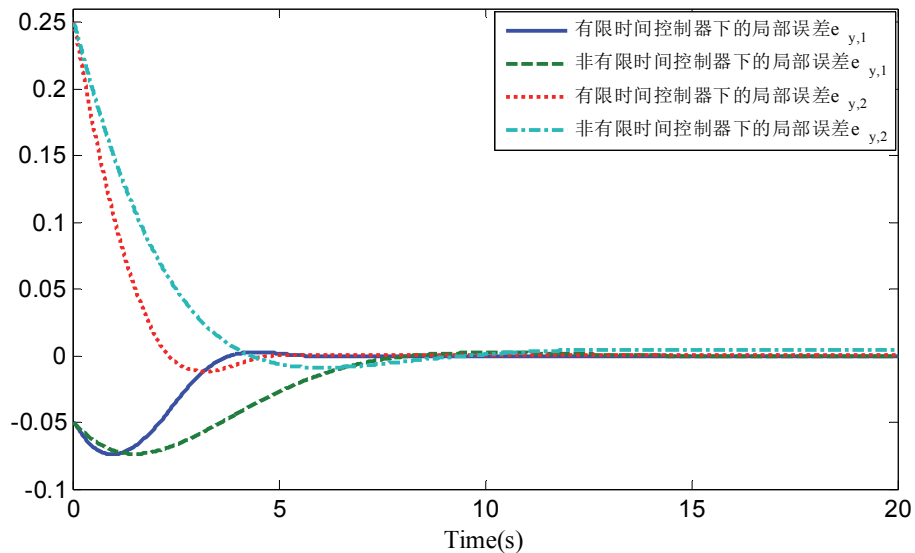


图 4.18 机器人在不同控制器下在 y -维方向上的局部误差比较

Figure 4.18 The neighborhood error comparison under different controllers in y -dimension

图 4.17 给出了第 1 个机器人和第 2 个机器人在 x -维方向的局部误差对比, 图 4.18 给出了第 1 个机器人和第 2 个机器人在 y -维方向的局部误差对比。两图均表明, 在本章中所提出的自适应有限时间控制算法下, 机器人的误差收敛速度和误差收敛精度都优于相应典型非有限时间控制算法下机器人的误差收敛效果。

4.5 本章小结

本文首先针对带有时变未知控制增益以及不可线性参数化分解的二阶复杂非线性多智能体系统, 设计出了自适应有限时间一致性协议, 由 Lyapunov 稳定性理论给出了系统有限时间稳定的严格理论分析证明, 并通过仿真实例验证了所设计自适应有限时间一致性协议的有效性。接着研究了在存在未知执行器故障情形下该复杂多智能体系统的有限时间一致性控制问题, 设计出了有限时间容错自适应一致性算法。并进一步针对局部单向拓扑条件下带有未知非仿射以及不可线性化参数分解和未知外界干扰的高阶非线性多智能体系统, 基于反衍控制设计思想以及归纳法思想, 结合针对高阶系统的加幂积分技术, 核心函数技术以及自适应方法, 设计出了基于可调的分数阶状态反馈以及分数阶自适应律的有限时间一致性协议, 解决了该高阶非仿射多智能体系统在有向拓扑条件下的有限时间一致性控制问题, 最后通过仿真实验, 对仿真结果进行对比分析, 验证了所设计有限时间一致性控制算法在有向拓扑条件下针对上述高阶复杂多智能体系统的有效性和优越性。本章的创新点主要在于: 1) 解决了同时具有未知时变控制增益, 不可线性参数化分解的不确定非线性因素以及未知不可测执行器故障的二阶复杂非线性多智能体系统在单向通讯拓扑条件下的有限时间一致性控制问题; 2) 解决了高阶非仿射多智能体系统在单向通讯拓扑条件下的有限时间一致性控制问题。

5 高阶纯反馈多智能体系统的有限时间一致性追踪控制

5.1 引言

本章研究了含有非匹配不确定性因素的高阶纯反馈多智能体系统的有限时间一致性追踪控制问题，在无向拓扑条件下，结合分数阶动态面技术、反衍控制技术、神经网络近似方法以及分数阶状态反馈法，设计出了基于分数阶状态反馈以及分数阶自适应律的有限时间一致性追踪协议，并基于 Lyapunov 稳定性理论，给出了系统有限时间稳定的严格理论证明。

本章主要内容在 IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems 发表，见攻读博士期间所取得主要学术成果[7]。

5.2 高阶纯反馈多智能体系统的有限时间一致性追踪控制

本节主要针对包含非匹配未知不确定性因素的高阶纯反馈多智能体系统，设计出了有限时间一致性追踪控制算法，通过引入基于虚拟分数阶滤波的分数阶-动态面设计技术，使得有限时间收敛结果得以实现。另外，虽然系统含有非匹配不确定性因素以及未知外界干扰，但在所设计的控制算法中仅需要更新单个而非多个一般化神经元参数，因此使得控制器的设计和执行非常直接并且所需付出的代价非常小。

5.2.1 问题描述

考虑如下一组含有 N 个智能体，具有未知非匹配不确定性的高阶纯反馈多智能体系统：

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}_{i,m}(t) &= f_{i,m}(\bar{x}_{i,m}(t), x_{i,m+1}(t)) + d_{i,m}(\bar{x}_{i,m}(t), t), \quad m = 1, \dots, n-1 \\ \dot{\bar{x}}_{i,n}(t) &= f_{i,n}(\bar{x}_{i,n}(t), u_i(t)) + d_{i,n}(\bar{x}_{i,n}(t), t) \\ y_i(t) &= x_{i,1}(t)\end{aligned}\tag{5.1}$$

其中 $i = 1, \dots, N$ ， $\bar{x}_{i,m} = [x_{i,1}, \dots, x_{i,m}]^T \in \mathbb{R}^m$ ($m = 1, \dots, n$)； $x_{i,m} \in \mathbb{R}$ ， $u_i \in \mathbb{R}$ 和 $y_i \in \mathbb{R}$ 分别表示第 i 个子系统的系统状态，控制输入和控制输出； $f_{i,m}(\cdot): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是未知平滑非仿射函数； $d_{i,m} \in \mathbb{R}$ 代表未知不确定性因素/外界干扰。

注 5.1 有许多含有不匹配的未知非仿射非线性动态的实际系统，其动态方程都可以由动态模型(5.1)表示，比如航天模型，机械系统，Duffing 振荡器等^[117]。在不同的网络通讯拓扑条件下，该系统模型能够描述一组重要的具有复杂动态的网络化实际系统。

为了便于表示，在不引起混淆的情况下，下文所有函数中所含的参数都将省略表示。

假设 5.1 领导者只发布命令，并不接受来自跟随者的信息，即领导者和跟随者之间的通讯关系是单向的。而对于多智能体系统中的每一个跟随者，则至少存在一条有向路径使其与领导者相连，其中所有跟随者之间的网络通讯是双向的。

设 $\mathcal{F} = \{1, \dots, N\}$, $\mathcal{N}_i^{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{F}$, 第 i 个跟随者与领导者之间的连接权重用 a_{i0} 表示，其中，若第 i 个跟随者能接受来自领导者的信息，则 $a_{i0} > 0$ ；否则， $a_{i0} = 0$ 。

对 $i \in \mathcal{F}$ ，定义：

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{i,m}(\bar{x}_{i,m}(t), x_{i,m+1}(t))}{\partial x_{i,m+1}(t)} &= g_{i,m}(\bar{x}_{i,m}(t), x_{i,m+1}(t)), \quad m = 1, \dots, n-1 \\ \frac{\partial f_{i,n}(\bar{x}_{i,n}(t), u_i(t))}{\partial u_i(t)} &= g_{i,n}(\bar{x}_{i,n}(t), u_i(t)) \end{aligned} \quad (5.2)$$

假设 5.2 假设非线性函数 $g_{i,m}$ ($i \in \mathcal{F}$, $m = 1, \dots, n$) 是未知时变的，但非零并有界，即存在未知常数 b_i 和 c_i 使得 $0 < b_i \leq |g_{i,m}(\cdot)| \leq c_i < \infty$ 成立，并且 $g_{i,m}(\cdot)$ 的符号是定的（不失一般性，本章中假设 $\text{sgn}(g_{i,m}) = +1$ ）。

假设 5.3 对于外界干扰 $d_{i,m}(\bar{x}_{i,m}(t), t)$ ($i \in \mathcal{F}$, $1 \leq m \leq n$)，存在未知平滑正数量函数 $d_{i,m}^{\max}(\bar{x}_{i,m}(t))$ 使得对 $\forall (\bar{x}_{i,m}(t), t) \in \Omega_{\bar{x}_{i,m}} \times R_+$ ，有 $|d_{i,m}(\bar{x}_{i,m}(t), t)| \leq d_{i,m}^{\max}(\bar{x}_{i,m}(t)) < \infty$ 成立。

假设 5.4 动态领导者的状态轨迹， $y_r(t)$ ，是有界的，并且仅有部分跟随者能获得领导者的状态信息。另外， $y_r(t)$ 的时间导数， $\dot{y}_r(t)$ ，是未知有界的，即存在某个未知正常数 $r > 0$ 使得 $|\dot{y}_r(t)| \leq r < \infty$ 成立。

注 5.2 应当指出的是假设 5.2 是保证系统(5.1)可控的充分条件^[146]。目前关于高阶系统的轨迹追踪控制问题的研究中，大部分都要求知道领导者的位置状态信息 y_r 以及 y_r 的各阶导数，即 $y_r^{(k)}$ ($k = 1, \dots, n$)，然而在实际系统中获取 y_r 的各阶导数信息可能会导致大量资源浪费甚至根本无法获取这些信息。本章假设 5.4 中条件要求部分跟随者仅需获取领导者的位置信息即可，极大地减少了对传感器的需求量，降低了运行成本，使得控制器的设计简单易行。

本节的控制目标为针对上述复杂高阶纯反馈多智能体系统(5.1)，建立一个基于神经网络结构的有限时间分布式一致性追踪控制协议，使得所有跟随者的输出状态 $y_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) 都在有限时间内和领导者的输出状态 $y_r(t)$ 保持同步，即存在一个有限时间 T^* 和一个可调小常数 $\epsilon > 0$ 使得当 $t \geq T^*$ 时，有 $|y_i(t) - y_r(t)| < \epsilon$ 成立。

5.2.2 相关定义和引理

为了建立基于神经网络的有限时间一致性控制算法，我们首先引入局部位移误差以及各阶虚拟误差，进而引入分数阶-动态面技术的概念，接着简单介绍 RBF 神经网络近似技术，之后是详细的递归控制设计过程与严格的理论证明分析过程。

首先定义局部位移误差 $e_{i,1}$ 以及各阶虚拟误差 $e_{i,m}$ ($i \in \mathcal{F}$, $m = 2, \dots, n$) 如下：

$$e_{i,1} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(y_i - y_j) + a_{i0}(y_i - y_r) \quad (5.3)$$

$$e_{i,m} = x_{i,m} - \alpha_{i,mf}, \quad m = 2, \dots, n$$

其中 $\alpha_{i,mf}$ 为如下一阶虚拟分数阶滤波的输出：

$$\epsilon_{i,m} \dot{\alpha}_{i,mf} = (\alpha_{i,m-1} - \alpha_{i,mf})^h, \quad m = 2, \dots, n \quad (5.4)$$

其中 $0 < \epsilon_{i,m} < \infty$ 为常数， $0 < h < 1$ 代表分数阶阶数，由此可知 $e_{i,m}$ ($m = 2, \dots, n$) 为基于分数阶的动态面误差。故我们称基于如上定义的分数阶误差的控制设计技术为“分数阶-动态面技术”(Fraction-Dynamic Surface Control, F-DSC)，其中包括了广泛应用的动态面技术(Dynamic Surface Control, DSC)为当 $h = 1$ 时为其特殊情况。正是如此定义的分数阶-动态面技术，使得针对带有非匹配不确定性的高阶多智能体系统(5.1)建立有限时间一致性算法成为可能。

令 $E = [e_{1,1}, \dots, e_{N,1}]^T$ ， $y_{\mathcal{F}} = [y_1, \dots, y_N]^T$ ， $\mathcal{L}_0 = \text{diag}\{a_{01}, \dots, a_{0N}\}$ ，则

$$E = \mathcal{L}y_{\mathcal{F}} + \mathcal{L}_0(y_{\mathcal{F}} - \mathbf{1}_N y_r) = (\mathcal{L} + \mathcal{L}_0)(y_{\mathcal{F}} - \mathbf{1}_N y_r) \quad (5.5)$$

由文献[147]可知，在假设 5.1 的条件下，矩阵 $(\mathcal{L} + \mathcal{L}_0)$ 是对称且正定的，由此可知若 $E \rightarrow \mathbf{0}_N$ ，则会使得 $y_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbf{1}_N y_r$ ，即所有跟随者的输出状态和领导者的状态达到同步。故本节控制目标可等价转化为设计控制器使得 E 在有限时间内趋于 $\mathbf{0}_N$ 。

下面简单介绍本章所设计的控制算法中要用到的 RBF 神经网络近似技术^[148]。我们在下文的控制器设计部分要用到如下 RBF 神经网络来近似未知理想信号 $\alpha_{i,m}^*$

($i \in \mathcal{F}$ ， $m = 1, \dots, n$)，即

$$\alpha_{i,m}^* = W_{i,m}^{*T} \phi_i(Z_{i,m}) + \delta_{i,m}(Z_{i,m}) \quad (5.6)$$

其中 $W_{i,m}^* \in R^l$ 是 RBF 神经网络近似在第 m 步的未知理想权重向量，其中 $l > 1$ 是神经元节点个数； $\phi_i = [\phi_{i,m1}, \dots, \phi_{i,m l}]^T \in R^l$ 为基函数向量，其中 $\phi_{i,mk}$ ($k = 1, \dots, l$) 选取为广泛应用的高斯函数； $\delta_{i,m}(Z_{i,m})$ 表示近似误差，满足 $|\delta_{i,m}(Z_{i,m})| \leq \epsilon_{i,m}$ ； $Z_{i,m} \in \Omega_{Z_m} \subset \mathbb{R}^q$ 代表神经输入向量，其中 $Z_{i,1} = [e_{i,1}, x_{i,1}]^T$ 以及 $Z_{i,m} = [e_{i,1}, x_{i,1}, \dots, e_{i,m}, x_{i,m}]^T$ ($m > 1$)。

在给出本节主要结果之前，首先给出如下有用引理。

引理 5.1 假设对 $\forall (x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ，函数 $f(x, u): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续可微的，并且存在一个正常数 b 使得 $\partial f(x, u) / \partial u > b > 0$ 成立。则存在一个连续（光滑）函数 $u^* = u(x)$ ，使得 $f(x, u) = 0$ 成立。

5.2.3 递归神经网络控制器设计与稳定性分析

在本小节中，递归控制器设计过程共包括 n 步，其中在每一递归 m ($m = 1, \dots, n$) 步，都预先设一个理想反馈控制 $\alpha_{i,m}^*$ 存在，并且 $\alpha_{i,m}^*$ 可以由 RBF 神经网络技术近似得出，而在前 $n-1$ 步中每一递归 m 步都设计一个虚拟稳定化控制 $\alpha_{i,m}$ ，最后在第 n 步给出实际控制输入 u_i 。

第1步：定义如下 Lyapunov 函数：

$$V_1 = \frac{1}{2} E^T (\mathcal{L} + \mathcal{L}_0)^{-1} E \quad (5.7)$$

对 V_1 求导，并由式(5.5)可得：

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= E^T (\mathcal{L} + \mathcal{L}_0)^{-1} \dot{E} = E^T (\mathcal{L} + \mathcal{L}_0)^{-1} (\mathcal{L} + \mathcal{L}_0) (\dot{y}_{\mathcal{F}} - 1_N \dot{y}_r) \\ &= \sum_{i=1}^N e_{i,1} (f_{i,1}(x_{i,1}, x_{i,2}) + d_{i,1}(\bar{x}_{i,1}, t) - \dot{y}_r) \\ &= \sum_{i=1}^N e_{i,1} (f_{i,1}(x_{i,1}, x_{i,2}) + w_{i,1} + \bar{d}_{i,1}(\bar{x}_{i,1}, t) - w_{i,1}) \end{aligned} \quad (5.8)$$

其中 $\bar{d}_{i,1}(\cdot) = d_{i,1}(\bar{x}_{i,1}, t) - \dot{y}_r$ 。由假设 5.3-5.4 可知， $|\bar{d}_{i,1}(\cdot)| \leq d_{i,1}^{\max}(\bar{x}_{i,1}) + r = \bar{d}_{i,1}^{\max}(\bar{x}_{i,1})$ ，其中 $\bar{d}_{i,1}^{\max}(\bar{x}_{i,1}) = d_{i,1}^{\max} + r$ 为未知有界常数。注意到在上式(5.8)中，我们进行了“加和减”一个打包函数 $w_{i,1}$ 运算^[144]，其中引入 $w_{i,1}$ 函数是为了对付未知外界干扰 $d_{i,m}$ 以及涉及未知控制增益以及虚拟控制输入的未知剩余项。具体地， $w_{i,1}$ 定义如下：

$$w_{i,1} = \frac{e_{i,1} (\bar{d}_{i,1}^{\max}(\bar{x}_{i,1}))^2}{2a_{i,1}^2} \quad (5.9)$$

其中 $a_{i,1} > 0$ 为自由设计参数。

根据假设 5.2 可知，对所有的 $(x_{i,1}, x_{i,2}) \in \mathfrak{R}^2$ ，有 $\partial f_{i,1}(x_{i,1}, x_{i,2}) / \partial x_{i,2} > b_i > 0$ 成立。由于 $\partial w_{i,1} / \partial x_{i,2} = 0$ ，故得到 $\partial (f_{i,1}(x_{i,1}, x_{i,2}) + w_{i,1}) / \partial x_{i,2} > b_i > 0$ 。根据引理 5.1，则得，存在一个光滑理想控制输入 $x_{i,2} = \alpha_{i,1}^*(x_{i,1}, w_{i,1})$ ，使得：

$$f_{i,1}(x_{i,1}, \alpha_{i,1}^*) + w_{i,1} = 0 \quad (5.10)$$

成立。通过应用中值定理^[149]，可得下式成立：

$$f_{i,1}(x_{i,1}, x_{i,2}) = f_{i,1}(x_{i,1}, \alpha_{i,1}^*) + g_{\mu i,1}(x_{i,2} - \alpha_{i,1}^*) \quad (5.11)$$

其中由假设 5.2 可知 $g_{\mu i,1} = g_{i,1}(x_{i,1}, x_{\mu i,1})$ 为未知正常数，并且 $x_{\mu i,1} = \mu_{i,1} x_{i,2} + (1 - \mu_{i,1}) \alpha_{i,1}^*$ ， $0 < \mu_{i,1} < 1$ 。注意到 $\alpha_{i,1}^*$ 为未知光滑函数，在控制器设置中并不会用到。将上式(5.10)和(5.11)代入式(5.8)中，并利用 RBF 神经网络(5.6)来近似 $\alpha_{i,1}^*$ ，得：

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \sum_{i=1}^N e_{i,1} [g_{\mu i,1}(x_{i,2} - \alpha_{i,1}^*) + \bar{d}_{i,1}(\bar{x}_{i,1}, t) - w_{i,1}] \\ &= \sum_{i=1}^N [g_{\mu i,1} e_{i,1} (x_{i,2} - W_{i,1}^{*T} \phi_{i,1}(Z_{i,1}) - \delta_{i,1}(Z_{i,1})) + e_{i,1} \bar{d}_{i,1}(\bar{x}_{i,1}, t) - e_{i,1} w_{i,1}] \end{aligned} \quad (5.12)$$

应用 Young's 不等式，得到：

$$e_{i,1} \bar{d}_{i,1} \leq \frac{e_{i,1}^2 (\bar{d}_{i,1}^{\max})^2}{2a_{i,1}^2} + \frac{a_{i,1}^2}{2} \quad (5.13)$$

其中 $a_{i,1} > 0$ 为任意常数。将式(5.9)和式(5.13)代入式(5.12)中，则得：

$$\dot{V}_1 \leq \sum_{i=1}^N [g_{\mu i,1} e_{i,1} (x_{i,2} - W_{i,1}^{*T} \phi_{i,1}(Z_{i,1}) - \delta_{i,1}(Z_{i,1})) + \frac{a_{i,1}^2}{2}] \quad (5.14)$$

对上不等式右边的第二项和第三项分别应用 Young's 不等式，并根据假设 5.2，得如下不等式：

$$\begin{aligned} -g_{\mu i,1} e_{i,1} W_{i,1}^{*T} \phi_{i,1}(Z_{i,1}) &\leq \frac{\|W_{i,1}^*\|^2}{2\eta_{i,1}^2} \phi_{i,1}(\cdot)^T \phi_{i,1}(\cdot) e_{i,1}^2 + \frac{c_i^2 \eta_{i,1}^2}{2} \\ &\quad -g_{\mu i,1} e_{i,1} \delta_{i,1}(Z_{i,1}) \leq \frac{c_i h \epsilon_{i,1}^{\frac{1+h}{h}}}{(1+h)[(1+h)k_{i,11}]^{\frac{1}{h}}} + g_{\mu i,1} k_{i,11} e_{i,1}^{1+h} \end{aligned} \quad (5.15)$$

其中 $h = \frac{2s-1}{2s+1}$ ， $s \in \mathbb{Z}^+ \setminus \{1\}$ ， $\eta_{i,1} > 0$ 和 $k_{i,11} > 0$ 为常数，由设计者选取。令 $\chi_{i,1} = b_i^{-1} \|W_{i,1}^*\|^2$ ，则下式成立：

$$\dot{V}_1 \leq \sum_{i=1}^N [g_{\mu i,1} e_{i,1} \chi_{i,2} + \frac{b_i \chi_{i,1}}{2\eta_{i,1}^2} \phi_{i,1}(\cdot)^T \phi_{i,1}(\cdot) e_{i,1}^2 + g_{\mu i,1} k_{i,11} e_{i,1}^{1+h} + \zeta_{i,1}] \quad (5.16)$$

$$\text{其中 } \zeta_{i,1} = \frac{c_i^2 \eta_{i,1}^2}{2} + \frac{c_i h \epsilon_{i,1}^{\frac{1+h}{h}}}{(1+h)[(1+h)k_{i,11}]^{\frac{1}{h}}} + \frac{a_{i,1}^2}{2}。$$

为了实现有限时间收敛，我们利用 $e_{i,1}$ 的线性反馈以及分数阶反馈来构造一个基于神经网络的虚拟控制 $\alpha_{i,1}$ 如下：

$$\alpha_{i,1} = -k_{i,1} e_{i,1}^h - k_{i,10} e_{i,1}^{1/h} - \frac{\hat{\chi}_{i,1}}{2\eta_{i,1}^2} \phi_{i,1}(\cdot)^T \phi_{i,1}(\cdot) e_{i,1} \quad (5.17)$$

其中 $k_{i,1} > 0$ ， $k_{i,10} > 0$ 以及 $\eta_{i,1} > 0$ 都为设计参数， $k_{i,1} = k_{i,11} + k_{i,12}$ （ $k_{i,11} > 0$ 和 $k_{i,12} > 0$ 为自由设计参数）。定义一阶虚拟分数阶滤波如下：

$$\epsilon_{i,2} \dot{\alpha}_{i,2f} = (\alpha_{i,1} - \alpha_{i,2f})^h, \quad \alpha_{i,2f}(0) = \alpha_{i,1}(0) \quad (5.18)$$

其中 $\epsilon_{i,2}$ 为一时间常数，这是对应一阶线性滤波器（文献[143]，[144]，[150]中被称为 DSC）的分数阶形式。从下文可以看出，如此定义的虚拟分数阶滤波器对于建立高阶非仿射纯反馈多智能体系统的有限时间一致性协议起着重要的作用。

第 q （ $q = 2, \dots, n-1$ ）步：构造一个 Lyapunov 函数 V_{eq} （ $q = 2, \dots, n-1$ ）如下：

$$V_{eq} = \sum_{i=1}^N \frac{e_{i,q}^2}{2} \quad (5.19)$$

其中 $e_{i,q} = x_{i,q} - \alpha_{i,qf}$ 。通过应用式(5.1)和式(5.3)对 V_{eq} 求导得到：

$$\dot{V}_{eq} = \sum_{i=1}^N e_{i,q} \dot{e}_{i,q} = e_{i,q} [f_{i,q}(\bar{x}_{i,q}, x_{i,q+1}) + w_{i,q} + d_{i,q}(\bar{x}_{i,q}, t) - w_{i,q} - \dot{\alpha}_{i,qf}] \quad (5.20)$$

由于 $\partial w_{i,q} / \partial x_{i,q+1} = 0$ ，故 $\partial(f_{i,q}(x_{i,q}, x_{i,q+1}) + w_{i,q}) / \partial x_{i,q+1} > b_i > 0$ ，则存在一个光滑理想控制输入 $x_{i,q+1} = \alpha_{i,q}^*(x_{i,q}, w_{i,q})$ 使得：

$$f_{i,q}(\bar{x}_{i,q}, \alpha_{i,q}^*) + w_{i,q} = 0 \quad (5.21)$$

成立。由中值定理可知，存在某未知正常数 $g_{\mu i,q} = g_{i,q}(x_{i,q}, x_{\mu i,q})$ ，其中 $x_{\mu i,q} = \mu_{i,q} x_{i,q+1} + (1 - \mu_{i,q}) \alpha_{i,q}^*$ ， $0 < \mu_{i,q} < 1$ ，使得：

$$f_{i,q}(\bar{x}_{i,q}, x_{i,q+1}) = f_{i,q}(\bar{x}_{i,q}, \alpha_{i,q}^*) + g_{\mu i,q}(x_{i,q+1} - \alpha_{i,q}^*) \quad (5.22)$$

成立。将式(5.21)和式(5.22)代入式(5.20)中，并利用 RBF 神经网络(5.6)来近似 $\alpha_{i,q}^*$ ，得到：

$$\begin{aligned} \dot{V}_{eq} &= \sum_{i=1}^N e_{i,q} [g_{\mu i,q}(x_{i,q+1} - \alpha_{i,q}^*) + d_{i,q}(\bar{x}_{i,q}, t) - w_{i,q} - \dot{\alpha}_{i,qf}] \\ &= \sum_{i=1}^N [g_{\mu i,q} e_{i,q} (x_{i,q+1} - W_{i,q}^{*T} \phi_{i,q}(Z_{i,q}) - \delta_{i,q}(Z_{i,q})) \\ &\quad + e_{i,q} d_{i,q}(\bar{x}_{i,q}, t) - e_{i,q} w_{i,q} - e_{i,q} \dot{\alpha}_{i,qf}] \end{aligned} \quad (5.23)$$

定义 $w_{i,q}$ 如下：

$$w_{i,q} = \frac{e_{i,q} (d_{i,q}^{\max}(\bar{x}_{i,q}))^2}{2a_{i,q}^2} + g_{\mu i,q-1} e_{i,q-1} - \dot{\alpha}_{i,qf} \quad (5.24)$$

其中 $a_{i,q} > 0$ 为常数，并将 $w_{i,q}$ 代入式(5.23)中，则得：

$$\dot{V}_{eq} \leq \sum_{i=1}^N [g_{\mu i,q} e_{i,q} (x_{i,q+1} - W_{i,q}^{*T} \phi_{i,q}(Z_{i,q}) - \delta_{i,q}(Z_{i,q})) + \frac{a_{i,q}^2}{2} - g_{\mu i,q-1} e_{i,q-1} e_{i,q}] \quad (5.25)$$

再次应用 Young's 不等式，我们得到：

$$\begin{aligned} -g_{\mu i,q} e_{i,q} W_{i,q}^{*T} \phi_{i,q}(Z_{i,q}) &\leq \frac{\|W_{i,q}^*\|^2}{2\eta_{i,q}^2} \phi_{i,q}(\cdot)^T \phi_{i,q}(\cdot) e_{i,q}^2 + \frac{c_i^2 \eta_{i,q}^2}{2} \\ -g_{\mu i,q} e_{i,q} \delta_{i,q}(Z_{i,q}) &\leq \frac{c_i h \varepsilon_{i,q}^{\frac{1+h}{h}}}{(1+h)[(1+h)k_{i,q1}]^{\frac{1}{h}}} + g_{\mu i,q} k_{i,q1} e_{i,q}^{1+h} \end{aligned} \quad (5.26)$$

令 $\chi_{i,q} = b_i^{-1} \|W_{i,q}^*\|^2$ ，则可得下式：

$$\begin{aligned} \dot{V}_{eq} &\leq \sum_{i=1}^N [g_{\mu i,q} e_{i,q} x_{i,q+1} + \frac{b_i \chi_{i,q}}{2\eta_{i,q}^2} \phi_{i,q}(\cdot)^T \phi_{i,q}(\cdot) e_{i,q}^2 \\ &\quad + g_{\mu i,q} k_{i,q1} e_{i,q}^{1+h} + \zeta_{i,q} - g_{\mu i,q-1} e_{i,q-1} e_{i,q}] \end{aligned} \quad (5.27)$$

其中 $\zeta_{i,q} = \frac{c_i^2 \eta_{i,q}^2}{2} + \frac{c_i h \varepsilon_{i,q}^{\frac{1+h}{h}}}{(1+h)[(1+h)k_{i,q1}]^{\frac{1}{h}}} + \frac{a_{i,q}^2}{2}$ 。

下面构造第 q ($q=2, \dots, n-1$) 部分 Lyapunov 函数如下：

$$V_q = V_{q-1} + V_{eq} \quad (5.28)$$

通过合并式(5.16)和式(5.27)，则得到 V_q 的导数如下：

$$\begin{aligned} \dot{V}_q &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^q [g_{\mu i,m} e_{i,m} x_{i,m+1} + \frac{b_i \chi_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2} \phi_{i,m}(\cdot)^T \phi_{i,m}(\cdot) e_{i,m}^2 \\ &\quad + g_{\mu i,m} k_{i,m1} e_{i,m}^{1+h} + \zeta_{i,m}] - \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{q-1} g_{\mu i,m} e_{i,m} e_{i,m+1} \end{aligned} \quad (5.29)$$

构造基于神经网络的虚拟控制 $\alpha_{i,q}$ 如下：

$$\alpha_{i,q} = -k_{i,q}e_{i,q}^h - k_{i,q0}e_{i,q}^{1/h} - \frac{\hat{\chi}_{i,q}}{2\eta_{i,q}^2}\phi_{i,q}(\cdot)^T\phi_{i,q}(\cdot)e_{i,q} \quad (5.30)$$

其中 $k_{i,q} = k_{i,q1} + k_{i,q2} > 0$, $k_{i,q0} > 0$ 和 $\eta_{i,q} > 0$ 为设计参数, 并且 $k_{i,q1} > 0$ 和 $k_{i,q2} > 0$ 。我们通过如下一阶虚拟分数阶滤波器来获得 $\alpha_{i,(q+1)f}$ 函数:

$$\epsilon_{i,q+1}\dot{\alpha}_{i,(q+1)f} = (\alpha_{i,2} - \alpha_{i,(q+1)f})^h, \quad \alpha_{i,(q+1)f}(0) = \alpha_{i,q}(0) \quad (5.31)$$

其中 $\epsilon_{i,q+1}$ 为时间常数。

第 n 步: 构造第 n 部分 Lyapunov 候选函数如下:

$$V_n = V_{n-1} + V_{en} \quad (5.32)$$

其中 $e_{i,n} = x_{i,n} - \alpha_{i,nf}$, $V_{en} = \sum_{i=1}^N \frac{e_{i,n}^2}{2}$ 。依照类似第 q ($q = 2, \dots, n-1$) 步中的证明过程, 我们可以得到 V_n 的导数如下:

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} g_{\mu i,m} e_{i,m} x_{i,m+1} + g_{\mu i,n} e_{i,n} u_i + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \left(\frac{b_i \chi_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2} \phi_{i,m}(\cdot)^T \phi_{i,m}(\cdot) e_{i,m}^2 \right. \\ & \left. + g_{\mu i,m} k_{i,m1} e_{i,m}^{1+h} + \zeta_{i,m} \right) - \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} g_{\mu i,m} e_{i,m} e_{i,m+1} \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$\text{其中 } \zeta_{i,m} = \frac{c_i^2 \eta_{i,m}^2}{2} + \frac{c_i h \epsilon_{i,m}^{\frac{1+h}{h}}}{(1+h)[(1+h)k_{i,m}^1]^{\frac{1}{h}}} + \frac{a_{i,m}^2}{2}。$$

构造基于神经网络的实际控制 u_i 如下:

$$u_i = -k_{i,n}e_{i,n}^h - \frac{\hat{\chi}_{i,n}}{2\eta_{i,n}^2}\phi_{i,n}(\cdot)^T\phi_{i,n}(\cdot)e_{i,n} \quad (5.34)$$

其中 $k_{i,n} = k_{i,n1} + k_{i,n2}$ ($k_{i,n1} > 0$ 和 $k_{i,n2} > 0$), $\eta_{i,n} > 0$ 都为自由设计参数。

到这一步为止, 我们已经完成了控制器设计过程。下面我们将进行稳定性分析。给出自适应律如下:

$$\dot{\hat{\chi}}_{i,m} = -\sigma_{i,m}\hat{\chi}_{i,m}^h + \frac{\gamma_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2}\phi_{i,m}(\cdot)^T\phi_{i,m}(\cdot)e_{i,m}^2, \quad m = 1, \dots, n \quad (5.35)$$

其中 $\sigma_{i,m} > 0$ 和 $\gamma_{i,m} > 0$ 为自由设计参数。定义边界面误差如下:

$$\varrho_{i,m+1} = \alpha_{i,(m+1)f} - \alpha_{i,m}, \quad m = 1, \dots, n-1 \quad (5.36)$$

故由一阶分数阶虚拟误差 $\alpha_{i,(m+1)f}$ 的定义, 我们可以得到如下关系:

$$\dot{\alpha}_{i,(m+1)f} = \frac{(\alpha_{i,m} - \alpha_{i,(m+1)f})^h}{\epsilon_{i,m+1}} = -\frac{\varrho_{i,m+1}^h}{\epsilon_{i,m+1}} \quad (5.37)$$

故令 $q = m$, 则可直接从式(5.36), (5.37)和式(5.30)中得:

$$\begin{aligned} \dot{\varrho}_{i,m+1} = & -\frac{\varrho_{i,m+1}^h}{\epsilon_{i,m+1}} + k_{i,m}e_{i,m}^{h-1}\dot{e}_{i,m} + k_{i,m0}e_{i,m}^{1/h-1}\dot{e}_{i,m} + \frac{\dot{\hat{\chi}}_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2}\phi_{i,m}(Z_{i,m})^T\phi_{i,m}(Z_{i,m})e_{i,m} \\ & + \frac{\hat{\chi}_{i,m}}{\eta_{i,m}^2}\left(\frac{\partial\phi_{i,m}(Z_{i,m})}{\partial Z_{i,m}^T}\dot{Z}_{i,m}\right)^T\phi_{i,m}(Z_{i,m})e_{i,m} + \frac{\hat{\chi}_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2}\phi_{i,m}(Z_{i,m})^T\phi_{i,m}(Z_{i,m})\dot{e}_{i,m} \end{aligned} \quad (5.38)$$

由前面的控制器设计过程中可以看出，控制率 $\alpha_{i,m}$ 为关于变量 $e_{i,1}, \dots, e_{i,m}$ 和 $\hat{\chi}_{i,1}, \dots, \hat{\chi}_{i,m}$ 的函数。由边界面误差 $\varrho_{i,m}$ ，式(5.3)可以重新写为如下形式：

$$e_{i,1} = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(y_i - y_j), \quad i \in \mathcal{F} \quad (5.39)$$

$$e_{i,m} = x_{i,m} - \varrho_{i,m} - \alpha_{i,m-1}, \quad i \in \mathcal{F}, \quad m = 2, \dots, n$$

由此可看出 $x_{i,m+1}$ 为关于变量 $e_{i,1}, \dots, e_{i,m+1}, \hat{\chi}_{i,1}, \dots, \hat{\chi}_{i,m}$ 以及 $\varrho_{i,2}, \dots, \varrho_{i,m+1}$ 的函数，意味着：

$$\dot{e}_{i,m} = J_{i,m}(e_{i,1}, \dots, e_{i,m+1}, \hat{\chi}_{i,1}, \dots, \hat{\chi}_{i,m}, \varrho_{i,2}, \dots, \varrho_{i,m+1}) \quad (5.40)$$

其中 $J_{i,m}(\cdot)$ 为一连续函数，并进一步由式(5.38)，(5.40)和式(5.35)得到：

$$|\dot{\varrho}_{i,m+1} + \frac{\varrho_{i,m+1}^h}{\epsilon_{i,m+1}}| \leq H_{i,m+1}(e_{i,1}, \dots, e_{i,m+1}, \hat{\chi}_{i,1}, \dots, \hat{\chi}_{i,m}, \varrho_{i,2}, \dots, \varrho_{i,m+1}) \quad (5.41)$$

其中 $m = 1, \dots, n-1$ ， $H_{i,m+1}(\cdot)$ 是某个正连续函数。

下面构造 Lyapunov 候选函数如下：

$$V = V_n + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{b_i \tilde{\chi}_{i,m}^2}{2\gamma_{i,m}} + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{\varrho_{i,m+1}^2}{2} \quad (5.42)$$

通过应用式(5.33)，(5.39)以及式(5.41)可得到 V 的导数如下：

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} g_{\mu i, m} e_{i,m} (e_{i,m+1} + \varrho_{i,m+1} + \alpha_{i,m}) + g_{\mu i, n} e_{i,n} u_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \left(\frac{b_i \chi_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2} \phi_{i,m}(\cdot)^T \phi_{i,m}(\cdot) e_{i,m}^2 + g_{\mu i, m} k_{i,m1} e_{i,m}^{1+h} + \zeta_{i,m} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} g_{\mu i, m} e_{i,m} e_{i,m+1} + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{b_i \tilde{\chi}_{i,m}}{\gamma_{i,m}} (-\dot{\hat{\chi}}_{i,m}) + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} (\varrho_{i,m+1} \dot{\varrho}_{i,m+1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} g_{\mu i, m} e_{i,m} \varrho_{i,m+1} + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} g_{\mu i, m} e_{i,m} \alpha_{i,m} + g_{\mu i, n} e_{i,n} u_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \left(\frac{b_i \chi_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2} \phi_{i,m}(\cdot)^T \phi_{i,m}(\cdot) e_{i,m}^2 + g_{\mu i, m} k_{i,m1} e_{i,m}^{1+h} + \zeta_{i,m} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{b_i \tilde{\chi}_{i,m}}{\gamma_{i,m}} (-\dot{\hat{\chi}}_{i,m}) + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} \left(-\frac{\varrho_{i,m+1}^{1+h}}{\epsilon_{i,m+1}} + |\varrho_{i,m+1}| H_{i,m+1} \right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

其中我们用到了关系式 $\varrho_{i,m+1} \dot{\varrho}_{i,m+1} \leq -\frac{\varrho_{i,m+1}^{1+h}}{\epsilon_{i,m+1}} + |\varrho_{i,m+1}| H_{i,m+1}$ 。

由式(5.35)给出的 $\dot{\hat{\chi}}_{i,m}$ 的定义可知，对 $\forall t \geq t_0$ ，如果 $\hat{\chi}_{i,m}(t_0) \geq 0$ ，则 $\hat{\chi}_{i,m}(t) \geq 0$ 。因此，通过应用由式(5.17)和(5.30)给出的虚拟控制 $\alpha_{i,m}$ 以及式(5.34)给出的实际控制输入 u_i ，我们得到如下不等关系式：

$$\begin{aligned} g_{\mu i, m} e_{i, m} \alpha_{i, m} &\leq -k_{i, m1} g_{\mu i, m} e_{i, m}^{1+h} - b_i k_{i, m2} e_{i, m}^{1+h} \\ &\quad - k_{i, m0} g_{\mu i, m} e_{i, m}^{1+\frac{1}{h}} - \frac{b_i \hat{\chi}_{i, m}}{2\eta_{i, m}^2} \phi_{i, m}(\cdot)^T \phi_{i, m}(\cdot) e_{i, m}^2 \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$g_{\mu i, n} e_{i, n} u_i \leq -k_{i, n1} g_{\mu i, n} e_{i, n}^{1+h} - b_i k_{i, n2} e_{i, n}^{1+h} - \frac{b_i \hat{\chi}_{i, n}}{2\eta_{i, n}^2} \phi_{i, n}(\cdot)^T \phi_{i, n}(\cdot) e_{i, n}^2$$

将式(5.44)代入式(5.43)，并应用由式(5.35)给出的自适应律 $\dot{\hat{\chi}}_{i, m}$ 得：

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} g_{\mu i, m} e_{i, m} \varrho_{i, m+1} - k_{i, m0} g_{\mu i, m} e_{i, m}^{1+\frac{1}{h}} - \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n b_i k_{i, m2} e_{i, m}^{1+h} + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \zeta_{i, m} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{b_i \tilde{\chi}_{i, m}}{\gamma_{i, m}} \left(\frac{\gamma_{i, m}}{2\eta_{i, m}^2} \phi_{i, m}(\cdot)^T \phi_{i, m}(\cdot) e_{i, m}^2 - \dot{\hat{\chi}}_{i, m} \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} \left(-\frac{\varrho_{i, m+1}^{1+h}}{\epsilon_{i, m+1}} + |\varrho_{i, m+1}| H_{i, m+1} \right) \\ &\leq -\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n b_i k_{i, m2} e_{i, m}^{1+h} + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \zeta_{i, m} + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{b_i \sigma_{i, m} \tilde{\chi}_{i, m} \hat{\chi}_{i, m}^h}{\gamma_{i, m}} \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} \left(-\frac{\varrho_{i, m+1}^{1+h}}{\epsilon_{i, m+1}} + |\varrho_{i, m+1}| H_{i, m+1} + \frac{(\frac{1+h}{h} k_{i, m0})^h c_i}{1+h} \varrho_{i, m+1}^{1+h} \right) \end{aligned} \quad (5.45)$$

通过应用引理 4.1，引理 3.2 以及引理 3.3，我们得到如下关系式：

$$\tilde{\chi}_{i, m} \hat{\chi}_{i, m}^h \leq \frac{1}{1+h} (2^{(h-1)(h+1)} - 2^{h-1}) \tilde{\chi}_{i, m}^{1+h} + \frac{1}{1+h} (1 - 2^{h-1} + \frac{h}{1+h} + \frac{2^{(h-1)(1-h)(1+h)}}{1+h}) \chi_{i, m}^{1+h} \quad (5.46)$$

基于 DSC 技术^[150]，考虑如下集合：

$$\Omega_{i, m} = \{e_{i, 1}^{1+h} + (b_i \tilde{\chi}_{i, 1}^{1+h}) / \gamma_{i, 1} + \sum_{q=2}^m (\varrho_{i, q}^{1+h} + e_{i, q}^{1+h} + (b_i \tilde{\chi}_{i, q}^{1+h}) / \gamma_{i, q}) \leq 2\mu\}$$

由于 $\Omega_{i, m}$ 为空间 \Re^{3m-1} 中的紧集，其中包含了变量 $e_{i, 1}, \dots, e_{i, m}$ ； $\hat{\chi}_{i, 1}, \dots, \hat{\chi}_{i, m}$ 以及 $\varrho_{i, 2}, \dots, \varrho_{i, m}$ ， $m=2, \dots, n$ ，由式(5.41)不难看出，连续函数 $H_{i, m+1}(\cdot)$ 中的所有变量都在紧集 $\Omega_{i, m}$ 内，因此存在 $H_{i, m+1}(\cdot)$ 的一个最大值 $N_{i, m}$ ，使得 $|H_{i, m+1}(\cdot)| \leq N_{i, m}$ 。通过应用 Young's 不等式，我们得到：

$$|\varrho_{i, m+1}| H_{i, m+1} \leq \lambda_i \varrho_{i, m+1}^{1+h} + \frac{h N_{i, m+1}^{\frac{1+h}{h}}}{(1+h)[(1+h)\lambda_i]^{\frac{1}{h}}} \quad (5.47)$$

通过选择 $1/\epsilon_{i, m+1} = \lambda_i + \frac{(\frac{1+h}{h} k_{i, m0})^h c_i}{1+h} + \epsilon_{i, m+1}^*$ ($m=1, \dots, n-1$)，并且将式(5.46)和式

(5.47)代入式(5.45)中，我们可以将 \dot{V} 重新表示如下：

$$\dot{V} \leq -\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n b_i k_{i, m2} e_{i, m}^{1+h} - \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} \epsilon_{i, m+1}^* \varrho_{i, m+1}^{1+h} - \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{b_i \sigma_{i, m} (2^{h-1} - 2^{(h-1)(h+1)})}{\gamma_{i, m} (1+h)} \tilde{\chi}_{i, m}^{1+h} + \varsigma \quad (5.48)$$

其中

$$\begin{aligned} \varsigma = & \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \zeta_{i,m} + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h N_{i,m+1}^{\frac{1+h}{h}}}{(1+h)[(1+h)\lambda_i]^{\frac{1}{h}}} \\ & + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{b_i \sigma_{i,m} (1 - 2^{h-1} + \frac{h}{1+h} + \frac{2^{(h-1)(1-h)(1+h)}}{1+h})}{\gamma_{i,m} (1+h)} \chi_{i,m}^{1+h} \end{aligned} \quad (5.49)$$

注意到 $(2^{h-1} - 2^{(h-1)(h+1)}) > 0$ 。令

$$k_d = \min \{ b_i k_{i,m+1}, \frac{b_i \sigma_{i,m} (2^{h-1} - 2^{(h-1)(h+1)})}{\gamma_{i,m} (1+h)} \} \quad (5.50)$$

则式(5.48)可进一步表示为:

$$\dot{V}(t) \leq -k_d \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n e_{i,m}^{1+h} - k_d \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} \varrho_{i,m+1}^{1+h} - k_d \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \tilde{\chi}_{i,m}^{1+h} + \varsigma \quad (5.51)$$

下面我们证明, 存在一个有限时间 $T^* > 0$ 以及一个有界常数 $0 < \xi < \infty$, 从而当 $t \geq T^*$ 时, 有 $V(t) < \xi$ 成立。

注意到:

$$V(t) \leq k_v (\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n e_{i,m}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} \varrho_{i,m+1}^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \tilde{\chi}_{i,m}^2) \quad (5.52)$$

故可得:

$$V^{\frac{1+h}{2}}(t) \leq k_v^{\frac{1+h}{2}} (\sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n e_{i,m}^{1+h} + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} \varrho_{i,m+1}^{1+h} + \sum_{i=1}^N \sum_{m=1}^n \tilde{\chi}_{i,m}^{1+h}) \quad (5.53)$$

其中

$$k_v = \max \{ \lambda_{\max}(L_1^{-1}), \frac{1}{2}, \frac{b_i}{2\gamma_{i,m}} \} \quad (5.54)$$

令 $\tilde{c} = \eta_1 k_d / k_v^{\frac{1+h}{2}}$, 其中 k_d 和 k_v 分别由式(5.50)和式(5.54)给出, $0 < \eta_1 \leq 1$ 。故由式(5.51)和式(5.53)可得:

$$\dot{V}(t) \leq -\tilde{c} V^{\frac{2h}{1+h}}(t) + \varsigma \quad (5.55)$$

令 $\Delta = \{x : V(t) < (\frac{\varsigma}{\eta_2 \tilde{c}})^{\frac{2}{1+h}}, 0 < \eta_2 < 1\}$ 。根据文献[14]中的定理 5.2 可知, 对任意 $x \notin \Delta$

以及对所有的 $t \in [0, t_x]$, 有 $V(t) \geq (\varsigma / \eta_2 \tilde{c})^{\frac{2}{1+h}}$ 成立, 即 $\varsigma \leq \eta_2 \tilde{c} V^{\frac{1+h}{2}}(t)$ 。结合式(5.55), 则对所有的 $t \in [0, t_x]$, 成立:

$$\dot{V}(t) \leq -\tilde{c} V^{\frac{1+h}{2}}(t) + \eta_2 \tilde{c} V^{\frac{1+h}{2}}(t) = -(1 - \eta_2) \tilde{c} V^{\frac{1+h}{2}}(t) \quad (5.56)$$

成立。注意到对所有的 $t \in [0, t_x]$, 有 $V(t) \geq (\varsigma / \eta_2 \tilde{c})^{\frac{2}{1+h}} > 0$, 故由式(5.56)可得

$$t_x < \frac{V(t_0)^{1-\frac{1+h}{2}}}{(1-\eta_2)\tilde{c}(1-\frac{1+h}{2})}。因此, 对 \forall t \geq T^*, 其中 T^* 满足:$$

$$T^* \leq \frac{V(t_0)^{1-\frac{1+h}{2}}}{(1-\eta_2)\tilde{c}(1-\frac{1+h}{2})} \quad (5.57)$$

有下式成立

$$V(t) < \left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \tilde{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}} = \xi \quad (5.58)$$

下面，我们给出所有智能体稳态误差的估计值。

注意到：

$$\begin{aligned} \|E\| &\leq \sqrt{2\lambda_{\min}^{-1}((\mathcal{L} + \mathcal{L}_0)^{-1})V_1(t)} \leq \sqrt{2\lambda_{\min}^{-1}((\mathcal{L} + \mathcal{L}_0)^{-1})V(t)} \\ &\leq \sqrt{2\lambda_{\min}^{-1}((\mathcal{L} + \mathcal{L}_0)^{-1})\left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \tilde{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}}} \end{aligned} \quad (5.59)$$

令 $E_m = [e_{1,m}, \dots, e_{N,m}]^T$ ， $\varrho_m = [\varrho_{1,m}, \dots, \varrho_{N,m}]^T$ ($m = 2, \dots, n$)，以及 $\tilde{\chi}_m = [\tilde{\chi}_{1,m}, \dots, \tilde{\chi}_{N,m}]^T$ ($m = 1, \dots, n$)，则得到：

$$\begin{aligned} \|E_m\| &\leq \sqrt{2V_{em}(t)} \leq \sqrt{2V(t)} \leq \sqrt{2\left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \tilde{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}}}, \quad m = 2, \dots, n \\ \|\tilde{\chi}_m\| &\leq \sqrt{\frac{2\gamma_{\max}}{b_{\min}}V(t)} \leq \sqrt{\frac{2\gamma_{\max}}{b_{\min}}\left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \tilde{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}}}, \quad m = 1, \dots, n \\ \|\varrho_m\| &\leq \sqrt{2V(t)} \leq \sqrt{2\left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \tilde{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}}}, \quad m = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.60)$$

其中 $b_{\min} = \min\{b_i\}$ ， $\gamma_{\max} = \max\{\gamma_{i,m}\}$ 。

故在所设计控制率(5.34)-(5.35)以及各阶虚拟控制器 $\alpha_{i,m}$ ($m = 1, \dots, n-1$) 下，各阶误差在有限时间 T^* 内收敛到如下小区域：

$$\begin{aligned} \Theta_0 &= \{\|E\| \leq \sqrt{2\lambda_{\min}^{-1}((\mathcal{L} + \mathcal{L}_0)^{-1})\left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \tilde{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}}}, \\ \|E_m\| &\leq \sqrt{2\left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \tilde{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}}}, \|\varrho_m\| \leq \sqrt{2\left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \tilde{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}}}, m = 2, \dots, n\} \end{aligned} \quad (5.61)$$

以及参数估计误差在有限时间 T^* 收敛到如下小区域 Θ_1 之内，其中

$$\Theta_1 = \{\|\tilde{\chi}_m\| \leq \sqrt{\frac{2\gamma_{\max}}{b_{\min}}\left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \tilde{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}}}, m = 1, 2, \dots, n\} \quad (5.62)$$

值得提出的是所设计的各阶虚拟控制器 $\alpha_{i,1}$ ， $\alpha_{i,m}$ ， $m = 2, \dots, n-1$ （由式(5.30)给出）以及实际制率 u_i ，都含有分数阶函数 $e_{i,m}^h$ ($0 < h < 1$)，这会导致在式(5.38)中出现形如 $e_{i,m}^{h-1}\dot{e}_{i,m} = \frac{\dot{e}_{i,m}}{e_{i,m}^{1-h}}$ 的项。然而，这一项在 $e_{i,m} = 0$ 的时候是没有定义的。故我们

给出如下修正控制算法来避免这一问题。该修正算法具有如下形式：

$$\begin{aligned}\alpha_{i,m} &= -k_{i,m} e_{i,m}^{h(e_{i,m})} - k_{i,m0} e_{i,m}^{1/h(e_{i,m})} - \frac{\hat{\chi}_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2} \phi_i(\cdot)^T \phi_i(\cdot) e_{i,m}, \quad m=1, \dots, n-1 \\ u_i &= -k_{i,n} e_{i,n}^{h(e_{i,n})} - \frac{\hat{\chi}_{i,n}}{2\eta_{i,n}^2} \phi_i(\cdot)^T \phi_i(\cdot) e_{i,n}\end{aligned}\quad (5.63)$$

其自适应律为:

$$\dot{\hat{\chi}}_{i,m} = -\sigma_{i,m} \hat{\chi}_{i,m}^{h(e_{i,m})} + \frac{\gamma_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2} \phi_i(\cdot)^T \phi_i(\cdot) e_{i,m}^2, \quad m=1, \dots, n \quad (5.64)$$

在上式(5.63)和式(5.64)中, $h(e_{i,m})$ 定义如下:

$$h(e_{i,m}) = \begin{cases} \frac{2s-1}{2s+1}, & e_{i,m} \notin \bar{\Theta} \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \quad (5.65)$$

其中 $\bar{\Theta} \subseteq \Theta_0$, 具体由下式给出:

$$\bar{\Theta} = \{e_{i,m} \in \Theta_0 \mid |e_{i,m}| < \iota, \iota > 0 \text{ 为一个小常数}\} \quad (5.66)$$

由以上分析可知, 当 $h = \frac{2s-1}{2s+1}$ 时, 稳态误差在控制算法(5.63)-(5.64)下将保持在紧集 Θ_0 内。即, 一旦误差 $e_{i,m}$ 脱离了紧集 $\bar{\Theta}$, i.e., $|e_{i,m}| \geq \iota$, 则基于分数阶 $0 < h < 1$ 的有限时间控制算法将会启用并发挥作用, 使得 $e_{i,m}$ 在有限时间 T^* 之内收敛到紧集 Θ_0 内。这意味着误差 $e_{i,m}(t)$ 在所设计控制算法(5.63)-(5.64)下在有限时间内进入紧集 Θ_0 , 并将一直保持在该紧集内。

综合以上的稳定性分析, 我们得到本节的主要结果。

定理 5.1 考虑一组由式(5.1)描述的动态多智能体系统, 假设 5.1-5.4 中条件成立。在所设计神经自适应一致性控制算法(5.63)-(5.64)下, 对任意满足 $\hat{\chi}_{i,m}(t_0) \geq 0$, $V(t_0) \leq \mu$ ($\mu > 0$ 为一有界常数)的初始条件, 一致性误差在有限时间 T^* (由式(5.57)给出)之内收敛到一个任意可调的紧集 Θ_0 (由式(5.61)给出)内, 并且系统内所有的信号都半整体一致最终有界的。

注 5.3 值得注意的是所设计的控制算法(5.63)-(5.64)中含有一个关键的设计参数 h 。从式(5.65)中可以看出, h 并不总是整数, 也就是说, 所设计的控制算法是一个基于分数阶反馈的控制, 而不是基于一般状态反馈的控制。正是这种特殊的构造, 使得复杂高阶纯反馈系统(5.1)在有限时间内实现一定精度范围内一致。

注 5.4 注意到, 对于由式(5.57)所定义的有限时间 T^* , 可以通过调节设计参数使得 k_v^{1+h}/k_d 变小, 即使 k_v 变小或使 k_d 增大, 从而使 T^* 变小; 对于稳态误差所收敛到的紧集 Θ_0 , 则可以通过调节设计参数使 $\zeta k_v^{1+h}/k_d$ 变小, 即使 k_v 或 ζ 变小或使 k_d 增大, 从而使得 Θ_0 的最大界变小。通过分别检查 k_v , k_d 以及 ζ 的定义, 可以观察到增大 $k_{i,m2}$ 和 $\sigma_{i,m}$ 会导致 k_d 增大; 增大 $\gamma_{i,m}$ 会导致 k_v 减小; 增大 λ_i 和 $\gamma_{i,m}$, 减小 $\sigma_{i,m}$, 会

导致 ς 变小。另外增大参数 $\sigma_{i,m}$ ，自适应律 $\hat{\chi}_{i,m}$ 会变得更快速。然而，在实际中，在控制精度以及收敛平滑度之间应该取一个平衡。上述分析令如何选择合适的控制参数使得收敛时间 T^* 变小，并且同时使得误差收敛精度 Θ_0 变小，变得清晰明了。

5.2.4 与一般线性反馈非有限时间方法的对比分析

注意到如果令分数阶指数 $h=1$ ，则上一节所设计的有限时间控制算法(5.63)-(5.64)相应变为一般非有限时间控制算法，且收敛结果为一般一致最终有界收敛。

下面给出在一般非有限时间控制算法下的控制结果。

定理 5.2 考虑相同的高阶纯反馈多智能体系统(5.1)。在假设 5.1-5.4 成立条件下，若应用如下控制算法：

$$\begin{aligned}\alpha_{i,m} &= -k_{i,m}e_{i,m} - \frac{\hat{\chi}_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2}\phi_i(\cdot)^T\phi_i(\cdot)e_{i,m}, \quad m=1,\dots,n-1 \\ u_i &= -k_{i,n}e_{i,n} - \frac{\hat{\chi}_{i,n}}{2\eta_{i,n}^2}\phi_i(\cdot)^T\phi_i(\cdot)e_{i,n}\end{aligned}\quad (5.67)$$

其自适应律为：

$$\dot{\hat{\chi}}_{i,m} = -\sigma_{i,m}\hat{\chi}_{i,m} + \frac{\gamma_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2}\phi_i(\cdot)^T\phi_i(\cdot)e_{i,m}^2, \quad m=1,\dots,n \quad (5.68)$$

则对任意满足 $\hat{\chi}_{i,m}(t_0) \geq 0$ ， $V(t_0) \leq \mu$ （ $\mu > 0$ 为一有界常数）的初始条件，一致性误差渐进收敛到一个紧集 Θ_2 内，其中

$$\Theta_2 = \{\|E\| \leq \sqrt{2\lambda_{\min}^{-1}(\mathcal{L}_1^{-1})\frac{\varsigma k_v}{\eta_2 k_d}}, \|E_m\| \leq \sqrt{\frac{2\varsigma k_v}{\eta_2 k_d}}, \|e_m\| \leq \sqrt{\frac{2\varsigma k_v}{\eta_2 k_d}}, m=2,\dots,n\} \quad (5.69)$$

并且参数估计误差收敛到如下紧集 Θ_3 之内：

$$\Theta_3 = \{\|\tilde{\chi}_m\| \leq \sqrt{\frac{2\gamma_{\max}\varsigma k_v}{b_{\min}\eta_2 k_d}}, m=1,2,\dots,n\} \quad (5.70)$$

其中式(5.69)和(5.70)中所涉及参数 ς ， k_v 以及 k_d 分别对应 $h=1$ 时的值。

证明：通过设置 $h=1$ 并且采用类似定理 5.1 中的证明步骤，可以得到如下关系式：

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{k_d}{k_v}V(t) + \varsigma \quad (5.71)$$

其中 k_d ， k_v 和 ς 分别对应定理 5.1 中相对应参数 $h=1$ 时的取值。定义 $\bar{\Delta} = \{x: V(t) < k_v\varsigma / \eta_2 k_d, 0 < \eta_2 < 1\}$ 。由于 $\varsigma \leq \eta_2 k_d V(t) / k_v$ ，故当 $x \notin \bar{\Delta}$ 时，由式(5.71)可得：

$$\begin{aligned}\dot{V}(t) &\leq -(k_d / k_v)V(t) + \eta_2 k_d V(t) / k_v \\ &\leq -(k_d / k_v)V(t) + \eta_2 k_d V(t) / k_v < 0\end{aligned}\quad (5.72)$$

故一旦 $x \notin \bar{\Delta}$ ，则有 $\dot{V}(t) < 0$ 。注意到 $\bar{\Delta}$ 为一个整体吸引集（因为 $\bar{\Delta}$ 是一个关于 Lyapunov 函数的集合），故系统状态一旦进入该集合，则将不会脱离它。

进一步，我们还可得出在对应 $h=1$ 的控制算法(5.67)-(5.68)下，系统稳态误差

以及参数估计误差分别渐进收敛到集合 Θ_2 和 Θ_3 中。

证明完毕。

注 5.5 在传统的非有限时间控制算法(5.67)-(5.68)中，可以通过选择足够大的控制增益 $k_{i,m}$ 来使得收敛域（ Θ_2 和 Θ_3 ）的最大界减小。然而，由于在实际系统控制中，会有控制输入饱和的限制，即控制增益 $k_{i,m}$ 不被允许选的太大。而用本章所设计的有限时间控制算法(5.63)-(5.64)，则可以通过选择合适的分数阶指数 h ，从而缩短收敛时间，提高控制精度，并增强抵抗外界干扰能力，而不用单纯靠无限制增大控制增益来使得控制精度提高。

注 5.6 本章中所得到的理论结果将在第八章第四节应用部分给出相应的仿真验证，在此就不再重复给出。

5.3 本章小结

本文针对高阶纯反馈非仿射多智能体系统，其中该系统不但含有非仿射动态，并且整个系统包含非匹配不确定性非线性项，在局部双向拓扑条件下，基于反衍控制设计思想以及归纳法思想，结合分数阶-动态面技术，Young's 不等式，以及 RBF 神经网络近似技术，设计出了基于神经网络，分数阶状态反馈以及分数阶自适应律的有限时间一致性协议，并且基于 Lyapunov 稳定性理论，给出了高阶纯反馈系统有限时间稳定的严格理论证明。本章的创新点主要在于：不同于目前所存在的针对高阶纯反馈多智能体系统分布式控制的结果，本章中所提出的控制算法在高阶多智能体系统受到未知非仿射动态因素以及非匹配不确定性因素影响的情况下，仍能保证其在有限时间内实现一致跟踪。

6 一阶线性多智能体系统的给定有限时间一致性控制

6.1 引言

在本章中，我们提出了一种新的给定有限时间稳定性（Pre-given finite time stable）分析理论，基于这种新的理论，解决了一阶线性多智能体系统给定有限时间一致性控制问题。给定有限时间稳定的前提是有限时间稳定(finite time stable)。不同于目前存在的大部分有限时间控制方法，本章中所提出的给定有限时间控制方法使得有限收敛时间不依赖于任何初值条件以及其他设计参数，因此可以提前统一给定，不受任何初始条件 and 设计参数的影响。更重要的是，本章中所给出的给定有限时间控制方法是基于一般的状态反馈，因此可以保证控制输入整体光滑有界，这和目前存在的有限时间控制方法，其中一部分是基于符号函数的控制方法（该方法是不连续控制），而另一部分是基于分数阶状态反馈的控制方法（该方法是连续但不整体光滑控制），都是极大不同的。在本章第二节中，我们针对无向连通拓扑条件下的一阶线性多智能体系统，设计出给定有限时间分布式一致控制器，保证了多智能体系统中所有多智能体在统一给定有限时间内达到平均一致，并结合仿真实例验证了所设计有限时间控制器的有效性。本章第三节针对含有一棵有向树的有向拓扑条件下的一阶线性多智能体系统，设计出给定有限时间分布式一致控制器，保证了多智能体系统中所有的智能体都在提前统一给定有限时间内与根智能体同步。

本章主要内容已投 IEEE Transactions on Automatic Control, 见攻读博士期间所取得主要学术成果[3]。

6.2 无向拓扑条件下一阶线性多智能体系统给定有限时间一致性控制

在本节中，我们首先给出通常情况下的有限时间控制方法，接着介绍新的给定有限时间稳定性理论，然后基于该理论设计出给定有限时间分布式一致控制器，并通过严格的理论分析，证明多智能体系统中所有多智能体在所设计控制器下能够在提前给定有限时间内实现一致，并且证明系统控制输入信号整体平滑有界。

6.2.1 问题描述以及研究背景

本章主要针对如下一阶线性多智能体系统：

$$\dot{x}_i = u_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (6.1)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^m$ 和 $u_i \in \mathbb{R}^m$ 分别代表系统状态和控制输入，根据新的有限时间稳定性理论，给出基于时变比例函数增益的平滑给定有限时间分布式控制设计方案。

用图 \mathcal{G} 代表多智能体系统(6.1)中所有智能体之间的网络通讯关系。

假设 6.1 通讯拓扑图 \mathcal{G} 是无向连通的。

如果一个控制输入 u_i ($i=1, \dots, N$) 解决了一个一致问题, 并且对于任何给定的初始状态, 都存在一个有限时间 T^* 和一个实常数 x^* , 使得对于所有的 $i=1, \dots, N$, 有, 当 $t \rightarrow T^*$ 时 $x_i \rightarrow x^*$, 当 $t \geq T^*$ 时 $x_i = x^*$, 成立, 则称该控制输入 u_i ($i=1, \dots, N$) 解决了一个有限时间一致性问题。更进一步, 如果 $x^* = \sum_{i=1}^N x_i(t_0) / N$, 则称其解决了有限时间平均一致性问题。

针对一阶系统的一般有限时间一致性协议具有如下形式^[58-59, 82-85]:

$$u_i = k \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \text{sign}(x_j - x_i) |x_j - x_i|^{\alpha_{ij}} \quad (6.2)$$

其中 $0 \leq \alpha_{ij} < 1$, 而 $k > 0$ 为要设计的控制增益。控制协议(6.2)涵盖了几种不同的情况: 当 $\alpha_{ij} = 1$ 时, 则为文献[17]中所提出的典型的渐进一致性控制协议; 当 $\alpha_{ij} = 0$ 时, 该控制协议对应文献[58]-[59]中所给出的基于符号函数的有限时间控制协议, 且是不连续的; 当 $0 < \alpha_{ij} < 1$ 时, 该控制协议对应文献[82]-[85]中所提出的基于分数阶状态反馈的有限时间控制协议, 并且是连续但不光滑的。值得一提的是, 当 $0 < \alpha_{ij} < 1$ 时, 所对应的有限收敛时间由如下不等式确定:

$$T^* = \frac{V(t_0)^{1-\alpha}}{\gamma(1-\alpha)} \quad (6.3)$$

其中 $\gamma > 0$ 是和一系列控制参数, 其中包括控制增益 k , 分数阶指数 α_{ij} 以及拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 的第二最小特征值 $\lambda_2(\mathcal{L})$ ($\lambda_2(\mathcal{L})$ 与整个系统的网络通讯结构有关), 有关的常数, α 与 α_{ij} 有关。对于有限收敛时间 T^* , 我们看到:

1) T^* 不仅仅取决于一系列设计参数, 其中包括控制增益 k , 分数阶指数 α_{ij} 以及 $\lambda_2(\mathcal{L})$, 并且还依赖于初始条件 $V(t_0)$;

2) 由式(6.3)可以看出, 增大 γ 或减小 α (可以分别通过增大控制增益 k 或减小分数阶指数 α_{ij} 得到) 可以得到相对小的 T^* , 但是当减小分数阶指数 α_{ij} 时, 相应的控制输入也会增大。

3) 如果多智能体系统需在一个指定的有限时间 T^* 内达到一致, 则需要由式(6.3) 确定出相应的 γ 和 α , 即确定出相应的设计参数 k 和 α_{ij} , 以及初始值 $V(t_0)$, 但这些控制参数 k 和 α_{ij} 以及 $V(t_0)$, 并不能由 T^* 得出其显性表达式, 原因是这些设计参数都是隐性包含在函数 T^* 中的。

6.2.2 控制器设计和稳定性分析

为了克服上一节所提到的困难, 本节首先提出新的给定有限时间稳定性理论, 之后根据此理论建立基于时变比例函数增益的给定有限时间一致性控制解。

首先引入一个重要的时变函数如下:

$$\mu_1(t) = \frac{T}{T + t_n - t}, \quad t \in [t_n, t_n + T) \quad (6.4)$$

其中 $t_{n+1} = t_n + T$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $T > 0$ 为一个有限时间常数。该时变函数具有如下性质: (i) μ_1^{-q} ($q > 0$) 在 $[t_n, t_n + T)$ 上递减; (ii) $\mu_1(t_n)^{-q} = 1$, $\lim_{t \rightarrow (t_n + T)^-} \mu_1(t)^{-q} = 0$ ($q > 0$)。

基于函数 $\mu_1(t)$, 接下来引入如下函数:

$$\mu(t) = \frac{T^h}{(T + t_n - t)^h} = \mu_1(t)^h \quad (6.5)$$

其中 $h > 2$ 是自由设计参数, $T > 0$ 为有限收敛时间。

引理 6.1 考虑如下动力系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f(0) = 0 \quad (6.6)$$

其中 $f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为定义于平衡点开邻域 D 上的一个连续函数。如果存在一个连续可微函数 $V: D \rightarrow \mathbb{R}$, 一个正常数 b , 以及 D 上的某个邻域 $\mathcal{U} \subset D$, 使得 V 在 \mathcal{U} 上正定, 并且满足:

$$\dot{V} = -bV - 2\frac{\dot{\mu}}{\mu}V, \quad t \in [t_n, t_n + T), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.7)$$

其中 $\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial x}(x)f(x, t)$, 则系统(6.6)的平衡点是给定有限时间稳定的, 并且其给定有限收敛时间为式(6.4)给定的 T 。若 $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, 则称系统(6.6)的平衡点是整体给定有限时间稳定的。另外, 有下式成立:

$$V(t) \leq \mu_1^{-2h} \exp^{-b(t-t_0)} V(t_0) \quad (6.8)$$

该式确保了系统(6.6)给定有限时间稳定。

证明: 对式(6.7)两边均乘以 μ^2 , 得到:

$$\mu^2 \dot{V} \leq -b\mu^2 V - 2\mu \dot{\mu} V \quad (6.9)$$

则

$$\frac{d(\mu^2 V)}{dt} = \mu^2 \dot{V} + 2\mu \dot{\mu} V \leq -b(\mu^2 V) \quad (6.10)$$

解微分不等式(6.10)即得:

$$\mu(t)^2 V(t) \leq \exp^{-b(t-t_0)} \mu(t_0)^2 V(t_0) = \exp^{-b(t-t_0)} V(t_0) \quad (6.11)$$

由式(6.11)则可得式(6.8)成立。由于 $\lim_{t \rightarrow (t_n + T)^-} \mu_1(t)^{-2h} = 0$, 故由式(6.8)可得

$\lim_{t \rightarrow (t_n + T)^-} V = 0$ 。又因为 V 是正定的且由式(6.7)得 \dot{V} 是负定的, 可知 V 李雅普诺夫稳定。

由此可知, 系统(6.6)是给定有限时间稳定^[151], 其固定收敛时间为 T 。

证明完毕。

引理 6.2 如果无向图 \mathcal{G} 是连通的, 若 $1_N^T X = 0$, 则有 $X^T \mathcal{L} X \geq \lambda_2(\mathcal{L}) X^T X$ 成立, 其中 $\lambda_2(\mathcal{L}) > 0$ 代表拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 的第二最小特征值。

定义局部误差如下：

$$e_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_i - x_j), \quad i = 1, \dots, N \quad (6.12)$$

令 $E = [e_1^T, \dots, e_N^T]^T \in \mathfrak{R}^{mN}$, $X = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T \in \mathfrak{R}^{mN}$, 则有 $E = (\mathcal{L} \otimes I_m)X$ 成立。

基于引理 6.1 中的给定有限时间稳定性理论, 设计如下分布式控制协议：

$$u_i = -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) e_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (6.13)$$

其中 $k > 0$ 为设计参数, $c \geq 1/\lambda_2(L)$ 。该控制协议具有如下紧集形式：

$$U = -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) E \quad (6.14)$$

其中 $U = [u_1^T, \dots, u_N^T]^T \in \mathfrak{R}^{mN}$ 。

设 $x^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t)$, 以及

$$\delta_i(t) = x_i(t) - x^*, \quad i = 1, \dots, N \quad (6.15)$$

其中 δ_i 代表第 i 个智能体的状态与平均状态之间的差值。记 $\delta = [\delta_1^T, \dots, \delta_N^T]^T \in \mathfrak{R}^{mN}$, 则下式成立：

$$\delta = X - (1_N \otimes I_m) \cdot \frac{1}{N} \cdot (1_N^T \otimes I_m) X \quad (6.16)$$

下面给出本节的主要结果。

定理 6.1 考虑假设 6.1 条件下的多智能体系统(6.1)。若应用控制率(6.13) ((6.14)), 则系统(6.1)给定有限时间稳定, 系统内所有智能体在有限时间 T 内达到平均一致, 并且对所有的 $t \in [t_0, t_0 + T)$, 成立：

$$\|\delta(t)\| \leq \mu_1(t)^{-h} \exp^{-k\lambda_2(L)(t-t_0)} \|\delta(t_0)\| \quad (6.17)$$

另外, 系统(6.1)在 $t \in [t_0 + T, \infty)$ 时仍然保持一致性, 控制输入 U 在该区间始终保持为 0, 并且 U 在整个时间区间 $[t_0, \infty)$ 上保持平滑且一致有界。

证明：我们首先证明系统(6.1)在有限时间 T 内达到平均一致, 然后证明系统在 $[t_0 + T, \infty)$ 上仍然保持一致并且 U 在 $[t_0 + T, \infty)$ 上保持为 0。故我们需要考虑两种情况： $t \in [t_0, t_0 + T)$ 和 $t \in [t_0 + T, \infty)$ 。

情况 1: $t \in [t_0, t_0 + T)$

选取 Lyapunov 候选函数如下：

$$V = \frac{1}{2} \delta^T \delta \quad (6.18)$$

通过应用式(6.14), 式(6.16)以及关系式 $\mathcal{L}1_N = 0_N$, 得到：

$$\begin{aligned} (1_N^T \otimes I_m) \dot{X} &= (1_N^T \otimes I_m) \left[-\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) (\mathcal{L} \otimes I_m) X \right] \\ &= -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) [(1_N^T \mathcal{L}) \otimes I_m] X = 0_{mN} \end{aligned} \quad (6.19)$$

由上式可得:

$$\dot{\delta} = \dot{X} - (1_N \otimes I_m) \cdot \frac{1}{N} \cdot (1_N^T \otimes I_m) \dot{X} = \dot{X} \quad (6.20)$$

故

$$\begin{aligned} & (\mathcal{L} \otimes I_m) \delta \\ &= (\mathcal{L} \otimes I_m) X - (\mathcal{L} \otimes I_m) (1_N \otimes I_m) \cdot \frac{1}{N} (1_N^T \otimes I_m) X \\ &= (\mathcal{L} \otimes I_m) X - [(\mathcal{L} 1_N) \otimes I_m] \cdot \frac{1}{N} (1_N^T \otimes I_m) X \\ &= (\mathcal{L} \otimes I_m) X \end{aligned} \quad (6.21)$$

根据式(6.20)和式(6.21)可得 V 的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \delta^T \dot{\delta} = \delta^T \dot{X} = \delta^T \left[-(k + c \frac{h}{T} \mu_1) (\mathcal{L} \otimes I_m) X \right] \\ &= -k \delta^T (\mathcal{L} \otimes I_m) \delta - c \frac{h}{T} \mu_1 \delta^T (\mathcal{L} \otimes I_m) \delta \\ &= -k \sum_{l=1}^m (\delta^l)^T \mathcal{L} \delta^l - c \frac{h}{T} \mu_1 \sum_{l=1}^m (\delta^l)^T \mathcal{L} \delta^l \end{aligned} \quad (6.22)$$

其中 $\delta^l = [\delta_{1l}, \dots, \delta_{Nl}]^T \in R^N$ ($l=1, \dots, m$)。注意到:

$$\begin{aligned} (1_N^T \otimes I_m) \delta &= (1_N^T \otimes I_m) \left[X - (1_N \otimes I_m) \cdot \frac{1}{N} (1_N^T \otimes I_m) X \right] \\ &= (1_N^T \otimes I_m) X - \frac{1}{N} [(1_N^T \cdot 1_N \cdot 1_N^T) \otimes I_m] X \\ &= (1_N^T \otimes I_m) X - (1_N^T \otimes I_m) X = 0_m \end{aligned} \quad (6.23)$$

由此易知:

$$1_N^T \delta^l = 0, \quad l=1, \dots, m \quad (6.24)$$

根据引理 6.2, 我们由式(6.24)以及式(6.22)中得到:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq -k \sum_{l=1}^m \lambda_2(\mathcal{L}) (\delta^l)^T \delta^l - c \frac{h}{T} \mu_1 \sum_{l=1}^m \lambda_2(\mathcal{L}) (\delta^l)^T \delta^l \\ &= -k \lambda_2(\mathcal{L}) \delta^T \delta - c \frac{h}{T} \mu_1 \lambda_2(\mathcal{L}) \delta^T \delta \end{aligned} \quad (6.25)$$

注意到 $c \geq 1/\lambda_2(\mathcal{L})$ 以及 $\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \frac{h}{T} \mu^{\frac{1}{h}} = \frac{h}{T} \mu_1$, 则由上式可得:

$$\dot{V} \leq -k \lambda_2(\mathcal{L}) \delta^T \delta - \frac{\dot{\mu}}{\mu} \delta^T \delta = -2k \lambda_2(\mathcal{L}) V - 2 \frac{\dot{\mu}}{\mu} V \quad (6.26)$$

故根据引理 6.1, 我们由上式可得出系统(6.1)是整体给定有限时间稳定的, 其中整体有限收敛时间为 T , 并且成立:

$$V(t) \leq \mu_1(t)^{-2h} \exp^{-2k\lambda_2(L)(t-t_0)} V(t_0) \quad (6.27)$$

故我们得到:

$$\|\delta(t)\|^2 \leq \mu_1(t)^{-2h} \exp^{-2k\lambda_2(L)(t-t_0)} \|\delta(t_0)\|^2 \quad (6.28)$$

并由此得出式(6.17)成立。由式(6.28)容易看出：

$$\|\delta(t)\| \rightarrow 0 \text{ 当 } t \rightarrow (t_0 + T)^- \quad (6.29)$$

即在提前给定有限时间 T 内系统(6.1)达到平均一致。

下面我们证明控制输入 U 是平滑并且一致有界的。

由式(6.21)以及式(6.17)可知：

$$\begin{aligned} \|E\| &= \|(\mathcal{L} \otimes I_m)X\| = \|(\mathcal{L} \otimes I_m)\delta\| \\ &\leq m\mu_1(t)^{-h} \exp^{-k\lambda_2(L)(t-t_0)} \|\mathcal{L}\| \|\delta(t_0)\| \in L_\infty \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} \|\mu_1 E\| &= \mu_1 \|(\mathcal{L} \otimes I_m)X\| = \mu_1 \|(\mathcal{L} \otimes I_m)\delta\| \\ &\leq m\mu_1^{-(h-1)} \exp^{-k\lambda_2(L)(t-t_0)} \|\mathcal{L}\| \|\delta(t_0)\| \in L_\infty \end{aligned} \quad (6.31)$$

故由式(6.14)可得：

$$\begin{aligned} \|U\| &\leq k\|E\| + c \frac{h}{T} \|\mu_1 E\| \\ &\leq \left(k\mu_1^{-1} + c \frac{h}{T} \right) m\mu_1^{-(h-1)} \exp^{-k\lambda_2(L)(t-t_0)} \|\mathcal{L}\| \|\delta(t_0)\| \in L_\infty \end{aligned} \quad (6.32)$$

成立，这意味着控制输入 U 在 $[t_0, t_0 + T)$ 上一致有界。

对 U 求导可得：

$$\begin{aligned} \dot{U} &= -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1 \right) \dot{E} - c \frac{h}{T} \dot{\mu}_1 E \\ &= \left(k + c \frac{h}{T} \mu_1 \right) (\mathcal{L} \otimes I_m) \left(k + c \frac{h}{T} \mu_1 \right) E - c \frac{h}{T} \frac{1}{T} \mu_1^2 E \\ &= \left(k^2 + 2kc \frac{h}{T} \mu_1 + c^2 \frac{h^2}{T^2} \mu_1^2 \right) (\mathcal{L}^2 \otimes I_m) X - c \frac{h}{T} \frac{1}{T} \mu_1^2 (\mathcal{L} \otimes I_m) X \end{aligned} \quad (6.33)$$

由上式很容易看出 \dot{U} 在 $[t_0, t_0 + T)$ 上是关于状态 X 和时间 t 连续 (C^0) 的，故 U 在 $[t_0, t_0 + T)$ 上关于 X 和 t 是平滑 (C^1) 的 (这属于平滑性定义的一部分)。

情况 2 $t \in [t_0 + T, \infty)$

我们证明系统(6.1)在时间区间 $[t_0 + T, \infty)$ 依然保持一致性，并且在该区间控制输入保持为 0。

当 $t \in [t_1, t_1 + T)$ 时，通过选择与 $t \in [t_0, t_0 + T)$ 时相同的 Lyapunov 函数， $V = \frac{1}{2} \delta^T \delta$ ，并且依据类似式(6.19)-(6.26)的证明步骤，容易得到下式成立：

$$\dot{V} \leq 0, \quad t \in [t_1, t_1 + T) \quad (6.34)$$

注意到：

$$V(t_1) = V(t_0 + T) = \lim_{t \rightarrow (t_0 + T)^-} \frac{1}{2} \delta^T \delta = 0 \quad (6.35)$$

故，当 $t \in [t_1, t_1 + T)$ 时，由式(6.34)和式(6.35)得到：

$$0 \leq V(t) \leq V(t_1) = 0 \quad (6.36)$$

这即意味着在 $[t_1, t_1 + T)$ 上 $V(t) \equiv 0$ 。故可得在 $[t_1, t_1 + T)$ 上 $\delta(t) \equiv 0_{mN}$ ，进而 $E \equiv 0_{mN}$ 。由 U 的定义，我们进而得出在 $[t_1, t_1 + T)$ 上 $U \equiv 0_{mN}$ 。类似可以推出在 $[t_n, t_n + T)$ ($n = 2, 3, \dots$) 上 $\delta(t) \equiv 0_{mN}$ 和 $U \equiv 0_{mN}$ 。故对所有的 $t \geq t_1 = t_0 + T$ ，有 $\delta(t) \equiv 0_{mN}$ 和 $U \equiv 0_{mN}$ 成立，这意味着在时间区间 $[t_0 + T, \infty)$ 上系统(6.1)依然保持一致性，并且在该区间控制输入保持为0。

下面我们仍需证明控制输入 U 在整个时间区间 $[t_0, \infty)$ 上是平滑的。由以上针对两种情况的分析可知，除了时间点 $t = t_0 + T$ 以外， U 在整个区间 $[t_0, \infty)$ 上都是平滑的。故我们只需证明 \dot{U} 在时间点 $t = t_0 + T$ 连续。

下面通过检查等式(6.33)右边的每一项来验证 \dot{U} 在时间点 $t = t_0 + T$ 处的连续性。注意到当 $t \rightarrow (t_0 + T)^-$ 时， $\mu_1^{-h} \rightarrow 0$ 以及 $\mu_1^{-(h-2)} \rightarrow 0$ ，并且 $\|\mu\delta(t)\| \in L_\infty$ ，故可得出当 $t \rightarrow (t_0 + T)^-$ 时，以下关系式成立：

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{L} \otimes I_m)E\| &= \|(\mathcal{L} \otimes I_m)(\mathcal{L} \otimes I_m)\delta\| = \mu^{-1}\|(\mathcal{L}^2 \otimes I_m)\mu\delta\| \\ &\leq \mu_1^{-h}\|(\mathcal{L}^2 \otimes I_m)\| \|\mu\delta\| \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (6.37)$$

$$\|\mu_1(\mathcal{L} \otimes I_m)E\| = \mu_1^{-(h-1)}\|(\mathcal{L}^2 \otimes I_m)\mu\delta\| \leq \mu_1^{-(h-1)}\|(\mathcal{L}^2 \otimes I_m)\| \|\mu\delta\| \rightarrow 0 \quad (6.38)$$

$$\|\mu_1^2(\mathcal{L} \otimes I_m)E\| = \mu_1^{-(h-2)}\|(\mathcal{L}^2 \otimes I_m)\mu\delta\| \leq \mu_1^{-(h-2)}\|(\mathcal{L}^2 \otimes I_m)\| \|\mu\delta\| \rightarrow 0 \quad (6.39)$$

$$\|\mu_1^2 E\| = \mu_1^{-(h-2)}\|(\mathcal{L} \otimes I_m)\mu\delta\| \leq \mu_1^{-(h-2)}\|(\mathcal{L} \otimes I_m)\| \|\mu\delta\| \rightarrow 0 \quad (6.40)$$

将式(6.37)-(6.40)代入式(6.33)中即可得到当 $t \rightarrow (t_0 + T)^-$ 时， $\|\dot{U}\| \rightarrow 0$ 。故得：

$$\lim_{t \rightarrow (t_0 + T)^-} \|\dot{U}\| = 0 = \lim_{t \rightarrow (t_0 + T)^+} \|\dot{U}\| \quad (6.41)$$

由此进一步得到

$$\lim_{t \rightarrow (t_0 + T)^-} \dot{U} = 0_{mN} = \lim_{t \rightarrow (t_0 + T)^+} \dot{U} \quad (6.42)$$

上式即意味着 \dot{U} 在 $t = t_0 + T$ 处连续，故 $U(t)$ 在 $t = t_0 + T$ 处平滑，进而得到 $U(t)$ 在整个时间区间 $[t_0, \infty)$ 都是平滑并且一致有界的。

证明完毕。

注 6.1 本节中所得到的有限时间收敛结果是控制器中应用了控制增益 μ_1 的原因，其中 μ_1 在 t 趋近于 $t_n + T$ ($n = 0, 1, \dots$) 时会趋近于无穷。确实，应用这样的无界控制增益看起来与常理相悖。由式(6.32)可以看出控制输入 U 可以保证是有界的。但即使这样，仍然会有问题产生，即虽然控制输入中的 $\mu_1 E$ 项，其中在 t 趋近于 $t_n + T$ ($n = 0, 1, \dots$) 时 $E \rightarrow 0$ 而 $\mu_1 \rightarrow \infty$ ，能保证是整体有界的，但如果一旦有测量误差使得 E 不能完全趋于0，而 μ_1 却仍趋于无穷，则会导致问题产生。此问题可以采取以下简单方法解决：设置增益 μ_1 中的 T 使其比给定的有限收敛时间稍大，即

$$\mu_1(t) = \frac{\bar{T}}{\bar{T} + t_n - t}, \quad t \in [t_n, t_n + T), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.43)$$

其中 $\bar{T} > T$ 。这样处理虽然会稍微牺牲一点收敛精度，但却可以避免使得增益在 t 趋

近于 $t_n + T$ ($n=0,1,\dots$) 时趋近于无穷。事实上, 在由式(6.43)所定义的 μ_1 下, 通过选择 Lyapunov 函数 $V = \delta^T \delta / 2$, 并且依据相同的证明步骤, 我们仍可得 $\|\delta(t)\| \leq \mu_1(t)^{-h} \exp^{-k\lambda_2(L)(t-t_0)} \|\delta(t_0)\|$ 。在这种情况下, 虽然 $\mu_1(t)^{-h}$ 在 $t \rightarrow t_n + T$ ($n=0,1,\dots$) 时不会收敛到零但却可以收敛到零的一个小邻域, 并且我们仍然可以得出平均误差 $\delta(t)$ 随着时间的增长一直保持衰减, 这是因为 $\dot{V} < 0$ 以及 $V(t_{n+1}) = \lim_{t \rightarrow (t_n+T)^-} V(t) < V(t_n)$, 从而使得 $V(t)$ 随时间递减, 因此 δ 亦随时间递减。

注 6.2 值得一提的是所设计的给定有限时间算法中时变控制增益的初始值可以设置为很小的值, 使得初始的控制力不会很大, 由此可以避免通常情况下基于高增益的控制方法中存在的初始时刻控制力非常大的问题。

6.2.3 仿真验证

为了验证所设计的给定有限时间一致性协议的有效性, 本节中针对一组含有 4 个智能体的一阶多智能体系统进行仿真实验。实验中仿真环境为 64 位系统, CPU 为 Intel Core T6600 2.20GHz, 系统内存为 4G, 仿真软件为 Matlab R2012a。

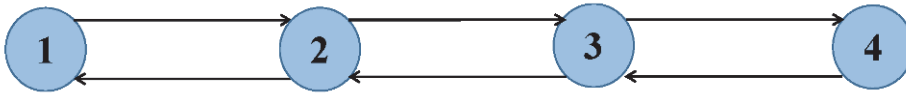


图 6.1 4 个多智能体之间的网络通讯结构图

Figure 6.1 The network communication among 4 agents

在仿真试验中, 我们针对本节中所设计的给定有限时间一致性控制协议(6.13)以及一般有限时间控制协议(6.2)这两种控制协议下的误差收敛效果进行了对比。系统中 4 个多智能体之间的网络通讯结构如图 6.1 所示。为了公平比较, 我们需要检测在相同初始条件下两种控制协议的控制效果。可以通过对两种控制协议分别设置控制增益如下: $k = 0.3$ 以及 $c = 1.8$ (控制协议(6.13)) 以及 $k = 3$ (控制协议(6.2)), 从而使得两种控制协议具有相同的初始控制增益。其他的设计参数分别选取如下: $h = 3$, $T = 2s$ (控制协议(6.13)) 以及 $\alpha_{ij} = 0.6$ (控制协议(6.2))。分别测试三组初始状态: $X(t_0) = [-1, -0.5, 0.5, 1]^T$, $X(t_0) = [-4, -3, 3, 4]^T$ 以及 $X(t_0) = [-5, -4, 4, 5]^T$, 其中 $t_0 = 0$ 。

仿真结果分别由图 6.2-6.5 给出。图 6.2 给出了所设计给定有限时间控制协议下的误差收敛情况, 由此图可以看出所有智能体的状态与平均状态的误差差值在所提前给定的有限时间 T 内均收敛到 0。图 6.3 给出了在所设计控制协议下的控制输入信号, 由此图可以看出控制输入信号不仅平滑而且一致有界。

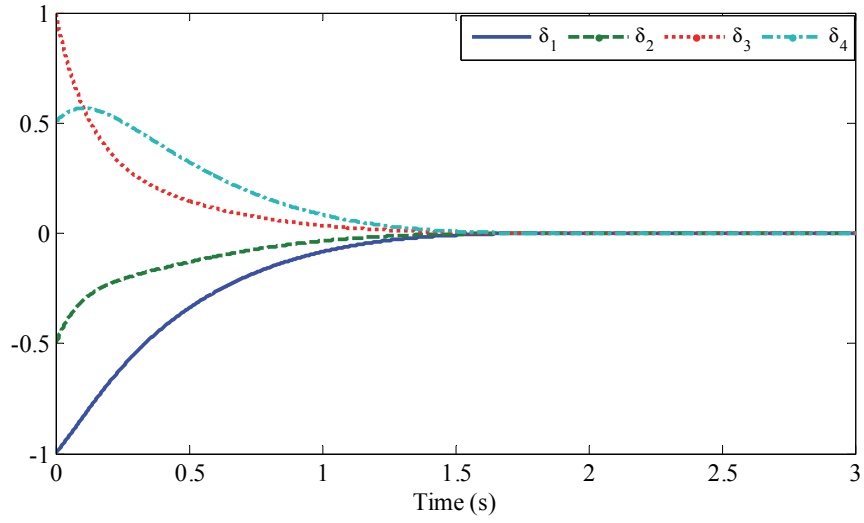
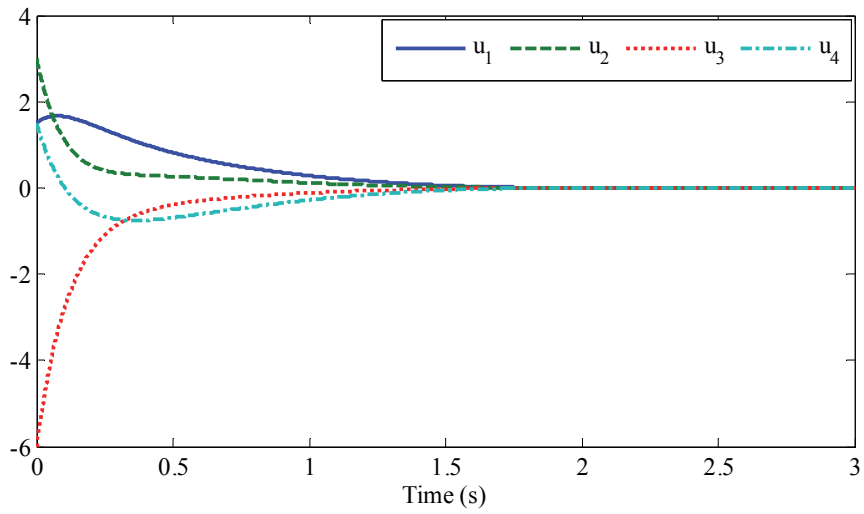


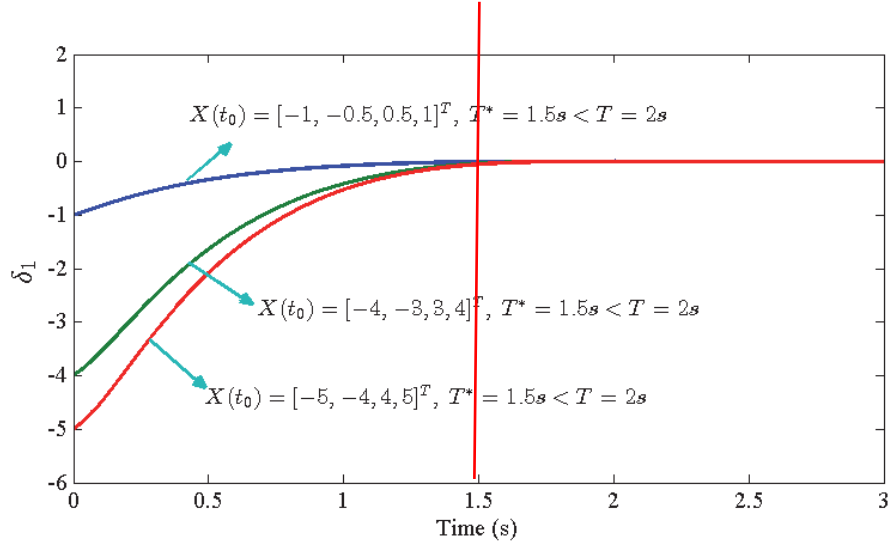
图 6.2 4 个智能体的平均误差

Figure 6.2 The average errors of the 4 agents

图 6.3 系统的控制输入信号 u_i Figure 6.3 The control input u_i of the system

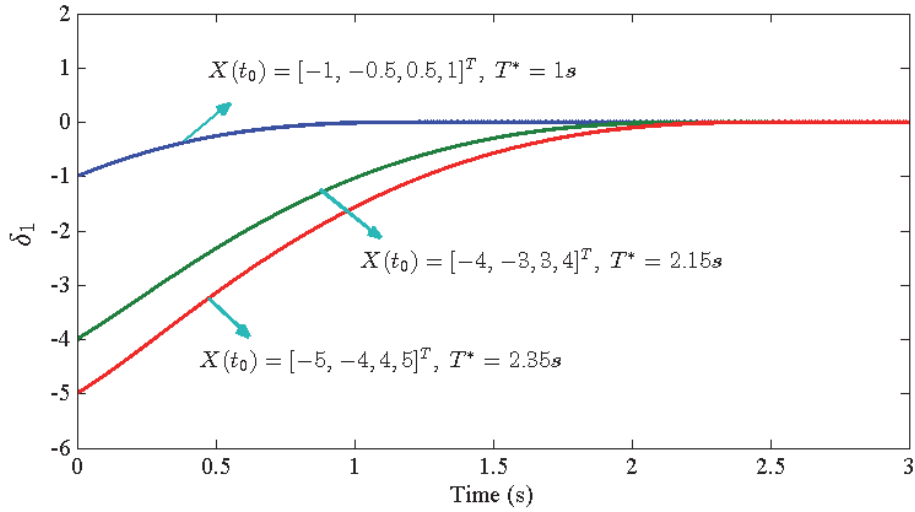
为了比较本节中所设计的控制协议以及一般有限时间控制协议的控制效果，我们分别测试了三个初始状态条件下的误差收敛效果以及控制信号的对比情况。仿真对比结果分别由图 6.4-6.5 给出。从图 6.4 可以看出，在本节所设计的给定有限时间控制协议下，有限收敛时间不依赖于初始状态 $X(t_0)$ 以及其他设计参数，因此可以提前统一给定，而在一般有限控制协议下的有限收敛时间则随着初始状态的不同而有所不同，即其有限收敛时间是依赖于初始条件的。同时，从图 6.5 中可以看到，所设计给定有限时间控制协议下的控制输入在初始时刻不会需要很大的

控制力，但却能使得系统中所有智能体的状态在提前指定有限时间内达到一致。



(a) 在所设计控制协议(6.13)下的误差收敛情况

(a) The error convergence under the proposed control scheme (6.13)

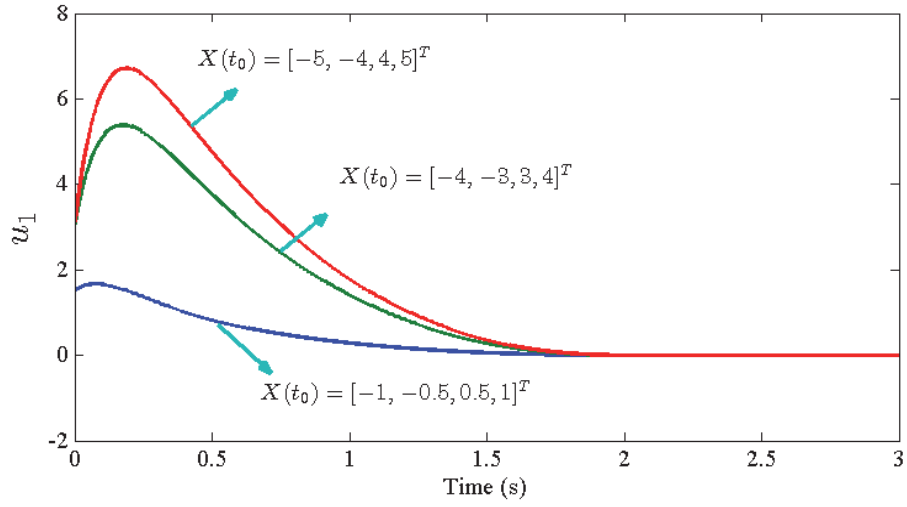


(b) 在控制协议(6.2)下的误差收敛情况

(b) The error convergence under control scheme (6.2)

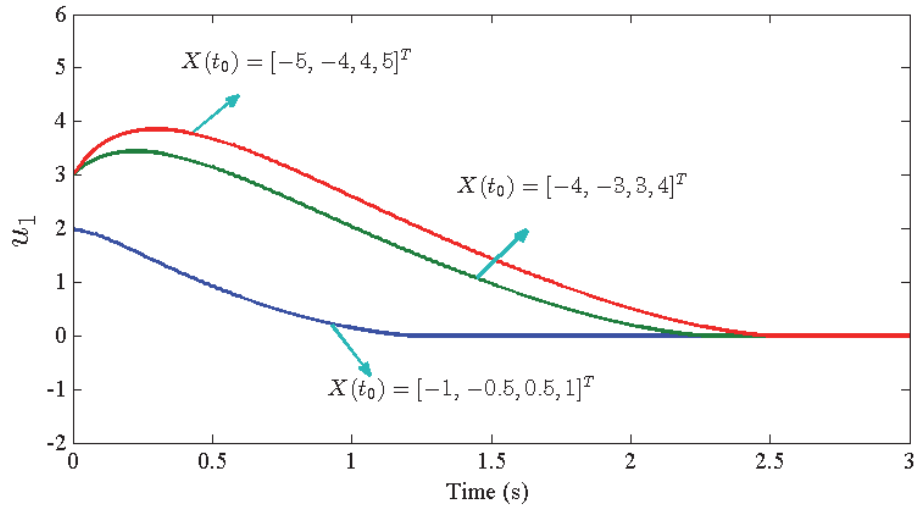
图 6.4 两种不同控制协议下的控制效果对比

Figure 6.4 Performance comparison between the two control schemes



(a) 在所设计控制协议(6.13)下的控制输入信号

(a) The control inputs under the proposed control scheme (6.13)



(b) 在控制协议(6.2)下的控制输入信号

(b) The control inputs under control scheme (6.2)

图 6.5 两种不同控制协议下的控制输入信号对比

Figure 6.5 Control inputs comparison between the two control schemes

6.3 有向拓扑条件下一阶线性多智能体系统的给定有限时间一致性控制

6.3.1 问题描述

本节主要针对一阶线性多智能体系统(6.1), 在有向通讯拓扑条件下, 研究了其给定有限时间一致性问题, 设计出控制协议使得系统内所有智能体在提前给定有

限时间内与根智能体的状态达到同步。

本节中所有智能体之间的网络通讯满足如下假设。

假设 6.2 假设通讯拓扑图 \mathcal{G} 包含一个有向生成树，其中第 i ($i \in \{1, \dots, N\}$) 个智能体为根智能体。

不失一般性，我们假设第 1 个智能体为根智能体。注意到根智能体没有邻居，故拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 可以分解为 $\begin{bmatrix} 0 & 0_{1 \times (N-1)} \\ \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_1 \end{bmatrix}$ ，其中 $\mathcal{L}_2 \in R^{(N-1) \times 1}$ ， $\mathcal{L}_1 \in R^{(N-1) \times (N-1)}$ 。

在假设 6.2 的条件下，可以证明矩阵 \mathcal{L}_1 是非奇异 M 矩阵并且是主对角占优的。下面的引理给出了关于矩阵 \mathcal{L}_1 的一个有用的性质。

引理 6.3 在假设 6.2 的条件下，存在一个正的主对角线矩阵 $\tilde{P} = \text{diag}\{p_2, \dots, p_N\}$ 使得：

$$\tilde{Q} = \tilde{P}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^T \tilde{P} > 0 \quad (6.44)$$

其中 p_2, \dots, p_N 由 $[p_2, \dots, p_N]^T = (\mathcal{L}_1^T)^{-1} \mathbf{1}_{N-1}$ 决定。

6.3.2 控制器设计和稳定性分析

令

$$z_i(t) = x_i(t) - x_1, \quad i = 2, \dots, N \quad (6.45)$$

设 $\tilde{X} = [x_2^T, \dots, x_N^T]^T \in \mathbb{R}^{m(N-1)}$ ， $\tilde{Z} = [z_2^T, \dots, z_N^T]^T \in \mathbb{R}^{m(N-1)}$ 和 $\tilde{E} = [e_2^T, \dots, e_N^T]^T \in R^{m(N-1)}$ 。

通过计算可得如下关系式：

$$\tilde{E} = (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) [\tilde{X} - (\mathbf{1}_{N-1} \otimes I_m) x_1] = (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) \tilde{Z} \quad (6.46)$$

设计如下给定有限时间一致性协议：

$$u_i = -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) e_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (6.47)$$

其中 $k > 0$ 为设计参数， $c \geq \frac{2\lambda_{\max}(\tilde{P})}{\lambda_1(\tilde{Q})}$ ，该协议具有如下紧集形式：

$$U = -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) E \quad (6.48)$$

定理 6.2 在假设 6.2 的条件下，所设计控制协议(6.47) (或(6.48))解决了系统(6.1)的给定有限时间一致性问题，即系统(6.1)中的所有多智能体在提前给定固定有限时间 T 内与根智能体的状态 x_1 达到同步，并且成立：

$$\|\tilde{Z}(t)\| \leq \mu_1(t)^{-h} \exp^{-\frac{k\lambda_1(\tilde{Q})}{2\lambda_{\max}(\tilde{P})}(t-t_0)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\tilde{P})}{\lambda_{\min}(\tilde{P})}} \|(\mathcal{L}_1^{-1} \otimes I_m)\| \|\tilde{E}(t_0)\| \quad (6.49)$$

该式确保了系统的整体一致稳定。另外，系统(6.1)在 $t \in [t_0 + T, \infty)$ 时仍然保持一致性，控制输入 U 在该区间始终保持为 0，并且 U 在整个时间区间 $[t_0, \infty)$ 上保持平滑且一致有界。

证明：为了得到给定有限时间收敛结果，我们仍需考虑两种情况： $t \in [t_0, t_0 + T)$ 和

$t \in [t_0 + T, \infty)$ 。

情况 1: $t \in [t_0, t_0 + T)$

选取 Lyapunov 候选函数如下:

$$\tilde{V} = \tilde{E}^T (\tilde{P} \otimes I_m) \tilde{E} \quad (6.50)$$

根据式(6.48)可以得到如下关系式成立:

$$\dot{\tilde{X}} = -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) \tilde{E} \quad (6.51)$$

并且由 $a_{11} = \dots = a_{1N} = 0$ 可知 x_1 是时不变的。故我们得到:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{E}} &= (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) [\dot{\tilde{X}} - (1_{N-1} \otimes I_m) \dot{x}_1] = (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) \dot{\tilde{X}} \\ &= -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) \tilde{E} \end{aligned} \quad (6.52)$$

由引理 6.3 以及式(6.52)可得 \tilde{V} 的导数如下:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} &= 2\tilde{E}^T (\tilde{P} \otimes I_m) \dot{\tilde{E}} = 2\tilde{E}^T (\tilde{P} \otimes I_m) \left[-\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) \tilde{E} \right] \\ &= -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) \tilde{E}^T [(\tilde{P} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^T \tilde{P}) \otimes I_m] \tilde{E} = -\left(k + c \frac{\dot{\mu}}{\mu}\right) \tilde{E}^T (\tilde{Q} \otimes I_m) \tilde{E} \\ &\leq -k \lambda_1(\tilde{Q}) \tilde{E}^T \tilde{E} - c \frac{\dot{\mu}}{\mu} \lambda_1(\tilde{Q}) \tilde{E}^T \tilde{E} \leq -k \frac{\lambda_1(\tilde{Q})}{\lambda_{\max}(\tilde{P})} \tilde{V} - c \frac{\dot{\mu}}{\mu} \frac{\lambda_1(\tilde{Q})}{\lambda_{\max}(\tilde{P})} \tilde{V} \\ &\leq -\frac{k \lambda_1(\tilde{Q})}{\lambda_{\max}(\tilde{P})} \tilde{V} - 2 \frac{\dot{\mu}}{\mu} \tilde{V} \end{aligned} \quad (6.53)$$

上式中我们应用了关系式 $c \geq \frac{2\lambda_{\max}(\tilde{P})}{\lambda_1(\tilde{Q})}$ 。故由上式, 并且根据引理 6.1, 可以得出:

$$\tilde{V}(t) \leq \mu_1^{-2h} \exp^{-\frac{k \lambda_1(\tilde{Q})}{\lambda_{\max}(\tilde{P})}(t-t_0)} \tilde{V}(t_0) \quad (6.54)$$

成立。由上式进一步得出:

$$\|\tilde{E}(t)\|^2 \leq \mu_1^{-2h} \exp^{-\frac{k \lambda_1(\tilde{Q})}{\lambda_{\max}(\tilde{P})}(t-t_0)} \frac{\lambda_{\max}(\tilde{P})}{\lambda_{\min}(\tilde{P})} \|\tilde{E}(t_0)\|^2 \quad (6.55)$$

由式(6.55)可得:

$$\begin{aligned} \|\tilde{Z}(t)\| &= \|(\mathcal{L}_1 \otimes I_m)^{-1} \tilde{E}(t)\| \leq \|(\mathcal{L}_1 \otimes I_m)^{-1}\| \|\tilde{E}(t)\| \\ &\leq \mu_1^{-2h} \exp^{-\frac{k \lambda_1(\tilde{Q})}{2\lambda_{\max}(\tilde{P})}(t-t_0)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(\tilde{P})}{\lambda_{\min}(\tilde{P})}} \|(\mathcal{L}_1 \otimes I_m)^{-1}\| \|\tilde{E}(t_0)\| \end{aligned} \quad (6.56)$$

成立, 进而导致式(6.49)成立, 并且进一步得到:

$$\|\tilde{Z}(t)\| \rightarrow 0 \text{ 当 } t \rightarrow (t_0 + T)^- \quad (6.57)$$

上式意味着当 $t \rightarrow (t_0 + T)^-$ 时 $X \rightarrow (1_N \otimes I_m)x_1$, 即所设计的控制算法(6.47) (或 (6.48)) 解决了系统(6.1)的给定有限时间一致性问题, 使得系统(6.1)中的所有智能体在提前给定有限时间 T 内与根智能体的状态 x_1 达到了同步。

下面我们证明控制输入在时间区间 $[t_0, t_0 + T)$ 内平滑且一致有界。因为 $e_1 = \sum_{j \in \mathcal{N}_1} a_{1j}(x_1 - x_j) = 0_m$ ，故可得 $\|E\| = \|\tilde{E}\|$ ，则由式(6.55)得：

$$\begin{aligned} \|\mu(t)E(t)\|^2 &= \mu(t)^2 \|E(t)\|^2 = \mu_1^{2h} \|\tilde{E}(t)\|^2 \\ &\leq \exp^{-\frac{k\lambda_1(\tilde{Q})}{\lambda_{\max}(\tilde{P})}(t-t_0)} \frac{\lambda_{\max}(\tilde{P})}{\lambda_{\min}(\tilde{P})} \|\tilde{E}(t_0)\|^2 \in L_\infty \end{aligned} \quad (6.58)$$

从上式进一步得出：

$$\|E\| \in L_\infty, \quad \|\mu_1 E\| = \mu_1^{-(h-1)} \|\mu E\| \in L_\infty \quad (6.59)$$

因此

$$\|U\| \leq k\|E\| + c \frac{h}{T} \|\mu_1 E\| \in L_\infty \quad (6.60)$$

由此可以看出控制输入 U 在 $[t_0, t_0 + T)$ 上是平滑并且一致有界的。

情况 2 $t \in [t_0 + T, \infty)$

通过采取和定理 6.1 情况 2 中类似的证明步骤，我们可以证得在有向拓扑条件下系统(6.1)在时间区间 $t \in [t_0 + T, \infty)$ 上仍然保持一致以及控制输入 U 在该区间为 0，并且可以类似证明得出控制输入 U 在整个时间区间 $[t_0, \infty)$ 上平滑且一致有界。

6.4 本章小结

本章提出了一种新的给定有限时间稳定性理论，基于该理论解决了一阶线性多智能体系统分别在无向拓扑条件下的给定有限时间平均一致控制问题以及有向拓扑条件下的给定时间一致性控制问题，结合仿真实例验证了所设计有限时间控制器的有效性，并通过与通常情况下有限时间控制器的仿真效果进行对比分析，显示了所设计给定有限时间控制器的优越性。本章的创新点主要在于所提出的给定有限时间控制方法能够使得有限收敛时间不依赖于任何初值条件以及其他设计参数，可以提前统一给定。更重要的是，根据此方法所设计出的控制协议是基于的一般的状态反馈，因此可以保证控制输入信号整体平滑并且一致有界。

7 高阶多智能体系统的给定有限时间一致性追踪控制

7.1 引言

本章研究了有向拓扑条件下包含一个领导者的高阶多智能体系统的给定有限时间一致性追踪 (Pre-given finite-time leader-follower consensus) 控制问题, 设计出了基于两个不同时变比例函数增益的给定有限时间一致性追踪控制协议, 该协议由给定有限时间观测器 (观测领导者的状态) 和状态反馈器两部分组成。不同于目前存在的观测器的方法, 观测器观测到领导者状态的时间不但是有限的, 并且该有限时间可以提前统一设定, 而不依赖于任何初始观测误差以及设计参数。另外, 在所设计的分布式控制协议下, 该高阶多智能体系统中的所有跟随者可以在提前给定有限时间内实现与领导者同步, 其有限时间同样可以提前给定, 不依赖于任何初始条件以及其他任何设计参数。更重要的是, 所设计的给定有限时间分布式控制协议可以保证控制输入信号, 除了在观测器切换点处连续, 在其他所有时间点均是光滑有界的。

本章主要内容已投 Autoamtica, 见攻读博士期间所取得主要学术成果[6]。

7.2 有向拓扑条件下高阶多智能体系统给定有限时间一致性追踪控制

在本节中, 我们首先引入两个不同的时变比例函数, 然后根据这两个比例函数分别设计出给定有限时间观测器以及基于观测器的给定有限时间一致性追踪控制协议, 并结合 Lyapunov 稳定性理论, 证明在所设计的分布式一致追踪控制协议下, 该高阶多智能体系统中所有跟随者在提前给定有限时间内与领导者实现同步, 并且证明系统控制输入信号, 在除了观测器切换点 $t = t_0 + T_1$ 处是连续的, 在其他所有时间点处均是平滑有界的。

7.2.1 问题描述

考虑一组包含 N 个跟随者和 1 个领导者的高阶多智能体系统。设 $\mathcal{F} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为跟随者指标集合, $\mathcal{A} = \{N+1\}$ 为领导者的指标集合。第 i ($i \in \mathcal{F}$) 个跟随者的动态方程描述如下:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{i,q} &= x_{i,q+1}, \quad q=1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{i,n} &= u_i\end{aligned}\tag{7.1}$$

其中 $x_{i,q} \in \mathbb{R}^m$ ($q=1, \dots, n$) 和 $u_i \in \mathbb{R}^m$ 分别表示系统状态和控制输入。为了方便, 我们取 $m=1$ ($m>1$ 的情况可以类似得出)。系统中的领导者, 设其指标为 $i=N+1$, 具有如下动态:

$$\begin{aligned}\dot{x}_{N+1,q} &= x_{N+1,q+1}, \quad q=1, \dots, n-1 \\ \dot{x}_{N+1,n} &= 0\end{aligned}\quad (7.2)$$

对于含有一个领导者和多个跟随者的多智能体系统，其拉普拉斯矩阵可以表示为：

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \\ \mathbf{0}_{1 \times N} & 0 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

其中 $\mathcal{L}_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ， $\mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ 。

假设 7.1 多智能体系统的拓扑图 \mathcal{G} 包含一棵有向生成树，其中领导者为根智能体。

下面的引理给出了关于矩阵 \mathcal{L}_1 的一个有用的性质。

引理 7.1^[152] 在假设 7.1 的条件下， \mathcal{L}_1 是非奇异 M -矩阵，并且是主对角占优的，故存在一个矩阵 $Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_N\} > 0$ ，其中 q_1, \dots, q_N 由 $[q_1, \dots, q_N]^T = (\mathcal{L}_1^T)^{-1} \mathbf{1}_N$ 确定得出，使得下式成立：

$$Q\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^T Q > 0 \quad (7.4)$$

定义 7.1 如果对于任意给定的初始状态以及提前给定的固定有限时间 T^* ，在控制协议 u_i ($i \in \mathcal{F}$) 下，对所有的 $i \in \mathcal{F}$ 和 $q=1, \dots, n$ ，均成立：

$$x_{i,q} \rightarrow x_{N+1,q} \quad \text{当 } t \rightarrow T^* \quad (7.5)$$

$$x_{i,q} = x_{N+1,q} \quad \text{当 } t \geq T^* \quad (7.6)$$

则说控制协议 u_i ($i \in \mathcal{F}$) 解决了全状态给定有限时间一致性追踪问题，其中固定收敛时间 T^* 可以提前统一给定。

在本节中，我们设计出一个新的给定有限时间分布式控制协议 u_i ($i \in \mathcal{F}$)，该协议解决了多智能体系统(7.1)-(7.2)的全状态给定有限时间一致性追踪问题。

7.2.2 控制器设计和稳定性分析

我们首先针对第 i ($i \in \mathcal{F}$) 个跟随者，定义其邻居误差如下：

$$e_{i,q} = \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij}(x_{i,q} - x_{j,q}), \quad q=1, \dots, n \quad (7.7)$$

以及第 i ($i \in \mathcal{F}$) 个跟随者与领导者的状态误差如下：

$$\delta_{i,q} = x_{i,q} - x_{N+1,q}, \quad q=1, \dots, n \quad (7.8)$$

设 $e_i = [e_{i,1}, \dots, e_{i,n}]^T \in \mathbb{R}^n$ ， $x_i = [x_{i,1}, \dots, x_{i,n}]^T \in \mathbb{R}^n$ ， $x_{N+1} = [x_{N+1,1}, \dots, x_{N+1,n}]^T \in \mathbb{R}^n$ ， $\delta_i = x_i - x_{N+1}$ ($i \in \mathcal{F}$)， $E = [e_1^T, \dots, e_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ ， $X = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T \in \mathbb{R}^{nN}$ ， $X_{N+1} = \mathbf{1}_N \otimes x_{N+1} \in \mathbb{R}^{nN}$ ， $\delta = X - X_{N+1}$ ，则下式成立：

$$E = [\mathcal{L}_1 \otimes I_n](X - X_{N+1}) = [\mathcal{L}_1 \otimes I_n]\delta \quad (7.9)$$

为了在实现给定有限时间一致性追踪，引入两个不同的时变比例函数如下：

$$\varrho(t) = \frac{T_1^{1+h}}{(T_1 + t_l - t)^{1+h}}, \quad t \in [t_l, t_l + T_1) \quad (7.10)$$

其中 $t_{l+1} = t_l + T_1$ ($l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$)， $h > 1$ ， $T_1 > 0$ 为任何实值常数，以及

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \in [t_0, t_1) \\ \frac{T^{n+h}}{(T + \tau_l - t)^{n+h}}, & t \in [\tau_l, \tau_l + T) \end{cases} \quad (7.11)$$

其中 $\tau_{l+1} = \tau_l + T$ ($l \in Z_+$), $\tau_1 = t_0 + T_1 = t_1$, $h > 1$, $T > 0$ 为给定实值常数。

时变比例函数 $\varrho(t)$ 具有如下性质: 对于 $l \in Z_+ \cup \{0\}$ 和 $p > 0$, 成立:

(i) $\varrho(t)^{-p}$ 在 $[t_l, t_l + T_1)$ 上是单调递减函数;

(ii) $\varrho(t_l)^{-p} = 1$, $\lim_{t \rightarrow (t_l + T_1)^-} \varrho(t)^{-p} = 0$ 。

时变比例函数 $\eta(t)$ 具有如下性质: 对于 $l \in Z_+$ 和 $p > 0$, 成立:

(i) $\eta(t)^{-p}$ 在 $[\tau_l, \tau_l + T)$ 上是单调递减函数;

(ii) $\eta(\tau_l)^{-p} = 1$, $\lim_{t \rightarrow (\tau_l + T)^-} \eta(t)^{-p} = 0$ 。

设 $\bullet^{(q)}$ ($q = 0, \dots, n$) 为 \bullet 的 q 阶导数, 其中 $\bullet^{(0)} = \bullet$, 设 $\bullet^k = \underbrace{\bullet \cdots \bullet}_k$ 为 \bullet 的 k 次方。

通过应用时变比例函数 $\eta(t)$, 对于 $i \in \mathcal{F}$, 我们进行如下转换:

$$\begin{aligned} \xi_{i,1} &= \eta(t)e_{i,1}, \\ \xi_{i,q} &= (\xi_{i,1})^{(q-1)}, \quad q = 2, \dots, n, n+1 \end{aligned} \quad (7.12)$$

以及

$$\begin{aligned} r_{i,1} &= \eta(t)\delta_{i,1}, \\ r_{i,q} &= (r_{i,1})^{(q-1)}, \quad q = 2, \dots, n, n+1 \end{aligned} \quad (7.13)$$

为了之后的分析需要, 这里我们包含了 $q = n+1$ 的情况。我们根据一般化的莱布尼茨定律建立新变量 $r_{i,q}$ ($i \in \mathcal{F}$, $q = 1, \dots, n, n+1$) 如下:

$$r_{i,q} = \sum_{j=0}^{q-1} C_{q-1}^j \eta^{(j)} \delta_{i,1}^{(q-1-j)} = \sum_{j=0}^{q-1} C_{q-1}^j \eta^{(j)} \delta_{i,q-j} \quad (7.14)$$

其中 $C_q^j = \frac{q!}{j!(q-j)!}$, $0! = 1$ 。设 $r_i = [r_{i,1}, \dots, r_{i,n}]^T \in \mathfrak{R}^n$, $\xi_i = [\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,n}]^T \in \mathfrak{R}^n$

($i \in \mathcal{F}$), $r = [r_1^T, \dots, r_N^T]^T \in \mathfrak{R}^{nN}$, $\xi = [\xi_1^T, \dots, \xi_N^T]^T \in \mathfrak{R}^{nN}$ 。故由式(7.9), 式(7.12)-(7.13)可得如下关系式:

$$\xi = [\mathcal{L}_1 \otimes I_n] r \quad (7.15)$$

由式(7.12), 式(7.14)-(7.15)得到系统(7.1)-(7.2)的如下动态表达式:

$$\dot{\xi} = (I_N \otimes A_0) \xi + (\mathcal{L}_1 \otimes b_n) \eta(u + \theta) \quad (7.16)$$

其中 $A_0 = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & I_{n-1} \\ 0 & 0_{n-1}^T \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^n$, $0_{n-1} = [0, \dots, 0]^T \in \mathfrak{R}^{n-1}$, $b_n = [0_{n-1}^T, 1]^T \in \mathfrak{R}^n$,

$u = [u_1, \dots, u_N]^T \in \mathfrak{R}^N$, $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_N]^T \in \mathfrak{R}^N$, 以及

$$\theta_i = \sum_{j=1}^n C_n^j \frac{\eta^{(j)}}{\eta} \delta_{i,n+1-j}, \quad i \in \mathcal{F} \quad (7.17)$$

由于 (A_0, b_n) 是可稳定的, 故下面的立卡提不等式存在一个解 $P > 0$, 使得, 对于任

给的 $g_0 > 0$ ，有下式成立：

$$PA_0 + A_0^T P - 2g_0 P b_n b_n^T P \leq -g_0 I_n \quad (7.18)$$

为了建立给定有限时间一致性追踪控制协议，我们首先需要针对每一个跟随者建立一个有限时间观测器，以在给定有限时间内精确获得领导者的 q ($q=1, \dots, n$) 阶状态。设 $\hat{x}_{i,q}$ ($q=1, \dots, n$) 为领导者相对于第 i ($i \in \mathcal{F}$) 个跟随者的 q 阶状态的估计值。基于时变比例函数 $\varrho(t)$ ，我们针对第 i ($i \in \mathcal{F}$) 个跟随者提出给定有限时间分布式观测器如下：

$$\dot{\hat{x}}_{i,q} = \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij}} \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij} \dot{\hat{x}}_{j,q} - \left(c + \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \right) \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij}} \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij} (\hat{x}_{i,q} - \hat{x}_{j,q}) \quad (7.19)$$

其中 $\hat{x}_{N+1,q} = x_{N+1,q}$ ， $c > 0$ 为设计常数。注意到在假设 7.1 的条件下， $\sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij} \neq 0$ ，

故式(7.19)的定义是没有问题的。基于上式所给出的估计值，我们针对系统(7.1)-(7.2)设计如下给定有限时间一致性追踪协议：

$$u = -\frac{1}{\eta} [I_N \otimes (b_n^T P)] \xi - \hat{\theta} \quad (7.20)$$

其中 $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_N]^T \in \mathbb{R}^N$ ，

$$\hat{\theta}_i = \sum_{j=1}^n C_n^j \frac{\eta^{(j)}}{\eta} (x_{i,n+1-j} - \hat{x}_{i,n+1-j}), \quad i \in \mathcal{F} \quad (7.21)$$

下面给出两个重要的引理。

引理 7.2 考虑一个数量函数 $y(t) \geq 0$ ，如果存在某个正常数 $\gamma > 0$ ，使得，对所有的 $l \in \mathbb{Z}_+ \cup \{0\}$ ，成立：

$$\dot{y}(t) = -\left(\gamma + 2 \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \right) y(t), \quad t \in [t_l, t_l + T_1] \quad (7.22)$$

则有：

i) 当 $t \rightarrow (t_0 + T_1)^-$ 时， $y(t) \rightarrow 0$ ；

ii) 当 $t \geq t_0 + T_1$ 时， $y(t) \equiv 0$ 。

证明：i) 对式(7.22)的两边同时乘以 ϱ^2 得：

$$\varrho^2 \dot{y}(t) \leq -\gamma \varrho^2 y(t) - 2\varrho \dot{\varrho} y(t) \quad (7.23)$$

由上式进一步可得到：

$$\frac{d(\varrho^2 y(t))}{dt} = \varrho^2 \dot{y}(t) + 2\varrho \dot{\varrho} y(t) \leq -\gamma(\varrho^2 y(t)) \quad (7.24)$$

注意到 $\varrho(t_0) = 1$ ，故对微分不等式(7.24)求解得到：

$$\varrho(t)^2 y(t) \leq \exp^{-\gamma(t-t_0)} \varrho(t_0)^2 y(t_0) = \exp^{-\gamma(t-t_0)} y(t_0) \quad (7.25)$$

并进一步得到：

$$y(t) \leq \varrho^{-2} \exp^{-\gamma(t-t_0)} y(t_0) \quad (7.26)$$

根据 $\varrho(t)$ 的性质, 由式(7.26)中可知当 $t \rightarrow (t_0 + T_1)^-$ 时, $y(t) \rightarrow 0$ 。

ii) 由上面的分析可得:

$$y(t_1) = y(t_0 + T_1) = \lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1)^-} y(t) = 0 \quad (7.27)$$

对于 $t \in [t_1, t_1 + T_1]$, 其中 $t_1 = t_0 + T_1$, 我们从式(7.22)中可以得出:

$$\dot{y} \leq 0, \quad t \in [t_1, t_1 + T_1] \quad (7.28)$$

故, 对于 $t \in [t_1, t_1 + T_1]$, 由式(7.27)和式(7.28)可得:

$$0 \leq y(t) \leq y(t_1) = 0 \quad (7.29)$$

有上式可知在时间区间 $[t_1, t_1 + T]$ 上 $y(t) \equiv 0$ 。类似可得在时间区间 $[t_l, t_l + T_1]$ ($l = 2, 3, \dots$) 上有 $y(t) \equiv 0$ 。因此, 当 $t \geq t_0 + T_1$ 时, $y(t) \equiv 0$ 。

证明完毕。

引理 7.3 对于变量 θ 和其导数 $\dot{\theta}$, 存在合适的有界矩阵 H 和 Γ , 使得:

$$\theta = \eta^{-\left(\frac{h}{n+h}\right)} (I_N \otimes H) r \quad (7.30)$$

$$\dot{\theta} = \eta^{-\left(\frac{h-1}{n+h}\right)} (I_N \otimes \Gamma) r + \eta^{-\left(\frac{h}{n+h}\right)} \times [I_N \otimes (HA_0) - L_1 \otimes (Hb_n b_n^T P)] r \quad (7.31)$$

证明: 由式(7.1)-(7.2)以及式(7.13)可得: $\delta_{i,1} = \eta^{-1} r_{i,1}$, $\delta_{i,q} = \delta_{i,1}^{(q-1)}$ ($q = 1, \dots, n$)。另外, 对于 $j = 0, \dots, n$, 成立:

$$(\eta^{-1})^{(j)} = \frac{(n+h)!(-1)^j}{T^j(n+h-j)!} (\eta^{-1})^{1-\frac{j}{n+h}} = \eta^{-\left(\frac{1+h}{n+h}\right)} \frac{(n+h)!(-1)^j}{T^j(n+h-j)!} \eta^{-\left(\frac{n-1-j}{n+h}\right)} \quad (7.32)$$

成立。故, 对于 $q = 1, \dots, n$, 应用莱布尼茨定律可得:

$$\begin{aligned} \delta_{i,q} &= \sum_{j=0}^{q-1} C_{q-1}^j (\eta^{-1})^{(j)} r_{i,1}^{(q-1-j)} = \sum_{j=0}^{q-1} C_{q-1}^j (\eta^{-1})^{(j)} r_{i,q-j} \\ &= \eta^{-\left(\frac{1+h}{n+h}\right)} \sum_{j=0}^{q-1} C_{q-1}^j \frac{(n+h)!(-1)^j}{T^j(n+h-j)!} \eta^{-\left(\frac{n-1-j}{n+h}\right)} r_{i,q-j} \end{aligned} \quad (7.33)$$

在上式中令 $k = q - j$, 其中 $j = 0, \dots, q-1$, 则得:

$$\delta_{i,q} = \eta^{-\left(\frac{1+h}{n+h}\right)} \sum_{k=1}^q C_{q-1}^{q-k} \frac{(n+h)!(-1)^{q-k}}{T^{q-k}(n+h-q+k)!} \eta^{-\left(\frac{n-1-q+k}{n+h}\right)} r_{i,k} \quad (7.34)$$

注意到:

$$\eta^{(q)} = \frac{(n+h+q-1)!}{T^q(n+h-1)!} \eta^{1+\frac{q}{n+h}}, \quad q = 0, \dots, n \quad (7.35)$$

则将式(7.35)以及(7.34)代入式(7.17)中得:

$$\theta_i = \eta^{-\left(\frac{h}{n+h}\right)} \sum_{j=1}^n C_n^j \frac{(n+h+j-1)!}{T^j(n+h-1)!} \sum_{k=1}^{n+1-j} C_{n-j}^{n+1-j-k} \frac{(n+h)!(-1)^{n+1-j-k}}{T^{n+1-j-k}(h-1+j+k)!} \eta^{-\left(\frac{k-1}{n+h}\right)} r_{i,k} \quad (7.36)$$

由上式可得式(7.30)成立, 其中, $H = [H_{ik}]_{n \times n}$, 以及

$$\bar{H}_{ik} = \sum_{j=1}^n C_n^j C_{n-j}^{n+1-j-k} \frac{(n+h+j-1)!}{T^j(n+h-1)!} \frac{(n+h)!(-1)^{n+1-j-k}}{T^{n+1-j-k}(h-1+j+k)!} \quad (7.37)$$

由 η 的性质可知矩阵 H 是有界的。另外，将控制协议(7.20)代入式(7.16)中得：

$$\dot{\xi} = (I_N \otimes A_0)\xi - [\mathcal{L}_1 \otimes (b_n b_n^T P)]\xi \quad (7.38)$$

故由式(7.30)，(7.38)以及(7.15)可得 θ 导数的表达式如下：

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \left[\eta^{-\frac{h}{n+h}} (I_N \otimes H) \right]^{(1)} r + \eta^{-\frac{h}{n+h}} (I_N \otimes H) \dot{r} \\ &= \left[(I_N \otimes (\eta^{-\frac{h}{n+h}} H)) \right]^{(1)} r + \eta^{-\frac{h}{n+h}} [I_N \otimes (H A_0)] r - \eta^{-\frac{h}{n+h}} [\mathcal{L}_1 \otimes (H b_n b_n^T P)] r \end{aligned} \quad (7.39)$$

注意到：

$$\begin{aligned} \eta^{-\frac{h-1}{n+h}} \Gamma_{ik} &= \left(\eta^{-\frac{h}{n+h}} H_{ik} \right)^{(1)} = \left(\eta^{-\frac{h}{n+h}} \bar{H}_{ik} \eta^{-\frac{k-1}{n+h}} \right)^{(1)} \\ &= -\frac{h+k-1}{T} \bar{H}_{ik} \eta^{-\frac{h+k-2}{n+h}} = \eta^{-\frac{h-1}{n+h}} \left(-\frac{h+k-1}{T} \right) \bar{H}_{ik} \eta^{-\frac{k-1}{n+h}} \end{aligned} \quad (7.40)$$

该式与式(7.39)结合则得到表达式(7.31)，其中， $\Gamma = [\Gamma_{ik}]_{n \times n}$ ，

$$\Gamma_{ik} = -\frac{h+k-1}{T} \bar{H}_{ik} \eta^{-\frac{k-1}{n+h}}。$$

证明完毕。

有了上述准备工作，下面给出本节的主要结果。

定理 7.1 考虑假设 7.1 条件下含有 N 个跟随者以及 1 个领导者的系统(7.1)-(7.2)。在所设计分布式控制协议(7.20)-(7.21)下，所有 N 个跟随者在提前设定固定有限时间 $T^* = T_1 + T$ 内与领导者达到全状态同步。特别地，对于所有的 $t \in [t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T)$ ，成立：

$$\|\delta(t)\| \leq \eta^{-\frac{1+h}{n+h}} N n \|M\| \|\mathcal{L}_1^{-1}\| \sqrt{\lambda/\underline{\lambda}} \exp^{-\frac{g_0(t-t_0-T_1)}{2\lambda_{\max}(P)}} \|E(t_0 + T_1)\| \quad (7.41)$$

该式描述出了 $\delta(t)$ 的整个收敛过程。另外，所有多智能体在时间区间 $[t_0 + T_1 + T, \infty)$ 上保持同步，且控制输入 u 在该区间保持为 0。更重要地，控制输入 u 处处连续有界，且除了切换时间点 $t = t_0 + T_1$ 外处处平滑。

证明：整个证明过程分为 3 步。

第一步： $t \in [t_0, t_0 + T_1)$

我们首先证明当 $t \geq t_0 + T_1$ 时对所有的 $i \in \mathcal{F}$ 以及 $q = 1, \dots, n$ 成立 $\hat{x}_{i,q} \equiv x_{i,q}$ ，然后证明控制率(7.20)保证了误差 δ 在时间区间 $[t_0, t_0 + T_1)$ 上的有界性。更进一步，我们证明控制输入 u 在时间区间 $[t_0, t_0 + T_1)$ 上平滑且一致有界。

令 $\hat{e}_{i,q} = \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{L}} a_{ij} (\hat{x}_{i,q} - \hat{x}_{j,q})$ ，则式(7.19)可等价表示为：

$$\dot{\hat{e}}_{i,q} = -\left(c + \frac{\dot{\rho}}{\rho}\right) \hat{e}_{i,q} \quad (7.42)$$

设 $y_{i,q} = (\hat{e}_{i,q})^2$ ($i \in \mathcal{F}$, $q = 1, \dots, n$)，由上式可知：

$$\dot{y}_{i,q} = 2\hat{e}_{i,q} \dot{\hat{e}}_{i,q} = -\left(2c + 2\frac{\dot{\rho}}{\rho}\right) y_{i,q} \quad (7.43)$$

故根据引理 7.2 得, 当 $t \rightarrow (t_0 + T_1)^-$ 时, $y_{i,q} \rightarrow 0$, 当 $t \geq t_0 + T_1$ 时, $y_{i,q} \equiv 0$ ($i \in \mathcal{F}$, $q = 1, \dots, n$)。进一步得到当 $t \geq t_0 + T_1$ 时, 有 $\hat{e}_{i,q} \equiv 0$ 成立。注意到 $\hat{e}_{i,q} = \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij} [(\hat{x}_{i,q} - x_{N+1,q}) - (\hat{x}_{j,q} - x_{N+1,q})]$, 则当 $t \geq t_0 + T_1$ 时, 对所有的 $q = 1, \dots, n$, 有 $[\hat{e}_{1,q}, \dots, \hat{e}_{N,q}]^T = \mathcal{L}_1([\hat{x}_{1,q}, \dots, \hat{x}_{N,q}]^T - 1_N x_{N+1,q}) \equiv 0$ 成立。故在假设 7.1 的条件下, 我们可得出结论, 当 $t \geq t_0 + T_1$ 时, 对所有的 $i \in \mathcal{F}$ 以及 $q = 1, \dots, n$, 有 $\hat{x}_{i,q} \equiv x_{N+1,q}$ 成立。

下面, 我们证明误差 δ 在控制率 u 的作用下保持有界。

注意到对于 $t \in [t_0, t_0 + T_1)$, $\eta(t) = 1$ 以及 $\eta(t)^{(j)} = 0$ ($j = 1, \dots, n$), 故式(7.16)可以等价表达为:

$$\dot{\xi} = (I_N \otimes A_0)\xi + (\mathcal{L}_1 \otimes b_n)u, \quad t \in [t_0, t_0 + T_1) \quad (7.44)$$

以及控制率(7.20)等价于:

$$u = -[I_N \otimes (b_n^T P)]\xi, \quad t \in [t_0, t_0 + T_1) \quad (7.45)$$

将上式代入式(7.44)中即得:

$$\dot{\xi} = (I_N \otimes A_0)\xi - [\mathcal{L}_1 \otimes (b_n b_n^T P)]\xi \quad (7.46)$$

选取如下 Lyapunov 候选函数:

$$V = \xi^T (Q \otimes P)\xi \quad (7.47)$$

则由式(7.46)可得 V 的导数为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2\xi^T (Q \otimes P) [(I_N \otimes A_0)\xi - (\mathcal{L}_1 \otimes (b_n b_n^T P))\xi] \\ &= 2\xi^T [Q \otimes (PA_0)]\xi - 2\xi^T [(Q\mathcal{L}_1) \otimes (Pb_n b_n^T P)]\xi \\ &= \xi^T [Q \otimes (PA_0 + A_0^T P)]\xi - \xi^T [(Q\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^T Q) \otimes (Pb_n b_n^T P)]\xi \\ &\leq \xi^T [Q \otimes (PA_0 + A_0^T P)]\xi - g\xi^T [I_N \otimes (Pb_n b_n^T P)]\xi \end{aligned} \quad (7.48)$$

其中 $g = \lambda_{\min}(Q\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^T Q)$, 并且由引理 7.1 可知 $g > 0$ 。设 $\tilde{\xi} = (\sqrt{Q} \otimes I_n)\xi$, 则式(7.48)可等价表达为:

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \tilde{\xi}^T [I_N \otimes (PA_0 + A_0^T P)]\tilde{\xi} - g\tilde{\xi}^T [Q^{-1} \otimes (Pb_n b_n^T P)]\tilde{\xi} \\ &\leq \tilde{\xi}^T [I_N \otimes (PA_0 + A_0^T P - g_0 Pb_n b_n^T P)]\tilde{\xi} \end{aligned} \quad (7.49)$$

其中, 由于 $Q^{-1} > 0$, 可知 $g_0 = g\lambda_{\min}(Q^{-1}) > 0$ 。

故由式(7.18)可得:

$$\dot{V} \leq -g_0 \tilde{\xi}^T (I_N \otimes I_n) \tilde{\xi} = -g_0 \xi^T (Q \otimes I_n) \xi \leq -\frac{g_0}{\lambda_{\max}(P)} V \quad (7.50)$$

解该微分不等式得到:

$$V(t) \leq \exp^{-\frac{g_0}{\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)} V(t_0) \quad (7.51)$$

由上式进一步可知:

$$\|\xi(t)\| \leq \sqrt{\lambda/\underline{\lambda}} \exp^{-\frac{g_0}{2\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)} \|\xi(t_0)\| \quad (7.52)$$

其中 $\bar{\lambda} = \lambda_{\max}(Q) \cdot \lambda_{\max}(P)$, $\underline{\lambda} = \lambda_{\min}(Q) \cdot \lambda_{\min}(P)$ 。注意到在 $[t_0, t_0 + T_1)$ 上, $\xi(t) = E(t)$, 则由式(7.52)以及式(7.9)得:

$$\|\delta(t)\| = \|(\mathcal{L}_1^{-1} \otimes I_n) E(t)\| \leq \sqrt{\bar{\lambda} / \underline{\lambda}} \exp^{-\frac{g_0}{2\lambda_{\max}(P)}(t-t_0)} n \|\mathcal{L}_1^{-1}\| \|E(t_0)\| \quad (7.53)$$

该式保证了误差 δ 在时间区间 $[t_0, t_0 + T_1)$ 上的有界性。

下面证明在时间区间 $[t_0, t_0 + T_1)$ 上控制输入 u 是平滑且一致有界的。根据式(7.45)给出的 u 的表达式, 则可由式(7.51)得到 u 在 $[t_0, t_0 + T_1)$ 上的界如下:

$$\|u\| = \|[I_N \otimes (b_n^T P)]\xi\| \leq N \|b_n^T P\| \|\xi\| \in L_\infty \quad (7.54)$$

该式保证了 u 在 $[t_0, t_0 + T_1)$ 上的一致有界性。根据式(7.45), (7.46)以及(7.52)可得:

$$\begin{aligned} \|\dot{u}\| &= \|(I_N \otimes (b_n^T P A_0))\xi - (\mathcal{L}_1 \otimes (b_n^T P b_n^T P))\xi\| \\ &\leq N \|b_n^T P A_0\| \|\xi\| + \|\mathcal{L}_1 \otimes (b_n^T P b_n^T P)\| \|\xi\| \in L_\infty \end{aligned} \quad (7.55)$$

该式确保了 u 在时间区间 $[t_0, t_0 + T_1)$ 上的平滑性。

第二步: $t \in [t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T)$

我们证明在有限时间 $T^* = T_1 + T$ 所有的跟随者与领导者实现同步, 并进一步证明控制输入 u 在时间区间 $[t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T)$ 平滑且一致有界。

由第一步的证明中可知当 $t \geq t_0 + T_1$ 时, $\hat{x}_{i,q} \equiv x_{N+1,q}$, 意味着当 $t \geq t_0 + T_1$ 时 $\hat{\theta} \equiv \theta$ 。故将控制率(7.20)代入式(7.16)中可得:

$$\dot{\xi} = (I_N \otimes A_0)\xi - [L_1 \otimes (b_n^T P)]\xi \quad (7.56)$$

由此可知该式与式(7.46)等同。故通过选择与上一步中相同的 Lyapunov 函数, $V = \xi^T (Q \otimes P) \xi$, 并采取与(7.48)-(7.50)相同的证明步骤, 则可得:

$$\dot{V} \leq -\frac{g_0}{\lambda_{\max}(P)} V, \quad t \in [t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T) \quad (7.57)$$

该式确保了 ξ 在时间区间 $[t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T)$ 上的指数稳定性。类似地, 解微分不等式(7.57)可得:

$$V(t) \leq \exp^{-\frac{g_0}{\lambda_{\max}(P)}(t-t_0-T_1)} V(t_0 + T_1) \quad (7.58)$$

故根据关系式(7.15), 我们从上式得出:

$$\|r(t)\| \leq n \|\mathcal{L}_1^{-1}\| \sqrt{\bar{\lambda} / \underline{\lambda}} \exp^{-\frac{g_0(t-t_0-T_1)}{2\lambda_{\max}(P)}} \|\xi(t_0 + T_1)\| \quad (7.59)$$

该式确保了 ξ 和 r 在时间区间 $[t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T)$ 上的有界性。

下面我们建立 $r \rightarrow \delta$ 的关系式。由式(7.34)可直接得出:

$$\delta = \eta^{-\left(\frac{1+h}{n+h}\right)} (I_N \otimes M)r \quad (7.60)$$

其中 $M = [m_{qk}]_{n \times n}$ 为一个下三角矩阵, 其元素具有如下形式:

$$m_{qk} = \eta^{-\left(\frac{n-1-q+k}{n+h}\right)} C_{q-1}^{q-k} \frac{(n+h)!(-1)^{q-k}}{T^{q-k}(n+h-q+k)!} \quad (7.61)$$

其中 $1 \leq k \leq q \leq n$ 。注意到 $\|I_N \otimes M\|$ 为关于 η^{-p} ($p > 0$) 的连续函数, 其中 $\eta^{-p} \in (0, 1]$ 是有界的, 故 $\|I_N \otimes M\|$ 亦有界。由式(7.59), (7.60)以及关系式 $\xi(t_0 + T_1) = E(t_0 + T_1)$ 即可得到式(7.41)成立。由函数 η 的性质, 其中 $\eta^{-\frac{1+h}{n+h}}$ 是单调递减的, 并且当 $t \rightarrow t_0 + T_1 + T$ 时收敛到 0, 可知 $\delta(t)$ 的整体收敛性, 包括收敛精度和收敛速度, 可由式(7.41)清晰的描述出来。另外, 由式(7.41)还可得出:

$$\delta \rightarrow 0 \text{ 当 } t \rightarrow (t_0 + T_1 + T)^- \quad (7.62)$$

由此可看出所有的跟随者在有限时间 $T^* = T_1 + T$ 内皆与领导者达到同步。

下面证明控制输入 u 在时间区间 $[t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T)$ 上是平滑且一致有界的。由式(7.15), (7.59)以及 η 的性质可得:

$$\left\| \frac{1}{\eta} [I_N \otimes (b_n^T P)] \xi \right\| \leq \frac{1}{\eta} \| [L_1 \otimes (b_n^T P)] \| \| r \| \in L_\infty \quad (7.63)$$

并且, 由关系式(7.30), (7.59)以及 η 的性质可得:

$$\| \hat{\theta} \| = \| \theta \| = \left\| \eta^{-\frac{h}{n+h}} (I_N \otimes H) r \right\| \leq \eta^{-\frac{h}{n+h}} N \| H \| \| r \| \in L_\infty \quad (7.64)$$

则在时间区间 $[t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T)$ 上, 由上面两个式子得到:

$$\| u \| \leq \left\| \frac{1}{\eta} [I_N \otimes (b_n^T P)] \xi \right\| + \| \hat{\theta} \| \in L_\infty \quad (7.65)$$

通过对 u 求导得:

$$\dot{u} = \underbrace{-\eta^{-1} [I_N \otimes (b_n^T P)] \dot{\xi}}_{\dot{u}_1} - \underbrace{(\eta^{-1})^{(1)} [I_N \otimes (b_n^T P)] \xi}_{\dot{u}_2} - \underbrace{\dot{\theta}}_{\dot{u}_3} \quad (7.66)$$

由式(7.56), (7.15), (7.59)以及(7.31)可得到如下关系式:

$$\begin{aligned} \| \dot{u}_1 \| &= \left\| -\eta^{-1} [I_N \otimes (b_n^T P)] \times [(I_N \otimes A_0) \xi - (\mathcal{L}_1 \otimes (b_n b_n^T P)) \xi] \right\| \\ &= \eta^{-1} \left\| [\mathcal{L}_1 \otimes (b_n^T P A_0)] r - [\mathcal{L}_1^2 \otimes (b_n^T P b_n b_n^T P)] r \right\| \\ &\leq \eta^{-1} \left\| \mathcal{L}_1 \otimes (b_n^T P A_0) \right\| \| r \| + \left\| \mathcal{L}_1^2 \otimes (b_n^T P b_n b_n^T P) \right\| \| r \| \in L_\infty \end{aligned} \quad (7.67)$$

$$\| \dot{u}_2 \| \leq \frac{n+h}{T} \eta^{-\left(1-\frac{1}{n+h}\right)} \left\| \mathcal{L}_1 \otimes (b_n^T P) \right\| \| r \| \in L_\infty \quad (7.68)$$

$$\begin{aligned} \| \dot{u}_3 \| &\leq \eta^{-\frac{h-1}{n+h}} \left\| I_N \otimes \Gamma \right\| \| r \| + \eta^{-\frac{h}{n+h}} \\ &\quad \times \left\| I_N \otimes (H A_0) - \mathcal{L}_1 \otimes (H b_n b_n^T P) \right\| \| r \| \in L_\infty \end{aligned} \quad (7.69)$$

将上面三个式子代入式(7.66)即可得到:

$$\| \dot{u} \| \leq \| \dot{u}_1 \| + \| \dot{u}_2 \| + \| \dot{u}_3 \| \in L_\infty \quad (7.70)$$

该式确保了控制输入 u 在时间区间 $[t_0 + T_1, t_0 + T_1 + T)$ 上的平滑性。

第三步: $t \in [t_0 + T_1 + T, \infty)$

这一步证明所有跟随者在时间区间 $[t_0 + T_1 + T, \infty)$ 仍然保持与领导者同步, 并且控制输入 u 在该区间保持为 0。

首先, 选取与前两步中相同的 Lyapunov 函数, $V = \xi^T (Q \otimes P) \xi$ 。注意到:

$$\delta(\tau_2) = \delta(t_0 + T_1 + T) = \lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1 + T)^-} \delta(t) = 0 \quad (7.71)$$

以及 $r(\tau_2) = \delta(\tau_2) = 0$ ，则可得到：

$$V(\tau_2) = \xi^T(Q \otimes P)\xi|_{\tau_2} = r^T[(\mathcal{L}_1^T Q \mathcal{L}_1) \otimes P]r|_{\tau_2} = 0 \quad (7.72)$$

另一方面，通过采取类似式(7.56)-(7.57)的步骤，可以得出：

$$\dot{V}(t) \leq 0, \quad t \in [t_0 + T_1 + T, t_0 + T_1 + 2T) \quad (7.73)$$

故对于 $t \in [\tau_2, \tau_2 + T)$ ，其中 $\tau_2 = t_0 + T_1 + T$ ，由式(7.72)以及(7.73)可得：

$$0 \leq V(t) \leq V(t_0 + T_1 + T) = V(\tau_2) = 0 \quad (7.74)$$

即在 $[\tau_2, \tau_2 + T)$ 上， $V(t) \equiv 0$ 。故得在 $[\tau_2, \tau_2 + T)$ 上， $\xi(t) \equiv 0$ ，进一步得 $r \equiv 0$ 以及 $\delta \equiv 0$ 。由式(7.20)给出的 u 在 $t \in [\tau_2, \tau_2 + T)$ 上的定义以及关系式(7.30)可以推断出在 $[\tau_2, \tau_2 + T)$ 上 $u \equiv 0$ 。类似可以得出在 $[\tau_l, \tau_l + T)$ ($l = 3, 4, \dots$) 上 $\delta \equiv 0$ 以及 $u \equiv 0$ 。故对所有的 $t \geq \tau_2 = t_0 + T_1 + T$ ，有 $\delta(t) \equiv 0$ 以及 $u \equiv 0$ ，即，所有的跟随者在时间区间 $[t_0 + T_1 + T, \infty)$ 都保持与领导者同步，并且控制输入 u 在该区间保持为 0。

最后，我们证明控制输入 u 除了切换时间点 $t = t_0 + T_1$ 外处处平滑。由以上三步的分析可知，除了 $t_0 + T_1$ 和 $t_0 + T_1 + T$ 两点， u 是处处平滑的。故我们只需检查 \dot{u} 在 $t_0 + T_1$ 和 $t_0 + T_1 + T$ 这两点的连续性即可。

由式(7.55)，式(7.66)-(7.69)，式(7.59)，以及函数 η 的性质，可得：

$$\lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1)^-} \|\dot{u}\| = \lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1)^+} \|\dot{u}_1\| \neq \lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1)^+} \|\dot{u}\| \quad (7.75)$$

即 \dot{u} 在 $t = t_0 + T_1$ 处不连续，故可知 u 在 $t = t_0 + T_1$ 处不平滑。然而值得提出的是 u 在 $t = t_0 + T_1$ 处是连续的，这是因为 $\eta(t)$ 在该处是连续的。由(7.67)-(7.69)可得：

$$\|\dot{u}\| \leq \|\dot{u}_1\| + \|\dot{u}_2\| + \|\dot{u}_3\| \rightarrow 0 \quad \text{当 } t \rightarrow (t_0 + T_1 + T)^- \quad (7.76)$$

则进一步得到：

$$\lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1 + T)^-} \|\dot{u}\| = 0 = \lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1 + T)^+} \|\dot{u}\| \quad (7.77)$$

因此，

$$\lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1 + T)^-} \dot{u} = 0 = \lim_{t \rightarrow (t_0 + T_1 + T)^+} \dot{u} \quad (7.78)$$

该式意味着 \dot{u} 在 $t = t_0 + T_1 + T$ 处连续，故， $u(t)$ 在 $t = t_0 + T_1 + T$ 处平滑，并进一步知， u 在除了 $t = t_0 + T_1$ 点外处处平滑。

注 7.1 值得提出的是本节中所设计的给定有限时间一致性追踪控制协议是基于一般局部误差反馈的，并且控制输入处处连续以及除了切换点 $t = t_0 + T_1$ 外处处光滑且一致有界。

注 7.2 虽然文献[105]以及文献[108]中所提出的有限时间一致性追踪控制协议也是基于观测器的设计，其所设计控制器由观测器的观测时间分割为两部分，然而其观测时间取决于初始观测条件以及一系列设计参数，因此导致切换时间点很难统一并提前确定出来。而本节中所提出的控制器设计中的观测器是基于一个时变比

例观测增益，使得观测时间不仅是有限的并且可以提前统一设定，因此本节中所提出的基于观测器的有限时间控制方法是一种全新的方法。

7.2.3 仿真实例

为了验证所设计的给定有限时间一致性追踪控制协议的有效性，本节中针对一组具有高阶动态的网络多智能体系统（5个跟随者和1个领导者）进行仿真实验。实验中仿真环境为64位系统，CPU为Intel Core T6600 2.20GHz，系统内存为4G，仿真软件为Matlab R2012a。

仿真中跟随者和领导者的动态方程分别由式(7.1)和式(7.2)给出，其中 $n=2$ 。所有6个智能体之间的通讯拓扑关系由图7.1给出，其中每个智能体之间的权重选取为1。由图7.1很容易看出，所给出的拓扑关系满足假设7.1的条件。

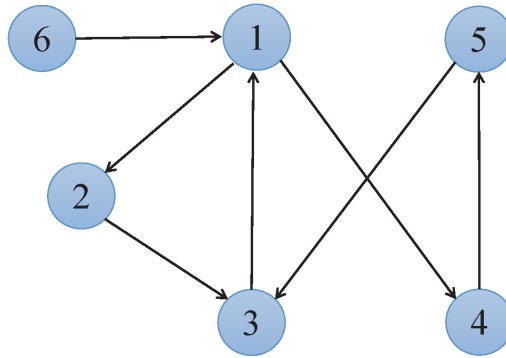


图 7.1 5个跟随者和1个领导者之间的网络通讯关系

Figure 7.1 The communication among the 5 followers and 1 leader

对于观测器设计中的初始条件选取为： $t_0 = 0$ ， $\hat{x}_1 = [0.1, 0.1]^T$ ， $\hat{x}_2 = [0.3, 0.3]^T$ ， $\hat{x}_3 = [0.5, 0.5]^T$ ， $\hat{x}_4 = [0.7, 0.7]^T$ ， $\hat{x}_5 = [0.9, 0.9]^T$ 。有限时间观测器中的设计参数选取为： $T_1 = 0.8s$ ， $h = 2$ ， $c = 6$ 。5个跟随者的初始状态选取为： $t_0 = 0$ ， $X(t_0) = [1, 0, 0.5, 0, 0, 0, -0.5, 0, -1, 0]^T$ 。根据图7.1给出的通讯拓扑关系，则通过计算可以得出 $g = \lambda_{\min}(Q\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^T Q) = 1.7838$ ，其中 $Q = \text{diag}\{q_1, \dots, q_5\}$ ， $[q_1, \dots, q_5]^T = \mathcal{L}_1^{-1} \mathbf{1}_5$ ，故可得 $g_0 = g\lambda_{\min}(Q^{-1}) = 0.2g = 0.3568$ 。通过matlab工具箱计算立卡提不等式可得如下解：

$$P = \begin{bmatrix} 2.9921 & 2.9921 \\ 2.9921 & 6.4842 \end{bmatrix} \quad (7.79)$$

其他设计参数选取为 $T = 1s$ 和 $h = 2$ 。

仿真测试结果由图7.2-7.6给出，其中图7.2和图7.3分别给出了在所设计有限时间观测器(7.19)下第 i ($i=1, \dots, 5$)个跟随者对领导者 q ($q=1, 2$)阶状态的估计值， $\hat{x}_{i,q}$ ($i=1, \dots, 5$ ， $q=1, 2$)，图7.4和图7.5分别给出了在所设计给定有限时间

控制协议(7.20)-(7.21)下所有跟随者与领导者之间1阶误差和2阶误差的收敛情况，图 7.6 给出了控制输入信号。

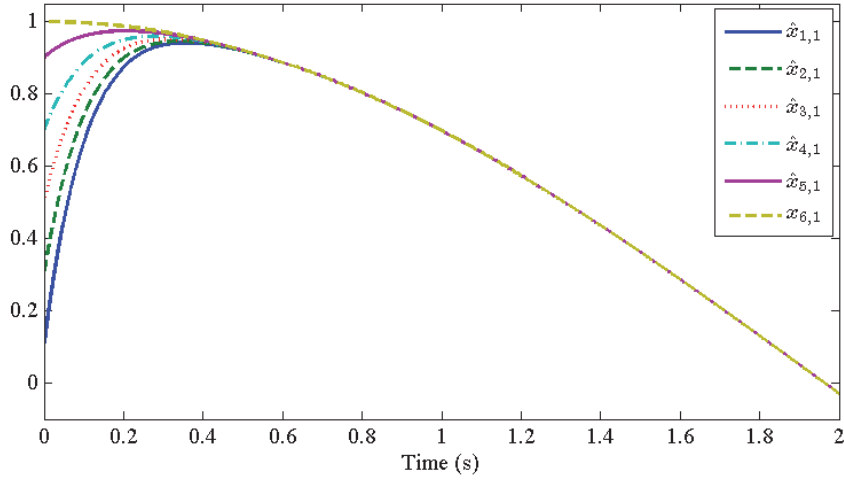


图 7.2 5 个跟随者对领导者一阶状态的观测值

Figure 7.2 The observing value for the leader's 1 th state of the 5 followers

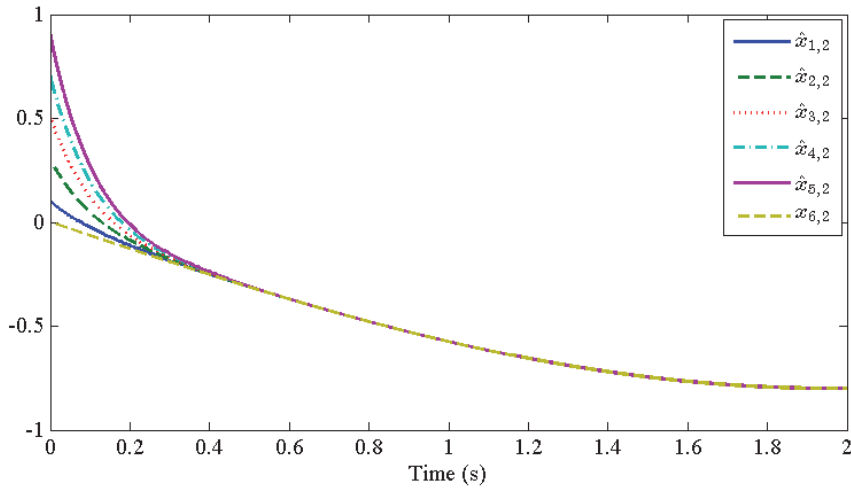


图 7.3 5 个跟随者对领导者 2 阶状态的观测值

Figure 7.3 The observing value for the leader's 2 th state of the 5 followers

由图 7.2 和图 7.3 可以看出，每一个跟随者对领导者的观测值皆在提前给定的有限时间 T_1 内精确收敛到领导者的真实状态值，从而在给定有限时间 T_1 之后观测值可以精确反映真实值，保证了所设计的控制器能够在 T_1 之后有效执行，并最终保证了整个系统能够在给定的有限时间内实现一致性跟踪。

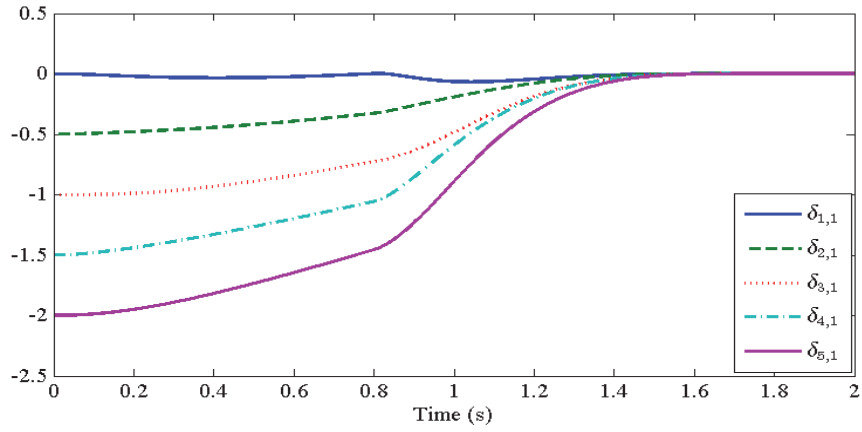


图 7.4 5 个跟随者的 1 阶一致追踪误差

Figure 7.4 The 1th consensus tracking errors of the 5 followers

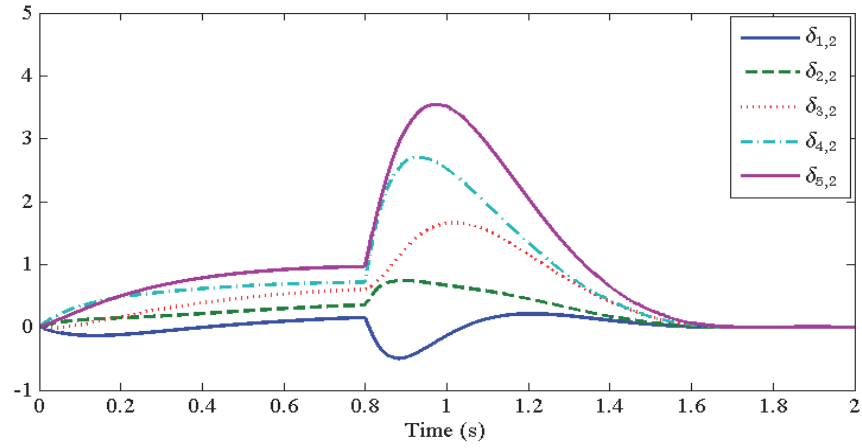


图 7.5 5 个跟随者的 2 阶一致追踪误差

Figure 7.5 The 2th consensus tracking errors of the 5 followers

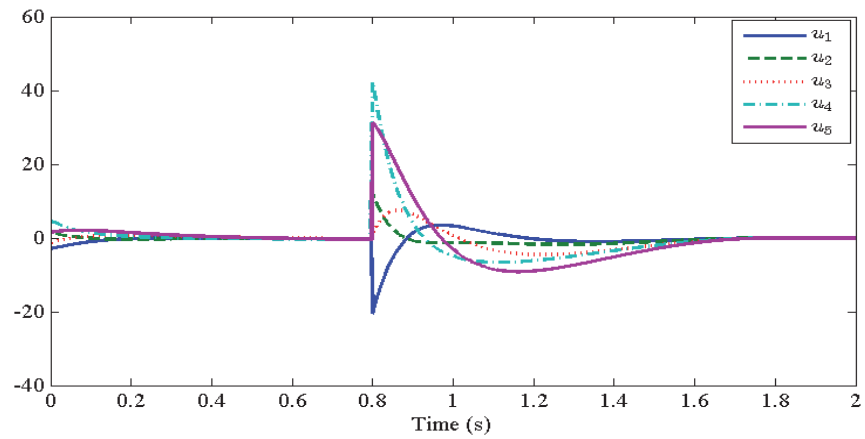


图 7.6 系统的控制输入信号

Figure 7.6 The control input of the system

由图 7.4 和图 7.5 可以看出, 第 i ($i=1, \dots, 5$) 个跟随者与领导者之间的 q ($q=1, 2$) 阶误差在所提前统一设定的固定有限时间 $T_1 + T$ 内均收敛到 0。图 7.6 验证了控制输入信号是一致有界且处处连续的, 并且在除了切换点 $t = t_0 + T_1$ 外处处平滑。

我们进一步测试了所有跟随者在相同初始条件但不同给定有限时间以及相同给定有限时间但不同初始条件下的一致收敛性质。图 7.7 和图 7.8 给出了第 3 个跟随者 (其他跟随者都有相类似结果, 在这里不再重复给出) 在不同给定有限时间, T_1 和 T , 但相同初始条件下的 1 阶误差和 2 阶误差的收敛情况。

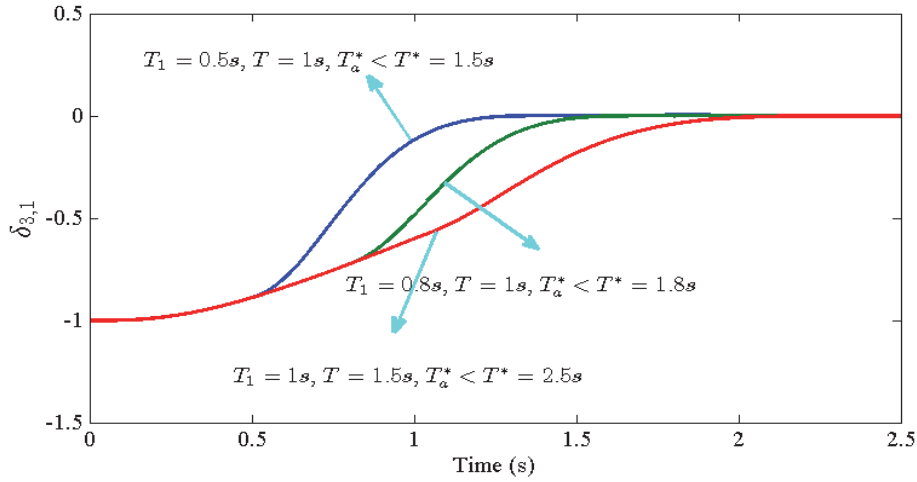


图 7.7 不同给定观测时间 T_1 以及不同给定收敛时间 T 下的 1 阶误差收敛对比图

Figure 7.7 The 1st error convergence comparison under different observing time T_1 and different pre-given finite convergence time T

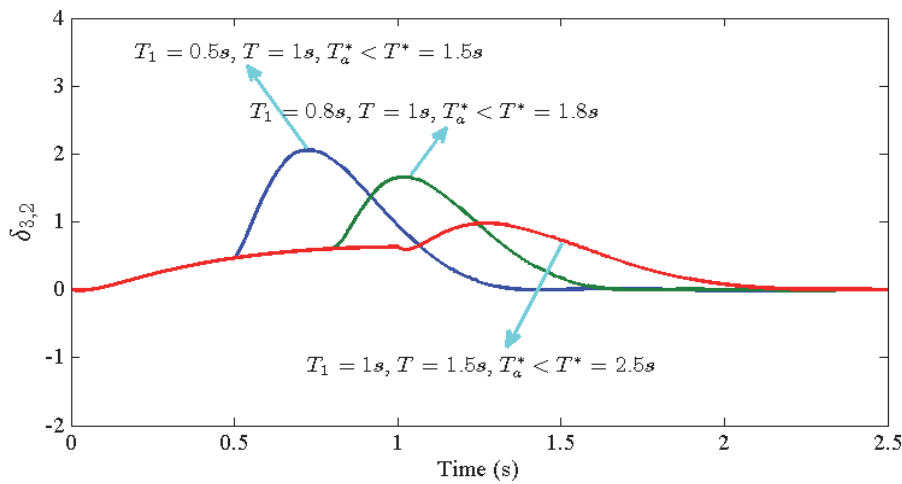


图 7.8 不同给定观测时间 T_1 以及不同给定收敛时间 T 下的 2 阶误差收敛对比图

Figure 7.8 The 2nd error convergence comparison under different observing time T_1 and different pre-given finite convergence time T

由图 7.7 和图 7.8 可以看出, 在所设计给定有限时间控制协议(7.20)-(7.21)下, 分别提前设定不同的有限时间, 所有跟随者与领导者之间1阶误差和2阶误差均在所给定的有限时间内与领导者的各阶状态达到同步, 表明所有跟随者的各阶状态均在所给定的有限时间内与领导者的各阶状态达到同步。

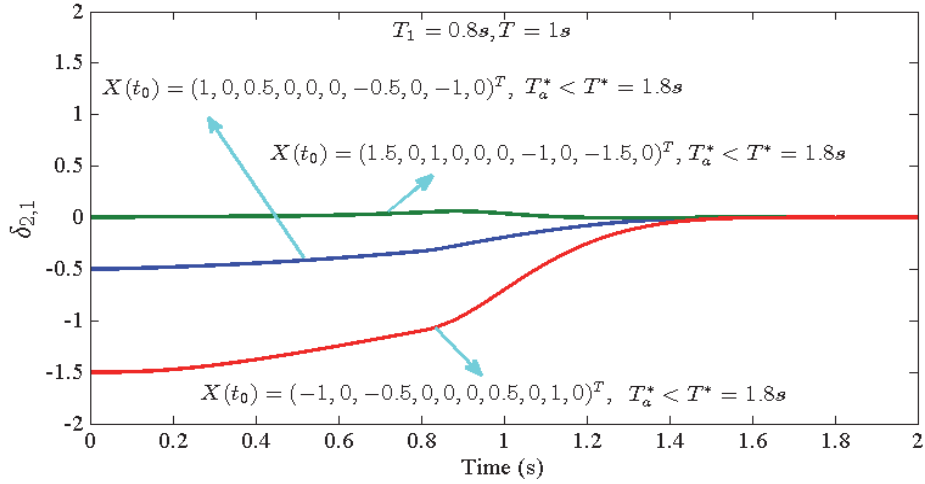


图 7.9 不同初始值条件下的1阶误差收敛对比图

Figure 7.9 The 1st error convergence comparison under different initial conditions

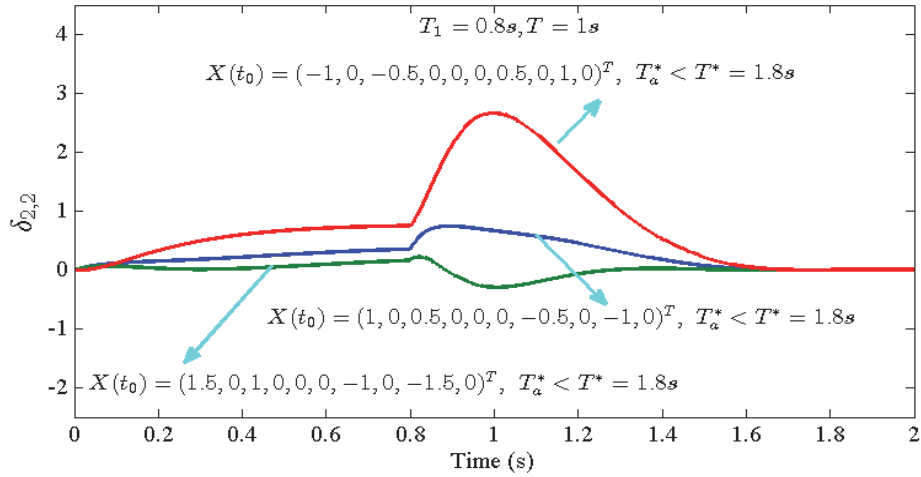


图 7.10 不同初始值条件下的2阶误差收敛对比图

Figure 7.10 The 2nd error convergence comparison under different initial conditions

图 7.9 和图 7.10 给出了第2个跟随者（其他跟随者都有相类似结果, 在这里不再重复给出）在给定的相同的有限时间, T_1 和 T , 但不同初始条件下的1阶误差和2阶误差收敛情况。从图中可以看出, 在所设计给定有限时间控制协议(7.20)-(7.21)

下, 分别给定不同的初始条件, 所有跟随者与领导者之间1阶误差和2阶误差均在所给定的有限时间内与领导者的各阶状态达到同步, 表明了所有跟随者均在所给定的有限时间内与领导者实现全状态同步, 并且该有限时间与初始条件无关。

综合所有的仿真测试结果, 可以得出结论, 本节所设计的给定有限时间控制算法可以保证高阶多智能体系统在提前给定的有限时间内实现全状态跟踪, 其有限收敛时间不依赖于任何初始条件和其他设计参数, 因为可以提前统一设定, 因此验证了所得理论结果的正确性以及所设计控制算法的有效性。

7.3 本章小结

本章解决了高阶线性多智能体系统的给定有限时间一致性追踪控制问题, 通过利用两个不同的时变比例函数, 设计出给定有限时间分布式观测器以及基于观测器的给定有限时间控制分布式控制协议, 从而使得系统中所有跟随者的各阶状态实现与领导者的相应各阶状态在给定有限时间内实现同步。

本章的创新点主要在于: 1) 不同于目前存在的观测器的方法, 观测器观测到领导者状态的时间不但是有限的, 并且该有限时间可以任意提前统一设定, 而不依赖于任何初始观测误差以及设计参数; 2) 在所设计的分布式控制协议下, 系统中的所有跟随者可以在任意给定有限时间内保持与领导者同步, 其有限时间同样可以任意提前给定, 不依赖于任何初始条件以及其他任何设计参数; 3) 所设计的给定有限时间分布式控制协议可以保证控制输入信号, 除了在观测器切换点处连续, 在其他所有时间点均是光滑有界的。

8 多智能体系统（给定）有限时间编队合围应用研究

8.1 引言

本章主要将前面几章中所得到的针对多智能体系统的有限时间或给定有限时间一致性控制方法应用到多智能体系统的编队或合围控制问题中。本章第二节主要研究了有向拓扑条件下含未知常数控制增益以及可线性参数化分解非线性因素的二阶多智能体系统的有限时间编队-合围控制问题。本章第三节研究了含有未知时变控制增益以及不可线性参数化分解非线性因素的二阶多智能体系统的有限时间编队控制问题。本章第四节研究了高阶纯反馈多智能体系统的有限时间合围控制问题。本章第五节和第六节分别研究了有向拓扑条件下一阶线性多智能体和高阶线性多智能体系统的给定有限时间合围控制问题。

8.2 二阶可参数化分解非线性多智能体系统的有限时间编队-合围控制

本节主要基于第三章中提出的针对含有未知常数控制增益以及可线性参数化分解非线性因素的二阶多智能体系统的有限时间一致性控制方法，解决了有向拓扑条件下该系统的有限时间编队-合围控制问题。相对于一致性问题，编队-合围问题更具有挑战性。有限时间编队-合围问题是指在含有多个领导者和多个跟随者的多智能体系统中，多个领导者通过和其他领导者协同合作在有限时间内形成给定编队队形，同时多个跟随者通过接受来自领导者的部分信息并和跟随者之间协同合作以在有限时间进入领导者编队所形成的凸包区域内。编队-合围控制问题在实际中有很多的应用。例如：对于一组要到达某个指定目标区域的战斗机，配备有必要的传感器来检测障碍的领导车辆必须在有限时间内到达给定的编队位置，同时跟随车辆需要保持在领导者形成的安全区域之内以避免危险障碍物。

8.2.1 问题描述

对于编队-合围问题，如果一个智能体的邻居只有领导者，则称该智能体为领导者，如果一个智能体在该多智能体系统中有至少一个邻居，则称该智能体为跟随者。考虑具有二阶非线性动态的 N 个多智能体构成的多智能体系统，其中包含 M 个领导者和 $(N-M)$ 个跟随者，每个多智能体的动态模型为(3.1)。设 $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, M\}$ 和 $\mathcal{B} = \{M+1, M+2, \dots, N\}$ 分别为领导者和跟随者的指标集合。

定义 8.1 考虑多智能体系统(3.1)。如果对于任意给定初始状态，都存在某个有限时间 T^* 使得对于所有 $t \geq T^*$ 和 $j, k \in \mathcal{A}$ ，都成立：

$$(x_k(t) - x_j(t)) - (\varpi_k - \varpi_j) = 0_s \quad (8.1)$$

其中 $\varpi = [\varpi_1^T, \varpi_2^T, \dots, \varpi_M^T]^T$ ($\varpi_k = [\varpi_{k1}, \dots, \varpi_{ks}]^T, k \in \mathcal{A}$) 代表针对领导者的给定编队队形结构, 同时存在一组非负常数 σ_j ($j \in \mathcal{A}$) 满足 $\sum_{j=1}^M \sigma_j = 1$, 从而对于所有的 $t \geq T^*$ 以及所有的 $i \in \mathcal{B}$, 成立:

$$x_i(t) - \sum_{j=1}^M \sigma_j x_j(t) = 0_s \quad (8.2)$$

等式(8.1)和(8.2)意味着领导者和其邻居领导者相互协作从而在有限时间内形成指定编队, 同时跟随者通过与邻居相互协作以在有限时间内进入领导者的编队所形成的凸包区域内, 从而领导者对其形成合围。

本节的控制目标为: 分别针对领导者和跟随者建立分布式自适应控制算法, 以使得二阶非线性多智能体系统(3.1)中的领导者在有限时间内形成编队, 同时跟随者在有限时间内进入领导者构成的凸包区域, 即实现合围。

假设 8.1 多智能体系统(3.1)中领导者之间的通讯拓扑关系是有向强连通的, 跟随者之间的通讯拓扑是有向的, 并且对于每一个跟随者, 至少存在一个领导者对其有一条有向路径。

假设 N 个智能体之间的通讯拓扑关系用有向图 \mathcal{G} 来表示。在假设 8.1 下, 有向图 \mathcal{G} 的拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 可以表示为:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & 0 \\ \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_3 \end{bmatrix} \quad (8.3)$$

其中 $\mathcal{L}_1 \in R^{M \times M}$ 是领导者之间的相互作用拓扑图 \mathcal{G}_A 所对应的拉普拉斯矩阵, $\mathcal{L}_2 \in R^{(N-M) \times M}$, $\mathcal{L}_3 \in R^{(N-M) \times (N-M)}$ 。由文献[133]可知在假设 8.1 下 \mathcal{L}_3 的所有特征值都具有正实部。另外, 矩阵 $-\mathcal{L}_3^{-1} \mathcal{L}_2$ 的所有元素都是非负的, 并且 $-\mathcal{L}_3^{-1} \mathcal{L}_2$ 的每一行的和都等于1。由文献[134]中定理 2.3 可知, 存在一个矩阵 $\xi = \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_{N-M}\}$ ($\xi_k > 0$) 使得 $(\xi \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_3^T \xi)$ 是正定矩阵。

8.2.2 主要结果

本节中首先为每个领导者设计有限时间控制器, 使得所有领导者通过协同合作在有限时间内达到给定编队, 并利用 Lyapunov 稳定性分析方法给出严格理论证明, 然后为每个跟随者设计有限时间控制器, 使得所有跟随者与其邻居 (包括领导者和跟随者) 协同合作在有限时间进入领导者形成的凸包区域内, 同样给出严格理论证明。

为了针对领导者设计有限时间控制器, 引入局部误差如下:

$$e_{ki} = \sum_{j \in \mathcal{N}_k} a_{kj} (x_{ki} - \varpi_{ki} - x_{ji} + \varpi_{ji}), \quad k \in \mathcal{A}, \quad i = 1, \dots, s \quad (8.4)$$

其中 \mathcal{N}_k 是第 k 个智能体的邻居集合, ϖ_{ki} 代表给定的编队结构使得 $x_{ki} - x_{ji} = \varpi_{ki} - \varpi_{ji}$ ($k, j \in \mathcal{A}$)。令 $x_A = [x_{A1}^T, x_{A2}^T, \dots, x_{As}^T]^T$, $\varpi = [\varpi_1^T, \varpi_2^T, \dots, \varpi_s^T]^T$ 以及

$E_{\mathcal{A}} = [e_{\mathcal{A}1}^T, e_{\mathcal{A}2}^T, \dots, e_{\mathcal{A}s}^T]^T$, 其中 $x_{\mathcal{A}i} = [x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Mi}]^T$, $\varpi_i = [\varpi_{1i}, \varpi_{2i}, \dots, \varpi_{Mi}]^T$ 以及 $e_{\mathcal{A}i} = [e_{1i}, e_{2i}, \dots, e_{Mi}]^T$ ($i=1, 2, \dots, s$), 则成立:

$$E_{\mathcal{A}} = (I_s \otimes \mathcal{L}_1)(x_{\mathcal{A}} - \varpi) \quad (8.5)$$

由于 \mathcal{L}_1 是有向强连通图 $\mathcal{G}_{\mathcal{A}}$ 所对应的拉普拉斯矩阵, 故由引理 2.3 可知 $E_{\mathcal{A}} = (I_s \otimes \mathcal{L}_1)(x_{\mathcal{A}} - \varpi) = 0_{Ms}$ 当且仅当 $x_{1i} - \varpi_{1i} = \dots = x_{Mi} - \varpi_{Mi}$ ($i=1, \dots, s$)。故本节中有限时间编队目标实现当且仅当在有限时间内 $E_{\mathcal{A}} \rightarrow 0_{Ms}$ 。

基于上述目标, 提出如下分布式控制协议:

$$u_k = -c_3 \delta_k^{2h-1} - \hat{\beta}_k^T \phi_k, \quad k \in \mathcal{A} \quad (8.6)$$

其中 δ_k 为局部虚拟误差向量, 其定义如下:

$$\delta_{ki} = v_{ki}^{1/h} - v_{ki}^{*1/h}, \quad v_{ki}^* = -c_4 e_{ki}^h, \quad k \in \mathcal{A}, \quad i=1, \dots, s \quad (8.7)$$

其中 $h = \frac{2l-1}{2l+1}$, $l \in \mathbb{Z}^+$, $c_4 > 0$ 是自由设计参数, 估计参数 $\hat{\beta}_k$ 的自适应律为:

$$\dot{\hat{\beta}}_k(j, i) = \text{Proj}((\Gamma_k \phi_k \delta_k^T)(j, i), \hat{\beta}_k(j, i)), \quad k \in \mathcal{A} \quad (8.8)$$

其中, $i=1, \dots, s$; $j=1, \dots, m$, $\delta_k^{2h-1} = [\delta_{k1}^{2h-1}, \dots, \delta_{ks}^{2h-1}]^T$, $\bullet(j, i)$ 代表 \bullet 的第 j 行第 i 列元素, $c_3 > 0$ 为设计参数, $\Gamma_k = \text{diag}\{\gamma_{k1}, \dots, \gamma_{km}\} \in R^{m \times m} > 0$ 是设计参数矩阵, $\hat{\beta}_k$ 为未知常参数 β_k 的估计值, $\phi_k(\cdot)$ 是可计算的已知函数向量。该控制器包含两部分: $-c_3 \delta_k^{2h-1}$, 确保有限时间编队形成; $\hat{\beta}_k^T \phi_k$, 对非线性不确定因素进行有效补偿。

定理 8.1 在假设 8.1 所设拓扑条件下, 分布式一致性协议(8.6)-(8.8)可以保证二阶非线性多智能体系统(3.1)中的所有领导者在有限时间内达到给定编队, 其中有限收敛时间 $T_{\mathcal{A}}^*$ 满足:

$$T_{\mathcal{A}}^* = T_{\mathcal{A}1}^* + T_{\mathcal{A}2}^* \quad (8.9)$$

$$T_{\mathcal{A}1}^* \leq (V_{\mathcal{A}}(0) - \zeta_{\mathcal{A}}) / d_{\mathcal{A}\zeta} \quad (8.10)$$

$$T_{\mathcal{A}2}^* \leq \frac{V_{\mathcal{A}2}(0)^{\frac{1-h}{1+h}} k_{\mathcal{A}v}^{\frac{2h}{1+h}} (1+h)}{(1-\rho_2)\rho_1 k_{\mathcal{A}d} (1-h)} \quad (8.11)$$

其中 $0 < \rho_1 \leq 1$, $0 < \rho_2 < 1$ 。

证明: 注意到对领导者的邻居误差 $E_{\mathcal{A}} = (I_s \otimes \mathcal{L}_1)(x_{\mathcal{A}} - \varpi)$ 求导得到 $\dot{E}_{\mathcal{A}} = (I_s \otimes \mathcal{L}_1)v_{\mathcal{A}}$ 。故采用类似定理 3.1 中的证明过程, 很容易得出针对领导者的有限时间编队结果。在此就不再赘述。

证明完毕。

由于在领导者未形成编队之前, 领导者的状态是动态变化的, 并且不能保证其状态有界性, 这对有限时间合围控制器设计以及稳定性分析带来困难和挑战。下面着重介绍对跟随者的有限时间合围控制设计和稳定性分析。

首先针对第 k ($k \in \mathcal{B}$) 个跟随者给出其邻居误差定义:

$$e_{ki} = \sum_{j \in \mathcal{N}_k} a_{kj}(x_{ki} - x_{ji}), k \in \mathcal{B} \quad (8.12)$$

对 $i=1,2,\dots,s$, 令

$$\begin{aligned} x_{Bi} &= [x_{M+1,i}, x_{M+2,i}, \dots, x_{Ni}]^T \in \mathfrak{R}^{N-M}, \quad e_{Bi} = [e_{M+1,i}, e_{M+2,i}, \dots, e_{Ni}]^T \in \mathfrak{R}^{N-M} \\ x_B &= [x_{B1}^T, x_{B2}^T, \dots, x_{Bs}^T]^T \in \mathfrak{R}^{(N-M)s}, \quad E_B = [e_{B1}^T, e_{B2}^T, \dots, e_{Bs}^T]^T \in \mathfrak{R}^{(N-M)s} \end{aligned}$$

则有如下关系式成立:

$$\begin{aligned} E_B &= (I_s \otimes \mathcal{L}_2)x_A + (I_s \otimes \mathcal{L}_3)x_B \\ &= (I_s \otimes \mathcal{L}_3)[x_B - (-I_s \otimes (\mathcal{L}_3^{-1}\mathcal{L}_2))x_A] \end{aligned} \quad (8.13)$$

由(8.13)可以看出跟随者进入领导者所形成的凸区域内当且仅当 $E_B \rightarrow 0$ 。由文献[133]可知矩阵 $-\mathcal{L}_3^{-1}\mathcal{L}_2$ 的每一个元素都是非负的, 并且每一行元素的和为1。

定义第 k ($k \in \mathcal{B}$) 个跟随者的虚拟误差为 $\delta_{ki} = v_{ki}^{1/h} - v_{ki}^{*1/h}$ ($i=1,\dots,s$), 其中 $v_{ki}^* = -c_6 e_{ki}^h$, $c_6 > 0$ 为自由设计参数。

由跟随者的局部误差 e_{ki} 的定义以及局部虚拟误差 δ_{ki} 的定义, 可知在假设 8.1 条件下若在有限时间内 $e_{ki} \rightarrow 0$ 和 $\delta_{ki} \rightarrow 0$, 则实现了有限时间合围控制目标。所以设计有限时间合围控制器如下:

$$u_k = -c_5 \delta_k^{2h-1} - \hat{\beta}_k^T \phi_k, \quad k \in \mathcal{B} \quad (8.14)$$

其中 $\hat{\beta}_k$ 的自适应律为:

$$\dot{\hat{\beta}}_k(j,i) = \text{Proj}((\Sigma_k \phi_k \delta_k^T)(j,i), \hat{\beta}_k(j,i)), \quad k \in \mathcal{B} \quad (8.15)$$

$j=1,\dots,m$, $i=1,\dots,s$, 其中 $c_5 > 0$ 是自由设计参数, $\Sigma_k = \text{diag}\{\sigma_{k1}, \dots, \sigma_{km}\} \in \mathfrak{R}^{m \times m} > 0$ 是设计参数矩阵, β_k 和 $\phi_k(\cdot)$ 和定理 3.1 中定义相同。注意到在所设计控制器中, 负分数阶反馈项 $-c_5 \delta_k^{2h-1}$ 起到时合围误差在有限时间内达到收敛的作用, 自适应项 $\hat{\beta}_k^T \phi_k$ 可以补偿系统中的非线性不确定因素。

定理 8.2 在假设 8.1 所设拓扑条件下, 分布式一致性协议(8.14)-(8.15)可以保证二阶非线性多智能体系统(3.1)中的所有跟随者在有限时间内进入领导者所形成凸区域内, 实现合围, 其中, 有限收敛时间 T_B^* 满足:

$$T_B^* = T_A^* + T_{B1}^* + T_{B2}^* \quad (8.16)$$

其中, T_A^* 由(8.9)给出, 且

$$T_{B1}^* \leq (V_B(0) - \zeta_B) / d_{B\zeta} \quad (8.17)$$

$$T_{B2}^* \leq \frac{V_{B2}(0)^{\frac{1-h}{1+h}} k_{Bv}^{\frac{2h}{1+h}} (1+h)}{(1-\rho_2)\rho_1 k_{Bd} (1-h)} \quad (8.18)$$

其中 $0 < \rho_1 \leq 1$, $0 < \rho_2 < 1$ 。

证明: 注意到在领导者未形成给定编队之前, 领导者是动态变化的, 并且其控制输入信号对于跟随者来说是未知不可测的。为了使得跟随者进入领导者形成的凸区域内, 首先证明当 $t \in [0, T_A^*)$ 时跟随者的状态保持在领导者状态的附近有界, 然

后证明跟随者在有限时间 T^* ($T^* > T_A^*$) 内达到合围。整个证明分为两种情况： $t \in [0, T_A^*)$ 和 $t \geq T_A^*$ 。

情况 1: $t \in [0, T_A^*)$

由文献[134](pp.134)中的定理 2.3 可知, 存在矩阵 $\xi = \text{diag}\{\xi_1, \dots, \xi_{N-M}\}$ ($\xi_k > 0$) 使得 $(\xi \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_3^T \xi)/2$ 为正定矩阵。令 λ_m 代表 $(\xi \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_3^T \xi)/2$ 的最小特征值。构造第一部分 Lyapunov 候选函数如下:

$$V_{B1} = \frac{1}{(1+h)\lambda_m} (E_B^{\frac{1+h}{2}})^T (I_s \otimes \xi) E_B^{\frac{1+h}{2}} \quad (8.19)$$

并对其求导得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{B1} &= \frac{1}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes \xi) (I_s \otimes \mathcal{L}_3) \left[v_B - (-I_s \otimes (\mathcal{L}_3^{-1} \mathcal{L}_2)) v_A \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_3)) v_B + \frac{1}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_2)) v_A \\ &\leq \frac{1}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_3)) v_B + \frac{1}{2\lambda_m} (E_B^h)^T E_B^h \\ &\quad + \frac{1}{2\lambda_m} [(I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_2)) v_A]^T [(I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_2)) v_A] \end{aligned} \quad (8.20)$$

其中 $v_B = \dot{x}_B$ 。

下面检测不等式(8.20)右边第一项。由于 $v_B^* = -c_6 E_B^h$, 且 $v_B = \dot{x}_B$, 则

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_3)) v_B \\ &= -\frac{c_6}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_3)) E_B^h + \frac{1}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_3)) (v_B - v_B^*) \\ &\leq -c_6 (E_B^h)^T E_B^h + \frac{1}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_3)) (v_B - v_B^*) \\ &= -c_6 \sum_{i=1}^s \sum_{k=M+1}^N e_{ki}^{2h} + \frac{1}{\lambda_m} \sum_{i=1}^s \left[\sum_{k=M+1}^N (v_{ki} - v_{ki}^*) \sum_{j=M+1}^N l_{jk} e_{ji}^h \right] \end{aligned} \quad (8.21)$$

其中 l_{jk} 是 $(\xi \mathcal{L}_3)^T$ 的第 j 行第 k 列元素, 上式中用到了性质 $(E_B^h)^T (I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_3)) E_B^h \geq \lambda_m (E_B^h)^T E_B^h$, 其中 $\lambda_m > 0$ 为常数。

通过类似定理 3.1 中对式(3.34)-(3.35)的证明过程, 可以得出:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_3)) v_B \\ &\leq -c_6 \sum_{i=1}^s \sum_{k=M+1}^N e_{ki}^{2h} + 2^{-h} \lambda_m^{-1} (N-M) l_{\max} \sum_{i=1}^s \sum_{k=M+1}^N (\delta_{ki}^{2h} + e_{ki}^{2h}) \end{aligned} \quad (8.22)$$

其中, $l_{\max} = \max_{j,k \in B} |l_{jk}|$ 。

令 $\bar{g}_B = \max_{k \in B} \{g_{ki}\}$ 。分别构造第二和第三部分 Lyapunov 候选函数如下:

$$V_{B2} = \frac{1}{2^{1-h} \bar{g}_B} \sum_{i=1}^s \sum_{k=M+1}^N g_{ki} \int_{v_{ki}^*}^{v_{ki}} (\zeta^{\frac{1}{h}} - (v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}}) d\zeta \quad (8.23)$$

$$V_{B3} = \sum_{k=M+1}^N \frac{\text{tr}\{\tilde{\beta}_k^T \Sigma_k^{-1} \tilde{\beta}_k\}}{2^{2-h} \bar{g}_B} \quad (8.24)$$

应用式(8.14)给出的控制协议 u_k ($k \in \mathcal{B}$) 和式(8.15)对 $\hat{\beta}_k$ 的自适应律, 采用类似证明(3.37)-(3.44)的步骤, 易得:

$$\frac{1}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_3)) v_B + \dot{V}_{B2} + \dot{V}_{B3} \leq -k_9 \sum_{i=1}^s \sum_{k=M+1}^N \delta_{ki}^{2h} - k_{10} \sum_{i=1}^s \sum_{k=M+1}^N e_{ki}^{2h} \quad (8.25)$$

其中

$$k_9 = -2^{-h} \lambda_m^{-1} (N-M) l_{\max} + \frac{c_5}{2^{1-h} \bar{g}_B} - (2^{2-h} c_6^{1/h} r_B + 2c_6^{2(1+1/h)} r_B^2) \bar{n}_B \quad (8.26)$$

$$k_{10} = c_6 - 2^{-h} \lambda_m^{-1} (N-M) l_{\max} - \frac{\bar{n}_B}{2}$$

其中 $r_B = \max_{\forall k, j \in \mathcal{B}} \{a_{kj}\}$, \bar{n}_B 表示所有 $k \in \mathcal{B}$ 的邻居集 \mathcal{N}_k 中所包含元素个数最大的数目, 可以选择参数 c_5 和 c_6 使得 $k_9 > 0$ 和 $k_{10} > 0$ 。

下面估计式(8.20)右边第二项。注意到:

$$V_{B1} \geq \frac{\lambda_{\min}(\xi)}{(1+h)\lambda_m} \left(E_B^{\frac{1+h}{2}} \right)^T E_B^{\frac{1+h}{2}} = \frac{\lambda_{\min}(\xi)}{(1+h)\lambda_m} \sum_{i=1}^s \sum_{k=M+1}^N e_{ki}^{1+h} \quad (8.27)$$

则得下式成立:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\lambda_m} (E_B^h)^T E_B^h &= \frac{1}{2\lambda_m} \sum_{i=1}^s \sum_{k=M+1}^N (e_{ki}^{1+h})^{\frac{2h}{1+h}} \\ &\leq \frac{[s(N-M)]^{1-\frac{2h}{1+h}}}{2\lambda_m} \left(\sum_{i=1}^s \sum_{k=M+1}^N e_{ki}^{1+h} \right)^{\frac{2h}{1+h}} \leq k_B V_{B1}^{\frac{2h}{1+h}} \end{aligned} \quad (8.28)$$

其中, $k_B = \frac{1}{2} \left(\frac{s(N-M)}{\lambda_m} \right)^{\frac{1-h}{1+h}} \left(\frac{1+h}{\lambda_{\min}(\xi)} \right)^{\frac{2h}{1+h}}$ 。

下面检测式(8.20)右边第三项。用 $\chi_{j,k}$ 表示矩阵 $(\xi \mathcal{L}_2)$ 的第 j 行第 k 列元素, 则

$$\begin{aligned} [(I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_2)) v_A]^T [(I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_2)) v_A] &= \sum_{i=1}^s \left[\sum_{j=1}^N \left(\sum_{k=1}^M \chi_{jk} v_{ki} \right)^2 \right] \\ &\leq \chi_{\max} \sum_{i=1}^s \left[\sum_{j=M+1}^N \left(\sum_{k=1}^M |v_{ki}| \right)^2 \right] = (N-M) \chi_{\max} \sum_{i=1}^s \left(\sum_{k=1}^M |v_{ki}| \right)^2 \end{aligned} \quad (8.29)$$

其中, $\chi_{\max} = \max_{j,k \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}} \{|\chi_{jk}|\}$ 。

为了证明上式(8.29) $\sum_{i=1}^s \left(\sum_{k=1}^M |v_{ki}| \right)^2$ 的有界性, 利用编队控制中类似(3.57)的关系

式可知 $\dot{V}_{A2}(t) \leq -\tilde{c}_A V_{A2}(t)^{\frac{2h}{1+h}}$, 故, $V_{A2}(t) \leq V_{A2}(0)$ 。令 $c_A = \tilde{c}_A V_{A2}(0)^{\frac{2h}{1+h}-1}$, 则, $\dot{V}_{A2}(t) \leq -c_A V_{A2}(t)$, 故进一步得:

$$V_{\mathcal{A}2}(t) \leq V_{\mathcal{A}2}(t_0)e^{-c_{\mathcal{A}}t} \quad (8.30)$$

一方面，由引理 3.2 得：

$$\left| \varsigma^{\frac{1}{h}} - (v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}} \right| \geq \left(2^{h-1} |\varsigma - v_{ki}^*| \right)^{\frac{1}{h}} \quad (8.31)$$

则，若 $v_{ki} \geq v_{ki}^*$ ，可由(3.36)和(8.31)得到：

$$\frac{1}{2^{1-h} \bar{g}_{\mathcal{A}}} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M g_{ki} \int_{v_{ki}^*}^{v_{ki}} \left(\varsigma^{\frac{1}{h}} - (v_{ki}^*)^{\frac{1}{h}} \right) d\varsigma \geq \frac{h \underline{g}_{\mathcal{A}}}{2^{1/h-h} \bar{g}_{\mathcal{A}} (1+h)} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M (v_{ki} - v_{ki}^*)^{1+1/h} \quad (8.32)$$

其中 $\underline{g}_{\mathcal{A}} = \min_{k,i \in \mathcal{A}} \{g_{ki}\}$ 。若 $v_{ki} < v_{ki}^*$ ，类似仍可得到式 (8.32) 成立。令

$k_0 = \left(\frac{h \underline{g}_{\mathcal{A}}}{2^{1/h-h} \bar{g}_{\mathcal{A}} (1+h)} \right)^{-1}$ ，则合并(8.32)，(8.30)，(3.36)可得：

$$\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M (v_{ki} - v_{ki}^*)^{1+1/h} \leq k_0 V_{\mathcal{A}2}(t_0) e^{-c_{\mathcal{A}}t} \quad (8.33)$$

通过应用引理 3.1 两次，则由(8.33)得到：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M |v_{ki} - v_{ki}^*| &= \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M \left(|v_{ki} - v_{ki}^*|^{\frac{1+h}{h}} \right)^{\frac{h}{1+h}} \\ &\leq (sM)^{1-\frac{h}{1+h}} \left(\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M |v_{ki} - v_{ki}^*|^{\frac{1+h}{h}} \right)^{\frac{h}{1+h}} \leq \mu_1 e^{-k_{\mu_1} t} \end{aligned} \quad (8.34)$$

其中 $\mu_1 = (sM)^{1-\frac{h}{1+h}} (k_0 V_{\mathcal{A}2}(0))^{\frac{h}{1+h}}$ ， $k_{\mu_1} = \frac{h}{1+h} c_{\mathcal{A}}$ 。另一方面，根据引理3.1可得：

$$\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M |v_{ki}^*| = \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M |c_2 e^h| = c_2 \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M |e_{ki}^{1+h}|^{\frac{h}{1+h}} \leq c_2 (sM)^{\frac{1}{1+h}} \left(\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M |e_{ki}^{1+h}| \right)^{\frac{h}{1+h}} \quad (8.35)$$

由 $V_{\mathcal{A}1}$ 的定义可知，

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M e_{ki}^{1+h} &= (E_{\mathcal{A}}^{\frac{1+h}{2}})^T E_{\mathcal{A}}^{\frac{1+h}{2}} \leq (1+h) k_m p_m^{-1} V_{\mathcal{A}1} \\ &\leq (1+h) k_m p_m^{-1} V_{\mathcal{A}2} \leq (1+h) k_m p_m^{-1} V_{\mathcal{A}2}(t_0) e^{-c_{\mathcal{A}}t} \end{aligned} \quad (8.36)$$

其中， $p_m = \min\{p_1, \dots, p_M\}$ 。由(8.36)和(8.35)得

$$\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M |v_{ki}^*| \leq \mu_2 e^{-k_{\mu_2} t} \quad (8.37)$$

其中， $\mu_2 = c_2 (sM)^{\frac{1}{1+h}} [(1+h) k_m p_m^{-1} V_{\mathcal{A}2}(0)]^{\frac{h}{1+h}}$ ， $k_{\mu_2} = \frac{h}{1+h} c_{\mathcal{A}}$ 。

由(8.34)和(8.37)，可得下面不等式成立：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s \left(\sum_{k=1}^M |v_{ki}| \right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M |v_{ki}| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M |v_{ki} - v_{ki}^*| + \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^M |v_{ki}^*| \right)^2 \\ &\leq \left(\mu_1 e^{-k_{\mu_1} t} + \mu_2 e^{-k_{\mu_2} t} \right)^2 \leq (\mu_1 + \mu_2)^2 \end{aligned} \quad (8.38)$$

将(8.38)代入(8.29)中，则可得下式成立：

$$\frac{1}{2\lambda_m}[(I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_2))v_A]^T [(I_s \otimes (\xi \mathcal{L}_2))v_A] < \zeta \quad (8.39)$$

其中 $\zeta = \frac{N-M}{2\lambda_m} \chi_{\max}(\mu_1 + \mu_2)^2$ 。

构造Lyapunov候选函数为, $V_B = V_{B1} + V_{B2} + V_{B3}$ 。如果 $V_{B1} \geq 1$, 则由(8.20), (8.25), (8.28), (8.39)可得:

$$\dot{V}_B \leq k_B V_{B1}^{\frac{2h}{1+h}} + \zeta \leq k_B V_B + \zeta \quad (8.40)$$

若 $t \in [0, T_A^*)$, 则由该式可以推断得出:

$$V_B(t) \leq (V_B(0) + k_B^{-1}\zeta)e^{k_B t} - k_B^{-1}\zeta \leq (V_B(0) + k_B^{-1}\zeta)e^{k_B T_A^*} - k_B^{-1}\zeta \quad (8.41)$$

否则, 则 $V_{B1} < 1$ 。这两点意味着, 当 $t \in [0, T_A^*)$ 时 $V_{B1}(t)$ 是有界的。故, 对所有 $k \in \mathcal{B}$,

$$|e_{ki}| \leq \left[\frac{(1+h)\lambda_m}{\lambda_{\min}(\xi)} V_{B1} \right]^{\frac{1}{1+h}} \quad (8.42)$$

故由对每个跟随者邻居误差 e_{ki} 的定义可知, 在 $[0, T_A^*)$ 内, 每一个跟随者的状态都保持在领导者附近有界。

情况 2: $t \geq T_A^*$

注意当 $t \geq T_A^*$ 时, 所有的领导者已经形成了给定编队, 即 $E_A = 0$, 更进一步有当 $t \geq T_A^*$ 时 $v_A = 0$ 成立。因此 $V_{B1}(t)$ 的导数可表示为:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{B1} &= \frac{1}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes \xi)(I_s \otimes L_3) [v_B - (-I_s \otimes (L_3^{-1}L_2))v_A] \\ &= \frac{1}{\lambda_m} (E_B^h)^T (I_s \otimes (\xi L_3))v_B \end{aligned} \quad (8.43)$$

则由(8.25)和(8.43)得:

$$\dot{V}_B \leq -k_9 \sum_{i=1}^s \sum_{k=M+1}^N \delta_{ki}^{2h} - k_{10} \sum_{i=1}^s \sum_{k=M+1}^N e_{ki}^{2h} \quad (8.44)$$

其中 k_9 和 k_{10} 由(8.26)给出。故可推断出, $\dot{V}_B \leq 0$ 。并进一步得到, $V_B(t) \leq V_B(0) < \infty$ 。

同时, 对于所有的 $k \in \mathcal{B}$ 成立:

$$\|\tilde{\beta}_k\|_{\infty} \leq 2^{2-h} \bar{g}_B \bar{\sigma} V_B(t) \leq 2^{2-h} \bar{g}_B \bar{\sigma} V_B(0) \quad (8.45)$$

其中 $\bar{\sigma} = \max_{k \in \mathcal{B}} \{\sigma_{k1}, \dots, \sigma_{km}\}$ ($\Sigma_k = \text{diag}\{\sigma_{k1}, \dots, \sigma_{km}\}$)。

定义如下集合:

$$\Theta_B = \{(x_B, v_B) : |\delta_{ki}| < \zeta_{B1}, |e_{ki}| < \zeta_{B2}\} \quad (8.46)$$

其中可以选取 ζ_{B1} 和 ζ_{B2} 使得 $\zeta_{B1} = \left(\frac{1}{2^{2-h} s}\right)^{1/h}$ 和 $\zeta_{B2} = \left(\frac{1}{2c_6 s}\right)^{1/h}$ 成立。通过采用相似于证明(3.47)-(3.48)的步骤, 可以推理得出存在一个有限时间 T_{B1}^* 满足:

$$T_{B1}^* \leq (V_B(0) - \zeta_B) / d_{B\zeta} \quad (8.47)$$

其中, $\zeta_B = \min_{(x_B, v_B) \in \Theta_B} \{V_B(t)\}$, $d_{B\zeta}$ 满足 $d_{B\zeta} \geq \min\{k_3 s(N-M)\zeta_{B2}^{2h}, k_4 s(N-M)\zeta_{B1}^{2h}\}$, 从而在 $t = T_A^* + T_{B1}^*$ 之前, 所有跟随者的状态进入集合 Θ_B 。而一旦进入该紧集集合, δ_{ki} 和 e_{ki} ($k \in \mathcal{B}$, $i = 1, \dots, s$) 将一直保持在集合内。

通过类似证明(3.49)-(3.58)的过程可以得出, 存在一个有限时间 $T_B^* > 0$ 使得当 $t \geq T_B^*$ 时, $\bar{V}_{B2} = V_{B1} + V_{B2} = 0$ 成立, 其中

$$T_B^* = T_A^* + T_{B1}^* + T_{B2}^* \quad (8.48)$$

$$T_{B2}^* \leq \frac{\bar{V}_{B2}(0)^{\frac{1-h}{1+h}} k_{Bv}^{1+h} (1+h)}{(1-\rho_2)\rho_1 k_{Bd} (1-h)} \quad (8.49)$$

其中, $k_{Bv} = \max\left\{\frac{\lambda_{\max}(\xi)}{(1+h)\lambda_m}, 1\right\}$, $k_{Bd} = \min\{k_9/2, k_{10}/2\}$ 。由 $V_{B1}(t)$ 的定义进一步得到, 当 $t \geq T_B^*$ 时, $E_B = 0$ 。故多智能体系统(3.1)中所有的跟随者在有限时间 T_B^* 内实现合围目标。

注 8.1 相较于文献[105]中针对二阶非线性多智能体系统所研究的有限时间一致性控制问题, 本节中所研究的有限时间编队-合围控制问题更为复杂, 同时应用范围也更广泛。本节中研究的有限时间编队-合围问题旨在在有向网络通讯条件下, 多个领导者之间通过局部相互协同合作在有限时间达到给定编队, 同时每个跟随者同其邻居通过局部协同合作在有限时间内进入领导者们所形成的凸包区域内。文献[123]研究了二阶拉格朗日系统的有限时间姿态合围控制, 但是其所研究多智能体系统中不同跟随者之间的网络通讯关系是双向的, 并且领导者之间不存在通讯以及协同合作关系, 并且所设计的控制协议中, 用到了每个跟随者的邻居的邻居的信息, 这从严格意义上讲不完全属于分布式控制。

8.2.3 仿真结果与分析

本节考虑如下仿真例子来验证所设计有限时间编队-合围控制协议的有效性与可行性。实验中仿真环境为 64 位系统, CPU 为 Intel Core T6600 2.20GHz, 系统内存为 4G, 仿真软件为 Matlab R2012a。

考虑一组由 14 个具有非线性动态的网络无人机 (Unmanned Aerial Vehicles, UAVs) 系统, 其中包括 6 个领导者和 8 个跟随者。其动态模型如(3.59)所示。在仿真中, 物理参数分别取为 $M_k = \text{diag}\{600 + 6(-1)^k, 800 + 8(-1)^k, 700 + 7(-1)^k\}$, $A_k = -1 + 0.1(-1)^k$, $B_k = -25 + 2.5(-1)^k$, $C_k = -10 + (-1)^k$, $D_k = -200 + 20(-1)^k$, $E_k = -0.5 + 0.05(-1)^k$, 和 $F_k = -1500 + 150(-1)^k$ ($k = 1, \dots, 14$)。该无人机系统中 14 个无人机之间的网络拓扑关系如图 8.1 所示。其中每条边的权重取为 0.1。

仿真目标为: 通过应用所设计的有限时间编队控制协议(8.6)-(8.8), 验证无人机系统(3.59)中 6 个无人机领导者是否在有限时间内形成指定的平行六边形编队队形, 其中编队结构定义为 $\varpi_k = [3\sin(k\pi/3), 3\cos(k\pi/3), -3\sin(k\pi/3)]^T$, $k \in \mathcal{A}$; 通

过应用所设计的有限时间合围控制协议(8.14)–(8.15)，验证无人机系统(3.59)中8个跟随者是否在有限时间内进入领导者形成的凸包区域内。仿真中14个无人机的初始位置和初始速度分别设为 $x_k(0) \in [-5, 5]$ ， $y_k(0) \in [5, -5]$ ， $z_k(0) \in [-5, 5]$ ($k \in \mathcal{A}$)， $x_k(0) \in [-6, 6]$ ， $y_k(0) \in [6, -6]$ ， $z_k(0) \in [-6, 6]$ ($k \in \mathcal{B}$)， $v_k(0) = (0, 0, 0)$ ($k = 1, \dots, 14$)。设计参数选取为 $s = 2$ ， $c_3 = 20000$ ， $c_4 = 5$ ， $c_5 = 20000$ ， $c_6 = 5$ 。另外，估计参数 $\hat{\beta}_k$ 的初始值选取为 $\hat{\beta}_k(0) = 0_{3 \times 3}$ ($k = 1, \dots, 14$)。仿真测试结果由图8.2-图8.5给出。

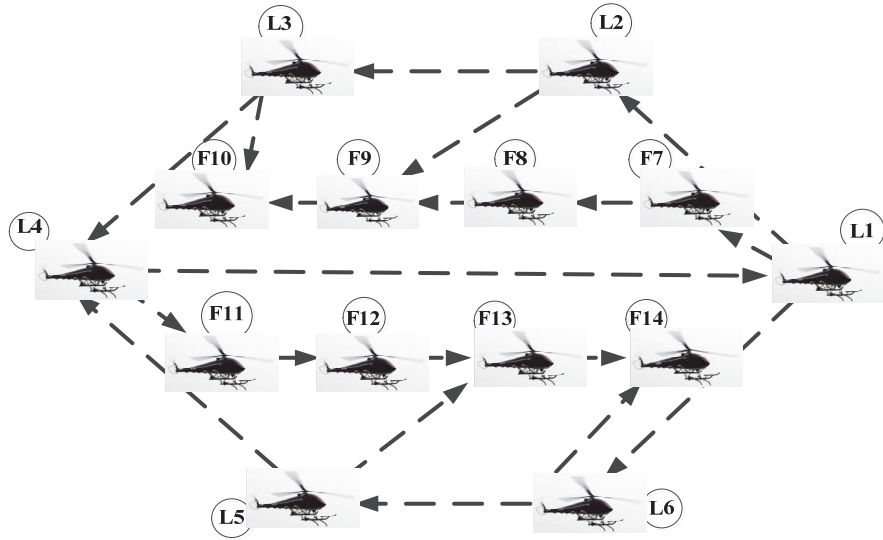


图 8.1 6架领航者无人机和8架跟随者无人机之间的有向通讯关系

Figure 8.1 The directed communication among 6 leader UAVs and 8 follower UAVs

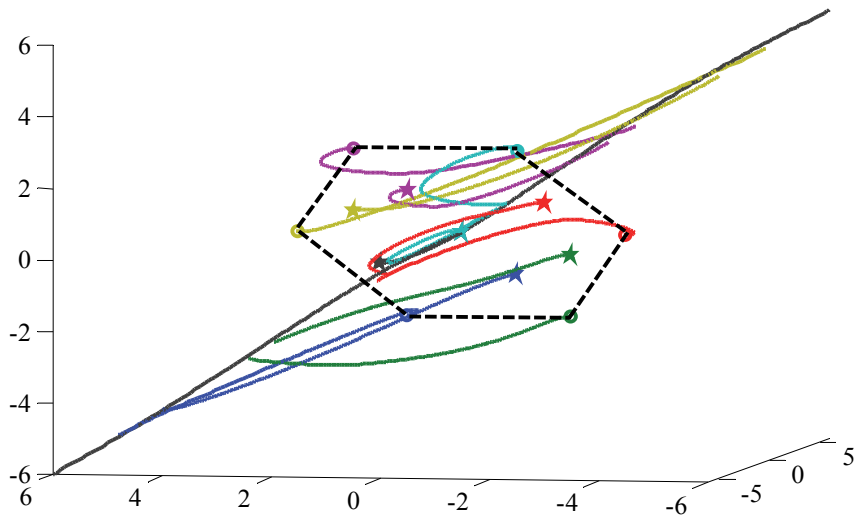
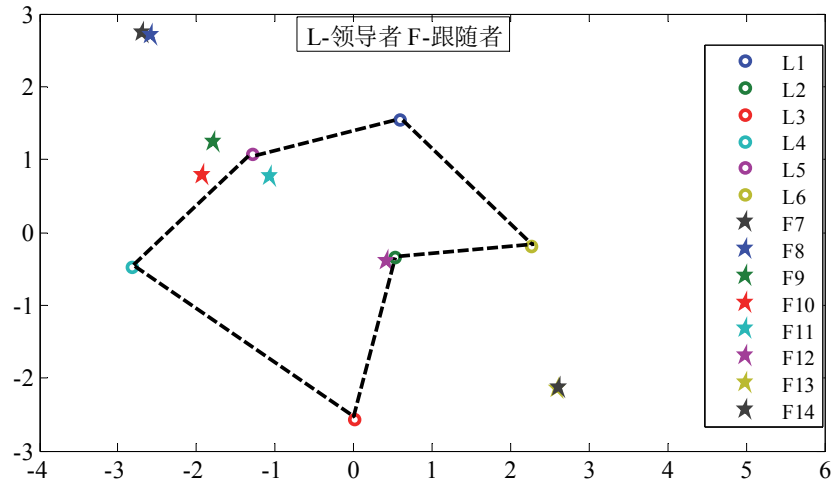
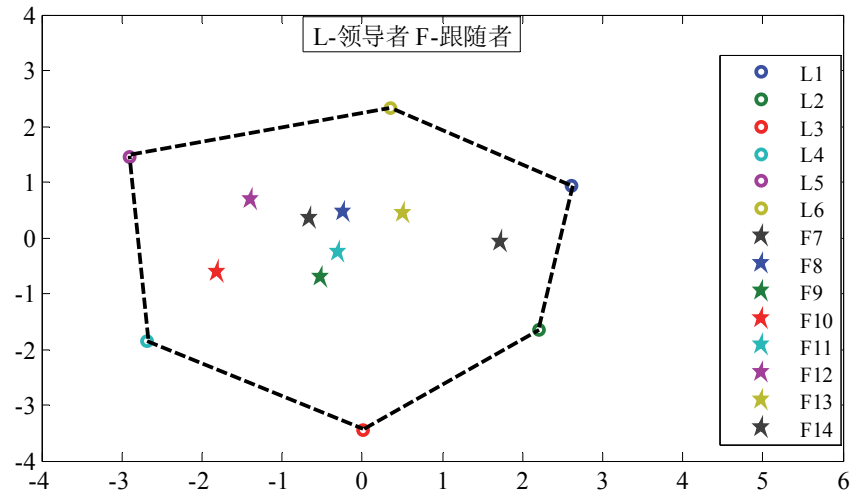


图 8.2 每架无人机从初始位置到终点位置的运动轨迹图

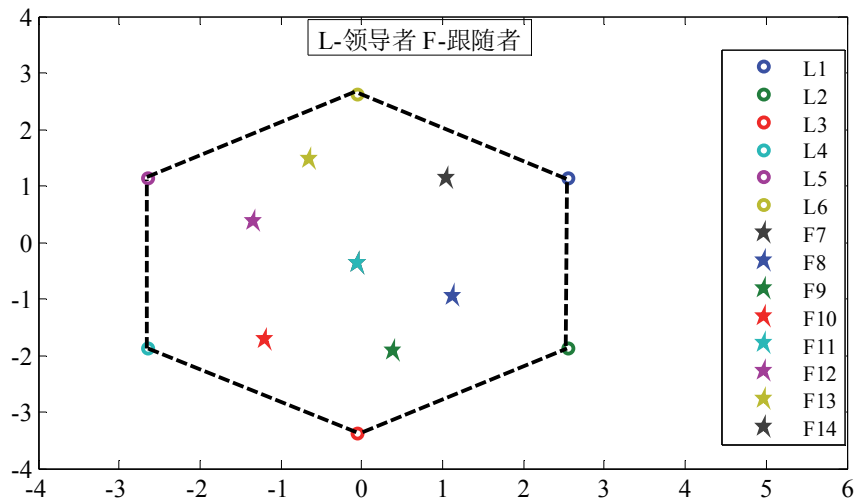
Figure 8.2 Trajectory of each UAV from the initial position to final position



(a) $t = 1s$



(b) $t = 2s$



(c) $t = 3s$

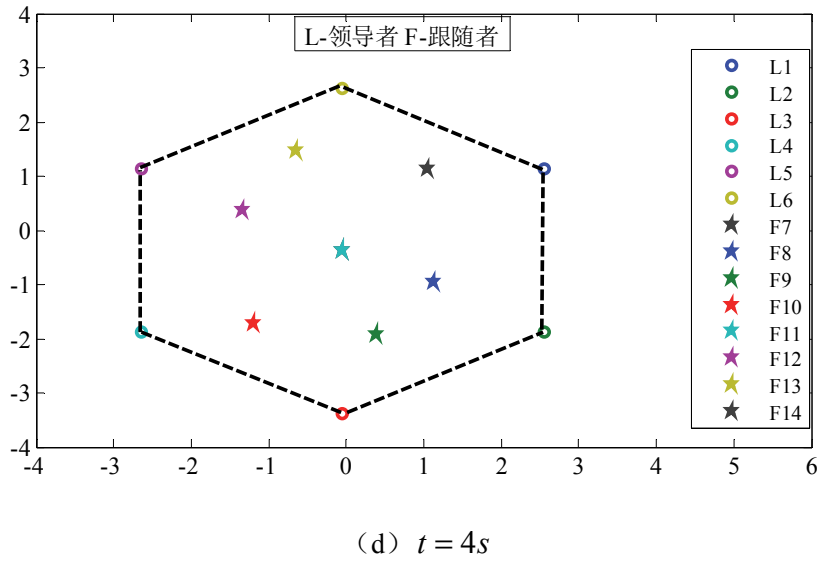


图 8.3 14 架无人机在不同时间点的轨迹快照图

Figure 8.3 Trajectory snapshots of the 14 UAVs at different times

图 8.2 描绘了所有 14 个无人机，包括 6 个领航无人机和 8 个跟随无人机，从初始位置到最终位置的运动轨迹。图 8.3 用在不同时刻无人机的位置图形快照描绘出了 14 个无人机所形成编队-合围的过程，其中领航无人机的状态轨迹用空心圆圈表示，跟随无人机的状态轨迹用五角星表示，由领航无人机的位置状态所围成的凸包区域用虚线拼接而成。由图 8.3 可以看出 6 个领航无人机在有限时间内形成了给定的平行六边形编队队形，而 8 个跟随无人机在有限时间进入到领航无人机所形成的凸包区域内。

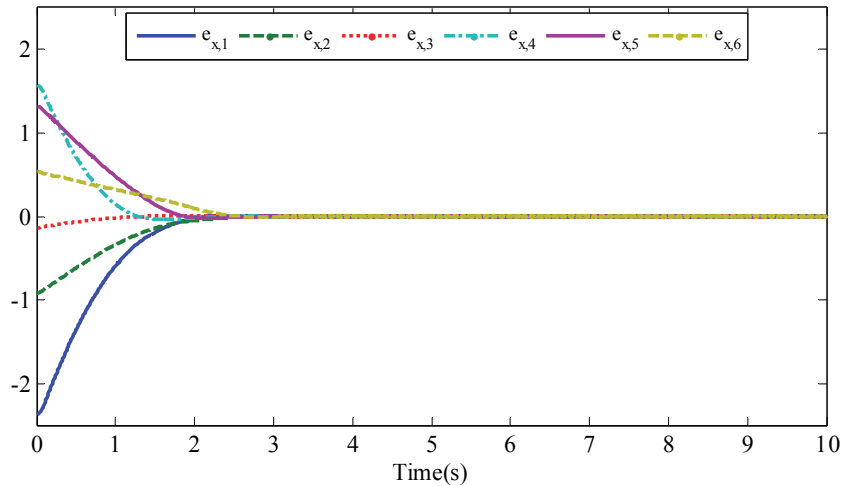

 图 8.4 6 架领航无人机在 x -维方向的局部误差图

 Figure 8.4 The neighborhood errors of the 6 leader UAVs in x -direction

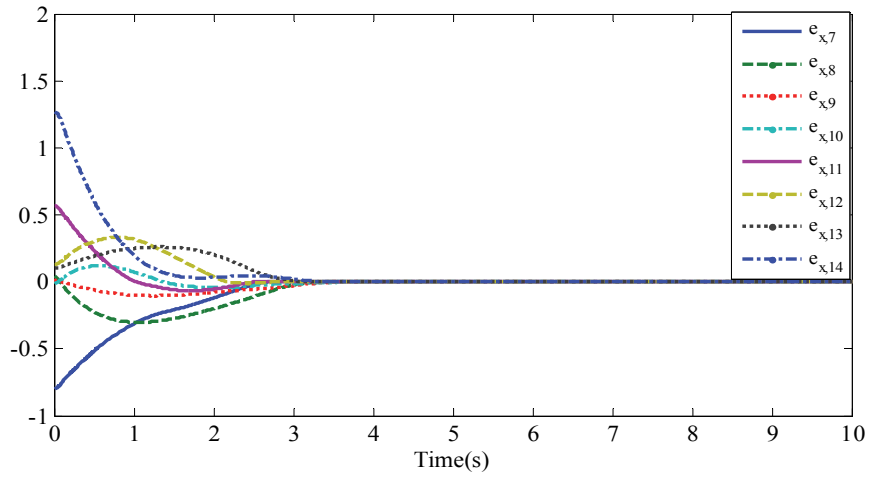
图 8.5 8 架跟随无人机在 x -维方向的局部误差图Figure 8.5 The neighborhood errors of the 8 follower UAVs in x -direction

图 8.4 和图 8.5 分别给出了 6 架领航无人机和 8 架跟随无人机的局部邻居误差轨迹。从图 8.4 和图 8.5 可以看出，6 架领航无人机和 8 架跟随无人机的局部邻居误差均在有限时间内收敛到 0，表明无人机系统中所有无人机在所设计的有限时间控制算法下实现了有限时间编队合围。

为了更好地验证本文所设计的有限时间控制协议的有效性，进一步比较了本文所设计有限时间算法和典型的非有限时间算法（对应本算法中 $h=1$ 的情形）的控制效果。同时将这两种算法应用到相同的包含 6 个领导者和 8 个跟随者的无人机系统(3.59)中，其中除了分数阶指数 h ，其余设计参数都选取相同值。两种算法的收敛比较结果由图 8.6 和图 8.7 中给出。

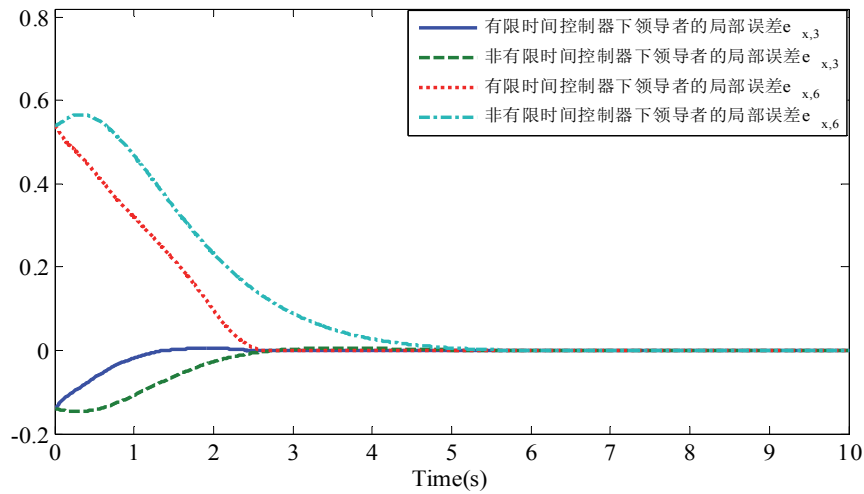


图 8.6 领航无人机在不同控制器下的局部误差比较图

Figure 8.6 The neighborhood errors of leader UAVs under different controllers

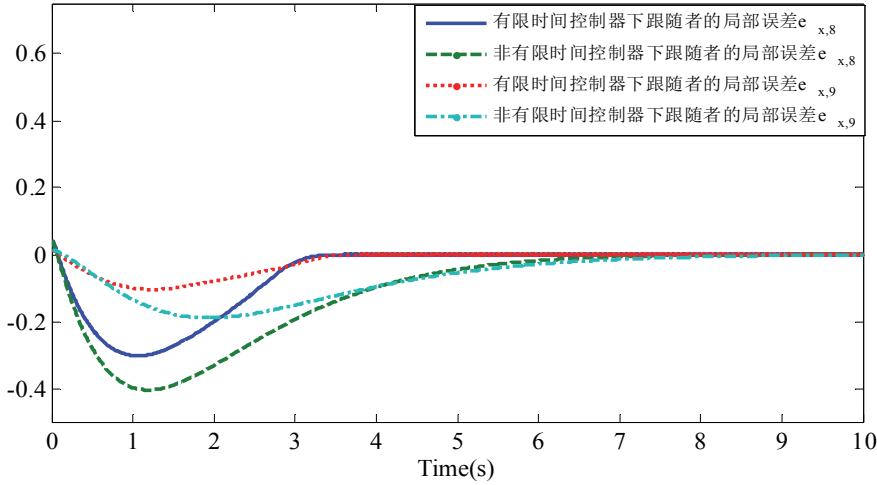


图 8.7 跟随无人机在不同控制器下的局部误差比较图

Figure 8.7 The neighborhood errors of follower UAVs under different controllers

由图 8.6 以及图 8.7 可以观察到,相较于非有限时间算法 ($h=1$ 情形),本文所设计的控制算法能确保更快的收敛速度以及收敛精度,因此有效验证了所设计有限时间控制算法的相较于非有限时间控制算法的优越性。

8.3 二阶不可参数化分解非线性多智能体系统的有限时间编队控制

有限时间编队控制问题是指多智能体系统中多个智能体通过协同合作在有限时间内形成给定编队队形。本节主要基于第四章所提出的针对含有未知时变控制增益以及不可线性参数化分解非线性因素的二阶复杂多智能体系统在未知故障情形以及有向拓扑条件下的有限时间一致性控制方法,解决了该复杂多智能体系统在有向拓扑条件下的有限时间编队控制问题。

8.3.1 问题描述

定义 8.2 考虑故障多智能体系统(4.66)。如果对于任意给定初始状态,都存在某个有限时间 T^* 使得对于所有 $t \geq T^*$ 和 $j, k = 1, \dots, N$, 都成立:

$$\|(x_k(t) - x_j(t)) - (\varpi_k - \varpi_j)\| = 0 \quad (8.50)$$

或

$$\|(x_k(t) - x_j(t)) - (\varpi_k - \varpi_j)\| \leq \varepsilon \quad (8.51)$$

其中, $\varpi_k = [\varpi_{k1}, \dots, \varpi_{kl}]^T$ ($k = 1, \dots, N$) 代表给定编队队形结构。

本节的目标是建立有限时间分布式容错自适应控制算法使得未知故障以及有向拓扑条件下二阶复杂非线性多智能体系统(4.66)在有限时间内达到给定编队。

8.3.2 主要结果

定义局部邻居位移误差如下:

$$e_{ki} = \sum_{j \in \mathcal{N}_k} a_{kj} (r_{ki} - \varpi_{ki} - r_{ji} + \varpi_{ji}) \quad (8.52)$$

令 $r_k = [r_{k1}, r_{k2}, \dots, r_{kl}]^T$, $e_k = [e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{kl}]^T$, ($k=1, 2, \dots, N$), $r = [r_1^T, r_2^T, \dots, r_N^T]^T$, $E = [e_1^T, e_2^T, \dots, e_N^T]^T$, $\varpi = [\varpi_1^T, \varpi_2^T, \dots, \varpi_N^T]^T$, 故可得下面关系式成立:

$$E = (\mathcal{L} \otimes I_l)(r - \varpi) \quad (8.53)$$

由引理 2.3 可知, $E = (\mathcal{L} \otimes I_l)(r - \varpi) = 0_{lN}$ 当且仅当 $r_{1i} - \varpi_{1i} = r_{2i} - \varpi_{2i} = \dots = r_{Ni} - \varpi_{Ni}$ ($i=1, \dots, l$), 即有限时间编队达到当且仅当存在一个有限时间 T^* , 使得 $t \rightarrow T^*$ 时, $E \rightarrow 0_{lN}$ 成立。

利用式(8.52)所定义的编队误差 e_{ki} , 设计形如式(4.69)的控制算法, 则得如下有限时间编队结果。

定理 8.3 在假设 4.1-4.4 以及形如(4.69)的控制算法(算法中误差相应为式(8.52)所定义的编队误差 e_{ki}) 下, 复杂非线性故障多智能体系统(4.66)在有限时间达到给定编队 ϖ , 其中,

① 邻居位移和速度误差在有限时间 \bar{T}^* 内收敛到一个小的邻域 Ω_3 内, 该邻域定义如下:

$$\begin{aligned} \Omega_3 = \{ |e_{ki}| \leq [(1+h)k'_v]^{1+h} \left(\frac{d'}{\eta_2 \eta_1 k'_d} \right)^{\frac{1}{2h}}, \\ |v_{ki} - v_{ji}| \leq 2 \left[\left(\frac{c_2^{1+1/h} (1+h)}{2^{h-1/h} h} \right)^{\frac{h}{1+h}} + c_2 (1+h)^{\frac{h}{1+h}} \right] \left(\frac{d' k'_v}{\eta_2 \eta_1 k'_d} \right)^{\frac{1}{2}}, \forall k, j = 1, \dots, N \} \end{aligned} \quad (8.54)$$

② 一般化参数估计误差在有限时间 \bar{T}^* 内收敛到一个小的邻域 Ω_{3p} 内, 该邻域定义如下:

$$\begin{aligned} \Omega_{3p} = \{ |\tilde{\beta}_{ki}| \leq \sqrt{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \bar{g}^{-1} \rho_m \gamma_{1,ki} k'_v} \left(\frac{d'}{\eta_2 \eta_1 k'_d} \right)^{\frac{1+h}{4h}}, \\ |\tilde{\theta}_{ki}| \leq \sqrt{2^{2-h} c_2^{1+1/h} \bar{g}^{-1} \rho_m \gamma_{2,ki} k'_v} \left(\frac{d'}{\eta_2 \eta_1 k'_d} \right)^{\frac{1+h}{4h}}, \forall k, j = 1, \dots, N \} \end{aligned} \quad (8.55)$$

③ 闭环系统中所有的信号都有界。另外, 有限收敛时间 \bar{T}^* 满足:

$$\bar{T}^* \leq \frac{V'(t_0)^{\frac{1-h}{1+h}} k'_v^{\frac{2h}{1+h}}}{(1-\eta_2) \eta_1 k'_d \frac{1-h}{1+h}} \quad (8.56)$$

其中, $0 < \eta_1 \leq 1$, $0 < \eta_2 < 1$, $V'(t_0)$, d' , k'_d 和 k'_v 分别由(4.73), (4.84), (4.85)和(4.88)给出。

证明: 注意到 $\dot{E} = (\mathcal{L} \otimes I_l)(\dot{r} - \dot{\varpi}) = (\mathcal{L} \otimes I_l)\dot{r}$, 这使得有限时间编队控制后面的证明过程与有限时间一致性的证明过程是对应相同的, 在此就不再赘述。

证明完毕。

8.3.3 仿真结果与分析

本节考虑如下仿真例子来验证所设计有限时间自适应一致性协议的有效性与可行性。实验中仿真环境为 64 位系统，CPU 为 Intel Core T6600 2.20GHz，系统内存为 4G，仿真软件为 Matlab R2012a。

考虑一组由 6 个具有非线性动态的网络自主水面舰艇(autonomous surface vessels, ASVs)系统^[136]。其动态模型为： $M_k \dot{v}_k = f_k(r_k, v_k) + u_k + D_k$ ，其中所包含物理参数的意义在第四章(4.63)中给出了详细解释。

在仿真中，所有的物理参数选择如下：对于 $k = 1, \dots, 6$ ， $\Delta m(t) = \sin(\pi t / 50 - \pi)$ ， $M_k = \text{diag}\{500 + 5(-1)^k + 5\Delta m(t), 1000 + 10(-1)^k + 10\Delta m(t), 800 + 8(-1)^k + 8\Delta m(t)\}$ ， $A_{x,k} = -1 + 0.1(-1)^k$ ， $A_{|x,k|} = -25 + 2.5(-1)^k$ ， $B_{y,k} = -10 + (-1)^k$ ， $B_{|y,k|} = -200 + 20(-1)^k$ ， $C_{z,k} = -0.5 + 0.05(-1)^k$ ， $C_{|z,k|} = -1500 + 150(-1)^k$ 。外界干扰为 $D_k = [3 + 3(-1)^k \sin(t / 50) + 2 \sin(t / 10), -1 + 3(-1)^k \sin(t / 20 - \pi / 6) + 2 \sin(t), -5(-1)^k \sin(0.1t) - \sin(t + \pi / 3)]^T$ 。6 个自主水面舰艇之间的网络通讯拓扑是有向强连通的。图 8.8 给出了 6 个自主水面舰艇之间的网络通讯拓扑关系，其中每一条边的权重取为 0.1。6 个自主水面舰艇的执行器并非都是健康执行器，其中存在两类执行器故障，每个执行器的有效性系数由图 8.9 给出。6 个舰艇的初始状态取为 $r_1(0) = (-1.5m, 0m, \pi / 3rad)$ ， $r_2(0) = (-1m, 1m, \pi / 4rad)$ ， $r_3(0) = (0m, 2m, \pi / 9rad)$ ， $r_4(0) = (1m, 1m, 0rad)$ ， $r_5(0) = (1.5m, 2m, -\pi / 4rad)$ ， $r_6(0) = (2m, 1m, -\pi / 3rad)$ ， $v_k(0) = (0, 0, 0)$ ($k = 1, \dots, 6$)。估计参数的初始值选取为 $\hat{\theta}_{ki} = 0$ ， $\hat{\xi}_{ki} = 0$ ($k = 1, \dots, 6, i = 1, 2, 3$)。

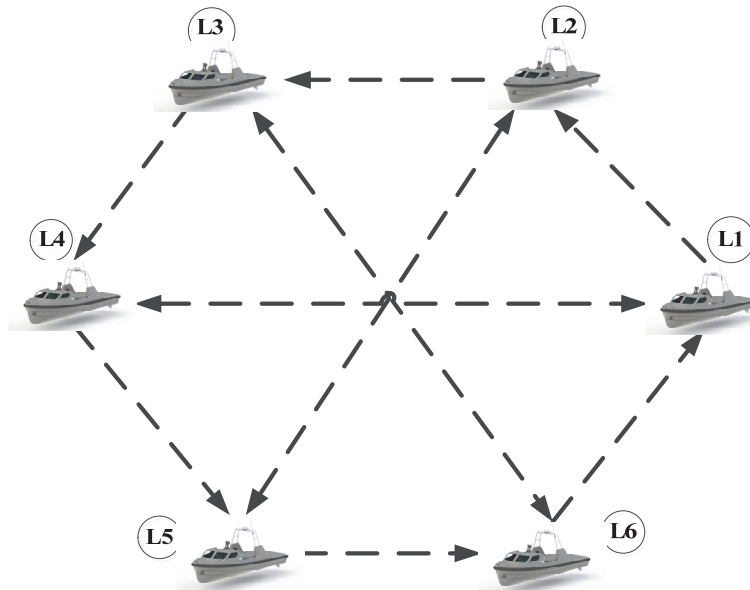


图 8.8 6 个自主水面舰艇之间的网络通讯关系

Figure 8.8 The communication among the 6 ASVs

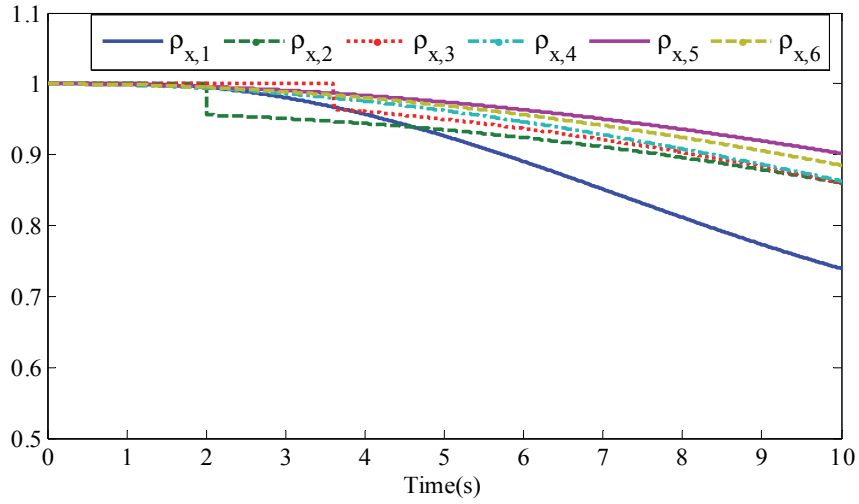


图 8.9 6个自主水面舰艇的执行器有效性系数

Figure 8.9 The actuation effectiveness of the 6 ASVs

仿真运行时间为10秒。给定的编队结构向量为

$$\varpi_x = [2\sin(\pi/3), 2\sin(2\pi/3), 2\sin(\pi), 2\sin(4\pi/3), 2\sin(5\pi/3), 2\sin(2\pi)]^T$$

$$\varpi_y = [2\cos(\pi/3), 2\cos(2\pi/3), 2\cos(\pi), 2\cos(4\pi/3), 2\cos(5\pi/3), 2\cos(2\pi)]^T$$

$$\varpi_z = \mathbf{0}_6$$

仿真中应用所设计有限时间控制率(4.7)-(4.10)，其中控制参数选取为： $s=2$ ， $c_1=5\times 10^3$ ， $c_2=4$ 。仿真测试结果由图 8.10-图 8.12 给出。

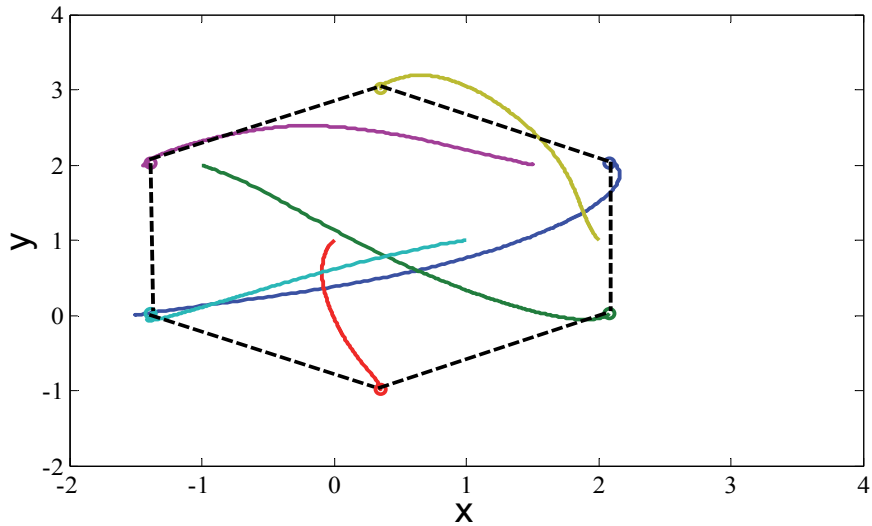


图 8.10 6个舰艇的运动轨迹图

Figure 8.10 The trajectories among the 6 ASVs

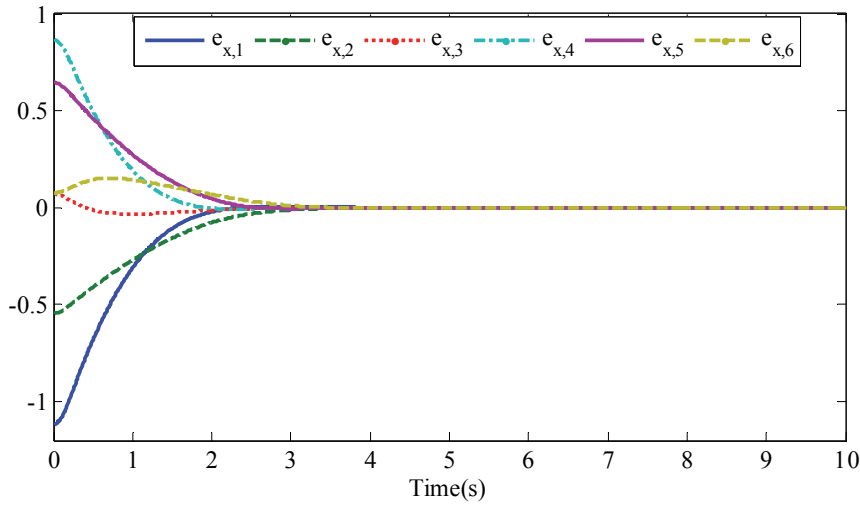


图 8.11 6个舰艇的局部位移误差

Figure 8.11 The position neighborhood errors of the 6 ASVs

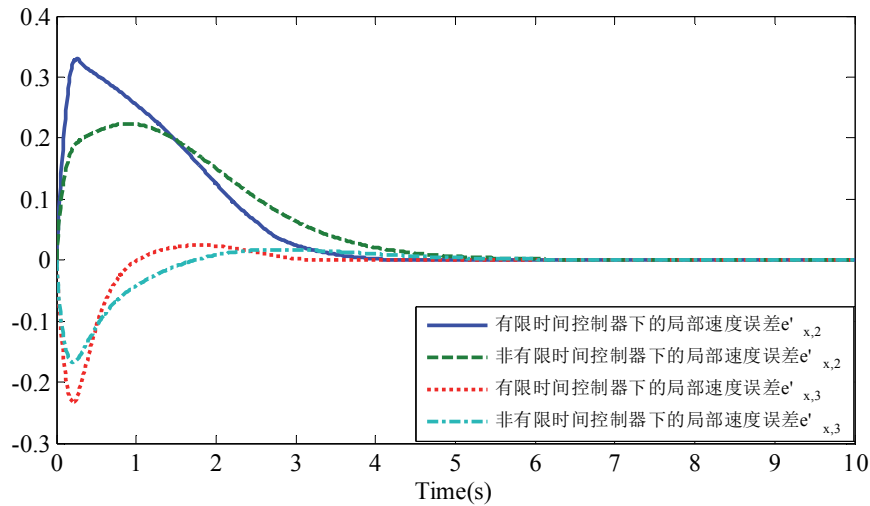


图 8.12 6个舰艇的局部速度误差

Figure 8.12 The velocity neighborhood errors of the 6 ASVs

图 8.10 描绘了6个自主水面舰艇在2维平面上的从初始位置到终点位置的运动轨迹过程，由该图可以看出所有舰艇在有限时间内形成了给定编队。图 8.11 和 8.12 分别给出了6个自主水面舰艇在 x -维方向的局部位移误差以及局部速度误差。从图 8.11 和图 8.12 可以看出，所有自主水面舰艇在 x -维方向的位移误差和速度误差都在很短的有限时间之内收敛到0，进一步验证了所有舰艇在有限时间内形成了给定编队队形。

为了更好地验证本节中所设计有限时间控制器的控制效果，我们比较了两种控制器，有限时间控制器和非有限时间控制器（对应所设计算法 $h=1$ 的情形），下

的误差收敛效果，仿真测试结果由图 8.13-8.14 给出。

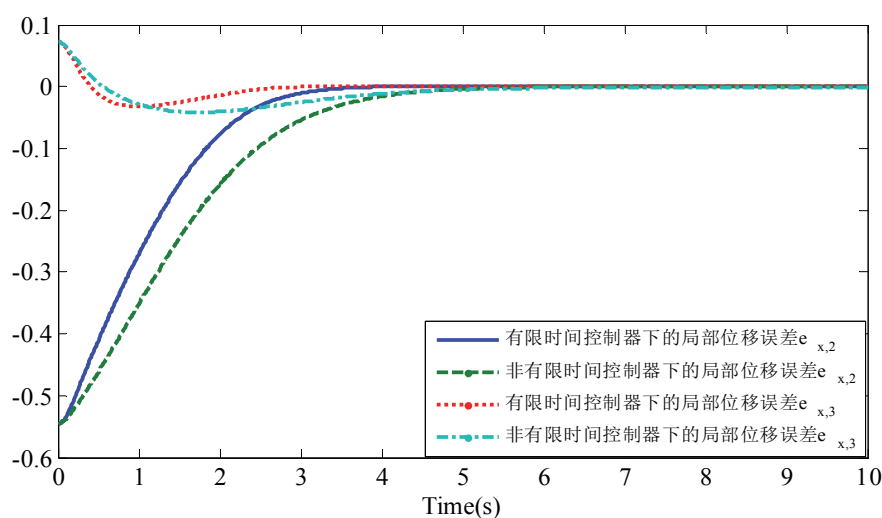


图 8.13 舰艇在不同控制器下的位移误差对比效果图

Figure 8.13 The position errors comparison under different controllers

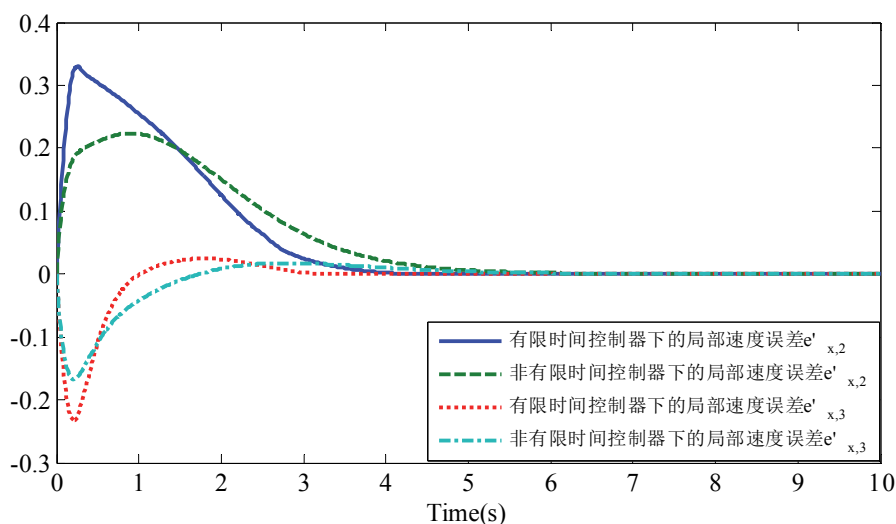


图 8.14 舰艇在不同控制器下的速度误差对比效果图

Figure 8.14 The velocity errors comparison under different controllers

图 8.13 和图 8.14 分别给出了自主水面舰艇在 x -维方向的位移误差收敛对比结果和速度误差收敛对比结果，从图中可以看出，在所设计有限时间控制算法下的位移误差和速度误差，其收敛速度快于非有限时间控制算法下的误差收敛速度，其收敛精度优于非有限时间控制算法下的误差收敛精度，由此验证了本节所设计的有限时间控制算法的优越性。

8.4 高阶纯反馈多智能体系统的有限时间合围控制

本节主要针对含有多个领导者和多个跟随者的多智能体系统，其中每个跟随者都含有不匹配的未知不确定因素以及受到未知外界干扰的影响，研究了该系统的有限时间合围问题。相对于一致性问题，合围问题更具有挑战性，因为所含有的多个领导者会使得系统中的网络通讯拓扑关系更加复杂，并且跟随者不仅需要同其他跟随者协同合作还要接受来自不同领导者的信息，以顺利进入多个领导者形成的凸形区域内。本节主要基于第五章中所提出的有限时间一致性控制的思想，解决了高阶纯反馈多智能体系统的有限时间合围问题。

8.4.1 问题描述

对于合围问题，如果一个智能体在该多智能体系统中存在至少一个邻居，则称该智能体为跟随者，否则为领导者。考虑具有高阶非线性动态的 $N+M$ 个多智能体构成的多智能体系统，其中包含 N 个跟随者和 M 个领导者，每个跟随者的动态模型由式 (5.1) 给出。令 $\mathcal{F} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为跟随者的指标集合， $\mathcal{A} = \{N+1, N+2, \dots, N+M\}$ 为领导者的指标集合。

定义 8.3 令 X 为一个向量空间 $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^M$ 中的集合，其中 M 为正整数。凸区域 $Co(X)$ 是指包含集合 X 中所有点的最小凸集合，其定义为：

$$Co(X) = \left\{ \sum_{i=1}^M \beta_i x_i \mid x_i \in X, \beta_i \geq 0, \sum_{i=1}^M \beta_i = 1 \right\}$$

本节的控制目标为：针对多智能体系统中的每个跟随者建立基于神经网络的有限时间分布式合围控制算法，使得所有跟随者的输出 $y_i(t)$ ($i \in \mathcal{F}$) 在有限时间内收敛到多个动态领导者的状态 $y_{j^*}(t)$ ($j \in \mathcal{A}$) 所构成的凸区域内，即存在一个有限时间 T^* 和一组满足 $\sum_{j=N+1}^{N+M} \beta_{ij} = 1$ 的非负常数 β_{ij} ($i \in \mathcal{F}, j \in \mathcal{A}$)，使得对于所有的 $t \geq T^*$ 以及 $i \in \mathcal{F}$ ，成立有 $|y_i(t) - \sum_{j=N+1}^{N+M} \beta_{ij} y_{j^*}(t)| < \epsilon$ ，其中 $\epsilon > 0$ 为一个可调的充分小的小常数，同时使得闭环系统内所有的信号保持有界。

系统中多个领导者和多个跟随者之间的网络通讯关系满足如下假设条件：

假设 8.3 领导者与领导者之间没有通讯连接，并且领导者只对跟随者发布命令而不接受来自跟随者的信息，即领导者和跟随者之间的通讯关系是单向的。而对于多智能体系统中的每一个跟随者，则至少存在一条有向路径使其与某个领导者相连，其中所有跟随者之间的网络通讯是双向的。

假设这 N 个跟随者和 M 个领导者之间的通讯拓扑关系用有向图 $\bar{\mathcal{G}}$ 来表示。在假设 8.3 的条件下，有向图 $\bar{\mathcal{G}}$ 的拉普拉斯矩阵 $\bar{\mathcal{L}}$ 可以表示为

$$\bar{\mathcal{L}} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \\ 0_{M \times N} & 0_{N \times N} \end{bmatrix} \quad (8.57)$$

其中 $\mathcal{L}_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}^{N \times M}$ 。设 $\mathcal{N}_i^{\mathcal{F}} = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{F}$ 和 $\mathcal{N}_i^{\mathcal{A}} = \mathcal{N}_i \cap \mathcal{A}$ 。

假设 8.4 多个动态领导者的轨迹 $y_{rj}(t)$ ($j \in \mathcal{A}$) 是有界的, 并且只有满足 $j \in \mathcal{N}_i^{\mathcal{A}}$ ($i \in \mathcal{F}$) 的第 i 个跟随者才能接收到相应的 $y_{rj}(t)$ 的信息。另外, $y_{rj}(t)$ ($j \in \mathcal{A}$) 的导数, $\dot{y}_{rj}(t)$, 未知但有界, 满足 $|\dot{y}_{rj}(t)| \leq \bar{r} < \infty$, 其中 $\bar{r} > 0$ 为未知常数。

8.4.2 主要结果

本节在第五章所建立的有限时间一致性协议的基础上, 针对多智能体系统中的每个跟随者设计出有限时间合围控制器, 使得跟随者与其邻居 (包括领导者和跟随者) 协同合作在有限时间进入领导者形成的凸包区域内, 并通过 Lyapunov 稳定性理论给出严格理论分析证明。

首先针对每个跟随者引入局部位移误差 $e_{i,1}$ 以及各阶虚拟误差 $e_{i,m}$ ($i \in \mathcal{F}$, $m = 2, \dots, n$) 如下:

$$\begin{aligned} e_{i,1} &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i^{\mathcal{F}}} a_{ij}(y_i - y_j) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i^{\mathcal{A}}} a_{ij}(y_i - y_{rj}) \\ e_{i,m} &= x_{i,m} - \alpha_{i,mf}, \quad m = 2, \dots, n \end{aligned} \quad (8.58)$$

其中 $\alpha_{i,mf}$ 如前式(5.4)中所定义。

令 $E_{\mathcal{F}} = [e_{1,1}, \dots, e_{N,1}]^T$, $y_{\mathcal{F}} = [y_1, \dots, y_N]^T$ 以及 $y_{\mathcal{A}} = [y_{r(N+1)}, \dots, y_{r(N+M)}]^T$, 则由如下关系式成立:

$$E_{\mathcal{F}} = \mathcal{L}_1 y_{\mathcal{F}} + \mathcal{L}_2 y_{\mathcal{A}} = \mathcal{L}_1 [y_{\mathcal{F}} - (-\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 y_{\mathcal{A}})] \quad (8.59)$$

由文献[123]可知, 在假设 8.3 的条件下, 矩阵 \mathcal{L}_1 是对称且正定的, 并且矩阵 $-\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2$ 的每一个元素都是非负的且每一行元素的和为1。定义 $y_d = -\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 y_{\mathcal{A}}$, 则根据定义 8.3 可知, 若 $\|E_{\mathcal{F}}\| \rightarrow 0$, 则有 $y_{\mathcal{F}} \rightarrow y_d$, 该式意味着第 i ($i \in \mathcal{F}$) 个跟随者的状态输出 y_i 收敛到凸集合 $Co\{y_{rj}, j \in \mathcal{A}\}$ 之内, 即第 i ($i \in \mathcal{F}$) 跟随者进入到所有领导者形成的凸区域内。故本节的控制目标可等价转化为设计控制器使得在有限时间内 $\|E_{\mathcal{F}}\| \rightarrow 0$ 。

下面针对所有跟随者进行递归神经网络控制器设计与稳定性分析。该设计过程仍然包括 n 步。本节中的合围控制器设计和第五章中一致性控制器设计过程相比, 因第1步涉及到对邻居信息以及拉普拉斯矩阵的处理, 故处理方法有所不同, 在之后的 m ($m = 2, \dots, n$) 中, 设计及分析过程都和一致性控制设计与分析是相似的, 即在前 $n-1$ 步中每一递归 m 步都设计一个虚拟稳定化控制 $\alpha_{i,m}$, 最后在第 n 步给出实际控制输入 u_i 。下面重点介绍第1步。

第1步: 定义如下 Lyapunov 函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} E_{\mathcal{F}}^T \mathcal{L}_1^{-1} E_{\mathcal{F}} \quad (8.60)$$

对 V_1 求导得:

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1 &= E_{\mathcal{F}}^T \mathcal{L}_1^{-1} \dot{E}_{\mathcal{F}} = E_{\mathcal{F}}^T \mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_1 (\dot{y}_{\mathcal{F}} - \dot{y}_d) \\
 &= \sum_{i=1}^N e_{i,1} (f_{i,1}(x_{i,1}, x_{i,2}) + d_{i,1}(\bar{x}_{i,1}, t) - \dot{y}_{di}) \\
 &= \sum_{i=1}^N e_{i,1} (f_{i,1}(x_{i,1}, x_{i,2}) + \hat{w}_{i,1} + \hat{d}_{i,1}(\bar{x}_{i,1}, t) - \hat{w}_{i,1})
 \end{aligned} \tag{8.61}$$

其中 $\hat{d}_{i,1}(\cdot) = d_{i,1}(\bar{x}_{i,1}, t) - \dot{y}_{di}$ 。由假设 5.3 和假设 8.4，有 $|\hat{d}_{i,1}(\cdot)| \leq d_{i,1}^{\max}(\bar{x}_{i,1}) + M\bar{r} = \hat{d}_{i,1}^{\max}(\bar{x}_{i,1})$ 成立，其中 $\hat{d}_{i,1}^{\max}(\bar{x}_{i,1}) = d_{i,1}^{\max}(\bar{x}_{i,1}) + M\bar{r}$ 为未知有界常数。上式中， $\hat{w}_{i,1}$ 定义如下：

$$\hat{w}_{i,1} = \frac{(\hat{d}_{i,1}^{\max}(\bar{x}_{i,1}))^2 e_{i,1}}{2a_{i,1}^2} \tag{8.62}$$

类似第五章中分析并由引理 5.1 可得，存在一个光滑理想控制输入 $x_{i,2} = \hat{\alpha}_{i,1}^*(x_{i,1}, \hat{w}_{i,1})$ ，使得下式成立：

$$f_{i,1}(x_{i,1}, \hat{\alpha}_{i,1}^*) + \hat{w}_{i,1} = 0 \tag{8.63}$$

另一方面，通过应用中值定理可得：

$$f_{i,1}(x_{i,1}, x_{i,2}) = f_{i,1}(x_{i,1}, \hat{\alpha}_{i,1}^*) + g_{\mu i,1}(x_{i,2} - \hat{\alpha}_{i,1}^*) \tag{8.64}$$

注意到此处 $\hat{d}_{i,1}(\cdot)$ 以及 $\hat{w}_{i,1}$ 的定义和第五章中相应 $d_{i,1}(\cdot)$ 和 $w_{i,1}$ 的定义不同，这导致了此处 $\hat{\alpha}_{i,1}^*(x_{i,1}, \hat{w}_{i,1})$ 和第五章中相应 $\alpha_{i,1}^*(x_{i,1}, w_{i,1})$ 的定义不同，但注意到 $\hat{\alpha}_{i,1}^*$ （或 $\alpha_{i,1}^*$ ）在控制器设置中并不会用到，这些不同影响的只是 RBF 神经网络中输入有所不同，而对控制器设计并不会产生影响。因此之后的分析可以类似第五章中分析过程得出，在此就不再赘述。

在给出本节主要结果之前，首先给出两个集合 $\hat{\Theta}_0$ 和 $\hat{\Theta}$ 的定义：

$$\hat{\Theta}_0 = \{ \|E_{\mathcal{F}}\| \leq \sqrt{2\lambda_{\min}^{-1}(\mathcal{L}_1^{-1}) \left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \bar{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}}}, \tag{8.65}$$

$$\|E_m\| \leq \sqrt{2\left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \bar{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}}}, \|e_m\| \leq \sqrt{2\left(\frac{\varsigma}{\eta_2 \bar{c}}\right)^{\frac{2}{1+h}}}, m = 2, \dots, n\}$$

$$\hat{\Theta} = \{e_{i,m} \in \hat{\Theta}_0 \mid e_{i,m} < \iota, \iota > 0 \text{ 为一个小常数}\} \tag{8.66}$$

综合以上的稳定性分析，我们得到本节的主要结果。

定理 8.4 考虑一组由 N 个跟随者和 M 个领导者组成的多智能体系统，其中 N 个跟随者的动态模型由式(5.1)给出。设假设 5.2-5.3 以及假设 8.3-8.4 中条件成立。对每个跟随者设计控制器如下：

$$\begin{aligned}\alpha_{i,m} &= -k_{i,m} e^{\hat{h}(e_{i,m})} - k_{i,m0} e^{1/\hat{h}(e_{i,m})} - \frac{\hat{\chi}_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2} \phi_i(\cdot)^T \phi_i(\cdot) e_{i,m}, \quad m=1, \dots, n-1 \\ u_i &= -k_{i,n} e^{\hat{h}(e_{i,n})} - \frac{\hat{\chi}_{i,n}}{2\eta_{i,n}^2} \phi_i(\cdot)^T \phi_i(\cdot) e_{i,n}\end{aligned}\quad (8.67)$$

$$\dot{\hat{\chi}}_{i,m} = -\sigma_{i,m} \hat{\chi}_{i,m} + \frac{\gamma_{i,m}}{2\eta_{i,m}^2} \phi_i(\cdot)^T \phi_i(\cdot) e_{i,m}^2, \quad m=1, \dots, n$$

其中 $i \in \mathcal{F}$, $\hat{h}(e_{i,m})$ 定义如下:

$$\hat{h}(e_{i,m}) = \begin{cases} \frac{2s-1}{2s+1}, & e_{i,m} \notin \hat{\Theta} (\hat{\Theta} \subseteq \hat{\Theta}_0) \\ 1, & \text{其他} \end{cases} \quad (8.68)$$

若对每个跟随者应用该控制器, 则对任意满足 $\hat{\chi}_{i,m}(t_0) \geq 0$, $V(t_0) \leq \mu$ ($\mu > 0$ 为一有界常数) 的初始条件, 一致性误差在有限时间 T^* 之内收敛到一个任意可调的紧集 $\hat{\Theta}_0$ (由式(8.65)给出) 内, 并且系统内所有的信号都半整体一致最终有界的。

8.4.3 仿真验证及结果分析

为了验证所设计的基于神经网络的有限时间合围控制算法的有效性, 本节中针对一组含有非匹配不确定性的网络多智能体系统 (3 个跟随者和 4 个领导者) 进行仿真实验。实验中仿真环境为 64 位系统, CPU 为 Intel Core T6600 2.20GHz, 系统内存为 4G, 仿真软件为 Matlab R2012a。

多智能体系统中 3 个跟随者在两维空间中的动态模型可由如下方程描述:

$$\dot{x}_{i,1} = x_{i,2} + 0.05 \sin(x_{i,2}) + d_{i,1} \quad (8.69)$$

$$\dot{x}_{i,2} = (0.9 + 0.05 e^{-x_{i,1}^2}) u_i + 0.1 \sin(u_i) + d_{i,2}$$

其中, $d_{i,1} = [0.6 \sin^2(x_{i,1x}) \cos(0.5t), 0.6 \sin^2(x_{i,1y}) \cos(0.5t)]^T$, $d_{i,2} = [0.5 \cos(x_{i,2x}) \sin(0.5t), 0.5 \cos(x_{i,2y}) \sin(0.5t)]^T$, $\sin(x_{i,2}) = [\sin(x_{i,2x}), \sin(x_{i,2y})]^T$, $e^{-x_{i,1}^2} = [e^{-x_{i,1x}^2}, e^{-x_{i,1y}^2}]^T$, $\sin(u_i) = [\sin(u_{ix}), \sin(u_{iy})]^T$, $x_{i,1} = [x_{i,1x}, x_{i,1y}]^T$, $x_{i,2} = [x_{i,2x}, x_{i,2y}]^T$ 和 $u_i = [u_{i,x}, u_{i,y}]^T$ 分别代表第 i 个跟随者的一阶状态, 二阶状态以及实际控制输入; $d_{i,1}$ 和 $d_{i,2}$ 代表外界干扰。 $y_{r4} = [t, \sin(t/2)]^T$, $y_{r5} = [0.8t - 0.5, \sin(t/2)]^T$, $y_{r6} = [0.8t - 0.5, \sin(t/3) - 0.5]^T$, $y_{r7} = [t, \sin(t/3) - 0.5]^T$ 。注意到 y_{rj} ($j \in \mathcal{A}$) 的导数是有界的, 即假设 8.4 成立, 但在所设计有限时间控制算法中不会用到 y_{rj} ($j \in \mathcal{A}$) 的导数, 只是要求有界。图 8.15 给出了 3 个跟随者和 4 个领导者之间的网络通讯拓扑关系, 该关系满足假设 8.3 中的条件, 即领导者与领导者之间没有通讯连接, 领导者只对跟随者发布命令而不接受来自跟随者的信息, 而对于每一个跟随者, 则至少存在一条有向路径使其与某个领导者相连, 其中所有跟随者之间的网络通讯是双向的。

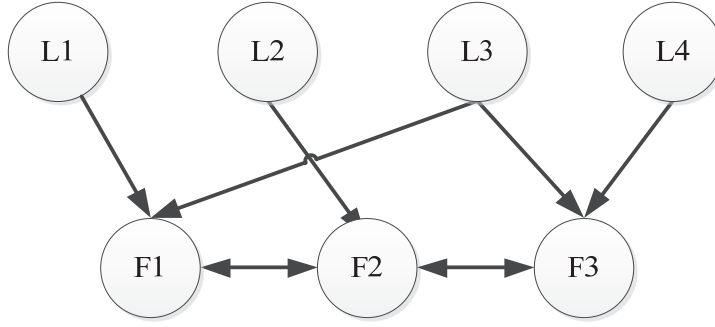


图 8.15 3 个跟随者和 4 个领导者的网络通讯关系

Figure 8.15 The communicaiton among 3 followers and 4 leaders

仿真运行时间为 $50s$ 。仿真中跟随者初始状态设置为： $x_{1,1}(0) = [-2, -1]^T$ ， $x_{2,1}(0) = [-1, 0.5]^T$ ， $x_{3,1}(0) = [1, 1]^T$ ， $x_{1,2}(0) = [1, 1]^T$ ， $x_{2,2}(0) = [-1, -1]^T$ 和 $x_{3,2}(0) = [1, -1]^T$ 。控制设计参数取为： $s = 8$ ， $\iota = 0.001$ ， $k_{i,1} = k_{i,2} = 10$ ， $k_{i,10} = k_{i,20} = 1$ ， $\eta_{i,1} = \eta_{i,2} = 2.5$ ， $\gamma_{i,1} = 50$ ， $\gamma_{i,2} = 30$ ， $\sigma_{i,1} = \sigma_{i,2} = 0.1$ ， $\epsilon_{i,2} = 0.001$ 。另外，估计参数的初始值取为 $\hat{\chi}_{i,1}(0) = [0, 0]^T$ ， $\hat{\chi}_{i,2}(0) = [1, 3]^T$ ($i = 1, 2, 3$)。RBF 神经网络中的高斯函数为 $\phi_{i,mk}(\cdot) = \exp(-\sum_{p=1}^q (Z_{i,mp} - C_{i,mp}^k)^2 / 2(v_{i,mp}^k)^2)$ ($i = 1, 2, 3$ ， $m = 1, 2$ ， $p = 1, \dots, q$ ， $k = 1, \dots, l$)，其中， $Z_{i,m} \in R^q$ 为神经网络中的输入向量， $C_{i,mp} = [C_{i,mp}^1, \dots, C_{i,mp}^l]^T$ 代表高斯函数的中心， $v_{i,mp} = [v_{i,mp}^1, \dots, v_{i,mp}^l]^T$ 代表高斯函数输入向量中每一个元素的宽度。在仿真中，我们取神经元节点的个数为 10，两个维数中的中心分别均匀分布在 $[-2, 2]$ 和 $[-2, 2]$ 以及 $[-2, 2]$ 和 $[-3, 3]$ 中，宽度取为 $\sqrt{2}$ 。

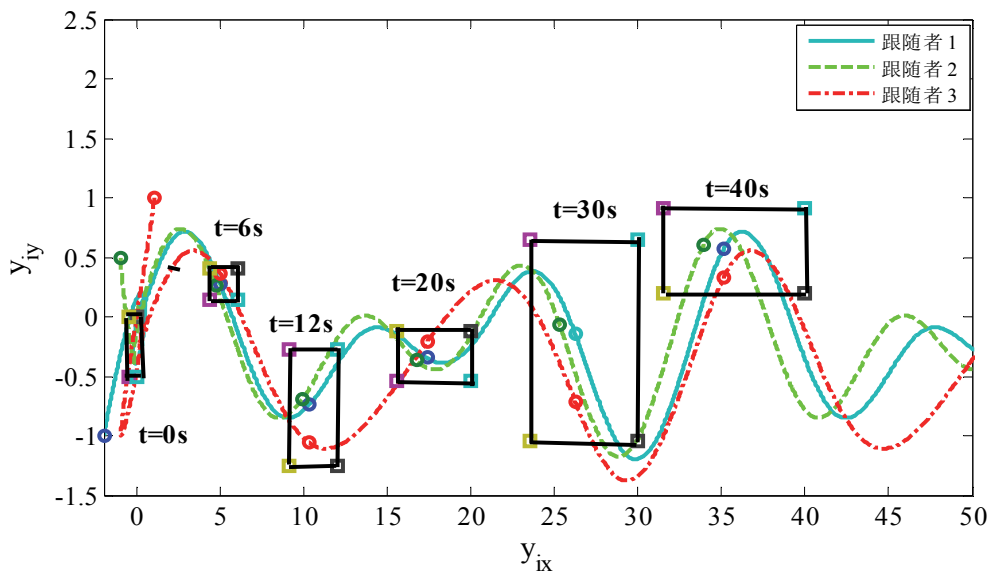


图 8.16 3 个跟随者和 4 个领导者在两维空间中的状态轨迹图

Figure 8.16 The trajectories of 3 followers and 4 leaders

该仿真目的在于验证在本节所设计有限时间控制算法(8.67)下，3个跟随者在有限时间内进入4个领导者所形成的凸包区域内，同时也将验证闭环系统中所有信号都保持有界。仿真测试结果由图 8.16-图 8.22 给出。图 8.16 给出了3个跟随者和4个领导者在两维空间中的状态轨迹。为了更好地表示出3个跟随者进入由4个领导者形成的凸包区域的过程，图 8.16 中同时分别给出了几个不同时刻所对应的跟随者与领导者的位置点，其中所对应的不同时刻分别为： $t=0s$ ， $t=6s$ ， $t=12s$ ， $t=20s$ ， $t=30s$ 和 $t=40s$ ，并且跟随者的位置点用圆圈表示，领导者的位置点用小正方形表示，领导者形成的凸包区域用实线连接而成。由图 8.16 可以看出所有的跟随者在有限时间内收敛进入领导者所形成的凸包区域内。

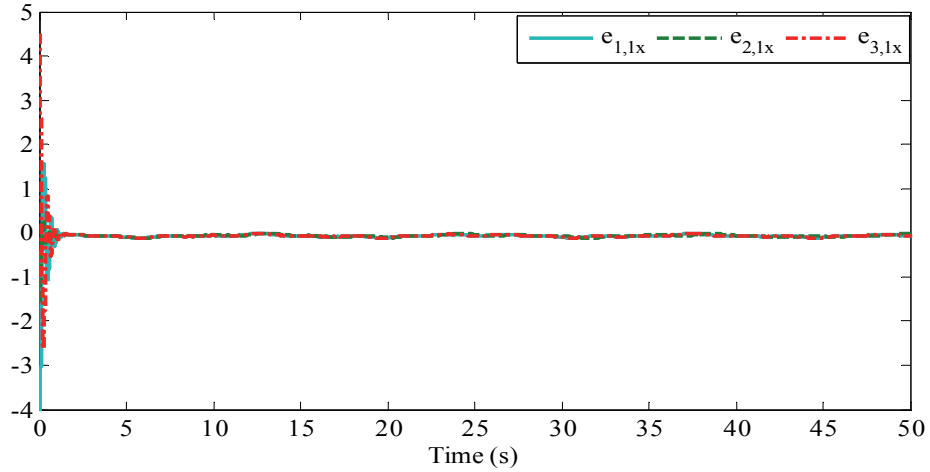


图 8.17 3个跟随者在 x -维方向的局部误差

Figure 8.17 The neighborhood errors of 3 followers in x -direction

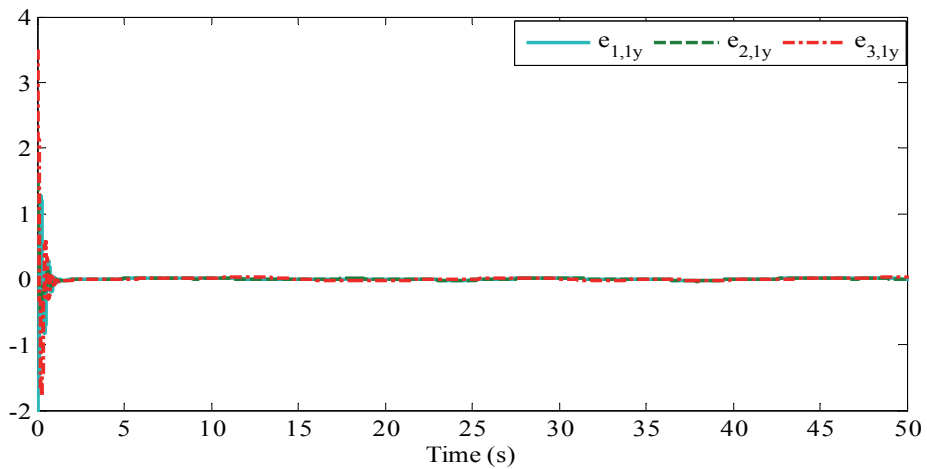


图 8.18 3个跟随者在 y -维方向的局部误差

Figure 8.18 The neighborhood errors of 3 followers in y -direction

图 8.17 和图 8.18 分别给出了 3 个跟随者在 x -维方向和 y -维方向的局部误差。由图 8.17 和图 8.18 可以看出, 3 个跟随者在 x -维方向的邻居位移误差 $e_{i,1x}$ ($i=1,2,3$) 和在 y -维方向的邻居位移误差 $e_{i,1y}$ ($i=1,2,3$) 均在有限时间 (2 秒) 内迅速衰减而趋近于 0。由前面理论分析中关于合围控制邻居位移误差的定义以及其所表示的含义可知, $e_{i,1x}$ 和 $e_{i,1y}$ ($i=1,2,3$) 在有限时间内趋于 0 表示 3 个跟随者在有限时间内进入了领导者所形成的凸包区域内, 即系统实现了有限时间合围。图 8.19-图 8.22 分别给出了未知参数估计 $\hat{\zeta}_{i,m} = [\hat{\zeta}_{i,mx}, \hat{\zeta}_{i,my}]^T$ 的两个分量 $\hat{\zeta}_{i,mx}$ 和 $\hat{\zeta}_{i,my}$ 随时间变化的轨迹曲线, 由图可以看出所有未知参数估计曲线的变化趋势均在有限时间 (2 秒) 之后趋于稳定。

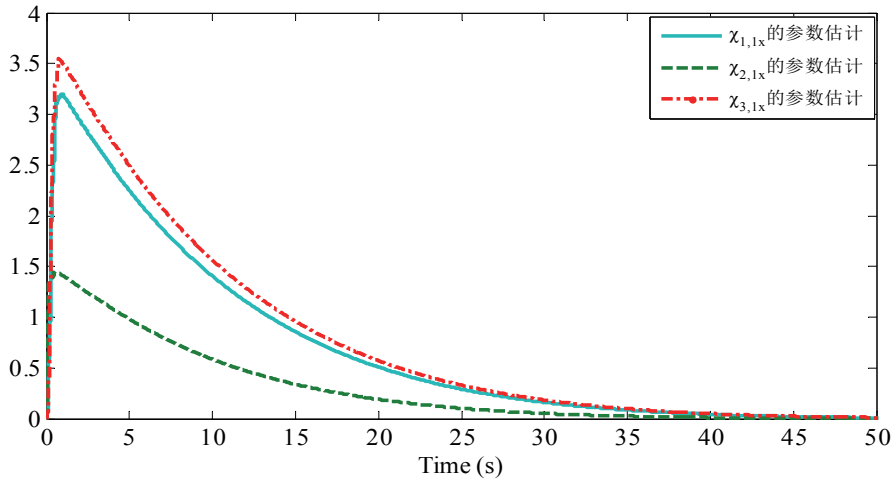


图 8.19 参数 $\chi_{i,1}$ 在 x -维方向的估计值

Figure 8.19 The estimation values of the parameter $\chi_{i,1}$ in x -direction

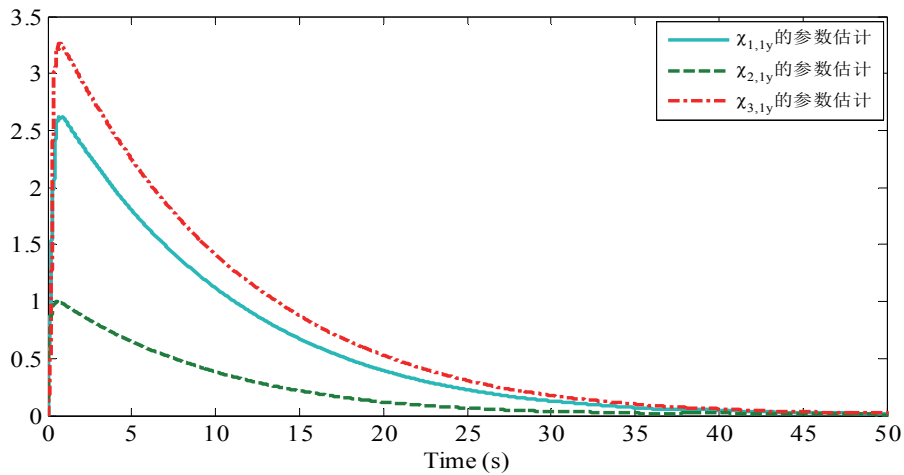
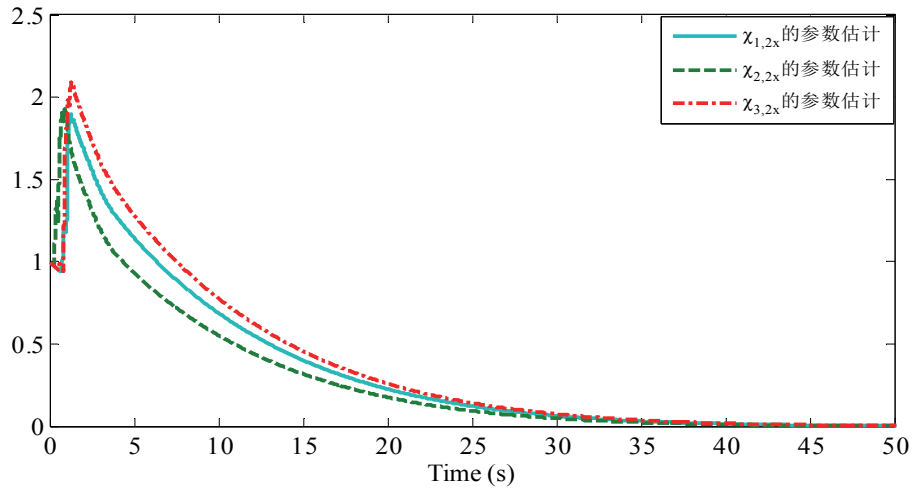
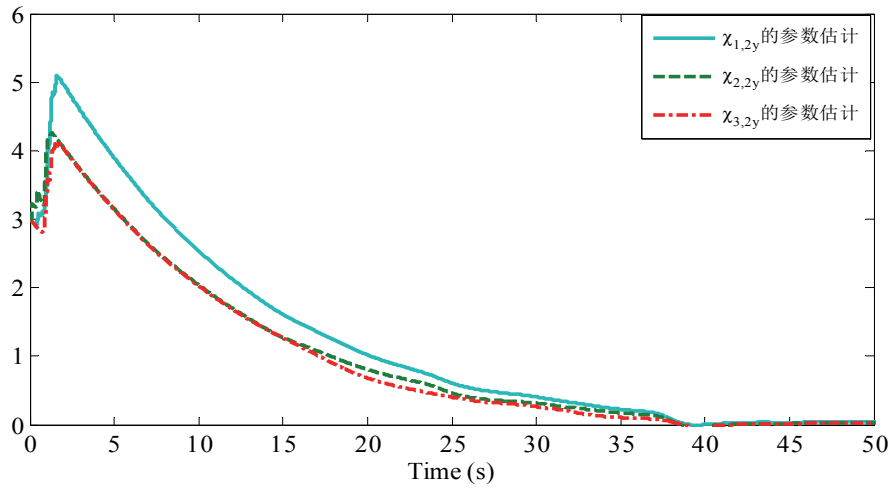


图 8.20 参数 $\chi_{i,1}$ 在 y -维方向的估计值

Figure 8.20 The estimation values of the parameter $\chi_{i,1}$ in y -direction

图 8.21 参数 $\chi_{i,2}$ 在 x -维方向的估计值Figure 8.21 The estimation values of the parameter $\chi_{i,2}$ in x -direction图 8.22 参数 $\chi_{i,2}$ 在 y -维方向的估计值Figure 8.22 The estimation values of the parameter $\chi_{i,2}$ in y -direction

我们同样比较了两种控制算法下误差的收敛结果：所设计的有限时间合围控制算法(8.67)和传统非有限时间控制算法（对应 $h=1$ ）。我们将两种控制方法分别应用于系统(8.69)，并选取和上面仿真中相同的控制参数。仿真对比测试结果由图 8.23 给出。图 8.23 (a) 和图 8.23 (b) 分别给出了第 1 个跟随者和第 2 个跟随者在 y -维方向的邻居位移误差对比结果。通过图形对比分析可以看出，本节所设计的有限时间合围控制算法下跟随者的整体误差收敛效果，包括误差收敛速度和误差收敛精度，都优于相应传统非有限时间合围控制算法下跟随者的误差收敛效果。

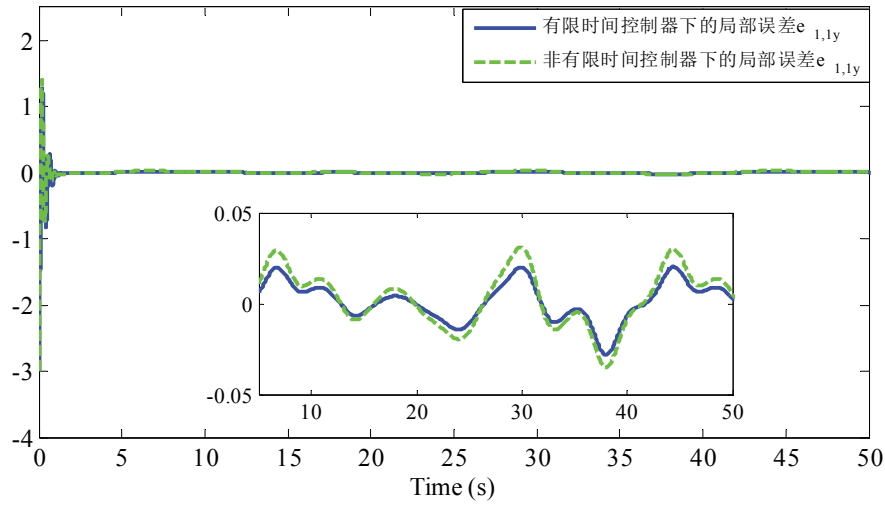
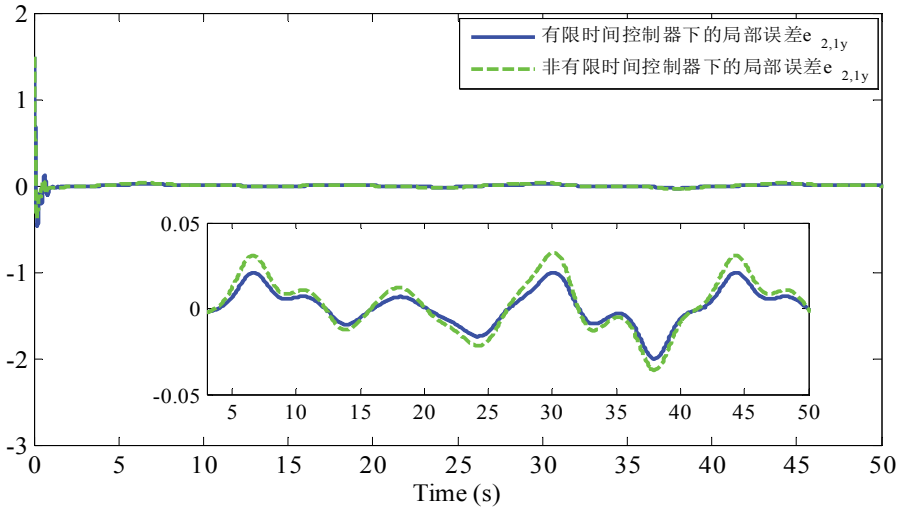

 (a) $e_{1,1y}$

 (b) $e_{2,1y}$

图 8.23 不同控制器下的局部位移误差对比图

Figure 8.23 The neighborhood position error comparison under different controllers

8.5 一阶线性多智能体系统的给定有限时间合围控制

8.5.1 问题描述

本节研究含有多个领导者以及多个跟随者的一阶线性多智能体系统的给定有限时间合围问题。

假设多智能体系统中含有 M ($M < N$) 个领导者和 $N - M$ 个跟随者，其中领导者是不含邻居的智能体，而跟随者是至少含有一个邻居的智能体。不失一般性，我们分别令 $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, M\}$ 为领导者的指标集合以及 $\mathcal{F} = \{M + 1, M + 2, \dots, N\}$ 为跟随者的指标集合。注意到领导者没有邻居，即领导者只是对跟随者发布命令，但

并不接受来自跟随者和其他领导者的信息。在这种情况下，拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 可以表示为：

$$\begin{bmatrix} 0_{M \times M} & 0_{M \times (N-M)} \\ \mathcal{L}_2 & \mathcal{L}_1 \end{bmatrix} \quad (8.70)$$

其中 $\mathcal{L}_2 \in \Re^{(N-M) \times M}$ ， $\mathcal{L}_1 \in \Re^{(N-M) \times (N-M)}$ 。

假设 8.5 对每一个跟随者，至少存在一个领导者有一条有向路径通向它。

下面给出关于矩阵 \mathcal{L}_1 的一个有用性质。

引理 8.1 在假设 8.5 的条件下，存在一个正主对角线矩阵 $P_{\mathcal{F}} = \text{diag}\{p_{M+1}, \dots, p_N\} \in \Re^{(N-M) \times (N-M)}$ 使得下式成立：

$$Q_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}} \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^T P_{\mathcal{F}} > 0 \quad (8.71)$$

其中， p_{M+1}, \dots, p_N 由 $[p_{M+1}, \dots, p_N]^T = (\mathcal{L}_1^T)^{-1} \mathbf{1}_{N-M}$ 决定。另外，矩阵 $-\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ 中的每一个元素都是非负的，并且矩阵每一行的元素和为1。

证明：第二个论断可以参考文献[123]中的引理 4 得出。下面我们证明第一个论断。根据文献[123]可知，在假设 8.5 的条件下， \mathcal{L}_1 是一个非奇异的 M 矩阵。由文献[3]中定理 4.25 可知 \mathcal{L}_1^{-1} 存在且是非负的，其满足文献[152]中引理 4 的条件，故第一个论断可由类似文献[152]引理 4 的证明得出。

证明完毕。

8.5.2 合围控制器设计与稳定性分析

令 $E_{\mathcal{A}} = [e_1^T, \dots, e_M^T]^T$ ， $E_{\mathcal{F}} = [e_{M+1}^T, \dots, e_N^T]^T$ ， $x_{\mathcal{A}} = [x_1^T, \dots, x_M^T]^T$ ，以及 $x_{\mathcal{F}} = [x_{M+1}^T, \dots, x_N^T]^T$ 。则有以下式成立：

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}} &= (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) x_{\mathcal{F}} + (\mathcal{L}_2 \otimes I_m) x_{\mathcal{A}} \\ &= (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) [x_{\mathcal{F}} - ((-\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2) \otimes I_m) x_{\mathcal{A}}] \end{aligned} \quad (8.72)$$

根据引理 8.1 可知，给定有限时间合围目标达到当且仅当 $E_{\mathcal{F}}$ 在提前给定有限时间 T 收敛到0。

设计如下给定有限时间合围控制协议：

$$u_i = -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_i\right) e_i, \quad i \in \mathcal{F} \quad (8.73)$$

其中 $k > 0$ 为设计参数， $c \geq \frac{2\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})}{\lambda_1(Q_{\mathcal{F}})}$ ，该协议具有如下紧集形式：

$$U_{\mathcal{F}} = -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) E_{\mathcal{F}} \quad (8.74)$$

本节的主要结果由下面定理给出。

定理 8.5 在假设 8.5 的条件下，所设计控制协议(8.73)（或(8.74)）解决了系统(6.1)的给定有限时间合围问题，即系统(6.1)中的所有 $N-M$ 个跟随者的状态在提前给定有限时间 T 内进入 M 个领导者状态所形成的凸形区域内，并且对所有的

$t \in [t_0, t_0 + T)$, 成立:

$$\|E_{\mathcal{F}}(t)\| \leq \mu_1^{-h} \exp^{-\frac{k\lambda_1(Q_{\mathcal{F}})}{2\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})}(t-t_0)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})}{\lambda_{\min}(P_{\mathcal{F}})}} \|(\mathcal{L}_1 \otimes I_m)^{-1}\| \|E_{\mathcal{F}}(t_0)\| \quad (8.75)$$

该式确保了系统的整体一致稳定。另外, 系统(6.1)在 $t \in [t_0 + T, \infty)$ 时仍然保持合围, 控制输入 $U_{\mathcal{F}}$ 在该区间始终保持为 0, 并且 $U_{\mathcal{F}}$ 在整个时间区间 $[t_0, \infty)$ 上保持平滑且一致有界。

证明: 为了得到给定有限时间收敛结果, 我们仍需考虑两种情况: $t \in [t_0, t_0 + T)$ 和 $t \in [t_0 + T, \infty)$ 。

对于 $t \in [t_0, t_0 + T)$, 选择如下 Lyapunov 候选函数:

$$V_{\mathcal{F}} = E_{\mathcal{F}}^T (P_{\mathcal{F}} \otimes I_m) E_{\mathcal{F}} \quad (8.76)$$

由式(8.73)可得:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\mathcal{F}} &= (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) [\dot{x}_{\mathcal{F}} - ((-\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_m) \dot{x}_{\mathcal{L}})] \\ &= (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) \dot{x}_{\mathcal{F}} = -\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) E_{\mathcal{F}} \end{aligned} \quad (8.77)$$

上式中我们用到了关系式 $\dot{x}_{\mathcal{L}} = 0$ 。由于 $c \geq \frac{2\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})}{\lambda_1(Q_{\mathcal{F}})}$, 故由引理 8.1 以及式(8.77)可得 $\dot{V}_{\mathcal{F}}$ 如下:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{\mathcal{F}} &= 2E_{\mathcal{F}}^T (P_{\mathcal{F}} \otimes I_m) \dot{E}_{\mathcal{F}} = 2E_{\mathcal{F}}^T (P_{\mathcal{F}} \otimes I_m) \left[-\left(k + c \frac{h}{T} \mu_1\right) (\mathcal{L}_1 \otimes I_m) E_{\mathcal{F}} \right] \\ &= -\left(k + c \frac{\dot{\mu}}{\mu}\right) E_{\mathcal{F}}^T (Q_{\mathcal{F}} \otimes I_m) E_{\mathcal{F}} \leq -k\lambda_1(Q_{\mathcal{F}}) E_{\mathcal{F}}^T E_{\mathcal{F}} - c \frac{\dot{\mu}}{\mu} \lambda_1(Q_{\mathcal{F}}) E_{\mathcal{F}}^T E_{\mathcal{F}} \\ &\leq -k \frac{\lambda_1(Q_{\mathcal{F}})}{\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})} V_{\mathcal{F}} - c \frac{\dot{\mu}}{\mu} \frac{\lambda_1(Q_{\mathcal{F}})}{\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})} V_{\mathcal{F}} \leq -\frac{k\lambda_1(Q_{\mathcal{F}})}{\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})} V_{\mathcal{F}} - 2 \frac{\dot{\mu}}{\mu} V_{\mathcal{F}} \end{aligned} \quad (8.78)$$

根据引理 6.1, 则由上式可知:

$$V_{\mathcal{F}}(t) \leq \mu_1^{-2h} \exp^{-\frac{k\lambda_1(Q_{\mathcal{F}})}{\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})}(t-t_0)} V_{\mathcal{F}}(t_0) \quad (8.79)$$

由此可得出:

$$\|E_{\mathcal{F}}(t)\|^2 \leq \mu_1^{-2h} \exp^{-\frac{k\lambda_1(Q_{\mathcal{F}})}{\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})}(t-t_0)} \frac{\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})}{\lambda_{\min}(P_{\mathcal{F}})} \|E_{\mathcal{F}}(t_0)\|^2 \quad (8.80)$$

并进一步得到:

$$\begin{aligned} \|Z_{\mathcal{F}}(t)\| &= \|(\mathcal{L}_1 \otimes I_m)^{-1} E_{\mathcal{F}}(t)\| \leq \|(\mathcal{L}_1 \otimes I_m)^{-1}\| \|E_{\mathcal{F}}(t)\| \\ &\leq \mu_1^{-2h} \exp^{-\frac{k\lambda_1(Q_{\mathcal{F}})}{2\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})}(t-t_0)} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P_{\mathcal{F}})}{\lambda_{\min}(P_{\mathcal{F}})}} \|(\mathcal{L}_1 \otimes I_m)^{-1}\| \|E_{\mathcal{F}}(t_0)\| \end{aligned} \quad (8.81)$$

由式(8.81)可得式(8.75)成立, 并且得到:

$$\|Z_{\mathcal{F}}(t)\| \rightarrow 0 \text{ 当 } t \rightarrow (t_0 + T)^- \quad (8.82)$$

即, 当 $t \rightarrow (t_0 + T)^-$ 时, $X_{\mathcal{F}} \rightarrow (\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2 \otimes I_m) X_{\mathcal{A}}$ 。该式意味着在有限时间 T 系统系统

(6.1)内的所有跟随者实现了合围。

控制输入 U_F 在时间区间 $[t_0, t_0 + T)$ 上的一致有界性和平滑性可以通过采用类似式(6.58)-(6.60)的步骤得出，并且针对情况 $t \in [t_0 + T, \infty)$ 的相关结果可以类似定理 6.1 中的证明步骤得出。

证明完毕。

8.5.3 仿真验证

为了验证所设计的给定有限时间合围控制协议的有效性，本节中针对一组含有 10 个智能体（包含 4 个领导者 6 个跟随者）的一阶多智能体系统进行仿真实验。实验中仿真环境为 64 位系统，CPU 为 Intel Core T6600 2.20GHz，系统内存为 4G，仿真软件为 Matlab R2012a。

多智能体系统中各个子系统的动态模型由式(6.1)给出。系统中 10 个智能体之间的网络通讯结构如图 8.24 所示，其中智能体之间的权重皆取为 1。6 个跟随者在 x -轴， y -轴， z -轴的初值状态分别随机在 $[-5, 5]$ 之间取值。其中设计参数取为 $k = 1$ ， $c = 3$ ， $h = 3$ ，以及 $T = 1s$ 。

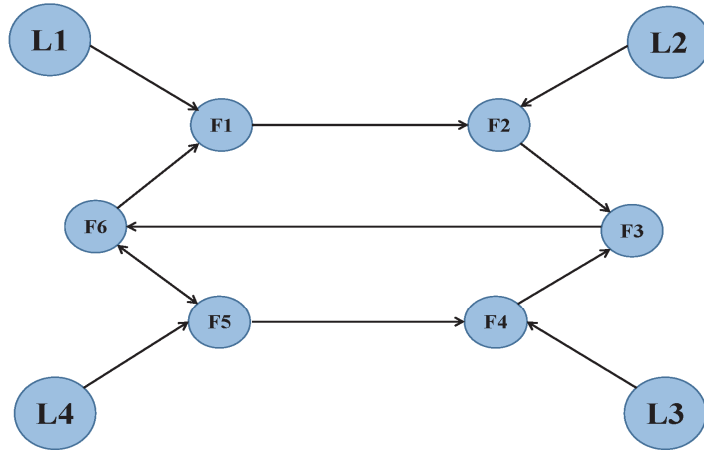


图 8.24 4 个领导者和 6 个跟随者之间的网络通讯关系

Figure 8.24 The communicaiton among the 4 leaders and 6 followers

该仿真目的在于验证在本节所设计给定有限时间合围控制算法(8.73)（或(8.74)）下，6 个跟随者在给定的有限时间内进入 4 个领导者所形成的凸包区域内，同时也将验证系统控制输入信号平滑且一致有界。仿真测试结果由图 8.25-图 8.28 给出。图 8.25 给出了 6 个跟随者和 4 个领导者在三维空间中的状态轨迹。为了更好地表示出 6 个跟随者进入由 4 个领导者形成的凸包区域的合围过程，图 8.26 中分别给出了几个不同时刻所对应的跟随者与领导者的位置图形快照，其中所对应的不同时刻分别为： $t = 0.0024s$ ， $t = 0.024s$ ， $t = 0.12s$ 和 $t = 0.6s$ ，其中用小圆圈表示

领导者，用五角星表示跟随者，领导者形成的凸包区域用黑色虚线连接而成。由图 8.26 中的四个子图可以看出，所有的跟随者在 $t = 0.12s$ 时刻已经进入领导者所形成的凸包区域内。注意到此仿真实验中提前给定的有限时间为 $T = 1s$ ，因此图 8.26 表明了该多智能体系统中的所有跟随者在给定有限时间内实现了合围。

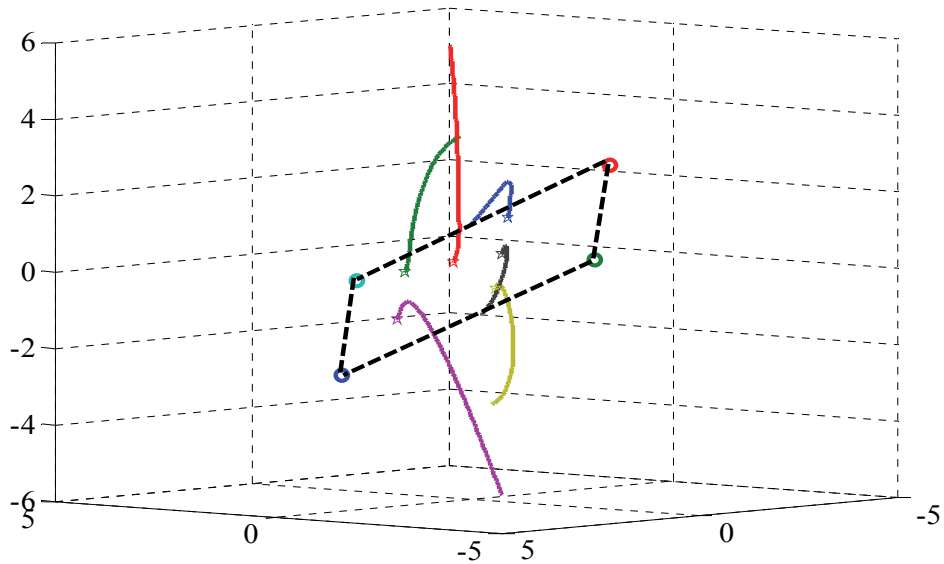
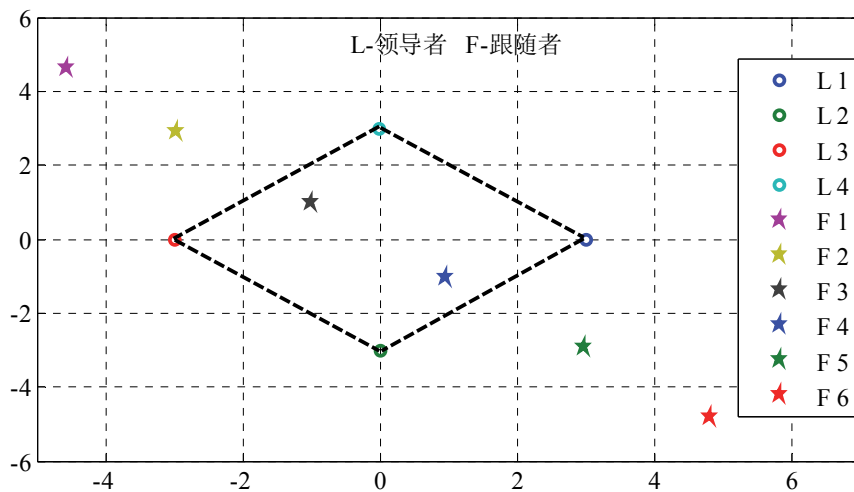


图 8.25 4 个领导者和 6 个跟随者的运动轨迹图

Figure 8.25 The trajectories of the 4 leaders and 6 followers



(a) $t = 0.0024s$

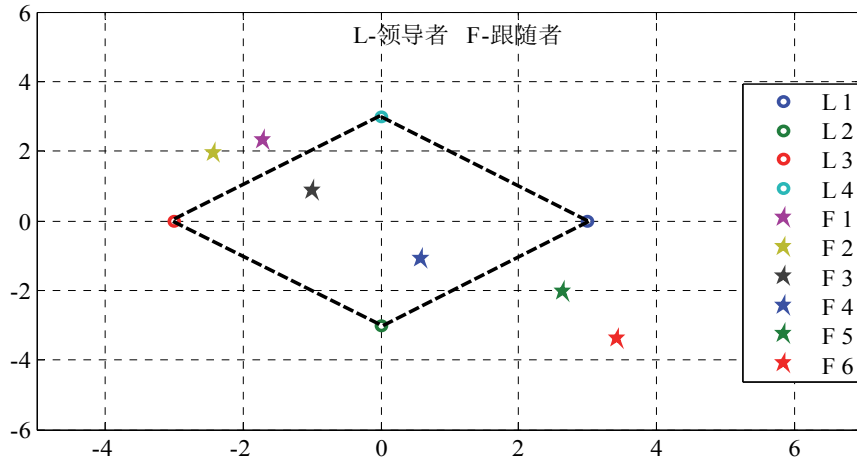
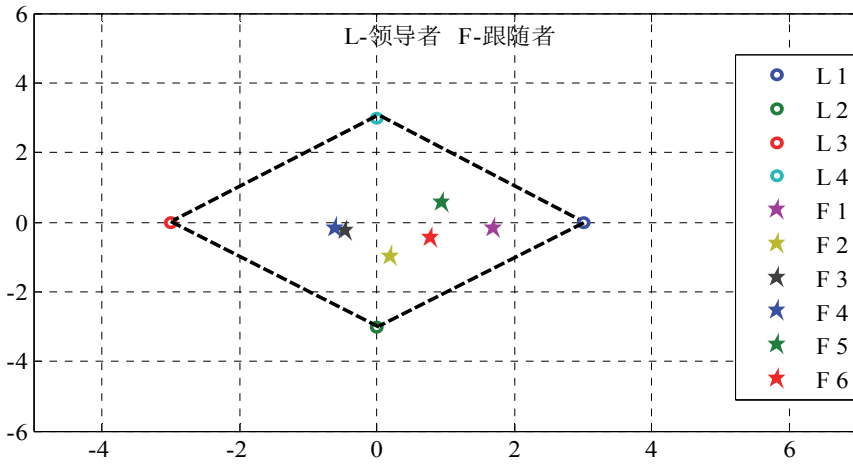
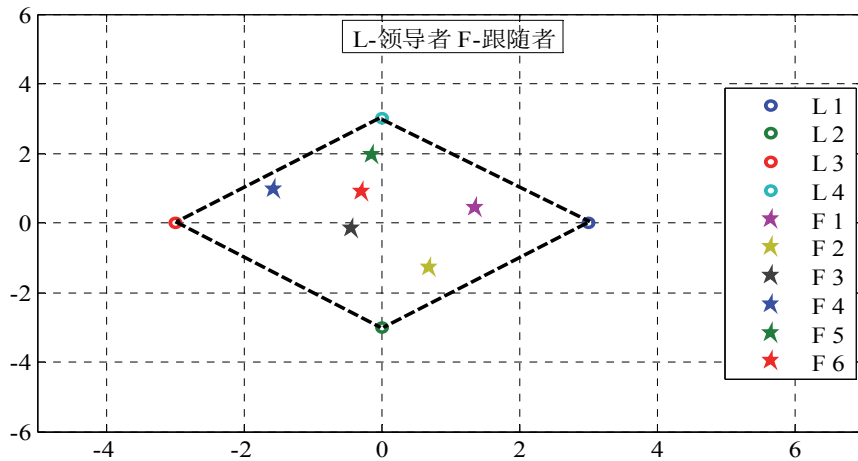
(b) $t = 0.024s$ (c) $t = 0.12s$ (d) $t = 0.6s$

图 8.26 4 个领导者和 6 个跟随者在不同时刻的快照图

Figure 8.26 Trajectory snapshots of the 4 leaders and 6 followers at different times

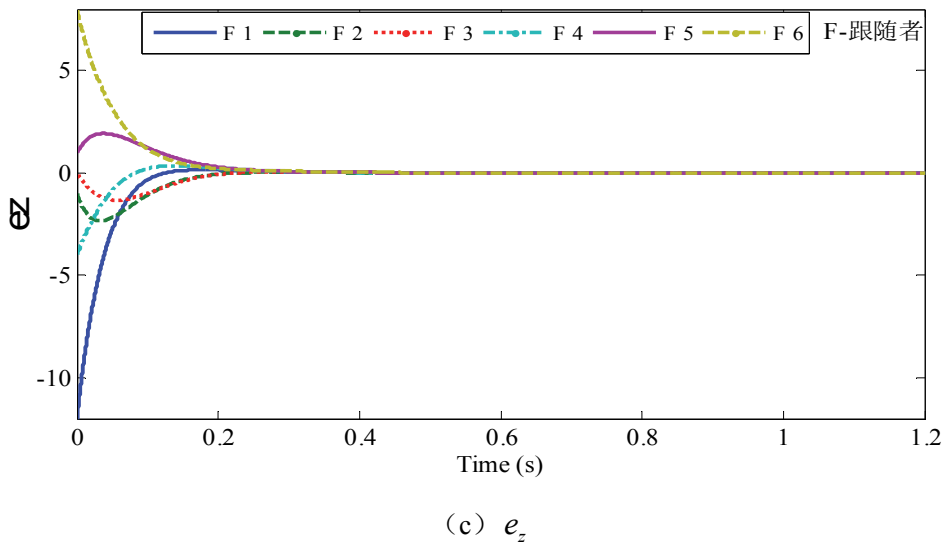
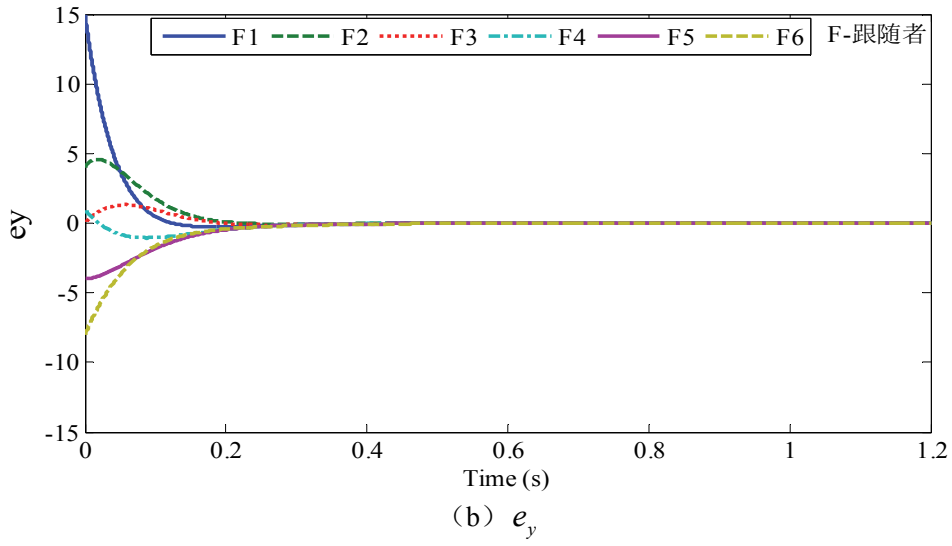
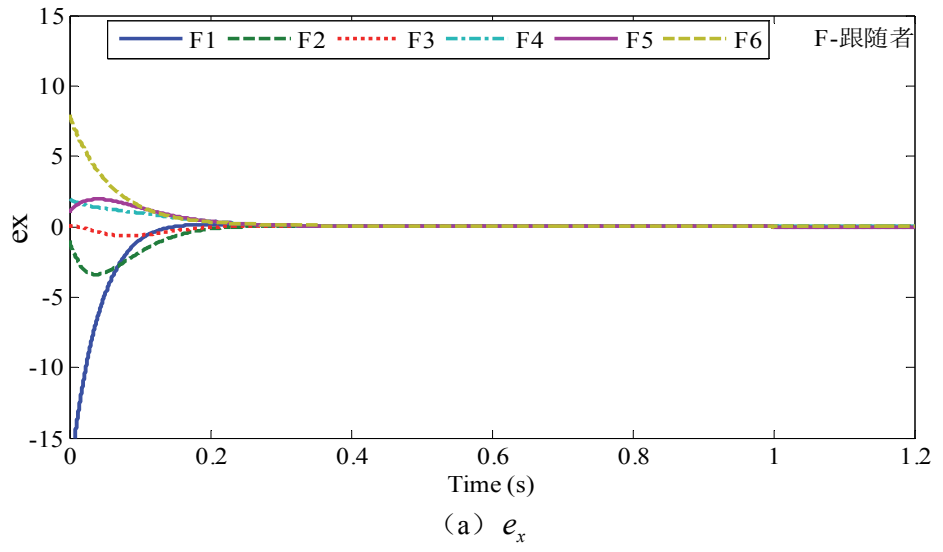


图 8.27 6个跟随者局部合围误差图

Figure 8.27 The neighborhood containment errors of the 6 followers

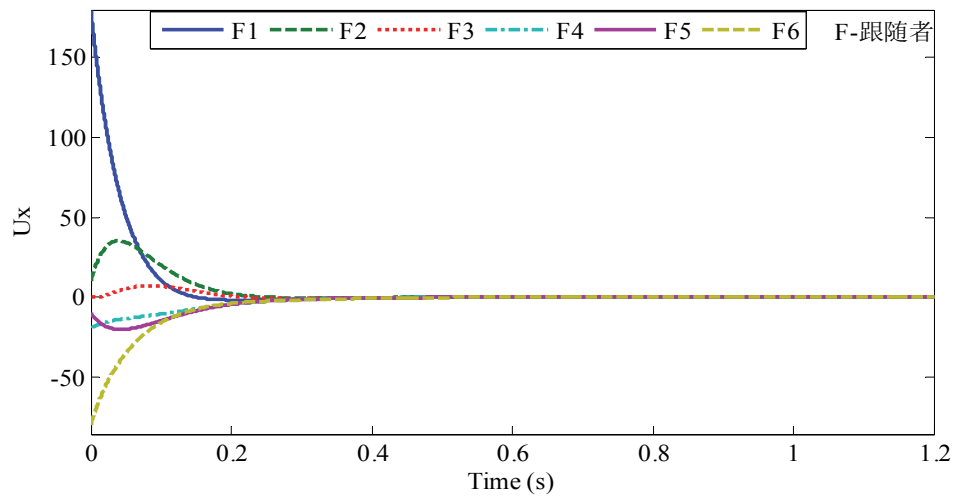
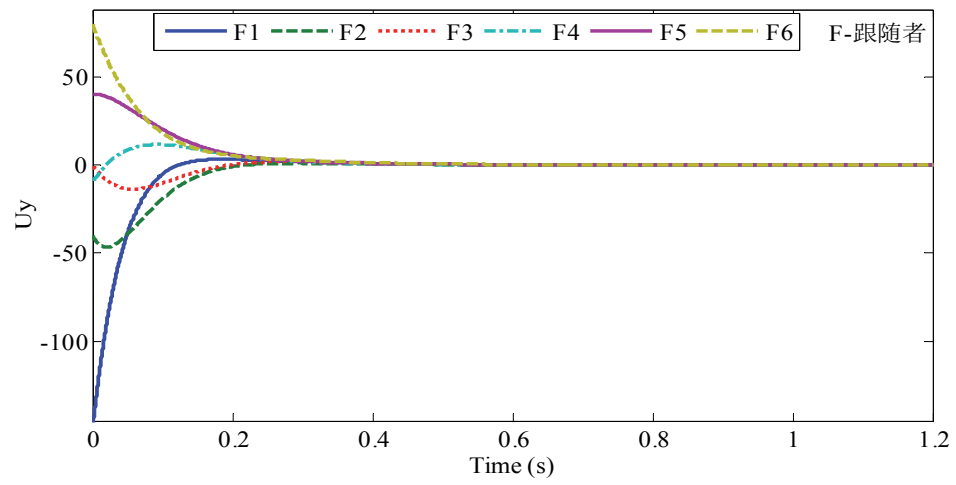
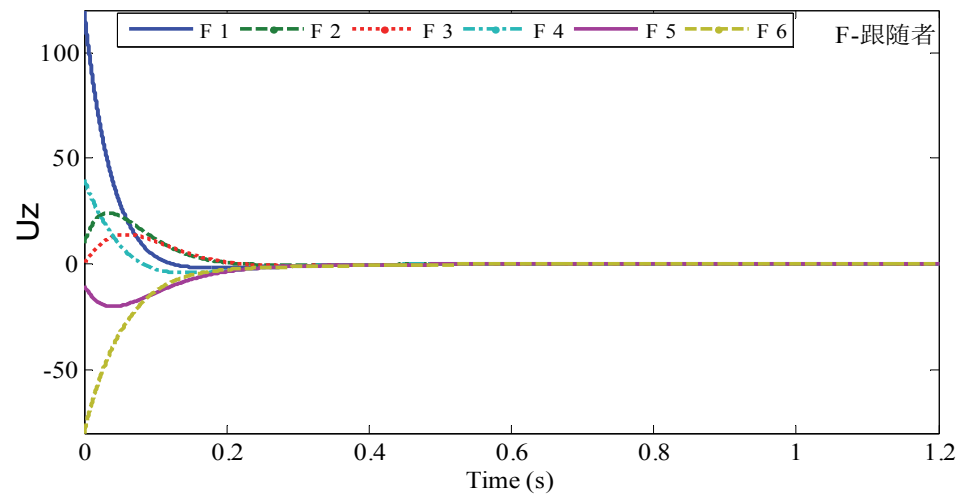
(a) U_x (b) U_y (c) U_z

图 8.28 系统的控制输入信号

Figure 8.28 The control input of the sytem

图 8.27 中的三个子图分别给出了 6 个跟随者在 x -维方向, y -维方向以及 z -维方向的局部误差。由前面理论分析部分给出的局部合围误差的定义可知, 若多智能体系统中所有跟随者的局部合围误差收敛到 0, 则多智能体系统中所有的跟随者进入到领导者所形成的凸包区域内, 即多智能体系统达到合围。从图 8.27 可以看出, 6 个跟随者在 x -维方向, y -维方向以及 z -维方向的局部误差均在给定的有限时间 $T = 1s$ 内收敛到 0, 表明多智能体系统在给定有限时间内实现合围。图 8.28 的三个子图分别给出了 6 个跟随者在 x -维方向, y -维方向以及 z -维方向的控制输入信号。从图中可以看出, 系统的控制输入信号不但平滑, 而且保持一致有界。

综合以上分析, 所有仿真结果均验证了前面所得的理论结果, 即, 在所设计的合围控制协议下, 所有跟随者在给定有限时间内进入领导者形成的凸包区域内, 其有限时间小于提前统一给定的有限时间 T , 并且控制输入信号平滑且一致有界。

8.6 高阶线性多智能体系统的给定有限时间合围控制

8.6.1 问题描述

本节研究含有多个领导者以及多个跟随者的高阶线性多智能体系统在有向拓扑条件下的给定有限时间合围控制问题。

假设多智能体系统中含有 M ($M > 1$) 个领导者和 N 个跟随者, 其中领导者是不含邻居的智能体, 而跟随者是至少含有一个邻居的智能体。我们仍然令 $\mathcal{F} = \{1, 2, \dots, N\}$ 为跟随者的指标集合以及 $\mathcal{A} = \{N+1, N+2, \dots, N+M\}$ 为领导者的指标集合。注意到领导者没有邻居, 即领导者只是对跟随者发布命令, 但并不接受来自跟随者和其他领导者的信息。在这种情况下, 拉普拉斯矩阵 \mathcal{L} 可以表示为

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{L}_2 \\ \mathbf{0}_{M \times N} & \mathbf{0}_{M \times M} \end{bmatrix}, \text{ 其中 } \mathcal{L}_1 \in \mathbb{R}^{N \times N}, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{R}^{N \times M}.$$

N 个跟随者的动态方程由式(7.1)给出, M 个领导者的动态方程与第七章中 1 个领导者的动态方程是相同的, 由式(7.2)给出。 $N+M$ 个智能体之间的通讯拓扑满足如下假设关系。

假设 8.6 对每一个跟随者, 至少存在一个领导者有一条有向路径通向它。

在假设 8.6 的条件下, 我们给出关于矩阵 \mathcal{L}_1 的一个有用性质。

引理 8.2 存在一个正主对角线矩阵 $Q_{\mathcal{F}} = \text{diag}\{\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_N\} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ 使得下式成立:

$$Q_{\mathcal{F}}\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_1^T Q_{\mathcal{F}} > 0 \quad (8.83)$$

其中, $\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_N$ 由 $[\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_N]^T = (\mathcal{L}_1^T)^{-1} \mathbf{1}_N$ 决定。另外, 矩阵 $-\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2$ 中的每一个元素都是非负的, 并且矩阵每一行的元素和为 1。

证明: 此引理的证明过程和引理 8.1 的证明过程类似, 在此就不再赘述。

证明完毕。

8.6.2 合围控制器设计与稳定性分析

设 $E_{\mathcal{F}} = [e_1^T, \dots, e_N^T]^T$, $E_{\mathcal{A}} = [e_{N+1}^T, \dots, e_{N+M}^T]^T$, $x_{\mathcal{F}} = [x_1^T, \dots, x_N^T]^T$, 以及 $x_{\mathcal{A}} = [x_{N+1}^T, \dots, x_{N+M}^T]^T$ 。则有以下式成立:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{F}} &= (\mathcal{L}_1 \otimes I_n) x_{\mathcal{F}} + (\mathcal{L}_2 \otimes I_n) x_{\mathcal{A}} \\ &= (\mathcal{L}_1 \otimes I_n) [x_{\mathcal{F}} - ((-\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2) \otimes I_n) x_{\mathcal{A}}] \end{aligned} \quad (8.84)$$

设 $x^* = [x_1^{*T}, \dots, x_N^{*T}]^T = -((-\mathcal{L}_1^{-1} \mathcal{L}_2) \otimes I_n) x_{\mathcal{A}} \in \mathbb{R}^{nN}$ 。根据引理 8.2 可知, $x_{\mathcal{F}} \rightarrow x_e$ 意味着对于所有的 $i \in \mathcal{F}$ 以及 $q = 1, \dots, n$, $x_{i,q}$ 收敛到领导者所形成的凸区域 $Co\{x_{j,q}, j \in \mathcal{A}\}$ 中。故本节的给定有限时间全状态合围控制目标等价于设计分布式控制协议使得, 在提前统一设定的固定有限时间 T^* 内, $x_{\mathcal{F}} \rightarrow x_e$, 即使得, $E_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$ 。

首先, 针对每一个跟随者, 设计给定有限时间分布式观测器如下:

$$\dot{\hat{x}}_{i,q} = \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij}} \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij} \dot{\hat{x}}_{j,q} - \left(c + \frac{\dot{\varrho}}{\varrho} \right) \frac{1}{\sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij}} \sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij} (\hat{x}_{i,q} - \hat{x}_{j,q}) \quad (8.85)$$

其中, $\hat{x}_{N+1,q} = x_{N+1,q}$, $c > 0$ 为设计常数。注意到在假设 8.6 的条件下, $\sum_{j \in \mathcal{F} \cup \mathcal{A}} a_{ij} \neq 0$,

故式(8.85)的定义是成立的。并且, 当 $t \geq t_0 + T_1$ 时, 对所有的 $q = 1, \dots, n$, $[\hat{e}_{1,q}, \dots, \hat{e}_{N,q}]^T = \mathcal{L}_1([\hat{x}_{1,q}, \dots, \hat{x}_{N,q}]^T - [x_{1,q}^*, \dots, x_{N,q}^*]^T) \equiv 0$ 意味着, 当 $t \geq t_0 + T_1$ 时, $\hat{x}_{i,q} \equiv x_{i,q}^*$ ($i \in \mathcal{F}$, $q = 1, \dots, n$)。故我们设计如下给定有限时间合围控制协议:

$$u_{\mathcal{F}} = -\frac{1}{\eta} [I_N \otimes (b_n^T P)] \xi - \hat{\theta} \quad (8.86)$$

其中 $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_N]^T \in \mathbb{R}^N$,

$$\hat{\theta}_i = \sum_{j=1}^n C_n^j \frac{\eta^{(j)}}{\eta} (x_{i,n+1-j} - \hat{x}_{i,n+1-j}), \quad i \in \mathcal{F} \quad (8.87)$$

本节的主要结果由下面定理给出。

定理 8.6 考虑含有 M 个领导者和 N 个跟随者的多智能体系统, 其中 N 个跟随者的动态方程由式(7.1)给出, M 个领导者的动态方程由式(7.2)给出, 则在假设 8.6 的条件下, 所设计控制协议(8.86)-(8.87)使得系统中所有 N 个跟随者的各阶状态在提前给定固定有限时间 $T^* = T_1 + T$ 内分别进入 M 个领导者的各阶状态所形成的凸形区域内。另外, 系统中所有智能体在 $t \in [t_0 + T^*, \infty)$ 时仍然保持合围状态, 控制输入 $u_{\mathcal{F}}$ 在该区间始终保持为 0, 并且 $u_{\mathcal{F}}$ 在整个时间区间 $[t_0, \infty)$ 上连续且一致有界, 并且在除了切换点 $t = t_0 + T_1$ 外处处平滑。

证明: 通过选择如下 Lyapunov 候选函数:

$$V_{\mathcal{F}} = \xi^T (Q_{\mathcal{F}} \otimes P) \xi \quad (8.88)$$

并且采取和定理 7.1 中类似的证明步骤, 即可得到本定理中的结论。

证明完毕。

8.7 本章小结

本章主要基于前面几章所得到的（给定）有限时间一致性控制理论，解决了相对应多智能体系统的（给定）有限时间编队-合围/合围控制问题，并分别结合严格的理论分析与仿真实验对所设计出的（给定）有限时间编队-合围/合围控制算法的有效性和优越性进行验证。值得提出的是本章第二节中考虑了编队-合围控制问题，而编队-合围控制问题和单独的编队控制或合围控制不同，其中领导者和领导者之间存在网络通讯关系，并通过彼此协同合作形成给定编队队形，同时跟随者与其他跟随者相互合作并只有部分跟随者接受来自领导者的信息，最后所有跟随者进入到领导者形成的给定编队所构成的凸包围之内。编队-合围的难点就在于领导者在未形成编队之前，领导者是动态变化的，并且领导者的状态不能保证是有界的，这对有限时间合围控制协议的设计和稳定性分析都带来极大的挑战，同时编队-合围问题在实际中有广泛的应用，因此研究编队-合围问题也是十分有意义的一个课题。

9 总结与展望

9.1 总结

网络化多智能体系统是一个多变量、强耦合和非线性的复杂网络系统，其局部网络通讯关系对其有限时间稳定控制，高稳定度以及高精度控制带来巨大挑战。因此多智能体系统有限时间稳定性一致控制是分布式控制的重点和难点。虽然目前关于多智能体系统有限时间一致性控制问题已经取得比较丰富的研究成果，但仍有许多有待改进和尚未解决的问题。本文以多智能体系统有限时间控制为研究对象，紧紧围绕目前多智能体系统有限时间一致性控制研究中存在的问题进行研究，完成了以下创新性研究工作：

① 研究了含有未知常数控制增益以及可线性参数化分解的二阶非线性多智能体系统在单向通讯拓扑条件下的有限时间一致性控制问题，通过结合加幂积分技术，自适应控制方法和有限时间稳定性理论，设计出了基于分数阶状态反馈以及自适应律的自适应有限时间一致性控制算法，解决了二阶非线性多智能体系统在有向拓扑条件下的有限时间一致性控制难题。在此基础上，进一步将此有限时间稳定性分析方法应用到了该类系统的有限时间编队-合围控制问题中。

② 针对同时含有未知时变控制增益，不可线性化参数分解的不确定非线性因素，未知外界干扰以及未知不可测执行器故障的二阶复杂非线性多智能体系统，研究了其在单向拓扑条件下的有限时间一致性控制问题。主要采用三大策略来解决所面临难题，首先，通过构造一个新的拉普拉斯矩阵，并将该矩阵引入 Lyapunov 函数中，解决了单向拓扑问题；其次，通过引入虚拟参数估计误差概念，巧妙解决了未知时变不确定控制增益以及有效性执行器故障问题；最后，通过结合核心函数技术，自适应控制方法以及有限时间稳定性理论，提出了基于分数阶反馈的自适应控制律，有效解决了系统中不可线性参数分解的非线性不确定因素，未知有界外界干扰以及叠加性执行器故障的影响问题。在此基础上，进一步将该有限时间稳定性分析方法推广到了高阶非仿射多智能体系统的有限时间一致性控制问题中。

③ 研究了一类含有非匹配不确定性因素的高阶纯反馈多智能体的有限时间一致性追踪控制问题。通过引入基于虚拟分数阶滤波的分数阶-动态面设计技术的概念，并利用反衍控制设计技术，RBF 神经网络近似方法以及有限时间稳定性分析方法，提出了基于分数阶状态反馈以及分数阶自适应反馈率的有限时间一致性追踪协议，给出了基于 Lyapunov 稳定性理论的有限时间稳定性的严格理论证明。

④ 提出了一种新的给定有限时间稳定性理论，在此理论基础上提出了基于

时变比例函数增益的连续光滑给定有限时间一致性控制方法,使得多智能体系统可以在提前给定有限时间内实现一致,该有限时间不依赖于任何初始条件以及其他控制设计参数,可以提前统一给定,并且解决了基于符号函数或者分数阶状态反馈的有限时间控制方法中控制输入信号不连续或不光滑的问题。首先针对一阶线性多智能体系统,提出了连续光滑给定有限时间一致性控制协议,解决了其分别在无向和有向拓扑条件下的给定有限时间一致性控制问题,之后针对高阶线性多智能体系统,设计出了基于给定有限时间观测器以及状态转换的给定有限时间一致性追踪控制协议,解决了高阶线性多智能体系统在单向拓扑条件下的给定有限时间一致性追踪控制问题。

9.2 展望

对于多智能体系统的有限时间分布式一致性控制问题,还需在以下几个方面继续深入研究并开展工作:

⑤ 针对一般非线性多智能体系统的平滑给定有限时间控制方法的研究

如何针对含有非线性因素特别是不可线性参数化分解的非线性因素的多智能体系统设计出给定有限时间控制器,并给出严格的有限时间稳定性分析证明是下一步需要深入研究的问题。

⑥ 针对存在未知执行器故障的一般非线性多智能体系统的平滑给定有限时间容错控制方法的研究

本文并没有考虑存在未知执行器故障情形下多智能体系统的给定有限时间控制研究,而系统在长期运行过程中会不可避免地出现执行器故障的情况,并且所出现故障是未知不可测的,因此有必要进一步开展存在未知执行器故障条件下多智能体系统的给定有限时间容错控制方法的研究。

⑦ 针对存在非匹配不确定性因素的高阶纯反馈非线性多智能体系统的平滑给定有限时间控制方法的研究

在实际控制系统中,一大类控制系统都可以归类为高阶纯反馈多智能体系统,因此有必要进一步针对此类多智能体系统开展给定有限时间分布式控制研究。

致 谢

值此论文完成之际，博士生涯也即将结束。回顾过去，感慨颇多。在这四年多攻读博士学位的时间里，我不仅在学术上取得了长足的进步，在心境上也得到了很好的磨练，这一切都将是人生中的宝贵财富。谨向这一路上促进我成长进步，给予我诚挚关心和无私帮助的所有人致以最真诚的谢意。

首先，我要向我的导师宋永端教授表示最诚挚的敬意和最衷心的感谢。宋老师是我的恩师，是恩师一步步将我引入控制科学领域，并把我带到了多智能体系统有限时间分布式控制研究的国际前沿，我取得的每一点进步都凝结着恩师的心血和智慧。四年多来，沐浴着名师指导，从恩师身上感悟着做人、做事和做学问的道理，宋老师严谨的科研态度、敏锐的学术洞察力、渊博的知识、精益求精的治学精神、做人的那种大气通透以及身上独有的人格魅力，特别是对学术的那种饱满的热情，深深地影响了我，令我也深深爱上了科研，是宋老师领我进入了学术的殿堂，令我领略到科研的美，也令我积极面对科研中遇到的每一个挫折，享受攻克难题时的每一个喜悦。我现在还能清楚记得宋老师帮我修改第一篇英文学术论文的情景，经过宋老师修改的文章，流畅，更富有美感。我发表的每一篇学术论文，都是经过宋老师一遍又一遍的修改完成的，这些成果都离不开老师的悉心指导。宋老师传授我的许许多多学术研究的方法和经验，是我一生弥足珍贵的财富。在此，我谨向我的恩师宋老师表示衷心的感谢！

为了扩展我的学术视野，宋老师推荐我到美国德克萨斯大学阿灵顿分校 Frank L. Lewis 教授课题组访问学习，开展了一年的合作研究。在美国学习期间，Lewis 教授不但在课题上给予我很多指导，在生活上也给予我很多帮助。这段学习经历在我以后学术研究生涯中将受益无穷。在此对 Lewis 教授表示真诚的感谢。

衷心感谢加州大学圣地亚哥分校的 Miroslav Krstic 教授。和 Krstic 教授合作过几篇学术文章，从合作的过程当中，学到了很多知识和珍贵的科研经验。特别是 Krstic 教授对学术格外严谨、精益求精的态度以及那种饱满的学术研究热情深深影响了我，令我感触颇多。我还要感谢新加坡南洋理工大学的温长云教授和加州大学河滨分校的任伟教授。和两位教授都有过合作研究，在合作的过程中，真正感受到了那种大师的风范。他们每一位都是非常认真严谨，不放过任何一处小的细节。在他们的指导和帮助下，合作的文章有很大的提升，我也从中学到了很多东西。另外，香港大学 David J. Hill 教授在学术方面也给予了我很多指导和帮助，在此对他表示真诚的感谢。

非常感谢实验室所有的老师们，他们都是我学习和生活中最好的榜样。特别

感谢马铁东老师和浮洁老师给予我的学业方面的鼓励和生活方面的关心。感谢实验室所有的师弟师妹们给我提供的无私的帮助。特别感谢实验室的敖伟博士、高瑞真博士、赖俊峰博士、罗小锁博士、赵凯师弟、黄秀才师弟、高辉师弟、陈清师妹，他们在平时的生活和学习中都给予了我很多的帮助，同时也使我的博士生活变得丰富多彩、充满了乐趣。

感谢留美期间课题组的 Hamidreza Modares、崔冰、吉鸿海、范玲玲等博士在学习及生活中给予我的支持与帮助。他们的陪伴让我在异国他乡感受到了更多家的温暖，不断鼓励着我前行。

感谢我的室友闫杰。我们一起吃饭，一起学习，一起打太极，和她朝夕相处的日子必将成为我人生的美好回忆。感谢教我们太极的蒋爷爷，感谢一起锻炼的拳友。

感谢父母多年的养育之恩以及对我这二十多年求学路的支持和鼓励，将我最深的谢意送给我的家人。

感谢所有曾经关心我、鼓励我和帮助过我的老师、同学和亲友。

最后，对百忙之中参与本论文评阅和答辩的各位专家和老师们致以诚挚的谢意！

王玉娟

二〇一六年十一月 于重庆

参考文献

- [1] Ren W, Cao Y C. Distributed coordination of multiagent networks: emergent problems, models, and issues [M]. London: Springer-Verlag, 2010.
- [2] Ren W, Cao Y. Distributed coordination of multi-agent networks [M]. London: Springer-Verlag, 2011.
- [3] Qu Z. Cooperative control of dynamical systems [M]. London: Springer-Verlag, 2009.
- [4] Lewis F L, Zhang H W, Hengster-Movric K, Das A. Cooperative control of multi-agent systems: optimal and adaptive design approaches [M]. London: Springer-Verlag, 2014.
- [5] 肖秋云. 多智能体系统有限时间一致性若干问题研究[D]. 无锡: 江南大学硕士学位论文, 2015.
- [6] 王寅秋. 非线性多智能体系统一致性分布式控制[D]. 北京: 北京理工大学博士学位论文, 2015.
- [7] Lynch N A. Distributed Algorithms [M]. Inc: Morgan Kaufmann Publishers, 1997.
- [8] Spanos D P, Olfati-Saber R, Murray R M. Dynamic consensus for mobile networks [C]. In Proceedings of the 16th IFAC World Congress, Prague: IFAC, 2005: 1-6.
- [9] 龙晓军. 多智能体系统的有限时间一致性跟踪[D]. 大连: 大连海事大学博士学位论文, 2015.
- [10] Borkar V, Varaiya P P. Asymptotic agreement in distributed estimation [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1982, 27(3): 650-655.
- [11] Saber R O, Murray R M. Consensus protocols for networks of dynamic agents [C]. In Proceedings of the IEEE 2005 American Control Conference, 2003, 6: 951-956.
- [12] 余莹莹. 多智能体系统一致性若干问题的研究 [D]. 武汉: 华中科技大学博士学位论文, 2010.
- [13] Haimo V T. Finite time controllers [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1986, 24(4): 760-770.
- [14] Bhat, S P, Bernstein, D S. Finite time stability of continuous autonomous systems [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, 38(3): 751-766.
- [15] Vicsek T, Czirok A, Jacob E B, et al. Novel type of phase transition in a system of self-driven particles [J]. Physical Review Letters, 1995, 75(6): 1226-1229.
- [16] Jadbabaie A, Lin A, Morse A S. Coordination of groups of mobile agents using nearest neighbor rules [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.
- [17] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching

- topologies and time-delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [18] Moreau L. Stability of multiagent systems with time-dependent communication links [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(2):169-182.
- [19] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.
- [20] Ren W, Beard R W, Atkins E M. Information consensus in multivehicle cooperative control [J]. IEEE Control Systems Magazine, 2007, 27(2): 71-82.
- [21] Cortés J. Distributed algorithms for reaching consensus on general functions [J]. Automatica, 2008, 44(3): 726-737.
- [22] Ren W, Atkins E M. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(10-11):1002-1033.
- [23] Yu W, Chen G, Cao M, et al. Second-order consensus for multiagent systems with directed topologies and nonlinear dynamics [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2010, 40(3):881-891.
- [24] Yu W, Chen G, Cao M. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2010, 46(6):1089-1095.
- [25] Ren W. On consensus algorithms for double-integrator dynamics [J]. IEEE Transactions on Automatic Control [J], 2008, 53(6): 1503-1509.
- [26] Abdessameud A, Tayebi A. On consensus algorithms for double-integrator dynamics without velocity measurements and with input constraints [J]. Systems and Control Letters, 2010, 59(12): 812-821.
- [27] Wang Y J, Song Y D, Lewis F L, Robust adaptive fault-tolerant control of multi-agent systems with uncertain non-identical dynamics and undetectable actuation failures [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2015, 62 (6): 3978-3988.
- [28] Qin J H, Gao H J, Zheng W X. On average consensus in directed networks of agents with switching topology and time delay [J]. International Journal of Systems Science, 2011, 42(12): 1947-1956.
- [29] Tian Y P, Liu C L. Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53(9): 2122-2128.
- [30] Wu Y J, Wang L. Average consensus of continuous-time multi-agent systems with quantized communication [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2014, 24(18):

- 3345-3371.
- [31] Shang Y L. Average consensus in multi-agent systems with uncertain topologies and multiple time-varying delays [J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2014, 459: 411-429.
 - [32] Murray R M. Recent research in cooperative control of multi-vehicle systems [J]. *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control*, 2007, 129(5): 571-583.
 - [33] Ren W. Multi-vehicle consensus with a time-varying reference state [J]. *Systems and Control Letters*, 2007, 56(7-8): 474-483.
 - [34] Qin J, Zheng W X, Gao H. Consensus of multiple second-order vehicles with a time-varying reference signal under directed topology [J]. *Automatica*, 2011, 47(9):1983–1991.
 - [35] Cao Y C, Ren W, Li Y. Distributed discrete-time coordinated tracking with a time-varying reference state and limited communication [J]. *Automatica*, 2009, 45(5): 474-483.
 - [36] Gu D B, Wang Z Y. Leader-follower flocking: algorithms and experiments [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2009, 17(5): 1211-1219.
 - [37] Kokiopoulou E, Frossard P. Polynomial filtering for fast convergence in distributed consensus [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, 57(1): 342-354.
 - [38] Wu Z H, Peng L, Xie L B, et al. Stochastic bounded consensus tracking of leader-follower multi-agent systems with measurement noises based on sampled-data with small sampling delay [J]. *Physica A*, 2013, 392(4): 918-928.
 - [39] Qi B, Lou K, Miao S, et al. Second-order consensus of leader-following multi-agent systems with jointly connected topologies and time-varying delays [J]. *Arabian Journal for Science and Engineering*, 2014, 39(2): 1431-1440.
 - [40] Zhang X F, Liu L, Feng G. Leader-follower consensus of time-varying nonlinear multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2015, 52: 8-14.
 - [41] Hong Y, Hu J, Gao L. Tracking control for multi-agent consensus with an active leader and variable topology [J]. *Automatica*, 2006, 42(7):1177–1182.
 - [42] Hong Y, Chen G, Bushnell L. Distributed observers design for leader-following control of multi-agent networks [J]. *Automatica*, 2008, 44(3):846–850.
 - [43] Cao Y, Ren W. Distributed coordinated tracking with reduced interaction via a variable structure approach [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 57(1):33-48.
 - [44] Wang Y J, Song Y D, Gao H, Lewis, F L. Distributed fault-tolerant control of virtually and physically interconnected systems with application to high-speed trains under traction/braking failures [J]. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 2016, 17(2): 535-545.
 - [45] Cao Y, Ren W. Containment control with multiple stationary or dynamic leaders under a directed interaction graph [C]. *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*.

- Shanghai, China, 2009:3014-3019.
- [46] Cao Y, Stuart D, Ren W, et al. Distributed containment control for multiple autonomous vehicles with double-integrator dynamics: algorithms and experiments [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2011, 19(4): 929-938.
 - [47] Mei J, Ren W, Ma G. Distributed adaptive coordination for multiple Lagrangian systems under a directed graph without using neighbors velocity information [J]. *Automatica*, 2013, 49(6):1723-1731.
 - [48] Li Z, Ren W, Liu X, et al. Distributed containment control of multi-agent systems with general linear dynamics in the presence of multiple leaders [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2011, 23(5):534-547.
 - [49] Olfati-Saber R. Ultrafast consensus in small-world networks [C]. In *Proceeding of the 2005 American Control Conference*. Portland, OR, USA, 2005: 2374-2378.
 - [50] Nosrati S, Shafiee M. Time-Delay dependent stability robustness of small-world protocols for fast distributed consensus seeking [C]. In *the 5th International Symposium on Modeling and Optimization in Mobile, Ad Hoc and Wireless Networks and Workshops*, 2007.
 - [51] Xiao L, Boyd S. Fast linear iterations for distributed averaging. *Systems and Control Letters* [J]. 2004, 53(1): 65-78.
 - [52] Kira Y, Mesbahi M. On maximizing the second smallest eigenvalue of a state-dependent graph laplacian [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(1): 116-120.
 - [53] Jin Z P, Murray R M. Multi-hop relay protocols for fast consensus seeking [C]. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*, San Diego, CA, USA, 2006: 1001-1006.
 - [54] Yang W, Wang X F. Consensus filters on small world networks [C]. In: *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*, Dalian, China, 2006: 1217-1221.
 - [55] Weiss L, Infante E F. On the stability of systems defined over a finite time interval [C]. *Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of American*, 1965: 44-48.
 - [56] Weiss L, Infante E F. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, 12(1): 54-59.
 - [57] Cortés J. Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus [C]. *Automatica*, 2006, 42(11): 1993-2000.
 - [58] Chen G, Lewis F L, Xie L H. Finite-time distributed consensus via binary control protocols [J]. *Automatica*, 2011, 47 (9): 1962–1968.
 - [59] Li C Y, Qu Z H. Distributed finite-time consensus of nonlinear systems under switching

- topologies. *Automatica*, 2014, 50(6): 1626–1631.
- [60] Zhang Y, Yang Y, Zhao Y, Wen G. Distributed finite-time tracking control for nonlinear multi-agent systems subject to external disturbances [J]. *International Journal of Control*, 2013, 86(1): 29-40.
- [61] Franceschelli M, Guia A, Pisano A, Usai E. Finite-time consensus for switching network topologies [J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2013, 10: 83-93.
- [62] Zuo Z, Tie L. A new class of finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems [J]. *International Journal of Control*, 2014, 87(2): 363-370.
- [63] Zuo Z, Tie L. Distributed robust finite-time nonlinear consensus protocols for multi-agent systems [J]. *International Journal of Control*, 2016, 47(6): 1366-1375.
- [64] Wen G, Rahmani A, Yu Y. Consensus tracking for multi-agent systems with nonlinear dynamics under fixed communication topologies [C]. *Proceeding of the World Congress on Engineering and Computer Science*, San Francisco, USA, 2011.
- [65] Meng Z, Lin Z. On distributed finite-time observer design and finite-time coordinated tracking of multiple double integrator systems via local interactions [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, 24(16): 2473-2489.
- [66] Fu J, Wang J. Observer-based finite-time coordinated tracking for high-order integrator systems with matched uncertainties under directed communication graphs [C]. 11th IEEE International Conference on Control and Automation, Taiwan, 2014: 880-885.
- [67] Emelyanov S V, Taran V A. On a class of variable structure control systems [C]. In *Proceeding of USSR Academy of Sciences, Energy and Automation*, Moskov, 1962, 3.
- [68] Yu X, Man Z. Model reference adaptive control systems with terminal sliding modes [J]. *International Journal of Control*, 1996, 64(6): 1165-1176.
- [69] Xu X, Wang J. Finite-time consensus tracking for second-order multiagent systems [J]. *Asian Journal of Control*, 2013, 15(4): 1246-1250.
- [70] Khoo S, Xie L, Man Z. Integral terminal sliding mode cooperative control of multi-robot networks [C]. *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, Singapore, 2009: 969-973.
- [71] Khoo S, Xie L, Man Z. Robust finite-time consensus tracking algorithm for multirobot systems [J]. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 2009, 14(2): 219-228.
- [72] Zou A, Kumar K D. Distributed attitude coordination control for spacecraft formation flying [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2012, 48(2): 1329-1346.
- [73] Chen G, Yue Y L, Song Y D. Finite-time cooperative-tracking control for networked Euler-Lagrange systems [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2013, 7(11): 1487-1497.

- [74] Ghasemi M, Nersesov S G. Finite-time coordination in multiagent systems using sliding mode control approach [J]. *Automatica*, 2014, 50(4): 1209-1216.
- [75] He X, Wang Q, Yu W. Finite-time distributed cooperative attitude tracking control for multiple rigid spacecraft [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, 256: 724-734.
- [76] Cao Y., Ren W, Meng Z. Decentralized finite-time sliding mode estimators and their applications in decentralized finite-time formation tracking [J]. *Systems and Control Letters*, 2010, 59(9): 522-529.
- [77] Kamble U B, Chandle J O, Lahire V S, Langde R D. Second order twisting sliding mode control of multi-agent network with input disturbance [C]. 2013 Fourth International Conference on Computing, Communications and Networking Technologies, 2013: 1-6.
- [78] Li H, Liao X, Chen G. Leader-following finite-time consensus in second-order multi-agent networks with nonlinear dynamics [J]. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2013, 11(2): 422-426.
- [79] Zhao L, Hua C. Finite-time consensus tracking of second-order multi-agent systems via nonsingular TSM [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 75(1-2):311-318.
- [80] Yang Z, Shibuya Y, Qin P. Distributed robust control for synchronized tracking of networked Euler-Lagrange systems. *International Journal of Systems Science*, 2015, 46(4): 720-732.
- [81] Bhat S P, Bernstein D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(5), 678–682.
- [82] Wang L, Xiao F. Finite-time consensus problems for networks of dynamic agents [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(4): 950-955.
- [83] Xiao F, Wang L, Chen J, et al. Finite-time formation control for multi-agent systems [J]. *Automatica*, 2009, 45(11): 2605-2611.
- [84] Xiao F, Wang L, Chen T. Finite-time consensus in networks of integrator-like dynamic agents with directional link failure [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(3): 756-762.
- [85] Cao Y, Ren W. Finite-time consensus for multi-agent networks with unknown inherent nonlinear dynamics [J]. *Automatica*, 2014, 50 (10), 2648–2656.
- [86] Bhat S P, Bernstein D S. Finite time stability of Homogeneous systems [C]. In *Proceedings in American Control Conference*, 1997: 2513-2514.
- [87] Hong Y G, Huang J, Xu Y S. On an output feedback finite-time stabilization problem [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(2): 305-309.
- [88] Hong Y G. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems [J]. *Systems and Control Letters*, 2002, 46: 231-236.

-
- [89] Hong Y G, Jiang Z P. Finite-time stabilization of nonlinear systems with parametric and dynamic uncertainties [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(12): 1950-1956.
- [90] Hong Y G, Wang J, Cheng D Z. Adaptive finite-time control of nonlinear systems with parametric uncertainty [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51 (5): 858-862.
- [91] Hui Q, Haddad, W M, Bhat S P. Finite-time semistability and consensus for nonlinear dynamical networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2008, 53 (8): 1887-1990.
- [92] Du H, He Y, Cheng Y. Finite-time synchronization of a class of second-order nonlinear multi-agent systems using output feedback control [J]. IEEE Transactions on Circuits Systems-I: Regular papers, 2014, 61(6): 1778-1788.
- [93] Zhang Y, Yang Y. Finite-time consensus of second-order leader-following multi-agent systems without velocity measurements [J]. Physics Letters A, 2013, 337(3-4): 243-249.
- [94] Guan Z, Sun F, Wang Y, Li T. Finite-time consensus for leader-following second-order multi-agent networks [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2012, 59(11): 2646-2654.
- [95] Lu X, Lu R, Chen S, Lu J. Finite-time distributed tracking control for multi-agent systems with a virtual leader [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 2013, 60(2): 352-362.
- [96] Zhao Y, Duan Z, Wen G. Distributed finite-time tracking of multiple Euler-Lagrange systems without velocity measurements [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(11): 1688-1703.
- [97] Li S, Wang X. Finite-time consensus and collision avoidance control algorithms for multiple AUVs [J]. Automatica, 2013, 49(11): 3359-3367.
- [98] Lu X, Chen S, Lu J. Finite-time tracking for double-integrator multi-agent systems with bounded control input [J]. IET Control Theory and Applications, 2013, 7(11): 1562-1573.
- [99] Zhang B, Jia Y, Matsuo F. Finite-time observers for multi-agent systems without velocity measurements and with input saturations [J]. Systems and Control Letters, 2014, 68: 86-94.
- [100] Yu H, Shen Y, Xia X. Adaptive finite-time consensus in multi-agent networks [J]. Systems and Control Letters, 2013, 62(10): 880-889.
- [101] Caron J M. Adding an integrator for the stabilization problem [J]. Systems and Control Letters, 1991, 17: 89-104.
- [102] Lin W, Qian C. Adding one power integrator: a tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems [J]. Systems and Control Letters, 2000, 39(5): 339-351.
- [103] Lin W, Qian C. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: the smooth feedback

- case [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(8): 1249-1266.
- [104] Lin W, Qian C. Adaptive control of nonlinearly parameterized systems: a nonsmooth feedback framework [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(5): 757-774.
- [105] Li S, Du H, Lin X. Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics [J]. Automatica, 2011, 47(8): 1706-1712.
- [106] Du H, Li S, Shi P. Robust consensus algorithm for second-order multi-agent systems with external disturbances [J]. International Journal of Control, 2012, 85(12): 1913-1928.
- [107] Du H, Li S, Lin X. Finite-time formation control of multi-agent systems via dynamic output feedback [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2013, 23: 1609-1628.
- [108] Wang X, Li S, Shi P. Distributed finite-time containment control for double-integrator multiagent systems [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2014, 44(9): 1518-1528.
- [109] Huang J, Wen C, Wang W, Song Y D. Adaptive finite-time consensus control of a group of uncertain nonlinear mechanical systems [J]. Automatica, 2015, 51: 292-301.
- [110] Khoo S, Xie L, Zhao S, Man Z. Multi-surface sliding control for fast finite-time leader-follower consensus with high order SISO uncertain nonlinear agents [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2014, 24: 2388-2404.
- [111] Ou M, Du H, Li S. Finite-time tracking control of multiple nonholonomic mobile robots [J]. Journal of the Franklin Institute, 2012, 349: 2834-2860.
- [112] Song Y D, Wang Y J, Holloway J, Krstic M. Time-Varying feedback for robust regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time [J]. Automatica, 2016, Accepted.
- [113] Song Y D, Wang Y J, Holloway J, Krstic M. Time-varying feedback for finite-time robust regulation of normal-form nonlinear systems [C]. 55th IEEE Conference on Decision and Control, 2016.
- [114] Desoer C, Vidyasagar M. Feedback systems: Input-output properties [M]. New York: Academic Press, 1975.
- [115] Jiang Z P, Teel A R, Praly L. Small-gain theorem for ISS systems and applications [J]. Mathematics of Control, Signals, and Systems, 1994, 7: 95-120.
- [116] Christofides P D, Teel A R. Singular perturbations and Input-to-State stability [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1996, 41(11): 1645-1650.
- [117] Krstic M, Kanellakopoulos I, Kokotovic P. Nonlinear and adaptive control design [M]. New York: John Wiley, 1995.
- [118] Sontag E, Wang Y. On characterizations of the input to state stability property [J]. Systems and Control Letters, 1995, 24: 351-359.
- [119] Hong Y G, Jiang Z P, Feng G. Finite-time input-to-state stability and related

- Lyapunov Analysis [C]. Proceedings of the 26th Chinese Control Conference, 2007, 652-656.
- [120] Amato F, Ambrosino R, Ariola M, Cosentino C, Tommasi G D. Finite-time stability and control [M]. London: Springer-Verlag, 2014.
- [121] Qu Z H. Cooperative control of dynamical systems applications to autonomous vehicles [M]. London: Springer-Verlag, 2008.
- [122] Zhang H W, Lewis F L, Qu Z H. Lyapunov, adaptive, optimal design techniques for cooperative systems on directed communication graphs [J]. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2012, 59(7): 3026-3041.
- [123] Meng Z Y, Ren W, You Z. Distributed finite-time attitude containment control for multiple rigid bodies [J]. Automatica, 2010, 46(12): 2092-2099.
- [124] Khalil H K. Nonlinear Systems [M]. 3rd. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002.
- [125] Brewer J. Kronecker products and matrix calculus in system theory [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 1978, 25(9): 772-781.
- [126] Horn R A, Johnson C R. Topics in Matrix Analysis [M]. U.K.: Cambridge University Press, 1991.
- [127] Yu W, Chen G, Cao M, Kurths J. Second-order consensus for multiagent systems with directed topologies and nonlinear dynamics [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2010, 40 (3): 881-891.
- [128] Zhu Z, Xia Y, Fu M. Attitude stabilization of rigid spacecraft with finite-time convergence [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 21(6): 686-702.
- [129] Ren W. Distributed leaderless consensus algorithms for networked Euler-Lagrange systems [J]. International Journal of Control, 2009, 82(11): 2137-2149.
- [130] Pomet J B, Praly L. Adaptive nonlinear regulation: estimation from the Lyapunov equation [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1992, 37(6): 729-740.
- [131] Hardy G, Littlewood J, Polya G. Inequalities [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1952.
- [132] Qian C, Lin W. Non-Lipschitz continuous stabilizer for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization [J]. System and Control Letters, 2001, 42 (3): 185-200.
- [133] Wang X, Hong Y, Ji H. Adaptive multi-agent containment control with multiple parametric uncertain leaders [J]. Automatica, 2014, 50: 2366-2372.
- [134] Berman A, Plemmons R. Nonnegative matrices in the mathematical sciences [M]. New York: Academic Press, 1979.
- [135] Polycarpou M M, Ioannou P A. A robust adaptive nonlinear control design [J]. Automatica, 1995, 31(3): 423-427.

- [136] Almeida J, Silvestre C, Pascoal A M. Cooperative control of multiple surface vessels with discrete-time periodic communications [J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, 22(4): 398-419.
- [137] Song Y D. Neuro-adaptive control with application to robotic systems [J]. *Journal of Robot Systems*, 1997, 14(6): 433-447.
- [138] Song Q, Song Y D. Generalized PI control design for a class of unknown nonaffine systems with sensor and actuator faults. *Systems and Control Letters*, 2014, 64: 86-95.
- [139] Song Y D, Wang Y J, Wen C Y. Adaptive fault-tolerant PI tracking control with guaranteed transient and steady-state performance [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, 99: 1-7.
- [140] Huang X, Lin W, Yang B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2005, 41: 881 - 888.
- [141] Oldham K B. *The fractional calculus* [M]. Elsevier, 1974.
- [142] Meng W, Yang Q, Jagannathan S, Sun Y. Adaptive neural control of high-order uncertain nonaffine systems: A transformation to affine systems approach [J]. *Automatica*, 2014, 23(2): 1473 - 1480.
- [143] Ge S S, Wang C. Adaptive NN control of uncertain nonlinear purefeedback systems [J]. *Automatica*, 2002, 38(4): 671 - 682.
- [144] Wang M, Liu X P, Shi P. Adaptive neural control of purefeedback nonlinear time-delay systems via dynamic surface technique [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics*, 2011, 41(6): 1681-1692.
- [145] Yu H, Shen Y, Xia X. Adaptive finite-time consensus in multiagent networks [J]. *Systems and Control Letters*, 2013, 62(10): 880 - 889.
- [146] Park J, Huh S, Kim S, Seo S, Park G. Direct adaptive controller for nonaffine nonlinear systems using self-structuring neural networks [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2005, 16(2): 414-422.
- [147] Zhang H W, Lewis F L. Adaptive cooperative tracking control of higher-order nonlinear systems with unknown dynamics [J]. *Automatica*, 2012, 48(7): 1432-1439.
- [148] Sanner R M, Slotine J E. Gaussian networks for direct adaptive control [J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1992, 3(6): 837-863.
- [149] Apostol T M. *Mathematical Analysis* [M]. Reading, MA: Addison-Wesley, 1963.
- [150] Swaroop D, Hedrick J K, Yip P P, Gerdes J C. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(10): 1893-1899.
- [151] Polyakov A, Fridman L. Stability notions and Lyapunov functions for sliding mode control

- systems [J]. Journal of Franklin Institute, 2014, 351: 1831-1865.
- [152] Li Z, Wen G, Duan Z, Ren W. Designing fully distributed consensus protocols for linear multi-agent systems with directed graphs [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(4):1152-1157.
- [153] Chen M, Tao G, Jiang B. Dynamic surface control using neural networks for a class of uncertain nonlinear systems with input saturation [J]. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 2015, 26(9):2086-2097.

附 录

A. 攻读博士学位期间取得的主要学术成果

1. 重要学术杂志相关论文

- [1] **Yujuan Wang**, Yongduan Song, & Frank L. Lewis, Robust adaptive fault-tolerant control of multi-agent systems with uncertain non-identical dynamics and undetectable actuation failures, *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 62, no. 6, pp. 3978-3988, 2015. (SCI 一区)
- [2] Yongduan Song, **Yujuan Wang**, & Changyun Wen, Adaptive fault-tolerant PI tracking control with guaranteed transient and steady-state performance, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. PP, no. 99, pp. 1-7, 2016. (SCI, 控制类 A 类)
- [3] **Yujuan Wang**, Yongduan Song, An arbitrary and uniform finite time approach for consensus and containment control of networked multi-agent systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2nd round review. (SCI, 控制类 A 类)
- [4] **Yujuan Wang**, Yongduan Song, Miroslav Krstic, & Changyun Wen, Fault-tolerant finite time consensus for multiple uncertain nonlinear mechanical systems under single-way directed communication interactions and actuation failures, *Automatica*, vol. 63, pp. 374 - 383, 2016. (SCI, 控制类 A 类)
- [5] Yongduan Song, **Yujuan Wang**, John Holloway, & Miroslav Krstic, Time-varying feedback for finite-time robust control of normal-form nonlinear systems, *Automatica*, Accepted. (SCI, 控制类 A 类)
- [6] **Yujuan Wang**, Yongduan Song, Leader-follower consensus of high-order multi-agent systems under directed graphs: an arbitrary and uniform finite time approach, *Automatica*, 2nd round review. (SCI, 控制类 A 类)
- [7] **Yujuan Wang**, Yongduan Song, Fraction Dynamic Surface based Neuroadaptive Finite Time Containment Control of Multi-agent Systems in Non-affine Pure-feedback Form, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, vol. PP, no. 99, pp. 1-12, 2016. (SCI 一区)
- [8] **Yujuan Wang**, Yongduan Song, & Wei Ren, Distributed adaptive finite time approach for formation-containment control of networked nonlinear systems under directed topology, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Accepted. (SCI 一区)
- [9] **Yujuan Wang**, Yongduan Song, Miroslav Krstic, & Changyun Wen, Adaptive finite time coordinated consensus for high-order multi-agent systems: adjustable fraction power feedback

- approach, *Information sciences*, vol. 372, pp.392-406, 2016. (SCI 一区)
- [10] Ruizhen Gao, **Yujuan Wang*** (Corresponding author), Junfeng Lai, & Hui Gao, Neuro-adaptive fault-tolerant control of high speed trains under traction-braking failures using self-structuring neural networks, *Information sciences*, vol. 367-368, pp. 449–462, 2016. (SCI 一区)
- [11] **Yujuan Wang**, Yongduan Song, & Miroslav Krstic, Collectively rotating formation and containment deployment of multi-agent systems: a polar coordinate based finite time approach, *IEEE Transactions on Cybernetics*, Accepted. (SCI 一区)
- [12] **Yujuan Wang**, Yongduan Song, Hui Gao, Frank L. Lewis, Distributed fault-tolerant control of virtually and physically interconnected systems with application to high speed trains under traction/braking failures, *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol.17, no.2, pp.535-545, 2016. (SCI 二区)
- [13] **Yujuan Wang** & Yongduan Song, On the Global Existence of Dissipative Solutions for the Modified Coupled Camassa–Holm System, *Soft Computing*, vol 17, no.11, pp.2007-2019, 2013. (SCI 三区)
- [14] **Yujuan Wang** & Yongduan Song, Global conservative and multipeakon conservative solutions for the two-component Camassa-Holm system, *Boundary Value Problems*, Volume 2013, Article ID 165, 2013. (SCI 三区)
- [15] **Yujuan Wang** & Yongduan Song, Dissipative solutions for the modified two-component Camassa-Holm system, *Nonlinear Differential Equations and Applications NODEA*, vol. 21, no. 3, pp. 339-360, 2014. (SCI 三区)
- [16] Yongduan Song, **Yujuan Wang**, John Holloway, & Miroslav Krstic, Time-Varying Feedback for Finite-Time Robust Regulation of Normal-Form Nonlinear Systems, *Conference on Decision and Control*, Accepted, 2016.

2. 其他相关论文

- [17] **Yujuan Wang** & Yongduan Song, Periodic conservative solutions for a modified two-component Camassa-Holm system with peakons, *Abstract and Applied Analysis*, Vol. 2013, Article ID 437473. (SCI 二区)
- [18] **Yujuan Wang**, Yongduan Song, & Hamid Reza Karimi, On the global dissipative and multipeakon dissipative behavior of the two-component Camassa-Holm system, *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2014, Article ID 348695, 2014. (SCI 二区)
- [19] Lixin Tian, **Yujuan Wang**, & Jiangbo Zhou, Global conservative and dissipative solutions of a coupled Camassa-Holm equations, *Journal Of Mathematical Physics*, vol. 52, no.6, 063702,

2012. (SCI 四区)

- [20] Zhixi Shen, **Yujuan Wang**, Hamid Reza Karimi, & Yongduan Song, On the Multipeakon Dissipative Behavior of the Modified Coupled Camassa-Holm Model for Shallow Water System, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, Article ID 107450, 2013. (SCI 四区)
- [21] Huabin Wen, **Yujuan Wang**, & Yongduan Song, Global conservative and multipeakon conservative solutions for the modified coupled Camassa-Holm system with coupling effects, *Mathematical Problems in Engineering*, Volume 2014, Article ID 606249, 2014. (SCI 四区)
- [22] **Yujuan Wang** & Yongduan Song, Global dissipative solutions of the two-component Camassa-Holm shallow water system, *Electronic Journal of Differential Equations*, Article ID 14, 2015. (SCI 四区)
- [23] Yongduan Song, Zhixi Shen, Donglin Dai, Yanan Qian, & **Yujuan Wang**, Short-term load forecasting in electrical power systems via trajectory tracking and error correcting approach, *Journal of Renewable and Sustainable Energy*, vol. 6, no. 1, Article ID 013112, 2014. (SCI 四区)

B. 攻读博士学位期间参与的主要科研项目及贡献

- [1] 科技部国家基础研究规划项目(973 计划): 新能源电力系统先进控制理论. 项目号: 2012CB215202.
- [2] 科技部国家基础研究规划项目(973 计划): 可再生能源与天然气融合的分布式能源的网络系统基础研究. 项目号: 2014CB249200.
- [3] 国家自然科学基金重点项目: 高速列车主动安全控制的关键基础研究. 项目号: 61134001.
- [4] 2012 年“研究生科技创新基金”优秀新生科研培育项目.项目号: CDJXS12170003.

C. 攻读博士学位期间担任高水平 SCI 杂志审稿人情况

- [1] 2012.09-现在 担任 **IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems** (SCI 一区) 杂志审稿人
- [2] 2012.09-现在 担任 **IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems** (SCI 二区) 杂志审稿人
- [3] 2012.09-现在 担任 **Optimal Control, Applications and Methods** (SCI 二区) 杂志审稿人
- [4] 2014.09-现在 担任 **IEEE Transactions on Industrial Electronics** (SCI 一区) 杂志审稿人
- [5] 2014.09-现在 担任 **Automatica** (控制类 A 类) 杂志审稿人

D. 攻读博士学位期间所获奖励

- [1] 重庆大学 2012 年度“研究生国家奖学金”。
- [2] 重庆大学 2012 年度“优秀研究生”。
- [3] 重庆大学 2013 年度“研究生国家奖学金”。
- [4] 重庆大学 2013 年度“优秀研究生”。
- [5] 重庆大学 2014 年度“研究生国家奖学金”。
- [6] 重庆大学 2014 年度“优秀研究生”。
- [7] 重庆大学 2015 年度“优秀研究生”。