Domací úkol 7

(1)

a) $(A+C) \sim (B+D)$

Důkaz:

Nechť $\exists P$ a Q: $A = PBP^{-1}$ $B = PAP^{-1}$

$C = QDQ^{-1}$ $D = QCQ^{-1}$

z tranzitivity:

$(A+C) = PBP^{-1} + QDQ^{-1} = PBP^{-1}\underbrace{QQ^{-1}}_{I} + QDQ^{-1}\underbrace{PP^{-1}}_{I} =$

$= P(BQ^{-1} + QD^{-1})P^{-1} = P(B+D)Q^{-1}$

$(B+D) = PAP^{-1} + QCQ^{-1} = P(A+C)Q^{-1}$

Důsledek $(A+C) \sim (B+D)$ (Platí)

b) $AC \sim BD$ $A = PBP^{-1}$ $B = PAP^{-1}$ $C = QDQ^{-1}$ $D = QCQ^{-1}$

Nechť $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$BD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tvrzení neplatí

c) $q(A) \sim q(B)$ pro polynom $q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$

$B = PAP^{-1}$ $A = PBP^{-1}$

$q(B) = q(PAP^{-1}) = P\,q(A)\,P^{-1} \sim q(B)$

Důsledek: Tvrzení platí

(2) αA: $\alpha \cdot A = \alpha \cdot (PCP^{-1}) = (\alpha P)\, C\, (P^{-1})$.

← platí

$= (\alpha P)\, C\, (P^{-1})$, ⇒ diagonální

diag matice

$A+B$: $PCP^{-1} + QDQ^{-1} = PCP^{-1} \cdot I + QDQ^{-1} \cdot I = (PC + QD)I$

Důsledek: platí

Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \neq 0$

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

A to má 1 vlastní číslo co znamená

že A.B není diagonalizovatelná matice

Neplatí