Chapter 2 の覚書

(2.8)

$$\phi(w, w_p) = \exp\left[\frac{-\left(\log\left(w/(\beta w_p)\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right]$$

size w の捕食者に遭遇される餌の量は，

$$B_{prey}(w) = \int_0^\infty N_c(w_p) w_p \phi(w/w_p) dw_p$$

$$N_c(w_p) = \kappa_c w_p^{-\lambda}$$

を使うと，

$$\int_0^\infty N_c(w_p) w_p \phi(w/w_p) dw_p$$

$$= \int_0^\infty \kappa_c w_p^{1-\lambda} \exp\left[\frac{-\left(\log\left(w/(\beta w_p)\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right] dw_p$$

ここで，$\frac{d\log(w_p)}{dw_p} = \frac{1}{w_p}$から，$dw_p = w_p d\log(w_p)$で，$w_p$が 0 から∞まで変わるとき，$\log(w_p)$は -∞から∞までとなる．よって，

$$= \int_{-\infty}^\infty \kappa_c w_p^{2-\lambda} \exp\left[\frac{-\left(\log\left(w/(\beta w_p)\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right] d\log(w_p)$$

$$= \int_{-\infty}^\infty \kappa_c \left[\exp\left(\log(w_p)\right)\right]^{2-\lambda} \exp\left[\frac{-\left(\log\left(w/(\beta w_p)\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right] d\log(w_p)$$

$$= \kappa_c \int_{-\infty}^\infty \exp\left[(2-\lambda)\log(w_p) - \frac{\left(\log\left(w/(\beta w_p)\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right] d\log(w_p)$$

$\log(w_p)$=u とすると，

$$= \kappa_c \int_{-\infty}^\infty \exp\left[(2-\lambda)\,u - \frac{(\log(w/\beta) - u)^2}{2\sigma^2}\right] d\mathrm{u}$$

exp の中を平方完成すると，

$$-\frac{[u-\{(2-\lambda)\sigma^2+\log(w/\beta)\}]^2}{2\sigma^2}+\frac{\{(2-\lambda)\sigma^2+\log(w/\beta)\}^2}{2\sigma^2}-\frac{\{\log(w/\beta)\}^2}{2\sigma^2}$$
$$=-\frac{[u-\{(2-\lambda)\sigma^2+\log(w/\beta)\}]^2}{2\sigma^2}+\frac{(2-\lambda)^2\sigma^2}{2}+(2-\lambda)\log(w/\beta)$$
となり，最初の項は，正規分布の核関数になっていることから，積分すれば
$$\sqrt{2\pi}\sigma$$
となる．式を整理すると，
$$B_{prey}(w)=\kappa_c\sqrt{2\pi}\sigma\exp\left(\frac{(2-\lambda)^2\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{w}{\beta}\right)^{2-\lambda}$$
となり，これは(2.10)，(2.11)式に等しい．

同様にして，$N_{prey}(w)$について解けば，
$$N_{prey}(w)=\int_0^\infty N_c(w_p)\phi(w/w_p)dw_p$$
より，
$$N_{prey}(w)=\kappa_c\sqrt{2\pi}\sigma\exp\left(\frac{(1-\lambda)^2\sigma^2}{2}\right)\left(\frac{w}{\beta}\right)^{1-\lambda}$$

$$w_{prey}(w)=\frac{B_{prey}(w)}{N_{prey}(w)}=\exp\left(\frac{(3-2\lambda)\sigma^2}{2}\right)\frac{w}{\beta}$$
となって，(2.12)とは異なる．これから，
$$\beta_{PPMR}=\frac{w}{w_{prey}}=\beta\exp\left(\frac{(2\lambda-3)\sigma^2}{2}\right)$$
が得られる．

次に，(2.6)から，size ωの捕食者の clearance rate は，
$$V(\omega)=\gamma\omega^q$$
である．このとき，size w の餌の死亡率は，
$$\mu_p(w)=\int_0^\infty V(\omega)N_c(\omega)\phi(\omega/w)d\omega$$
となる．代入すると，
$$\mu_p(w)=\int_0^\infty \gamma\omega^q\kappa_c\omega^{-\lambda}\exp\left[\frac{-\left(\log(\omega/(\beta w))\right)^2}{2\sigma^2}\right]d\omega$$
$$=\gamma\kappa_c\int_0^\infty \omega^{q-\lambda}\exp\left[\frac{-\left(\log(\omega/(\beta w))\right)^2}{2\sigma^2}\right]d\omega$$
再び，$\log\omega$による積分に変換して，平方完成を行えば，

$$= \gamma \kappa_c \sqrt{2\pi}\sigma(\beta w)^{n-1} \exp\left(\frac{(n-1)\sigma^2}{2}\right)$$

が得られる．ここで，q－ λ＋1＝n－1 を使った．
(2.21)の

$$\kappa_c = \frac{f_0}{\Phi_a}\frac{h}{\gamma}$$

から，

$$\kappa_c \gamma = \frac{f_0 h}{\Phi_a}$$

となるので，これを代入して，

$$\Phi_a = \sqrt{2\pi}\sigma\beta^{\lambda-2} \exp\left(\frac{(2-\lambda)^2\sigma^2}{2}\right)$$

を使えば，

$$\mu_p(w) = f_0 h \Phi_p w^{n-1}$$

$$\Phi_p = \beta^{2n-q-1} \exp\left(\frac{(2n-q-1)(q-1)\sigma^2}{2}\right)$$

を得る．