微分積分いい気分♪

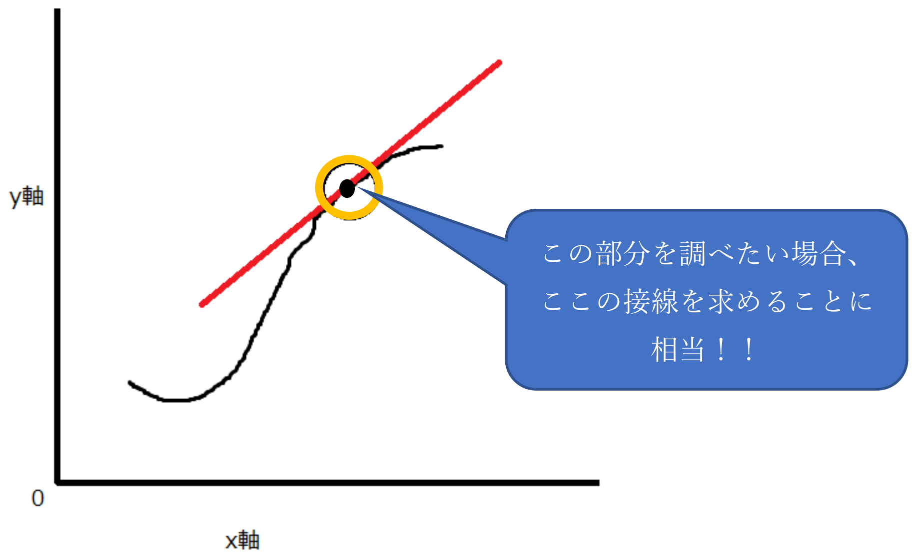
目次

学習に入る前に復習！！

●直線の傾きの求め方

微分とは、グラフの『とある瞬間の変化の仕方を調べる事』です。

なので、**特定の調べたい部分に直線を引いて、その線の傾きを求めることに相当**します。下のようにグラフの一部分の接線の傾きを求めるようなイメージです。



なので、中学校で習った、比例の傾きの求め方をここでは確認していきましょう。

$$y = ax$$

$$傾き(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y の変化量}{x の変化量}$$

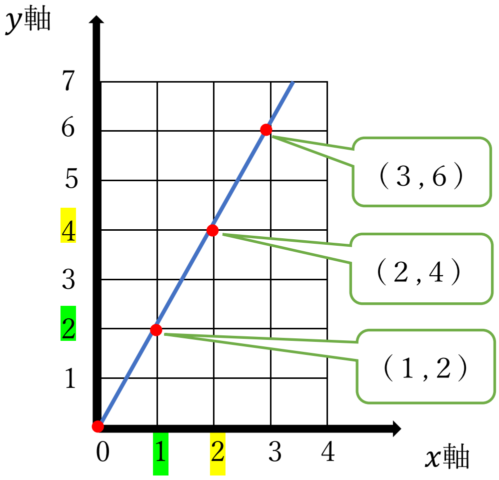
傾きの式のΔは、デルタと読み変化量を指すので、**『Δx』**で**『xの変化量』**を表すことになります。同様に**『Δy』**で**『yの変化量』**を表すことになります。

では説明だけではわかりづらいので、練習してみましょう！！

下のグラフは、$y = 2x$ のグラフです。
xの値に常に２倍した値がｙの値になるグラフです。
このように、xの値に常に整数倍した値がｙになる関係を**比例**と呼びました。

思い出せましたか？？

比例なので、原点の（０,０）から一つ目の赤い点（１,２）を通り、２つ目の赤い点（２,４）を通っています。



傾きは、グラフや式に２と書かれている通り、感覚でわかってしまいますが、ここでは練習の為、本当に傾きが２になるか、二つの赤い点である、変化前の（１,２）、変化後の（２,４）を用いて確認してみましょう。

$$傾き(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(変化後のyの値) - (変化前のyの値)}{(変化後のxの値) - (変化前のxの値)}$$

$$= \frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1} = 2$$

となります。
ここで注意したいのは、傾きを求めるためには、必ず２点が必要だということです。理由は、
１点だけだと変化量が０なので、$\frac{y_1 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{0}{0}$となり直線が引けなくなるからです。

ここで復習は終わりです！このことに注意して次に行きましょう！

微分

微分とは、グラフの**とある瞬間の変化を調べる事**なので、その部分での接線の傾きを求めることに相当していますが、前のページで少し触れたように、**傾きを求めるためには、必ず２点が必要**なのです。

例えば下の**左側のグラフが、（１、１）の１点だけを通る、理想の接線**ですが、現実には右のグラフのように、グラフの２点を通る直線でなければいけません。そこで、右と左では厳密には違うものの、**（１、１）付近のグラフの２点が、限りなく（１、１）に近ければ、（１、１）の時の変化の仕方に、限りなく近い直線が書ける**はずだと考えるのです！！

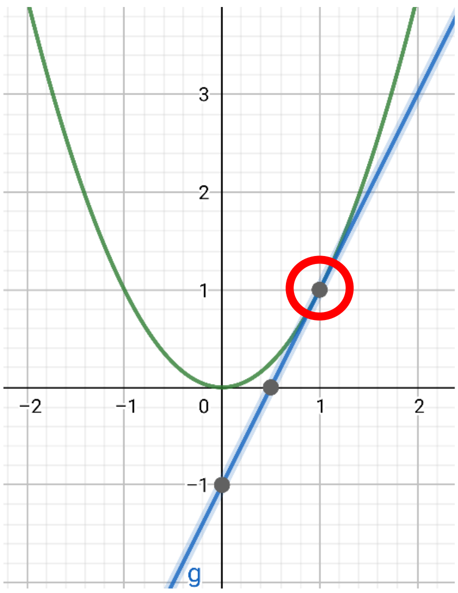


図１（1，1）での理想の接線

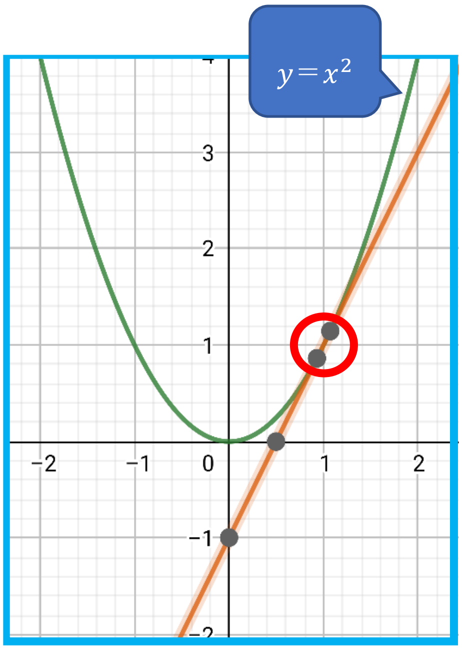


図２ グラフの２点を通り、限りなく(1，1)に近い

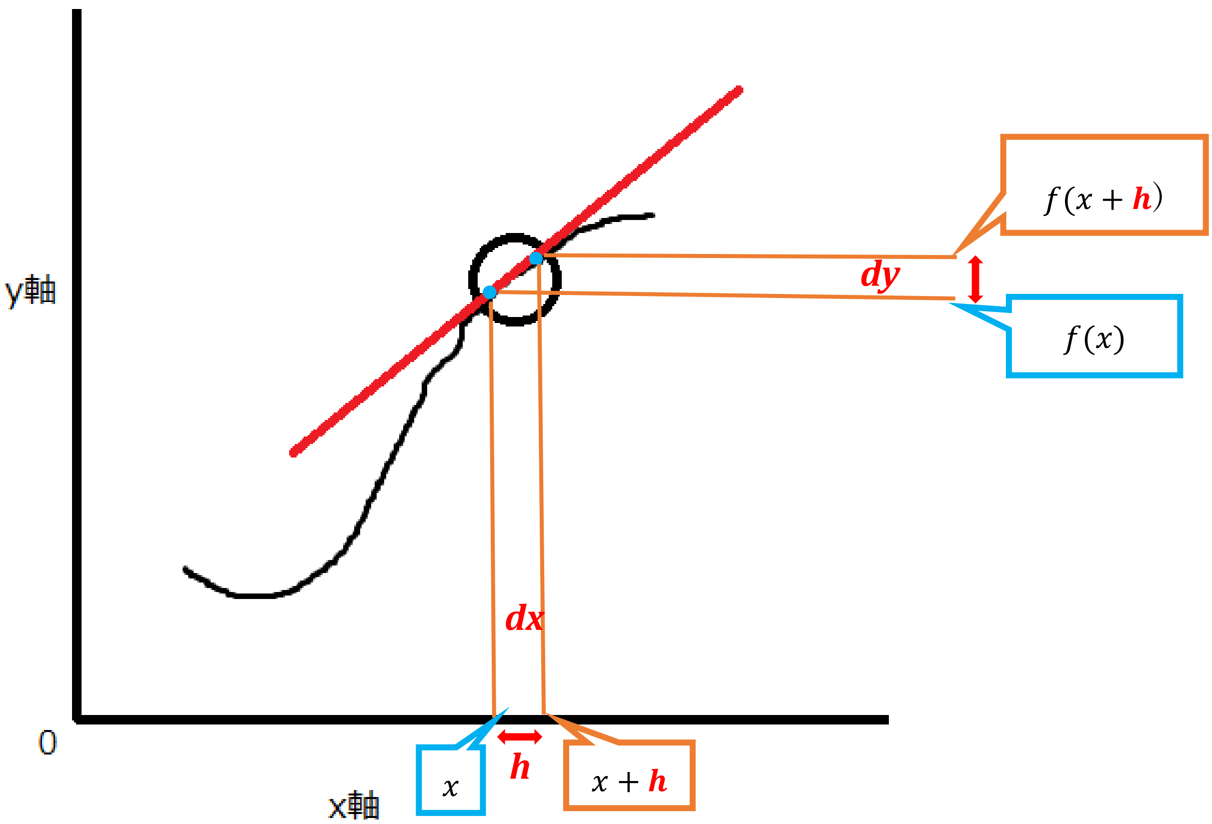
実際に比べてみると、かなり近いですね！！

これを見ると、『その瞬間での変化の仕方』を表している直線だと実感できますね！

そして、**この接線の傾き『a』を求めることが、微分**なのです！！

微分の定義　～導関数～

これから実際の微分の定義を見ていきましょう！
そこで、まず下の図のようなグラフの赤の微分直線を求めることを考えます。
その瞬間の変化を調べるので、『Δx』や『Δy』は限りなく 0 に近いですが、図で書こうと思うと難しいのでご容赦ください　f(^^;)



とある関数に『x』を代入させた時の値を『$f(x)$』とすると、x から h だけ移動させた『$x+h$』を関数に代入した時の値を『$f(x+h)$』とします。すると傾きは下のように表せます。

『h』を限りなく『0』に近づけるという意味！

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \boxed{\lim_{h \to 0}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ここで、『Δx』の幅を限りなく 0 に近づけた時に『dx』、その時『Δy』も限りなく 0 に近づくので、『dy』と書きます。

微分の表し方は色々あり、$f'(x)$ 、$\frac{dy}{dx}$ 、$\frac{d}{dx}f(x)$ などがあります。

では実際にこの定義を使って微分で傾きを求めてみよう。
と言っても、基本的には lim を使って計算する事はなく、公式を利用しながら解く事になります！！　　しかし、一度は実際に体感した方が良いと思っての演習です。

ここで、$f(x) = x^2$ の微分を行ってみます。
定義式は以下だったので、

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

上の式に値を代入していきましょう。
『x』 の時の値は、x^2 、『$x+h$』の時に $(x+h)^2$ となるので、

$(x+h)^2$

$=(x^2+2xh+h^2)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(\cancel{x}^2+2xh+h^2)-\cancel{x}^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2x\cancel{h}}{\cancel{h}}+\frac{h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \boxed{\lim_{h\to 0} 2x+\underbrace{h}_{0}}$$

最後にリミット計算をする

$$= 2x$$

永遠に繰り返していくと、x^nを『$\textit{lim}$』で計算すると、

$\textit{lim}$ 計算で『０』になる

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\cancel{x}^n+nx^{n-1}h+\boxed{\bigcirc x^{n-2}h^2+\ \cdots\ +n\,xh^{n-1}+h^n}\right)\ -\cancel{x}^n}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}\cancel{h}}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0} nx^{n-1}$$
$$= nx^{n-1}$$

最後にリミット計算しても、hが
ないためこの項だけが残る

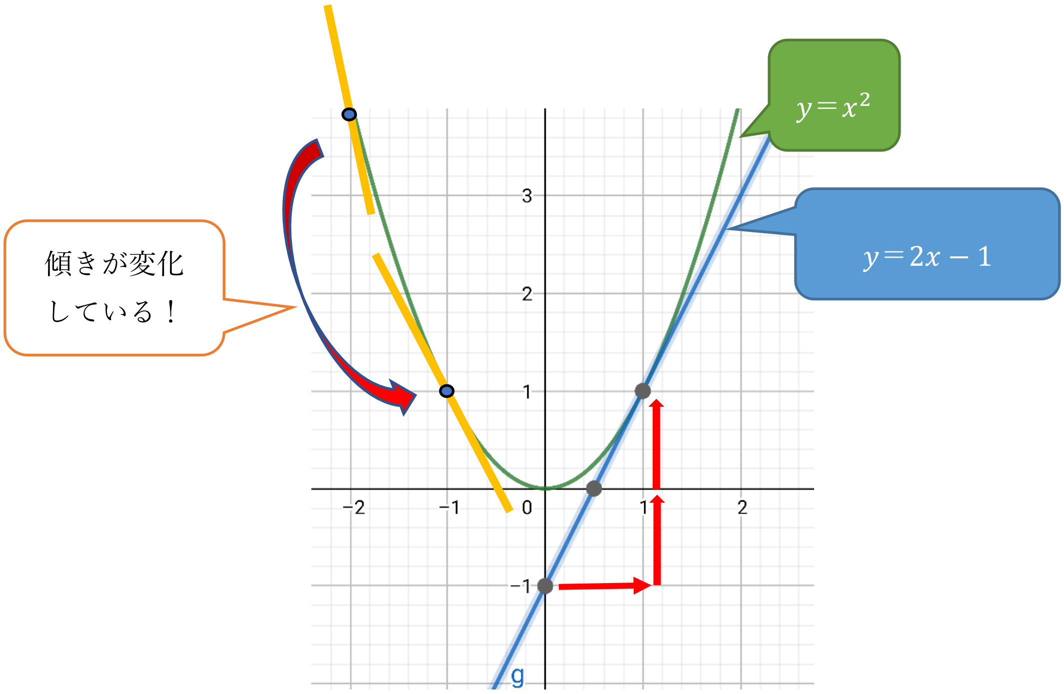
となるので、**x^nの微分**(導関数)は以下になる

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

ここで、$f(x) = x^2$ の微分は、『$2x$』になることが分かったが、傾きなのに数字ではなく、関数になっている事に気付くはず！

実は、傾きを計算しても関数になっているということは、代入するxの値によって傾きが変化する事を表している事になる！

だから下記のグラフを見れば、傾きが変化しているのは一目瞭然だが、$x = 1$の時に、先程計算した導関数『$2x$』に代入すると、傾きが『２』だとわかる通り、傾きが『２』の直線が書けているのが確認できる！



このように、**微分計算によって求められた関数**を**導関数**と言います！
時々出てくるので、この言葉も覚えておこう！

それでは、次によくある微分公式を見てみよう！

微分公式

これらの公式は、先ほどの『 $\lim_{h\to 0}$ 』の計算で導出されたがものですが、覚えていても結局忘れるので、下記の公式を確認して利用出来れば、まったく問題ないです。

$$\left(\text{定数}\right)' = 0$$

定数の変化は無いので、
微分しても変化しない！

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$(e^x)' = e^x$$

微分しても変化
しない！！

$$(a^x)' = a^x \log a$$

$\log x = \log_e x$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \log a}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

定数は外に出して、微分

$$\{af(x)\}' = a\,\{f(x)\}' \qquad a：\text{定数}$$

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + \ g'(x)$$

足し合わされた場合は、
それぞれで微分！
引き算も同じ！

積の微分公式

$$\{f(x) \cdot g(x)\}' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

関数同士の掛け算の
微分は、片方ずつ微分

商の微分公式

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

積の微分公式の応用

これらはよく出て来る式なので、解き方を確認していくと良いと思う。

例題

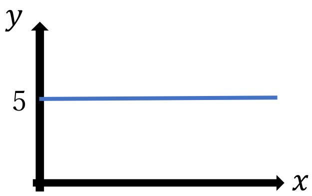
（1） $(3x^4)' = 3 \cdot 4x^{4-1} = 3 \cdot 4x^3 = 12x^3$

（2） $(9x^8 - 7x^3)' = (9x^8)' - (7x^3)' = 9(8x^7) - 7(3x^2) = 72x^7 - 21x^2$

$ac + ab = a(c+b)$

$= 3x^2(24x^5 - 7)$

（3） $(5)' = 0$



$y = 5$

定数はそもそも変化しない！

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-5}{\Delta x} = 0$$

（4） $\{\log x \cdot e^x\}' = (\log x)' \cdot e^x + \log x \cdot (e^x)'$

『・』で、かけ算！

$$= \left(\frac{1}{x}\right)e^x + \log x \cdot (e^x)$$

$$= e^x\left(\frac{1}{x} + \log x\right)$$

$ac + ab = a(c+b)$

（5） $$\left\{\frac{3x^2+3}{2x+1}\right\}' = \frac{(3x^2+3)' \cdot (2x+1) - (3x^2+3) \cdot (2x+1)'}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{(6x) \cdot (2x+1) - (3x^2+3) \cdot (2)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{12x^2 + 6x - 6x^2 - 6}{(2x+1)^2} = \frac{6x^2 + 6x - 6}{4x^2 + 2x + 2x + 1}$$

$$= \frac{6(x^2 + x - 1)}{4x^2 + 4x + 1}$$

合成関数の微分

$y=\{U(x)\}$ のように関数の中に関数があるときは、下の式のように『 y 』を『 U 』で微分した後に、『 x 』で微分する。その結果、下記のようにダミーの変数『 dU 』は打ち消し合うので、成り立つことがわかる！

$$f\{U(x)\}\,' = \frac{dy}{\cancel{dU}}\frac{\cancel{dU}}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

イメージはこんな感じ！

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y\{U(x)+\Delta U(x)\} - y\{U(x)\}}{\cancel{\Delta U(x)}} \cdot \frac{\cancel{\Delta U(x)}}{\Delta x}$$

例 1)

$$\begin{aligned}\{(\overset{U}{\boxed{2x+1}})^3\}' &= \{\boldsymbol{U}^3\}' \cdot (2x+1)' \\ &= 3\boldsymbol{U}^{\mathbf{2}} \cdot 2 \\ &= 6(2x+1)^{\mathbf{2}}\end{aligned}$$

例 2)

$$\begin{aligned}\{\log \overset{U}{\boxed{3x}}\}' &= (\log \boldsymbol{U})' \cdot (3x)' \\ &= \left(\frac{1}{U}\right) \cdot 3 \\ &= \left(\frac{1}{3x}\right) \cdot 3 = \frac{1}{x}\end{aligned}$$

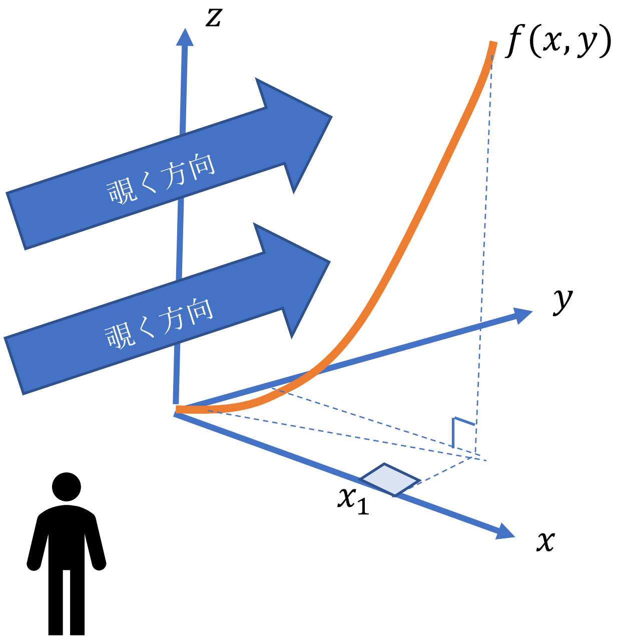
例 3)

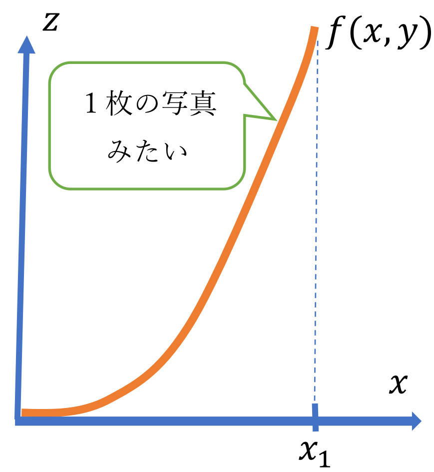
$$\begin{aligned}(\sin \overset{U}{\boxed{3x^2}})' &= (\sin \boldsymbol{U})' \cdot (3x^2)' \\ &= \cos U \cdot 6x \\ &= 6x \cdot \cos 3x^2\end{aligned}$$

偏微分

大学の範囲

この微分は、変数が複数ある時の微分方法なのだが、特に難しく考える必要はない。
何故なら、変数が複数ある場合でも、人が片方ずつからしか覗けないように、一方向からしか微分をしないのだ！だから**偏**った方向からの**微分**ということで、**偏微分という。**





→の方向から眺めた時の様子

左の絵のように、**一方向から見ると$f(x,y)$は、あたかも変数『x』だけの関数になっているように見えるのである！**
即ち、**『x』で偏微分を行うときは、変数『y』は関係ないので変数として考えなくて良いのである！！**偏微分の計算の時は片方を『変数』、**その他の変数を『数字』として捉えて微分する**ので以下のようになる。

例）$f(x,y) = 4x^4y^5$

偏微分の時、dではなく$\boldsymbol{\partial}$を使う。**「デル」、「ラウンドディー」**等の読み方があるが、特に決まりはない

定数あつかい➡そのまま

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = 4(x^4)' \cdot \boxed{y^5} = 4 \cdot 4x^3 \cdot y^5 = 16x^3y^5$$

$$\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) = \boxed{4x^4} \cdot (y^5)' = 4x^4 \cdot 5y^4 = 20x^4y^4$$

そのまま

全微分

大学の範囲

名前は堅苦しいが、2 変数以上で変化する場合、それらの変数の変化を考慮した形で書く必要がある。そこで関数全体が微小な変化をした場合、下記の式のように、

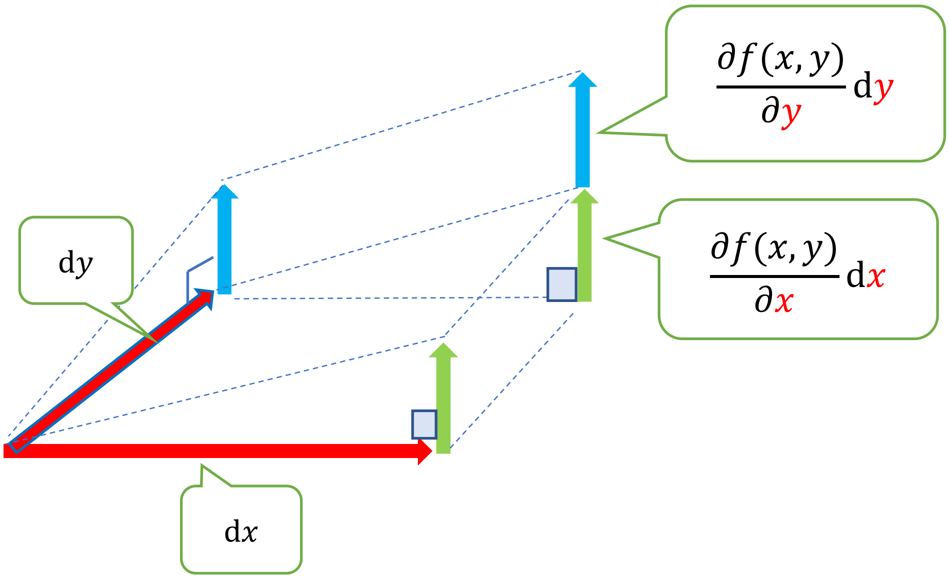
$\{x\text{方面の}f(x,y)\text{微小変化量}\}$と$\{y\text{方面の}f(x,y)\text{微小な変化}\}$を組み合わせた形で表されているのが直感的に理解できるはずだ！

$y = ax$の

比例定数aみたいな役割

$$df(x,y) = \boxed{\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}}dx} + \boxed{\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}}dy}$$

$$df(x,y) = \boxed{\{x\text{方面の}f(x,y)\text{微小変化量}\}} + \boxed{\{y\text{方面の}f(x,y)\text{微小変化量}\}}$$



例）

$f(x,y) = 4x^4 - y^5$

関数 $f(x,y)$を x で偏微分すると

x以外は、全て数字の扱い
定数の微分は、0

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = (4x^4)' - \boxed{\cancel{y^5}} = 16x^3$$

関数 $f(x,y)$を y で偏微分すると

y以外は、全て数字の扱い
定数の微分は、0

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \boxed{\cancel{4x^4}} - (y^5)' = 5y^4$$

よって、関数の微小変化量は次のように表される

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \mathrm{d}x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \mathrm{d}y$$

$$= (16x^3)\mathrm{d}x + (5y^4)\,\mathrm{d}y$$

積分

積分は関数と『x』軸上の間の面積を求める為に使う。ネーミング的にはイカツイが、実際はそれ程ではない。では実際に見ていこう！

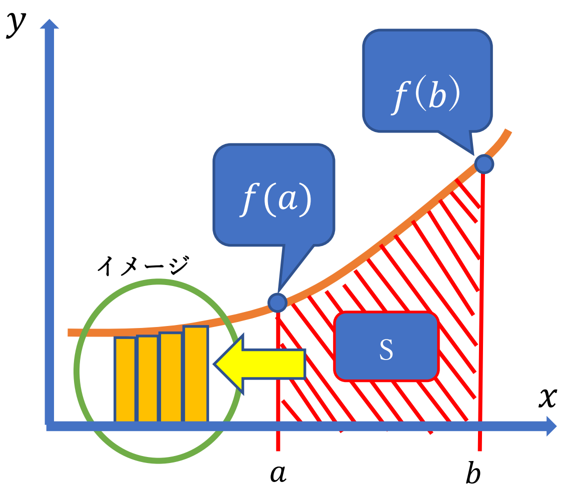
積分の定義と意味

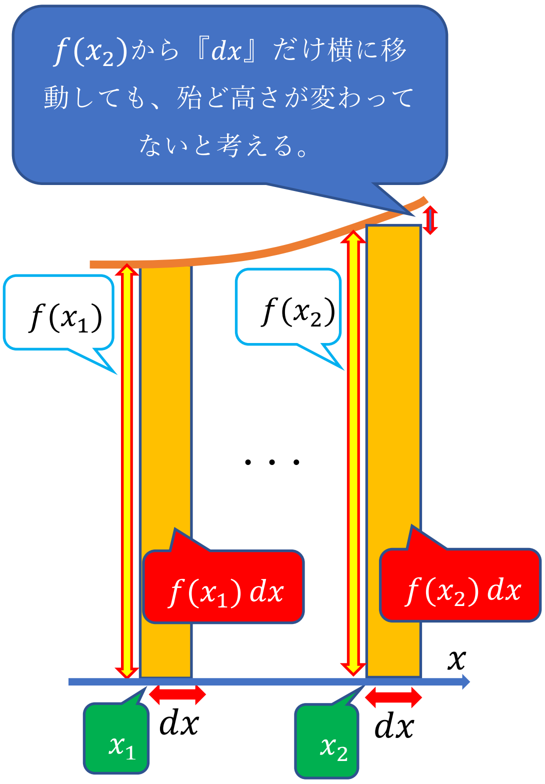
以下の式の意味は、下の左の図のように、a から b までの区間に、限りなく細長い短冊を黄緑色の○の中のように詰めていけば、面積 S を求めることができるという意味です。

この時、下の右の図のように、任意の『x』の値を代入した**関数の値『$f(x)$』を高さ、底辺を『dx』**とした**限りなく細長い短冊**だと考える。ここで短冊の底辺を『dx』にした理由は、『dx』を限りなく短くすると、$f(x)$から『dx』だけ横に移動しても、殆ど高さが変わってないと考えることができるからなんだ！　　これは、図からも想像できると思う！

ところで、**∫は、『インテグラル』と読み、ラテン語 Summa(総和)の S を表した文字です。** ちなみに Summa から Sum になったと言われていて、**演算子 Σ『シグマ』はギリシャ文字の S です。** 即ち、どちらも『合計しろ』と言っているだけです！

$$S = \underbrace{\int_a^b}_{\text{a から b まで全て合計して！}} \overbrace{\boxed{f(x)\,dx}}^{\text{短冊の面積}} \approx \underbrace{\sum_{1}^{n}}_{\text{1 から}n\text{番まで合計して！}} f(x_n)\cdot\Delta x$$



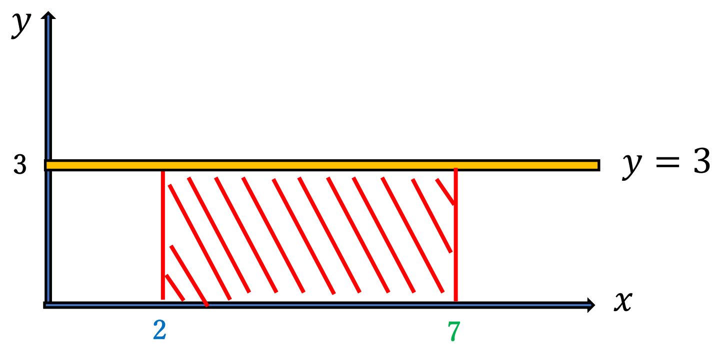


定積分

先程のように範囲が定まった積分を**定積分**という。

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

まず下のグラフで定積分を考えてみよう。といっても高さがずっと変わらないので、短冊のことは考える必要はなさそうだね。今回は x が 2 から 7 までの面積を求めてみよう。

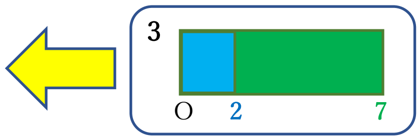


まず、原点 O からの横の長さが「x」の時、高さが変わらず「3」なので、この面積は

$$3x$$

となるので、原点 O から長さが「7」までの面積から、原点 O から長さが「2」までの面積を引けば、良いので以下のように計算ができる。

$$3 \cdot 7 - 3 \cdot 2 = 21 - 6$$



以上の事を踏まえると、積分は以下のように書かれる。

$$\boxed{\int_2^7} 3\,dx = [\,3x\,]_2^7 = [3 \cdot 7 - 3 \cdot 2] = 15$$

2 から 7 まで、全て合計しろ！

積分された関数

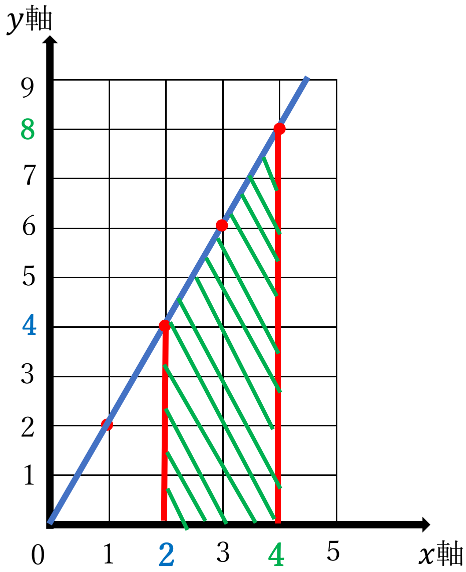
『$3x$』に、「7」を代入したものから、
『$3x$』に、「2」を代入したものを引く

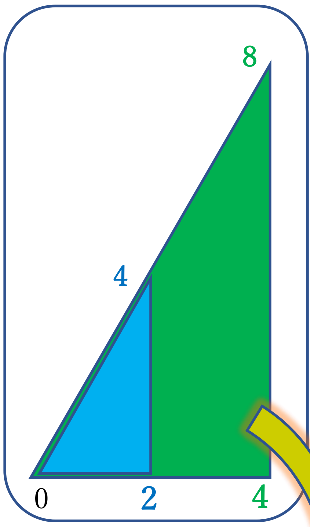
積分された関数『$3x$』に「7」を代入したものから、「2」を代入したものを引くことで求める事が出来たのが、分かったと思う！！

次に以下の式の積分を考えてみる。今回は x が、2 から 4 までの面積を求めるが、今回も三

角形の面積を考えれば求められるから、短冊の面積を考える必要はなさそうだね！

$$f(x) = 2x$$





まず、横の長さが「x」の時、高さが「$2x$」なので、この面積は

$$\frac{1}{2}\cdot(\text{高さ})\cdot(\text{底辺}) = \frac{1}{2}\cdot(2x)\cdot x = x^2$$

となるので、これを使って求めることになるが、原点 O から長さが「4」までの面積から、原点 O から長さが「2」までの面積を引けば、良いので以下のように計算ができる。

$$\boxed{4^2 - 2^2 = 16 - 4}$$

以上の事を踏まえると、積分は以下のように書かれる。

$$\int_2^4 2x\,dx = [\,x^2]_2^4 = [4^2 - 2^2] = 12$$

積分された関数

『x^2』に、「4」を代入したものから、
『x^2』に、「2」を代入したものを引く

なので、定積分の計算の仕方は以下となるのが理解できると思う。

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = [\,F(x)]_{a}^{b} = \boxed{F(b) - F(a)}$$

積分された関数

『$F(x)$』に、「b」を代入したものから、「a」を代入したものを引く

これで、定積分の計算の流れが掴めたと思う！
でも、積分された関数は、基本的には公式を用いて、計算をするのが普通です。

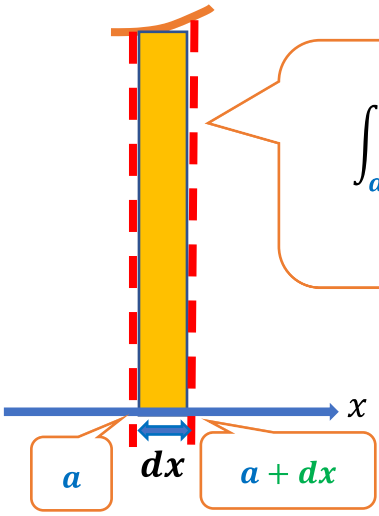
なので、どのように公式が導かれるのかは、積分と微分の密接な関係を知る必要があるのだ！

それを次で見ていこう！

積分と微分との関係

ここまで、定積分のやり方を見てきて、**定積分では、積分する区間によらず、引き算の形で表される**事に気づいただろうか？なので、極端に積分区間が狭い以下のような積分も許されるはずだ！

$$\int_{a}^{a+dx} f(x)\,dx = [\,F(x)]_{a}^{a+dx} = F(a+dx) - F(a)$$



$$\int_{a}^{a+dx} f(x)\,dx = [\,F(x)]_{a}^{a+dx}$$

$$\fallingdotseq f(a)\cdot dx$$

はっきり言って、**ほぼ短冊の面積そのものだ！！**　そこで、短冊の面積を

$$F(a+dx) - F(a) \quad \Rightarrow \quad dS = f(a)\cdot dx$$

とおいて、この短冊の面積『dS』を『dx』で割ると

微分といっても、ただの割り算だ！

$$\frac{\boxed{dS}}{dx} = \frac{\boxed{f(a)\cdot \cancel{dx}}}{\cancel{dx}} = f(a)$$

面積 S を微分すると、元の関数に戻るということは、微分と積分は逆の関係になっている事が分かる！！

これらのことから、一般的に微分と積分の関係は

$$\frac{df(x)}{dx} \underset{微分}{\overset{積分}{\rightleftarrows}} f(x) \underset{微分}{\overset{積分}{\rightleftarrows}} \int f(x)\cdot dx$$

となっている！

この関係を用いて発見された積分公式を次に見ていこう！　※証明はしないよ　_(._.)_

不定積分の公式

これらの公式は、先ほどの『微分と積分が逆の関係』になっていることを利用して導出されたがものですが、下記の公式を確認して利用出来れば、まったく問題ないです。

$$\int x^p\,dx = \frac{1}{q+1}x^{q+1} + C \ (a \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C \ (a = -1)$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} + C \ (a > 0,\ a \neq 1)$$

$$\int \mathrm{e}^x\,dx = \mathrm{e}^x + C$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \tan x\,dx = -\log|x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = -\frac{1}{\tan x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + A}}\,dx = \log\left|x + \sqrt{x^2 + A}\right| + C$$

積分のプログラムが入ってなくても、
以下の式でも良い精度で近似できる！

$$\sum_{1}^{n} f(x_n) \cdot \Delta x$$

1 番目から n 番目までの測定データを利用して、短冊の足し算する

そして、以下の公式のように、『定数がある場合は、定数を外側に出して積分』、『足し算の積分は、それぞれで積分』、は基本的な公式なので、ここは抑えておこう！

$$\int af(x)\ dx = a\int f(x)\ dx \qquad a：定数$$

$$\int f(x)+g(x)\ dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\ dx$$

これらが積分公式だが積分の区間が無いので、**不定積分**という。不定積分は、微分された関数をもとに戻す時や積分された関数(この場合『$F(x)$』)の形を知りたい時に使用します！

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

ここで、これらの公式の積分された関数の後ろに必ず、定数 C が後ろに付け足されている！これは**積分定数**というのだが、何故こんな物が必要なのか？？

それは、積分は微分の逆なので、**積分関数$F(x)$を微分するときに、定数がある場合と定数がない場合では、どちらも同じ答えになる**ため不確定要素があるという意味で必ず付いてくる。

$$\frac{d}{dx}\{\ F(x)\ +\boxed{C}\ \} = \underline{\boldsymbol{f}(x)}$$

定数の微分は、0

どちらも同じ結果

$$\frac{d}{dx}\ F(x)\ = \underline{\boldsymbol{f}(x)}$$

そして、定積分はこの不定積分の公式を用いて計算するけど、**定積分の時は、積分定数 C が必ず打ち消しあって無くなる**。なので、定積分では積分定数 C を気にしなくても大丈夫なのだ！

$$\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} f(x)\,dx = [(F(\boldsymbol{b})\ + \cancel{C)} - (F(\boldsymbol{a})\ +\ \cancel{C)}]$$

$$= F(\boldsymbol{b})\ - F(\boldsymbol{a})$$

それでは、実際に積分の練習をしてみよう！

例題

(1)

$$\int x^2\, dx = \frac{1}{2+1}x^{2+1} + C$$

積分定数 C を忘れずに！

(2)

$$\int 4x^3\, dx = 4\int x^3\, dx$$

$$= 4\left(\frac{1}{3+1}x^{3+1}\right) + C = \frac{4}{4}x^4 + C = x^4 + C$$

(3)

$x = (1 \cdot x) = x^1$

$1 \cdot x \cdot x \cdot x = x^3$

$$\int (2x + 5x^3 + e^x + 2^x)\, dx = \int 2x^1\, dx + \int 5x^3\, dx + \int e^x\, dx + \int 2^x\, dx$$

$$= 2\left(\frac{1}{1+1}x^{1+1}\right) + 5\left(\frac{1}{3+1}x^{3+1}\right) + e^x + \left(\frac{2^x}{\log 2}\right) + C$$

$$= x^2 + \frac{5}{4}x^4 + e^x + \frac{2^x}{\log 2} + C$$

定積分は、積分定数 C は要らない！

$$\int_a^b f(x)\, dx = [(F(b) + \cancel{C}) - (F(a) + \cancel{C})]$$

(4)

$$\int_1^3 (3x + 4x^3)\, dx = \left[\frac{3}{1+1}x^2 + \frac{4}{3+1}x^4\right]_1^3$$

$$= \left[\frac{3}{2}x^2 + x^4\right]_1^3$$

$$= \left[\left(\frac{3}{2}\cdot 3^2 + 3^4\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 1^2 + 1^4\right)\right] = \left(\frac{3}{2}\cdot 9 + 81\right) - \left(\frac{3}{2} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{27}{2} + 81\right) - \left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{27-3}{2} + (81-1)$$

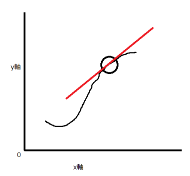
$$= \frac{24}{2} + 80 = 12 + 80 = 60$$

まとめ

微分

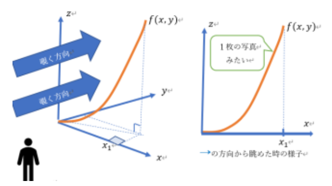
●微分の定義　～導関数～

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$



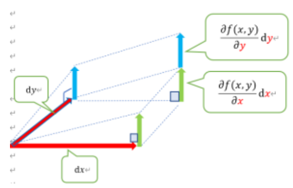
●合成関数の微分

$$f\{U(x)\}' = \frac{dy}{d\boldsymbol{U}}\frac{d\boldsymbol{U}}{dx} = \frac{dy}{dx}$$



●偏微分

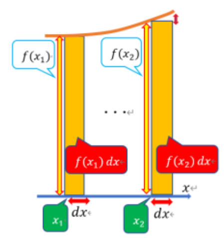
$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \quad \& \quad \frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$$



●全微分

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

積分

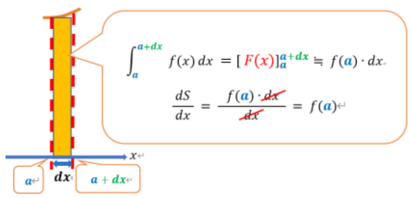


●定積分

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(\boldsymbol{b}) - F(\boldsymbol{a}) \quad \approx \quad \sum_1^n f(x_n)\cdot\Delta x$$

●積分と微分との関係　　（積分公式が導出できた理由）

$$\frac{df(\boldsymbol{x})}{dx} \underset{\text{微分}}{\overset{\text{積分}}{\rightleftarrows}} f(\boldsymbol{x}) \underset{\text{微分}}{\overset{\text{積分}}{\rightleftarrows}} \int f(\boldsymbol{x})\cdot dx$$



●不定積分

$$\int f(x)\ dx = F(x) + \boldsymbol{C} \Longleftrightarrow \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}\{F(x) + \cancel{C}\}$$