最优化课程设计:"LIME 论文复现 "

代码环境:"R7000P 2020,Windows 11,MATLAB 2023a"

参考文献

```
%[1]是基础参考论文,[2]比较高级,还没看,[3]是全部代码和思路的主要参考文献,[4]为[3]提供了补
充.
```


[1] X. Guo, Y. Li, and H. Ling, “LIME: Low-light image enhancement via illumination map estimation,” IEEE Trans. Image Process., vol. 26, no. 2, pp. 982–993, Feb. 2017.

[2] X. Ren, W. Yang, W. -H. Cheng and J. Liu, "LR3M: Robust Low-Light Enhancement via Low-Rank Regularized Retinex Model," in *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 29, pp. 5862-5876, 2020.

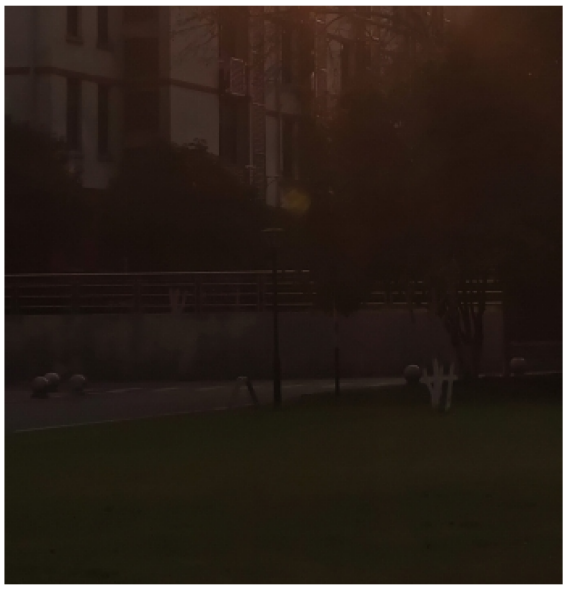
[3] Bhavya Vasudeva, Puneesh Deora, "Report:Low-light Image Enhancement".

[4] Dongwei Ren, Hongzhi Zhang, David Zhang, Wangmeng Zuo, "Fast total-variation based image restoration based on derivative alternated direction optimization methods," Neurocomputing, Volume 170, 2015,Pages 201-212.

第 1 部分 初始化

首先,读取测试图片.MATLAB 自带的"imshow"函数用于展示图片.

```
clear;
img = imread('test.jpg');
imshow(img);
```



将图像双精度化.(我不知道这是为什么.不过,这和全文的主线内容无关,只不过是代码层面的细节)

```
img = im2double(img);
%imshow(img);
```

1.1 光照模型的公式

用到的理论公式是

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \circ \mathbf{T},$$

其中 $\mathbf{L}$ 是拍摄图片,而 $\mathbf{R}$ 是希望恢复的图像,$\mathbf{T}$ 是照明图.注意,这里的$\circ$符号表示逐元素的乘法,用图像处理的术语来说,是所谓的逐像素点增强.在 MATLAB 的代码实现里,表现为需要使用 $''.*''$ 而并非 $''*''$.

参数 $\mathbf{L}$ 是已知的,问题在于如何获得合理的 $\mathbf{T}$ 值以便恢复图像.

1.2 初始照明的估计

由于方法论部分是使用最优化方法得到最优参数 T,因此首先要解决的问题是选定 T 的初值$\widehat{\mathbf{T}}$.

这里选定 RGB 三通道的极值作为初值使用,理由来自所谓的"非均匀光照提升".数学上,可以写作

$$\widehat{\mathbf{T}}(x) \leftarrow \max_{c \in \{R,G,B\}} \mathbf{L}^c(x),$$

其中 x 是像素点.

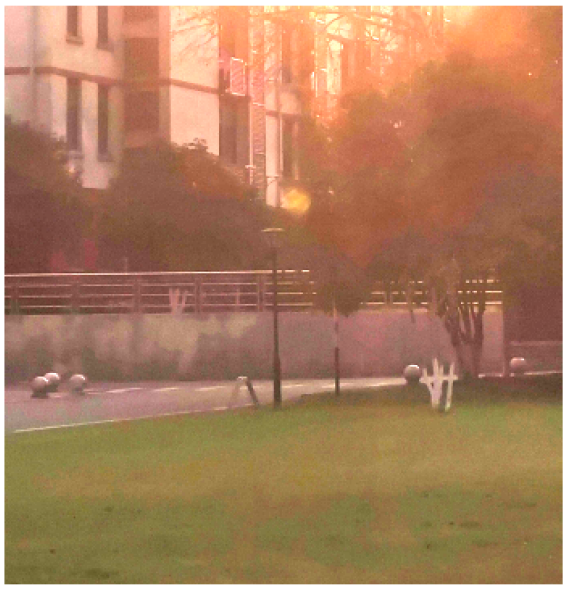
使用自定义的"myLighting"函数获取初始照明图"testImg",函数具体定义则位于实时脚本文件的底部.之后类似的以"my"开头的函数均是自定义的,不再说明.其中"ini_map"是二维矩阵,其等同于"testImg"的灰色图像,理由则是所谓的"三通道共享光照",也就是默认照明图像 $\mathbf{T}$ 的 RGB 三通道数值相同.这种理论确实有好处,因为如此一来便无需处理三维的彩色图像矩阵,而只需考虑二维的照明矩阵.

```
[testImg,ini_map] = myLighting(img);
%imshow(testImg);
```

1.3 DEMO NOW

这里给出初步的结果测试.

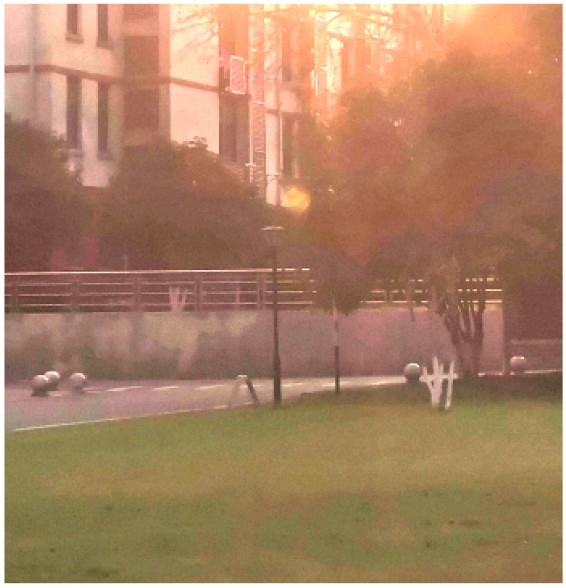
```
alpha=0.27;
mu0=0.2;
rho=1.2;
[T] = myTrial(ini_map, alpha, mu0, rho);
%R=repmat(T,[1,1,3]);
newT=gammaResult(T,0.8);
newT=repmat(newT,[1,1,3]);
newR=img./newT;
imshow(newR);
```



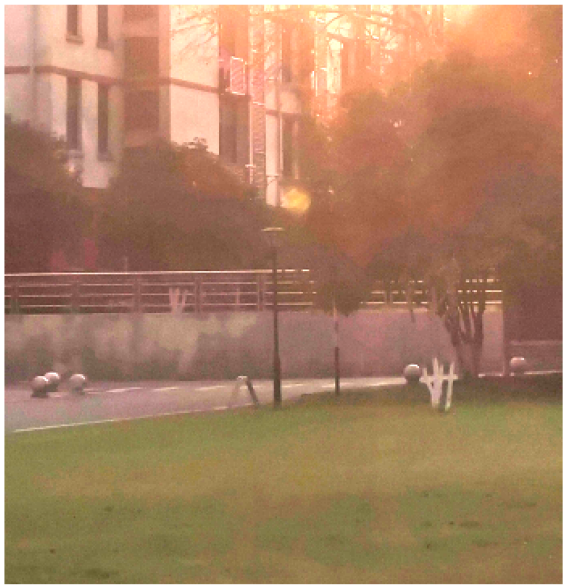
```
PSNRval=psnr(newT(:,:,1),T);
[ssimval, ~] = ssim(newT(:,:,1), T);
disp([PSNRval,ssimval]);
```

```
   23.2360    0.9313
```

```
R2=adjustImage(newR,0.9);
```



```
imshow(R2);
```



```
demo1=imread('building.bmp');
demo2=imread('cars.bmp');
[I1]=quickDemo(demo1, alpha, mu0, rho);
```

```
[I2]=quickDemo(demo2, alpha, mu0, rho);
```

```
function outImage=quickDemo(newimg, alpha, mu0, rho)
    newimg = im2double(newimg);
    [~,ini_map] = myLighting(newimg);
    [T] = myTrial(ini_map, alpha, mu0, rho);
    newT=gammaResult(T,0.8);
    newT=repmat(newT,[1,1,3]);
    outImage=newimg./newT;
    imshow(outImage);
end
function outImage = adjustImage(inImage, k1)
    % 将输入的 RGB 图像转换为 HSV 图像
    hsvImage = rgb2hsv(inImage);
    % 降低饱和度
    hsvImage(:, :, 2) = hsvImage(:, :, 2) * k1;
    % 将 HSV 图像转回 RGB 图像
    outImage = hsv2rgb(hsvImage);
    imshow(outImage);
end
```

第 2 部分 最优化参数

在上一部分从图像 $\mathbf{L}$ 中抽离出核心关键照明矩阵 $\mathbf{T}$ 后,这一部分的基本问题是

$$\min_{\mathbf{T}} \|\widehat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}\|_F^2 + \alpha\|\mathbf{W} \circ \nabla\mathbf{T}\|_1 .$$

其中α是预先指定的平衡系数,而 $\mathbf{W}$ 则是预先设置的权重矩阵.看起来,这是经典的 LASSO 问题.

将上式调整为等价的优化问题

$$\min_{\mathbf{T},\mathbf{G}} \|\widehat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}\|_F^2 + \alpha\|\mathbf{W} \circ \mathbf{G}\|_1 \quad \text{s.t.} \quad \nabla\mathbf{T} = \mathbf{G}.$$

在此式中使用增广乘子方法,最终导出以下优化问题:

$$\operatorname*{argmin}_{\mathbf{T},\mathbf{G}} \min_{\mathbf{Z}} \mathscr{L}(\mathbf{T}, \mathbf{G}; \mathbf{Z}) := \|\widehat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}\|_F^2 + \alpha\|\mathbf{W} \circ \mathbf{G}\|_1 + \Phi(\mathbf{Z}, \nabla\mathbf{T} - \mathbf{G}),$$

其中$\Phi(\mathbf{Z}, \nabla\mathbf{T} - \mathbf{G}) = \frac{\mu}{2}\|\nabla\mathbf{T} - \mathbf{G}\|_F^2 + \langle\mathbf{Z}, \nabla\mathbf{T} - \mathbf{G}\rangle$,这里$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示矩阵内积,$\mu$是一个正的惩罚标量,$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(\mathbf{T}, \mathbf{G})$是乘子变量.

现在要求解$\min \mathscr{L}$,就要获得$\arg\min \mathscr{L}$对应的三个最优参数$\mathbf{T}, \mathbf{G}, \mathbf{Z}$.即将使用的求解器是交替方向乘子法,也就是将最优问题关于$\mathbf{T}, \mathbf{G}$分步优化.至于$\mathbf{Z}$,将会在前两个参数分步优化时一并迭代更新.

2.1 $\mathbf{T}$ 子问题

首先需要确定 $\mathbf{T}$ 参数是如何迭代的.这是因为 $\mathbf{G}$ 参数的迭代需要用到 $\mathbf{T}$ 参数迭代后的数值.

2.1.1 公式的导出

收集涉及 $\mathbf{T}$ 的项,可以得到以下问题:

$$\mathbf{T}^{(t+1)} \leftarrow \operatorname*{argmin}_{\mathbf{T}} \|\widehat{\mathbf{T}} - \mathbf{T}\|_F^2 + \Phi\big(\mathbf{Z}^{(t)}, \nabla\mathbf{T} - \mathbf{G}^{(t)}\big).$$

这是一个经典的最小二乘问题,通过对 $\mathbf{T}$ 求导来计算解.求导的结果是

$$2(\mathbf{T} - \widehat{\mathbf{T}}) + \mu^{(t)}\mathbf{D}^T\big(\mathbf{D}\mathbf{T} - \mathbf{G}^{(t)}\big) + \mathbf{D}^T\mathbf{Z}^{(t)} = 0,$$

当然,按照此前说明的,这里$\nabla\mathbf{T} = \mathbf{D}\mathbf{T}$.以及,矩阵$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}\mathbf{D}_h \\ \mathbf{D}_v\end{bmatrix}$包含$\mathbf{D}_h$和$\mathbf{D}_v$,是离散的梯度近似矩阵,具体地说,是两个使用前向差分法获得的 Toeplitz 矩阵.不过,数值算子 $\mathbf{D}$ 并不能直接作用于矩阵 X,要经过如下的一个简单变换

$$\mathbf{D}(X) \leftarrow \text{reshape}(\mathbf{D}(\text{vec}(X))).$$

现在将求导式稍作调整,改为

$$\big(2\mathbf{I} + \mu^{(t)}\mathbf{D}^T\mathbf{D}\big)\mathbf{T} = 2\widehat{\mathbf{T}} + \mu^{(t)}\mathbf{D}^T\left(\mathbf{G}^{(t)} - \frac{\mathbf{Z}^{(t)}}{\mu^{(t)}}\right),$$

其中 $\mathbf{I}$ 是具有适当大小的单位矩阵.立刻使用 2D-FFT 工具求解上式,推有

$$\mathbf{T}^{t+1} \leftarrow \mathscr{F}^{-1}\left(\frac{\mathscr{F}\left(2\widehat{\mathbf{T}} + \mu^{(t)}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{G}^{(t)} - \dfrac{\mathbf{Z}^{(t)}}{\mu^{(t)}}\right)\right)}{2\mathbf{I} + \mu^{(t)}\displaystyle\sum_{d\in\{h,v\}} \overline{\mathscr{F}\big(\mathbf{D}_d\big)} \circ \mathscr{F}\big(\mathbf{D}_d\big)}\right).$$

2.1.2 代码实现

需要将 2.1.1 节末尾的迭代公式转换为 MATLAB 代码.

首先,定义数值差分算子$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_h^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_v^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_h\\ \mathbf{D}_v\end{bmatrix}$,其转置$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_h^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_v^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$.

然后定义一个计算矩阵$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}$的函数.这里首先要解释一件事情.对于输入的图像矩阵 $\mathbf{T}$,标记其 size 为$M\times N$.那么$\nabla\mathbf{T}$的 size 应该是$2M\times N$.这是因为∇导数滤波器包含图像的水平导数滤波器∇_h和竖直导数滤波器∇v,其中h,v是水平与竖直的英文首字母.注意 $\mathbf{G}$ 是逼近$\nabla\mathbf{T}$的参数,因此 $\mathbf{G}$ 的 size 也应该是$2M\times N$.在数学理解上,size 的具体细节无需关心,因为公式的推导默认各种矩阵乘法和求导操作等成立.但是对于编写代码,这些细节需要被关心.

现在要做的是搭建函数"myDT",其输出结果为图像梯度近似矩阵 $\mathbf{G}$ 被数值导数矩阵$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$作用后的结果矩阵$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}$.按照此前说明的,$\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\mathbf{G}_h\\ \mathbf{G}_v\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{2M\times N}$.则

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\mathbf{D}_h^{\mathrm{T}} & \mathbf{D}_v^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{G}_h\\ \mathbf{G}_v\end{bmatrix}=\mathbf{D}_h^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_h+\mathbf{D}_v^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_v.$$

向前差分的二维卷积核分别是

$$d_h:=[1\quad -1\quad 0],d_v=\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 0\end{bmatrix}.$$

而对于向量$\boldsymbol{x}$,有$\mathbf{D}_h(\boldsymbol{x})=\mathrm{vec}\left(\mathbf{X}*d_h\right)$成立,相应的是$\mathbf{D}_h^T(\boldsymbol{x})=\mathrm{vec}\left(\mathbf{X}*d_h^f\right)$,其中

$$d_h^f:=[0\quad -1\quad 1],d_v^f=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix},$$

上标符号f表示卷积的翻转操作,即将卷积核水平翻转一次,然后竖直翻转一次.MATLAB 自带了"flip"函数用于数组的翻转.

只是要注意,差分矩阵使用的前提假设是图像具有循环边界,在循环边界假设下,需要对图像进行边缘延拓处理.具体的说是以下的"myExtend"函数

```
function [tildeTh,tildeTv]=myExtend(T,k)
    if k==1
        tildeTh=[T,T(:,1)];
        tildeTv=[T;T(1,:)];
    elseif k==-1
        tildeTh=[T(:,1),T];
        tildeTv=[T(1,:);T];
    end
end
```

这里$\widetilde{\mathbf{T}}_h, \widetilde{\mathbf{T}}_v$分别是$\mathbf{T}$沿水平和竖直方向周期延拓的矩阵.

还需要截取延拓后的矩阵为原大小.

```
function [limitTh,limitTv]=myLimit(T,k)
    if k==1
        limitTh=T(:,1:end-1);
        limitTv=T(1:end-1,:);
    elseif k==-1
        limitTh=T(:,2:end);
        limitTv=T(2:end,:);
    end
end
```

现在制作转置前向差分算子$\mathbf{D}^T$的计算函数"myDT".

```
function [DG]=myDT(G)
    %G 的 size 是 2M*N,定义 p=2M
    [p,n]=size(G);
    %向下取整获得参数 M,也许应该说是 m,但我想符号大小写问题不影响理解
    m=floor(p/2);
    %将矩阵 G 向量化为 g,并切割 g 的水平方向与竖直方向,重塑为水平梯度近似矩阵 Gx,竖直梯度近似
矩阵 Gy
    g=reshape(G,[p*n,1]);
    Gh=reshape(g(1:m*n),[m,n]);
    Gv=reshape(g(m*n+1:p*n),[m,n]);
    [tildeGh,~]=myExtend(Gh,-1);
    [~,tildeGv]=myExtend(Gv,-1);
    %创建卷积核
    dxf=[0,-1,1];
    dyf=[0;-1;1];
    %卷积操作
    tildeDGh=conv2(tildeGh,dxf,'same');
    tildeDGv=conv2(tildeGv,dyf,'same');
    [DGh,~]=myLimit(tildeDGh,-1);
    [~,DGv]=myLimit(tildeDGv,-1);
    %返回结果
    DG=DGh+DGv;
end
```

现在编写用 2D-FFT 操作迭代更新参数 $\mathbf{T}$ 的函数.首先计算的是

$$\sum_{d\in\{h,v\}} \overline{\mathcal{F}\left(\mathbf{D}_d\right)} \circ \mathcal{F}\left(\mathbf{D}_d\right).$$

注意$\mathbf{D}_d$对应于导数滤波器的卷积核d_h, d_v.将卷积核扩展到X的大小后,有等式

$$\overline{\mathcal{F}(\mathbf{D})} \circ \mathcal{F}(\mathbf{D}) = \overline{\mathcal{F}(d)} \circ \mathcal{F}(d)$$

成立.

```
function [result]=myFD(m,n)
    %创建卷积核
    dx=[1,-1,0];
    dy=[1;-1;0];
    %填充零元素使得卷积核与图像大小一致
    dx_padded=zeros(m,n);
    dy_padded=zeros(m,n);
    dx_padded(2,1:3)=dx;
    dy_padded(1:3,2)=dy;
    %进行 FFT 计算
    FDx=fftshift(fft2(dx_padded));
    FDy=fftshift(fft2(dy_padded));
    %计算点元素乘积
    FDx_norm=conj(FDx).*FDx;
    FDy_norm=conj(FDy).*FDy;
    %返回结果
    result=FDx_norm+FDy_norm;
end
```

编写迭代函数.其中方便起见,使用 $\mathbf{U}$ 标记 $\mu^{-1}\mathbf{Z}$.

```
function [T] = myUpdateT(Ti,mu,G,U)
    %Ti 是 T 的迭代初值
    %U=Z/mu,G,Z,mu 是优化参数
    X=G-U;
    DTX=myDT(X);
    Tnum=2*Ti+mu*DTX;
    Tn=fftshift(fft2(Tnum));
    [m,n]=size (Ti);
    Td=2+mu*myFD(m,n);
    Tnd=Tn./Td;
    %迭代结果输出为 T
    T=ifft2(ifftshift(Tnd));
end
```

2.2 $\mathbf{G}$ 子问题与 $\mathbf{Z}$, μ 参数的调整

解决完 $\mathbf{T}$ 参数的迭代问题后,现在将 $\mathbf{G}$ 参数的迭代问题一并解决.

2.2.1 公式的导出

将与 $\mathbf{G}$ 无关的项去掉后,得到以下优化问题:|

$$\mathbf{G}^{(t+1)} \leftarrow \underset{\mathbf{G}}{\operatorname{argmin}}\, \alpha\|\mathbf{W}\circ\mathbf{G}\|_1 + \Phi\left(\mathbf{Z}^{(t)}, \nabla\mathbf{T}^{(t+1)} - \mathbf{G}\right).$$

求导后,类似于 LASSO 问题,闭式解如下:

$$\mathbf{G}^{(t+1)}=\mathcal{S}_{\frac{\alpha \mathbf{W}}{\mu^{(t)}}}\left[\nabla \mathbf{T}^{(t+1)}+\frac{\mathbf{Z}^{(t)}}{\mu^{(t)}}\right],$$

如同课本中介绍的那样,这里$\mathcal{S}_{\varepsilon>0}[\cdot]$表示收缩算子,其在标量上的定义是:

$$\mathcal{S}_{\varepsilon}[x]=\operatorname{sgn}(x) \max (|x|-\varepsilon, 0).$$

将收缩算子扩展到向量和矩阵上,表示为对数据元素进行逐个处理.例如$\mathcal{S}_{\mathbf{A}}[\mathbf{X}]$对 $\mathbf{X}$ 的元素进行逐个收缩,阈值由相应的条件 $\mathbf{A}$ 给出.

```
function [S] = myShrinkage(A,X)
    %A 是条件矩阵,X 是被收缩的矩阵
    %输出结果 S
    [m,n]=size(A);
    Z=zeros(m,n);
    S=sign(X).*max(abs(X)-A,Z);
end
```

接下来,按照增广乘子方法的一般迭代算法更新参数$\mathbf{Z}, \mu$.即

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Z}^{(t+1)} \leftarrow \mathbf{Z}^{(t)}+\mu^{(t)}(\nabla \mathbf{T}^{(t+1)}-\mathbf{G}^{(t+1)}); \\
&\mu^{(t+1)} \leftarrow \mu^{(t)} \rho, \rho>1,
\end{aligned}$$

其中ρ是事先设置的罚因子增长参数.

2.2.1 照明矩阵最优化过程代码

现在可以给出全部的迭代过程的代码了,不过使用到了一个后续才会编写的权重矩阵函数"make_weight_matrix".

```
function [Topt] = myTrial(Ti,alpha,mu0,rho)
    %Ti 是初始照明图
    %alpha, mu0, rho 是相应求解参数
    %输出 Topt 是最优照明图

    [m,n]=size(Ti);
    %确定最大循环次数 k0
    k0=50;
    %参数初始化
    Z=zeros(2*m,n);
    G=Z;
    k=0;
    mu=mu0;

    %{
    % 第一种权重设置方法
    W=Z+1;
    %}

    %第二种权重设置方法
    W=myWThree(Ti,5);
```

```
    while k<k0
        U=Z/mu; A=alpha*W/mu;
        %T 子问题迭代
        T=myUpdateT(Ti,mu,G,U);
        DT=myD(T);
        %G 子问题迭代
        G=myShrinkage(A,(DT+U));
        B=DT-G;
        %增广因子迭代
        Z=mu*(B+U);
        mu=mu*rho;
        k=k+1;
    end
    Topt=T;
end
```

这里用到一个计算$\nabla \mathbf{T}$的函数"myD".

```
function [DT]=myD(T)
    [m,n]=size(T);
    p=2*m;
    dx=[1,-1,0];
    dy=[1;-1;0];
    [tildeTh,tildeTv]=myExtend(T,1);
    [DX,~]=myLimit(conv2(tildeTh,dx,'same'),1);
    [~,DY]=myLimit(conv2(tildeTv,dy,'same'),1);
    Dx=myVec(DX);
    Dy=myVec(DY);
    DT=reshape([Dx;Dy],[p,n]);
end
```

第 3 部分 权重矩阵 $\mathbf{W}$ 的确定

目前为止,有关参数优化的问题已经告一段落.只剩下参数 $\mathbf{W}$ 和α尚未确定.α作为一个正实轴上的滑动参数,可以进行自由调整,而 $\mathbf{W}$ 作为$\mathbb{R}^{2M\times N}$矩阵,则较为笨重,必须给出一种策略对其赋值.

注意,$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}\mathbf{W}_h\\ \mathbf{W}_v\end{bmatrix}$.

3.1 不同的加权策略

沿用参考论文中的办法,这里讨论三种不同的加权策略,但实际操作时只考虑其中的一种.

3.1.1 全 1 的权重矩阵

此时$\mathbf{W}(i,j)\equiv 1,\forall\, i,j$.代码实现为

```
function [W]=myWOne(p,n)
    W=ones(p,n);
```

```
end
```

3.1.2 照明图梯度作为权重

此时$\mathbf{W}(i,j)=\frac{1}{\mathbf{D}\widehat{\mathbf{T}}(i,j)+\varepsilon},\forall i,j,$而$\varepsilon$是防止分母为 0 的适当小的常数.代码实现为

```
function [W]=myWTwo(Ti,p,n)
    W=zeros(p,n);
    varepsilon=1e-5;
    DTi=myD(Ti);
    for i=1:p
        for j=1:n
            W(i,j)=1/(DTi(i,j)+varepsilon);
        end
    end
end
```

3.1.3 高斯滤波

对于每个位置,通过以下方式设置权重:

$$\mathbf{W}_h(x)\leftarrow\sum_{y\in\Omega(x)}\frac{G_\sigma(x,y)}{\left|\sum_{y\in\Omega(x)}G_\sigma(x,y)\nabla_h\widehat{\mathbf{T}}(y)\right|+\epsilon},$$

$$\mathbf{W}_v(x)\leftarrow\sum_{y\in\Omega(x)}\frac{G_\sigma(x,y)}{\left|\sum_{y\in\Omega(x)}G_\sigma(x,y)\nabla_v\widehat{\mathbf{T}}(y)\right|+\epsilon}$$

其中$G_\sigma(x,y)$是使用标准差σ的高斯核生成的.形式上,$G_\sigma(x,y)$表示为:

$$G_\sigma(x,y)\propto\exp\left(-\frac{\mathrm{dist}(x,y)}{2\sigma^2}\right)$$

其中函数dist是通常的距离函数.

实际上,第二个加权策略是该策略的一个实例.当$\sigma\to0^+$时,两个策略得到相同的权重矩阵.我们注意到,与 RTV 不同,我们的权重矩阵是基于给定的$\widehat{\mathbf{T}}$构建的,而不是根据 T 迭代更新的.这意味着$\mathbf{W}$只需要计算一次.

```
function [W]=myWThree(Ti,ker_size)
    %ker_size is the size of the Gaussian kernel
    %W is the required weight matrix
    [m,n]=size(Ti);
    p=m*n;
    %obtaining gradient of Ti
    DTi=myD(Ti);
    dtvec=myVec(DTi);
    %separating parts used for W_x and W_y
    dtx=dtvec(1:p);
```

```
    dty=dtvec(p+1:2*p);
    %obtaining W_x and W_y
    w_gauss = fspecial ('gaussian', [ker_size,1], 2);
    convl_x = conv(dtx, w_gauss, 'same');
    convl_y = conv(dty, w_gauss, 'same');
    varepsilon=1e-5;
    W_x = 1./(abs(convl_x)+varepsilon);
    W_y = 1./(abs(convl_y)+varepsilon);
    %concatenating W_x and W_y to get W
    W_vec = vertcat(W_x, W_y);
    W = reshape (W_vec, [2*m,n]);
end
```

第 4 部分 加速运算

由于

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\sum_x\sum_{d\in\{h,v\}}\frac{\mathbf{W}_d(x)\left(\nabla_d\mathbf{T}(x)\right)^2}{|\nabla_d\mathbf{T}(x)|+\varepsilon}=\|\mathbf{W}\circ\nabla\mathbf{T}\|_1,$$

标记和 x 有关的常函数$A_dx:=\dfrac{\alpha W_d(x)}{|\nabla_d\widehat{\mathbf{T}}(x)|+\varepsilon}$,实际只要考虑$\left(\nabla_dL(x)\right)^2$.这是因为优化问题是

$$\min_{\mathbf{T}}\|\widehat{\mathbf{T}}-\mathbf{T}\|_F^2+\alpha\|\mathbf{W}\circ\nabla\mathbf{T}\|_1,$$

第一项保证了$\mathbf{T}$接近于$\widehat{\mathbf{T}}$,因而它们的梯度也应该接近.何况如果以迭代后的照明图作为新的初始照明图,这个差距可以进一步缩小.

优化问题现在改为

$$\min_{\mathbf{T}}\|\widehat{\mathbf{T}}-\mathbf{T}\|_F^2+\sum_x\sum_{d\in\{h,v\}}A_d(x)\left(\nabla_d\mathbf{T}(x)\right)^2,$$

求导后得到下面的公式

$$\left(\mathbf{I}+\sum_{d\in\{u,v\}}\mathbf{D}_d^T\mathrm{diag}(a_d)\mathbf{D}_d\right)\mathbf{t}=\widehat{\mathbf{t}}$$

其中小写字母代表向量化后的矩阵,例如$\mathbf{t}=\mathrm{vec}(\mathbf{T})$.虽然上式足够简单,但是显而易见计算量极为巨大.

```
%这个神奇的代码是意外所得,希望它的效果会好.
%出了点问题,但主线任务用不到这个算法,暂且搁置
function out = solveLinearEquation(in, wx, wy, lambda)
    %wx,wy 是权重矩阵的水平与竖直部分
    %lambda 是参数,类似于本文的 alpha
    [h,w,c] = size(in);
    n = h*w;

    wx = wx(:);
```

```
    wy = wy(:);

    ux = padarray(wx, h, 'pre'); ux = ux(1:end-h);
    uy = padarray(wy, 1, 'pre'); uy = uy(1:end-1);
    D = wx+ux+wy+uy;
    B = spdiags([-wx, -wy],[-h,-1],n,n);
    L = B + B' + spdiags(D, 0, n, n);    % a sparse five-point Laplacian matrix

    A = speye(n) + lambda*L;
    if exist('ichol','builtin')
        F = ichol(A,struct('michol','on'));
        out = in;
        for i=1:c
            tin = in(:,:,i);
            [tout, ~] = pcg(A, tin(:),0.1,100, F, F');
            out(:,:,i) = reshape(tout, h, w);
        end
    else
        out = in;
        for i=1:c
            tin = in(:,:,i);
            tout = A\tin(:);
            out(:,:,i) = reshape(tout, h, w);
        end
    end
end
```

可以编写一个新的最优参数获取函数了.

```
function [Topt] = myNewQuick(Ti,alpha)
    [m,~]=size(Ti);
    W=myWThree(Ti,5);
    DTi=myD(Ti);
    abs_delTi=abs(DTi);
    varepsilon=1e-5;
    A=alpha*(W./(abs_delTi+varepsilon));
    Ax=A(1:m,:);
    Ay=A(m+1:end,:);
    Topt=solveLinearEquation(Ti,Ax,Ay,1);
end
```

第五部分 γ变换后的图像

还可以通过伽马变换来操作光照图,即$\mathbf{T} \leftarrow \mathbf{T}^{\gamma}$.

```
function [newTi]=gammaResult(Ti,gamma)
    Ti=abs(Ti);
    newTi=Ti.^gamma;
end
```

其余的自定义函数

```
function [x]=myVec(X)
    %对应于 vec 算子
    x=reshape(X,[],1);
end

function [lightingImg,max_RGB] = myLighting(testImg)
    %获取初始照明
    %testImg 是初始输入图像
    %lightingImg 是初始照明图像
    %max_RGB 是三个通道的最大值
    max_RGB = max(testImg, [], 3);
    %将 0 值替换为充分小的常数,以免被除数中出现 0
    varepsilon=1e-5;
    max_RGB(max_RGB == 0) = varepsilon;
    %使用 repmat 函数,生成所有像素的通道数值为最大通道数值的照明图.
    lightingImg=repmat(max_RGB,[1,1,3]);
end
```