实验八：多项式拟合以及矩阵分解

一、 实验内容

给定 n 个输入输出对，用给定的 m 次多项式拟合输入输出关系。当 n 大于多项式阶数 m 时，化为超定方程求解问题。这里采用最小二乘方法求解。问题建模如下：

$$\mathbf{a}^* = \arg\min_{\mathbf{a}} \sum_{i=0}^{n-1} \left(y_i - \sum_{j=0}^{m-1} a_j x_i^j \right)^2 .$$

化为矩阵形式：

$$\mathbf{a}^* = \arg\min_{\mathbf{a}} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{a}).$$

其中

$$\mathbf{X}_{ij} = x_i^j, 0 \le i < n, 0 \le j < m.$$

对上式求导，易得

$$\mathbf{a}^* = \left(\mathbf{X}^T \mathbf{X}\right)^{-1} \mathbf{X}\mathbf{y} .$$

利用对 $\mathbf{X}$ 的 QR 分解可以有效地降低上述运算的复杂度，并提高精度。请完成推导，并据此设计算法计算参数 $\mathbf{a}^*$。

二、 输入格式

第一行输入 n 和 m。此后每行依次输入一组 x_i, y_i。均为浮点数。

三、 输出格式

将计算得到的多项式参数 $\mathbf{a}^*$ 由低阶到高阶逐行输出。只需保留整数部分。

四、 输入输出样例

输入：

4	3
0.1	3.2
1.2	5.4
4.2	11.4
2.5	8.0

输出：

3
2
0

五、 提示

1） 着重考虑数据点远大于多项式阶数的情况下，如何选择合适的分解方式降低复杂度。

2） 矩阵求逆复杂度较高，应尽量避免。

3） 调整矩阵相乘顺序，可大幅降低复杂度。