

Listas de contenidos disponibles en [ScienceDirect](https://www.sciencedirect.com)

## Seguros: Matemáticas y Economía

página de inicio de la revista: [www.elsevier.com/locate/jime](http://www.elsevier.com/locate/jime)

# A anualidades variables: insuficiencia del mercado y comportamiento de los asegurados

## Thorsten Mönig



Departamento de Gestión de Riesgos, Seguros y Atención Sanitaria; Universidad de Temple, 1801 Liacouras Walk, Alter Hall  
611, Filadelfia, PA 19122, Estados Unidos de América

## información del artículo

## Historia del artículo:

Recibido en mayo de 2020

Recibido en forma revisada en marzo de 2021

Aceptado el 12 de marzo de 2021

Disponible en línea el 24 de marzo de 2021

## Clasificación JEL:

G13, G22

## Palabras clave:

Anualidades variables

Comportamiento óptimo del asegurado

Mercado incompleto

Modelo de utilidad del ciclo de vida

Beneficios de retiro mínimo garantizados

## abstracto

Las anualidades variables (VA) son vehículos populares de ahorro e inversión personal con garantías a largo plazo. Incluyen varias características que dependen del ejercicio, y el precio, la valoración y la cobertura de las garantías dependen fundamentalmente de la toma de decisiones de los inversores. Estudio si el comportamiento de ejercicio óptimo de un inversor de VA se ve afectado por la incompletitud del mercado, que surge porque el VA genera perfiles de pago que cruzan el riesgo financiero y el riesgo de mortalidad idiosincrásico y, por lo tanto, no pueden replicarse (totalmente) con los productos financieros y de seguros tradicionales.

Al implementar una política VA genérica con una garantía de retiro (GMWB) que refleja las características típicas de un producto estadounidense, encuentro que el comportamiento de retiro óptimo derivado de un modelo de utilidad del ciclo de vida se aproxima estrechamente a la correspondiente estrategia de maximización del valor (después de impuestos). Es decir, desde la perspectiva del inversor, el mercado en torno a las pólizas VA es lo suficientemente completo como para justificar el enfoque común de evaluar el comportamiento óptimo de los asegurados VA con un método de valoración neutral al riesgo.

© 2021 Elsevier BV Todos los derechos reservados.

## 1. Introducción

El comportamiento de los asegurados es un factor de riesgo importante para las compañías de seguros de vida que ofrecen contratos que incluyen características dependientes del ejercicio, pero aún no se comprende bien (Campbell et al., 2014; Bauer et al., 2017). Esto es particularmente relevante para las anualidades variables (VA) de EE. UU., que son vehículos de inversión y ahorro personal que actualmente representan aproximadamente 100 mil millones de dólares en ventas anuales y alrededor de 2 billones de dólares en activos netos, es decir, casi una cuarta parte de los activos totales de la industria de seguros de EE. UU. Los VA están equipados con garantías financieras a largo plazo, y el valor de estas garantías – así como la efectividad de la cobertura de las aseguradoras – a menudo depende no sólo del desempeño y la longevidad de la inversión sino también, fundamentalmente, de la decisión de los inversionistas (es decir, de los tomadores de pólizas). comportamiento con respecto, por ejemplo, a retiros, caducidades/rendiciones y asignación de inversiones.

En este estudio, exploro si lo incompleto del mercado tiene un impacto material en el comportamiento óptimo de ejercicio de VA de los inversores.

Los VA intersectan el riesgo financiero y el riesgo de mortalidad idiosincrásico que enfrenta el asegurado. Su pago depende del rendimiento de la inversión subyacente, pero la garantía ofrece protección a la baja – dependiendo del tipo de garantía – ya sea en caso de muerte prematura del asegurado o en caso de su longevidad. Por el contrario, los valores financieros tradicionales ofrecen exposición (o protección) a riesgos financieros únicamente, mientras que los seguros de vida tradicionales o los productos de rentas vitalicias permiten al inversionista

para gestionar sólo su riesgo de mortalidad idiosincrásico. Sin embargo, ninguna combinación de acciones y seguro de vida/anualidad puede replicar la estructura de pago de una garantía VA y producir un pago (únicamente) en el evento conjunto en el que el titular de la póliza fallece prematuramente y su inversión ha tenido un rendimiento inferior.

La teoría de la fijación de precios de activos sugiere que si el mercado en torno a los productos VA estuviera completo, entonces el inversor siempre podría replicar cualquier perfil potencial de pago de VA a través de otros activos disponibles. Su estrategia de ejercicio óptima sería entonces maximizar el valor esperado neutral al riesgo de los pagos del VA y utilizar los otros activos del mercado para construir su perfil de consumo deseado con base en sus preferencias (Cox y Huang, 1989).

Es decir, maximizar su utilidad de consumo intertemporal o riqueza terminal siempre produciría un comportamiento de ejercicio idéntico al de maximización de valor, independientemente de sus preferencias. Por otra parte, en un mercado incompleto, el perfil de consumo deseado por el inversor puede no ser alcanzable sin la flexibilidad adicional proporcionada por el VA. Esto puede llevarla a ajustar su conducta de ejercicio del VA: para obtener utilidad, tiene que renunciar a parte del valor del VA.

Es decir, los VA ofrecen estructuras de pago únicas que no pueden ser replicadas por los productos financieros o de seguros tradicionales, y esta insuficiencia del mercado que rodea a los productos VA puede afectar el comportamiento óptimo de ejercicio del VA por parte de los inversionistas y, por lo tanto, el valor de la garantía del VA. Evalúo la relevancia práctica de este efecto utilizando una cláusula adicional del Beneficio de Retiro Mínimo Garantizado (GMWB) como un ejemplo destacado de garantías del VA. Los GMWB permiten al asegurado retirar el importe de su inversión a lo largo del curso

Dirección de correo electrónico: [moenig@temple.edu](mailto:moenig@temple.edu).<https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2021.03.007> 0167-6687/© 2021

Elsevier BV Todos los derechos reservados.

de la póliza en pequeñas cuotas anuales, mientras ella siga viva y la póliza siga activa. Eran la garantía VA más popular a mediados de la década de 2000 (Sell, 2006).

En el entorno de mercado incompleto, incorporo el producto VA+GMWB en un modelo de utilidad de ciclo de vida (LC) en el que el inversor elige maximizar su utilidad a partir del consumo anual en un entorno intertemporal. Contrasta esto con el comportamiento de retiro óptimo del inversor derivado del marco de "valoración subjetiva de riesgo neutral" (SRNV) de Moenig y Bauer (2016), que es el equivalente de mercado completo del modelo LC, y encuentro que los dos Los enfoques producen un comportamiento muy similar, siempre que (en el modelo LC) el inversor tenga acceso a una cuenta de inversión separada. En particular, la diferencia en el superávit de la aseguradora con respecto a la garantía corresponde a un cambio de sólo alrededor de 3 puntos básicos (4%) en la comisión de garantía en el escenario base, con variaciones menores del impacto dependiendo de los parámetros de preferencia del inversor, la situación financiera y especificaciones del contrato de VA.

La brecha se reduce aún más si se elimina la mortalidad o el motivo del legado del inversor. Esto sugiere que el efecto residual puede atribuirse en gran medida a la incompletitud del mercado con respecto al riesgo de mortalidad idiosincrásico del inversionista, y se reduciría aún más si el modelo también otorgara al inversionista acceso a productos tradicionales de seguros de vida y anualidades para cumplir con su motivo de legado, y mitigar su riesgo de longevidad financiera.

Sin embargo, incluso sin eso, el mercado que rodea a los productos VA parece lo suficientemente completo como para que el comportamiento de ejercicio óptimo del inversor pueda aproximarse razonablemente mediante un enfoque de valoración neutral al riesgo.

Este método de valoración es consistente con la gran mayoría de estudios sobre el comportamiento de los asegurados en la literatura del VA. Entre muchos otros, esto incluye el trabajo de Ulm (2006) sobre la opción real de transferir fondos entre subcuentas VA; el comportamiento óptimo de retirada de GMWB evaluado, por ejemplo, por Milevsky y Salis-bury (2006) y Dai et al. (2008); el "marco de fijación de precios universal" para los AV de Bauer et al. (2008); (Marshall et al., 2010) de una cláusula adicional del Beneficio de Ingreso Mínimo Garantizado (GMIB); (Huang et al., 2014) que estudian el momento óptimo para comenzar a retirar (y así fijar el monto anual garantizado) bajo una garantía de retiro de por vida (GLWB1); la investigación sobre fallas en políticas óptimas realizada por MacKay et al. (2017) y Piscopo y Rüede (2018); y los llamados intercambios 1035 (política VA) (Moenig y Zhu, 2018). El lector interesado puede consultar (Bauer et al., 2017) para referencias adicionales.

Detrás de estos estudios se encuentra la suposición común de un mercado completo y sin fricciones que permite a los respectivos autores evaluar las estrategias de ejercicio óptimas de los inversores utilizando métodos de arbitraje de precios. Este enfoque tiene la ventaja de que simultáneamente maximiza los pasivos de la aseguradora por el producto, reflejando así el peor escenario de la empresa. Esto resulta atractivo desde la perspectiva de la gestión de riesgos, pero a menudo no explica los precios competitivos del mercado (Bauer et al., 2017). Estudios recientes han demostrado que las fricciones asimétricas del mercado, como los beneficios fiscales para el inversor (Moenig y Bauer, 2016) o los gastos de adquisición para la aseguradora (Moenig y Zhu, 2018), abren una brecha entre las valoraciones respectivas del asegurado y aseguradora.<sup>2</sup> En particular, Moenig y Bauer (2016) demuestran la relevancia de estas fricciones para el retiro óptimo de GMWB.

<sup>1</sup> Una cláusula adicional de GLWB da derecho al asegurado a retirar una cantidad garantizada cada año durante el resto de su vida, sin un límite de retiro total. <sup>2</sup>

Forsyth y Vetzal (2014) consideran la fijación de precios de una cláusula GLWB, según la cual el problema de optimización del inversor –que puede estar impulsado por preferencias y consideraciones fiscales– es independiente de la estrategia de fijación de precios y cobertura de la aseguradora, que se basa en el arbitraje, pero se alimenta de ella. –métodos de fijación de precios.

comportamiento. Su modelo SRNV combina un enfoque estándar de valoración neutral al riesgo con el tratamiento fiscal preferencial de una política VA estadounidense (en relación con una cartera potencial de replicación). Los autores muestran que sólo teniendo en cuenta el tratamiento fiscal adecuado se puede conciliar el comportamiento óptimo de retiro y las tasas justas de GMWB con observaciones empíricas del mercado VA de EE. UU.

En línea con otros estudios recientes (p. ej., Ulm, 2020; Goudenège et al., 2019), incorporo los impuestos en los marcos de mis modelos y muestro que los factores impulsores del comportamiento de los asegurados en los AV son, de hecho, el valor de la garantía como así como las fricciones relevantes del mercado (en este caso, impuestos) que enfrenta el inversionista, en lugar de la posible incompletitud del mercado. Por lo tanto, mis hallazgos apoyan el supuesto de un entorno de mercado completo que subyace a los estudios antes mencionados. Sin embargo, la reivindicación es sólo parcial ya que los estudios generalmente no tienen en cuenta el tratamiento fiscal preferencial del producto, que puede ser relevante para el comportamiento óptimo de los inversores, al menos en determinadas situaciones.<sup>3</sup>

Evaluar el comportamiento óptimo de retiro del inversor requiere la implementación numérica de un problema de optimización dinámica, lo que plantea importantes desafíos computacionales. Esto es particularmente relevante para el modelo LC, que implica variables de estado y control adicionales. Esto hizo necesario implementar los modelos en el marco de Black-Scholes, donde la tasa de interés es constante y el proceso de activos sigue un movimiento browniano geométrico, similar a, por ejemplo, Milevsky y Salisbury (2006), Bauer et al. (2008) y Dai et al. (2008). Sin embargo, estudios más recientes han analizado las garantías de retiro bajo tasas de interés estocásticas y volatilidad (Peng et al., 2012; Donnelly et al., 2014; Shevchenko y Luo, 2017; Gudkov et al., 2019), un proceso de cambio de régimen (Lin et al., 2009; Ignatieva et al., 2018), un proceso de difusión por salto (Chen et al., 2008) y un marco general de Lévy (Bacinello et al., 2016). Todos ellos producen resultados de valoración sustancialmente diferentes (y, por supuesto, estrategias de cobertura) que el correspondiente modelo de Black-Scholes.

Afortunadamente, el enfoque SRNV requiere menos del 0,1% del tiempo de cálculo del modelo LC y, por lo tanto, es más adecuado para incluir estas especificaciones alternativas del mercado financiero para producir una valoración más precisa de la garantía y una mejor predicción del asegurado. comportamiento. El enfoque también puede utilizarse para estudiar especificaciones contractuales alternativas (por ejemplo, incrementos); estructuras impositivas (por ejemplo, un VA en una cuenta de ahorros para la jubilación no calificada); mortalidad estocástica (aunque Gudkov et al., 2019 sugieren que esto puede no ser un factor crítico); decisiones de los inversores (por ejemplo, intercambios de políticas (1035)); así como el impacto potencial de otros factores conductuales que no parecen "racionales" ni siquiera en un marco estándar basado en la utilidad, como el anclaje, el efecto de disposición, el encuadre, el sesgo retrospectivo y la inercia. Además, el modelo SRNV puede modificarse para tener en cuenta el gasto exógeno o los shocks de liquidez, que pueden causar un cambio en el comportamiento de retiro si no son asegurables por separado. Remito al lector interesado a Costabile et al. (2020), que presentan un marco de valoración de GMWB que incorpora shocks de retirada exógenos, a Carpenter (1998), que analiza el ejercicio de las opciones sobre acciones de los empleados utilizando un modelo de valoración neutral al riesgo con un estado de retirada exógeno, y a Mahayni y Schneider (2012), que estudian la estrategia de asignación óptima del inversor dentro del VA en presencia de riesgo de fondo.

Si bien este estudio se centra en la insuficiencia del mercado de asegurados y supone que los proveedores de VA operan en un entorno de mercado completo, Delong (2014), Blanchet-Scalliet et al. (2015) y Chevalier et al. (2016) evalúan el problema de fijar el precio de las garantías VA si la aseguradora se enfrenta a un mercado financiero incompleto,

<sup>3</sup> Por otro lado, Moenig y Zhu (2018) muestran que la decisión óptima de un inversor de cambiar una póliza VA existente por una nueva no se ve afectada ni por la insuficiencia del mercado ni por consideraciones fiscales.

por ejemplo, como resultado de saltos en el proceso de rentabilidad de los activos o debido al riesgo de base, es decir, cuando los instrumentos de cobertura utilizados por la aseguradora tienen rentabilidades diferentes a las de los fondos mutuos subyacentes a la garantía VA.

El proceso de decisión del inversor en el modelo del ciclo de vida implica elecciones anuales con respecto a la cantidad a retirar (o si a renunciar) a la póliza VA+GMWB, cuánto consumir durante el año y cómo asignar su riqueza restante en el año. cuenta de inversión externa. Encuentro que esta cuenta externa es un componente crítico para completar el mercado: si el inversionista no tiene la oportunidad de ahorrar e invertir sus retiros —o de usar otros activos para suavizar su consumo a lo largo del ciclo de vida y a través del potencial Si se da cuenta de su riesgo financiero y de mortalidad, entonces su comportamiento óptimo de retiro del VA parece sustancialmente diferente. Por lo tanto, el presente estudio advierte contra la evaluación del comportamiento óptimo de los asegurados en un entorno de mercado incompleto sin tener en cuenta las opciones de inversión externas del inversor (por ejemplo, [Gao y Ulm, 2012, 2015](#)).

Este estudio está más estrechamente relacionado con [Horneff et al. \(2015\)](#), quienes también integran una política VA+GMWB en un marco de servicios públicos del ciclo de vida. Si bien me concentro en la valoración de la garantía y los posibles determinantes del comportamiento de ejercicio del inversor, su énfasis está en la demanda cambiante de la cláusula GMWB y otros activos a lo largo del ciclo de vida. En particular, los autores encuentran que las garantías de retiro ofrecen una ganancia significativa de bienestar—incluso para los grupos de edad más jóvenes—en un mundo donde los inversionistas también tienen acceso a inversiones en acciones y bonos (pero no a seguros de vida ni anualidades). Esto contrasta un poco con mi conclusión de que el mercado VA está razonablemente completo, en cuyo caso la presencia de la cláusula GMWB no afectaría sustancialmente el bienestar del inversor.

Se han aplicado enfoques de ciclo de vida similares para estudiar VA con GLWB. Por ejemplo, [Steinorth y Mitchell \(2015\)](#) determinan el comportamiento de retiro óptimo para un inversor con aversión al riesgo, centrándose en el valor de la garantía para el inversor. En términos más generales, se han utilizado modelos de utilidad del ciclo de vida para evaluar los beneficios de los AV (y productos relacionados) en una cartera de inversiones para la jubilación (véanse, por ejemplo, [Brown et al. \(2001\)](#), [Horneff et al. \(2010\)](#) y [Maurer et al. \(2013\)](#), entre otros), para estudiar la asignación óptima de activos durante la fase de pago de una póliza VA ([Charupat y Milevsky, 2002](#)), y para determinar los retiros parciales óptimos para una póliza VA que no incluye una garantía de retiro ([Gao y Ulm, 2015](#)).

Los conocimientos proporcionados por el presente estudio deberían ser útiles para las aseguradoras y reguladores de vida. Dado que asumir un comportamiento de retiro que maximice la responsabilidad es probablemente una estrategia de fijación de precios inviable para los proveedores competitivos de VA, comprender las fuentes relevantes del comportamiento (óptimo) de los asegurados es fundamental para la fijación de precios y la cobertura de las garantías. En particular, la idea de que —aparte de las tasas impositivas marginales— las características no observables del inversionista (es decir, su situación financiera y sus preferencias) son en gran medida irrelevantes para su comportamiento óptimo y el valor de GMWB debería ser una buena noticia.

El resto del artículo está organizado de la siguiente manera: comienzo con una breve revisión de la teoría de la valoración de activos sobre la incompletitud del mercado y sus ideas para el caso de una política VA con garantías. Para evaluar la relevancia práctica de estos conocimientos, luego implemento y analizo una política VA+GMWB en un modelo de optimización dinámica con opciones intertemporales: la Sección 3 describe los marcos del modelo para determinar el comportamiento de retiro óptimo del inversor (tanto en un ciclo de vida como en un ciclo de vida). y un mundo neutral al riesgo), así como la valoración de la aseguradora. Esto incluye una discusión sobre su implementación numérica y parametrización. Luego presento los resultados numéricos, seguidos de las conclusiones.

## 2. Teoría: mercado incompleto y anualidades variables

Los VA ofrecen a los inversores exposición al riesgo alcista del mercado de valores y, al mismo tiempo, los protegen contra el riesgo a la baja, pero generalmente sólo en caso de supervivencia o muerte. Así, para los inversores, los VA operan en la intersección de su riesgo financiero y su riesgo de mortalidad idiosincrático. Por lo tanto, el nivel de incompletitud que enfrentan los inversores de VA se basa en su capacidad (utilizando otros activos disponibles) para protegerse contra el riesgo financiero, así como contra su riesgo de mortalidad o longevidad.

Consideremos entonces un mundo simple que contiene dos variables de riesgo, cada una con dos posibles resultados futuros: el riesgo financiero se refleja ya sea en una buena economía (G) o en una mala economía (B), y el riesgo de mortalidad idiosincrático lo capta el inversionista que está siendo contratado. ya sea vivo (A) o muerto (D). Un "estado del mundo" (futuro) es, por tanto, cualquier combinación (i, j) con  $i \in \{G, B\}$  y  $j \in \{A, D\}$ .

Un valor Arrow-Debreu para el estado (i, j) paga el numerario de 1 si ocurre el estado (i, j), y paga 0 en cualquier otro estado. La teoría estándar de fijación de precios de activos define un mercado completo como aquel en el que existen valores Arrow-Debreu para cada estado y son negociables en cantidades arbitrarias. Un mercado completo permite al inversor asignar sus fondos F de manera óptima entre los diferentes estados en función de sus preferencias (como su nivel de aversión al riesgo y la fuerza de su motivo de legado), ya que la existencia de los valores Arrow-Debreu garantiza que cualquier valor deseado Se puede lograr una estructura de pagos. Para simplificar, asumo aquí que no hay fricciones en el mercado y denotamos con  $p_{i,j}$  (0, 1) el precio (único) de un título Arrow-Debreu para el estado (i, j).

Para relacionar el ejercicio de opciones con la incompletitud del mercado, supongamos que —además de los fondos F— el agente también posee un activo Y que promete pagar  $Y_{i,j}$  en los estados (i, j). Además, supongamos que el activo contiene una opción que, si la ejerce el agente, desplaza algunos pagos de un estado a otro, produciendo un perfil de pagos Y. ¿Depende la decisión de ejercicio óptima del agente de  $i, j$ ? ¿sus preferencias? La respuesta depende de si el mercado está completo (sin el activo Y).

Si el mercado está completo, entonces el agente puede vender los pagos contingentes estatales  $Y_{i,j}$  por  $VY := \sum p_{i,j} Y_{i,j}$  y luego puede redistribuir  $VY$  entre los cuatro estados de acuerdo a sus preferencias. Puede hacer lo mismo si ejerce la opción y recibe V

$V := \sum p_{i,j} \cdot \mathbb{1}_{\{i,j\}} Y_{i,j}$ . Por lo tanto, el agente debería  $i, j$   $p_{i,j}$  Y ejercer la si y sólo si  $V > VY$  porque eso le proporciona la mayor cantidad de fondos.<sup>4</sup> Es decir, en un mercado completo, el asegurado de un contrato VA debería ejercer de manera óptima la opción. Opciones integradas basadas en este principio de maximización del valor. En particular, esto produciría el mismo comportamiento óptimo que si estuviera maximizando (por ejemplo) la utilidad esperada de su consumo, independientemente de sus preferencias.

Por otro lado, si el mercado está incompleto, los perfiles de pago potenciales  $Y_{i,j}$  e Y no necesariamente pueden replicarse con  $i, j$  otros activos. Por lo tanto, no se puede asignar ningún "valor" monetario objetivo al Activo Y con y sin ejercicio de opción. La decisión óptima de ejercicio depende entonces de las preferencias del agente sobre los pagos en los diferentes estados y del perfil de pago del activo Y con y sin la opción ejercida, respectivamente. Así, en un entorno de mercado incompleto, el comportamiento de ejercicio óptimo del inversionista generalmente se deriva de alguna forma de maximización de la utilidad, y el grado en que elige desviarse del comportamiento de maximización del valor depende críticamente del nivel de incompletitud del mercado, es decir, del nivel de incompletitud del mercado. es qué tan bien puede replicar los posibles pagos de opciones con sus otros activos disponibles.

<sup>4</sup> De manera más práctica, simplemente incluiría el  $Y_{i,j}$  en los pagos totales que elegiría en función de los fondos disponibles  $F + VY$ , y solo vendería partes del pago del activo si fuera necesario.

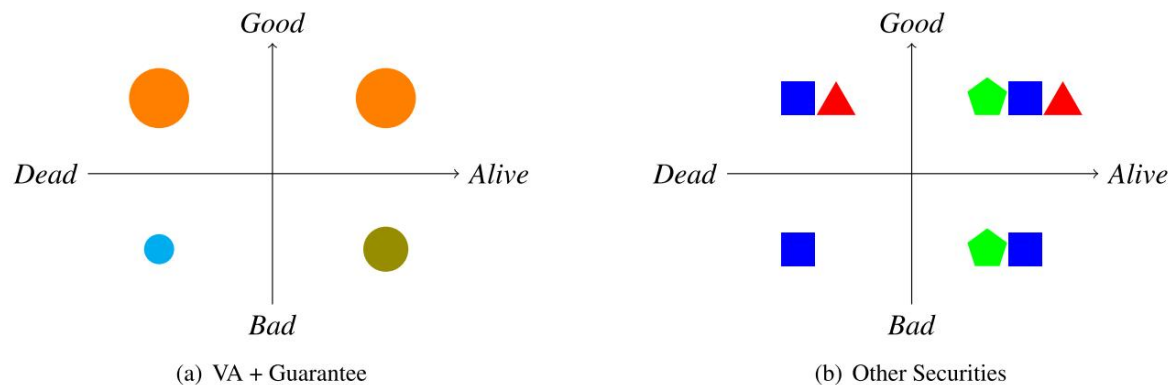


Fig. 1. Pagos relativos de inversión en un mundo simple de 4 estados. Notas: Las cifras reflejan los pagos potenciales que un inversor puede recibir de diferentes inversiones. En el panel (a), el tamaño del círculo indica la magnitud del pago de un VA que incluye una garantía de beneficio en vida. En el panel (b), el cuadrado azul refleja los pagos de un activo libre de riesgo; el triángulo rojo refleja los pagos de una inversión en acciones; y el pentágono verde refleja los pagos de una renta vitalicia tradicional.

Por lo tanto, el impacto de la insuficiencia del mercado en el comportamiento óptimo de los asegurados de los VA depende de a qué otros activos tiene acceso el inversor o, más precisamente, en qué medida estos activos pueden replicar los perfiles potenciales de pago de los VA. Los VA con garantías ofrecen una estructura de pago relativamente única que vincula el riesgo financiero y de mortalidad del inversor. Los activos más comunes en este espacio son inversiones libres de riesgo, como bonos del tesoro o cuentas bancarias, acciones y productos tradicionales de seguros de vida y rentas vitalicias.

Para evaluar el impacto de estos activos en el nivel de incompletitud del mercado de VA, consideremos nuevamente nuestro mundo simple de cuatro estados. La figura 1 ilustra las posibles estructuras de pago tanto del VA (con una garantía de beneficio en vida) como de una cartera compuesta por otros activos. En particular, como indica el panel (a) de la figura 1, el VA es principalmente un vehículo de inversión cuyos rendimientos están vinculados al estado de la economía en general. Por lo tanto, los pagos son mayores en los estados de "buena economía". En los estados de "mala economía", la cuenta VA ha perdido valor. Sin embargo, debido a la garantía del beneficio en vida, el asegurador debe compensar las pérdidas del inversor si éste sobrevive. Por lo tanto, el inversor recibe un pago mayor en el estado "Malo/Vivo" que en el estado "Malo/Muerto". La figura 1(b) refleja los pagos de las opciones de inversión más comunes: las inversiones libres de riesgo (cuadrados azules) proporcionan el mismo pago en todos los estados; las acciones (triángulos rojos) ofrecen un pago adicional si a la economía le va bien; y una renta vitalicia tradicional (triángulo verde) genera pagos fijos si y sólo si el inversor está vivo.

Comparando los dos paneles de la Fig. 1, se puede ver que ninguna combinación de los activos del panel (b) puede replicar completamente el perfil de pago de un VA con garantía. Es decir, incluso con acceso irrestricto a cuentas bancarias, acciones y rentas vitalicias, el mercado en torno a los VA todavía está incompleto. Esto se debe a que la política VA proporciona un pago separado en el estado conjunto donde la economía es "mala" y el inversor está "vivo", mientras que una acción o una renta vitalicia tradicional puede discriminar los pagos sólo entre uno de los dos. dimensiones. Para lograr pagos específicos en cada uno de los cuatro estados conjuntos, el inversor necesita un tercer activo que cruce el riesgo financiero y de mortalidad. Los VA con garantías son esos activos y, por lo tanto, pueden ayudar a completar el mercado para los inversores que buscan protegerse financieramente contra el riesgo tanto económico como de mortalidad.

Sin embargo, también se puede ver en la figura 1 que los activos del panel (b) ayudan a completar el mercado de VA, posiblemente en gran medida. Con activos y acciones libres de riesgo únicamente (cuadrados azules y triángulos rojos), el inversor puede replicar la discrepancia general en los pagos del VA entre los estados de "buena economía" y "mala economía". Con rentas vitalicias y patrimoniales libres de riesgo (cuadrados azules y

pentágonos verdes), el inversor puede replicar la discrepancia general en los pagos del VA entre los estados "muertos" y "vivos".

Y si se le diera acceso a los tres activos (es decir, activos libres de riesgo, acciones y rentas vitalicias) simultáneamente, el inversor podría replicar el pago del VA aún más fielmente.

Esto plantea la pregunta de hasta qué punto el mercado VA está completo para un inversor típico. Es decir, ¿en qué medida su toma de decisiones óptima diferirá de la maximización del valor? Para responder a eso, implemento un problema de optimización dinámica para evaluar el comportamiento óptimo de un inversionista que posee una póliza VA con una cláusula GMWB, como un ejemplo popular y representativo de una garantía VA. En particular, comparo el comportamiento óptimo de retiro – a través de su impacto en la valoración de la garantía por parte del asegurador – bajo un enfoque neutral al riesgo en un mercado completo con aquel bajo un modelo de utilidad de ciclo de vida. Esto último refleja la situación (más realista) de un inversor de VA que se enfrenta a un entorno de mercado incompleto en el que las restricciones a las opciones de inversión externas no permiten una réplica perfecta de los pagos potenciales de VA.

La figura 1 sugiere que la discrepancia en los pagos del VA parece ser menos significativa entre los estados de mortalidad que entre los estados económicos. Es decir, el acceso al mercado de valores probablemente contribuya más a completar el mercado de VA que el acceso a las rentas vitalicias tradicionales. Además, los mercados de valores para inversores individuales tienden a ser más líquidos que el mercado de rentas vitalicias. Debido a restricciones computacionales en el modelo LC, por lo tanto le doy al inversionista acceso a acciones pero no a productos de seguros de vida y rentas vitalicias tradicionales. Mis resultados numéricos justifican en última instancia esta configuración, ya que encuentro que el acceso a las acciones completa suficientemente el mercado VA para el inversor a todos los efectos prácticos. En la siguiente sección, presento el marco del modelo y el procedimiento de implementación numérica. Posteriormente presento y discuto los resultados.

### 3. Modelado del comportamiento de retiro óptimo para VA+GMWB

Los productos VA+GMWB disponibles en el mercado estadounidense contienen un conjunto diverso de características. Se diferencian según las tasas y cómo se evalúan; tipos de garantía (devolución de la prima frente a incremento, así como la frecuencia de dicho incremento); el monto de retiro anual garantizado; cargos de entrega; opciones de (re)asignación de fondos; posibles exenciones de tarifas en caso de no retiros; y comprar créditos de pago; entre otros. Se pueden comprar tanto dentro como fuera de una cuenta de ahorros para la jubilación calificada. Modelo una política genérica VA+GMWB que refleja las características principales del producto y los criterios de decisión, pero hago algunas simplificaciones necesarias para la viabilidad computacional. Creo que estas simplificaciones son relevantes para las ideas clave del análisis.



Modelo el comportamiento óptimo de un inversionista que acaba de comprar una póliza VA+GMWB dentro de un plan de ahorro para la jubilación calificado.5 El inversionista también posee una cuenta de ahorro/inversión (no calificada). Obtiene utilidad del consumo anualmente. Por lo tanto, mientras está vivo, el inversionista elige cuánto retirar de la póliza VA, cuánto consumir y cómo asignar sus fondos en la cuenta de inversión externa.

contar. En el escenario de mercado incompleto, estas decisiones se toman conjuntamente al comienzo de cada año de política y con el fin de maximizar la utilidad esperada descontada del consumo actual y futuro. En un mercado completo, la cuenta externa del inversor y sus decisiones de consumo son irrelevantes para su comportamiento óptimo de retiro; por lo tanto, sólo se incorporará al modelo la decisión de retiro del inversor.

En esta sección, caracterizaré primero el mercado financiero y el riesgo de mortalidad del inversor. A continuación, describo el producto VA+GMWB, antes de exponer el problema de optimización del inversor en un modelo de ciclo de vida, así como su equivalente neutral al riesgo. Procedo con el método de valoración de la aseguradora, describo brevemente el procedimiento de implementación numérica y finalmente presento los valores utilizados para parametrizar el modelo.

### 3.1. Riesgo financiero y de mortalidad

El mercado financiero consta de un único activo riesgoso, con precio temporal  $t$   $S_t$ , y un activo libre de riesgo que se compone (continuamente) a una tasa anual  $r$ . El activo riesgoso no paga dividendos, sigue el modelo de Black-Scholes con volatilidad constante  $\sigma > 0$  y parámetro de deriva  $\mu \geq 0$ , y por tanto evoluciona según la ecuación diferencial estocástica  $dS_t$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t, \quad S_0 > 0, \quad (1)$$

donde  $(Z_t)_{t \geq 0}$  es un movimiento browniano estándar.

El inversor también se enfrenta a un riesgo de mortalidad idiosincrásico. Siguiendo la notación actuarial estándar,  $q_t$  denota la probabilidad condicional de que un individuo (vivo) de edad  $t$  muera en el año siguiente, es decir, antes de la edad  $t + 1$ , y  $tp_x$  denota la probabilidad de que un niño de  $x$  años sobreviva los próximos  $t$  años.

De acuerdo con la literatura actuarial, defino  $P$  como la medida del producto de la medida de probabilidad física del mercado financiero y la medida física de las tasas de mortalidad del inversor, y  $Q$  como la medida del producto de la medida neutral al riesgo para el riesgo financiero y la medida física del riesgo de mortalidad idiosincrásico.

### 3.2. Características del producto VA

A la edad  $x$ , el inversor compra una póliza VA+GMWB de  $T$  años con una prima única  $M$ . El dinero se coloca en un fondo mutuo que invierte en una combinación de los dos activos disponibles.

Los proveedores de VA generalmente limitan la exposición potencial del fondo a la renta variable para reducir el valor de la garantía (y mejorar su eficacia de cobertura), que actúa como protección a la baja de la inversión. Para reflejar esto, supongo que el fondo mantiene una exposición constante a acciones, por lo que una acción  $p \in (0, 1]$  se invierte en el activo riesgoso y el resto se asigna al activo libre de riesgo.

Sea  $A_t$  el valor de la cuenta VA en el momento  $t$ . Desde Estados Unidos Los VA no contienen cargos de venta, tenemos la condición inicial  $A_0 = M$ . En cambio, el asegurador utiliza una tarifa periódica para recuperar sus gastos de adquisición y cubrir sus costos administrativos.

<sup>5</sup> El uso de una cuenta calificada –a diferencia de Moenig y Bauer (2016)– reduce drásticamente el tiempo de cálculo, ya que no requiere la “base imponible” restante del VA como variable estatal adicional.

A diferencia de otros estudios, incluyo esta tarifa base del VA en nuestro modelo porque, como (Chen et al., 2008) y Sun et al. (2018) muestran: tiene un impacto sustancial en el valor de la cláusula GMWB. Además, la aseguradora cobra una tarifa de garantía por la cláusula GMWB.

Estas tarifas se evalúan continuamente a tasas anuales  $\mu$  y  $\sigma$ , base respectivamente, en proporción al valor concurrente de la cuenta VA, y se deducen directamente de la cuenta VA. Es decir, no son necesarias inyecciones de capital adicionales por parte del inversor. En los momentos en que no se realizan retiros, el valor de la cuenta VA evoluciona de la siguiente manera:  $dA_t$

$$dA_t = (\mu A_t - \text{base} - \text{guar}) dt + \sigma A_t dZ_t, \quad (2)$$

$$\text{con } \mu = \rho\mu + (1 - \rho)r \text{ y } \sigma = \rho\sigma. \quad VA = \rho\sigma.$$

La póliza VA incluye una cláusula GMWB de retorno de prima<sup>6</sup> que permite al asegurado retirar la inversión inicial  $M$  en cuotas anuales de hasta  $g$ , mientras la póliza permanece activa e independientemente del desempeño financiero del VA.

De este modo, los retiros se realizan directamente de la cuenta VA, si hay fondos suficientes disponibles. Es decir, si el titular de la póliza retira una cantidad  $w_t$  en el momento  $t$ , y si  $A_t^-$  denota el valor de la cuenta VA justo antes del retiro, entonces el valor de la cuenta VA inmediatamente después del retiro viene dado por

$$A_{t+} = (A_t - \text{peso})^+ + w_t, \quad (3)$$

donde  $(a)^+ \equiv \max\{a, 0\}$ . Si la cuenta VA no es suficiente para cubrir el retiro, entonces la aseguradora paga la diferencia, es decir

$$X_t^W := (\text{peso} - A_{t-})^+, \quad (4)$$

cargo a su fondo general. Entre las fechas de retiro  $t$  el valor  $A_t$  y  $(t+1)^-$ , con de la cuenta evoluciona según la ecuación. (2), de modo que:

$$A_{t+1}^- = A_t + (\mu A_t - \text{base} - \text{guar} - \frac{(\sigma VA)^2}{2} + \sigma VA \cdot \Delta Z_t), \quad (5)$$

donde  $\Delta Z_t = Z_{t+1} - Z_t$  sigue una distribución normal estándar.

El monto de retiro garantizado restante, cuyo tiempo- $t$  valor que denoto por  $G_t$ , para  $t = 1, 2, \dots, T$  –se ajusta también un retiro, a saber:

$$G_{t+1} = \left\{ (G_t - (\text{peso} - A_t)^+) + w_t, \text{ si } \text{peso} \leq A_t \right. \\ \left. (G_t - (\text{peso} - A_t)^+ - g), \text{ si } \text{peso} > g \right\}, \quad (6)$$

con  $G_1 = M$ . Es decir, en el caso de un retiro regular, el monto garantizado restante se reduce por el monto retirado, mientras que los retiros que exceden el monto garantizado anual  $g$  resultan en una reducción potencialmente más significativa del monto de retiro garantizado restante. Esta fórmula de ajuste (o una versión similar) es una práctica común y sirve para desalentar los retiros excesivos.

En los primeros años de la póliza, los retiros en exceso también están sujetos a un cargo de rescate a la tasa  $st$  que se aplica en proporción al monto en exceso retirado en el momento  $t$ . Además, la autoridad tributaria federal de EE. UU. impone una multa por retiro anticipado del 10% a todos los retiros antes de los 59.5 años. Es decir, tras un retiro de  $w_t$  en el tiempo  $t$ , el asegurado recibe un pago (antes de impuestos) de

$$\text{peso}_{\text{bruto}} = \text{peso} - (\text{peso} - g)^+ \cdot st - 0.1 \cdot [\text{peso} - (\text{peso} - g)^+ \cdot st] \cdot 1x + t < 59.5.$$

<sup>6</sup> Se puede implementar una función de aumento sin mucha complicación en un entorno neutral al riesgo, expresando el valor de la cuenta y el monto garantizado restante en relación con el monto garantizado “de referencia”, y actualizando todas las variables de estado en consecuencia en un paso a paso. decisión arriba. Sin embargo, en un modelo de ciclo de vida con una cuenta de inversión externa, esta relación no se extiende a la cuenta externa, de modo que aquí el modelo tendría que incluir no sólo el valor de la cuenta externa sino también el monto básico garantizado como variables de estado relevantes. Por lo tanto, para mantener la viabilidad computacional, implemento solo cláusulas de retorno de prima, para las cuales el monto básico garantizado permanece constante en el monto de la inversión inicial.

Si el titular de la póliza muere en el año de la póliza  $t$ , los beneficiarios reciben el valor de la cuenta VA al final del año de muerte, es decir

$$DBt = En-,$$

y la póliza termina. Si la póliza aún está activa al vencimiento, el titular de la póliza recibe el valor de la cuenta VA AT (o el monto anual garantizado, si es mayor) en un pago global:

$$wT = \max \{AT-, \min\{g, GT\}\}.$$

El VA está ubicado dentro de una cuenta de ahorros para la jubilación calificada y modelo los impuestos en consecuencia según la ley actual de EE. UU.: todas las contribuciones a dicha cuenta calificada son antes de impuestos, no se aplican impuestos mientras los fondos permanecen en la cuenta y todos los retiros de la cuenta se gravan como ingresos ordinarios. Si el inversor tiene una tasa marginal constante del impuesto sobre la renta de  $\tau$ , el monto del retiro después de impuestos viene dado por

$$\text{peso}_{\text{neto}} = \text{peso}_{\text{bruto}} \cdot (1 - \tau).$$

El impuesto sobre la renta se aplicará de manera similar al pago al vencimiento ( $w_t^{\text{bruto}} (1 - \tau)$ ) y al pago del beneficio por fallecimiento ( $DBt (1 - \tau)$ ).<sup>7</sup>

### 3.3. Optimización basada en utilidades

#### Cuenta de inversión externa

El inversionista también mantiene una cuenta de inversión separada, no calificada. Denoto el valor tiempo- $t$  de esta cuenta "externa" por  $O_t$ .

En las fechas de aniversario de la póliza, es decir, para  $t = 0, 1, \dots, T - 1$ , el asegurado elige la relación  $v_t \in [0, 1]$  que indica la inversión de capital de la cuenta (en el activo riesgoso del mercado) durante el año de póliza  $t + 1$ . El resto se invierte en el activo libre de riesgo. Todas las ganancias durante el año se gravan en el momento  $t + 1$  al tipo impositivo marginal (constante) sobre las ganancias de capital  $k$ . Es decir, entre fechas de aniversario de póliza, la cuenta exterior evoluciona de la siguiente manera:

$$O_{t+1} = O_t \cdot [(v_t \cdot \frac{St+1}{Calle} + (1 - v_t) \cdot e^r) - k \cdot (v_t \cdot \frac{St+1}{Calle} - 1)^+]. \quad (7)$$

En la fecha  $t$  de aniversario de la póliza, el inversionista recibe un ingreso  $I$ , retira  $w_t$  del VA y consume una cantidad  $ct > 0$  durante el año. Por tanto, el valor de la cuenta exterior se actualiza según:

$$O_{t+1} = O_t + I + w_t^{\text{neto}} - ct. \quad (8)$$

Tanto  $O_t$  como  $O_{t+1}$  son valores de cuenta después de impuestos, de modo que el monto total del legado del inversionista en caso de su muerte prematura en el año de póliza  $t$  está dado por

$$bt := DBt \cdot (1 - \tau) + O_t. \quad (9)$$

#### Preferencias del

inversor Siguiendo (por ejemplo) (Lockwood, 2012), el inversor se esfuerza por maximizar su utilidad esperada del consumo actual y futuro, utilizando un factor de descuento anual subjetivo  $\beta$ . Al comienzo de

<sup>7</sup> También implementé este modelo asumiendo la anualización total de los pagos del VA al vencimiento, y descubrí que este supuesto no alteraba los hallazgos principales. Además, asumo aquí que los beneficiarios también eligen el pago de suma global del VA (en lugar de continuar potencialmente con la cuenta de jubilación calificada, sujeta a las reglas de distribución mínima pertinentes), y que tienen la misma tasa marginal de impuesto sobre la renta que el titular de la póliza. A la luz de los hallazgos generales, creo que estas suposiciones también son inocuas.

En cualquier año dado, ella obtiene utilidad  $u_C(x)$  al consumir una cantidad  $x$  (después de impuestos), donde la función de utilidad  $u_C(\cdot)$  exhibe una aversión relativa al riesgo constante  $\gamma$ , por lo tanto, tiene la forma funcional.

$$u_C(x) = \frac{\gamma x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad (10)$$

con coeficiente relativo de aversión al riesgo  $\gamma$ .<sup>8</sup>

Para los legados, asumo que el monto del legado se convierte a perpetuidad (con pagos anuales a los beneficiarios, comenzando de inmediato). Por lo tanto, la utilidad para el inversor de legar una cantidad  $bt$  después de impuestos está dada por

$$u_B(bt) = B \cdot u_C(I^{\text{ben.}} + bt \cdot [1 - e^{-r}]) \cdot \frac{1}{1 - \beta}, \quad (11)$$

donde  $B$  refleja la fuerza del motivo del legado del inversionista,  $ben.$  y  $I$  es el ingreso anual futuro del beneficiario.

En el análisis de sensibilidad del modelo considero especificaciones alternativas a la utilidad del inversor proveniente del consumo y los legados, que describiré en su momento.

#### El problema de optimización del inversor

El inversionista toma decisiones anuales con respecto al monto de consumo  $ct$ , un posible retiro del VA  $w_t$  y el índice de asignación de capital  $v_t$  en la cuenta externa. El inversor obtiene utilidad del consumo y de los legados. Por lo tanto, su objetivo en el momento  $t$  es maximizar su utilidad esperada descontada, denotada por  $U_t$ , de todo el consumo potencial y los legados desde el momento  $t$  en adelante. Esta función de valor depende de las variables de estado  $At-$ ,  $Gt$  y  $O_t-$ , que resumo en el vector de estado  $yt = (At-, Gt, O_t-)$ .

Por tanto, el problema de optimización del inversor puede describirse  $T - 1$ ) recursivamente (para  $t = 1, \dots$ , mediante el siguiente Bellman ecuación:

$$U_t(yt) = \max_{ct, \text{peso}, v_t} u_C(ct) + \beta E_t^{\text{peso}, v_t} [q_{x+t} \cdot u_B(bt+1) + (1 - q_{x+t}) \cdot U_{t+1}(yt+1)], \quad (12)$$

sujeto a las condiciones de actualización (3), (5), (6), (7) y (8); las funciones de utilidad definidas por las ecuaciones (10) y (11); el importe del legado (9); el movimiento de activos dado por la ecuación (1); y las restricciones de la variable de elección

$$0 \leq ct \leq O_t - I + w_t \text{ y } 0 \leq v_t \leq 1, \text{ y } 0 \leq w_t \leq \max \{At-, \min\{g, Gt\}\}.$$

#### Condición terminal

Si el inversor está vivo cuando el VA vence en el momento  $T$  convierte ella todos sus ahorros, es decir

$$PESO := wT (1 - \tau) + OT-,$$

en una anualidad vitalicia, lo que le proporciona un pago constante antes de impuestos de  $WT/a^{\text{xx}}_{x+T}$  al comienzo de cada año (comenzando inmediatamente) durante el resto de su vida. El término  $a^{\text{xx}}_{x+T}$  se utiliza consistentemente con la notación actuarial estándar para indicar el valor presente esperado de \$1 pagado al comienzo de cada año durante el resto de la vida de una edad individual ( $x+T$ ), y se calcula como

$$a^{\text{xx}}_{x+T} = \sum_{t=0}^{\infty} t p_{x+T} e^{-rt}.$$

La parte de las ganancias del pago de la anualidad se gravará como ingreso, es decir, a la tasa  $\tau$ . En este caso, el WT sirve como impuesto del inversor.

<sup>8</sup> Estrictamente hablando, esta forma funcional se aplica sólo para  $\gamma = 1$ . El caso de  $\gamma = 1$  está representado por  $u_C(x) = \ln(x)$ .

base. La ley tributaria de EE. UU. prescribe que los pagos de anualidades que excedan  $WT/ex+T$  se consideran ganancias y, por lo tanto, se gravan como ingresos, inversionista en en nuestro país. Aquí,  $ex+T$  denota la esperanza de vida del Internos en , el caso a la tasa  $\tau$  según lo especificado por el Servicio de Impuestos Publiage  $x + T$  catión 590-B. Por lo tanto, el pago de la anualidad después de impuestos del inversionista es

$$c_t^{\text{neto}} := \frac{\text{Peso}}{a^{x+T} - \tau \cdot (\text{PESO}^{x+T} - \text{ex}+T)^+}.$$

Además, el inversor continúa recibiendo ingresos externos  $I$ . Por lo tanto, su utilidad anual procedente del consumo es  $u(C(c+I))$ , de modo que su utilidad<sup>neto</sup> en el tiempo  $T$  y por tanto la condición terminal de su problema de optimización (12) – está dada por

$$U_T(y_T) = u(C(c_t^{\text{neto}} + y_0)) \cdot \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t p_x + T \beta^t. \quad (13)$$

Valoración en el momento 0

Las condiciones iniciales del inversor son

$$A_0^+ = M; \quad G_1 = M; \quad O_0^+ = W_0, \quad (14)$$

donde  $W_0$  denota la riqueza fuera de la cuenta del inversionista en el momento de su compra de VA.

En el momento 0, el inversionista no realiza un retiro de su VA recién adquirido y solo elige el consumo óptimo  $c_0$  y la asignación de inversión externa  $v_0$  para maximizar su utilidad esperada descontada, similar a la ecuación. (12). Defino esta utilidad inicial como  $U_0$ , dada por

$$U_0 := \max_{c_0, v_0} u(C(c_0)) + \beta \cdot E_0 [q_x \cdot u(B(b_1)) + (1 - q_x) \cdot U_1(y_1)], \quad (15)$$

sujeto a las condiciones iniciales (14) y las condiciones de actualización (5) y (7), junto con las definiciones y restricciones de variables de elección antes mencionadas.

### 3.4. Valoración neutral al riesgo con impuestos

Adopto el marco SRNV de Moenig y Bauer (2016) para valorar la política VA+GMWB en un entorno neutral al riesgo, como un mercado completo equivalente al modelo de ciclo de vida descrito anteriormente. El modelo SRNV supone un mercado completo –tanto para el riesgo financiero como para el riesgo de mortalidad idiosincrásico– pero toma en cuenta el tratamiento fiscal preferencial del VA en relación con su cartera de réplicas.

En particular, considere un flujo de efectivo estocástico después de impuestos  $Y$  que ocurre en el momento  $t + 1$ . El valor subjetivo neutral al riesgo en el tiempo  $t$  de  $Y$  se da entonces como la cantidad de dinero (después de impuestos)  $X$  que debe colocarse en el momento  $t$  en una cartera y luego (re)invertido de tal manera que replica exactamente  $Y$  al final del año, después de que las ganancias actuales de la cartera replicante hayan sido gravadas en consecuencia. En este caso, el supuesto de un mercado completo garantiza que exista dicha estrategia de replicación.

Si el inversor tiene una tasa impositiva marginal constante sobre las ganancias de capital  $\kappa$  a la que se gravan anualmente las ganancias de la cartera, Moenig y Bauer (2016) muestran que el método SRNV produce un valor único  $X$  dado implícitamente por:

$$X = E_Q[Y] + \frac{\kappa}{1 - \kappa} \cdot E_Q[(Y - X)^+]. \quad (\text{dieciséis})$$

Para aplicar la fórmula SRNV al objetivo de este estudio, sea  $V_t$  el valor "subjetivo" en el tiempo  $t$  de la póliza VA+GMWB para el inversor, evaluado inmediatamente antes de la decisión de retiro del inversor en el tiempo  $t$  (similar a  $U_t$  en el modelo basado en la utilidad).

$V_t$  depende del valor de la cuenta VA  $A_t^-$  y del monto restante garantizado  $G_t$ .

Es decir, en este modelo de mercado completo el vector de estado es  $y_t = (A_t^-, G_t)$ .  $V_t$  es la suma del pago actual después de impuestos del VA (es decir,  $w_{net}$ ) y el valor de continuación

del VA después del retiro. Este último puede verse como el valor actual después de impuestos del VA al final del año, es decir, el valor subjetivo neutral al riesgo del valor del VA en el tiempo  $(t + 1)$ , que es el pago del beneficio por fallecimiento ( $DB_{t+1}(1 - \tau)$ ) en caso de fallecimiento, o  $V_{t+1}$  si el inversor sobrevive el año siguiente. Denoto el valor de continuación por  $V_t^-$  y lo determino implícitamente como el valor de  $X$  en la ecuación. (16) que corresponde a  $t$

$$Y = q_x + t \cdot DB_{t+1} \cdot (1 - \tau) + (1 - q_x + t) \cdot V_{t+1}(y_{t+1}).$$

El dinámica del inversor mejoramiento problema (para  $t = 1, \dots, T - 1$ ) es así

$$V_t(y_t) = \max_{\text{peso}} \frac{\text{neto}}{\text{peso}} + V_t^-, \quad (17)$$

sujeto a las condiciones de actualización (3), (5) y (6); el movimiento de activos dado por la ecuación. (1); la restricción de la variable de elección

$$0 \leq \text{peso} \leq \max\{A_t^-, \min\{g, G_t\}\};$$

y la condición terminal

$$V_T(y_T) = w_T(1 - \tau). \quad (18)$$

En el momento 0, no es necesaria ninguna optimización, ya que el riesgo inicial El valor neutral después de impuestos de la póliza VA+GMWB está dado por

$$V_0 := V_0^-, \quad (19)$$

utilizando las dos primeras condiciones iniciales de (14).

### 3.5. valoración de la aseguradora

El monto esperado de honorarios de garantía que el asegurador cobra- + y tiempo  $t - 1$  se aproxima tiempo  $(t + 1)$ – (para  $t = 0, 1, \dots$  cobra entre el ,

$$X_t^F := (\text{peso} - g)^+ \frac{\text{guar} + \text{st} +}{t \text{ base guar} +} \cdot \text{En} \cdot (1 - e - \text{base} - \text{guar}).$$

La primera parte de esta ecuación refleja las tarifas de retiro en exceso en el momento  $t$ , si corresponde, mientras que la segunda parte se aproxima a las tarifas adicionales de GMWB para el próximo año de la póliza. Por lo tanto, el impacto de la tasa agregada sobre el valor de la cuenta VA es similar al de un dividendo pagado continuamente sobre el precio de una acción (Milevsky y Posner, 2001). A cambio, el asegurador paga  $X$  en la ecuación. (4)—para cubrir el costo de la  $t^{\text{W}}$ —definido garantía de retiro, cuando sea necesario.

La cláusula VA+GMWB también se puede valorar de forma recursiva desde la perspectiva de la aseguradora. Para hacerlo, defino  $V_t^F$  como los valores presentes esperados de todos los próximos pagos de tarifas al asegurador y pagos de retiro del asegurador, respectivamente. Estos valores se evalúan inmediatamente antes de que se tome la decisión de retiro en el momento  $t$ , y dependen del vector de estado actual  $y_t$ , además de la decisión de retiro óptima del inversor  $w_t$ . Por lo tanto:  $(y_{t+1})$

$$\begin{aligned} V_t^F(y_t) &= X + m_t^{-r} [V(1 - q_x + t)EQ_t \frac{F}{t+1}] \\ V_t^W(y_t) &= X + m_t^{-r + m_i} [V(1 - q_x + t)EQ_t \frac{W}{t+1}(y_{t+1})], \end{aligned} \quad (20)$$

sujeto a las condiciones de actualización (3), (5), (6), (7) y (8), y a las condiciones terminales

$$\begin{aligned} V_t^F(y_T) &= 0 \\ V_t^W(y_T) &= (\min\{g, G_T\} - A_T^-) + \end{aligned} \quad (21)$$

Las condiciones iniciales para la aseguradora se dan en (14), con las estadísticas de valoración inicial dadas por  $(y_1)$

$$\begin{aligned} V_0^F &= X + m_0^{-r} (1 - q_x) m_i \frac{g}{0} [V_1^F] \\ V_0^W &= m_i^{-r} (1 - q_x) m_i \frac{g}{0} [V_1^W(y_1)]. \end{aligned} \quad (22)$$

Si el inversor optimiza dentro del marco del SRNV, lo anterior hace referencia al valor de la cuenta de inversión externa  $O_t$

se puede dejar caer; en todos los demás aspectos, la metodología de valoración del asegurador es idéntica.

Por último, defino el excedente inicial de la aseguradora de la cláusula GMWB como

$$\Sigma_0 := V_0 - FW_0.$$

3.6. Implementación numérica

Dado que los problemas de optimización del inversor no tienen soluciones de forma cerrada, los implemento numéricamente mediante programación dinámica recursiva. Esto implica los siguientes pasos:

- (i) Discretice la cuadrícula del espacio de estados que consta de las variables  $A_t \in [0, \infty)$ ,  $G_t \in [0, M]$  y  $O_t \in [0, \infty)$  para crear una cuadrícula tridimensional discreta. Sea  $G$  el conjunto de todos los puntos de la cuadrícula. (ii) Establecer condiciones terminales:  
para cada punto de la cuadrícula  $(A, G, O) \in G$ ,  $(A, G, O)$   
Calcule  $U_t(A, G, O)$  usando la ecuación. (13), así como  $V_t$  y  $V_t^F$   $W_t(A, G, O)$  usando la ecuación.
- (21). (iii) Optimización recursiva: para cada  $t = T - 1, T - 2, \dots, 1$ , y dentro de cada paso de tiempo  $t$  para cada punto de la cuadrícula  $(A, G, O) \in G$ :
  - Resolver el problema de optimización del inversor especificado por la Ec. (12), calculando así  $w_t$  y  $U_t(A, G, O)$ . Aproximar la distribución de los rendimientos de los activos (es decir,  $St+1/St$ ) utilizando la cuadratura de Gauss-Hermite; y aproximar los valores de utilidad de fin de período  $U_{t+1}(\cdot)$  con interpolación lineal entre los valores de utilidad calculados en los puntos de la cuadrícula durante el paso de tiempo anterior  $(t + 1)$ .
  - Calcule  $V_t$ . De  $V_t^F(A, G, O)$  y  $V_t^W(A, G, O)$  usando la ecuación. este modo, utilice los valores de  $w_t$ ,  $c_t$ , el (20). y  $v_t$  que resuelven problema de optimización del inversor en este punto de la cuadrícula. Nuevamente, confíe en la cuadratura de Gauss-Hermite y la interpolación lineal sobre los valores de la cuadrícula temporal  $(t + 1)$  para aproximar la distribución del rendimiento de los activos y los valores de continuación de fin de año, respectivamente.
- (iv) Determine los valores iniciales para el inversor:  $U_0$ , utilizando Ec. (15)—y asegurador— $V_0^F$  y  $V_0^W$ , usando la ecuación. (22)—basado en condiciones iniciales (14).

Consideraciones computacionales

La implementación numérica del problema de optimización basada en la utilidad es computacionalmente intensiva, debido a las tres variables de estado y las tres variables de control, así como a la larga madurez de la política VA. Por lo tanto, es crucial seleccionar una cuadrícula de espacio de estados que sea lo suficientemente fina, pero no innecesariamente. Además, puede resultar beneficioso imponer restricciones razonables a las variables de elección. En particular, restringí el monto de retiro  $w_t$  a algunas opciones posibles, incluido 0, el monto anual garantizado  $\min\{g, G_t\}$  y el valor de la cuenta VA  $A_t$  (que corresponde al rescate de una póliza); Busqué la cantidad de consumo óptima  $c_t$  en múltiplos de \$1000 (con un tamaño de paso mayor para un consumo superior a \$300 000); y solo permití que la asignación de inversión  $v_t$  fuera un porcentaje entero.

Comprobé que todas estas restricciones tienen un impacto insignificante en el comportamiento óptimo del inversor y en la valoración del producto en estos modelos.

Incluso con estas simplificaciones y utilizando 32 núcleos en una estación de trabajo de 3,0 GHz, el problema de optimización basado en utilidades (codificado en Matlab con una paralelización relativamente eficiente) tarda más de 4 horas en completarse. En cambio, en las mismas condiciones, el modelo SRNV finaliza en aproximadamente 10 s.

3.7. Opciones de parámetros

Para facilitar la referencia, todas las opciones de parámetros para la implementación numérica de los modelos de optimización anteriores se proporcionan en la Tabla 1.

Para el escenario base, considero a una persona de 60 años que acaba de comprar una póliza VA de \$100,000 con una cláusula adicional GMWB de retorno de la prima del 7%. La tarifa base de VA es de 100 puntos básicos; representa los gastos y costos administrativos de la aseguradora, y está aproximadamente en línea con lo que las aseguradoras cobran por dichos productos (aunque existe una heterogeneidad considerable, véase Moenig y Bauer, 2016). La tasa de la tarifa de garantía es de 70 puntos básicos, que cubre aproximadamente el costo de la cláusula GMWB en este escenario base.

El dinero se coloca en un fondo mutuo que mantiene una exposición accionaria del 80%. Esto refleja la práctica común de los proveedores de VA de restringir las opciones de inversión (específicamente, la exposición a acciones) en los casos en que el asegurado elige una cláusula adicional de garantía como una GMWB (Moenig y Bauer, 2016). La póliza vence después de 20 años y, como es típico en los VA de acciones B, el tipo de producto más vendido, tiene un programa de tarifas de rescate decrecientes de 7 años. Las tasas de mortalidad del inversionista siguen la Tabla Básica IAM de 2012 de pensionistas individuales de la Sociedad de Actuarios - Mujer.

Los parámetros impositivos del inversionista se toman de Moenig y Bauer (2016) (tasa impositiva marginal sobre la renta del 30% y tasa impositiva marginal sobre las ganancias de capital del 23%), y la esperanza de vida relacionada con los impuestos al vencimiento está prescrita por la Publicación 590-B del Servicio Interno de EE. UU. Servicio renovado.

Los parámetros del mercado financiero se basan en los rendimientos históricos del índice S&P 500 y las tasas de las Letras del Tesoro a 3 meses entre 1928 y 2018. Utilizando promedios geométricos, durante este período de tiempo, el índice creció aproximadamente un 9% anual, con una volatilidad anual de casi el 20%, y las letras del Tesoro se acumularon a aproximadamente el 3,3% anual.10 Para reflejar el reciente clima de bajas tasas de interés, utilizo una tasa libre de riesgo del 3% en el escenario base de nuestro modelo.

Brown y Poterba (2006) infieren de la Encuesta de Finanzas del Consumidor de 2001 que más del 70% de todos los VA de Estados Unidos en ese momento eran propiedad de hogares en el decil más alto de riqueza, y casi el 90% eran propiedad de los dos deciles más altos. En 2017, el percentil 90 de riqueza entre los hogares estadounidenses era de casi 1.200.000 dólares, y el percentil 80 era de aproximadamente 500.000 dólares.11 Con base en esta información, supongo que la riqueza inicial (externa) del inversor es de 1.000.000 de dólares.

Supongo además que el inversor está (en gran medida) jubilado y recibe sólo un modesto ingreso anual después de impuestos de 25.000 dólares (por ejemplo, a través de beneficios de jubilación del Seguro Social, distribuciones de cuentas IRA, etc.). Además de sus ingresos, vive de su riqueza actual y de sus posibles pagos del VA.

Al igual que con la forma de las funciones de utilidad, sigo (Lockwood, 2012) para su parametrización. En particular, el inversor tiene una aversión moderada al riesgo con un coeficiente CRRA de 2,0, su tasa de descuento subjetiva es idéntica a la tasa de interés del mercado y el ingreso anual del beneficiario es igual al suyo. Además, el

9 Este algoritmo se aplica al modelo de ciclo de vida. La implementación de la optimización SRNV sigue el mismo procedimiento, excepto que se eliminan todas las referencias a la cuenta de inversión externa  $O_t$ , de modo que la cuadrícula del espacio de estados es bidimensional. También se pueden ignorar las referencias a  $c_t$  y  $v_t$ . Además,  $U_t(\cdot)$  se reemplaza por  $V_t(\cdot)$ , y las referencias a las Ecs. (12), (13) y (15) se reemplazan por las ecuaciones. (17), (18) y (19), respectivamente.

10 Fuente: [http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New\\_Home\\_Page/datafile/histretSP.html](http://pages.stern.nyu.edu/~adamodar/New_Home_Page/datafile/histretSP.html). 11 Fuente: <https://dqydj.com/net-worth-brackets-wealth-brackets-one-percentaje/>.



tabla 1

Elección de parámetros para implementación numérica.

Parámetro	Descripción	Base	Sensibilidad
Especificación del contrato VA+GMWB			
M	Prima única de VA Participación en la	100.000	
	asignación de capital Tasa de	80%	100%
base p	tarifa base de VA	100 puntos básicos	
— guar	Tasa de tarifa de	10 puntos por asegurado	
g	GMWB Monto de retiro anual garantizado Tasa de	7000	
st	tarifa de retiro/exceso de retiro Tiempo hasta el	7%, 6%, . . . , 1%; 0 para $t \geq 7$	
t	vencimiento (años)	20	25
Impuestos			
T	Tasa marginal del impuesto sobre la renta	30%	35%
k	Tasa impositiva sobre las ganancias de capital marginales	23%	25%
ex+T	Esperanza de vida al vencimiento (años)	13,4	(equilibrado)
Mercado financiero			
r	Tasa libre de riesgo	3%	4%
$\sigma$	Volatilidad del activo riesgoso	20%	25%
$\mu$	Tasa de crecimiento esperada del activo riesgoso	9%	(equilibrado)
Características y preferencias de los inversores			
X	Edad de inicio	60	70
qx+t	Tasas de mortalidad	2012 Cuadro Básico IAM – Femenino	0
W0	Riqueza exterior en el momento 0	1.000.000	500.000; 100.000
I	Ingresos anuales futuros (después de impuestos)	25.000	50.000
$\gamma$	parámetro CRRRA	2,0	3,0
$\beta$	Factor de descuento subjetivo	$m_i^{-\tau}$	0,90
B	Fuerza del motivo del legado	1,0	0,0
$I^{ben.}$	Ingresos del beneficiario	25.000	50.000

La fuerza del motivo del legado del inversionista es 1.0, es decir, ella valora el consumo de sus beneficiarios tanto como el suyo propio.

Relajo estos parámetros – uno a la vez – en la sensibilidad análisis, según las especificaciones de la última columna del [Tabla 1](#).

4. Resultados

Implemento los problemas de optimización del inversor y la correspondiente valoración de garantía del proveedor VA, tal como se describe en el apartado anterior. Esta sección comienza con un breve análisis. del caso base, es decir, la parametrización descrita en el tercera columna de [la Tabla 1](#), contrastando los hallazgos del ciclo de vida optimización con su equivalente neutral al riesgo, el enfoque SRNV. Luego varío los parámetros de entrada relevantes y las características que son exclusivos del modelo de ciclo de vida. Estos resultados se muestran en [Tabla 2](#). Por último, considero variaciones a la política de VA así como los tipos impositivos del inversor. Estas variaciones también impactan el SRNV enfoque, y los resultados de valoración correspondientes se muestran en la [Tabla 3](#).

4.1. Caso base

Los resultados de la parametrización de referencia se muestran en columnas [1] y [2] de [la Tabla 2](#) para el SRNV y el caso del ciclo de vida, respectivamente.

Encuentro que el valor neutral al riesgo después de impuestos del VA de \$100,000 La póliza ronda los 78.000 dólares. Es decir, la póliza vale alrededor de 78 centavos por cada dólar de inversión. Esto excede el después de impuestos valor de la inversión si ésta fuera retirada del cuenta calificada en el momento 0, que es  $(1 - \tau)$ , es decir, 70 centavos. Por lo tanto, el método de valoración utilizado en este estudio es consistente en el sentido de que la política VA es una inversión que vale la pena, al menos al menos en comparación con la cartera replicante. Como resultado, el El comportamiento de retiro óptimo predicho por este modelo puede ser tomado en serio.

Los retiros del inversionista representan casi \$8,500 en pasivos de la cláusula GMWB (en términos actuales esperados neutrales al riesgo). términos de valor). La comisión de garantía de 70 pb es (justo) suficiente para cubrir estos costos, lo que resulta en un pequeño superávit de \$325 para el VA

proveedor en la configuración SRNV. La columna [2] de [la Tabla 2](#) muestra que el Los resultados de la valoración bajo la optimización del ciclo de vida son muy similares. con un valor de garantía ligeramente mayor y menos pagos de tarifas, resultando en un superávit de \$138.

A modo de comparación, un aumento de un punto básico en la comisión de garantía corresponde a aproximadamente un aumento de \$30 en el valor de GMWB y un aumento de \$60 en el excedente de la garantía del asegurador. Es decir, la optimización neutral al riesgo se aproxima al ciclo de vida. modelo muy de cerca, con la discrepancia en el superávit (\$187) que representa menos del 0,2% del monto de la inversión o alrededor de 3 puntos básicos en la comisión de garantía.

Esta proximidad también se ilustra en [la Fig. 2](#): el comportamiento óptimo de retiro del inversor es muy similar durante el ciclo de vida. (línea roja discontinua) y la optimización SRNV (línea azul continua) acercarse. En particular, lo óptimo es que el inversor retire el importe anual garantizado cuando la garantía es en dinero, es decir, cuando el valor de la cuenta está por debajo del resto garantizado cantidad (en esta figura,  $G_t = 100$ ). Si valor de cuenta y garantía base están cerca en el momento  $t = 10$ , el inversor realiza un retiro excedente de alrededor de cuatro veces el monto garantizado. esto se mueve la garantía más profundamente en el dinero, a un restante garantizado asciende a unos 70.000 dólares, lo que garantiza que el inversor pueda retirar el importe anual garantizado en cada uno de los restantes diez años de contrato.<sup>12</sup> En particular, el comportamiento óptimo de retiro es

<sup>12</sup> En el modelo de ciclo de vida base, el asegurado tiene una motivación adicional retirar casi la mitad del monto garantizado si el valor de la cuenta  $A_t$  es aproximadamente igual a la base de beneficios  $G_t$ . Este patrón está presente en la mayoría configuración del ciclo de vida (ver [Fig. 3](#)), con excepción de los casos sin legado motivo ( $B = 0$ ) o cuando el beneficiario tiene mayores ingresos ( $I^{ben.}$ ). Sobre el Por otro lado, el "pico" se produce en una región extendida bajo el ([Ameriks et al., 2011](#)) parametrización que conlleva un motivo de legado mayor. Esto sugiere que la motivación del asegurado para el retiro adicional en estos Las circunstancias podrían deberse a su preocupación financiera por sus dependientes/herederos. Ceteris paribus, si está más preocupada por su legado, entonces coloca menos valor en el jinete GMWB, que solo es valioso mientras está viva. Por lo tanto ella podría estar dispuesta a sacrificar algún valor de garantía (haciendo un exceso retiro en relación con la cantidad óptima) con el fin de tener más dinero garantizado estará disponible como legado (en caso de que fallezca en los próximos años y considerando que la cuenta VA podría perder valor debido a la inversión de capital subyacente, mientras que ella puede invertir los retiros libre de riesgos en la cuenta externa).

Tabla 2  
Resultados de la valoración: línea de base y sensibilidad a las preferencias.

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
	SRNV	Base	W0 = 500K	W0 = 100K	Yo = 50K	γ = 3
V0 / U0 (-10-8 )	77.954	-31.512	-44.357	-68.166	-22.900	-0,2378
V0 <sup>F</sup>	8772	8605	8528	8283	8556	8591
V0 <sup>W</sup>	8447	8467	8471	8459	8464	8450
Σ0	325	138	57	(176)	92	141
Δ Excedente		(187)	(268)	(501)	(232)	(183)
	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
	β = 0,90	I <sup>ben.</sup>	B = 0	americanos	Inkman	no _
U0 (-10-8 )	-11.207	-28.485	-22.329	-0,5516	42.719-108	-80.658
V0 <sup>F</sup>	8553	8711	8755	8085	8678	8092
V0 <sup>W</sup>	8479	8461	8453	8238	8488	6390
Σ0	74	250	302	(153)	190	1702
Δ Excedente	(251)	(75)	(23)	(478)	(134)	1377

Nota: La tabla muestra la valoración de la cláusula GMWB según el comportamiento óptimo de retiro según el especificación en la parte superior de cada columna [1] a [12]. La columna [1] se basa en el enfoque SRNV, mientras que las columnas [2] a [12] se basan en el modelo de ciclo de vida, con la columna [2] como parametrización de referencia de la [Tabla 1](#). Las columnas [3] a [9] muestran pruebas de sensibilidad, variando un parámetro a la vez en relación con los supuestos de referencia. (ver [Tabla 1](#)). Las columnas [10] y [11] representan especificaciones de modelos alternativas, basadas en calibraciones empíricas, por [Ameriks et al. \(2011\)](#) e [Inkmann et al. \(2010\)](#), respectivamente. La columna [12] asume una optimización del ciclo de vida sin una cuenta de inversión externa. V0 es el valor neutral al riesgo después de impuestos del producto VA+GMWB en el modelo SRNV, mientras que U0 representa la utilidad general en el tiempo 0 del inversor a partir de los modelos de ciclo de vida. V0<sup>F</sup> es el valor esperado de tiempo-0 de los pagos de la tasa de garantía y V0<sup>W</sup> es el valor esperado en el tiempo 0 de los pagos de GMWB. Σ0 es el del asegurador excedente de la cláusula GMWB. Estas cantidades se definen en la Sección 3. Por último, Δ Excedente muestra la desviación en excedente entre el modelo de ciclo de vida y la versión neutral al riesgo, es decir, la columna [1].

Tabla 3  
Resultados de valoración: sensibilidad a los parámetros que impactan la valoración del mercado completo.

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]
	Base	x = 70	T = 25	con GMDB ρ = 100% σ = 25%			r = 4%	τ = 35%	k = 25%	qx = 0	Sin impuestos
SRNV:											
v0	77.954	76.670	79.082	78.661	84.559	84.559	78.235	72.386	80.212	78.836	98.177
V0 <sup>F</sup>	8772	7877	10.512	8934	9184	9184	9379	8772	9051	9356	3542
V0 <sup>W</sup>	8447	6768	8996	8359	11.067	11.067	5592	8447	8276	9618	6778
V0 <sup>D</sup>				1334							
Σ0	325	1109	1516	575	(1883)	(1883)	3787	325	775	(262)	(3236)
Ciclo vital:											
U0 (-10-4 )	(3.1512)	(3.9730)	(3.6610)	(3.1493)	(3.1405)	(3.1378)	(2.3720)	(3.1616)	(3.1877)	(2.475)	(2.6830)
V0 <sup>F</sup>	8605	7564	10.170	9112	9142	9154	9312	8607	8986	9276	3236
V0 <sup>W</sup>	8467	6797	9029	8123	11.055	11.053	5620	8466	8276	9628	5687
V0 <sup>D</sup>				1392							
Σ0	138	767	1141	989	(1913)	(1899)	3692	141	710	(352)	(2,451)
Δ Excedente	(187)	(342)	(375)	415	(31)	(discrepancia)	(95)	(184)	(discrepancia)	(90)	786

Nota: La tabla muestra la valoración de la cláusula GMWB en función del comportamiento de retiro óptimo según la especificación en la parte superior de cada columna, [1] a [11]. Dentro de cada columna, se muestran los resultados tanto para el enfoque SRNV como para el modelo de ciclo de vida, y la fila inferior (Δ Excedente) refleja la diferencia en la cobertura de la aseguradora. excedente entre los dos enfoques. Especificaciones para la parametrización de referencia (columna [1]) y todas las pruebas de sensibilidad (columnas [2], [3] y [5] a [10], variando un parámetro a la vez) se proporcionan en la [Tabla 1](#). La columna [4] considera el caso en el que el VA también contiene una garantía de beneficio por muerte con devolución de la prima. (GMDB), y la columna [11] muestra los resultados bajo un comportamiento óptimo sin consideraciones fiscales (es decir, τ = κ = 0). V0 es el valor neutral al riesgo después de impuestos del VA+GMWB producto, mientras que U0 representa la utilidad general del tiempo-0 del inversor del modelo de ciclo de vida. V0<sup>F</sup> es el valor esperado en el tiempo-0 de los pagos de la tarifa de garantía y V0<sup>W</sup> es el valor esperado en el tiempo 0 de los pagos de GMWB. Σ0 es el excedente de la aseguradora de la cláusula GMWB. Estas cantidades se definen en la Sección 3.

considerablemente diferente si el inversor siguiera una estrategia de valoración estándar neutral al riesgo, es decir, sin impuestos (línea verde punteada en la [figura 2](#)). Lo más significativo es que en este caso el asegurado quiere renunciar a su póliza cuando la garantía se mueva "fuera del dinero" (es decir, cuando At > Gt). Esto es particularmente pronunciado en tiempo t = 10 cuando ya no tiene que pagar una tarifa de rescate. En el caso de los impuestos, en cambio, la rendición es costosa porque desencadena pagos de impuestos inmediatos y obliga al asegurado a renunciar a posibles beneficios fiscales futuros. Estas ideas son similares a

los de [Moenig y Bauer \(2016\)](#), que estudian la abstinencia óptima comportamiento para una póliza VA+GMWB en una cuenta no calificada .

4.2. Sensibilidad a las preferencias y características financieras personales.

Las columnas [3] a [9] de la [Tabla 2](#) muestran la valoración de GMWB resultados bajo el modelo de ciclo de vida para cambios individuales en el preferencias, ingresos y riqueza de los inversores. En todos los casos de sensibilidad, los resultados son bastante cercanos a los del modelo SRNV (columna

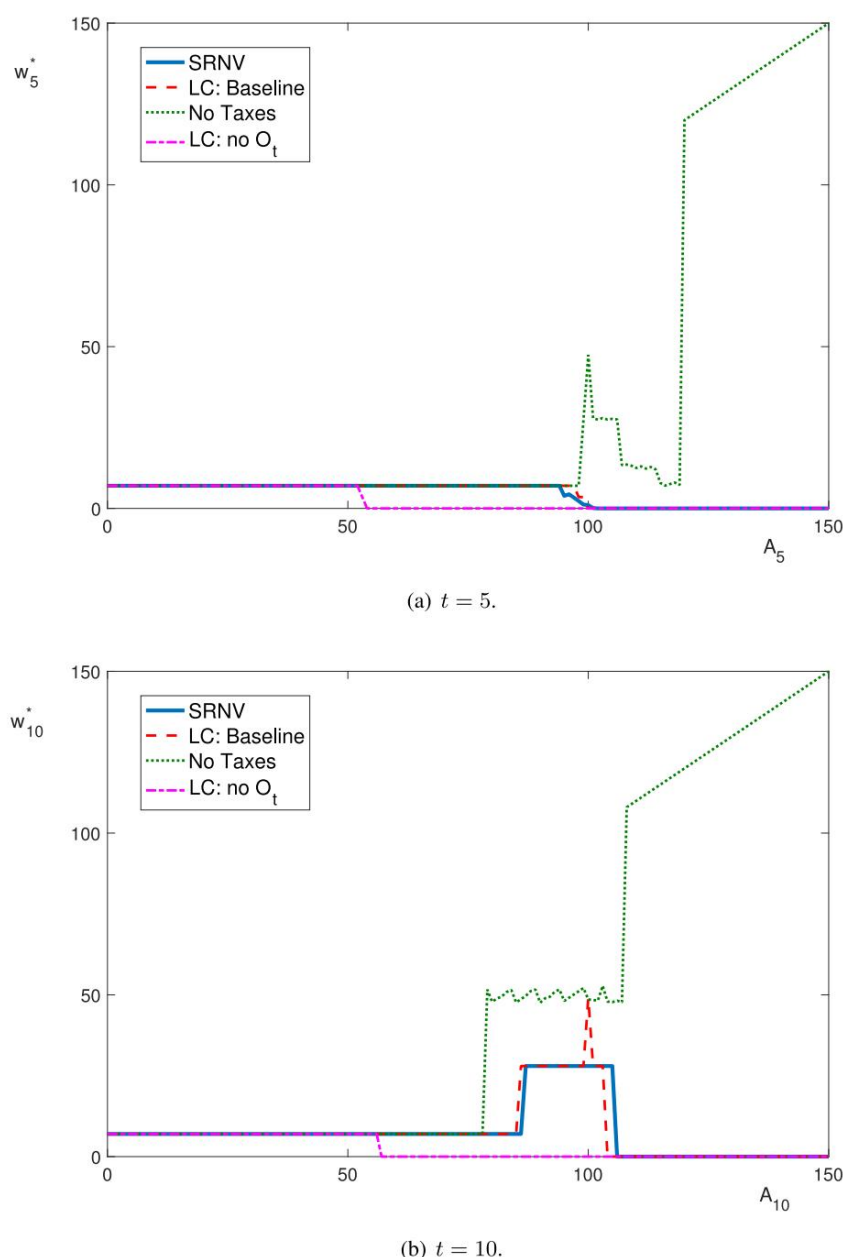


Fig. 2. Estrategia de retirada óptima (valor basal). Nota: Todas las unidades están en \$1,000. La figura muestra la estrategia de retiro óptima del inversor  $w$  en función del valor de la cuenta VA  $A_t$  en los momentos  $t = 5$  y  $t = 10$ , con el monto restante garantizado y (cuando corresponda) el valor externo de la cuenta en el nivel inicial, es decir:  $G_t = 100$ ,  $O_t = 1.000$ . Las diferentes líneas representan diferentes modelos de optimización: el enfoque SRNV; el modelo de ciclo de vida; una valoración estándar neutral al riesgo y sin impuestos; y un modelo de ciclo de vida que no incluye una cuenta externa. Todos los parámetros se establecen según las especificaciones básicas de la Tabla 1.

[1]) y el caso de referencia del ciclo de vida (columna [2]), con desviaciones en el excedente del proveedor generalmente alrededor o por debajo de \$250, es decir alrededor de cuatro puntos básicos en la tarifa de garantía.<sup>13</sup> Se trata de un caso menor

<sup>13</sup> Curiosamente, los modelos de ciclo de vida tienden a reducir el excedente de la aseguradora en relación con el enfoque SRNV. Si bien esto no tiene por qué ser así (en teoría o en la práctica), ciertamente es un resultado plausible. La presencia de impuestos crea fricciones en el mercado que incentivan al asegurado a desviarse del comportamiento de maximización del valor/minimización del excedente (que se muestra gráficamente en las líneas verdes punteadas de la Figura 2 y numéricamente en la columna [11] de la Tabla 3). Agregar carácter incompleto al mercado significa que el asegurado ahora también tiene que preocuparse por suavizar su consumo (entre otras cosas), lo que le resta incentivo para minimizar los pagos de impuestos. Como resultado, el tomador del seguro puede terminar comportándose de una manera (ligeramente) menos favorable para el asegurador, como sugieren los resultados anteriores en el contexto de este estudio.

discrepancia, tanto en términos absolutos como en relación con el impacto de otros parámetros del modelo (ver más abajo). E incluso cuando la riqueza externa del inversionista se reduce sustancialmente de modo que una gran parte de sus inversiones están inmovilizadas en el VA (ver la columna [4] en la Tabla 2 y la línea naranja discontinua en la Fig. 3(a)), su comportamiento óptimo todavía está razonablemente cerca del caso neutral al riesgo. La figura 3 confirma estas ideas al demostrar que, de hecho, es su comportamiento óptimo el que se asemeja al enfoque SRNV, y no sólo los valores de garantía y el excedente para la aseguradora. Por lo tanto, estos hallazgos sugieren que el mercado en torno a los productos VA+GMWB está en gran medida completo para un inversor típico.

Esto es consecuencia de la disponibilidad de una cuenta de inversión externa. La columna [12] de la Tabla 2 ilustra el caso en el que

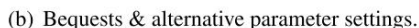
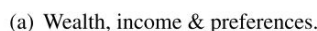


Fig. 3. Estrategia óptima de retirada (sensibilidad). Nota: Todas las unidades están en \$1,000. La figura muestra la estrategia de retiro óptima del inversionista  $w_t$  —en función del valor de la cuenta VA  $A_t$ — en el momento  $t = 10$ , con el monto restante garantizado y el valor externo de la cuenta en el nivel inicial, es decir:  $G_t = 100$ ,  $O_t = 1,000$  (excepto por la línea naranja discontinua en el panel (a) donde  $O_t = 100$ ). La línea azul sólida y gruesa refleja la optimización bajo el enfoque SRNV, mientras que las otras líneas son sensibilidades del modelo de ciclo de vida de referencia (con todos los parámetros distintos del indicado siendo idénticos a las especificaciones de referencia de la Tabla 1). Se pueden encontrar más detalles sobre las sensibilidades en la Sección 4.2.

tiene acceso a oportunidades externas de ahorro e inversión, es crucial tenerlas en cuenta al modelar el comportamiento de los asegurados del VA en un entorno de mercado incompleto.

## Especificaciones de preferencia

alternativas Como verificación adicional de solidez, implemento dos especificaciones de preferencia alternativas basadas en modelos de ciclo de vida que han sido calibrados empíricamente para ahorros de jubilación individuales y decisiones de legado.

Ameriks et al. (2011) asumen en gran medida la misma configuración que yo (EUT-CRRA) y se basan en el mismo procedimiento de implementación, excepto que la función de legado del inversor se define como

$$u_B(h) = \frac{1}{1 + \frac{B}{B_0}} \quad \text{por ejemplo}$$

donde  $B$  todavía indica la fuerza del motivo del legado del inversor, y el parámetro adicional  $\psi$  puede interpretarse como el grado en que los legados son bienes de lujo. Utilizando un coeficiente de aversión al riesgo de referencia de  $\gamma = 3$ , su calibración (teniendo en cuenta tanto los datos de consumo como las respuestas de la encuesta) arroja los parámetros del modelo de mejor estimación  $B = 47,6$  y  $\psi = \$7280$ .

Inkman et al. (2010) estudian la demanda del mercado de anualidades voluntarias en el Reino Unido con un modelo de ciclo de vida basado en las preferencias de Epstein y Zin (1991). En particular, la función de utilidad del inversor se define recursivamente como:

$$U_t(y_t) = \max_{c_t, p_t} \left\{ (1 - \beta) c_t^{\frac{1}{1-\psi}} + \beta \left( \mathbb{E}_t \left[ q_{x+t}(b_{t+1}) \right] \right)^{\frac{1}{1-\psi}} \right\}^{\frac{1-\psi}{1-\psi}} \quad (23)$$

Aquí,  $\psi$  denota la elasticidad de sustitución intertemporal. En el problema de optimización del inversor, la ecuación (23) reemplaza la ecuación (12).

Además, la condición terminal (13) se reemplaza por

$$U_T(AT, GT, OT) = \alpha T \cdot (c_T^{\frac{1}{1-\psi}} + y_T) \quad (24)$$

donde  $\alpha_t$  (para  $t = T, T+1, \dots, \omega-1$ ) se define recursivamente como

$$\alpha_t = \left\{ 1 - \beta + \beta \left( 1 - q_{x+t} \right)^{\frac{1}{1-\psi}} \right\}^{\frac{1-\psi}{1-\psi}}$$

$\omega$  denota la edad máxima que puede alcanzar el inversor (aquí: 120), y la condición terminal es  $\alpha_\omega = 0$ . La prueba de la ecuación (24) se puede encontrar en el Apéndice. Al calibrar el modelo con datos microeconómicos de los accionistas del Reino Unido, Inkman et al. (2010) obtienen los siguientes parámetros:  $\beta = 0,99$ ,  $\gamma = 5$ ,  $\psi = 0,4$  y  $B = 6,0$ .

Los resultados de la valoración según Ameriks et al. (2011) y Inkman et al. (2010) las especificaciones se muestran en las columnas [10] y [11] de la Tabla 2, respectivamente. Las estrategias de retiro óptimas del inversor se representan gráficamente (para un caso representativo) en la Fig. 3 (b). Estos números e ilustraciones confirman las ideas anteriores de que el comportamiento óptimo de retiro (y, por lo tanto, el valor de la cláusula GMWB) no depende de las preferencias no observables del inversor y, en cambio, puede modelarse en un marco neutral al riesgo (aunque teniendo en cuenta el impuesto del producto). beneficios, cuando corresponda).

#### 4.3. Sensibilidad a las características del contrato, parámetros del mercado financiero e impuestos.

A continuación, considero las variaciones de los parámetros que también pueden afectar el método de valoración (subjetivo) neutral al riesgo. Esto incluye las especificaciones de los contratos de VA y los parámetros del mercado financiero, pero también los tipos impositivos marginales del inversor. Los resultados se muestran en las columnas [2] a [10] de la Tabla 3, con el enfoque SRNV en la parte superior y el modelo de ciclo de vida correspondiente (utilizando las especificaciones de preferencia de referencia del inversor de la Tabla 1) en la parte inferior.

Encuentro que en todos los casos, los resultados del ciclo de vida están bastante cerca de su equivalente neutral al riesgo, con una diferencia en el excedente que asciende como máximo a 415 dólares de una inversión de 100.000 dólares, lo que corresponde a alrededor de 7 puntos básicos en la tarifa de garantía. Nuevamente, esto es relativamente menor, especialmente considerando la sensibilidad del valor GMWB y el excedente con respecto a otras especificaciones del modelo. Por ejemplo, comparar el excedente de GMWB de las columnas [4] y [5] con el de la columna [1] sugiere que los \$415 corresponden aproximadamente al impacto de un aumento de 1 punto porcentual en la volatilidad del activo de mercado, y un Aumento de 12 puntos básicos en la tasa libre de riesgo. Además, los \$415 también son mucho menores que el impacto de la edad de compra y el tiempo hasta el vencimiento (comparando el

excedente de las columnas [2] y [3] del cuadro 3 a la columna [1]), y en la práctica las aseguradoras optan por no cobrar tarifas diferentes en función de estas características.

Cualitativamente, el impacto de las sensibilidades sobre el valor y el excedente del GMWB es consistente con la intuición: el GMWB es menos valioso si el inversor es mayor (columna [2]) y, por lo tanto, es menos probable que sobreviva el tiempo suficiente para aprovechar plenamente los retiros garantizados. Con un plazo de vencimiento más largo (columna [3]), la cláusula adicional de GMWB es más valiosa, pero la aseguradora también cobra más tarifas. Lo mismo ocurre si se garantiza que el inversor sobrevivirá hasta el vencimiento del VA (columna [10]). Si el VA tiene más exposición a las acciones (columna [5]), los rendimientos de los fondos mutuos son más volátiles, lo que aumenta el valor de la garantía. Como era de esperar, esto tiene un impacto prácticamente idéntico al correspondiente aumento directo de la volatilidad del activo de mercado (columna [6]). Con una tasa libre de riesgo mayor (Columna [7]), el valor de la cuenta VA crece más rápido en promedio (bajo la medida  $Q$ ), lo que hace que sea menos probable que la garantía esté "en el dinero"; por lo tanto, el inversor realiza menos retiros, lo que permite a la aseguradora cobrar tarifas adicionales.

A continuación, considero el impacto de las tasas impositivas marginales del inversor. Encuentro que una tasa impositiva más alta  $\kappa$  sobre las ganancias de la cuenta externa (Columna [9]) hace que el VA sea más atractivo, lo que desalienta marginalmente los retiros, lo que lleva a un valor de garantía más bajo y a más pagos de tarifas del VA. Sin embargo, el nivel de la tasa marginal del impuesto sobre la renta  $\tau$  (columna [8]) no afecta el comportamiento óptimo de retiro: dado que todos los retiros del VA se gravan íntegramente a la tasa  $\tau$ , la tasa impositiva no afecta el momento óptimo del retiro. Esto contrasta con la conclusión de Moenig y Bauer (2016): en su estudio, el VA se coloca en una cuenta no calificada, donde los retiros solo están parcialmente gravados, y en ese caso puede ser una ventaja programar el retiro en para reducir las obligaciones tributarias. Como referencia, la columna [11] de la Tabla 3 presenta los resultados de la valoración si el comportamiento del inversor está impulsado por la maximización del valor o la utilidad sin considerar las implicaciones fiscales del producto. Como se analizó anteriormente –basado en la información proporcionada por la Figura 2– el comportamiento de retiro del inversionista es sustancialmente diferente sin impuestos, lo que resulta en frecuentes rescates de pólizas cuando la garantía está fuera del dinero. Como resultado, la cláusula GMWB no parece ser rentable, incluso con tarifas relativamente altas, lo que confirma las ideas de Milevsky y Salisbury (2006), Chen et al. (2008) y Dai et al. (2008).

El análisis de sensibilidad también considera el caso en el que se incluye una garantía de beneficio por fallecimiento con retorno de la prima (GMDB) en la póliza del VA, como suele ser el caso en la práctica. El resto del importe de retiro garantizado  $G_t$  también sirve como prestación garantizada por fallecimiento. Por lo tanto, en caso de muerte prematura del asegurado en el año de póliza  $t$ , los beneficiarios reciben el mayor entre el valor de la cuenta VA y el monto garantizado restante, es decir,  $DB_t = \max\{AT_t, G_t\}$ , y el asegurador paga

$$X_t^D := (G_t - E_n)^+.$$

Dejo que  $Q_t^D$  denote el valor presente esperado neutral al riesgo en el tiempo  $t$  de todos los próximos pagos de garantía de beneficios por fallecimiento y actualizo esta función de la siguiente manera:

$$V_t^D = -r(q_{x+t}E_t[X_{t+1}^D] + (1 - q_{x+t})E_t(y_{t+1})) = e^{-r}V_{t+1}^D(y_{t+1}),$$

con condición terminal

$$V_T^D(y_T) = 0$$

y valor esperado neutral al riesgo en el tiempo 0  $-r(q_x E$

$$V_0^D = m_i \left[ \frac{q}{0} X_1 + (1 - q_x) m_i \right] \frac{q}{0} V_1^D(y_1).$$

Los resultados de la valoración en presencia de la cláusula GMDB se muestran en la columna [4] de la Tabla 3 y son consistentes con las ideas anteriores.



#### 4.4. Revisando lo incompleto del mercado

Los resultados numéricos anteriores muestran que el comportamiento óptimo de retiro del inversor en un marco de ciclo de vida se aproxima razonablemente al comportamiento óptimo en el correspondiente entorno neutral al riesgo (con impuestos). Es decir, el acceso al mercado de valores parece completar en gran medida –aunque no del todo– el mercado en torno a las garantías VA.

Como se analizó en la Sección 2, un inversionista de VA enfrenta dos fuentes de riesgo: financiero y de mortalidad. Como es reacia al riesgo, quiere equilibrar la utilidad respectiva que obtiene en caso de una buena y mala economía, pero también en caso de su muerte y de su supervivencia. En nuestro modelo, la cuenta de inversión externa permite al inversionista mitigar su exposición al riesgo financiero, pero el modelo no le ofrece un mecanismo correspondiente disponible para mitigar su riesgo de mortalidad. De hecho, el único instrumento financiero contingente a la mortalidad a disposición del inversor es la cláusula GMWB, que sólo tiene valor en caso de supervivencia. Por lo tanto, si su comportamiento de abstención que maximiza el valor crea un desequilibrio entre la utilidad en el estado de "muerte" versus el estado "vivo" (en relación con sus preferencias de riesgo y las probabilidades respectivas de los estados), entonces su comportamiento de abstención óptimo. La estrategia en el modelo del ciclo de vida se desvía de ese comportamiento para alinear mejor su utilidad entre los estados "vivo" y "muerto" con sus preferencias.<sup>14</sup> Estas ideas se reflejan en mis resultados numéricos: por ejemplo, encontramos que la discrepancia entre los dos enfoques es

(ligemente) mayor cuando las tasas de mortalidad son más altas, es decir, para inversores de mayor edad y si el vencimiento del VA es más largo (véanse las columnas [2] y [3] en la Tabla 3). Lo contrario ocurre si se garantiza al inversionista que sobrevivirá hasta el vencimiento del VA (ver columna [10] del Cuadro 3). Esto refleja la situación en la que el inversor sólo enfrenta riesgo financiero y, por lo tanto, la diferencia en el superávit de \$90 ( $< 0,1\%$  del valor nominal de la póliza VA) puede verse como el impacto de la insuficiencia residual del mercado con respecto al riesgo financiero (junto con posiblemente un pequeño error de estimación de la implementación numérica). Esto contribuye aproximadamente la mitad a los \$187 de diferencia de superávit en el caso de referencia, y la otra mitad es atribuible a lo incompleto del mercado para el riesgo de mortalidad idiosincrásico. De manera similar, si el inversor no tiene un motivo de herencia (ver columna [9] en la Tabla 2), el impacto de la incompletitud relacionada con la mortalidad se desvanece y los resultados del ciclo de vida coinciden casi perfectamente con el modelo SRNV.

En contraste, la discrepancia en el excedente de GMWB es mayor según las especificaciones del modelo de Ameriks et al. (2011), quienes estimaron un motivo de legado relativamente alto (ver columna [10] en la Tabla 2).

Dado que el modelo de este estudio no otorga al inversionista acceso a productos tradicionales de seguros de vida y rentas vitalicias, el comportamiento óptimo de retiro bajo el modelo de ciclo de vida estaría aún más cerca del caso neutral al riesgo si el inversionista tuviera acceso a esos mercados. Por lo tanto, la incompletitud del mercado puede ser incluso menos relevante para el comportamiento óptimo de los asegurados del VA en la práctica de lo que sugieren los resultados anteriores.

#### 5. Conclusión

Estudí los determinantes de la estrategia óptima de retiro de un inversor para una cláusula adicional de GMWB en un contrato VA y descubrí que el comportamiento óptimo está impulsado principalmente por la maximización del valor, aunque se tienen en cuenta los beneficios fiscales del producto en relación con las cuentas de inversión más tradicionales, cuando corresponda.

Esta es una buena noticia para los proveedores de VA (así como para los inversores y asesores financieros), por dos razones. En primer lugar, es difícil para los actuarios parametrizar adecuadamente un modelo de ciclo de vida y realizar pruebas de sensibilidad apropiadas, ya que los parámetros de preferencia no son observables, son difíciles de obtener en un formulario de solicitud de VA y pueden variar considerablemente entre inversionistas potenciales. Si el comportamiento dependiera críticamente de esas preferencias, sería difícil fijar el precio y, especialmente, proteger la cláusula adicional. En segundo lugar, la implementación numérica del modelo de ciclo de vida requiere una gran cantidad de potencia de cálculo, incluso para una estructura de garantía simple y en un mundo financiero Black-Scholes. Por otro lado, un modelo de valoración neutral al riesgo puede manejar fácilmente (al menos desde una perspectiva computacional) estructuras GMWB, entornos tributarios alternativos o modelos financieros más complicados. Remito al lector interesado a Moenig y Bauer (2016) para una implementación de productos VA+GMWB del mundo real en el marco SRNV.

Los hallazgos de este estudio revelan un (pequeño nivel de) incompletitud del mercado con respecto al riesgo de mortalidad idiosincrásico del inversor. El acceso al mercado tradicional de seguros de vida y rentas vitalicias acercaría al inversor a un mercado completo. Por otro lado, las garantías VA que dependen aún más de la longevidad del inversor –como las GLWB, que no sólo se ocupan de edades más altas sino que también ofrecen retiros garantizados ilimitados– también deberían ser más susceptibles a esta falta de integridad.<sup>15</sup> Esto puede ser una solución que valga la pena. dirección para futuras investigaciones.

Este estudio documenta la (falta de) insuficiencia del mercado que enfrentan los inversores de VA. Por otro lado, los proveedores de VA también se enfrentan a un mercado potencialmente incompleto, ya que los activos utilizados para cubrir los pasivos de VA difieren del fondo mutuo sobre el que está escrita la garantía, ya que este último generalmente no es líquido y no se puede vender en corto. Esta forma de riesgo de base puede afectar en gran medida la efectividad de la cobertura de los proveedores (Sun et al., 2016) y hasta ahora ha recibido relativamente poca atención en la literatura (ver, por ejemplo, Delong, 2014; Trottier et al., 2018).

Por último, me gustaría ver las predicciones teóricas de este artículo, así como la literatura más amplia sobre el comportamiento óptimo de los asegurados en los AV, complementadas con estudios empíricos. Estos han sido bastante escasos, principalmente debido a la naturaleza patentada de los datos a nivel de políticas, (Milevsky y Kyrychenko, 2008) y Knoller et al. (2016) siendo excepciones notables.

#### Expresiones de gratitud

Estoy especialmente agradecido a Daniel Bauer por su orientación y comentarios, así como a Glenn Harrison, Ajay Subramanian, Eric Ulm y Yongsheng Xu por sus valiosos aportes. También agradezco a cuatro revisores anónimos y participantes en la Reunión Anual de ARIA 2011; la 46ª Conferencia de Investigación Actuarial; el XII Simposio sobre Finanzas, Banca y Seguros; el PARTIDO 2013; el Congreso Internacional de Actuarios de 2014; así como a los participantes en seminarios de la Universidad Estatal de Georgia, la Universidad de Ulm, la Universidad de Manitoba, el Manhattan College, la Universidad de St. Thomas, la Universidad de Wisconsin-Madison, el Club Actuarial de Twin Cities y la Universidad de Temple por sus útiles comentarios. Todos los errores restantes son míos.

#### Fondos

Este trabajo fue apoyado por la Sociedad de Actuarios bajo una subvención de investigación CAE en la Universidad Estatal de Georgia.

<sup>14</sup> Esto se relaciona con la conclusión de Steinorth y Mitchell (2015) de que el comportamiento óptimo de retiro de los GLWB, también en el contexto del ciclo de vida, está influenciado por la protección contra el riesgo de longevidad incorporada en la garantía.

<sup>15</sup> Véase, por ejemplo (Xiong et al., 2010), Blanchett (2012) y Pfau (2013) para estudios relacionados.

Apéndice. Prueba de la ecuación. (24)

El objetivo es demostrar que la valoración tiempo T del inversor de su estrategia de inversión post-VA según las preferencias de Epstein-Zin está especificada por la ecuación. (24). Lo hago usando inducción hacia atrás.

La condición terminal es  $U_{\omega} = 0$ , ya que no se puede obtener ninguna utilidad después de la muerte. Esto satisface la ecuación. (24) con  $\alpha \omega = 0$ . Para el paso de inducción, supongamos que para  $t = T, \dots, 1$  es cierto que  $U_{t+1} = \alpha t + 1c$ . Ahora muestro que esto implica que  $U_t = \alpha t + c$ .

Recuerde que al vencimiento del VA, el inversionista anualiza completamente su patrimonio, recibiendo así un ingreso anual garantizado  $c := \omega - 1$ ,  $c_t^{\text{neto}} + Y_0$  por el resto de su vida. Para  $t = T, \dots, 1$ , su utilidad tiempo-t Epstein-Zin está, por tanto, dada por

$$\begin{aligned} U_t &= \{ (1 - \beta)c^{1-\frac{1}{\psi}} + \beta (E_t [q x + tB \cdot 0 + (1 - q x + t)(U_{t+1})^{1-\frac{1}{\psi}}])^{\frac{1-\frac{1}{\psi}}{1-\gamma}} \}^{\frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}} \\ &= \{ (1 - \beta)c^{1-\frac{1}{\psi}} + \beta ((1 - q x + t)(U_{t+1})^{1-\frac{1}{\psi}})^{\frac{1-\frac{1}{\psi}}{1-\gamma}} \}^{\frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}} \\ &= \{ (1 - \beta)c^{1-\frac{1}{\psi}} + \beta (1 - q x + t)^{\frac{1-\frac{1}{\psi}}{1-\gamma}} (\alpha t + 1c)^{1-\frac{1}{\psi}} \}^{\frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}} \\ &= \{ (1 - \beta) + \beta (1 - q x + t)^{\frac{1-\frac{1}{\psi}}{1-\gamma}} (\alpha t + 1)^{\frac{1-\frac{1}{\psi}}{1-\gamma}} c^{\frac{1-\frac{1}{\psi}}{1-\gamma}} \}^{\frac{1-\gamma}{1-\frac{1}{\psi}}} \\ &= \alpha t + c \end{aligned}$$

Esto completa el paso de inducción y, por tanto, la prueba. □

Referencias

Ameriks, J., Caplin, A., Laufer, S., Van Nieuwerburgh, S., 2011. ¿La alegría de dar o la vida asistida? Utilizar encuestas estratégicas para separar la aversión a la atención pública de los motivos de legado. *J. Finanzas* 66 (2), 519–561.

Baciniello, AR, Millosovich, P., Montealegre, A., 2016. La valoración de las anualidades variables de GMWB según distribuciones de fondos alternativas y comportamientos de los asegurados. *Escanear. Actuador. J.* 2016 (5), 446–465.

Bauer, D., Gao, J., Moenig, T., Ulm, ER, Zhu, N., 2017. Comportamiento de ejercicio del asegurado en seguros de vida: la situación. *N. Am. Actuador. J.* 21 (4), 485–501.

Bauer, D., Kling, A., Russ, J., 2008. Un marco de precios universal para beneficios mínimos garantizados en anualidades variables. *ASTIN Bol.:J. IAA* 38 (2), 621–651.

Blanchet-Scalliet, C., Chevalier, E., Kharoubi, I., Lim, T., 2015. Problema de optimización máximo-mínimo para la fijación de precios de anualidades variables. *En t. J. Theor. Aplica. Finanzas* 18 (08), 1550053.

Blanchett, DM, 2012. Asignaciones óptimas de cartera con anualidades GMWB. *J. Finanzas. Plan.* 25 (10), 46–56.

Brown, JR, Mitchell, OS, Poterba, JM, 2001. El papel de las anualidades reales y los bonos indexados en un programa de jubilación de cuentas individuales. *En: Aspectos de riesgo de la reforma de la seguridad social basada en la inversión. Prensa de la Universidad de Chicago*, págs. 321–370.

Brown, JR, Poterba, JM, 2006. Propiedad de los hogares de anualidades variables. *Impuesto Economía de políticas.* 20, 163–191.

Campbell, J., Chan, M., Li, K., Lombardi, L., Lombardi, L., Purushotham, M., Rao, A., 2014. Modelado del comportamiento de los asegurados para productos de seguros de vida y anualidades. Informe técnico, Schaumburg: Sociedad de Actuarios, disponible en línea: <https://www.soa.org/globalassets/assets/files/research/projects/research-2014-modeling-policy.pdf>.

Carpenter, JN, 1998. El ejercicio y valoración de opciones sobre acciones para ejecutivos. *J. Finanzas. Economía.* 48 (2), 127–158.

Charupat, N., Milevsky, MA, 2002. Asignación óptima de activos en rentas vitalicias: una nota. *Matemáticas de seguros. Economía.* 30 (2), 199–209.

Chen, Z., Vetzal, K., Forsyth, PA, 2008. El efecto de los parámetros de modelado sobre el valor de las garantías de GMWB. *Matemáticas de seguros. Economía.* 43 (1), 165–173.

Chevalier, E., Lim, T., Romo Romero, R., 2016. Tasa de tasa de indiferencia para anualidades variables. *Aplica. Matemáticas. Finanzas* 23 (4), 278–308.

Costabile, M., Massabó, I., Russo, E., 2020. Evaluación de anualidades variables con GMWB cuando factores exógenos influyen en los retirios del asegurado. *EUR. J. Finanzas.* 26 (2–3), 238–257.

Cox, JC, Huang, C.-f., 1989. Políticas óptimas de consumo y cartera cuando Los precios de los activos siguen un proceso de difusión. *J. Economía. Teoría* 49 (1), 33–83.

Dai, M., Kuen Kwok, Y., Zong, J., 2008. Beneficio de retiro mínimo garantizado en anualidades variables. *Matemáticas. Finanzas: Int. J. Matemáticas. Estadística. Finanzas. Economía.* 18 (4), 595–611.

Delong, L., 2014. Fijación de precios y cobertura de anualidades variables con dependientes del estado. honorarios. *Matemáticas de seguros. Economía.* 58, 24–33.

Donnelly, R., Jaimungal, S., Rubisov, DH, 2014. Valoración de los beneficios de retiro garantizados con tasas de interés estocásticas y volatilidad. *Cuant. Finanzas* 14 (2), 369–382.

Epstein, LG, Zin, SE, 1991. Sustitución, aversión al riesgo y comportamiento temporal del consumo y la rentabilidad de los activos: un análisis empírico. *J. Polit. Economía.* 99 (2), 263–286.

Forsyth, P., Vetzal, K., 2014. Un marco de control estocástico óptimo para determinar el costo de cobertura de anualidades variables. *J. Economía. Dinámico. Controle* 44, 29–53.

Gao, J., Ulm, ER, 2012. Consumo y asignación óptimos en anualidades variables con beneficios mínimos por fallecimiento garantizados. *Matemáticas de seguros. Economía.* 51 (3), 586–598.

Gao, J., Ulm, ER, 2015. Asignación y consumo óptimos con prestaciones mínimas por fallecimiento garantizadas, ingresos externos y seguro de vida temporal. *Matemáticas de seguros. Economía.* 61, 87–98.

Goudenège, L., Molent, A., Zanette, A., 2019. El impacto de los impuestos en el contrato GMWB en un marco de tipos de interés estocásticos. *Hoja de trabajo. Università Politecnica delle Marche.*

Gudkov, N., Ignatieva, K., Ziveyi, J., 2019. Fijación de precios de beneficios de retiro mínimos garantizados en anualidades variables bajo volatilidad estocástica, tasas de interés estocásticas y mortalidad estocástica mediante el método de división por componentes. *Cuant. Finanzas* 19 (3), 501–518.

Horneff, V., Maurer, R., Mitchell, OS, Rogalla, R., 2015. Elección óptima de cartera de ciclo de vida con anualidades variables que ofrecen liquidez y protección contra caídas de inversión. *Matemáticas de seguros. Economía.* 63, 91–107.

Horneff, WJ, Maurer, RH, Mitchell, OS, Stamos, MZ, 2010. Anualidades de pago variable y elección dinámica de cartera durante la jubilación. *J. Economía de Pensiones. Finanzas.* 9 (2), 163–183.

Huang, H., Milevsky, MA, Salisbury, TS, 2014. Inicio óptimo de un GLWB en una anualidad variable: sin enfoque de arbitraje. *Matemáticas de seguros. Economía.* 56, 102–111.

Ignatieva, K., Song, A., Ziveyi, J., 2018. Algoritmo de paso de tiempo en el espacio de Fourier para valorar los beneficios de retiro mínimos garantizados en anualidades variables bajo cambio de régimen y mortalidad estocástica. *ASTIN Bol.: J. IAA* 48 (1), 139–169.

Inkmann, J., Lopes, P., Michaelides, A., 2010. ¿Qué tan profundo es el enigma de la participación en el mercado de anualidades? *Rev. Finanzas. Semental.* 24 (1), 279–319.

Knoller, C., Kraut, G., Schoenmaekers, P., 2016. Sobre la propensión a renunciar a un contrato de anualidad variable: un análisis empírico del comportamiento dinámico de los asegurados. *J. Seguro de riesgo* 83 (4), 979–1006.

Lin, XS, Tan, KS, Yang, H., 2009. Garantías de anualidades de precios bajo un modelo de cambio de régimen. *N. Am. Actuador. J.* 13 (3), 316–332.

Lockwood, LM, 2012. Motivos del legado y el rompecabezas de las anualidades. *Rev. Economía. Din.* 15 (2), 226–243.

MacKay, A., Augustyniak, M., Bernard, C., Hardy, MR, 2017. Gestión de riesgos del comportamiento de los asegurados en seguros de vida vinculados a acciones. *J. Seguro de riesgo* 84 (2), 661–690.

Mahayni, A., Schneider, JC, 2012. Anualidades variables y la opción de buscar riesgo: ¿Por qué debería diversificarse? *J. Banco. Finanzas.* 36 (9), 2417–2428.

Marshall, C., Hardy, M., Saunders, D., 2010. Valoración de un beneficio de ingreso mínimo garantizado. *N. Am. Actuador. J.* 14 (1), 38–58.

Maurer, R., Mitchell, OS, Rogalla, R., Kartashov, V., 2013. Elección de cartera de ciclo de vida con riesgo de longevidad sistemático y anualidades diferidas vinculadas a inversiones variables. *J. Seguro de riesgo* 80 (3), 649–676.

Milevsky, MA, Kyrchenko, V., 2008. Elección de cartera con opciones de venta: evidencia de anualidades variables. *Finanzas. Anal. J.* 64 (3), 80–95.

Milevsky, MA, Posner, SE, 2001. La opción titánica: valoración del beneficio mínimo garantizado por fallecimiento en anualidades variables y fondos mutuos. *J. Seguro de riesgos* 68 (1), 93–128.

Milevsky, MA, Salisbury, TS, 2006. Valoración financiera de los beneficios de retiro mínimo garantizados. *Matemáticas de seguros. Economía.* 38 (1), 21–38.

Moenig, T., Bauer, D., 2016. Revisando el enfoque neutral al riesgo para el comportamiento óptimo de los asegurados: un estudio de garantías de retiro en anualidades variables. *Rev. Finanzas.* 20 (2), 759–794.

Moenig, T., Zhu, N., 2018. Caducidad y reingreso en anualidades variables. *J. Riesgo Seguro* 85 (4), 911–938.

- Peng, J., Leung, KS, Kwok, YK, 2012. Fijación de precios con beneficios de retiro mínimos garantizados bajo tasas de interés estocásticas. *Cuant. Finanzas* 12 (6), 933–941.
- Pfau, WD, 2013. Un marco más amplio para determinar una frontera eficiente para los ingresos de jubilación. *J. Finanzas. Plan.* 26 (2), 44–51.
- Piscopo, G., Rüede, P., 2018. ¿Qué pasaría si los asegurados de anualidades variables con beneficio de retiro de por vida garantizado fueran racionales? *J. Seguro de riesgos* 85 (1), 203–217.
- Sell, S., 2006. Estudio de experiencia sobre beneficios de vida garantizados. *Soc. Actuarios Prod. Desarrollo. Noticias* 64, 9–11.
- Shevchenko, PV, Luo, X., 2017. Valoración de anualidades variables con beneficio de retiro mínimo garantizado bajo una tasa de interés estocástica. *Matemáticas de seguros. Economía.* 76, 104–117.
- Steinorth, P., Mitchell, OS, 2015. Valoración de anualidades variables con beneficios de retiro mínimos garantizados de por vida. *Matemáticas de seguros. Economía.* 64, 246–258.
- Sun, P., Kelkar, R., Dai, J., Huang, V., 2016. ¿Qué tan efectiva es la cobertura de garantía de anualidad variable? Informe técnico, Informe de investigación de Milliman, disponible en línea: <http://us.milliman.com/uploadedFiles/insight/2016/variable-annuity-Guarantee-hedging.pdf>.
- Sun, J., Shevchenko, PV, Fung, MC, 2018. El impacto de las tarifas de gestión en la fijación de precios de las garantías de anualidades variables. *Riesgos* 6 (3), 103.
- Trottier, D.-A., Godin, F., Hamel, E., 2018. Cobertura local de anualidades variables en presencia de riesgo de base. *ASTIN Bol.:J. IAA* 48 (2), 611–646.
- Ulm, ER, 2006. El efecto de la opción real de transferencia sobre el valor de Beneficios mínimos garantizados por fallecimiento. *J. Seguro de riesgos* 73 (1), 43–69.
- Ulm, ER, 2020. El efecto de las normas tributarias sobre la jubilación sobre el valor de los beneficios de retiro garantizados de por vida. *Ana. Actuador. Ciencia.* 14 (1), 83–92.
- Xiong, JX, Idzorek, T., Chen, P., 2010. Asignación a anualidades variables diferidas con GMWB de por vida. *J. Finanzas. Plan.* 23 (2), 42–50.