

4. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

4.1. Решение задачи Коши

4.1.1. Задача Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения.

Рассматривается задача Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка разрешенного относительно производной

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Требуется найти решение на отрезке $[a, b]$, где $x_0 = a$.

Введем разностную сетку на отрезке $[a, b]$ $\Omega^{(k)} = \{x_k = x_0 + hk\}$, $k = 0, 1, \dots, N$,
 $h = |b - a| / N$.

Точки x_k - называются *узлами* разностной сетки, расстояния между узлами – *шагом* разностной сетки (h), а совокупность значений какой либо величины заданных в узлах сетки называется *сеточной функцией* $y^{(h)} = \{y_k, k = 0, 1, \dots, N\}$.

Приближенное решение задачи Коши (4.1) будем искать численно в виде сеточной функции $y^{(h)}$. Для оценки погрешности приближенного численного решения $y^{(h)}$ будем рассматривать это решение как элемент $N+1$ - мерного линейного векторного пространства с какой либо нормой. В качестве погрешности решения принимается норма элемента этого пространства $\delta^{(h)} = y^{(h)} - [y]^{(h)}$, где $[y]^{(h)}$ - точное решение задачи (1) в узлах расчетной сетки. Таким образом $\varepsilon_h = \|\delta^{(h)}\|$.

4.1.2. Одношаговые методы

Метод Эйлера (явный).

Метод Эйлера играет важную роль в теории численных методов решения ОДУ, хотя и не часто используется в практических расчетах из-за невысокой точности. Вывод расчетных соотношений для этого метода может быть произведен несколькими способами: с помощью геометрической интерпретации, с использованием разложения в ряд Тейлора, конечно разностным методом (с помощью разностной аппроксимации производной), квадратурным способом (использованием эквивалентного интегрального уравнения).

Рассмотрим вывод соотношений метода Эйлера геометрическим способом. Решение в узле x_0 известно из начальных условий рассмотрим процедуру получения решения в узле x_1 рис.4.1.

График функции $y^{(h)}$, которая является решением задачи Коши (1), представляет собой гладкую кривую, проходящую через точку (x_0, y_0) согласно условию $y(x_0) = y_0$, и имеет в этой точке касательную. Тангенс угла наклона касательной к оси Ох равен значению производной от решения в точке x_0 и равен значению правой части дифференциального уравнения в точке (x_0, y_0) согласно выражению $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. В случае небольшого шага разностной сетки h график функции и график касательной не успевают сильно разойтись друг от друга и можно в качестве значения решения в узле x_1 принять значение касательной y_1 , вместо значения неизвестного точного решения y_{lucm} . При этом допускается погрешность $|y_1 - y_{lucm}|$ геометрически представленная отрезком CD на рис.4.1. Из прямоугольного треугольника ABC находим $CB = BA \cdot \operatorname{tg}(CAB)$ или $\Delta y = h y'(x_0)$. Учитывая, что $\Delta y = y_1 - y_0$ и заменяя производную $y'(x_0)$ на правую часть дифференциального уравнения, получаем соотношение $y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0)$. Считая теперь точку (x_1, y_1) начальной и повторяя все предыдущие рассуждения, получим значение y_2 в узле x_2 .

Переход к произвольным индексам дает формулу метода Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k) \quad (4.2)$$

Погрешность метода Эйлера.

На каждом шаге метода Эйлера допускается *локальная* погрешность по отношению к точному решению, график которого проходит через крайнюю левую точку отрезка. Геометрически локальная погрешность изображается отрезком CD на первом шаге, C'D' на втором и т.д. Кроме того, на каждом шаге, начиная со второго, накапливается *глобальная* погрешность представляющая собой разность между численным решением и точным решением исходной начальной задачи (а не локальной). Глобальная погрешность на втором шаге изображена отрезком C'E' на рис.4.1.

Локальная ошибка на каждом шаге выражается соотношением $\varepsilon_k^h = \frac{y''(\xi)}{2} h^2$, где $\xi \in [x_{k-1}, x_k]$. Глобальная погрешность метода Эйлера $\varepsilon_{гл}^h = Ch$ в окрестности $h=0$ ведет себя как линейная функция, и, следовательно, метод Эйлера имеет первый порядок точности относительно шага h .

Модификации метода Эйлера.

Неявный метод Эйлера

Если на правой границе интервала использовать точное значение производной от решения (т.е. тангенса угла наклона касательной), то получается неявный метод Эйлера первого порядка точности.

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1}) \quad (4.3)$$

В общем случае нелинейное относительно y_{k+1} уравнение (4.3) численно решается с помощью одного из методов раздела 2, например, методом Ньютона или его модификациями.

Метод Эйлера - Коши

В данном методе на каждом интервале расчет проводится в два этапа. На первом (этап прогноза) определяется приближенное решение на правом конце интервала по методу Эйлера, на втором (этап коррекции) уточняется значение решения на правом конце с использованием полусуммы тангенсов углов наклона на концах интервала

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{k+1} &= y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + \frac{h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}))}{2} \\ x_{k+1} &= x_k + h \end{aligned} \quad (4.4)$$

Этот метод имеет второй порядок точности.

Неявный метод Эйлера – Коши

Если на правой границе интервала использовать точное значение производной к решению (т.е. тангенса угла наклона касательной), то получается неявный метод Эйлера-Коши (метод трапеций) второго порядка точности.

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + \frac{h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}))}{2} \\ x_{k+1} &= x_k + h \end{aligned} \quad (4.5)$$

Метод Эйлера-Коши с итерационной обработкой

Комбинация (4.3), (4.4) и (4.5) дает метод формально второго порядка точности, но более точного в смысле абсолютной величины погрешности приближенного решения, чем исходные методы.

$$\begin{aligned}y_{k+1}^{(0)} &= y_k + hf(x_k, y_k) \\ y_{k+1}^{(i)} &= y_k + \frac{h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^{(i-1)}))}{2} \\ x_{k+1} &= x_k + h\end{aligned}\tag{4.6}$$

В формуле (6) правые верхние индексы в круглых скобках обозначают номер итерации, при этом начальное приближение $y_{k+1}^{(0)}$ определяется по методу Эйлера. Метод Эйлера-Коши с итерационной обработкой представляет собой реализацию метода простой итерации для решения нелинейного уравнения (5) в неявном методе Эйлера. Выполнять простые итерации до полной сходимости нет смысла, поэтому рекомендуется выполнять 3-4 итерации.

Первый улучшенный метод Эйлера

Данный метод использует расчет приближенного значения производной от решения в точке на середине расчетного интервала. Значение производной в середине получают применением явного метода Эйлера на половинном шаге по x .

$$\begin{aligned}y_{k+1/2} &= y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}) \\ x_{k+1} &= x_k + h \\ x_{k+1/2} &= x_k + h/2\end{aligned}\tag{4.7}$$

Данная модификация метода Эйлера имеет второй порядок точности.

Методы Рунге-Кутты

Все рассмотренные выше явные методы являются вариантами методов Рунге-Кутты. Семейство явных методов Рунге-Кутты p -го порядка записывается в виде совокупности формул:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

$$\Delta y_k = \sum_{i=1}^p c_i K_i^k \quad (4.8)$$

$$K_i^k = hf(x_k + a_i h, y_k + h \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} K_j^k)$$

$$i = 2, 3, \dots, p$$

Параметры a_i, b_{ij}, c_i подбираются так, чтобы значение y_{k+1} , рассчитанное по соотношению (4.8) совпадало со значением разложения в точке x_{k+1} точного решения в ряд Тейлора с погрешностью $O(h^{p+1})$

Метод Рунге-Кутты третьего порядка точности

Один из методов Рунге-Кутты третьего порядка ($p = 3, a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{2}{3}, b_{21} = \frac{1}{3}, b_{31} = 0, b_{32} = \frac{2}{3}, c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = 0, c_3 = \frac{3}{4}$) имеет вид:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

$$\Delta y_k = \frac{1}{4}(K_1^k + 3K_3^k) \quad (4.9)$$

$$K_1^k = hf(x_k, y_k)$$

$$K_2^k = hf(x_k + \frac{1}{3}h, y_k + \frac{1}{3}K_1^k)$$

$$K_3^k = hf(x_k + \frac{2}{3}h, y_k + \frac{2}{3}K_2^k)$$

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности

Метод Рунге-Кутты четвертого порядка

$$(p=4, a_1=0, a_2=\frac{1}{2}, a_3=\frac{1}{2}, a_4=1, b_{21}=\frac{1}{2}, b_{31}=0, b_{32}=\frac{1}{2}, b_{41}=0, b_{42}=0, b_{43}=\frac{1}{2}, c_1=\frac{1}{6}, c_2=\frac{1}{3}, c_3=\frac{1}{3}, c_4=\frac{1}{6})$$

является одним из самых широко используемых методов для решения Задачи Коши:

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$

$$\Delta y_k = \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k) \quad (4.10)$$

$$K_1^k = hf(x_k, y_k)$$

$$K_2^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k)$$

$$K_3^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k)$$

$$K_4^k = hf(x_k + h, y_k + K_3^k)$$

Контроль точности на каждом шаге h .

Основным способом контроля точности получаемого численного решения при решении задачи Коши является методы основанные на принципе Рунге-Ромберга-Ричардсона.

Пусть y^h решение задачи Коши (1) полученное методом Рунге-Кутты p – го порядка точности с шагом h в точке $x+2h$. Пусть y^{2h} решение той же задачи в точке $x+2h$, полученное тем же методом, но с шагом $2h$. Тогда выражение

$$\tilde{y} = y^h + \frac{y^h - y^{2h}}{2^p - 1} \quad (4.11)$$

аппроксимирует точное решение в точке $x+2h$ $y(x+2h)$ с $p+1$ -ым порядком.

Второе слагаемое в выражении (4.11) оценивает главный член в погрешности решения y^h , то есть $R^h = \frac{y^h - y^{2h}}{2^p - 1}$. Контроль точности может быть организован следующим образом. Выбирается значение шага h и дважды рассчитывается решение в точке $x+2h$, один раз с шагом h , другой раз с шагом $2h$. Рассчитывается величина R^h и сравнивается с заданной точностью ε . Если величина R^h меньше ε , то можно продолжать вычисления с тем же шагом, в противном случае необходимо вернуться к решению в точке x , уменьшить шаг h и повторить вычисления.

Вычислительная стоимость такого контроля точности достаточно велика, особенно для многостадийных методов. Поэтому можно использовать более грубый способ контроля правильности выбора шага h . В случае метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности следует на каждом шаге h рассчитывать параметр

$$\theta^k = \frac{|K_2^k - K_3^k|}{|K_1^k - K_2^k|} \quad (4.12)$$

Если величина θ^k порядка нескольких сотых единицы, то расчет продолжается с тем же шагом, если θ^k больше одной десятой, то шаг следует уменьшить, если же θ^k меньше одной сотой, то шаг можно увеличить.

Таким образом с помощью определения величин θ^k или R^h можно организовать алгоритм выбора шага h для явного метода Рунге-Кутты.

4.1.2. Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка разрешенных относительно производной

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dot{y}_2 = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \vdots \\ \dot{y}_n = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (4.13)$$

$$y_1(x_0) = y_{01}$$

$$y_2(x_0) = y_{02}$$

.....

$$y_n(x_0) = y_{0n}$$

Система (4.13) в более компактном виде записывается в векторной форме

$$\begin{aligned}\bar{y}' &= \bar{F}(x, \bar{y}) \\ \bar{y}(x_0) &= \bar{y}_0\end{aligned}\tag{4.14}$$

Здесь $\bar{y}(x) = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ - вектор столбец неизвестных функций,
 $\bar{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ - вектор функция правых частей.

К векторному дифференциальному уравнению (4.14) можно применить все методы рассмотренные выше в данном разделе (благодаря линейной структуре всех рассмотренных методов). При этом в формулах (4.2)-(4.14) все величины векторные кроме переменной x и шага h .

Рассмотрим задачу Коши для системы двух ОДУ первого порядка, где уравнения записаны в развернутом виде

$$\begin{cases} y' = f(x, y, z) \\ z' = g(x, y, z) \end{cases}\tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}y(x_0) &= y_0 \\ z(x_0) &= z_0\end{aligned}$$

Формулы метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности для решения (4.15) следующие:

$$\begin{aligned}y_{k+1} &= y_k + \Delta y_k \\ z_{k+1} &= z_k + \Delta z_k \\ \Delta y_k &= \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k) \\ \Delta z_k &= \frac{1}{6}(L_1^k + 2L_2^k + 2L_3^k + L_4^k)\end{aligned}\tag{4.16}$$

$$K_1^k = hf(x_k, y_k, z_k)$$

$$L_1^k = hg(x_k, y_k, z_k)$$

$$K_2^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k, z_k + \frac{1}{2}L_1^k)$$

$$L_2^k = hg(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k, z_k + \frac{1}{2}L_1^k)$$

$$K_3^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k, z_k + \frac{1}{2}L_2^k)$$

$$L_3^k = hg(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k, z_k + \frac{1}{2}L_2^k)$$

$$K_4^k = hf(x_k + h, y_k + K_3^k, z_k + L_3^k)$$

$$L_4^k = hg(x_k + h, y_k + K_3^k, z_k + L_3^k)$$

Контроль правильности выбора шага h в случае использования метода Рунге-Кутты четвертого порядка точности для системы (4.15) может быть организован с помощью вычисления на каждом шаге h параметров

$$\begin{aligned} \theta_1^k &= \left| \frac{K_2^k - K_3^k}{K_1^k - K_2^k} \right|; \\ \theta_2^k &= \left| \frac{L_2^k - L_3^k}{L_1^k - L_2^k} \right| \end{aligned} \quad (4.17)$$

Если величины θ_i^k ($i=1,2$) порядка нескольких сотых единицы, то расчет продолжается с тем же шагом, если больше одной десятой, то шаг следует уменьшить, если же меньше одной сотой, то шаг можно увеличить

Решение задачи Коши для ОДУ второго и более высокого порядков.

Задача Коши для ОДУ n – го порядка ставится следующим образом

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

$$\begin{aligned}
 y(x_0) &= y_0 \\
 y'(x_0) &= y_{01} \\
 y''(x_0) &= y_{02} \quad , \\
 &\dots\dots\dots \\
 y^{(n-1)}(x_0) &= y_{0(n-1)}
 \end{aligned}
 \tag{4.18}$$

здесь $y^{(m)} = \frac{d^m y}{dx^m}$ производная m порядка от решения, $m=1,2,\dots,n$.

Основной прием используемый при решении задач типа (4.8) заключается в введении новых переменных и сведении задачи (4.8) для ОДУ высокого порядка к решению системы ОДУ первого порядка (4.13).

Введем новые переменные

$$\begin{aligned}
 z_1 &= y' \\
 z_2 &= y'' \\
 &\dots\dots\dots \\
 z_{n-1} &= y^{(n-1)}
 \end{aligned}$$

тогда задачу (4.8) можно переписать в виде системы n ОДУ первого порядка.

$$\begin{cases}
 y' = z_1 \\
 z_1' = z_2 \\
 z_2' = z_3 \\
 \dots\dots\dots \\
 z_{n-2}' = z_{n-1} \\
 z_{n-1}' = f(x, y, z_1, \dots, z_{n-1})
 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 y(x_0) &= y_0 \\
 z_1(x_0) &= y_{01} \\
 z_2(x_0) &= y_{02} \\
 &\dots\dots\dots \\
 z_{n-1}(x_0) &= y_{0(n-1)}
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

Полученная система, состоящая из n ОДУ первого порядка с соответствующими начальными условиями решается любым из описанных методов.

Пусть необходимо решить задачу Коши для ОДУ второго порядка:

$$y'' = f(x, y, y')$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y_{01} \quad (4.20)$$

Путем введения замены $z = y'$, сведем (4.18) к системе

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z) \end{cases}$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$z(x_0) = y_{01} \quad (4.21)$$

, которую можно решить, например, с использованием метода (4.16).

Пример 4.1 Явным методом Эйлера с шагом $h=0.1$ получить численное решение дифференциального уравнения $y' = (y + x)^2$ с начальными условиями $y(0) = 0$ на интервале $[0, 0.5]$. Численное решение сравнить с точным решением $y = \tan(x) - x$.

Решение

Итак, исходя из начальной точки $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ рассчитаем значение y_1 в узле $x_1 = 0.1$ по формулам (4.2) $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0.1(0 + 0)^2 = 0$. Аналогично получим решение в следующем узле $x_2 = 0.2$; $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0 + 0.1(0 + 0.1)^2 = 0.001$.

Продолжим вычисления и, введя обозначения $\Delta y_k = hf(x_0, y_0)$ и $\varepsilon_k = |y_{уст}(x_k) - y_k|$, где $y_{уст}(x_k)$ - точное решение в узловых точках, получаемые результаты занесем в таблицу.

Таблица 4.1

k	x	y	Δy_k	$y_{уст}$	ε_k
0	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.000000000	0.0000
1	0.100000000	0.000000000	0.001000000	0.000334672	0.3347E-03
2	0.200000000	0.001000000	0.004040100	0.002710036	0.1710E-02
3	0.300000000	0.005040100	0.009304946	0.009336250	0.4296E-02
4	0.400000000	0.014345046	0.017168182	0.022793219	0.8448E-02
5	0.500000000	0.031513228		0.046302490	0.1479E-01

Решением задачи является табличная функция (оставлены 5 значащих цифр в каждом числе)

Таблица 4.2

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.0000 0	0.1000	0.2000 00	0.3000 00	0.4000 00	0.5000 00
y_k	0.0000 0	0.000	0.0010 00	0.00504 01	0.0143 45	0.03151 3

Пример 4.2. Решить задачу из примера 4.1 методом Эйлера-Коши (4.4).

Решение

Исходя из начальных значений $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, рассчитаем значение y_1 в узле $x_1 = 0.1$ по формулам (4.4)

$$\tilde{y}_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 0 + 0.1(0 + 0)^2 = 0.$$

$$f(x_1, \tilde{y}_1) = (0 + 0.1)^2 = 0.01$$

$$y_1 = y_0 + 0.5h(f(x_0, y_0) + f(x_1, \tilde{y}_1)) = 0 + 0.5 * 0.1 * (0 + 0.01) = 0.0005$$

Аналогично получим решение в остальных узлах. Продолжая вычисления и вводя обозначение $\Delta y_k = 0.5h(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, \tilde{y}_{k+1}))$ получаемые результаты занесем в таблицу.

Таблица 4.3

k	x_k	y_k	\tilde{y}_k	Δy_k	$y_{уст}$	ε_k
0	0.0	0.00000000 00		0.0005000 00	0.00000000 00	0.00000000 00
1	0.1	0.0005000 00	0.000000	0.0025353 27	0.00033467 2	0.1653E-03
2	0.2	0.0030353 27	1.510025E- 003	0.0067784 59	0.00271003 6	0.3253E- 03
3	0.3	0.0098137 86	7.157661E- 003	0.01359456 1	0.00933625 0	0.4775E-03
4	0.4	0.0234083 46	1.941224E- 002	0.02361595 4	0.02279321 9	0.6151E-03
5	0.5	0.0470243 01	4.133581E- 002		0.04630249 0	0.7218E-03

Решением задачи является табличная функция (оставлены 5 значащих цифр в каждом числе)

Таблица 4.4

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.10000 0	0.20000 00	0.30000 00	0.40000 00	0.5000 00
y_k	0.00000	0.00050 0	0.00303 53	0.009813 8	0.02340 83	0.0470 24

Пример 4.3. Решить задачу из примера 4.1 первым улучшенным методом Эйлера (4.7).

Решение

Стартуем из начальной точки $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ и рассчитаем значение $y_{1/2}$ в узле $x_{1/2} = x_0 + h/2 = 0.05$ по формулам (4.4)

$y_{1/2} = y_0 + \frac{h}{2} f(x_0, y_0) = 0 + \frac{0.1}{2} (0 + 0)^2 = 0$. Затем определим величину правой части (величину производной от решения) в середине интервала $[x_0, x_1]$

$f(x_{1/2}, y_{1/2}) = (0 + 0.05)^2 = 0.0025$. Окончательно рассчитаем значение функции в узле x_1 $y_1 = y_0 + hf(x_{1/2}, y_{1/2}) = 0 + 0.1 * 0.0025 = 0.00025$.

Аналогично получим решение в остальных узлах. Продолжая вычисления и вводя обозначение $\Delta y_k = hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2})$, получаемые результаты занесем в таблицу.

Таблица 4.5

k	x_k	y_k	$y_{k+1/2}$	Δy_k	$y_{ум}$	ε_k
0	0.0	0.00000000 00	0.00000000 0	0.0002500 00	0.00000000 00	0.00000000 00
1	0.1	0.0002500 00	0.00075250 31	0.0022726 32	0.00033467 2	0.8467E- 04
2	0.2	0.0025226	0.00457340	0.0064807	0.00271003	0.1874E-03

		32	25	62	6	
3	0.3	0.0090033 93	0.013777548 3	0.01323341 0	0.00933625 0	0.3329E- 03
4	0.4	0.0222368 04	0.031150999 8	0.02315062 8	0.02279321 9	0.5564E- 03
5	0.5	0.0453874 32			0.04630249 0	0.9151E-03

Решением задачи является табличная функция (оставлены 5 значащих цифр в каждом числе)

Таблица 4.6

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.10000 0	0.20000 00	0.30000 00	0.40000 00	0.5000 00
y_k	0.00000	0.00025 0	0.002522 6	0.00900 33	0.022236 8	0.0453 87

Пример 4.4. Решить задачу из примера 4.1 методом Рунге-Кутты 4-го порядка (4.10).

Решение

Вычислим значения вспомогательных величин $K_1^0 = hf(x_0, y_0) = 0.1(0 + 0)^2 = 0$;

$$y_0^1 = y_0 + \frac{1}{2} K_1^0 = 0 + \frac{1}{2} 0 = 0$$

$$K_2^0 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1^0) = 0.1(0 + \frac{1}{2} * 0 + 0 + \frac{1}{2} * 0.1)^2 = 0.00025;$$

$$y_0^2 = y_0 + \frac{1}{2} K_2^0 = 0 + \frac{1}{2} 0.00025 = 0.000125$$

$$K_3^0 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_2^0) = 0.1(0 + \frac{1}{2} * 0.00025 + 0 + \frac{1}{2} * 0.1)^2 = 0.000251251;$$

$$y_0^3 = y_0 + K_3^0 = 0 + 0.000251251 = 0.000251251$$

$$K_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3^0) = 0.1(0 + 0.000251251 + 0 + 0.1)^2 = 0.001005031 ;$$

Найдем приращение функции на первом интервале

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) = \frac{1}{6}(0 + 2 * 0.00025 + 2 * 0.000251251 + 0.001005031) = 0.000334588$$

и значение функции в первом узле

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 0 + 0.000334588 = 0.000334588 ;$$

Аналогично получим решение в остальных узлах.

Таблица 4.7

k/i	x_k	y_k^i	K_i^k	Δy_k	θ^k	$y_{ум}$	ε_k
0/ 1	0.0	0.000000 0	0.000000 000			0.000000	0.00000 00
0/ 2	0.05	0.000000 0	0.0002500 00				
0/ 3	0.05	0.0001250	0.0002512 52				
0/ 4	0.1	0.0002512 5	0.0010050 31	0.0003345 89	0.0050 06		
1/1	0.1	0.0003345 89	0.0010067 03			0.0003346 7	0.8301E- 07
1/ 2	0.15	0.0008379 41	0.0022752 08				
1/ 3	0.15	0.0014721 93	0.0022943 83				
1/ 4	0.2	0.0026289 72	0.0041058 50	0.0023752 89	0.01511 6		

2/ 1	0.2	0.0027098 78	0.0041091 29			0.0027100 36	0.1573E- 06
2/ 2	0.25	0.0047644 43	0.0064904 92				
2/ 3	0.25	0.0059551 24	0.0065513 03				
2/ 4	0.3	0.0092611 81	0.0095642 48	0.0066261 61	0.0255 35		
3/ 1	0.3	0.0093360 39	0.0095688 79			0.0093362 50	0.2103E- 06
3/ 2	0.35	0.0141204 79	0.0132583 72				
3/ 3	0.35	0.0159652 25	0.0133930 55				
3/ 4	0.4	0.0227290 94	0.0178699 89	0.0134569 54	0.0365 04		
4/ 1	0.4	0.0227929 93	0.0178753 91			0.0227932 19	0.2259E- 06
4/ 2	0.45	0.0317306 89	0.0232064 46				
4/ 3	0.45	0.0343962 16	0.0234639 69				
4/ 4	0.5	0.0462569 62	0.0298396 67	0.0235093 15	0.0483 06		
5	0.5	0.0463023 08				0.0463024 90	0.1823E- 06

Решением задачи является табличная функция (оставлены 5 значащих цифр в каждом числе)

Таблица 4.8

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.0000 0	0.1000	0.200000	0.300000 0	0.400000	0.500000
y_k	0.0000 0	0.0003345 89	0.0027098 78	0.0093360 39	0.0227929 93	0.0463023 08

Пример 4.5. На интервале $[0,1]$ с шагом $h=0.2$ решить задачу Коши методом Рунге-Кутты 4 порядка.

$$\begin{cases} (x^2 + 1)y'' = 2xy' \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

Численное решение сравнить с аналитическим решением $y_{\text{ист}}(x) = -x^3 + 3x + 1$.

Решение

Аналогично (4.18-4.21) введением новой переменной $z = y'$ решение исходной начальной задачи для дифференциального уравнения второго порядка сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \frac{2xz}{x^2 + 1} \end{cases}$$

$$y(0) = 1$$

$$z(0) = 3$$

Данную систему решим методом Рунге-Кутты с использованием формул (4.16).

Вычислим значения вспомогательных величин:

$$K_1^0 = hf(x_0, y_0, z_0) = hz_0 = 0.2 * 3 = 0.6; \quad L_1^0 = hg(x_0, y_0, z_0) = h \frac{2x_0 z_0}{x_0^2 + 1} = 0.2 \frac{2 * 0 * 3}{0^2 + 1} = 0;$$

$$K_2^0 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1^0, z_0 + \frac{1}{2}L_1^0) = 0.2(3 + \frac{1}{2}0) = 0.6;$$

$$L_2^0 = hg(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_1^0, z_0 + \frac{1}{2}L_1^0) = 0.2 \frac{2(0 + 0.1)(3 + \frac{1}{2}0)}{(0 + 0.1)^2 + 1} = 0.11881188;$$

$$K_3^0 = hf(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_2^0, z_0 + \frac{1}{2}L_2^0) = 0.2(3 + \frac{1}{2} * 0.1881188) = 0.611881188;$$

$$L_3^0 = hg(x_0 + \frac{1}{2}h, y_0 + \frac{1}{2}K_2^0, z_0 + \frac{1}{2}L_2^0) = 0.2 \frac{2(0 + 0.1)(3 + \frac{1}{2}0.11881188)}{(0 + 0.1)^2 + 1} = 0.121164592;$$

$$K_4^0 = hf(x_0 + h, y_0 + K_3^0, z_0 + L_3^0) = 0.2(3 + 0.12116459) = 0.62423292;$$

$$L_4^0 = hg(x_0 + h, y_0 + K_3^0, z_0 + L_3^0) = 0.2 \frac{2(0 + 0.2)(3 + 0.121164592)}{(0 + 0.2)^2 + 1} = 0.240089584;$$

Найдем приращения функций на первом интервале

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(K_1^0 + 2K_2^0 + 2K_3^0 + K_4^0) = \frac{1}{6}(0.6 + 2 * 0.6 + 2 * 0.611881188 + 0.62423292) = 0.607999216$$

$$\Delta z_0 = \frac{1}{6}(L_1^0 + 2L_2^0 + 2L_3^0 + L_4^0) = \frac{1}{6}(0.0 + 2 * 0.11881188 + 2 * 0.121164592 + 0.240089584) = 0.1200071$$

и значения функций в первом узле

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0.607999216 = 1.607999216 ;$$

$$z_1 = z_0 + \Delta z_0 = 3 + 0.1200071 = 3.1200071 ;$$

Аналогично получим решения в остальных узлах, результаты вычислений занесем в таблицу.

Таблица 4.9

k	x_k	y_k	z_k	Δy_k	Δz_k	y_{ucm}	ε_k
0	0.0	1.0000000	3.000000 000	0.6079992 16	0.1200E+0 0	1.0000000 00	0.000000
1	0.2	1.60799921 6	3.1200070 88	0.6559954 30	0.3600E+0 0	1.60799921 6	0.784E-6
2	0.4	2.2639946 46	3.4800190 51	0.75199131 7	0.6000E+0 0	2.2639946 46	0.535E-5
3	0.6	3.0159859 63	4.0800242 18	0.8959876 62	0.8400E+0 0	3.0159859 63	0.140E-4
4	0.8	3.91197362 4	4.9200187 46	1.0879843 66	0.1080E+0 1	3.91197362 4	0.264E-4
5	1.0	4.9999579 90	6.0000041 80			5.0000000 00	0.420E-4

Решением задачи является табличная функция (оставлены 5 значащих цифр в каждом числе)

Таблица 4.10

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000 0	0.200000	0.400000 0	0.600000 0	0.800000 0	1.000000
y_k	1.00000 00	1.60799921 6	2.2639946 46	3.0159859 63	3.91197362 4	4.9999579 9

4.1.3 Решение дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

Многие процессы в живой и неживой природе описываются моделями представленными дифференциальными уравнениями с запаздывающими аргументами. Наиболее часто такие модели используют при исследовании динамики развития популяций, процесса кроветворения, динамики различных автогенераторов, механизмов изменения рыночной конъюнктуры и т.п. Решение подобных уравнений обладает определенной спецификой.

Рассмотрим для простоты случай одного дифференциального уравнения с единственным запаздывающим аргументом a .

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y(x), y(x-a)) \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Пусть имеется решения в точке $y_k = y(x_k)$. Опишем процедуру нахождения решения в точке $x_k = x_k + h$ модифицированным методом Эйлера (4.7) второго порядка точности. В этом методе надо использовать значение решения в точке x_k и предварительное решение в точке $x_{k+1/2} = x_k + h/2$. Соответственно от этих точек надо брать запаздывание a , то есть надо найти значение решения в точках

$x_k - a, x_k + h/2 - a$. Для примера опишем процедуру определения значения $y(x_k - a)$. Если $x_k - a$ лежит левее начальной точки x_0 , то $y(x_k - a)$ определяется из начальных условий (в этом случае должно быть задано поведение решения на интервале левее точки x_0 , достаточном для определения значения в точке $x_k - a$. Если $x_k - a$ совпадает с одним из узлов правее x_0 , тогда $y(x_k - a)$ принимает значение функции в этом узле.

Если величина $x_k - a$ не совпадает ни с одним узловым значением $x_m, x_m = 0, 1, 2, \dots$, то она лежит внутри некоторого отрезка $[x_j, x_{j+1}]$ и можно по значениям y в трех узлах, например, в x_{j-1}, x_j, x_{j+1} построить интерполяционный многочлен P_3 для определения приближенного значения $y(x_k - a) \approx P_3(x_k - a)$.

Таким образом, схема расчета значения решения в новой точке для системы (4.22) будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} y_{k+1/2} &= y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k, y(x_k - a)) \\ y_{k+1} &= y_k + hf(x_{k+1/2}, y_{k+1/2}, y(x_{k+1/2} - a)) \\ x_{k+1} &= x_k + h \\ x_{k+1/2} &= x_k + h/2 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Пример 4.6. Улучшенным методом Эйлера с шагом $h=0.1$ получить численное решение дифференциального уравнения $y' = A_1 y(x)(1 - y(x - A_2)/A_3)$ с начальными условиями $y(0) = 2.0$ на интервале $[0, 4]$ с шагом $h = 0.4$ $A_1 = 1.6, A_2 = 0.5, A_3 = 10$ (здесь A_2 - константа характеризующая запаздывание аргумента).

Данное уравнение может описывать динамику одновидовой популяции (в этом случае A_1 - коэффициент экспоненциального роста, A_3 - емкость среды обитания, A_2 - возраст производителей, x - время). Смысл модели в следующем: скорость роста популяции зависит не только от общей численности $y(x)$ в любой момент времени x , определяемой емкостью среды обитания A_3 , но и от количества взрослых особей в

момент времени $x - A_2$. Данное уравнение может также описывать цикличность деловой активности на фондовом рынке.

Решение

Решение будем проводить с использованием формул (4.23). Значение решения в точке $x_0 - A_2 = 0.0 - 0.5 = -0.5$, лежащей левее точки x_0 , примем равным начальному значению $y_0 = 2.0$, то есть $y(x_0 - A_2) = 2.0$. Определим величину функции в точке $x_{1/2} = x_0 + h/2 = 0.0 + 0.1 = 0.1$ по методу Эйлера $y_{1/2} = y_0 + h/2 f(x_0, y_0, y(x_0 - A_2)) = 2.0 + 0.1 * 1.6 * 2.0 * (1.0 - 2.0/10.0) = 2.256$. В середине первого шага считаем значение функции с запаздывающим аргументом $x_0 + h/2 - A_2 = 0.0 + 0.1 - 0.5 = -0.4$, $y(x_0 + h/2 - A_2) = 2.0$ и затем значение решения в точке 1 $y_1 = y_0 + hf(x_{1/2}, y_{1/2}, y(x_{1/2} - A_2)) = 2.0 + 0.2 * 1.6 * 2.256 * (1.0 - 2.0/10.0) = 2.577536$.

Продолжая таким образом вычисления и используя квадратичную интерполяцию (многочлен Лагранжа) для нахождения значения функции для запаздывающего аргумента, когда значения $x_k - A_2$ или $x_k + h/2 - A_2$ будут лежать правее, чем точка x_0 , получим решения в последующих точках. Результаты вычислений занесены в таблицу (4.11), в которой для удобства использованы следующие обозначения:

$$\Delta \tilde{y}_k = \frac{h}{2} f(x_k, y_k, y(x_k - A_2)), \quad x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2}, \quad y_{k+1/2} = y_k + \Delta \tilde{y}_k,$$

$$\hat{x}_k = x_k + h/2 - A_2, \quad \hat{y}_k = y(x_k + h/2 - A_2), \quad \Delta y_k = hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \Delta \tilde{y}_k, \hat{y}_k)$$

Таблица 4.11

k	x_k	y_k	$x_k - A_2$	$y(x_k - A_2)$	$\Delta \tilde{y}_k$	$x_{k+1/2}$	$y_{k+1/2}$	\hat{x}_k	\hat{y}_k	Δy_k
0	0.0	2.0	-0.5	2.0	0.256000	0.1	2.25600	-0.4	2.0	0.577536
1	0.1	2.57754	-0.3	2.0	0.3299	0.2	2.9074	-0.2	2.0	0.74431

	2				25	3	6			0
2	0.	3.32185	-0.1	2.0	0.42519	0.	3.74704	0.0	2.0	0.9592
	4				6	5				43
3	0.	4.2810	0.1	2.26792	0.5296	0.	4.81072	0.2	2.57754	1.14263
	6	9			27	7				6
4	0.	5.4237	0.3	2.9228	0.61415	0.	6.0378	0.4	3.32185	1.2903
	8	2		2	4	9	8			00
5	1.	6.7140								
	0	2								

Решением задачи является табличная функция (оставлены 6 значащих цифр)

Таблица 4.12

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0.00000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	1.000000
			0	0	0	
y_k	2.0	2.57754	3.32185	4.28109	5.42372	6.71402

Замечание. Как правило, в отличие от Примера 4.6, в данных задачах с запаздывающим аргументом интересуются поведением решения на достаточно больших интервалах времени. При этом выполняется от сотен до тысяч шагов по времени, что приводит к необходимости использовать компьютер.

4.1.4 Многошаговые методы. Метод Адамса.

Многошаговые методы решения задачи Коши характеризуются тем, что решение в текущем узле зависит от данных не в одном предыдущем узле, как это имеет место в одношаговых методах, а от нескольких предыдущих узлах. Многие

многошаговые методы различного порядка точности можно конструировать с помощью квадратурного способа (т.е. с использованием эквивалентного интегрального уравнения).

Решение дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ удовлетворяет интегральному соотношению:

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx \quad (4.24)$$

Если решение задачи Коши получено в узлах вплоть до k -го, то можно аппроксимировать подынтегральную функцию, например: интерполяционным многочленом какой-либо степени. Вычислив интеграл от построенного многочлена на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ получим ту или иную формулу Адамса. В частности, если использовать многочлен нулевой степени (то есть заменить подынтегральную функцию ее значением на левом конце отрезка в точке x_k), то получим явный метод Эйлера. Если проделать то же самое, но подынтегральную функцию аппроксимировать значением на правом конце в точке x_{k+1} , то получим неявный метод Эйлера.

Метод Адамса

При использовании интерполяционного многочлена 3-ей степени построенного по значениям подынтегральной функции в последних четырех узлах получим метод Адамса четвертого порядка точности:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24} (55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}), \quad (4.25)$$

где f_k значение подынтегральной функции в узле x_k .

Метод Адамса (4.25) как и все многошаговые методы не является самостартующим, то есть для того, что бы использовать метод Адамса необходимо иметь решения в первых четырех узлах. В узле x_0 решение y_0 известно из

начальных условий, а в других трех узлах x_1, x_2, x_3 решения y_1, y_2, y_3 можно получить с помощью подходящего одношагового метода, например: метода Рунге-Кутты четвертого порядка (4.10).

Метод Адамса-Бэшфорта-Моултона

Данный метод типа предиктор–корректор позволяет повысить точность вычислений метода Адамса за счет двойного вычисления значения функции $f(x, y)$ при определении y_{k+1} на каждом новом шаге по x .

Этап предиктор

Аналогично методу Адамса по значениям в узлах $x_{k-3}, x_{k-2}, x_{k-1}, x_k$ рассчитывается “предварительное” значение решения в узле x_{k+1} .

$$\hat{y}_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3}), \quad (4.26)$$

С помощью полученного значения \hat{y}_{k+1} рассчитывается “предварительное” значение функции $f_{k+1} = f(x_{k+1}, \hat{y}_{k+1})$ в новой точке.

Этап корректор

На корректирующем этапе по методу Адамса 4-го порядка по значениям в узлах $x_{k-2}, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}$ рассчитывается “окончательное” значение решения в узле x_{k+1} .

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{24}(9f_{k+1} + 19f_k - 5f_{k-1} + f_{k-2}), \quad (4.27)$$

Пример 4.7. Методом Адамса с шагом $h=0.1$ получить численное решение дифференциального уравнения $y' = (y + x)^2$ с начальными условиями $y(0) = 0$ на интервале $[0, 1.0]$. Численное решение сравнить с точным решением $y = \tan(x) - x$.

Решение

Данная задача на первой половине интервала совпадает с задачей из примера 4.4. Поэтому для нахождения решения в первых узлах беем использовать результаты решения этой задачи методом Рунге-Кутты четвертого порядка (4.10) приведенные в примере 4.4.

Таблица 4.13

k	x_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$y_{\text{исм}}$	ε_k
0	0.0	0.00000000	0.0000000000	0.0000000	0.00000000
1	0.1	0.000334589	0.010067030	0.00033467	0.8301E-07
2	0.2	0.002709878	0.041091295	0.002710036	0.1573E-06
3	0.3	0.009336039	0.095688785	0.009336250	0.2103E-06
4	0.4	0.022715110	0.178688064	0.022793219	0.781090E-04
5	0.5	0.046098359	0.298223418	0.046302490	0.204131E-03
6	0.6	0.083724841	0.467479658	0.084136808	0.411968E-03
7	0.7	0.141501753	0.708125200	0.142288380	0.786628E-03
8	0.8	0.228133669	1.057058842	0.229638557	0.150489E-02
9	0.9	0.357181945	1.580506443	0.360158218	0.297627E-02
10	1.0	0.551159854	2.406096892	0.557407725	0.624787E-02

Решением задачи является табличная функция располагающаяся во втором и третьем столбцах таблицы 4.13.

Пример 4.8. Методом Адамса-Бэшфорта-Моултона с шагом $h=0.1$ получить численное решение начальной задачи из Примера 4.7.

Решение

Как и в предыдущем примере в первых трех узлах после начального решение получаем методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Начиная с четвертого узла ($k=4$) на каждом шаге в расчетах y_{k+1} используем соотношения (4.26),(4.27).

Таблица 4.14

k	x_k	\hat{y}_k	y_k	$f(x_k, y_k)$	$y_{ум}$	ε_k
0	0.0	-	0.00000000	0.0000000000	0.00000000	0.00000000
1	0.1	-	0.000334589	0.010067030	0.00033467	0.8301E-07
2	0.2	-	0.002709878	0.041091295	0.002710036	0.1573E-06
3	0.3	-	0.009336039	0.095688785	0.009336250	0.2103E-06
4	0.4	0.022715110	0.02279808	0.17875822	0.022793219	0.4863E-05
5	0.5	0.046197407	0.04631491	0.29845998	0.046302490	0.1242E-04
6	0.6	0.083978353	0.08416105	0.46807634	0.084136808	0.2424E-04
7	0.7	0.142027364	0.142331883	0.70952300	0.142288380	0.4350E-04

8	0.8	0.229171282	0.229714203	1.06031134	0.229638557	0.7565E-04
9	0.9	0.359247335	0.360288001	1.58832585	0.360158218	0.1298E-03
10	1.0	0.555451403	0.557625580	2.42619745	0.557407725	0.2179E-03

Решением задачи является табличная функция располагающаяся во втором и четвертом столбцах таблицы 4.14.

Решение полученное методом Адамса-Бэшфорта-Моултона несколько точнее, чем решение методом Адамса.

Найдите больше информации на сайте **Учитель.ру** (www.uchites.ru)!