

## 2. Решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

### 2.1. Решение нелинейных уравнений

Численное решение нелинейных (алгебраических или трансцендентных) уравнений вида

$$f(x) = 0 \quad (2.1)$$

заключается в нахождении значений  $x$ , удовлетворяющих (с заданной точностью) данному уравнению и состоит из следующих основных этапов:

1. *Отделение* (изоляция, локализация) корней уравнения.
2. *Уточнение* с помощью некоторого вычислительного алгоритма конкретного выделенного корня с заданной точностью.

Целью первого этапа является нахождение отрезков из области определения функции  $f(x)$ , внутри которых содержится только один корень решаемого уравнения. Иногда ограничиваются рассмотрением лишь какой-нибудь части области определения, вызывающей по тем или иным соображениям интерес. Для реализации данного этапа используются *графические* или *аналитические* способы.

При аналитическом способе отделения корней полезна следующая теорема [3]:

**Теорема 2.1.** Непрерывная строго монотонная функция  $f(x)$  имеет и притом единственный нуль на отрезке  $[a, b]$  тогда и только тогда, когда на его концах она принимает значения разных знаков.

Достаточным признаком монотонности функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  является сохранение знака производной функции.

Графический способ отделения корней целесообразно использовать в том случае, когда имеется возможность построения графика функции  $y = f(x)$ . Наличие графика исходной функции дает непосредственное представление о количестве и расположении нулей функции, что позволяет определить промежутки, внутри которых содержится только один корень. Если построение графика функции  $y = f(x)$  вызывает затруднение, часто оказывается удобным преобразовать уравнение (2.1) к эквивалентному виду  $f_1(x) = f_2(x)$  и построить

графики функций  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$ . Абсциссы точек пересечения этих графиков будут соответствовать значениям корней решаемого уравнения.

Так или иначе, при завершении первого этапа, должны быть определены промежутки, на каждом из которых содержится только один корень уравнения.

Для уточнения корня с требуемой точностью обычно применяется какой-либо итерационный метод, заключающийся в построении числовой последовательности  $x^{(k)}$  ( $k=0,1,2,\dots$ ), сходящейся к искомому корню  $x^{(*)}$  уравнения (2.1).

Метод половинного деления. Процесс уточнения корня уравнения (2.1) на отрезке  $[a,b]$ , при условии, что функция  $f(x)$  непрерывна на этом отрезке, заключается в следующем [1,2].

Исходный отрезок делится пополам. Если  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , то  $x^{(*)} = \frac{a+b}{2}$  - является корнем уравнения. Если  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ , то выбирается та из половин  $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$  или  $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$ , на концах которой функция  $f(x)$  имеет противоположные знаки.

Новый суженный отрезок  $[a^{(1)}, b^{(1)}]$  снова делится пополам и проводится то же рассмотрение и т.д. В результате на каком-то этапе либо находится точный корень уравнения (1), либо имеется последовательность вложенных друг в друга отрезков  $[a^{(1)}, b^{(1)}], [a^{(2)}, b^{(2)}], \dots, [a^{(k)}, b^{(k)}]$  для которых  $f(a^{(k)})f(b^{(k)}) < 0$   $k = 0,1,2,\dots$

Если требуется найти корень с точностью  $\varepsilon$ , то деление отрезка пополам продолжается до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше  $2\varepsilon$ . Тогда середина последнего отрезка даст значение корня с требуемой точностью.

Метод Ньютона (метод касательных). При нахождении корня уравнения (2.1) методом Ньютона, итерационный процесс определяется формулой

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} \quad k = 0,1,2,\dots \quad (2.2)$$

Для начала вычислений требуется задание начального приближения  $x_0$ .

Условия сходимости метода определяются следующей теоремой [3]:

**Теорема 2.2.** Пусть на отрезке  $[a, b]$  функция  $f(x)$  имеет первую и вторую производные постоянного знака и пусть  $f(a)f(b) < 0$ .

Тогда если точка  $x^{(0)}$  выбрана на  $[a, b]$  так, что

$$f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0, \quad (2.3)$$

то начатая с нее последовательность  $x^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), определяемая методом Ньютона (2.2), монотонно сходится к корню  $x^{(*)} \in (a, b)$  уравнения (2.1).

В качестве условия окончания итераций в практических вычислениях часто используется правило  $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon \Rightarrow x^{(*)} \approx x^{(k+1)}$ .

Метод простой итерации. При использовании метода простой итерации уравнение (2.1) заменяется эквивалентным уравнением с выделенным линейным членом

$$x = \varphi(x) \quad (2.4)$$

Решение ищется путем построения последовательности

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

начиная с некоторого заданного значения  $x^{(0)}$ . Если  $\varphi(x)$  - непрерывная функция, а  $x^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) - сходящаяся последовательность, то значение  $x^{(*)} = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}$  является решением уравнения (2.4).

Условия сходимости метода и оценка его погрешности определяются теоремой [3]:

**Теорема 2.3.** Пусть функция  $\varphi(x)$  определена и дифференцируема на отрезке  $[a, b]$ . Тогда если выполняются условия:

- 1)  $\varphi(x) \in [a, b] \quad \forall x \in [a, b]$ ,
- 2)  $\exists q : |\varphi'(x)| \leq q < 1 \quad \forall x \in (a, b)$ ,

то уравнение (2.4) имеет и притом единственный на  $[a, b]$  корень  $x^{(*)}$ ; к этому корню сходится определяемая методом простой итерации последовательность  $x^{(k)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), начинающаяся с любого  $x^{(0)} \in [a, b]$ .

При этом справедливы оценки погрешности ( $\forall k \in N$ ):

$$|x^{(*)} - x^{(k+1)}| \leq \frac{q}{1-q} |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \quad (2.6)$$

$$|x^{(*)} - x^{(k+1)}| \leq \frac{q^{k+1}}{1-q} |x^{(1)} - x^{(0)}|.$$

Пример 2.1. Решить уравнение

$$f(x) = e^{2x} + 3x - 4 = 0 \quad (2.7)$$

с точностью  $\varepsilon = 10^{-3}$ .

Решение. Для локализации корней применим графический способ. Преобразуем исходное уравнение к следующему эквивалентному виду:

$$e^{2x} = 4 - 3x$$

Построив графики функций  $f_1(x) = e^{2x}$  и  $f_2(x) = 4 - 3x$  (рис. 2.1), определяем, что у решаемого уравнения имеется только один корень, который находится в интервале  $0.4 < x^{(*)} < 0.6$ .

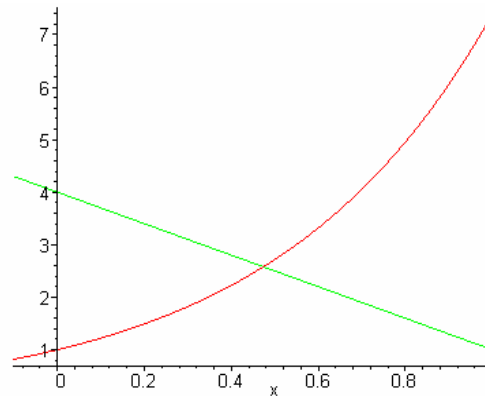


Рис. 2.1

Уточним значение корня с требуемой точностью, пользуясь методами приведенными выше.

Метод половинного деления. В качестве исходного отрезка выберем  $[0.4, 0.6]$ . Результаты дальнейших вычислений, согласно приведенному выше алгоритму содержатся в таблице 2.1.

Таблица 2.1

$k$	$a^{(k)}$	$b^{(k)}$	$f(a^{(k)})$	$f(b^{(k)})$	$\frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}$	$f\left(\frac{a^{(k)} + b^{(k)}}{2}\right)$
0	0.4000	0.6000	-0.5745	1.1201	0.5000	0.2183
1	0.4000	0.5000	-0.5745	0.2183	0.4500	-0.1904
2	0.4500	0.5000	-0.1904	0.2183	0.4750	0.0107
3	0.4500	0.4750	-0.1904	0.0107	0.4625	-0.0906
4	0.4625	0.4750	-0.0906	0.0107	0.4688	-0.0402
5	0.4688	0.4750	-0.0402	0.0107	0.4719	-0.0148

6	0.4719	0.4750	-0.0148	0.0107	0.4734	-0.0020
7	0.4734	0.4750	-0.0020	0.0107	[0.4742]	

$$x^{(*)} \approx 0.474$$

Метод Ньютона. Для корректного использования данного метода необходимо, в соответствии с теоремой 2.2, определить поведение первой и второй производной функции  $f(x)$  на интервале уточнения корня и правильно выбрать начальное приближение  $x^{(0)}$ .

Для функции  $f(x) = e^{2x} + 3x - 4 = 0$  имеем:

$f'(x) = 2e^{2x} + 3$ ,  $f''(x) = 4e^{2x}$  - положительные во всей области определения функции. В качестве начального приближения можно выбрать правую границу интервала  $x^{(0)} = 0.6$ , для которой выполняется неравенство (2.3):

$$f(0.6)f''(0.6) > 0$$

Дальнейшие вычисления проводятся по формуле (2.2), где

$$f(x^{(k)}) = e^{2x^{(k)}} + 3x^{(k)} - 4, \quad f'(x^{(k)}) = 2e^{2x^{(k)}} + 3.$$

Итерации завершаются при выполнении условия  $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$ .

Результаты вычислений содержатся в таблице 2.2.

Таблица 2.2

$k$	$x^{(k)}$	$f(x^{(k)})$	$f'(x^{(k)})$	$-f(x^{(k)})/f'(x^{(k)})$
0	0.6000	1.1201	9.6402	-0.1162
1	0.4838	0.0831	8.2633	-0.0101
2	0.4738	0.0005	8.1585	-0.0001
3	[0.4737]			

$$x^{(*)} \approx 0.474$$

Метод простой итерации. Уравнение (2.7) можно записать в виде

$$x = \frac{4 - e^{2x}}{3} \quad (2.8)$$

или

$$x = \frac{\ln(4 - 3x)}{2} \quad (2.9).$$

Из двух этих вариантов приемлемым является вариант (2.9), так как, взяв за основной интервал (0.4, 0.55) и положив  $\varphi(x) = \frac{\ln(4 - 3x)}{2}$ , будем иметь:

1)  $\varphi(x) \in [0.4, 0.55] \quad \forall x \in [0.4, 0.55]$

2)  $\varphi'(x) = -\frac{3}{2(4-3x)}$ . Отсюда, на интервале  $(0.4, 0.55)$   $|\varphi'(x)| < 0.64 = q$ .

Условия теоремы 2.3 выполнены.

В качестве начального приближения положим  $x^{(0)} = (0.4 + 0.55)/2 = 0.475$ .

Вычисляем последовательные приближения  $x^{(k)}$  с одним запасным знаком по формуле (2.5), где  $\varphi(x^{(k)}) = \frac{\ln(4-3x^{(k)})}{2}$ .

В соответствии с (2.6) достижение требуемой точности контролируется условием  $\frac{q}{1-q} |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon$ .

Результаты вычислений приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3

$k$	$x^{(k)}$	$\varphi(x^{(k)})$
0	0.4750	0.4729
1	0.4729	0.4741
2	0.4741	0.4734
3	0.4734	0.4738
4	[0.4738]	

$x^{(*)} \approx 0.474$

**Замечание.** Если непосредственное преобразование уравнения (2.1) к виду (2.4), не позволяет получить уравнение, для которого выполняются условия сходимости метода простой итерации, можно преобразовать уравнение (2.1) к следующему эквивалентному уравнению

$$x = x - \lambda f(x).$$

Данное уравнение имеет вид (2.4) с  $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ . Здесь  $\lambda$  - параметр, который подбирается таким образом [2,3], чтобы в нужной области выполнялось неравенство  $|\varphi'(x)| = |1 - \lambda f'(x)| \leq q < 1$ .

Найдите больше информации на сайте **Учитель.ру** ([www.uchites.ru](http://www.uchites.ru))!