



Auteur : T.ROCACHER

La Transformée de Fourier Discrète DFT

1. Introduction

La transformée de Fourier discrète (TFD), est un traitement numérique qui transforme un bloc de M échantillons régulièrement répartis dans le temps provenant d'un signal, et qui donne M points régulièrement espacés dans le domaine des fréquences.

Deux paramètres temporels définissent l'opération :

Te : période d'échantillonnage, c'est le *pas temporel*.

T : durée totale de la mesure. Elle se déduit de T_e , connaissant le nombre de points **M** du bloc, $T = M \cdot T_e$. T est l'*étendue temporelle*.

Symétriquement, deux paramètres fréquentiels caractérisent le résultat

Fe = $1/T_e$: Fréquence d'échantillonnage, c'est l'*étendue fréquentielle*.

F = $1/T$: *pas fréquentiel*.

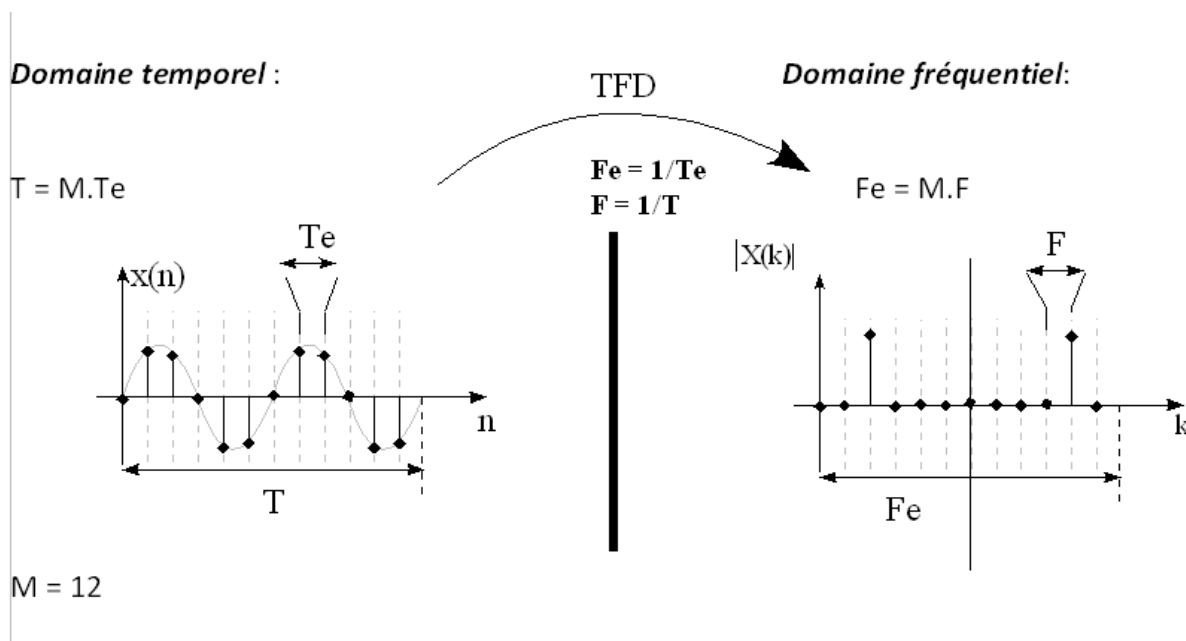


Figure 1 : Résultat d'une DFT sur l'échantillonnage d'une sinusoïde.

Chacun des points fréquentiels de rang k élaborés par la DFT, se calcule à partir de l'ensemble des points échantillonnés. Voici la relation :

$$X(k) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{n=0}^{M-1} x(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi \cdot k \cdot n}{M}}, \quad X(k) \text{ est un nombre complexe}$$

Il est intéressant de comparer la TFD d'un signal échantillonné avec la transformée de Fourier classique du signal continu, dont est issu le bloc de M points. En effet, nous allons voir qu'il existe des différences importantes qui peuvent conduire à de fortes disparités entre les deux transformées.

Parmi ces différences, propres à la numérisation du signal, on peut citer :

- le **fenêtrage** (c'est à dire le fait de prélever le signal sur une étendue finie, T).
- **l'effet de l'échantillonnage temporel** (le fait de prélever à instants réguliers espacés de T_e)
- **L'effet de l'échantillonnage fréquentiel** (qui consiste à choisir un nombre fini de points du spectre)

Afin d'illustrer les développements qui vont suivre, nous nous appuierons, à chaque étape, sur un même exemple, celui d'un signal de type sinusoïdal.

2. Rappel sur la transformée de Fourier continue

La transformée de Fourier continue (par opposition à la DFT) est définie par la relation suivante :

$$S(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot t} dt$$

Interprétation :

La relation donne, le *spectre d'amplitude* du signal $s(t)$. C'est une fonction complexe continue de la fréquence f . La dimension de cette fonction est [V / Hz] (si $s(t)$ est une tension en volt, [V]). Le spectre d'amplitude est donc en réalité une *densité spectrale d'amplitude*.

Exemple : $s(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_B \cdot t + \varphi)$. A priori, ce signal étant périodique et infini, on ne peut y appliquer la relation. On contourne l'obstacle en utilisant l'opérateur *Dirac* : $\delta(t)$ qui n'est pas une fonction au sens purement mathématique. En effet, l'impulsion de Dirac est une *distribution* définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta(t) \text{ est infini pour } t = 0 \\ \delta(t) = 0 \text{ partout ailleurs,} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = 1 \end{array} \right.$$

On représente usuellement l'impulsion par une flèche, afin de montrer qu'il ne s'agit pas d'une fonction classique, et sa hauteur représente la surface de l'impulsion, son poids :

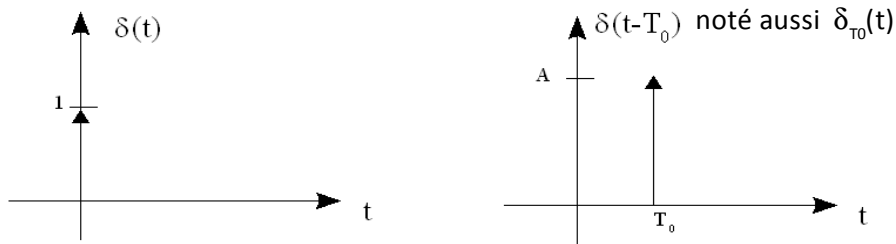


Figure 2 : Représentation graphique de l'impulsion de Dirac

La transformée de Fourier de $s(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_B \cdot t + \varphi_B)$ est :

$$S(jf) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f - F_B) e^{j \cdot \varphi_B} + \frac{A}{2} \cdot \delta(f + F_B) e^{-j \cdot \varphi_B}$$

On peut le montrer facilement en utilisant la transformée de Fourier inverse (elle donne la fonction temporelle à partir de la densité spectrale d'amplitude), voir annexe.

La représentation graphique de la densité spectrale d'amplitude d'une sinusoïde (module seul) est donc :

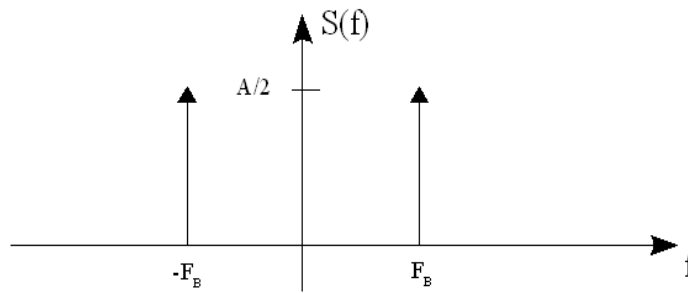
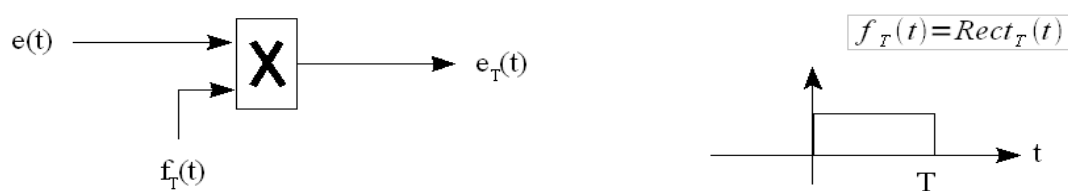


Figure 3 : Transformée de Fourier continue d'un signal sinusoïdal

3. Effet de la troncature temporelle sur la transformée de Fourier continue

La TFD travaille forcément sur une durée finie, $T = M \cdot T_e$. Cela constitue une première différence majeure avec la "vraie" transformée de Fourier. Au mieux, la TFD ne peut donc que tendre vers la transformée de Fourier du signal tronqué. Nous allons donc l'étudier.

L'effet de la troncature, ou du *fenêtrage* du signal, peut être vu comme la multiplication de celui-ci par une fenêtre, noté $f_T(t)$, l'indice T pour rappeler que ce signal est non nul sur la durée T. Pour faire simple, nous traiterons uniquement la **fenêtre rectangulaire** :



Graphiquement :

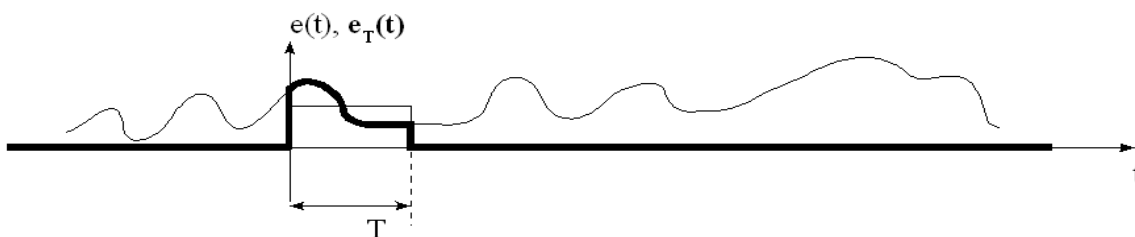


Figure 4 : Troncature d'un signal par une fenêtre rectangulaire

Exploitions une des propriétés fondamentales de la transformée de Fourier vis à vis de la multiplication :

si $c(t) = a(t).b(t)$, alors la transformée de Fourier de $c(t)$, $C(jf)$ est :

$C(jf) = A \otimes B(jf)$, l'opérateur \otimes est l'opérateur de **convolution** (voir annexe), $A(jf)$ et $B(jf)$ étant les transformées de Fourier respectives de $a(t)$ et $b(t)$.

Soit donc $E(jf)$ la transformée de Fourier de $e(t)$. La transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire $f_T(t)$ est :

$$F_T(jf) = T \cdot \text{sin}_c(\pi \cdot f \cdot T)$$

NB: pour simplifier l'expression, le calcul est fait à partir d'une fenêtre centrée sur 0 (voir annexe). Ca ne change rien au propos.

Conclusion : La DFT d'un signal $e(t)$, à cause du fenêtrage par une fonction définie sur T , $f_T(t)$, ne peut que tendre que vers le résultat :

$E_T(jf) = E(jf) \otimes F(jf)$. Le spectre obtenu par DFT est donc DIFFERENT du spectre continue, et la forme de la fonction de fenêtrage a un rôle important.

Pour un fenêtrage rectangulaire, $f_T(t) = \text{Rect}_T(t)$, alors la DFT tendra vers le spectre :

$$E_T(jf) = E(jf) \otimes T \cdot \text{sin}_c(\pi \cdot f \cdot T)$$

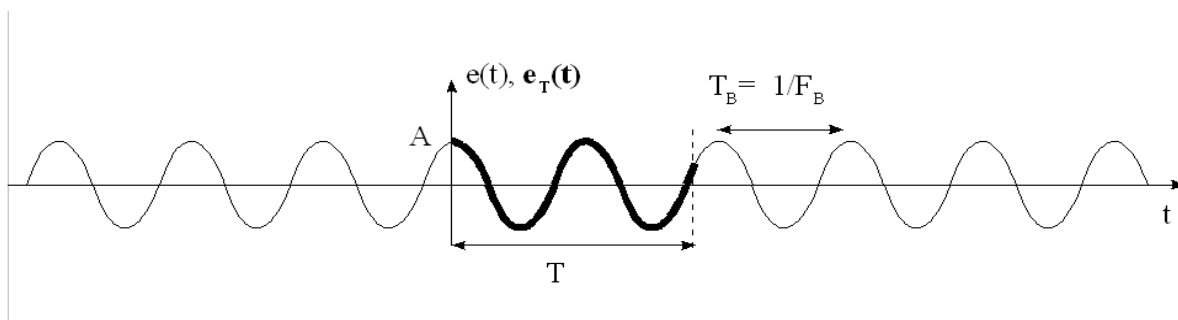


Figure 5 : Exemple sur un signal sinusoïdal tronqué par une fenêtre rectangulaire:

Le signal $e(t)$ est volontairement choisi comme étant un cosinus pour éviter de traîner une phase dans l'expression de la transformée de Fourier (qui surcharge inutilement). Sur la figure ci-dessus, la troncature se fait sur un nombre non entier de périodes de $e(t)$, c'est volontaire.

En appliquant ce qui a été vu :

$$E_T(jf) = E(jf) \otimes T \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T)$$

$$E_T(jf) = \left(\frac{A}{2} \cdot \delta(f - F_B) + \frac{A}{2} \cdot \delta(f + F_B) \right) \otimes T \cdot \text{sinc}(\pi \cdot f \cdot T)$$

Soit en utilisant la propriété concernant la convolution des Impulsions de Dirac (voir annexe) :

$$E_T(jf) = \left(\frac{A \cdot T}{2} \cdot \text{sinc}(\pi \cdot (f + F_B) \cdot T) + \frac{A \cdot T}{2} \cdot \text{sinc}(\pi \cdot (f - F_B) \cdot T) \right)$$

Ce qui donne graphiquement :

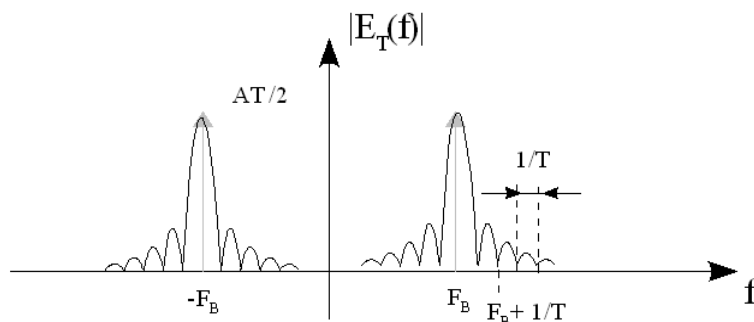


Figure 6: Transformée de Fourier continue d'un signal sinusoïdal tronqué par une fenêtre rectangulaire : ce vers quoi tendra la DFT

Plus la fenêtre sera large, plus la transformée de Fourier ressemblera à la "vraie" transformée de Fourier.

Exemple avec la durée T quatre fois plus grande :

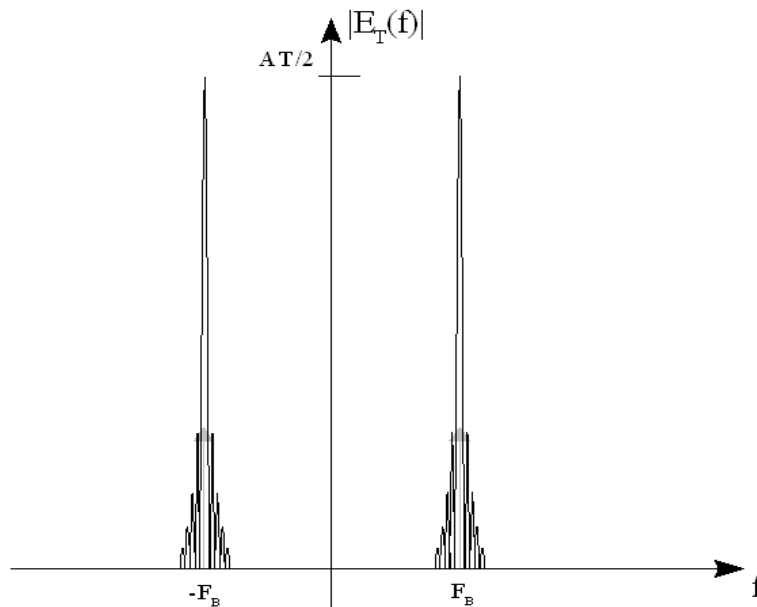


Figure 7: Même transformée de Fourier, avec un fenêtrage 4 fois plus long

4. Effet de l'échantillonnage temporel

Afin de calculer une DFT, il est nécessaire de procéder à un **échantillonnage temporel**. Mathématiquement, la représentation d'un échantillonnage, à savoir prélever des valeurs de tension à des instants bien particuliers et en un temps nul, est impossible à formaliser, sauf là encore à utiliser l'impulsion de Dirac.

On fera donc appel au **peigne de Dirac** qui est une suite infinie d'impulsions. En voici la définition :

$$\mathbb{W}_{T_e}(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \delta(t - nT_e) \quad , \quad F_e = 1/T_e, \text{ signal sans réalité physique}$$

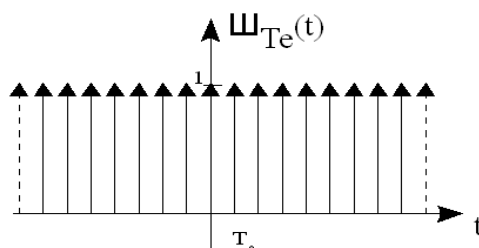


Figure 8: Représentation temporelle du peigne de dirac

On démontre que la transformée de Fourier d'un peigne de Dirac est un peigne de Dirac, pondéré par un facteur F_e (voir Annexe) :

$\mathbb{I}_{T_e}(t)$ donne par transformée de Fourier : $F_e \cdot \mathbb{I}_{T_e}(jf)$, graphiquement :

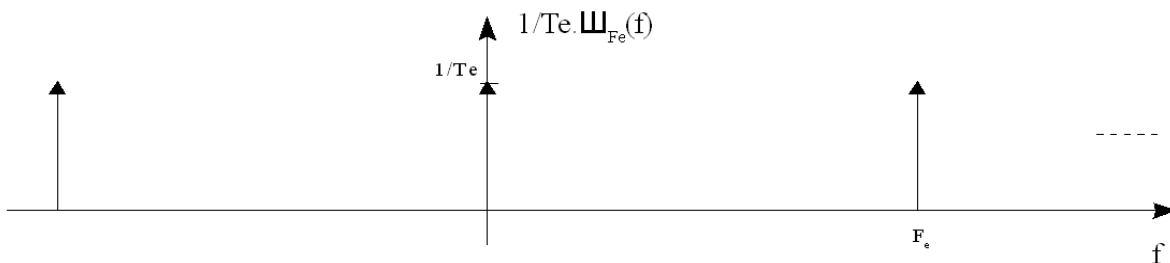


Figure 9 : Transformée de Fourier d'un peigne de dirac.

Grâce à ce formalisme, on peut écrire l'expression de ce qu'on appelle le **signal échantillonné** $x^*(t)$. $x^*(t)$ est considéré comme une fonction du temps (et non une suite de nombres).

$x^*(t) = x(t) \cdot \mathbb{I}_{T_e}(t)$, dont on peut faire la représentation graphique :

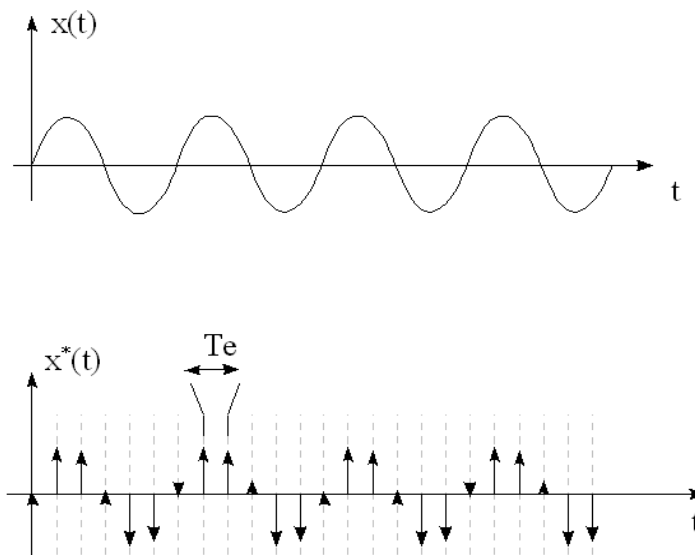


Figure 10 : signal échantillonné d'une sinusoïde. C'est une fonction du temps.

$x^*(t)$ étant considérée comme une fonction (même si ce n'est pas très rigoureux car une impulsion de Dirac est une distribution), on peut en prendre la transformée de Fourier :

$$X^*(f) = X(f) \otimes 1/T_e \cdot \text{Ш}_{Fe}(f),$$

On obtient donc :

$$X^*(f) = \frac{1}{T_e} \cdot X(f) \otimes \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} \delta(f - i \cdot Fe)$$

Et finalement :

$$X^*(f) = \frac{1}{T_e} \cdot \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} X(f - i \cdot Fe)$$

Cette expression révèle que la transformée de Fourier du signal échantillonné $x^*(t)$, est égale (à un coefficient près) à la transformée de Fourier de $x(t)$, périodisée indéfiniment tous les Fe .

Graphiquement :

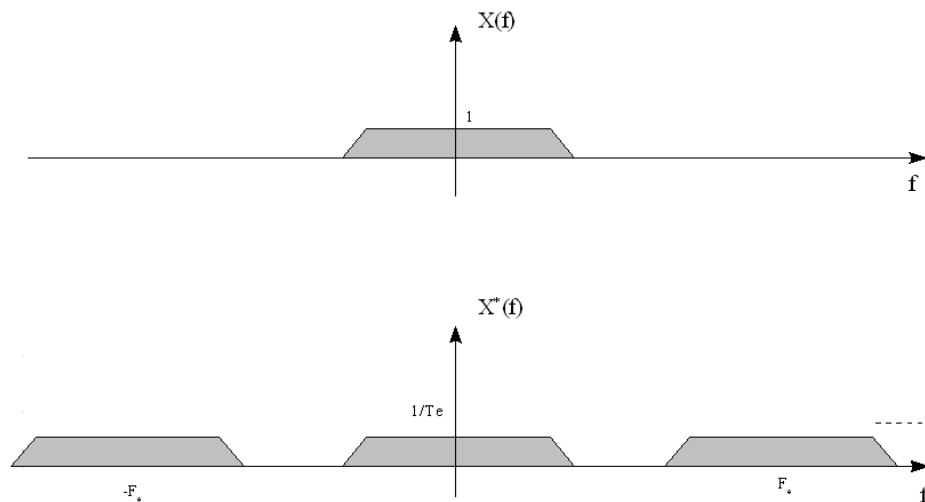


Figure 11 : Spectre d'un signal échantillonné : périodisation infinie

Cette représentation graphique est à la base du *théorème de Shannon* qui précise que l'on peut échantillonner un signal sans perte d'information, à condition que la fréquence maximale du signal continu qui a été échantillonné ne dépasse pas $Fe/2$, (Fe étant la fréquence d'échantillonnage).

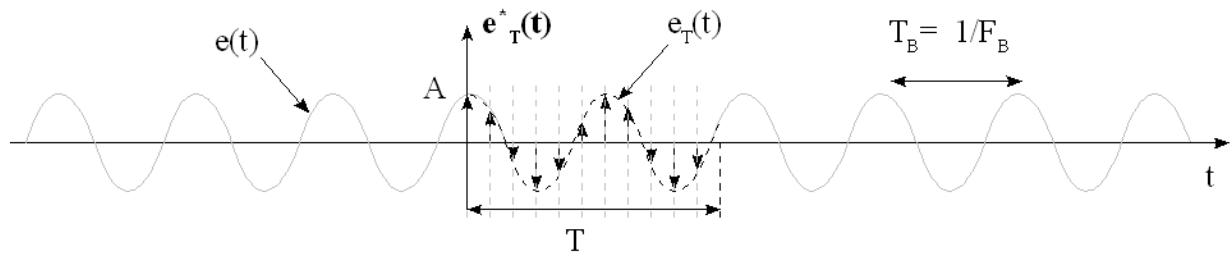


Figure 12 : signal sinusoïdal tronqué par une fenêtre rectangulaire et échantillonné

Voici rappelés les spectres respectifs de $e(t)$, $e_T(t)$ et $e_T^*(t)$:

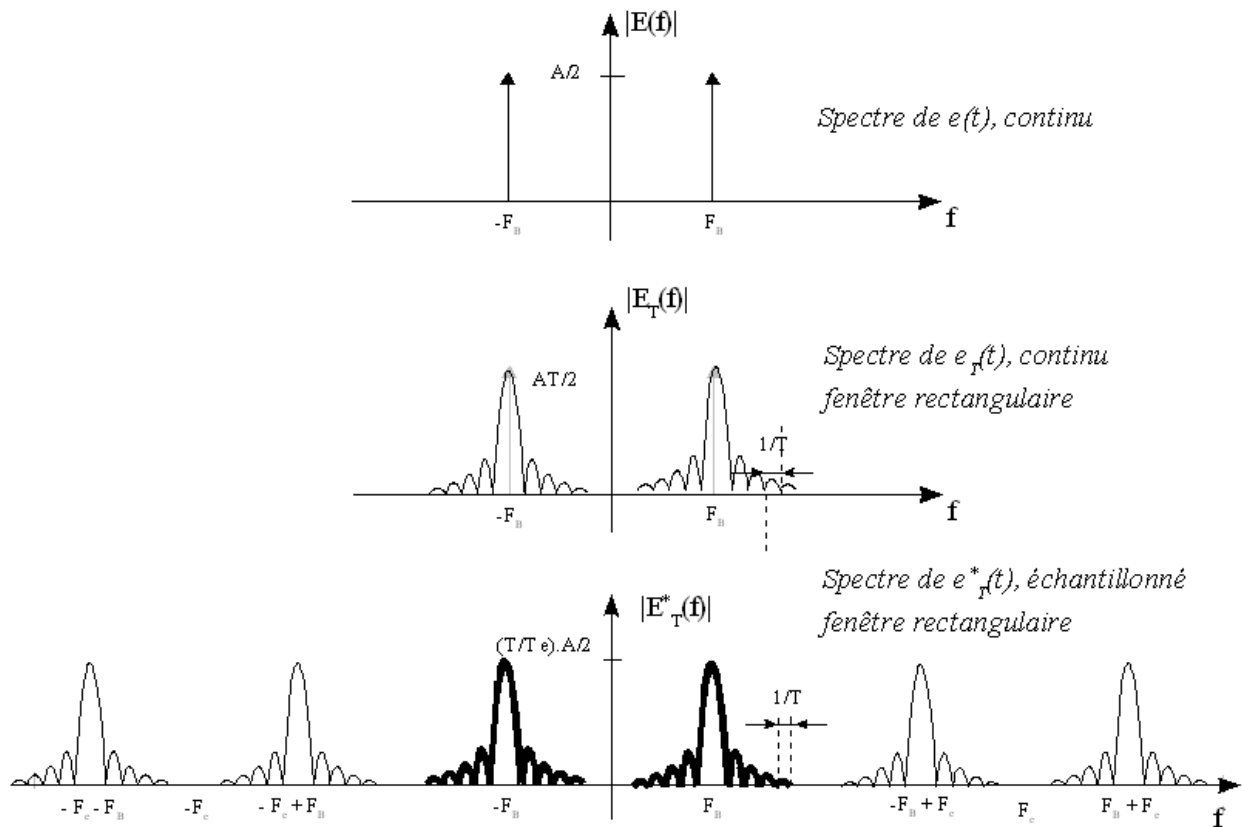


Figure 13 : illustration des spectres en partant de celui purement théorique, en allant jusqu'à celui du signal échantillonné tronqué

5. L'échantillonnage fréquentiel : la DFT

Nous avons vu que la "vraie" transformée de Fourier, $S(jf) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt$, ne peut être calculée que pour un signal déterminé sur tout l'espace temps. C'est donc un outil purement mathématique qui ne peut pas être mis en oeuvre "en temps réel". Les appareils de mesure de spectre (analyseur de spectre), qu'ils soient analogiques ou numériques, ne peuvent que faire une approximation de la transformée de Fourier véritable.

Nous avons jusqu'à maintenant, opéré une véritable transformée de Fourier sur un signal continu $e(t)$, qui subit deux dégradations :

- **la troncature (par une fenêtre rectangulaire)** : Le spectre est alors celui de $e(t)$, convolué à un sinus cardinal : $E_T(jf) = E(jf) \otimes T \cdot \text{sin}_c(\pi \cdot f \cdot T)$
- **L'échantillonnage temporel (à une fréquence F_e)** : Le spectre précédent est périodisé d'une période fréquentielle F_e (et pondéré par $1/T_e$) : $E_T^*(f) = \frac{1}{T_e} \cdot \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} E_T(f - i \cdot F_e)$

Cette dernière relation est précieuse car elle permet de bien voir l'aspect périodisation de spectre. Mais, elle ne permet pas le calcul effectif de $E_T^*(f)$ à partir de $e(t)$, puisque les échantillons temporels n'apparaissent pas directement dans l'expression.

Revenons donc à l'expression du signal échantillonné :

$e^*(t) = e(t) \cdot \text{Ш}_{T_e}(t)$, ce qui donne, pour le signal tronqué par une fenêtre rectangle échantillonné :

$e_T^*(t) = e_T(t) \cdot \text{Ш}_{T_e}(t)$, soit

$$e_T^*(t) = e_T(t) \cdot \sum_{n=0}^{n=M-1} \delta(t - n \cdot T_e) = \sum_{n=0}^{n=M-1} e_T(t) \cdot \delta(t - n \cdot T_e) = \sum_{n=0}^{n=M-1} e_T(n \cdot T_e) \cdot \delta(t - n \cdot T_e)$$

Pour prendre la transformée de Fourier de ce signal, il suffit de prendre celle de chacune des impulsions de Dirac (voir annexe) : $\delta(t - n \cdot T_e)$ donne par la transformée : $e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T_e}$

Ainsi, on dispose d'une nouvelle écriture de la transformée de Fourier du signal échantillonné fenêtré par une rectangle :

$$E_T^*(f) = \frac{1}{T_e} \cdot \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} E_T(f - i \cdot F_e) = \sum_{n=0}^{n=M-1} e_T(n \cdot T_e) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot n \cdot T_e}$$

(pour info, cette expression est celle de la transformée en z, si M tend vers l'infini).

Cette seconde expression, $E_T^*(f) = \sum_{n=0}^{n=M-1} e_T(n.T_e) \cdot e^{-j.2.\pi.f.n.T_e}$ mérite deux commentaires :

- Elle confirme la périodicité fréquentielle de $E_T^*(f)$. En effet, si on remplace f par $f + iF_e$,

$$E_T^*(f + i.F_e) = \sum_{n=0}^{n=M-1} e_T(n.T_e) \cdot e^{-j.2.\pi.(f+i.F_e).n.T_e} = \sum_{n=0}^{n=M-1} e_T(n.T_e) \cdot e^{-j.2.\pi.f.n.T_e}$$

- Elle exploite directement les échantillons temporels, donc elle est utilisable pour le calcul en temps réel.

En dernier ressort, la DFT consiste à ne prendre qu'un certain nombre de points fréquentiels. En effet, un ordinateur ne peut calculer l'ensemble des fréquences continues. On va donc choisir un certain nombre de points.

Les points fréquentiels calculés sont espacés de $F = 1/T$: F est le pas fréquentiel qui est d'autant plus fin que la fenêtre d'analyse a une grande ouverture, T.

Il serait aberrant de calculer plus de M points. En effet, $M.F = F_e$. Donc aller au delà, c'est refaire un calcul bien inutile puisque déjà fait.

Par ailleurs, si le signal est réel (c'est le cas lorsqu'on fait de la mesure), le spectre présente une propriété de symétrie (paire pour le module, impaire pour la phase), ce qui fait que l'on trouve de la redondance au delà de $F_e/2$.

La transformée de Fourier discrète (TFD) d'un signal $e(t)$ est donc la transformée de Fourier du signal $e(t)$, tronqué par une fenêtre, échantillonné à une fréquence F_e , et dont on ne prend les valeurs de fréquence que tous les $k.F$, F étant le pas fréquentiel égal à l'inverse de la durée d'ouverture de la fenêtre, T.

On procède en plus à une normalisation qui consiste à diviser la valeur par M (autrement dit, multiplier par T_e et diviser par T). Cela permet d'obtenir directement, pour une sinusoïde, l'amplitude de cette dernière :

$$X(k) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{n=0}^{n=M-1} x(n) \cdot e^{-j \frac{2.\pi.k.n}{M}}, \text{ k de 0 à M-1}$$

Remarque : Le choix de prendre M points fréquentiels répartis tous les $1/T$ permet de symétriser la relation et d'obtenir $\{x(n)\}$ à partir de $\{X(k)\}$ avec la même relation (au signe près de l'exponentielle et sans le coefficient $1/M$), voir [1].

Exemple sur un signal sinusoïdal tronqué par une fenêtre rectangulaire, échantillonné dans le temps, et discrétisé en fréquence de 0 à F_e , et normalisé :

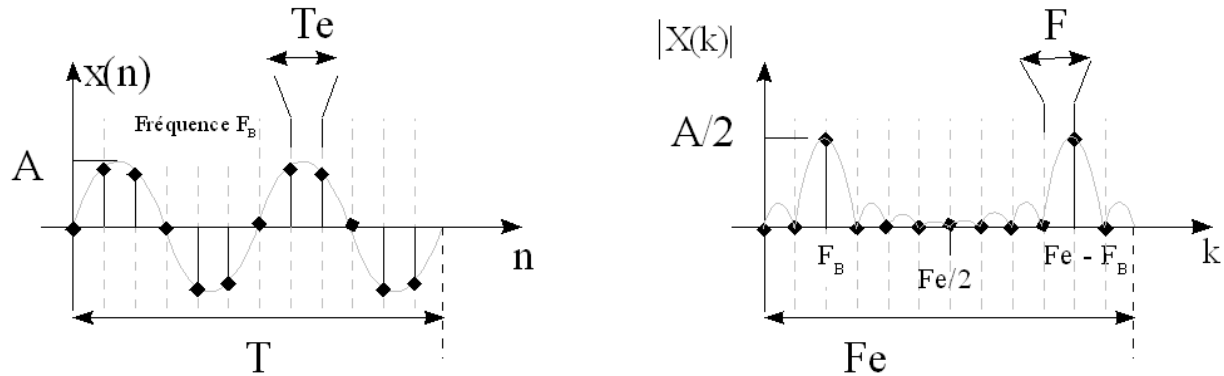


Figure 14 : Résultat d'une transformée de Fourier discrète avec en filigrane le spectre continu.

Remarque 1 : Rien n'empêche de choisir des échantillons de fréquence répartis dans l'intervalle

$$\left[-\frac{F_e}{2}; +\frac{F_e}{2} - 1 \right], \text{ se rapprochant plus naturellement de la transformée de Fourier continue. Simple-}$$

ment, il est possible de calculer l'ensemble de M points de DFT par un algorithme particulier qu'on appelle FFT (Fast Fourier Transform). La contrainte est alors que M est une puissance de 2, et les calculs sont faits de 0 à $M-1$. Voilà pourquoi les M points choisis sur la représentation sont à fréquences positives. La partie de $F_e/2$ à F_e correspond à la partie négative de $-F_e/2$ à 0.

Remarque 2 : Le spectre obtenu, de 0 à $F_e/2$, correspond EXACTEMENT à la transformée de Fourier (présence d'un seul pic dont l'amplitude est $A/2$, valeur attendue). Cela n'est pas toujours le cas. Dans cet exemple, on a une relation d'égalité stricte car :

- Le signal observé satisfait les exigences du théorème de Shannon ($F_B < F_e/2$).
- La fréquence F_B est un multiple du pas fréquentiel F .

6. ANNEXE

6.1. Transformée de Fourier d'un signal sinusoïdal

Rappelons la définition de la transformée de Fourier inverse : c'est une relation symétrique de la transformée de Fourier directe, mais on enlève le signe – de l'exponentielle :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(jf) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

soit la densité spectrale $S(jf) = \frac{A}{2} \cdot \delta(f - F_B) e^{j \cdot \varphi_B} + \frac{A}{2} \cdot \delta(f + F_B) e^{-j \cdot \varphi_B}$, supposée être la transformée de Fourier de $s(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_B \cdot t + \varphi_B)$ (ce que nous allons démontrer).

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(jf) \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{A}{2} \cdot \delta(f - F_B) e^{j \cdot \varphi_B} + \frac{A}{2} \cdot \delta(f + F_B) e^{-j \cdot \varphi_B} \right] \cdot e^{+j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

$$s(t) = \frac{A}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - F_B) e^{j \cdot \varphi_B + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df + \frac{A}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f + F_B) e^{-j \cdot \varphi_B + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} df$$

Or, par définition, $\delta(x - x_0) \cdot f(x)$ vaut 0 sauf pour $x = x_0$, c'est donc un Dirac. Ainsi :

$$\delta(x - x_0) \cdot f(x) = f(x_0) \cdot \delta(x - x_0), \text{ Impulsion de Dirac de poids } f(x_0).$$

On peut donc poursuivre le développement :

$$s(t) = \frac{A}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - F_B) e^{j \cdot \varphi_B + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot F_B \cdot t} df + \frac{A}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f + F_B) e^{-j \cdot \varphi_B + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot F_B \cdot t} df$$

$$s(t) = \frac{A}{2} \cdot e^{j \cdot \varphi_B + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot F_B \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - F_B) df + \frac{A}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_B - j \cdot 2 \cdot \pi \cdot F_B \cdot t} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f + F_B) df$$

$$s(t) = \frac{A}{2} \cdot e^{j \cdot \varphi_B + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot F_B \cdot t} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j \cdot \varphi_B - j \cdot 2 \cdot \pi \cdot F_B \cdot t}$$

On retrouve donc le signal temporel : $s(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_B \cdot t + \varphi_B)$

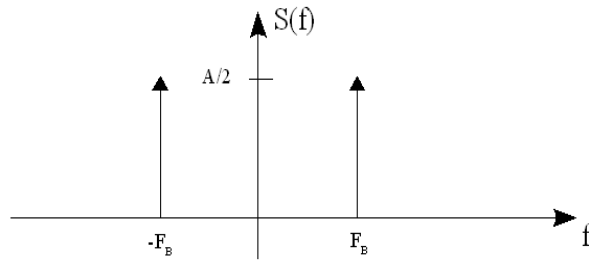


Figure 15 : représentation graphique de la transformée de Fourier continue d'une sinusoïde (module seul)

Ce tracé montre que la seule et unique composante fréquentielle se situe à $f = F_B$ (le côté des fréquences négatives est redondant puisque symétrique).

6.2. La convolution

La convolution de deux fonctions $e(t)$ et $h(t)$ (ou distribution de Dirac), donne une fonction $s(t)$ telle que :

$$s(t) = e \otimes h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau$$

Cette définition peut paraître un peu austère à première vue, mais une interprétation graphique peut grandement aider à la comprendre. Il s'agit de tracer chacune des 3 fonctions à des instants t différents de manière à approcher $s(t)$ dans sa globalité. Nous allons prendre un exemple :

$e(t)$ est un échelon de tension [V], et $h(t)$ s'écrit $h(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ [S^{-1}]

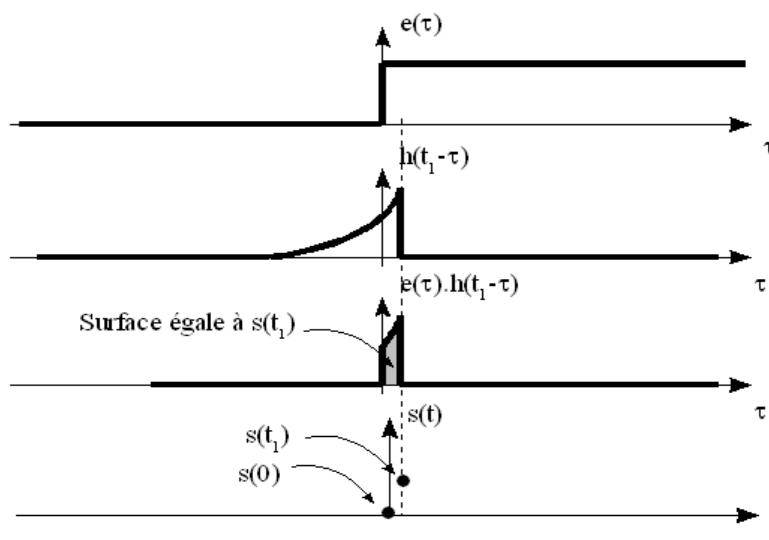


Figure 14 : Tracé de la convolution pour $t = t_1$

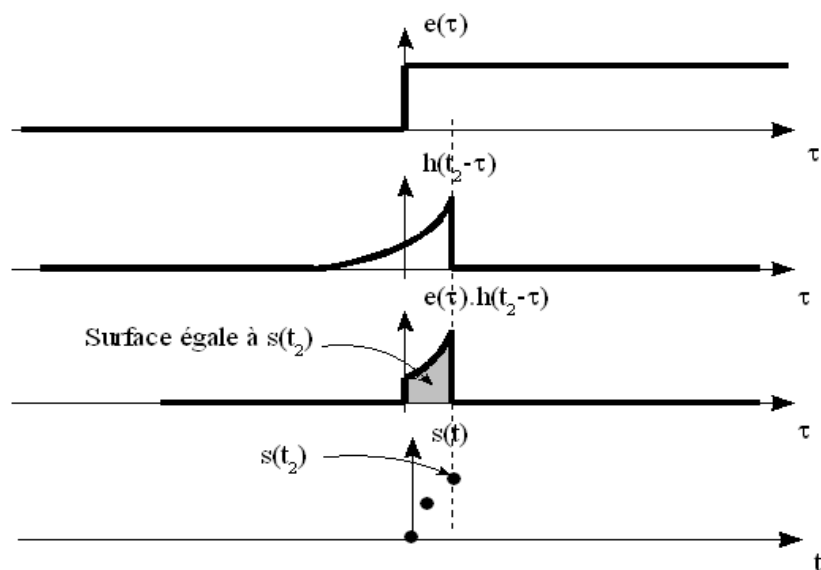


Figure 16 : Tracé de la convolution pour $t = t_2$

En extrapolant jusqu'au point $t = t_n$, et en traçant l'ensemble des points jusque là, on obtient $s(t)$:

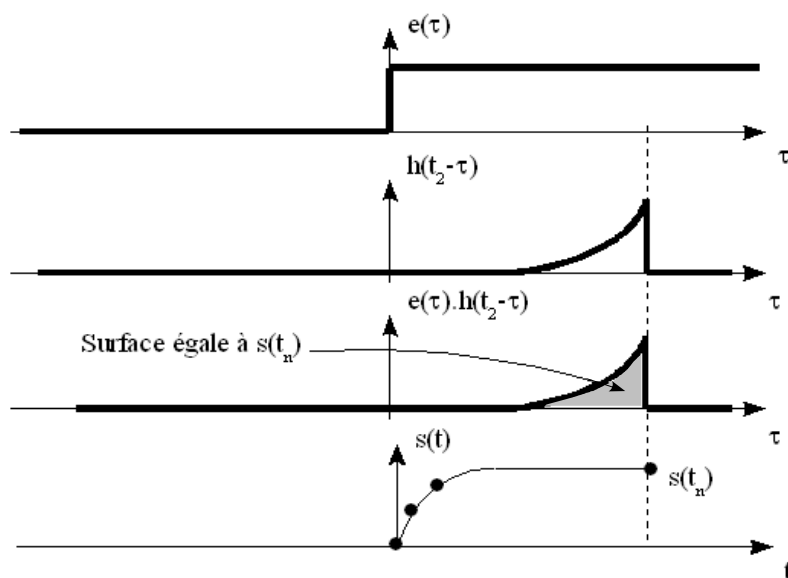


Figure 17 : Tracé de la convolution pour $t = t_n$

Précisons que la fonction $h(t)$ n'est autre que la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas d'ordre 1 dont la constante de temps est T . Elle est homogène à des $[S^{-1}]$, ce qui confère au résultat $s(t)$ une dimension $[V]$. On retrouve la forme exponentielle bien connue de la réponse indicielle d'un passe bas.

On peut donc proposer une méthode générale pour deviner la forme du résultat d'une convolution de deux signaux $a(t)$ et $b(t)$:

- Inverser le temps de l'un des signaux (la variable t devient $-t$).
- Garder l'autre signal fixe, et faire "glisser" progressivement le premier vers les temps croissant.
- Estimer l'intégrale du produit des deux à des instants donnés et tracer à chaque instant un point de la fonction résultante
- Relier tous les points

6.3. La convolution et l'impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac qui est une distribution en toute rigueur et non une fonction, se prête parfaitement à l'opération de convolution.

6.3.1. Convolution avec une impulsion de Dirac centrée

Voici la convolution à déterminer : $s(t) = e \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau$

Etant donné que $\delta(t)$ est nul sauf en $t = 0$, alors $e(\tau) \cdot \delta(t-\tau)$ est nulle partout sauf en $\tau = t$. On peut donc écrire que ;

$$s(t) = e \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \cdot \delta(t-\tau) d\tau \quad \text{ce qui permet de sortir } e(t) \text{ de}$$

l'intégrale :

$$s(t) = e(t) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau) d\tau = e(t) \quad \text{par définition de l'impulsion de Dirac.}$$

On retiendra :

$$e \otimes \delta(t) = e(t) \quad , \text{ autrement dit, le Dirac est neutre vis à vis de l'opération de convolution.}$$

Remarque : Ce résultat se présente parfaitement par l'interprétation graphique de la convolution.

6.3.2. Convolution avec une impulsion de Dirac décalée

On se propose maintenant de déterminer l'opération de convolution suivante :

$$s(t) = e \otimes \delta(t-T_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\tau) \cdot \delta(t-T_0-\tau) d\tau \quad \text{ce qui donne en appliquant le même méca-}$$

nisme que précédemment : $s(t) = e \otimes \delta(t-T_0) = e(t-T_0)$

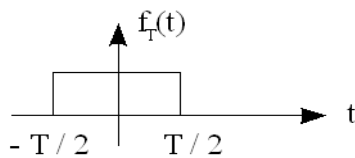
Cette relation est plus générale que la précédente :

$e \otimes \delta(t - T_0) = e(t - T_0)$, la convolution d'une fonction par une impulsion de Dirac décalée donne cette même fonction, mais décalée de la même quantité que le Dirac.

Là encore , cela se vérifie bien par une construction graphique.

6.4. Transformée de Fourier d'une fenêtre rectangulaire

Soit la fenêtre centrée, $f_T(t) = \text{Rect}_T(t)$, représentée graphiquement par :



Sa transformée de Fourier donne :

$$\int_{-T/2}^{+T/2} 1 \cdot e^{-j.2.\pi.f.t} dt = \frac{1}{-j.2.\pi.f} \cdot (e^{-j.2.\pi.f.T/2} - e^{+j.2.\pi.f.T/2})$$

soit

$$\int_{-T/2}^{+T/2} 1 \cdot e^{-j.2.\pi.f.t} dt = \frac{T}{j.2.(\pi.f.T)} \cdot (e^{+j.\pi.f.T} - e^{-j.\pi.f.T}) = T \text{sinc}(\pi.f.T)$$

6.5. Transformée de Fourier d'un peigne de Diracs

Le **peigne de Dirac** est largement utilisé lorsque l'on parle de signaux échantillonnés. Il faut en connaître la transformée de Fourier afin de bien l'exploiter.

$$\mathbb{W}_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(t - kT_e) , \quad F_e = 1/T_e,$$

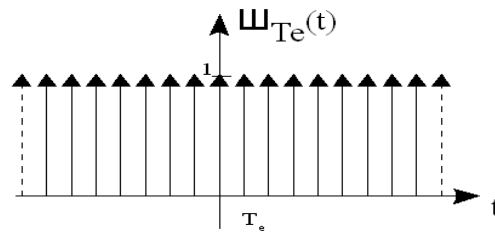


Figure 18 : Peigne de Diracs, fonction de temps.

Ce signal est abstrait, ce n'est qu'un outil mathématique, néanmoins, on le considère comme une fonction de temps (même si c'est un cas limite à cause du Dirac qui est une distribution). Comme la fonction est périodique, de période T_e , on sait que son spectre est un spectre de raies (multiple de F_e), et on peut lui appliquer les séries de Fourier :

$$\mathbb{W}_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} c_n(k) \cdot e^{j.2.\pi.k.F_e.t} \quad \text{avec} \quad C_n(k) = \frac{1}{T_e} \cdot \int_0^{T_e} s(t) \cdot e^{-j.2.\pi.f.t} dt \quad \text{en précisant que } s(t) \text{ représente}$$

$\mathbb{W}_{T_e}(t)$ sur une période, soit :

$$C_n(k) = \frac{1}{T_e} \cdot \int_0^{T_e} \delta(t) \cdot e^{-j.2.\pi.f.t} dt = \frac{1}{T_e} \cdot \int_0^{T_e} \delta(t) \cdot e^{-j.2.\pi.f.0} dt = \frac{1}{T_e} \cdot \int_0^{T_e} \delta(t) \cdot e^0 dt = \frac{1}{T_e}$$

Ainsi, le peigne de Dirac s'écrit aussi :

$$\mathbb{W}_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{1}{T_e} \cdot e^{j.2.\pi.k.F_e.t} = \frac{1}{T_e} \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{j.2.\pi.k.F_e.t} \quad \text{ce qui reste une expression temporelle.}$$

A partir de cette dernière, appliquons la transformée de Fourier afin d'en déterminer la densité spectrale fonction de la fréquence, sachant que :

$$e^{j.2.\pi.k.F_e.t} \quad \text{a pour transformée de Fourier :} \quad \delta(f - F_e)$$

On obtient la transformée de Fourier du peigne :

$$\mathbb{W}_{T_e}(t) \text{ donne } \frac{1}{T_e} \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \delta(f - k.F_e) \quad \text{qui s'écrit aussi } 1/T_e \cdot \mathbb{W}_{F_e}(f)$$

7. Bibliographie :

[1] : G. BAUDOIN et J.-F. BERCHER , « *Transformée de Fourier Discrète* » , *Ecole Supérieure d'Ingénieurs en Electrotechnique et Electronique* , sur « http://www.esiee.fr/~bercherj/New/polys/poly_tfd.pdf », Nov 2001

[2] : Alain DELUZURIEUX, Michel RAMI « *Cours d'électronique numérique et échantillonnée* », Eyrolles, 1994