1 задание

93 1. (5, 2) код

ИС		КС
00	→	00000
01	→	10110
10	→	01011
11	→	11101

Так как данный код линейный рассмотрим только один символ 00000

КС 00000

Измененное КС

$$\left.\begin{matrix} 00000 \\ 00001 \\ 00010 \\ 00100 \\ 01000 \\ 10000 \\ \left.\begin{matrix} 11000 \\ 10100 \\ \dots \\ 11111 \end{matrix}\right\} 32-6 \end{matrix}\right\} 2^5 = 32$$

1. Только первые 6 эл-тов в таблице не приводят к ошибке

Вер-ть получить эти 5 эл-тов (кроме 00000) $= p(1-p)^4$

Вер-ть получить 00000 $(1-p)^5$

Вер-ть ошибки $P = 1 - 5p(1-p)^4 - (1-p)^5 \approx 10^{-5}$

2. Порождающая и проверочная матрица

Т.к. код линейный можем взять $\forall$ 2 ненулевых вектора за базисные

$G = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ – Порождающая

$G \cdot H^T = 0$, H – проверочная 3×5

$G \cdot H^T = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1h_1 + 0h_2 + 1h_3 + 1h_4 + 0h_5 = 0 \\ 0h_1 + 1h_2 + 0h_3 + 1h_4 + 1h_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h_1 + h_3 + h_4 = 0 \\ h_2 + h_4 + h_5 = 0 \end{cases}$

$h_1 = h_3 + h_4$

$h_2 = h_4 + h_5$

$H = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

2 задание

2. расстояние Хемминга удовл-ет аксиом расстояния

1. $f(x,y)=f(y,x)$, $\forall x,y \in X$

2) $f(x,y) \leq f(x,z)+f(z,y)$ $\forall x,y,z \in X$

3. $f(x,y) \geq 0$ $\forall x,y \in X$, $f(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$.

3.) Кол-во эл-тов слова, которые отличаются друг от друга больше нуля, если слова разные. Если слова одинаковые $x=y$, то кол-во разных слов $=0 \Rightarrow f(x,y)=0$, и наоборот.

1.) $f(x,y)=f(y,x)$

$$x_i \neq y_i \Leftrightarrow y_i \neq x_i \Rightarrow f(x,y)=f(y,x).$$

2) Пусть слова x и y отличаются в некоторых эл-тах. Тогда $\forall z$ отличается в каждом этих ~~эл~~-тов хотя бы от одного из слов x и y.

Суммируя $d(x,z)+d(z,y)$ мы обязательно учтем все ~~эл~~ элементы, в которых различались x и y.

Получается $f(x,y) \leq f(x,z)+f(z,y)$ $\forall x,y,z \in X$

3 задание

3. Код с минимальным d_{min} исправляет любые комбинации ошибок кратности $t \le \left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$, где $\lfloor x \rfloor$ - макс. $\mathbb{Z}$ не превосх. x.

Док-во:

Чтобы декодировать слово x с t ошибками, необх-мо, чтобы $\exists c_i : d(c_i, x) \le t$ и $\forall c_j, j \ne i$ $d(c_j, x) > t$.

Воспользуемся нер-вом треугольника

$$d(c_i, c_j) \le d(c_i, x) + d(c_j, x) \le t + d(c_j, x) \ge d_{min} \Leftrightarrow$$

$$d(c_j, x) \ge d_{min} - t > t \Leftrightarrow d_{min} > 2t$$

$$d_{min} \ge 2t + 1 \Leftrightarrow t \le \frac{d_{min} - 1}{2}$$

$$t \le \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor, \text{ т.к. } t \in \mathbb{Z}$$

4 задание

4. Найти G и H для кода

000	000000
100	110100
010	011010
110	101110
001	101001
101	011101
011	110011
111	000111

Легко проверить, что код линейный $\Rightarrow$ G размером 3×6 из порождающих слов

$$G = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

H — 3×6, $GH^T = 0$

$$\begin{cases} h_1 + h_2 + h_4 = 0 \\ h_2 + h_3 + h_5 = 0 \\ h_1 + h_3 + h_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h_1 = h_2 + h_4 \\ h_2 = h_3 + h_5 \\ h_6 = h_1 + h_3 \end{cases} \quad H = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$