Variational AutoEncoder

Shuguo.J

2020 年 10 月 8 日

Content

AutoEncoder 注重 encoder 模块，将高维数据转换为 code/represention；而 Variational AutoEncoder 则注重 decoder 模块，根据服从某一分布的样本 code 来生成样本。在 AutoEncoder 中，隐变量 z 由 encoder 编码而来，因此我们并不知道其它服从的分布的形式。这导致我们无法隐变量 z 服从的分布中进行采样，然后通过 decoder 来生成数据样本。Variational AutoEncoder 则在训练的过程中通过 KL Divergence 来约束隐变量 z 的分布，用先验概率 $P(z)$ 来拟合复杂的后验概率 $P(z|x)$。

在 encoder 模块,Variational AutoEncoder 不是输出固定的 code/represention，而是输出 μ 和 σ^2, 之后在从 $N(\mu, \sigma^2)$（假设后验概率 $P(z|x)$ 为高斯分布）采样得到 code–z。为了使得模型可导，这里引入随机变量 $\epsilon \sim N(0, 1)$, 令 $z = \mu + \epsilon \times \sigma^2$，并以此来代替上述的随机采样。在这里，损失函数就能够对 μ 和 σ^2 进行求导，而其无需对 ϵ 求导。同时，$z \sim N(\mu, \sigma^2)$。

Variational AutoEncoder 的完整公式推导我还没有完全理解好。待更新...

Appendix

KL divergence 如下所示：

$$D_{kl}(p(x)|q(x)) = \int p(x) log \frac{p(x)}{q(x)} dx \tag{1}$$

KL 散度代表着用分布 $q(x)$ 来拟合 $p(x)$ 的差异程度。

当 $p(x)$ 和 $q(x)$ 均为高斯分数时，

$$
\begin{aligned}
D_{kl}(p(x)|q(x)) &= \int p(x) \times (log\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}}e^{-}\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} - log\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}}e^{-}\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2})dx \\
&= \int p(x) \times (log\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} + loge^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} - log\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} - loge^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}})dx \\
&= \int p(x) \times (-\frac{1}{2}log2\pi - log\sigma_1 - \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{1}{2}log2\pi + log\sigma_2 + \frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2})dx \\
&= \int p(x) \times (log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - \frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2})dx \\
&= log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \int p(x) \times \frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}dx - \int p(x)\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}dx \\
&= log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{1}{2\sigma_2^2}\int p(x)(x-\mu_1+\mu_1-\mu_2)^2dx - \frac{1}{2} \\
&= log\frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{\sigma^2+(\mu_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{2}
$$