平移

$$平移 = \begin{cases} x = x_0 + \Delta x \\ y = y_0 + \Delta y \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

水平翻转（左右翻转）

$$水平翻转 = \begin{cases} x = width - x_0 \\ y = y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & width \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

垂直翻转（上下翻转）

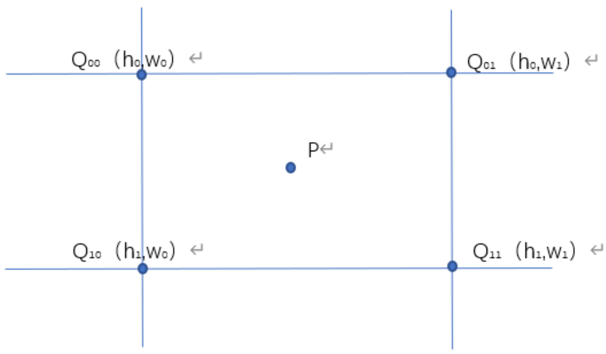
$$垂直翻转 = \begin{cases} x = x_0 \\ y = height - y_0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & height \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

旋转

$$旋转 = \begin{cases} x_0 \cos\theta - y_0 \sin\theta \\ x_0 \sin\theta + y_0 \cos\theta \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

双线性插入函数

图像的放缩导致了像素点的移动，由于原始图像中的像素点一定大于或小于目标图像的像素点，这导致了目标图像中像素点无法与原始图像中的像素点一一对应。解决像素点之间的对应有许多种方法，双线性插入法是其中之一。其通过目标图像的像素点在原始图像中距离最近的 4 个像素点在 **X** 轴和 **Y** 轴方向上进行两次线性插入来计算目标图像像素点的值。如下图所示：



根据局部的线性关系，先在水平方向上进行线性插入，然后再在垂直方向上进行线性插入。不同尺度下，坐标的对应关系如下所示：

$$\frac{\boldsymbol{h}}{h^*} = \frac{h_{raw}}{h_{target}}$$

若中心点对齐，则公式如下所示：

$$\boldsymbol{h} = (h_{dst} + 0.5)\frac{h_{raw}}{h_{target}} - 0.5$$

已知两点坐标**(x0,f0)**和**(x1,f1)**,推演其所在直线的公式为：

$$f - f_0 = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}f_0$$

$$f = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f_1 + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}f_0$$

(双边两点的加权和，越远则权重越大)

计算步骤

在 **x** 轴方向上线性插入：

$$f(R_0) = \frac{w_1 - w}{w_1 - w_0} f(Q_{00}) + \frac{w - w_0}{w_1 - w_0} f(Q_{01})$$

$$f(R_1) = \frac{w_1 - w}{w_1 - w_0} f(Q_{10}) + \frac{w - w_0}{w_1 - w_0} f(Q_{11})$$

在 **H** 轴方向上线性插入：

$$\begin{aligned} P = \frac{h_1 - h}{h_1 - h_0} f(R_0) + \frac{h - h_0}{h_1 - h_0} f(R_1) \\ &= \frac{h_1 - h}{h_1 - h_0}\left[\frac{w_1 - w}{w_1 - w_0} f(Q_{00}) + \frac{w - w_0}{w_1 - w_0} f(Q_{01})\right] \\ &+ \frac{h - h_0}{h_1 - h_0}\left[\frac{w_1 - w}{w_1 - w_0} f(Q_{10}) + \frac{w - w_0}{w_1 - w_0} f(Q_{11})\right] \\ &= \frac{1}{(h_1 - h_0)(w_1 - w_0)}[(h_1 - h)(w_1 - w) f(Q_{00}) + (h_1 - h)(w - w_0) f(Q_{01}) \\ &+ (h - h_0)(w_1 - w) f(Q_{10}) + (h - h_0)(w - w_0) f(Q_{11})] \end{aligned}$$

令$h_1 - h_0 = w_1 - w_0 = 1$

则　$P = (h_1 - h)(w_1 - w) f(Q_{00}) + (h_1 - h)(w - w_0) f(Q_{01}) + (h - h_0)(w_1 - w) f(Q_{10}) + (h - h_0)(w - w_0) f(Q_{11})$

令$\mu = h - h_0, v = w - w_0$

则$P = (1 - \mu)(1 - v) f(Q_{00}) + (1 - \mu) v f(Q_{01}) + \mu(1 - v) f(Q_{10}) + \mu v f(Q_{11})$