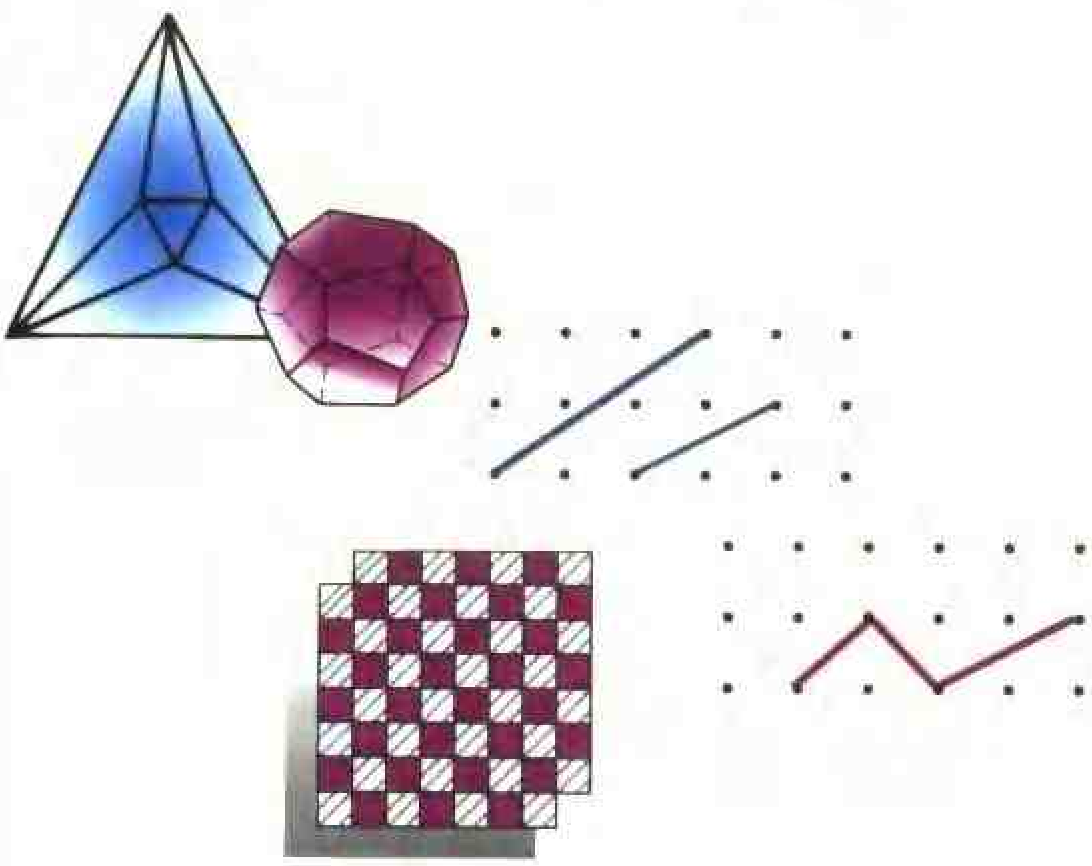
趣味
离散数学

王俊邦 罗振声 编



北京大学出版社

趣味离散数学

王俊邦　罗振声　编
刘振宏　审订

北京大学出版社
北　京

图书在版编目(CIP)数据

趣味离散数学/王俊邦,罗振声编. 一北京:北京大学出版社,1998.11

ISBN 7-301-03801-1

Ⅰ.趣… Ⅱ.①王… ②罗… Ⅲ.离散数学-通俗读物 Ⅳ.0158-49

书　　名:趣味离散数学
著作责任者:王俊邦　罗振声　编
责 任 编 辑:王　艳
标 准 书 号:ISBN 7-301-03801-1/O·421
出　版　者:北京大学出版社
地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
电　　话:出版部 62752015 发行部 62559712 编辑部 62752032
排　版　者:高新特公司激光照排中心
印　刷　者:北京大学印刷厂
发　行　者:北京大学出版社
经　销　者:新华书店
787mm×1092mm　32 开本　7.875 印张　175 千字
1998 年 11 月第一版　1998 年 11 月第一次印刷
印　　数:0,001—4,000 册
定　　价:10.00 元

内 容 简 介

本书通过对五十三个有趣味的、典型的或具有历史渊源的问题的分析、解答，着重介绍了逻辑推理、命题代数、集合计算、初等数论、图论和初等组合数学等几个数学分支，使已具备离散数学初步知识的读者更多地了解这门学科的实质和思维方法，引导读者漫游奥秘的数学世界，体会灵感、思维之美. 本书是一本趣味性、知识性兼备的读物.

本书可作为初中学生、高中学生、大学低年级学生的课外读物，也可用作中学教师教学时选题参考和辅导数学竞赛的参考读物，具有中学以上文化水平的干部、职工中的数学爱好者，阅读此书将是一种精神享受.

前　言

计算机的兴起与发展，正在智力上有意义地改变着世界的面貌.当代数学家面临要解决的不少新问题，都与计算机重要基础理论之一的“离散数学”相关联.离散数学是企图用个别元素，例如，海滩上的沙粒或数字 1，2，3 等来解释自然现象，以利于用计算机处理个别的可数的事物.如果说，过去处理连续变量的微积分在大学里具有神圣不可侵犯的地位，那么现在可以说，这并不是当之无愧的，离散数学向其发动了挑战.离散数学有微积分所不及的某些优点：它可以把许多有关离散量的问题变成机械操作；有可能以初等的叙述和很多巧妙的证明技巧，介绍一连串相当深奥的推理和得出一些有价值的结论.

离散数学极其丰富，包括诸如集合与对应、初等数论、近世代数、数理逻辑、图论、组合数学、递归函数等许多数学分支，其中好多重要问题源于对数学游戏和看似很简单的趣味数学问题的解决.由于娱乐和美学上的魅力而被许多数学爱好者研究着，现在无论是在纯数学或应用数学上都占有重要地位.从其发展历史上看，尽管三百多年前离散数学就出现了，但直到 1946 年第一台电子计算机问世后，由于计算技术的飞跃发展，在计算机科学的各个领域中涉及到了许多离散对象，人们才逐步对所涉及到的那些离散量的数学理论进行研究，分析各自的结构、特点及它们之间的联系，综合论述，从而形成了较为完整的离散数学理论.当今的时代是信息剧增、

信息的意义与价值剧增、信息的研究与利用剧增的时代，它涉及到大量与离散量有关的新领域，离散数学的任务就是要不断深入、完满地去解决各种离散量的结构及相互关系，并应用于现代.

由于离散数学的研究对象及方法与普通数学有较大差异，不少初学者感到困难，这一方面是由于历来学习普通数学所养成的固定的一套观念和思维方法的“束缚”，另一方面是由于许多离散量问题的广泛性与深邃性和方法的巧妙与无规律性所致，应该说这并不奇怪. 为了使已具备离散数学初步知识的读者更多地了解这门学科的实质和思维方式，我们通过对 53 个有趣味的、典型的或具有历史渊源的问题的分析、解答，引导读者漫游这奥秘的数学世界，开启新观念，体会灵感、思维之美. 全书是按照逻辑推理、命题代数、集合计算、初等数论、图论和初等组合数学等几个数学分支的顺序分门别类进行编拟选题的. 每一个专题都是先提出问题，介绍为理解该类问题而必须具备的离散数学知识要点，进而给出该问题的分析和解答. 每个问题之后选拟几个与该知识和方法有关联的练习题，最后给出解答. 全书包括 53 个专题，共有 216 道练习题. 这里，我们既不是详细全面介绍专题，也不是系统传授知识和解题技巧，而是试图激发未必具有很深数学修养的读者的兴致，引导入门，开启和拓宽思路. 当然对每一个方面的问题的分析、解答和处理仅是一家之见，有的可能有其他更好的处理方法.

本书可作为学习离散数学的读者的课外读物，也可用作教学时的选题参考和辅导数学竞赛的参考读物.

中国科学院系统科学研究所研究员刘振宏先生，对本书自始至终给予了指导与关注并最后审订书稿，在此深致谢意.

在编写过程中，参考了不少有关离散数学方面的专著和资料，在此对有关作者表示衷心的感谢.

限于本书的目的和作者的水平，对有些问题的处理可能不尽全面，疏漏错误在所难免，欢迎热心的读者批评指正.

编 者

1996 年 7 月于北京

目　　录

一、巧猜围棋子

甲手里有一个围棋子，要乙来猜棋子的颜色是白的还是黑的. 条件是：只允许乙问一个只能回答“是”或“否”的问题，但甲可以说真话，也可以说假话. 问乙可以向甲提出一个什么问题，然后从甲回答“是”或“否”中就能判断出甲手中棋子的颜色？

在命题逻辑中，仅由一个简单句构成的命题称为简单命题. 若干个简单命题通过逻辑联结词连接起来所构成的新命题，称为复合命题. 这种构成复合命题的方法，我们称为逻辑运算. 最基本的逻辑运算有三种：“或”、“与”、“非”.

“或”运算记作 $\vee$. 即由命题 P 及命题 Q 通过联结词“或”连接起来所构成的新命题“P 或 Q”，记作 $P\vee Q$. 它的真假状况称为真值. 如果用符号“1”和“0”分别表示它的真和假，那么这种运算可用如下的真值表 1.1 反映出来.

“与”运算记作 $\wedge$. 即由命题 P 及命题 Q 通过联结词“与”连接起来所构成的新命题“P 与 Q”记作 $P\wedge Q$. 它的真值表如表 1.2 所示.

表 1.1

P	Q	$P\vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

表 1.2

P	Q	$P\wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

“非”运算记作$\neg$. 即由命题 P 通过联结词“非”连接起来所构成的新命题“非 P”记作$\neg P$. 它的真值表如表 1.3 所示.

其他的复合命题的真值表,依据三种基本逻辑运算,按先$\neg$、次$\wedge$、后$\vee$的顺序很容易列出. 如复合命题$\neg P\vee Q$ 的真值表就如表 1.4 所示.

表 1.3

P	$\neg P$
1	0
0	1

表 1.4

P	Q	$\neg P\vee Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

反过来,我们也可以根据已给的复合命题的真值,构造出这个复合命题来,其办法是利用 $P\vee Q$、$P\wedge Q$ 和$\neg P\vee Q$ 的真值表以及由此得到的以下几个结论:

$$P_1\vee\cdots\vee P_n=0 \text{ 等价于一切 } P_i=0(i=1,2,\cdots,n); \quad (1)$$

$$P_1\wedge\cdots\wedge P_n=1 \text{ 等价于一切 } P_i=1(i=1,2,\cdots,n); \quad (2)$$

$$\neg P\vee Q=0 \text{ 等价于 } P=1, Q=0. \quad (3)$$

例如,构造由 P,Q,R 组成的复合命题 S,使它具有如表 1.5 所示的真值表.

表 1.5

P	Q	R	S	$S_1\cdots\cdots S_8$		$\neg S$
1	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	0

我们的办法是先构造出一些辅助命题 $S_1 \cdots S_8$（三个简单命题有八个取值组），使命题 S_i 在第 i 行的值为 0，其余各行的值均为 1. 其次要看构造的命题 S 在哪些行的值为 0，这里 S 在 1，3，4，5，7 行的值为 0. 如果 S 只在第 i_1 行、第 i_2 行、…、第 i_l 行的值为 0，那么由结论(2)可知：命题 $S_{i_1} \wedge S_{i_2} \wedge \cdots \wedge S_{i_l}$ 只在第 i_1 行、第 i_2 行、…、第 i_l 行的值为 0，因此，$S_{i_1} \wedge S_{i_2} \wedge \cdots \wedge S_{i_l}$ 就是符合预先给定真值表的复合命题.

当 $l>4$ 时（即大于取值组个数的一半），我们也可以从 S 的否定命题 $\neg S$ 去考虑，然后再求它的非 S，即 $S=\neg(\neg S)$.

在此例中，$l=5$，我们可根据已知真值表，先作出相反的真值表 $\neg S$（见表 1.5），而 $\neg S$ 的第 2，6，8 行的值为 0，相应的命题记为 $(\neg S)_2$，$(\neg S)_6$，$(\neg S)_8$，我们把 $\neg S$ 的真值表的第 2，6，8 行列表如下：

表 1.6

	P　Q　R	$\neg S$	
第 2 行	1　1　0	0	$(\neg S)_2$
第 6 行	0　1　0	0	$(\neg S)_6$
第 8 行	0　0　0	0	$(\neg S)_8$

命题 $(\neg S)_2$ 构造如下：$P=1$，$Q=1$，$R=0$，由结论(3)可取 $\neg(P \wedge Q) \vee R$ 作为 $(\neg S)_2$.

命题 $(\neg S)_6$ 构造如下：$P=0$，$Q=1$，$R=0$，由结论(3)可取 $\neg Q \vee (P \vee R)$ 作为 $(\neg S)_6$.

命题 $(\neg S)_8$ 的构造如下：$P=0$，$Q=0$，$R=0$，所以显然可取 $P \vee Q \vee R$ 为 $(\neg S)_8$.

最后，我们可取 $(\neg S)_2 \wedge (\neg S)_6 \wedge (\neg S)_8$ 作为 $\neg S$，取其非，即

$$S=\neg\left((\neg S)_2 \wedge (\neg S)_6 \wedge (\neg S)_8\right)$$

$$= \neg\Big[\big(\neg(P\wedge Q)\vee R\big)\wedge\big(\neg Q\vee(P\vee R)\big)$$

$$\wedge(P\vee Q\vee R)\Big].$$

这样的 S，一般还是比较复杂的，但在后文，我们熟悉了逻辑运算所满足的运算律后，是很容易化简的.

现在我们来解决开始提出的问题，这问题的实质是要设计一个复合命题. 这个复合命题，应使乙得到的回答如表 1.7 所示.

表 1.7

	若棋子为白色	若棋子为黑色
若甲说真话	甲回答"是"	甲回答"否"
若甲说假话	甲回答"是"	甲回答"否"

这样乙就可以来断定棋子为白色还是黑色.

但另一方面，甲在说假话时，与其内心的真实回答相反，这样甲内心的真实回答如表 1.8 所示.

表 1.8

	若棋子为白色	若棋子为黑色
若甲说真话	甲心里回答"是"	甲心里回答"否"
若甲说假话	甲心里回答"否"	甲心里回答"是"

今令命题

P 表示："棋子为白色"；Q 表示："甲说的是真话"；S 表示："对乙问的问题，甲心里的回答为'是'". 于是可得真值表 1.9.

表 1.9

P	Q	S
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

由前面所给出的构造复合命题的方法，可得

$$S_2 = \neg P\vee Q,\quad S_3 = \neg Q\vee P,$$

故

$$S=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P).$$

即这个问题是："要么你说的是真话，要么棋子是黑的"和"要么你说的是假话，要么棋子是白的"这话对吗？按着我们的设计，如果得到的回答为"是"，则棋子必为白色；如果回答为"否"，则棋子是黑的.

这个复合命题，句子很长且说起来别扭，如果我们熟悉了逻辑运算律(后文)，此命题可化简为 $P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q$. 这样叙述起来就很简洁清楚了："棋子是白的且你说了真话或者棋子是黑的且你说了假话"对吗？

由真值表，写出复合命题的更好方法，在专题六中给出.

练 习 一

1. 有一个逻辑学家，被恶徒捆缚，蒙住眼睛关在一个房间里. 这个恶徒对逻辑学家说："在这个房间里放有两个盒子，一个盒子里放着这个房间的钥匙，另一个盒子里放着一条毒蛇，你可以选择一个盒子，如果你选的是放着钥匙的盒子，你可以取出钥匙，打开房门而获得自由；如果你选了有毒蛇的盒子，就会被毒蛇咬死. 你在选择前可以向我提出一个问题，我只回答'是'或'不是'. 当然，我的回答不一定是真的，也可以说谎."试问：这个逻辑学家应该提出什么样的问题，才能选中放钥匙的盒子？

2. 一个旅游者，要去一个山顶. 当他来到岔路时，往前有两条路，其中只有一条是通往山顶的. 在岔路口，坐着两个当地小伙子，其中甲总讲真话，乙总讲假话，而且他们对任何问题的回答都是简单的"是"或"不是". 该情况旅游者是知道的，但他并不知两人中谁讲真话，谁讲假话. 请问旅游者提出怎样的问题，才可以找到通往山顶的路？

二、土耳其商人和帽子的故事

这是著名物理学家爱因斯坦出过的一道题.

一个土耳其商人,想找一个十分聪明的助手协助他经商,有两个人前来应聘.这个商人为了试一试哪一个聪明些,就把两个人带进一间漆黑的屋子里,他打开电灯后说:"这张桌子上有五顶帽子,两顶是红色的,三顶是黑色的.现在,我把灯关掉,而且把帽子摆的位置弄乱,然后我们三个人每人摸一顶帽子戴在头上,在我开灯后,请你们尽快地说出自己头上戴的帽子是什么颜色的."说完之后,商人将电灯关掉,然后三人都摸了一顶帽子戴在头上,同时商人将余下的两顶帽子藏了起来,接着把电灯打开.这时,那两个应试者看到商人头上戴的是一顶红帽子,过了一会儿,其中一个人便喊到:"我戴的是黑帽子."

请问这个人猜得对吗?是怎么推导出来的?

前面,我们提出了三种基本逻辑运算,可分别称为析取($\vee$)、合取($\wedge$)和否定($\neg$).还有两种运算:**蕴涵运算**($\rightarrow$)和**等值运算**($\leftrightarrow$).可分别由表 2.1 和表 2.2 来定义:

表 2.1

P	Q	$P\rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

表 2.2

P	Q	$P\leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

对于命题 P 与 Q,"若 P 则 Q"称为**条件命题**,记作 $P \to Q$,它的含义也规定为复合命题 $\neg P \vee Q$,即 $P \to Q = \neg P \vee Q$. 由真值表 2.1 可见:在条件命题 $P \to Q$ 中,如果条件 P 为假(0),那么 $P \to Q$ 恒为真;如果条件 P 为真(1),那么 $P \to Q$ 的真假决定于结论 Q 的真假.

因为由定义 $P \to Q = \neg P \vee Q$,所以"$\to$"不是一种新的运算,但由于"若…则…"的形式是人们常用的语言,所以把它当作一种重要运算,在进行推理时常常是方便的.

如果命题 $P \to Q$ 恒真,即 $P \to Q = 1$,则称 **P 蕴涵 Q**,故也称"$\to$"为蕴涵运算,当 $P \to Q = 1$ 时,也记成 $P \Rightarrow Q$,这正是我们数学书上常遇到的情形. 严格说,$P \Rightarrow Q$ 不是命题,而是 P 与 Q 之间的一种关系.

对于命题 P 和 Q,当且仅当命题 P 和 Q 真值相等时,称为等值(即 P 与 Q 同真假),记为 $P \leftrightarrow Q$. 当 $P \leftrightarrow Q$ 是真的,即 $P \leftrightarrow Q = 1$时,也称 $P \leftrightarrow Q$ 为**恒真命题**.

我们利用上述五种运算和数学上的括号,可以构成各种符号序列,我们称之为**公式**,这里一切公式都应满足下述要求:

(1) 一切变项 $P, Q, R, \cdots$ 是公式;

(2) 如果 P, Q, R 是公式,那么 $\neg P, P \wedge Q, P \vee Q, P \to Q, P \leftrightarrow Q$ 也是公式;

(3) 除由(1),(2)两条规则建立起来的符号序列外都不是公式.

在建立的公式中,真值联结词按照结合力由强到弱顺序排列为:$\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

任何公式(复合命题)都有相应的真值形式. 无论公式 P,Q 的真值如何,其组成的最后公式始终得到真的值,这样的真值形式叫做重言式的真值形式,简称**重言式**. 比如公式($P \to$

$Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$. 它的真值表如表 2.3,故此公式为重言式.

表 2.3

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$	$(P \to Q) \leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$
1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

普通逻辑中的各种复合推理形式,在命题逻辑中都可以表示为相应的真值形式,因此可以运用真值形式来反映一个推理的形式结构.在普通逻辑中常用图表示推理形式,用图表示可写成:

$$\frac{P \to Q, P}{Q}$$

横线上为两个前提,横线以下是结论,前提和结论之间存在着蕴涵关系.用蕴涵式表达:蕴涵式的前件是各个前提的合取,后件则是结论.这样这个图式的蕴涵式是

$$(P \to Q) \wedge P \to Q$$

同时,相当于一个正确推理形式的蕴涵式还必须是一个重言式.但要注意,正确推理形式是不依赖于前提和结论的具体内容,只要蕴涵式总是真的.这个蕴涵式的真值,可由表 2.4 反映出来.

表 2.4

P	Q	$P \to Q$	$(P \to Q) \wedge P$	$(P \to Q) \wedge P \to Q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

从表中可见,只有在$(P \to Q) \wedge P$ 为真的情况下,两个前

提 $P \to Q$ 和 P 才都是真的. 同时 Q 也是真的，前提真则结论必真. 这个推理形式保证了从真的前提到真的结论的过渡，因此是一个正确的推理形式.

相反地，一个不正确的推理形式虽然也有一个相当的真值形式，但这样的真值形式都不是永真的，即不是一个重言的真值形式，如推理形式：

$$\frac{P \to Q,\text{非 } P}{\text{非 } Q}$$

这种推理是错误的，与这种推理形式相当的蕴涵式是

$$(P \to Q) \land \neg P \to \neg Q.$$

这个公式的真值形式的真值表是表 2.5，显然此真值形式不是永真的.

表 2.5

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \to Q$	$(P \to Q) \land \neg P$	$(P \to Q) \land \neg P \to \neg Q$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1

由此可知，每一个推理形式都相当于一个真值形式. 正确的推理形式相当于一个重言式；不正确的推理形式虽然也有相应的真值形式，但它不是重言式. 判别一个推理形式是否正确，就要判别其相当的蕴涵式是不是一个重言式. 重言式是判别一个命题表达式推理形式是不是正确的有效公式.

把命题逻辑的重言式组成一个公理系统就得到命题演算，而这就是命题逻辑的公理化，即从公理（初始命题的重言式）出发，应用明确规定的推演规则，进而推出一系列重言式的演绎体系.

由公理去推导出其余的重言式，还要有一定的变形规则，这主要有两条：代换规则和分离规则（又称蕴涵原则，即从 $A\to B$ 的真和 A 的真，可以推出 B 的真）.

现在我们来解本节一开始提出的问题.

设 P_1 表示"猜对的人戴红帽子"；P_2 表示"猜对的人戴黑帽子"；Q_1 表示"另一个人戴红帽子"；Q_2 表示"另一个人戴黑帽子"；R_1 表示"商人戴红帽子".

现在知道，商人头上戴的是红帽子，即 R_1 为真，又知道另一个人没有作出断定，即既不能断定 Q_1 为真，也不能断定 Q_2 为真.

根据题设条件，可得如下公式：

$R_1\wedge P_1\to Q_2$：如果商人和猜对的人戴的都是红帽子，那么另一个人戴的就是黑帽子，因为红帽子只有两顶.

$R_1\wedge Q_1\to P_2$：如果商人和另一个人戴的都是红帽子，那么猜对的人戴的就是黑帽子.

$\neg P_1\to P_2$：如果猜对的人戴的不是红帽子，那么他戴的就是黑帽子.

$\neg Q_1\to Q_2$：如果另一个人戴的不是红帽子，那么他戴的就是黑帽子.

推演步骤如下：

设 P_1

① P_1（根据假设）；　　② R_1（根据题设）；

③ $R_1\wedge P_1$（合取构成）；　④ $R_1\wedge P_1\to Q_2$（根据题设）；

⑤ Q_2（③④分离）.

这就是说，"另一个人戴黑帽子"这个判定是必然可以作出的. 但是这与题设条件（即"另一个人没有作出判定"）相矛盾，因此，P_1 为假，即 $\neg P_1$ 为真，故可得：

⑥ $\neg P_1$；　⑦ $\neg P_1 \to P_2$（根据题设）；

⑧ P_2（⑥⑦分离）.

这就是说，“猜对的人戴黑帽子”是真的，所以猜对的人肯定地说：“我戴的是黑帽子”.

练　习　二

1. 下列各命题是什么命题：

(1) 当 P 时有 Q；　(2) 由 P 导致 Q；

(3) P 对 Q 足够；　(4) 必须 Q 才可能 P；

(5) 只当 Q 才可能 P；　(6) 除非 Q 才能 P；

(7) 至少有 Q 才能 P.

2. 从前，在某个小岛上，住着两个部落. 甲部落的人总是说真话，乙部落的人总是说谎话. 有一天，一个旅游者来到这个岛上，他见到一个土人，就问：“你是哪个部落的人？”这个土人回答说：“我是甲部落的人.”旅游者相信了这个回答，于是就请他作向导. 在路途中，他又看到另一位土人，旅游者就请这位向导去问他是属于哪一个部落的. 向导回来说，他（另一位土人）肯定地说，他是甲部落的人.

现在请问：这位作向导的土人是甲部落的人还是乙部落的人？

3. 在一个乡村法院的法庭上站着三个人，其中每一个人要么是当地的农民，要么是逃到这里来的小偷. 法官知道，当地农民的回答总是真的，而小偷的回答总是假的. 但是法官不知道他们之中谁是当地的农民，谁是小偷. 因此，他就从左向右依次向他们提出问题，他先向左边的一个人提出问题，但他根本没听懂这个人的回答，于是他只好转向站在中间和右边的人，向他们提问说：“他（站在左边的人）回答的是什么？”对

此，站在当中的人回答说："他（站在左边的人）说他是农民."站在右边的人则回答说："他说他自己是个小偷."

据此，请问：站在当中和右边的人是什么人？是农民还是小偷？

4. 老师想测验一下他的学生甲、乙、丙的逻辑思维能力，他设计了一个猜帽子的游戏. 老师先让学生甲、乙、丙沿台阶从上至下同向而坐（不许往后看）. 老师拿出五顶帽子，其中三顶是白的，两顶是红的. 然后让他们三人闭上眼，他替每个人各戴上一顶帽子，并把余下的两顶帽子藏了起来. 最后让他们睁开眼睛，要他们说出自己头上戴的是什么颜色的帽子. 这时坐在上面的甲向前面看了看乙和丙戴的帽子，想了一下回答说："不知道."坐在中间的乙听了甲的回答，也看了看丙头上的帽子，想了一下也回答说："不知道."坐在下面的丙，听完他们的回答之后，马上就说："我戴的是白帽子."试问：他是怎么推导出来的？

三、观测者的速译

一位观测者看着自己面前缓缓移动的纸带上的数字，他必须按照指令把某些数字除掉. 指令的内容是："把能被 3 整除，末尾是 0，各位数字之和大于 31 的数消除；把不能被 3 整除，末尾是 0，各位数字之和小于 31 的数消除；把能被 3 整除，末尾是 0，各位数字之和小于 31 的数消除，把不能被 3 整除，末尾是 0，各位数字之和大于 31 的数消除；把能被 3 整除，末尾不是 0，各位数字之和大于 31 的数消除."

这么一长串烦琐的指令，任何人都要费一番脑筋才能记住. 但这位观测者只用了几个符号，列出并变换了一下式子，很快就完整无误地把全部指令表达出来了. 试问这是什么指令？

在代数系统中的布尔代数，当用它来研究命题之间关系时，就是**命题代数**. 这样对于命题逻辑中的基本概念和推理等，都可用命题代数去表示和研究.

命题代数和普通代数一样，也用字母 A，B，C 等表示变量（命题），称为**逻辑变量**. 它的取值只有两种可能性——"0"（假）或"1"（真）.

命题代数也有三种相应的运算，称为**逻辑运算**，其中**逻辑加**用"+"或"∨"表示；**逻辑乘**用"·"或"∧"表示；**逻辑非**用"—"或"¬"表示，这三种运算也称基本逻辑运算. 它们的真值表（也是定义）如表 3.1 所示.

表　3.1

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>$A+B$</th><th>$A\cdot B$</th><th>$\overline{A}$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td rowspan="2">0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
</table>

在命题逻辑中，从公理化出发，可以推出一些等值公式，相应地在命题代数中，逻辑运算满足以下的运算律：

(1) 交换律：

$$A+B=B+A,\quad A\cdot B=B\cdot A.$$

(2) 结合律：

$$(A+B)+C=A+(B+C),$$
$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C).$$

(3) 分配律：

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C,$$
$$A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C).$$

(4) 0-1 律：

$$A+0=A,\quad A+1=1,$$
$$A\cdot 1=A,\quad A\cdot 0=0.$$

(5) 互补律：

$$A+\overline{A}=1,\quad A\cdot\overline{A}=0.$$

(6) 等幂律：

$$A+A=A,\quad A\cdot A=A.$$

(7) 反演律：

$$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B},\quad \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}.$$

(8) 对合律：

$$A=A.$$

因为逻辑变量取值只有两个，故这些运算律都可用真值表验证.

应用运算律可以把一个复合命题(这里称逻辑式)等值变换和化简，其中有几个常用的等值公式(公式中把 $A\cdot B$ 简记为 AB)是：

(1) $A+AB=A$；　　(2) $A+\overline{A}B=A+B$；

(3) $AB+A\overline{B}=A$；　(4) $AB+\overline{A}C+BCD=AB+\overline{A}C$；

(5) $\overline{AB+\overline{A}C}=A\overline{B}+\overline{A}\,\overline{C}$.

这些公式容易由运算律得到.

例如，语句：“老王没有上火车站去接他是不对的，而他没有在火车站等老王也是不对的.”

我们设命题 P：“老王上火车站去接他”，Q：“他在火车站等老王”，则上述语句用命题逻辑可表示为：$\neg(\neg P)\wedge\neg(\neg Q)$. 用逻辑代数可表示为：$P\cdot Q$，由运算律(8)可化为：$P\cdot Q$，即上述语句的确切含义可简洁叙述为：“老王应到火车站去接他，而他应在火车站等老王”.

对于我们的观测者所遇到的复杂的指令，可用逻辑式 X 表示如下. 令

A：被 3 整除，则 $\overline{A}$：不被 3 整除；

B：末尾是 0，则 $\overline{B}$：末尾不是 0；

C：各位数字之和大于 31 的数，则 $\overline{C}$：各位数字之和小于 31 的数.

于是由逻辑运算的意义，就有：

$$X=ABC+\overline{A}B\overline{C}+AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C,$$

由运算律，对 X 进行如下变换：

$$X=(ABC+AB\overline{C})+(\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC)+(A\overline{B}C+ABC)$$

$$=AB(C+\overline{C})+\overline{A}B(\overline{C}+C)+AC(\overline{B}+B)$$
$$=AB+\overline{A}B+AC$$
$$=B(A+\overline{A})+AC$$
$$=B+AC.$$

于是上面复杂的指令就成为：

“把末位是 0 或者能被 3 整除且各位数字之和大于 31 的数消除”.

练　习　三

1. 考虑语句“如果明天没有考试，或者明天有考试，而这场球赛是争夺冠军，那么我就去参加球赛”的条件是什么？

2. 考虑给一个维修人员的下述两条指令的意义：

(1) 如果不是在办公室中没有人的情况下，接通电源，自动监视系统不工作；

(2) 自动监视系统在运行，只有当办公室里没有人或办公室里有一大笔钱时，自动监视系统才进行工作.

四、谁是说谎者？

张三说李四在说谎，李四说王五在说谎，王五说张三、李四都在说谎，请问三人到底谁说真话，谁说假话？

在命题代数中，除了三种基本逻辑运算外，与命题逻辑相对应，也还有两种运算：**蕴涵运算**（$\rightarrow$）和**等值运算**（$\leftrightarrow$）. 表 4.1 就是定义这两种运算的真值表.

表 4.1

A B	$A\rightarrow B$	$A\leftrightarrow B$
0 0	1	1
0 1	1	0
1 0	0	0
1 1	1	1

同样也有 $A\rightarrow B=\overline{A}+B$. 特别当 $A\rightarrow B=1$ 时，我们又称 A **蕴涵** B，也写成 $A\Rightarrow B$.

等值运算（$\leftrightarrow$），也是双条件运算，即

$$A\leftrightarrow B=(A\rightarrow B)(B\rightarrow A).$$

整理之，变换为

$$A\leftrightarrow B=(\overline{A}+B)(\overline{B}+A)=AB+\overline{A}\,\overline{B}.$$

特别当 $A\leftrightarrow B=1$ 时，称为 A **等值于** B 或 A **等价于** B，这正如我们数学书中常提到的“当且仅当”、“充分必要”等情形，此时也写成 $A\Leftrightarrow B$.

现在来判断谁是说谎者.

设 A：张三说真话；B：李四说真话；C：王五说真话. 依

题意 $A\Leftrightarrow\overline{B}, B\Leftrightarrow\overline{C}, C\Leftrightarrow\overline{A}\cdot\overline{B}$. 即

$(A\rightarrow\overline{B})(\overline{B}\rightarrow A)=1$，等值变换为$(\overline{A}+\overline{B})(B+A)=1$；

$(B\rightarrow\overline{C})(\overline{C}\rightarrow B)=1$，等值变换为$(\overline{B}+\overline{C})(C+B)=1$；

$(C\rightarrow\overline{A}\,\overline{B})(\overline{A}\,\overline{B}\rightarrow C)=1$，等值变换为

$$(\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B})(A+B+C)=1.$$

故

$$\overline{A}B+A\,\overline{B}=1,\quad \overline{B}C+B\,\overline{C}=1,\quad A\,\overline{C}+B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C=1.$$

所以原题为

$$(\overline{A}B+A\,\overline{B})(\overline{B}C+B\,\overline{C})(A\,\overline{C}+B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)=1,$$

化简为

$$(\overline{A}B\,\overline{C}+A\,\overline{B}C)(A\,\overline{C}+B\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C)=1,$$

最后得

$$\overline{A}B\,\overline{C}=1.$$

即
$$A=0,\quad B=1,\quad C=0.$$

所以张三说假话，王五说假话，而李四是说真话.

练　习　四

1. 教师在商讨某个班各门科目每日教学安排问题. 数学教师希望排在第一节或第二节教课；语文教师希望排在第一节或第三节教课；物理教师希望排在第二节或第三节教课. 为满足他们的要求，应如何安排教学时间？有几种安排方案？

2. 有父亲(A)、母亲(B)和三个孩子(C,D,E)组成的一个家庭，买了一台彩电. 买回来的第一个晚上，关于家中哪几个人看了电视的问题，有以下几种正确说法：

(1) A 在看电视时，B 也在看；

(2) D 和 E 或两人都看，或者他们之中的一个看了；

(3) B 和 C 只有一人看了；

(4) C 和 D 或者两人都看，或者两人都没看；

(5) 如果 E 看了，那么 A 和 D 也看了.

这个晚上到底哪几个人看了电视？

3. 四个代表队甲、乙、丙和丁进行比赛，观众 A，B 和 C 对比赛的胜负问题进行猜测.

A："甲只能取得第三，丙是冠军"；

B："丙只能取得第二，乙是第三"；

C："丁取得第二，甲是第一".

比赛结束，对真正的名次，它们都只猜对了一半，请推出比赛的名次.

五、哪两个人作案？

有一仓库被盗，公安人员经侦察，怀疑甲、乙、丙和丁四人作案，又经细查，知道这四人中只有两人作案，在盗窃案发生的那段时间，可靠的线索有：

(1) 甲、乙两人中有且只有一个人去过仓库；

(2) 乙和丁不会同时去仓库；

(3) 丙若去仓库，丁必一同去；

(4) 丁若没去仓库，则甲也没去.

试判断四人中哪两人去仓库作案？

此类问题，我们也可以用一种更规范的解法——**化简范式**去解决.

对逻辑式的化简标准，根据不同的需要，形式不是唯一的，但其中最基本的是化为最简的"**与-或**"式(即"与"式之"或")，因为其他的任何形式，都可由最简的"与-或"式等值变换而得到. 最简的"与-或"式是指：

(1) 项数最少；

(2) 在项数最少的前提下，各项因子数最少.

在前面所遇到的化简中，都是按这个标准去做的. 从理论上，这并不能彻底解决逻辑式化简问题，而从范式出发，是可以彻底解决逻辑式化简问题，并且比较规范.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个逻辑变量，P 是一个有 n 个因子的乘积项(与项)，且 P 中每个因子都取自不同的变量，或者是原变量，或者是变量的非，则称 P 是 n 个变量的一个**最小**

项. 在一个有 n 个变量的“与-或”式 F 中的每一个乘积项，都是这 n 个变量的最小项，则称该“与-或”式 F 为“与-或”范式.

利用公式 $AB+A\overline{B}=A$，可以将任一个“与-或”式化为“与-或”范式. 如

$$\begin{aligned} F &= AB+\overline{A}C \\ &= AB(C+\overline{C})+\overline{A}(B+\overline{B})C \\ &= ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}\,\overline{B}C. \end{aligned}$$

我们知道“与-或”式不是唯一的，但可以证明“与-或”范式是唯一的. 正因为这种规范性，在求解含有逻辑变量的等式——**逻辑方程**时，往往都化为“与-或”范式去求解. 如求解逻辑方程

$$(A+B)(B+\overline{C})=1,$$

左端化为“与-或”范式

$$\begin{aligned} (A+B)(B+\overline{C}) &= B+A\overline{C} \\ &= (A+\overline{A})B+A\overline{C}(B+\overline{B}) \\ &= AB+\overline{A}B+AB\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C} \\ &= AB(C+\overline{C})+\overline{A}B(C+\overline{C})+AB\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C} \\ &= ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}, \end{aligned}$$

于是原方程化为

$$ABC+AB\overline{C}+\overline{A}BC+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}\,\overline{C}=1.$$

由“或”运算的意义，就有 $ABC=1$ 或 $AB\overline{C}=1$ 或 $\overline{A}BC=1$ 或 $\overline{A}B\overline{C}=1$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}=1$，而要 $ABC=1$，由“与”运算意义，就必须 $A=1, B=1$ 和 $C=1$，于是得到方程的一个解 $A=B=C=1$，即 111. 类似地由 $AB\overline{C}=1, \overline{A}BC=1, \overline{A}B\overline{C}=1, A\overline{B}\,\overline{C}=1$ 可得其余的四个解：110，011，010，100. 于是原方程解集为 $\{111, 110, 011, 010, 100\}$.

而当方程右端为 0 时，如方程

$$\overline{B}\,\overline{C}+AC=0.$$

两端取非得

$$\overline{\overline{B}\,\overline{C}+AC}=\overline{0}.$$

化简为

$$(B+C)(\overline{A}+\overline{C})=1.$$

再去求解.

而当方程两端都是逻辑式时，由等值运算，把右端化为 1，再去求解. 如方程

$$A\overline{B}=C$$

化为

$$(A\overline{B}+\overline{C})(\overline{A\overline{B}}+C)=1,$$

再去求解.

对于“哪两个人作案”的问题，设 A,B,C,D 分别表示甲、乙、丙、丁去仓库作案. 依题意，就有

(1) $A\overline{B}+\overline{A}B=1$；

(2) $BD=0$，即 $\overline{B}+\overline{D}=1$；

(3) $C\rightarrow D=1$，即 $\overline{C}+D=1$；

(4) $\overline{D}\rightarrow\overline{A}=1$，即 $D+\overline{A}=1$.

于是可得逻辑方程

$$(A\overline{B}+\overline{A}B)(\overline{B}+\overline{D})(\overline{C}+D)(D+\overline{A})=1.$$

左边化简为“与-或”式为

$$A\overline{B}D+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}=1.$$

而左边化简为最简的“与-或”范式为

$$A\overline{B}CD+A\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}=1.$$

从而有三个解：$A\overline{B}CD=1$ 或 $A\overline{B}\,\overline{C}D=1$ 或 $\overline{A}B\overline{C}\,\overline{D}=1$，如

用命题的真假符号“1”、“0”表示就是：1011，1001，0100. 但由题意只有两人作案. 显然解是 1001，即作案者为甲和丁.

练 习 五

1. 解逻辑方程组

$$\begin{cases}(A+B)(B+\overline{C})=1, \\ A\,\overline{B}=C.\end{cases}$$

2. 某项任务需要在 A,B,C,D,E 五个人中派一些人去完成，但派人时要求受下列条件的约束：

(1) 若 A 去，则 B 必去；

(2) D,E 两人中必有人去；

(3) B,C 两人中有人去，但只能去一人；

(4) C,D 两人要么都去，要么都不去；

(5) 若 E 去，则 A,B 都去.

问应如何派人？

六、裁判员表决器的自动线路

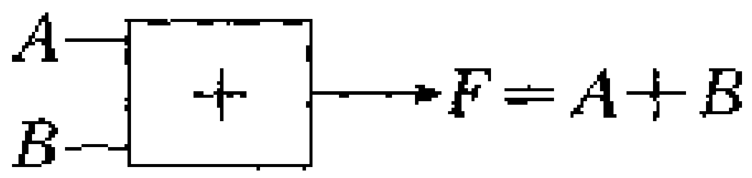
在举重比赛中，有三个裁判员．当认为杠铃已“完全举上”时，就按一下自己面前的按钮．裁决“完全举上”的信号（显示灯）只有在三个裁判同时按下自己面前的按钮，或者有两个裁判（但其中一个必须是主裁判）同时按下自己面前的按钮时，显示灯才亮．试设计此表决装置的自动控制逻辑线路．

当用布尔代数来研究开关之间关系时，就称为**开关代数**．布尔代数也只是当人们发现电路中开关的通与断、电压的高与低、信号的有与无等两种稳定的物理状态与命题真值（0，1）完全相对应时，才引起重视并得到飞跃发展．特别是电子计算机的问世和发展，布尔代数就成为其重要的逻辑基础．

开关代数的一切概念、运算性质和理论，完全可以从命题代数中搬过来．

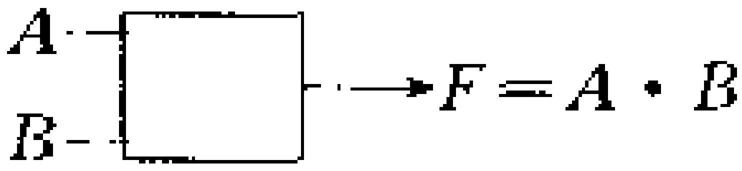
在自动控制系统和电子计算机中采用由电子元件组成、用信号控制的开关，我们称为“门”．由门联结而成的电路，称为“门电路”．基本门电路有三种：“或”门电路、“与”门电路和“非”门电路，其功能完全同三种基本逻辑运算相对应．

“或”门电路有两个或两个以上输入端和一个输出端．逻辑符号是



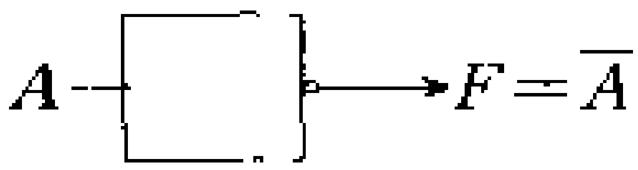
逻辑规则：当且仅当输入信号均为“0”时，输出信号才为“0”，否则输出信号为“1”．

"与"门电路也有两个或两个以上输入端和一个输出端，逻辑符号是



逻辑规则：当且仅当输入信号均为"1"时，输出信号才为"1"，否则输出信号为"0".

"非"门电路又称反相器，它有一个输入端和一个输出端.逻辑符号是



逻辑规则：输出信号恰与输入信号相反.

有了门电路，我们就可以做简单的逻辑设计了.与前面化简逻辑式和构造复合命题相对应，这里是对逻辑线路分析和由真值表写出"与-或"范式，化简，进而设计出最简逻辑线路.

如对图 6-1 的逻辑线路进行分析.

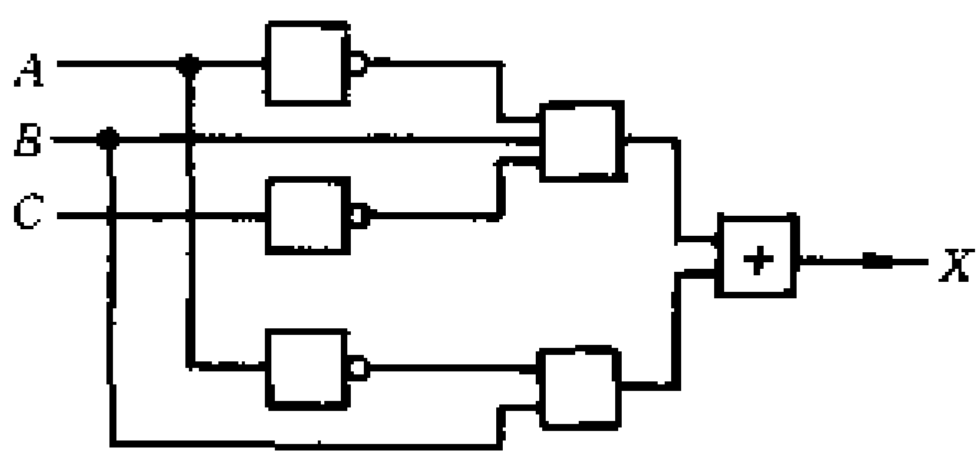


图 6-1

我们从输入端 A，B，C 开始，向右按各个逻辑门的顺序，很容易写出该逻辑线路的表达式

$$X=\overline{A}B\,\overline{C}+\overline{A}B,$$

化简为

$$X=\overline{A}B(\overline{C}+1)=\overline{A}B.$$

其逻辑线路如图 6-2.这是两个功能等效的逻辑电路，但图6-2

比图 6-1，减少了一个输入端和四个门以及一些线路，当然在线路设计中取后者.

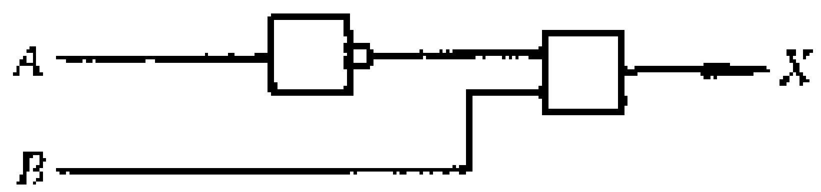


图 6-2

现在我们给出由真值表写出逻辑式(即专题一中构造复合命题问题)的一般方法.

如在某实际问题中，有如表 6.1 的真值表. 我们从 F 值为 1 的行依次取相应的最小项为 $A\ B\ C$，$\overline{A}BC$，$AB\,\overline{C}$，ABC. F 的“与-或”范式就是各个最小项的和

$$F=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}BC+AB\,\overline{C}+ABC.$$

如果需要化简就有

$$\begin{aligned}F&=\overline{A}C(\overline{B}+B)+AB(\overline{C}+C)\\&=\overline{A}C+AB.\end{aligned}$$

表 6.1

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

表 6.2

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

对于三个裁判员表决器的设计，我们设主裁判和两个副裁判前的按钮分别为 A，B，C，F 表示显示灯的状态($F=1$ 灯亮；$F=0$ 灯不亮). 依题意，列出如表 6.2 的真值表. 写出“与-或”范式

$$F=A\,\overline{B}C+AB\,\overline{C}+ABC.$$

化简就有

$$
\begin{aligned}
F &= A\overline{B}C + AB(\overline{C}+C) \\
&= A(\overline{B}C+B) \\
&= A(B+C).
\end{aligned}
$$

由化简后的逻辑式，画出表决器的线路如图 6-3.

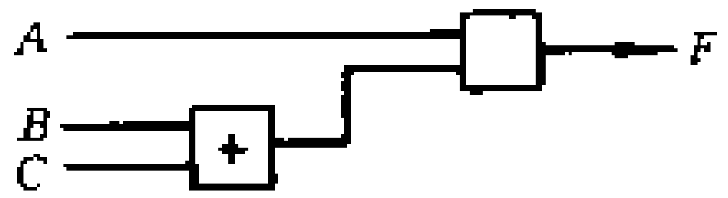


图 6-3

练 习 六

1. 化简下列电路

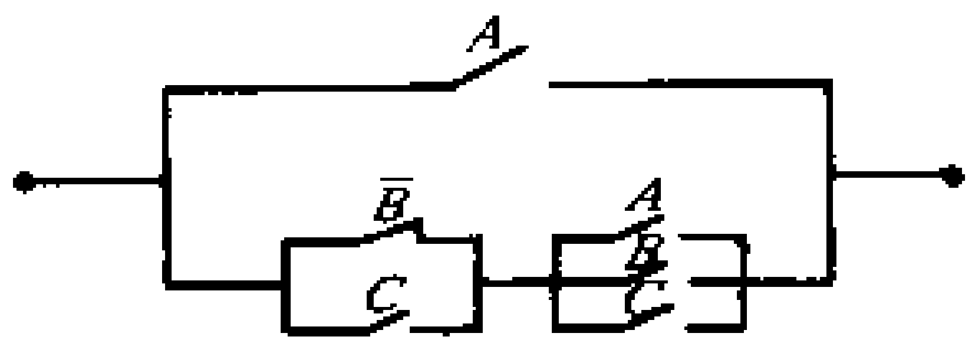


图 6-4

2. 某城镇有三个工厂，一个发电厂. 发电厂内有两台发电机，用 X 和 Y 表示，Y 的输电能力为 X 的两倍. 值班员负责分配发电机的负荷：当一个工厂需要电力时，开动 X 发电机刚好满足要求；当需要给两个工厂输送电力时，开动发电机 Y 能满足要求；当三个工厂需要电力时，两台发电机需全开动. 试设计一个能接收从工厂来的是否需要送电的信号及正确分配发电机负荷的逻辑线路.

3. 设计一个保密锁，在锁上有三个按钮 A,B,C. 当三个按钮同时按下或 A,B 两个按钮同时按下时，锁就打开，而其他情况（不包括都不按）锁不但不开，而且还有电铃发出警报. 试设计此保密锁及警报自动装置的逻辑线路.

七、理发师的头由谁来理?

在一个小镇上，有一个理发师公开宣布：他给而且只给小镇上所有不给自己理发的人理发. 现在要问：这位理发师的头由谁来理?

如果理发师的头由别人给他理，即理发师自己不给自己理发，那么按规定这位理发师的头应该由自己理.

如果理发师的头由他自己理，按规定他只给那些不给自己理发的人理发，那么理发师的头不能由他自己理，即理发师的头应该由别人给他理.

这就产生了矛盾：理发师的头既不能由别人理，也不能由他自己理，这位理发师的规定是一个悖论.

这类问题，我们可以举出大量的例子. 某些集合看起来是集合自身的元素，如所有不是苹果的东西的集合，它本身就不是苹果，它必须是此集合自身的元素. 现在来考虑一个由一切不是集合本身的元素组成的集合，请问：这个集合是它本身的元素吗? 这个问题我们是很难作出回答的.

原来在康托尔创立集合论的时候，有一个既基本又明显的问题一直困扰着数学家们. 集合论的研究对象是集合，那么何谓集合? 对集合定义我们一直而且只能给出一个原始的描述. 这在朴素的集合论中还是可以行得通的，可是随着数学的发展，发现单凭直观经验建立起来的集合概念是靠不住的. 正当康托尔的集合论开始为大家所接受时，1902 年罗素提出了一个集合上的悖论. 这一悖论是如此清晰，数学家几乎没有辩

驳的余地.这正如一盆冷水浇下来,使数学家们目瞪口呆,正如数学家费雷格(Frege,1848～1925)曾对此写道:“对一个科学家来说,没有一件事比下列事实更令人扫兴.当他的工作刚刚完成的时候,突然它的一块奠基石崩塌了.……罗素先生给我的信正是使我陷于这种境地.”

罗素悖论是相当简明的,罗素将集合分成两类,一类是集合 A 本身是 A 的一个元素,即 $A\in A$;另一类是集合 A 本身不是 A 的一个元素,即 $A\notin A$.现在构造一个集合 S:

$$S=\{A\mid A\notin A\}.$$

也就是说 S 是由满足条件“$A\notin A$”的那些 A 组成的一个新的集合.我们问:S 是不是它自己的一个元素?即 $S\in S$ 还是 $S\notin S$?

如果 $S\notin S$,因为集合 S 由所有满足条件 $A\notin A$ 的集合 A 所组成,由 $S\notin S$,即知 S 当然就在 S 中,也就是说 $S\in S$.

如果 $S\in S$,因为集合 S 中任一元素 A 都有 $A\notin A$,由 $S\in S$ 知 S 是 S 中的元素,所以 $S\notin S$.

这样我们便得到了矛盾:既不是 $S\in S$,也不是 $S\notin S$,这就是著名的罗素悖论.

罗素悖论的出现说明朴素集合论有问题,从而使数学的基础也发生了动摇,引起了一些著名数学家的极大重视.是不是可以抛弃集合论,而把数学建立在其他更为严密可靠的理论之上?但是经过一段时间的探索,发现别的理论更不好建立和运用,远不如集合论方便有力.于是许多数学家致力于集合论的改造,开始了集合论公理的研究.1908 年策梅罗(Zermelo)首先创立了集合论的一个公理系统,后来经过费兰克尔(A. Fraenkel)改进,形成了今天著名的 ZF 系统.同时,罗素也发表了他的一个集合论公理系统——类型论.以后冯·诺

依曼(John von Neumann)、贝尔奈斯(P. Bernays)、哥德尔(Godel)等人相继建立了其他类型的公理系统. 在这一过程中,数学家们不仅为整个数学奠定了比较坚实的基础,而且也取得了极为丰富的成果,推动了数学基础理论的进一步发展和完善. 罗素悖论的成因十分繁杂,究竟是什么样的前提导致了悖论的出现,众说纷纭,并因此形成各种各样的学派,争论的焦点主要集中在"一切集合汇集在一起"是否仍然构成一个集合,这一问题迄今仍未得到彻底解决. 现在,尽管数学大厦的基础依然存在着一丝裂缝,但总的说来,由集合悖论而引起的数学危机(第三次数学危机)已经趋于平缓.

"理发师的头由谁来理"的故事,就是罗素悖论的通俗表述. 下面用罗素悖论来说明一下.

设小镇上那些不给自己理发的人的全体组成集合 C,由题意知这位理发师只给且仅给集合 C 中的人理发.

如果这位理发师属于集合 C,那么由集合 C 的定义可知,理发师不能给自己理发. 另一方面,由题意,理发师应该给自己理发. 反之,如果这位理发师不属于集合 C,那么由集合 C 的定义可知,理发师应给自己理发. 另一方面,由题意,理发师不给自己理发. 这是一个罗素悖论.

练 习 七

1. "鳄鱼两难". 这是古希腊哲学家们喜欢谈论的一个有趣的悖论.

一条鳄鱼从一位母亲手中抢走了一个小孩. 鳄鱼对孩子的母亲说:"请你回答,我会不会吃掉你的孩子?答对了,我就把孩子不加伤害地还给你;否则,就别怪我不客气了!"聪明的母亲机智地回答说:"你是要吃掉我的孩子的."试问鳄鱼是

否能把孩子还给母亲？

2. 中国民间流传着这么一个故事："师徒打官司"。

一位讼师收徒弟，协议规定："学成之后，打赢一场官司交给讼师一两银子，打输一场官司就不交."后来弟子满师，打赢了官司却一直不交钱. 老讼师气极了告到县衙，和弟子打官司. 试问这场官司该如何裁决？

八、聪明的囚徒

古希腊有个国王，对处死囚徒的方法作了两种规定：一种是砍头，一种是处绞刑. 并且他自恃聪明地作出一种决定：囚徒可以任意说出一句话，而且这句话是马上可以验证其真假. 如果囚徒说的是真话，那么处以绞刑；如果说的是假话，那么就砍头. 结果，许多囚徒或者因为说了真话而被绞死；或者因为说了假话而被砍头.

有一位极其聪明的囚徒，当轮到他来选择处死方法时，他说出一句巧妙的话，结果使这个国王按照哪种方式处死他，都违背自己的决定，只得将他放了.

试问：这囚徒说的是句什么话？

在日常的语言中，一般地讲，只有陈述句才可分辨真假. 凡是可以决定真假的语句叫做**命题**. 但陈述句中有两种形式不是命题. 如陈述句"这道题很难"、"那个人相当年轻"等，"很难"、"相当年轻"等这些概念没有清晰的界限，属于模糊命题，这类命题不属于我们讨论范围.

还有一类，就陈述句本身而言，确实很明确，但与其他命题联合起来，就无法判定其真假. 如在一张空白的双面卡片上，正面写上一句："A：这张卡片背面的句子是真的. "而在该卡片的背面写上一句："B：这张卡片背面的句子是假的. "

若 A 是真的，那么 B 就是真的，即"这张卡片背面的句子是假的"为真，这就导致句子 A 是假的.

若 A 是假的，那么 B 就是假的，即"这张卡片背面的句子

是假的"为假，这又导致句子 A 是真的.

两个句子都没谈到自身，但放到一起，它们就不断改变着它们的真实性，结果就无法判断出任何一个句子的真假性. 这不是诡辩，这是命题悖论. 在日常语言活动中，留心命题逻辑这一问题的人，往往还可找到许多这样的例子.

最典型的例子是"说谎者悖论"："我正说的这句话是谎话". 试问这句话是否真是谎话呢？若是谎话，则它陈述的事实为假，因而"我"说的就不是谎话；若不是谎话，则它陈述的事实为真，因而"我"说的又是谎话. 总之无法自圆其说.

又如"自谓悖论"：一个形容词能够形容自己，则称为"自谓的"，否则就是"非自谓的". 例如，"中文的"这个形容词就是"自谓的"，因为它不但可以形容一切用中文书写或印刷的东西，还可以形容它自己，它自己也是"中文的"；而"英文的"这个形容词则是"非自谓的"，因为它本身并非是"英文的". 现在问"非自谓的"这个形容词是否"自谓"呢？若它是自谓的(即可自己形容自己)，则正好又与它本身的词义相同，按照"自谓的"定义，它又应该是自谓的.

所谓**命题悖论**是：一个命题 Q，如果从 Q 为真，可以推出 Q 为假；又从 Q 的否定为真(即 Q 为假)，可以推出 Q 为真，我们就说 Q 是一个命题悖论. 这类悖论往往还是与语义有关的悖论.

命题悖论是与集合悖论密切相关的，每一命题悖论可以重新组织为一个关于集合的悖论；反之，每一个集合悖论可以重新组织为一个关于命题的悖论.

最初罗素为了排除这种悖论，提出下面的观点：语言应该层次分明，同一层次的语言不能在其自身中讨论真假，建立了所谓"简单类型论". 按照这个理论，把集合按其类型的级别

加以排列，一个集合不能是低一级的任何集合的元素，这样就把第四个问题中的罗素悖论的“一个集合是它本身的一个元素或不是此集合的元素”就排除掉了，从而消除了自相矛盾的集合，这也就在命题逻辑中，规定了合格命题的法则. 但罗素的这种类型论并没有被大多数逻辑学者所接受，进而导致了各种公理化集合论.

聪明的囚徒所说的话，应使国王无论怎么处置他都带来矛盾，这句话就是“国王决定将我砍头”. 如果这和国王的规定一致，是说真话，因而按国王决定的处死方法，讲真话应处以绞刑. 这样造成了国王的规定（砍头）同按国王决定的处死方法相矛盾. 如果这和国王的规定不一致，是说的假话，因而按国王决定的处死方法. 讲假话应予以砍头，这样又造成了国王的规定（绞刑）同按国王决定的处死方法相矛盾. 国王处于进退维谷的处境，只好免于处死，将囚徒放掉.

练　习　八

1. 事与愿违. 戈登·狄克森的小说“猴子扭伤”中，有一段说的是某科学家想让电子计算机不工作来节省机器的寿命. 他告诉计算机：“你必须拒绝我现在给你编的语句，因为我编的所有语句都是错的. ”没想到计算机却因此而不断地重复乃至疯狂地工作，直到耗尽它的寿命. 这是为什么？

2. 克里特人伊壁孟德说：“所有的克里特人都是撒谎者. ”这句话是真还是假？

3. 一个形容词，如果它不具有它表示的性质，就称为逆逻辑的. 例如，“monosyllabic”（单音节的）是一个逆逻辑形容词，而“polysyllabic”（多音节的）不是逆逻辑形容词. 试问“heterological”（逆逻辑的）是逆逻辑的形容词吗？

九、谁 错 了?

现有一个加法填数字算式,用字母表示如下:

$$\begin{array}{r} A\,B\,C\,D \\ +\quad C\,B\,A\,B \\ \hline B\,B\,C\,B\,B \end{array}.$$

两个人给出两个不同的结果:$A=8,B=1,C=3,D=0$ 和 $A=6,B=1,C=3,D=0$. 只是 A 不同但和数一样. 谁填的对? 怎么导出的?

十进制是用 0,1,2,…,9 十个数码表示的进位制,特点是"逢十进一",并且一个任意的十进制数$(N)_{10}$可以写成如下两种形式:

$$\begin{aligned}(N)_{10}&=k_{n-1}k_{n-2}\cdots k_1k_0.\,k_{-1}k_{-2}\cdots k_{-m}\\&=k_{n-1}\times 10^{n-1}+k_{n-2}\times 10^{n-2}+\cdots+k_1\times 10^1+k_0\times 10^0\\&\quad+k_{-1}\times 10^{-1}+k_{-2}\times 10^{-2}+\cdots+k_{-m}\times 10^{-m}.\end{aligned}\tag{1}$$

其中各 k_i 是 0 到 9 这十个数码中任一个. 此时我们说这是基数为十的进位制,其中第二个等号后面是按基数十展开的形式.

相应地,二进制是 0,1 两个数码表示的进位制,特点是"逢二进一",表示方法是:

$$\begin{aligned}(N)_2&=k_{n-1}\cdots k_1k_0.\,k_{-1}\cdots k_{-m}\\&=k_{n-1}\times 2^{n-1}+\cdots+k_1\times 2+k_0\times 2^0+k_{-1}\times 2^{-1}+\cdots\\&\quad+k_{-m}\times 2^{-m}.\end{aligned}\tag{2}$$

其中各个 k_i 是 0,1 这两个数码中任一个.

一般地，P 进制是由 $0,1,2,\cdots,P-1$ P 个数码表示的进位制，特点是“逢 P 进一”，并且可以表示成以下形式：

$$
\begin{aligned}
(N)_P &= k_{n-1}k_{n-2}\cdots k_1k_0.\,k_{-1}k_{-2}\cdots k_{-m} \\
&= k_{n-1}P^{n-1}+\cdots+k_1P^1+k_0P^0+k_{-1}P^{-1} \\
&\quad +\cdots+k_{-m}P^{-m}.
\end{aligned} \tag{3}
$$

我们常遇到的是二进制数与十进制数互化问题.

二进制数化为十进制数很简单，只要把二进制数按基数二展开式(2)，并把各个数码看成相应的十进制数码.算出结果，就是与二进制数相应的十进制数.如 $(10110.1)_2$ 化成十进制数就是：

$$
\begin{aligned}
(10110.1)_2 &= 1\times2^4+0\times2^3+1\times2^2+1\times2^1+0\times2^0+1\times2^{-1} \\
&= 16+0+4+2+0+\frac{1}{2} \\
&= (22.5)_{10}.
\end{aligned}
$$

十进制数化成二进制数稍复杂些，对整数用“二除取余”法；对纯小数用“乘二取整法”.如把十进制数 35 和 0.4285 化为二进制数，方法格式如下：

		余数
2	35	
2	17	…… 1
2	8	…… 1
2	4	…… 0
2	2	…… 0
2	1	…… 0
	0	…… 1

因此

$$(35)_{10}=(100011)_2.$$

$$
\begin{array}{lr}
\text{整数} & 0.4285 \\
 & \times \quad\quad 2 \\
\hline
0 \longleftarrow & 0.8570 \\
 & 2 \\
\hline
1 \longleftarrow & 1.7140 \\
 & 2 \\
\hline
1 \longleftarrow & 1.4280 \\
 & 2 \\
\hline
0 \longleftarrow & 0.8560 \\
 & 2 \\
\hline
1 \longleftarrow & 1.7120
\end{array}
$$

因此 $$(0.4285)_{10}=(0.01101\cdots)_2.$$

如果把$(35.4285)_{10}$化为二进制数，就是对整数和小数部分分别化，最后合到一起，即

$$(35.4285)_{10}=(100011.01101\cdots)_2.$$

对于十以外的 P 进制的算术运算也很简单，我们只要注意到“逢 P 进一”和“借一当 P”就可以了. 如两个八进制数$(6205)_8$与$(4775)_8$相加，由“逢八进一”很易得出：

$$
\begin{array}{r}
6\,2\,0\,5 \\
+\quad 4\,7\,7\,5 \\
\hline
1\,3\,2\,0\,2
\end{array}.
$$

减法，由“借一当八”很易得出：

$$
\begin{array}{r}
6\,2\,0\,5 \\
-\,4\,7\,7\,5 \\
\hline
1\,2\,1\,0
\end{array}.
$$

至于乘法与除法运算，完全可以仿照十进制数的乘法与除法的格式，注意进位和借位，很容易得出结果.

对于题目中所给的算式，利用十进制，两个四位数相加的

和是一个五位数，所以由右往左第五位 $B=1$；由右数第一位因 $D+B=B$，所以 $D=0$；右数第二位，一定是 $C+A=11$，要进位 1；右数第三位，因 $B+B+1=C$，所以 $C=3$；因 $A+C=11$，$C=3$，所以 $A=8$. 故原式为：

$$\begin{array}{r} 8\,1\,3\,0 \\ +\quad 3\,1\,8\,1 \\ \hline 1\,1\,3\,1\,1 \end{array}.$$

采用八进制，注意到“逢八进一”，同上面的分析一样. 可以得到 $B=1$，$C=3$，$D=0$. 唯独不同的是 A，因 $A+C=11$，$C=3$，所以 $A=6$，故原式为：

$$\begin{array}{r} 6\,1\,3\,0 \\ +\quad 3\,1\,6\,1 \\ \hline 1\,1\,3\,1\,1 \end{array}.$$

练 习 九

1. 对于 $(32500)_6$ 这个数，当在右边填一个 0，增加多少倍？当在右边去掉两个 0，减少多少倍？

2. 任给一个三位数 abc，用 13 乘，再用 11 乘，再用 7 乘后得六位数 $abcabc$ 是何道理？

3. 证明 10201 在大于 2 的任何基数的记数制中，都是合数.

4. 对于任意自然数 n，试计算和 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left[\dfrac{n+2^k}{2^{k+1}}\right]$（1968，IMO）.

十、机灵的小白鼠

捕鼠能手大花猫，每天要抓到不少老鼠. 为了表明它的顽皮与宽厚，它在吃老鼠以前，先叫老鼠列队报数. 第一批吃掉报单数的，剩下的老鼠重新报数，第二批仍吃掉报单数的，第三批也是如此…，最后剩下的一只老鼠可以被保留，与第二天抓来的老鼠一起重新列队报数….

后来，大花猫发现了一件极其奇怪的事情. 大花猫发现，一连好几天，最后被留下来的总是一只小白鼠. 大花猫很是不理解，试问这只机灵的小白鼠每天列队时站在什么位置上才不被花猫吃掉？

人们习惯用十进制数来计数，但有些特殊问题，用二进制数表示后，更易发现其规律性.

由二进制数与十进制数之间的对照，很易看出以下关系：

十进制数		二进制数
$1=2^0$	$\longleftrightarrow$	1
$2=2^1$	$\longleftrightarrow$	10
$4=2^2$	$\longleftrightarrow$	100
$8=2^3$	$\longleftrightarrow$	1000
$16=2^4$	$\longleftrightarrow$	10000
……		……
2^n	$\longleftrightarrow$	$1\underbrace{000\cdots0}_{n个0}$

我们就用这个规律来分析和解决机灵的小白鼠排在什么

位置才不被吃掉，进而还可找出排在任意一个位置能被第 n 批吃掉的问题.

只有每次报数都能保证是偶数，才有可能不被吃掉.很明显，开始若干次是偶数，并不能保证后面仍是偶数，因为上一次的偶数个数，在下一次报数时有一半成为奇数，要保证每次都是偶数个数，就只有根据总数量的多少，排在第 2，4，8，16，32 的位置，即第 $2^1,2^2,2^3,2^4,2^5$ 的位置. 比如有 13 只老鼠.

第一次报数：$\cancel{1}$ 2 $\cancel{3}$ 4 $\cancel{5}$ 6 $\cancel{7}$ 8 $\cancel{9}$ 10 $\cancel{11}$ 12 $\cancel{13}$；

第二次报数： $\cancel{1}$ 2 $\cancel{3}$ 4 $\cancel{5}$ 6；

第三次报数： 1 2 3.

即开始排在第 $8=2^3$ 的位置，才不被吃掉，就是每次要排在有尽可能多的因数 2 的位置，就安全了. 比如：10 只老鼠排队，站在第 8 位（2×2×2）；20 只老鼠排队，站在第 16 位（2×2×2×2）；40 只老鼠排队，站在第 32 位（2×2×2×2×2）；等等. 一般地，有下列规律（表 10.1）：

表 10.1

鼠数	2→3	4→7	8→15	16→31	…	$2^n \to 2^{n+1}-1$
位置	2	4	8	16	…	2^n

用二进位数表示留下的位置，相应的就是：10，100，1000，10000，…，$1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个}0}$. 如果我们把老鼠位置化为二进位制数，就立刻知道它将在第几批被吃掉，如对第 12 只老鼠，将 12 化为二进制数是 1100，右边第 1、2 位是“0”，所以它在第一批. 第二批都被留下，而在右边第 3 位是“1”，它肯定是在第三批被吃掉.

只有那些位置数化成二进制数时，只有一个“1”和若干个“0”的老鼠才可能被留下. 至于留下哪一只，就要看排队老鼠

的多少而定(见表 10.1). 这只机灵的小白鼠,每次列队都排在 $2^n(\underbrace{1000\cdots0}_{n\text{个}})$的位置上,故每批都被剩下了.

练 习 十

1. 用最快的算法,算出二进制数 100101 是十进制数中的什么数?

2. 一个月中,你最喜欢哪一天?你不用直接告诉我,只需告诉我在下面的五张卡片中,哪几张有你喜欢的日子,我就知道你最喜欢哪一天.

一		1
3	5	7
9	11	13
15	17	19
21	23	25
27	29	31

二		2
3	6	7
10	11	14
15	18	19
22	23	26
27	30	31

三		4
5	6	7
12	13	14
15	20	21
22	23	28
29	30	31

四		8
9	10	11
12	13	14
15	24	25
26	27	28
29	30	31

五		16
17	18	19
20	21	22
23	24	25
26	27	28
29	30	31

十一、一张烧焦了的遗嘱

大侦探 A 被请来破一张烧焦了的遗嘱之谜. 百万富翁 B 死于一场大火,留下了一张烧焦了的难以辨认的遗嘱. 遗嘱里除了说明要把他的全部遗产均分给他的众多继承人外,还有一个长长的除法运算. 不幸,这个除法运算中只有商数中一个数字可辨认,在显微镜下,还可以看出式中标出的每个位置上都曾有过数字,然而没有余数,这些条件对大侦探 A 已经足够了. 当他很快地用唯一可能的方法填上缺少的数字时,发现除数和被除数正好与继承人数和遗产总价值符合. 请问大侦探是怎么推出来的? 继承人有多少?

$$\begin{array}{r}
\triangle 7 \triangle\triangle\triangle \\
\triangle\triangle\triangle\,\big)\,\overline{\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle\triangle} \\
\underline{\triangle\triangle\triangle\triangle} \\
\triangle\triangle\triangle \\
\underline{\triangle\triangle\triangle} \\
\triangle\triangle\triangle\triangle \\
\underline{\triangle\triangle\triangle} \\
\triangle\triangle\triangle\triangle \\
\underline{\triangle\triangle\triangle\triangle}
\end{array}$$

该问题并不是一个难题,对这类问题,虽然按常规方法可以推出结果,但往往要花费很多时间,运算虽简单,然而工作量却很大. 这类问题,一般都要充分分析题意,找出特点,抓住关键,常常进行反推或分析,利用逆向思维方法,逐步攻克.

该题可以通过除法运算，试推出各个数字. 其解法有多种，要采取十几个步骤，占用好几页的篇幅. 大侦探是善于推理的，他只用了三个容易的推理步骤就解决了.

(1) 商的第四个数字显然是 0，因为被除数的两个数字必须同时落下来.

(2) 商数的第一个数字和最末一个数字都比第三个数大，因为它们与除数的乘积是四位数字，而第三个数字又比第二个数字 7 大，这因为从一个大的数减去第三个数字与除数的乘积所得的差，比从一个较小的数减去 7 与除数的乘积所得差小. 这就意味着，商数的第一个数字和最末一个数字是 9，第三个数字是 8. 总之商等于 97809.

(3) 因为除数的 8 倍不大于 999. 这是第三个乘积可能取的最大数. 所以除数不大于 124，又因为最后一个减法运算的头两个数字不能大于 12，而这两个数字是第三个减法中，一个四位数与第三个乘积的差，四位数至少是 1000，所以第三个乘积至少是 988，因而除数至少是 124，因此除数是 124，商是 97809，这意味着百万富翁留下的 12128316 美元，打算分给 124 位继承人.

练 习 十 一

1. 下式的简单加法问题是两位数学家用贺年卡的独特形式提出来的，给出的条件是 $E^2=H$，同时每一个字母代表一个不同的数字，请求出这个加法问题的答案.

$$\begin{array}{r} D\&J \\ ANDREE \\ SEND \\ \hline CHEER \end{array}$$

2. 在下述方程中，每个字母代表十进制中的一个不同的数字，$(YE)\cdot(ME)=TTT$，且 $YE<ME$. 试求出：E，M，Y，T 各是几?

十二、填上恰当的数字

已知 $N=\overline{13xy45z}$，能被 792 整除，试填三个数字 x,y,z.

我们对于整除问题并不陌生，关于整除的特征，常用到的有：

(1) 能被 2 整除的数的特征是它的个位数字是偶数；能被 5 整除的数的特征是它的个位数字是 0 或 5；

(2) 能被 4 或 25 整除的数的特征是它的末两位数能被 4 或 25 整除；

(3) 能被 8 或 125 整除的数的特征是它的末三位数能被 8 或 125 整除.

(4) 能被 3 或 9 整除的数的特征是它的各个位数的数字之和能被 3 或 9 整除；

(5) 能被 11 整除的数的特征是它的奇位上的数字之和减去偶位上的数字之和，所得的差能被 11 整除.

本题目中 N 能被 792 整除而 $792=8\times9\times11$，因此 $8\mid N$，$8\mid\overline{45z}$，故 $z=6$. 又因 $9\mid N$，$9\mid(19+x+y)$，故 $x+y=8$ 或 $x+y=17$，又因 $11\mid N$，$11\mid(3+x-y)$，故 $x-y=8$ 或 $x-y=-3$，这样，可得 x,y 的四组方程：

$$\begin{cases}x+y=8,\\x-y=8;\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x+y=8,\\x-y=-3;\end{cases}$$

$$\text{或}\begin{cases}x+y=17,\\x-y=8;\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}x+y=17,\\x-y=-3.\end{cases}$$

不难求出合题意的解为：$x=8,y=0$.

即该数 $N=1380456$.

练 习 十 二

1. 将 0,1,2,…,9 这十个数码按照任意一种顺序填入下面数字序列的空白处(△),形成一个 28 位数

5△383△8△2△936△5△8△203△9△3△76.

那么所得到的数有多少种能被 396 整除?

2. 如果不大于四位数的整数能被 99 整除,那么它们的各位数字之和能被 18 整除.

3. 任意平方数必有 $9k$ 或 $3k+1$ 的形状.

4. 任意一个整数与它的数字和的差,必能被 9 整除,并且它与它的数字作任意调换后所成整数的差也能被 9 整除.

十三、x 应是什么数?

已知 $N=\overline{2x78}$,若 $17|N$,x 应是什么数?

在讨论整数的性质时,经常用到把整数 N 记作 $N=aq+r$ 的形式(a 为大于 1 的整数,q,r 为整数).这种形式在整除、带余数的除法和同余问题等问题上都起着重要作用.在前面提到的整除特征的证明,就实质而言,也是利用了这种形式.在数的整除中,我们还知道,若 $b|a_1$,$b|a_2$,$\cdots$,$b|a_n$,则 $b|(\pm a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n)$,反之,也对.

在上述问题中,我们把 N 改写成

$$N=2078+100x=17(122+6x)+(4-2x).$$

因为 $17|N$,所以 $17|(4-2x)$,即 $17|2(2-x)$,从而 $17|(2-x)$,所以 $x=2$,即数 $N=2278$.

练 习 十 三

1. 证明不能被 3 整除的整数的平方与 1 的差,能被 3 整除.

2. 把整数写成百进制的数,若数字之和能被 11 整除,则该数能被 11 整除.

3. 设 x 是实数,n 是正整数.证明

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\cdots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx].$$

4. 求适合下列条件的最小自然数 n:

(1) 用十进制数表示时,其个位数字为 6;

(2) 如把个位数字 6 去掉,并在余下的数字之前添上数字 6,则所得到的数是原数 n 的 4 倍.

十四、$2222^{5555}+5555^{2222}$能被 7 整除

在初等数学中，我们知有以下几个关于整值解析式 $a^n \pm b^n$（a,b 是整数）的整除问题的定理：

$(a-b)|(a^n-b^n)$，$a\neq b$，n 为自然数；

$(a+b)|(a^n-b^n)$，$a\neq -b$，n 为正偶数；

$(a+b)|(a^n+b^n)$，$a\neq -b$，n 为正奇数.

例如，可以判定 $2^{4n}-1$ 可被 2^4+1 整除，同时也可以被 2^4-1 整除. 事实上 $2^{4n}-1=(2^4)^n-1^n$，即当 n 为正偶数时，被 $2^4\pm1$ 整除. 又如 $3^{4n+2}+5^{2n+1}$能被 14 整除. 事实上，$3^{4n+2}+5^{2n+1}=9^{2n+1}+5^{2n+1}$，即 $14|(3^{4n+2}+5^{2n+1})$.

题目中整值解析式可以写成

$$2222^{5555}+5555^{2222}=(5555^{2222}-2222^{2222})+(2222^{2222}+2222^{5555}).$$

右边第一项显然可被 7777 整除，当然也可被 7 整除；右边第二项写成

$$2222^{2222}+2222^{5555}=2222^{2222}(2222^{3333}+1).$$

因其中 $2222^{3333}+1=(2222^3)^{1111}+1$，故可被 2222^3+1 整除，而 $2222=7k+3$，k 为整数，所以

$$\begin{aligned}2222^3+1&=(7k+3)^3+1\\&=7k_1+3^3+1\\&=7k_1+28\ (k_1\text{ 为整数}).\end{aligned}$$

又因 $7|28$，所以 $7|(2222^3+1)$. 故整值解析式 $2222^{5555}+5555^{2222}$可被 7 整除.

练 习 十 四

1. n 为正整数，试证：$f(n)=8^{n+2}+9^{2n+1}$能被 73 整除.

2. $1^k+2^k+\cdots+n^k$ 能被 $1+2+3+\cdots+n$ 整除，其中 $n\in N$，k 为正奇数.

3. 求一切形如 $7^{n+2}+8^{2n+1}$的数的最大公约数，其中 n 是非负整数.

十五、军官带领多少士兵?

相传在古代罗马有一个军官带领 500 多个士兵，攻占了一个小城. 为了显示军威，他把全体士兵集合在一起，准备列队在各个街道上示威. 他把士兵排成 4 列纵队，最后剩下 1 人；把士兵排成 6 列纵队，最后也剩 1 人；把士兵排成 8 列纵队，最后还是剩 1 人. 他很迷信，怎么列队都剩 1 人，这太不吉利，于是马上下令撤离小城. 问他的士兵人数最多是多少?

我们知道，整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公共倍数称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公倍数. 最小的公倍数称为最**小公倍数**，可记作 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公共因数称为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的公因数. 最大的正公因数称为最大公因数，可记作 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

求任意两个数的最大公因数，可用我们熟知的欧几里得辗转相除法，并且我们可以证明最大公因数与最小公倍数之间有一个重要关系.

假设 $ab>0$，那么

$$\{a, b\}(a, b)=ab.$$

事实上，假定 $\{a, b\}=m$，$(a, b)=d$，因 $a \mid m$，$b \mid m$，所以 $ab \mid ma$，$ab \mid mb$，因此 $ab \mid (ma, mb)$，即 $ab \mid md$. 又因 $a \left| \dfrac{ab}{d} \right.$，$b \left| \dfrac{ab}{d} \right.$，即 $\dfrac{ab}{d}$ 是 a, b 的公倍数，又公倍数是它们的最小公倍数的倍数，$m \left| \dfrac{ab}{d} \right.$，于是 $md \mid ab$，因此 $ab=md$.

对于军官带领多少士兵的问题，实际上是所带来的精确人数 N 去掉 1 后，能用 4，6，8 整除，即 $N-1$ 是 4，6，8 的公倍数. 但由题意，应是接近 600 且不少于 500 的那个公倍数，于是有

$$N-1=k(4,6,8),\ k\text{ 为整数},$$

化简为

$$N=k\cdot 24+1.$$

由题意

$$\text{取 } k=24.\ N=24\times 24+1=577(\text{人}).$$

故军官所带领的士兵精确人数是 577 人.

练 习 十 五

1. 甲、乙、丙三人定期到游乐场打台球，甲每 5 天去一次，乙每 6 天去一次，丙每 9 天去一次. 已知十月三日这一天他们正好都去了，问下一次他们正好都去是几月几号？

2. 从 176 到 545 的所有整数中，13 的倍数有几个？

3. 假定 $a>1$，且 a,m,n 是正整数，证明：

$$(a^m-1,a^n-1)=a^{(m,n)}-1.$$

4. 求所有满足 $(x,y)=8,\{x,y\}=64$ 的整数 x,y.

5. 求证：$\dfrac{21n+4}{14n+3}$是不可约分数，这里 n 是任意正整数.

十六、素数有多少个？

不查表，求 150 以内的素数有多少个？

我们知道，大于 1 且除了 1 和它自身外无其他因数的整数称为素数. 1 以外的非素数的正整数称为合数.

“1”为什么不叫素数呢？古希腊人把一切数看作几何量，称为矩形数，而把只能表示为唯一的矩形数叫素数.“1”是个单位数，不能构成矩形数，故“1”不是素数. 一直到现在，就是继承了古希腊的这种数学思想.

许多数论问题都是围绕着素数被提出来的，其中最主要的是寻找“素数公式”！当然，首先的问题是究竟有多少个素数？是有限还是无限？这一古老问题，人们通过筛选发现：在 1～1000 之间有 168 个素数；在 1000～2000 之间有 138 个素数；在 2000～3000 之间有 127 个素数；在 3000～4000 之间有 120 个素数；在 4000～5000 之间有 119 个素数等等. 这表明素数分布是不规则的，并且越往上越稀少.

关于素数个数是无限多的问题，在古希腊，欧几里得就给出了一个非常优美的证明——非构造性证明的最早的一个例证.

人们从欧几里得时代开始寻找“素数公式”. 在漫长的岁月里，许多奇妙的“素数公式”纷纷出现，其结果使人扑朔迷离. 这些有趣的工作及结论，丰富了数学宝库，而“费马素数公式”正是这许多结论之一. 1640 年费马在信中提到：形如 $2^{2^n}+1$ 的数都是素数. 由于费马被誉为“业余数学家之王”、“数

论之父"的崇高的数学声望和这类数学工作的艰巨性，在很长一段时间里，没有人怀疑这个猜想的正确性，并且命名为"费马数"，记为

$$F_n=2^{2^n}+1.$$

当时费马只验证了 $n=0,1,2,3,4$ 时，F_n 分别为素数 3，5，17，257，65537. 直到 1732 年欧拉惊喜地发现，F_5 不是素数.

$$F_5=641\times6700417.$$

从此费马"一贯正确"的神话被打破了. 后来许多数学家相继验证了许多费马数都是合数，再没有发现费马数是素数，但又引出了新的猜想：费马数只有 5 个素数，而其余的都是合数. 这一猜想的验证远非是一件容易的事！关于寻找"素数公式"，至今仍未得到具有实用性的结果.

现在，判定一个数是否是素数的通常办法是：若自然数 N(大于 1)不能被不大于 $\sqrt{N}$ 的所有素数除尽，则 N 为素数. 当 N 不大时，求小于 N 的全体素数还是容易办得到的，可以借助于古希腊数学家爱拉托撒尼的筛选法所得到的素数表. 但 N 非常大时，就困难了. 人们又找了几种特殊的方法寻找素数，目前所知最大的素数有 3376 位数字. 今天人们用电子计算机寻找到的最大素数是麦生素数 $2^{132049}-1$，它有 39751 位数字.

关于素数个数问题，有以下重要结果：如果不超过 $\sqrt{N}$ 的素数有 r 个：

$$2=p_1<p_2<p_3<\cdots<p_r\leqslant\sqrt{N},$$

则不超过 N 的素数的个数为

$$\pi(N)=r-1+N-\sum_{i=1}^{r}\left[\frac{N}{p_i}\right]+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_j}\right]$$

$$-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant r}\left[\frac{N}{p_ip_jp_k}\right]+\cdots+(-1)^r\left[\frac{N}{p_1p_2\cdots p_r}\right].$$

对于不超过 150 以内的素数个数问题，因为 $\sqrt{150}<\sqrt{169}=13$ 的素数是 2，3，5，7，11$(r=5)$，于是

$$\begin{aligned}\pi(150)=&5-1+150-\frac{150}{2}-\frac{150}{3}-\frac{150}{5}-\frac{150}{7}-\frac{150}{11}+\frac{150}{3\times7}\\&+\frac{150}{3\times11}+\frac{150}{5\times7}+\frac{150}{5\times11}+\frac{150}{7\times11}+\frac{150}{2\times3}+\frac{150}{2\times5}\\&+\frac{150}{2\times7}+\frac{150}{2\times11}+\frac{150}{3\times5}-\frac{150}{2\times3\times5}-\frac{150}{2\times3\times7}-\\&\frac{150}{2\times3\times11}-\frac{150}{2\times5\times7}-\frac{150}{2\times5\times11}-\frac{150}{2\times7\times11}-\\&\frac{150}{3\times5\times7}-\frac{150}{3\times5\times11}-\frac{150}{3\times7\times11}-\frac{150}{5\times7\times11}+\\&\frac{150}{2\times3\times5\times7}+\frac{150}{2\times3\times5\times11}+\frac{150}{2\times3\times7\times11}+\\&\frac{150}{2\times5\times7\times11}+\frac{150}{3\times5\times7\times11}-\frac{150}{2\times3\times5\times7\times11}\\=&154-(75+50+30+21+13)+(25+15+10+6\\&+10+7+4+4+2+1)-(5+3+2+2+1+0+\\&1+0+0+0)+(0+0+0+0+0)-0\\=&154-189+84-14=35.\end{aligned}$$

即 150 以内的素数共有 35 个.

练 习 十 六

1. 已知 1 到 10 间的素数是 2，3，5，7，而 10 到 100 间的素数不知道（不查表），求 1 到 100 间的素数的个数.

2. 证明：$F_5=2^{2^5}+1=2^{32}+1$ 是合数.

十七、约数有多少个？

360 有多少个约数？

给定一个整数，我们可以找出两个或多个约数，但要找出一个比较大的合数的全部约数的个数，是一件比较繁杂的工作，往往还容易遗漏掉. 我们给出求一个数的全部约数的个数的一般方法.

每一个大于 1 的整数 N 都能用素数连乘来表示，如果不计这些素因数的顺序，则只有一种方法可以把数 $N(N>1)$分解成素因数的连乘积. 这就是说，如果把相同的质因数合并为它的幂数，则任一个 $N>1$ 的整数可分解成唯一形式，如下所示

$$N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n}(n>1),$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是各不相同的质数，且 $p_1<p_2<\cdots<p_n$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为自然数.

我们把

$$N=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_n^{\alpha_n} \tag{1}$$

叫做 N 的**标准分解式**. 此时，约数个数可用下式来计算：

$$F(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1). \tag{2}$$

360 有多少个约数的问题，就是按(2)式去求，由(1)式 $360=2^3\times3^2\times5$，所以 360 的所有约数都具有形式

$$d=2^{\alpha}\cdot3^{\beta}\cdot5^{\gamma},$$

其中 α 可以从 0,1,2,3 这 4 个数中任取一个，β 可以从 0,1,2

这 3 个数中任取一个，γ 可以从 0，1 这 2 个数中任取一个. 所以总共有 $4\times3\times2=24$ 个. 故 360 能被 24 个不同的自然数（其中包括 1 和 360）整除，即 360 有 24 个约数.

练 习 十 七

1. 求 100 以内具有 10 个约数的自然数都有哪些？

2. 求一个最小自然数，使它的一半是平方数，它的 1/3 是立方数，它的 1/5 是五次方数.

3. 求所有与 12 及 15 互素的整数.

4. 求正整数 a,b，使 $\{a,b\}=144$，$(a,b)=24$.

十八、1979！末尾含有多少个零？

1979！末尾含有多少个零？

在整数 N 的标准分解式中，当 N 为某个连乘积($n!$)时，可以导出独特有趣的结果.

若 $n!=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$($p_1,p_2,\cdots,p_k$ 是 $n!$的互不相等的素因数，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 是非负整数)，且 $p_i^\lambda\leqslant np_i^{\lambda+1}$($\lambda$ 是某个非负正整数)，则 $p_i(i=1,2,\cdots,k)$的幂次数 α_i 可由下式给出：

$$\alpha_i=\left[\frac{n}{p_i}\right]+\left[\frac{n}{p_i^2}\right]+\left[\frac{n}{p_i^3}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{p_i^\lambda}\right]. \qquad (1)$$

如考虑 25！的一切素因数的幂次数. 不超过 25 的一切素因数为：2，3，5，7，11，13，17，19，23. 用这些素数及其幂去除 25，得出商，见表 18.1.

表 18.1

商 \ 素数	2	3	5	7	11	13	17	19	23
$\left[\frac{25}{p}\right]$	12	8	5	3	2	1	1	1	1
$\left[\frac{25}{p^2}\right]$	6	2	1						
$\left[\frac{25}{p^3}\right]$	3								
$\left[\frac{25}{p^4}\right]$	1								
总　和	22	10	6	3	2	1	1	1	1

故

$$25! = 2^{22} \times 3^{10} \times 5^6 \times 7^3 \times 11^2 \times 13 \times 17 \times 19 \times 23.$$

本题目是求含 0 的个数，因 $10 = 2 \times 5$，故 1979! 末尾含 0 的个数等于它的素因数分解中 2×5 的个数. 因 $2 < 5$，在此分解式中，2 的幂次数不会小于 5 的幂次数，从而含 0 的个数实际上应等于 5 的幂次数.

由(1)式，算得 $5^4 < 1979 < 5^5$，故可有

$$\left[\frac{1979}{5}\right] + \left[\frac{1979}{5^2}\right] + \left[\frac{1979}{5^3}\right] + \left[\frac{1979}{5^4}\right]$$
$$= 395 + 79 + 15 + 3 = 492.$$

所以，1979! 末尾含 0 的个数为 492 个.

练 习 十 八

1. 写出 30! 的标准分解式.
2. 求 $2^n!$ 的素因数分解式中，2 的最大幂次.
3. 500! 这个数恰被 7 的几次方整除?

十九、费马小定理与伪素数

在整除及同余理论中，著名的费马小定理起着重要作用．该定理是：若 p 为素数，且 $(n,p)=1$，则 $p\mid(n^{p-1}-1)$．

此定理的证明，在任何一本数论书中都可见到，由该定理得到下面的推论：若 p 为素数，则不论 n 是什么整数，都有 $p\mid(n^p-n)$．

该定理称为费马小定理是因为与费马的另一个定理（费马大定理或费马最后定理）（见专题二十三）对应，即“当 $n>2$ 时，$x^n+y^n=z^n$ 没有非零整数解”．

费马小定理对**伪素数**定义的产生及其在数论中的作用有一定影响．对于一个合数 n，如果 $n\mid(2^n-2)$，则称 n 为伪素数．本来 n 就是合数，为什么把具有这一形式的合数与素数联系起来呢？

原来费马在提出这个小定理时，没给出证明（完整的证明是其后近 100 年的 1736 年由欧拉给出的）．当时，人们自然想到它的逆命题是否成立，就是说“如果 $n\mid(a^n-a)$，则 n 是素数”是否为真？

据考证，在费马时代人们默认了 n 一定是素数．我们在前面所提到的费马数 F_n，费马推测 $F_n=2^{2^n}+1$ 是素数，他的依据可能就是利用了费马小定理的逆定理，这确实容易证明每一个 F_n 都能整除 $2^{F_n}-2^n$．从费马提出小定理时起（1640 年），这个伪素数的悬案竟整整延续了近 200 年之久．直到 1830 年，一位德国匿名者宣称：他否定了费马小定理的逆定理，给

出了证明，并给出一个例子：$341=11\times31$ 这个合数能整除 $2^{341}-2$.

$$\begin{aligned}2^{341}-2&=2(2^{340}-1)\\&=2[(2^{10})^{34}-1^{34}]\\&=2(2^{10}-1)(\cdots)\\&=2\cdot1023\cdot(\cdots)\\&=2\cdot3\cdot341\cdot(\cdots),\end{aligned}$$

所以 341 整除 $2^{341}-2$，这是人们发现的第一个既整除 2^n-2，又不是素数的数.这个宣称者之所以匿名，是因为在当时欧洲有一种风气，就是给出惊人的结果而不公布姓名，大概是为了增加问题的神秘感，或者怕暴露身份，引来是非.因为这个逆定理及费马推测，把人们欺骗的时间太长了，所以称为伪素数.

然而，人们并没有对伪素数失去兴趣.在 19 世纪末，人们找到了几个伪素数；到本世纪初，以普勒为代表的几个数学家找到 10 亿以内的全部奇数伪素数.数学家们还证明了存在无限多个奇数伪素数.直到 1950 年由数学家莱赫墨给出了第一个偶数伪素数：$161038=2\times73\times1103$，即

$$161038\mid2^{161038}-2.$$

翌年，荷兰数学家比格尔证明了偶数伪素数也是无限多的.进入本世纪后，人们研究伪素数过程，不仅给出了奇数伪素数、偶数伪素数，还有绝对伪素数、超伪素数等概念.

从否定费马小定理的逆定理开始，人们为什么还兴致勃勃地研究伪素数?原来这又涉及到当前数论研究的一个热点：确定素数问题.近年来数学家们认为，用费马小定理确定素数也是一种有效的办法.

设 n 是一个需要鉴定的大数，用 n 试除 2^n-2，如果除不

尽，则 n 一定是合数；如果除尽了，则 n 有很大可能是素数（也可能是伪素数）. 对于这个"可能"，据统计，如果 $n|(2^n-2)$，则 n 有 99.9967％的可能是素数. 这样一来，问题发生了本质的变化：从前是在大量的合数中筛出素数来，现在却是从大量的素数之中筛去寥寥无几的伪素数了. 所以如何准确快速地确定伪素数是至关重要的！这就是当代数学家们"喜爱"伪素数的原因.

现在，我们用费马小定理给出另一个有趣的应用.

例如，证明 n^5 与 n 的末位数字相等，n 为任意整数.

这只要 n^5-n 的末位数字为 0 即可. 因为由费马小定理知 $5|(n^5-n)$. 又 $n^5-n=n(n-1)(n+1)(n^2+1)$，所以 $2|n(n-1)$，即 $2|(n^5-n)$，故 $10|n^5-n$，于是得到 n^5-n 的末位数字是 0，从而 n^5 与 n 末位数字相等.

又如，试证 n^{4q+r} 与 n^r 的末位数字相同（q,r 为自然数）. 因为

$$n^{4q+r}-n^r=n^r(n^{4q}-1)=n^r[(n^4)^q-1],$$

而 $(n^4)^q-1$ 必有因式 n^4-1，所以 $n^{4q+r}-n^r$ 必有因式 $n(n^4-1)$. 又由前例知 $10|n(n^4-1)$，所以 $10|(n^{4q+r}-n^r)$，即 n^{4q+r} 与 n^r 的末位数字相同.

练 习 十 九

1. 确定 23^{102} 的末位数字.

2. 设 $a_m=3^{2m+1}+3^{3m+1}+4$，$b_m=3^{2m+1}+3^{m+1}+4$. 问：当 m 是怎样的自然数时，a_m 或 b_m 能被 5 整除？

二十、11，111，1111，…中没有平方数

求证 11，111，1111，…中没有平方数的问题，在波利亚的名著《数学的发现》中曾给出了一个相当麻烦的解法. 这里，我们用同余来解，十分简单和优雅.

我们知道，当约定 m 为正整数时，对于整数 a，有且仅有一对整数 q、r 存在，使得 $a=mq+r$ 中，有 $0\leqslant r<m$. 也就是说，任一整数 a 被正整数 m 除后的最小非负剩余不外以下 m 个数之一：$0,1,2,3,\cdots,(m-1)$.

如果 a，b 被正整数 m 除后最小非负剩余相同，即

$$a=mq_1+r,\quad b=mq_2+r\quad(0\leqslant r<m).$$

那么我们就说 a，b **关于模 m 同余**，记为 $a\equiv b(\bmod m)$. 这样以正整数 m 为模，全部整数按其除得的余数共可分成 m 类：$I_0,I_1,I_2,\cdots,I_{m-1}$，其中

$$I_0=\{a\,|\,a=mq\},\ I_1=\{a\,|\,a=mq+1\},\cdots,$$

$$I_{m-1}=\{a\,|\,a=mq+(m-1)\}.$$

称这 m 类数(集)为以 m 为模的**剩余类**.

易知，$m\,|\,(a-b)$是 a，b 关于模 m 同余的充要条件. 而费马小定理的同余形式就是：$a^p\equiv a(\bmod p)$ (p 为素数).

同余式与代数式有一些相同的性质，如

$a\equiv a(\bmod m)$；

$a\equiv b(\bmod m)$，　则 $b\equiv a(\bmod m)$；

$a\equiv b(\bmod m)$及 $b\equiv c(\bmod m)$，　则 $a\equiv c(\bmod m)$.

运算法则也很类似. 假定我们有同余式

$$a \equiv b \pmod m, \quad c \equiv d \pmod m,$$

则

$$a+c \equiv b+d \pmod m,$$
$$a-c \equiv b-d \pmod m,$$
$$ac \equiv bd \pmod m.$$

对于同余式的方幂，有

$$a^n \equiv b^n \pmod m.$$

但对于同余式 $ac \equiv bc \pmod m$，约去公因数 c 的问题不同于代数等式，必须加上一个条件 $(m,c)=1$，才可约去 c，此时有 $a \equiv b \pmod m$. 若 $(m,c)=d$，则有

$$a \equiv b \pmod{m/d}.$$

当需要用穷举法解决问题时，对象只能是有穷个；如果对象为无穷个，而对模数 P 同余的数又具有相同性质，则可把对象分别按余数是 $0,1,\cdots,(P-1)$ 分成 P 类，再进行穷举，便可使问题大大简化. 对于有些问题(如十进制的数字和)的性质，对模数 P(如 $P=9$)同余的数保持不变，用同余解题是很自然的. 特别在同余中很重要的是 $P=2$ 的情形，按模数 2 划分同余类，实际就是通常的奇、偶数，奇偶性分析有着十分广泛的用途.

在我们的题目中，偶数的平方是 4 的倍数，即

$$(2n)^2 \equiv 0 \pmod 4.$$

奇数的平方除以 4 余 1，即

$$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 \equiv 1 \pmod 4,$$

因此平方数(关于模 4)同余 0 或 1. 换句话说，关于模 4 同余 2 或 3 的数一定不是平方数. 现在

$$11\cdots11 \equiv \cdots \equiv 111 \equiv 11 \equiv 3 \pmod 4,$$

因此 11,111,1111,…都不是平方数.

练 习 二 十

1. 确定所有正整数 n,使得 2^n-1 能被 7 整除.

2. 从 1 到 10^6,有多少个整数 n,使 2^n-n^2 能被 7 整除?

3. 数 1978^n 与 1978^m 的最后三位数相等,试求出正整数 n 和 m,使得 $m+n$ 取最小值,这里 $n>m\geqslant1$(1978,IMO).

4. 求$[(\sqrt{29}+\sqrt{21})^{1984}]$的末两位数字.

二十一、百鸡问题

这是公元5世纪末，我国数学家张丘建在他所著《算经》里提出的一个著名的不定方程问题．百鸡问题通俗叙述为：公鸡一只值五文钱，母鸡一只值三文钱，小鸡三只值一文钱，现在买了这三种鸡共一百只，恰用了一百文钱．问公鸡、母鸡、小鸡各买多少只？

古希腊伟大的数学家丢番图（Diophantus），在他所著《算术》中，共载有189个问题，对每个题都给出了出人意料的巧妙解法，启迪着人们的智慧．后人把这类关于不定方程的题目叫做丢番图问题．在求整系数方程的整数解时，这个方程就称为不定方程．一次不定方程（又称线性不定方程）的形式是

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=k,$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n,k$ 都为整数．

该方程有解的充分必要条件是 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid k$．

设 $x=x_0,y=y_0$ 是不定方程 $ax+by=k$ 的一个解，则它的一切解是

$$x=x_0-\frac{b}{(a,b)}r,\quad y=y_0+\frac{a}{(a,b)}r,$$

其中 r 为任意整数．

对有些不定方程，由题目的特点，可以用更简捷和巧妙的方法去解．

现在我们来解百鸡问题．

设 x,y,z 分别表示公鸡、母鸡、小鸡的只数，由题意有

$$\begin{cases} 5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100, & (1) \\ x+y+z=100. & (2) \end{cases}$$

(1)×3−(2)得

$$14x+8y=200,$$

这是个一次不定方程. 用(14,8)=2除,就有

$$7x+4y=100, \tag{3}$$

即

$$y=\frac{-7x+100}{4}=-x+25+\frac{-3x}{4}.$$

令$-3x/4=z_1$,即

$$3x+4z_1=0,$$

从而

$$x=\frac{-4z_1}{3}=-z_1+\frac{-z_1}{3}.$$

再令$-z_1/3=t$,即 $z_1=-3t$,代入 x 的表达式,得

$$x=\frac{-4\times(-3t)}{3}=4t,$$

再代入 y 的表达式,得

$$y=\frac{-7\times 4t+100}{4}=25-7t.$$

于是由方程(2),得

$$z=100-x-y=75+3t.$$

因此有

$$\begin{cases} x=4t, \\ y=25-7t, \quad t \text{ 为整数}. \\ z=75+3t, \end{cases}$$

因 x,y,z 是非负数，所以 t 只能取 0,1,2,3，因此得四组解

$$\begin{cases}x=0,\\y=25,\\z=75;\end{cases}\quad\begin{cases}x=4,\\y=18,\\z=78;\end{cases}\quad\begin{cases}x=8,\\y=11,\\z=81;\end{cases}\quad\begin{cases}x=12,\\y=4,\\z=84.\end{cases}$$

如果 x,y,z 是正整数，那么只有后三组解.

在解一次不定方程时，总的思路是导入新的未知数，使方程系数的绝对值逐渐减少，逐步归结为解与原方程同解的其他不定方程，最后变为有一个未知数的系数是 1 或 -1 的这种最简单的情况. 在有的情况下，可以直接观察而找出解，如求出 $2x+6y=18$ 的所有解. 该式除以公因子后，得 $x+3y=9$，由观察法知 $y=0,x=9$ 是一组解，因此方程所有解可写为

$$\begin{cases}x=9+3t,\\y=-t,\end{cases}\quad \text{其中 } t \text{ 为整数.}$$

现在，我们给出解一次不定方程的另一个更好的方法，即用同余式去解不定方程. 我们给出线性同余式

$$ax\equiv b(\mathrm{mod}\ m).$$

显然，当且仅当有整数 x 和 k 满足 $ax=b+km$ 时，同余式 $ax\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$有解. 这本质上是解一次不定方程问题，但引进了不同的记法后，我们会看到，这不但不会令人厌烦，反倒使问题处理得更优美和发人深思.

我们易知，要存在一个整数解 r 满足

$$ax\equiv b(\mathrm{mod}\ m),$$

即

$$ar\equiv b(\mathrm{mod}\ m);$$

则对任一整数 k，有

$$a(r+km)\equiv ar\equiv b(\mathrm{mod}\ m).$$

在 $r+km(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$这些整数中，恰有一个（比方说

S)满足 $0 \leqslant S < m$，这是因为每个整数都介于 m 的相继两个倍数之间. 若 r 对某个 k 满足

$$km < r < (k+1)m.$$

则有

$$0 \leqslant r - km < m,$$

我们可令 $S = r - km$. 我们将这样一个数挑出，并称它为 $ax \equiv b \pmod{m}$ 的一个解，故解就是这样一个数 r，它满足 $ax \equiv b \pmod{m}$，且为一个最小正剩余. 如 $x = 2, 9, 16, \cdots, -5, -12, \cdots$ 均满足同余式 $2x \equiv 4 \pmod{7}$，它们都包含在 $x \equiv 2 \pmod{7}$ 中，也都包含在 $x \equiv 9 \pmod{7}$ 中，但按我们的约定，只把 2 称为解，因它是对模 7 的最小剩余.

线性同余式 $ax \equiv b \pmod{m}$ 可以无解、只有一解或许多解，这可归结为如下定理：

若 $(a, m) \nmid b$，则 $ax \equiv b \pmod{m}$ 无解；若 $(a, m) \mid b$，则它恰有 (a, m) 个解.

例如，$2x \equiv 1 \pmod{3}$ 只有 $x = 2$ 一个解；$2x \equiv 1 \pmod{4}$ 无解；$2x \equiv 4 \pmod{6}$ 有两个解 2 和 5.

求解同余式可以用观察法，但一般还是变换其系数，使之有可能进行消去的步骤. 如 $4x \equiv 1 \pmod{15}$，改写成

$$4x \equiv 1 \equiv 16 \pmod{15}.$$

消去 4，得

$$x \equiv 4 \pmod{15}.$$

在解一次不定方程时，同余式方法也可使用，如求解不定方程 $ax + by = c$，可以考虑下面两个同余式：

$$ax \equiv c \pmod{b}, \quad by \equiv c \pmod{a},$$

我们可选其中任一个，并解出其变量，然后将结果代入原方程而求得其全部解. 如解不定方程 $9x + 16y = 35$，由

$$16y\equiv 35 \pmod 9,$$

变换系数，得

$$7y\equiv 35 \pmod 9,$$

约去 7，得

$$y\equiv 5 \pmod 9.$$

也即对某一个整数 t，有 $y=5+9t$，将此代入原方程，得

$$9x+16(5+9t)=35 \text{ 或 } 9x+144t=-45,$$

即

$$x+16t=\quad 5,$$

因而我们求得了所有解：

$$\begin{cases} x=-5-16t, \\ y=5+9t, \end{cases} \quad t \text{ 是整数}.$$

练习二十一

1. 一个正整数，如果用九进制表示，则为 ABC；如果用七进制表示，则为 CBA. 试用十进制表示这个正整数.

2. 有两位数，其数值正好是两数字之积的 3 倍，求此两位数.

3. 求解同余式：

(1) $14x\equiv 27 \pmod{31}$；　(2) $6x\equiv 15 \pmod{33}$.

4. 解不定方程 $9x+10y=11$.

二十二、有多少人参加了游行?

数学系某次游行中,参加者 4 人一排,余下 1 人;5 人一排,余下 2 人;7 人一排,余下 3 人,问该系有多少人参加了游行?

这是求线性同余式组的问题.早在我国隋唐时代的古算书《孙子算经》上载有这类题目并附解法,这是世界数学史上著名的"孙子"问题,它是中国古代数学中最有独创性的成就之一.19 世纪传入欧洲,引起极大震动,被称为"中国剩余定理"或"孙子定理",直到今天在许多高等数学的理论,如插入理论、泛函分析以及电子计算机的逻辑设计中,都广泛地被应用着,现在人们把"孙子定理"综述为:

设 $m_1,m_2,\cdots,m_r$ 两两互素,则联立同余式

$$\begin{cases} x\equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x\equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x\equiv a_r \pmod{m_r} \end{cases}$$

有解,其解数关于模 $(m_1,m_2,\cdots,m_r)$ 是一个.设 $M=m_1m_2\cdots m_r$,$M_i=M/m_i(i=1,2,\cdots,r)$,如整数 y_i 满足

$$M_iy_i\equiv 1 \pmod{m_i}(i=1,2,\cdots,r),$$

则联立同余式的解为

$$x\equiv a_1M_1y_1+a_2M_2y_2+\cdots+a_rM_ry_r \pmod{(m_1m_2\cdots m_r)}.$$

我们还可以证明联立同余式

$$\begin{cases} x\equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ x\equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x\equiv a_r \pmod{m_r} \end{cases}$$

有解的充分必要条件是

$$a_i\equiv a_j (\mathrm{mod}\ (m_i, m_j)) \quad (i>j=1,2,\cdots,r).$$

这时，该联立同余式的解数关于模$(m_1, m_2, \cdots, m_r)$是一个.

特别地，当$r=2$时，即联立同余式

$$x\equiv a_1 \pmod{m_1}, \quad x\equiv a_2 \pmod{m_2}$$

有解的充分必要条件是

$$a_1\equiv a_2 (\mathrm{mod}\ (m_1, m_2)),$$

这时该联立同余式的解数关于模(m_1, m_2)是一个.

综合上述，也就是说，在解联立同余式$x\equiv a_i \pmod{m_i}$ $(i=1,2,\cdots,r)$时，当$m_1, m_2, \cdots, m_r$两两互素时，可应用孙子定理求解；当不是上述情况，可先求联立同余式$x\equiv a_i \pmod{m_i}$ $(i=1,2)$的解$x\equiv c(\mathrm{mod}\ (m_1, m_2))$，再解

$$x\equiv c(\mathrm{mod}\ (m_1, m_2)), \quad x\equiv a_i \pmod{m_i} (i=3,\cdots,r),$$

它的个数是$r-1$，它与原联立同余式同解，反复应用$r=2$情况，最后便可得解.

现在我们计算游行的人数. 由题意，即解联立同余式

$$\begin{cases} x\equiv 1 \pmod{4}, \\ x\equiv 2 \pmod{5}, \\ x\equiv 3 \pmod{7}. \end{cases}$$

因4,5,7两两互素，故用孙子定理去解，得

$$M=m_1m_2m_3=4\times5\times7=140,$$

$$M_1=\frac{M}{m_1}=5\times7=35,$$

$$M_2=\frac{M}{m_2}=4\times 7=28,$$
$$M_3=\frac{M}{m_3}=4\times 5=20.$$
所以解
$$35y_1\equiv 1(\bmod 4),$$
$$28y_2\equiv 1(\bmod 5),$$
$$20y_3\equiv 1(\bmod 7).$$
易解得
$$y_1\equiv 3(\bmod 4),$$
$$y_2\equiv 2(\bmod 5),$$
$$y_3\equiv 6(\bmod 7).$$
故
$$x\equiv\sum_{i=1}^{3}a_iM_iy_i=1\times 35\times 3+2\times 28\times 2+3\times 20\times 6$$
$$=577\equiv 17(\bmod 140).$$
所以，参加游行人数为 17，157 等等，由具体问题的条件，便可确定其中某一个.

练习二十二

1. 解联立同余式：
$$\begin{cases}x\equiv 1(\bmod 25),\\ x\equiv 2(\bmod 4),\\ x\equiv 3(\bmod 7),\\ x\equiv 4(\bmod 9).\end{cases}$$
2. 解联立同余式：
$$\begin{cases}x\equiv 1(\bmod 6),\\ x\equiv 4(\bmod 9),\\ x\equiv 7(\bmod 15).\end{cases}$$

二十三、商高不定方程与费马大定理

商高定理(即勾股定理或毕达哥拉斯定理)$a^2+b^2=c^2$ 的发现,对人类数学发展的意义,就像人类发明使用了火一样伟大.这个定理是世界上证明方法最多的一个定理.迄今为止,已有 370 多种证明方法.1881 年美国的第 12 届总统加菲尔德就给出了一种巧妙的证法,成为数学史上的佳话.现在的问题是给出形如商高定理的二次不定方程——商高不定方程

$$x^2+y^2=z^2, \tag{1}$$

求出这个不定方程的整数解.

我们假定 x,y,z 都大于 0,且 $(x,y)=1$,此时 x,y 必定一为偶数,一为奇数.这是因为,如果 x,y 都是奇数,那么可有 $x^2=4n+1,y^2=4m+1$,于是 $x^2+y^2=4(m+n)+2$,但是 $z^2=4k$ 或 $4k+1$,显然此时 $x^2+y^2\neq z^2$.因此,我们假定 y 是偶数,下面我们证明关于商高不定方程整数解的定理.

商高不定方程 $x^2+y^2=z^2$ 满足条件 $x>0,y>0,z>0$,$(x,y)=1$,y 是偶数,它的所有正整数解可以表为

$$x=a^2-b^2,\quad y=2ab,\quad z=a^2+b^2. \tag{2}$$

证明:我们容易验证(2)的确是适合给出条件的解.

假如 x,y,z 是式(1)中适合定理中给出条件的解,因为 y 是偶数,由(1)我们有

$$\frac{z+x}{2}\cdot\frac{z-x}{2}=\left(\frac{y}{2}\right)^2.$$

但

$$\left(\frac{z+x}{2},\frac{z-x}{2}\right)\Big|\left(\frac{z+x}{2}+\frac{z-x}{2}\right)=z,$$

$$\left(\frac{z+x}{2},\frac{z-x}{2}\right)\Big|\left(\frac{z+x}{2}-\frac{z-x}{2}\right)=x.$$

而$(x,z)=1$，所以

$$\left(\frac{z+x}{2},\frac{z-x}{2}\right)=1.$$

因此，我们可以假定$\frac{z+x}{2}=a^2$，$\frac{z-x}{2}=b^2$，显然 $a>b$，$(a,b)=1$，于是

$$x=a^2-b^2,\quad z=a^2+b^2,\quad y=2ab.$$

因为 z 为奇数，所以 a,b 一偶一奇，即 a,b 满足定理中各条件.

如果$(x,y)=d$，那么$(x,y,z)=d$，因此(1)的任意整数解可以表为

$$x=\pm d(a^2-b^2),\quad y=\pm 2abd,\quad z=\pm d(a^2+b^2).$$

当 $d=1$(即$(x,y)=1$)时，可以得到有趣的结果.

单位圆上所有有理点可以写成

$$\left(\pm\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\pm\frac{2ab}{a^2+b^2}\right)\text{或}\left(\pm\frac{2ab}{a^2+b^2}\pm\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right),$$

这里$(a,b)=1$，$\pm$号可以任意取.

又如，利用定理求 $x^2+y^2=z^2$ 中 $0<z<30$ 的所有互质的解.

因 $a^2+b^2<30$，$a>b>0$，得 $a\leqslant5$. 又因 a,b 一奇一偶所求出的 a,b 值即为所求的解，结果如表 23 所示.

商高不定方程是 $n=2$ 时的二次不定方程. 当 $n\geqslant3$ 时，不定方程 $x^n+y^n=z^n$ 的整数解是怎样的，这是人们自然关心的问题. 1640 年前后，法国数学家费马在丢番图的一本著作《整

表 23

b	a	x	y	z
1	2	3	4	5
1	4	15	8	17
2	3	5	12	13
2	5	21	20	29
3	4	7	24	25

数论》的空白处写到："$n\geqslant 3$ 时方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有非零整数解，我找到了这个定理的奇妙证明，可惜这儿太窄，无法把它写下."这段迷人的话语吸引了无数著名的数学家，然而300多年过去了，人们至今未能找到它的证明，对于费马这个诱人的结论，人们称之为费马大定理或费马最后定理. 法国科学院曾于1816年和1850年两度以3000法郎悬赏，德国也于1908年设10万马克的奖金.

我们知道一个大于2的整数，必能被4或某奇素数整除. 因此，如果对 $n=4$ 或 n 等于任意奇素数都没有正整数解，那么问题就将全部解决. $n=3,4$ 的情形，欧拉已给出了证明；至于 n 为任意奇数的情形，正是困难所在，是现在数学的一大难题.

1823年，勒让德(A. M. Legendre)证明了 $n=5$ 的情形；1839年，拉玛(Lamé)证明了 $n=7$ 的情形；1978年，瓦格斯塔夫(Wagstaff)在大型计算机帮助下，证明了当 $2<n<125\,000$ 时定理是正确的；1985年，美国罗瑟教授证明了当 $2<n<41\,000\,000$ 时定理是正确的. 为了证明 n 是奇素数时的定理，就是在 x,y,z 与 n 互素，即 $(x,n)=(y,n)=(z,n)=1$ 的情况下，现在也只知道当 $n<253\,747\,889$ 时定理是正确的，即 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解.

但是 1983 年西德一位年仅 29 岁的大学讲师法尔丁斯(Faltings)证明了当 $n\geqslant 4$ 时，$x^n+y^n=z^n$ 至多只有有限组解，这是一个重大的突破，他证明了与费马大定理有关的 Mordell 猜想：(u,v)平面上任一亏格大于等于 2 的有理系数曲线 $F(u,v)=0$，即该曲线至少有两个“洞”，最多只有有限个有理点. 而 $n\geqslant 4$ 时，费马曲线 $u^4+v^4=1$ 的亏格$\geqslant 2$.

这一结果引起了国际数学界的震动，人们认为这可能是“本世纪解决的最重要的数学问题，至少对数论来讲，已达到本世纪的顶峰”. 为此他获得 1986 年度(四年一度)数学最高荣誉——菲尔兹奖.

经过三个世纪的努力，费马大定理终于由英国数学家维尔斯(Andrew Wiles，1953～)所证明(详见 1995 年 5 月《数学年刊》)，并于 1996 年 3 月获沃尔夫奖.

练习二十三

1. 试证：$x^2+2y^2=z^2$，$(x,y)=1$ 的整数解可以写成 $x=\pm(a^2-2b^2)$，$y=2ab$，$z=a^2+2b^2$.

2. (商高不定方程整数解的一个重要性质)假定 x,y,z 是 $x^2+y^2=z^2$ 的解，并且$(x,y)=1$，那么在 x,y 中有一个是 3 的倍数，有一个是 4 的倍数，在 x,y,z 中有一个是 5 的倍数(从而 xyz 是 60 的倍数). 这里 x,y 中有一个是 3 的倍数，有一个是 4 的倍数并不是说在 x,y 中，一个是 3 的倍数，另一个是 4 的倍数，很可能 3 的倍数和 4 的倍数是同一个数.

3. 证明：对于任意正整数 n，不定方程 $x^n+y^n=z^n$ 都没有小于 n 的正整数解.

二十四、有趣的预测

我国明末清初有一位伟大数学家梅文鼎，他在许多预测天文现象的著作里，曾不自觉地应用了近代数学的抽屉原则.相传有一次梅文鼎去参加科举考试，在路上遇着12名举子去应考，他们年龄最大的是25岁，最小的是15岁.据此，他就断定：在这些举子中，至少有两人是同岁.举子们不信，经过认真询问，才知果然如此.

现在对这个问题，我们不用多少数学知识，经过简单的分析和推理，就知梅文鼎的预测是对的.其实，我们也不自觉地运用了抽屉原则.

抽屉原则是离散数学中的一个重要原则，虽然它的原理很简单，但它属于发散思维范畴.对一些看来相当复杂，甚至无从入手的问题，常常可发挥抽屉原则的独特作用.可以从不同角度去叙述**抽屉原则**.

原则1 把多于 n 个的元素，按任意确定的方式分放在 n 个抽屉里，那么至少有一个抽屉里有两个或更多的元素.

从集合角度来看，就是把 m 个元素分成 n 个集合 $I_0, I_1, I_2, \cdots, I_{n-1}$，其中 $m>n\geqslant 1$ 且 $I_i\cap I_j=\varnothing\ (0\leqslant i<j\leqslant n-1)$，则必有一个集合至少含有 k 个元素，这里

$$k=\begin{cases}\dfrac{m}{n} & (n\mid m),\\[2ex] \left[\dfrac{m}{n}\right]+1 & (n\nmid m).\end{cases}$$

原则 2 把多于 $m\times n$ 个元素，按任意确定的方式分放在 n 个抽屉里，那么至少有一个抽屉有 $m+1$ 个或多于 $m+1$ 个元素.

原则 3 把无穷多个元素，按任意确定的方式分放在 n 个抽屉里(n 是一个确定的数)，那么至少有一个抽屉里有无穷多个元素.

在用抽屉原则解决实际问题中，关键是恰当地构造抽屉. 比如，我们知道，一个整数 m 被 n 除，总可写成

$$m=np+r\ (0\leqslant r<n)$$

的形式. 显然，这里有 n 个余数 $0,1,2,\cdots,n-1$，如果把有相同余数的整数作为一类，即构造了一个抽屉，从而可构造 n 个抽屉(关于模 n 的剩余类). 下面证明在 5 个整数中，必有 3 个数的和是 3 的倍数.

如果这 5 个整数分别属于以 3 为模的 3 个剩余类中，即其中必有 3 个整数被 3 除余 0,1,2，则此 3 个整数之和为

$$(3q_0+0)+(3q_1+1)+(3q_2+2)=3(q_0+q_1+q_2+1)$$

被 3 整除；如果 5 个整数被 3 除时，至多只有 2 个不同的余数，即至多分别属于以 3 为模的某两个剩余类，这两个剩余类便是“抽屉”，而 5 个整数为元素，就必有一剩余类至少含有

$$[5/2]+1=3(\text{个})$$

元素，即有 3 个整数被 3 除同余，此 3 个数之和为

$$(3q_0+r)+(3q_1+r)+(3q_2+r)=3(q_0+q_1+q_2+r),$$

是 3 的倍数.

练习二十四

1. 某校某个班共有 49 人，其中年龄最大的是 20 岁，最小的是 17 岁，试证其中必有两个学生是同年同月生.

2. 任意 1000 个整数中必有两个整数，它们的和或差是 998 的倍数.

3. 已知一个集合由任意 10 个两两不相同的十进制的两位正整数组成. 试证：这个集合中有两个不相交的子集，其元素之和相等(1972, IMO).

4. 在坐标平面上任取 5 个整点. 求证：一定可以从中找出两个整点，它们连线的中点仍是整点.

二十五、质点掉进陷阱

一个质点往前跳，每跳一步前进 $\sqrt{2}$ m，在这质点前面，每隔 1 m 的点，都有一个以该点为中心，长为 0.002 m 的陷阱，试证明这质点迟早要掉进某个陷阱里.

虽然抽屉原则容易理解，但运用其解题时，需要相当的灵活和技巧，这主要是如何**构造抽屉**的问题.除了前面我们提到的利用剩余类构造抽屉的方法外，还有好多种常用的方法，如利用分割区间和几何图形构造抽屉，利用不大于 n 的整数构造抽屉.又如面积的重叠以及染色等问题，都可灵活地构造抽屉而完美地去解决问题.

分割区间构造抽屉问题，可以把区间$[0,1)$分成 n 等分子区间：$\left[0,\frac{1}{n}\right)$，$\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right)$，…，$\left[\frac{n-2}{n},\frac{n-1}{n}\right)$，$\left[\frac{n-1}{n},1\right)$，并且在$[0,1)$内任意放置 $n+1$ 个点，那么一定有两个点在同一个子区间内，这两个点的距离不大于$\frac{1}{n}$.

对于一个质点往前跳的问题，因为陷阱直径为 0.002 m，我们把区间$[0,1)$作 1000 等分，考虑 1001 个实数

$$k\sqrt{2}-[k\sqrt{2}],\quad k=1,2,\cdots,1001,$$

它们都在$[0,1)$区间上，故必有某两个点，设为 $i\sqrt{2}-[i\sqrt{2}]$及 $j\sqrt{2}-[j\sqrt{2}]$，落在同一等分区间内.取 $l=|[i\sqrt{2}]-[j\sqrt{2}]|$，$m=|i-j|$，则有

$$|l-m\sqrt{2}|=|(i\sqrt{2}-[i\sqrt{2}])$$

$$-(j\sqrt{2}-[j\sqrt{2}])|<10^{-3}.$$

这就表明了质点跳了 m 步，就掉进了第 l 个陷阱里.

练习二十五

1．在 3×4 的长方形中，任意放置 6 个点，试证：可以找到两个点，使它们的距离不大于 $\sqrt{5}$.

2．从自然数 1,2,…,100 中随意选出 51 个数来，求证：其中一定有两个数，它们中的某一个数是另外一个的整数倍.

3．一个国际社团的成员来自 6 个国家，共有 1978 人，用 1,2,3,…,1978 编号，求证：该社团至少有一个成员的编号数，是它的两个同胞的编号数之和，或者是一个同胞编号数的 2 倍.

4．设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是实数，且满足条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$，求证：对每个整数 $k\geqslant2$，存在不全为零的整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，使得 $|a_i|\leqslant k-1(i=1,2,\cdots,n)$，且

$$|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

二十六、矩形面积为多大，其内才有整点？

以原点 O 为对称中心，任意矩形 $ABCD$（见图 26-1）的面积大于 4，则在其内除了 O 点外，一定还有其他的整点.

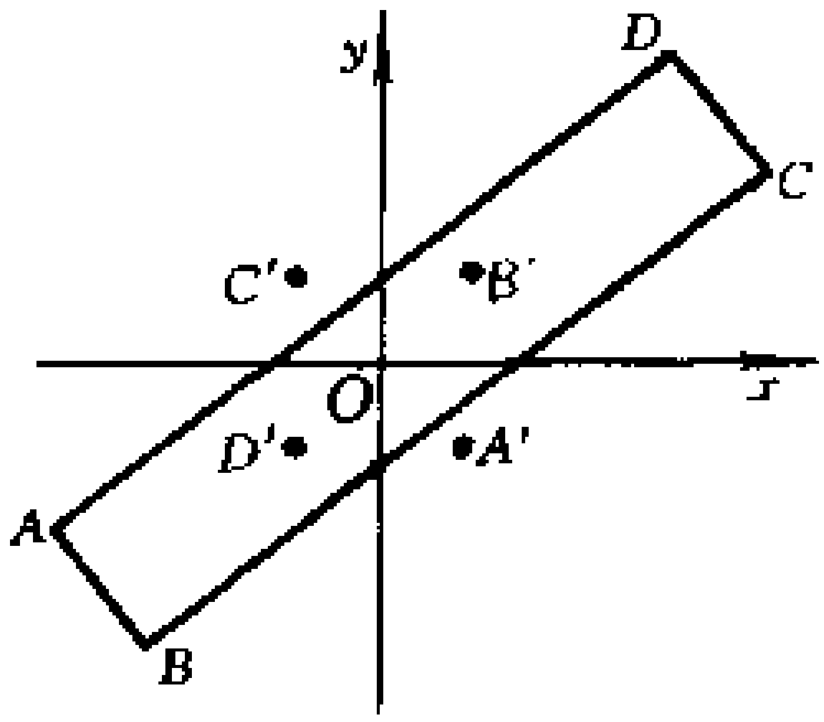


图 26-1

抽屉原则又称重叠原则，如果考虑的是与平面面积有关的抽屉原则，就称为面积的重叠原则.

假定平面上有 n 个区域，它们的面积分别是 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 如果我们把这 n 个区域按任何方式一一搬到某一个面积为 A 的固定区域内，那么，当 $A_1+A_2+\cdots+A_n$ 大于 A 时，至少有两个区域具有公共点. 自然，对于体积也有类似的重叠原则.

现在我们就用面积的重叠原则来证题中重要面有趣的结论.

以那些坐标为偶数的整点 $(2k, 2l)$ 为中心，作出一系列边长为 2 的正方形，长方形 $ABCD$ 必定被某些这样的 2×2 的正方形所盖住. 把这些正方形逐个剪下来，并把它们平行地移到与中心在 O 的那个 2×2 的正方形 $A'B'C'D'$ 相重合的位置上去. 自然，这时长方形 $ABCD$ 也被剪碎成好几片移到正方形 $A'B'C'D'$ 里面去了.

因为正方形 $A'B'C'D'$ 的面积等于 4，而长方形 $ABCD$ 的面积是大于 4 的，由面积的重叠原则，至少有两个碎片会有公共点. 设一个公共点的坐标是 (s,t)，其中 $-1\leqslant s\leqslant 1$、$-1\leqslant t\leqslant 1$，这意味着，在原来的长方形 $ABCD$ 内有一个点 P，它的坐标是 $(2m+s,2n+t)$，还有一个点 Q，它的坐标是 $(2m'+s,2n'+t)$（见图 26-2）.

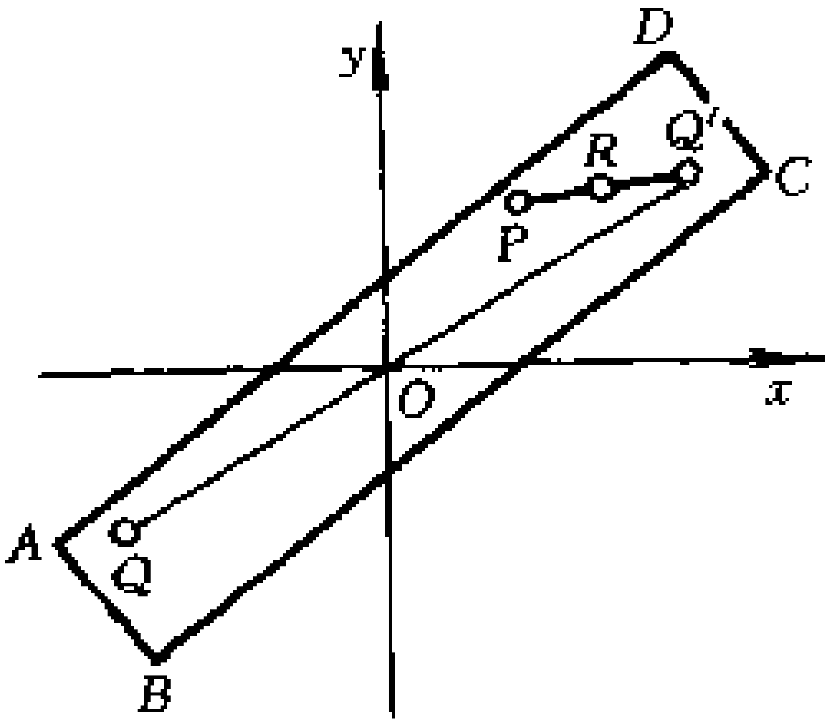


图 26-2

考察 Q 关于原点 O 的对称点 Q'，由于已知长方形 $ABCD$ 关于原点对称，得 Q' 必然也在此长方形内，由对称知 Q' 的坐标是 $(-2m'-s,-2n'-t)$. 既然 P 和 Q' 是长方形 $ABCD$ 之内的两个点，那么 P 和 Q' 的联线上的中点 R 也一定在这个长方形内，可以算出 R 的两个坐标分别是

$$\frac{(2m+s)+(-2m'-s)}{2}=m-m',$$

和

$$\frac{(2n+t)+(-2n'-t)}{2}=n-n'.$$

这表明 R 是包含在长方形 $ABCD$ 中的一个整点，并且 R 和原点 O 显然是不同的，这就回答了我们所提出的问题.

练习二十六

1. 设有一座圆形公园，中心为 O，半径为 50 m. 选取直角坐标系后（单位为 1 m），如果在圆内除 O 以外的每个整点处

都种上一棵小树，试证明：小树干长到半径大于 1/50 m（2 cm）时，从园子的中心 O 环顾园子的边缘的视线被树干完全遮住.

2．在一个 20×25 的长方形中任意放进 120 个 1×1 的小正方形．证明：在这个长方形中，一定还可以放下一个直径为 1 的圆，使之不和这 120 个小正方形中的任何一个相交.

二十七、三人互相认识或者互不认识

证明任意六个人的集会上，总会有三人互相认识或者互不认识.

这是 1947 年匈牙利数学竞赛出的一道试题，因为它很有趣且很重要，后来曾收录到《美国数学月刊》及其他数学刊物上.这类问题可以转化为图论中的完全图染色问题.

我们知道，由若干个不同的顶点与连接其中某些顶点的边所组成的图形就称为**图**，记为 $G=(V,E)$，其中 V 为所有顶点集合，E 为所有边集合.一条边的端点称为与这条边**关联**；反之，一条边称为与它的端点关联.与同一条边关联的两个端点称为**邻接**(或**相邻**)，如果两条边有一个公共的顶点，则称这两条边邻接.从一个顶点 v 引出的边的条数称为 **v 的次数**，记作 $\deg(v)$.端点重合为一点的边叫做**环**.

如果一个图没有环，并且每两个顶点之间至多只有一条边(无平行边)，就称这种图为**简单图**.如果一个简单图每两个顶点都有一条边，就称这种图为 G 的**完全图**.具有 n 个顶点的完全图记为 K_n.如果 G 是一个有 n 个顶点的简单图，从完全图 K_n 中把属于 G 的边全部去掉后，得到的图就称为 G 的**补图**，记为 $\overline{G}$.

图最本质的内容是一个二元关系，也就是顶点和边的关联关系.一个系统或一个结构若具有二元关系，便可用图作为数学模型.对于本题，把参加集会的人看作点，把两个人互相认识或不认识用两点连线段涂上两种不同颜色来表示，这样

我们作一个完全图 K_6，如果某两个人互相认识，连接两点的边涂上红色，否则就涂上蓝色. 要证明的结论就是 K_6 中一定有一个同色三角形.

从顶点 v_1 引出的边有五条，而颜色只有红蓝两种，因此其中必有一种颜色涂了三条或更多条边(由抽屉原则). 不失一般性，假定有三条边 (v_1,v_2)，(v_1,v_3)，(v_1,v_4) 为红色.

(1) 如果 $\triangle v_2v_3v_4$ 的三条边都是蓝色，那么 $\triangle v_2v_3v_4$ 就是所要求的同色三角形.

(2) 如果 $\triangle v_2v_3v_4$ 有一条边，比如 (v_2,v_3) 是红色的，那么 $\triangle v_1v_2v_3$ 就是一个三边均为红色的同色三角形(见图 27-1).

关于问题中的顶点数，对任何 $n>6$，命题都成立. 但当 $n=5$ 时，命题便不一定成立了，如图 27-2，便找不到同色三角形，这说明：不同的六个点是保证用两色涂染其边，存在同色三角形的最少点数.

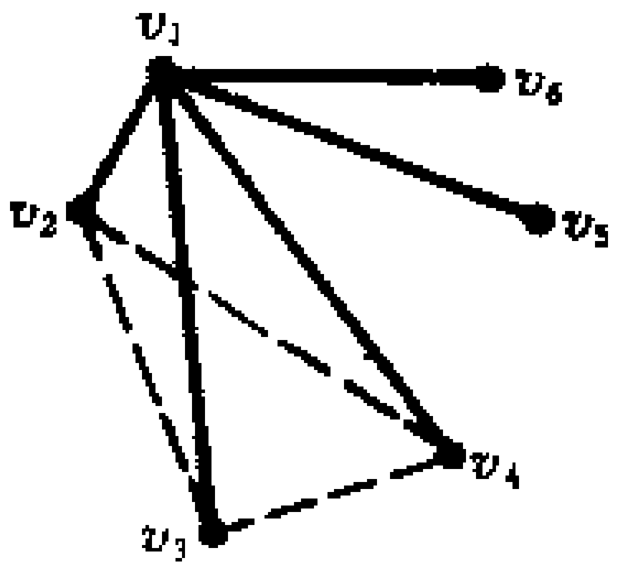


图 27-1

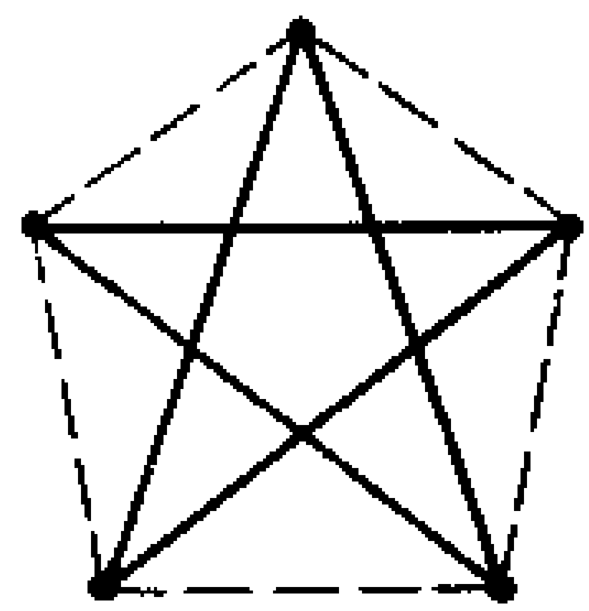


图 27-2

练习二十七

1. 某次会议有 n 名代表出席，已知任意的四名代表中都有一个人与其余的三个人握过手，证明：任意的四名代表中必有一个人与其余的 $n-1$ 名代表都握过手.

2. 有17名学者，每位都给其余的人写一封信，信的内容是讨论三个问题中的任意一个，而且两个人互相通信所讨论的是同一个题目，证明：至少有三位学者，他们之间通信所讨论的是同一个题目(1964,IMO).

二十八、哥尼斯堡七桥问题

这是历史上一个有名的数学难题. 18 世纪，在哥尼斯堡城的普雷格尔河上有七座桥，这七座桥把河的两岸和河中的两岛连接起来，如图 28-1. 当时人们提出一个问题：有没有办法从某处出发，经过各个桥一次且仅一次，最后回到原地呢？

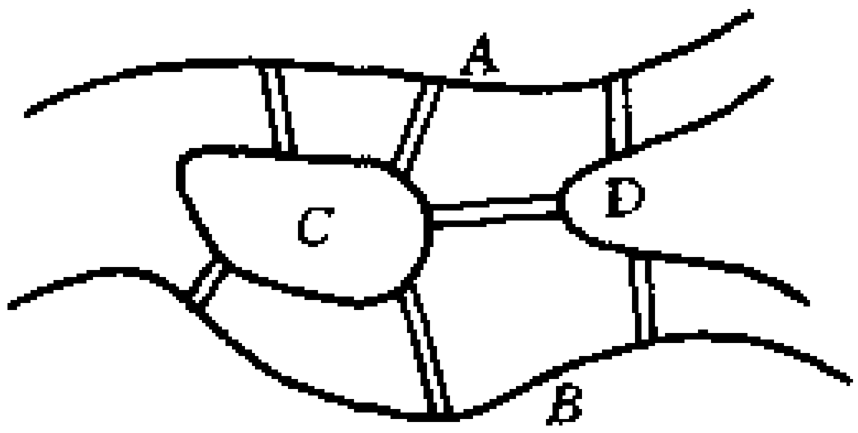


图 28-1

这难住了哥尼斯堡人. 在 1736 年，欧拉发表了图论的第一篇论文“哥尼斯堡的七桥”，指出这个问题无解.

这个问题就是通常所说的“一笔画”问题. 为了叙述方便及今后的需要，我们再提出几个概念.

图 $G=(V,E)$ 的一条通路，就是边的一个序列 $(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m})$，使得 e_{i_j} 和 $e_{i_{j+1}}$ 首尾衔接；也可以是顶点序列 $(v_{i_1}v_{i_2}\cdots v_{i_{m+1}})$，使得 v_{i_j} 和 $v_{i_{j+1}}$ 相邻. 通路长度定义为通路中所含边的条数.

如果一条通路首尾重合，则称它为**闭路**或**回路**. 在一条通路中，若每一边不重复出现，则称它为**简单通路**. 同样，在一条回路中，若它的每一边不重复出现，则称该回路为**简单回路**.

在一条通路中，若每个顶点仅出现一次，则称该通路为**基本通路或链**. 在一条回路中，除首尾两个顶点外，每个顶点只出现一次，称该回路是**基本回路或圈**. 显然，基本通路必是简单通路，基本回路必是简单回路，反之却未必成立.

图 G 中两个顶点 v_i 和 v_j 之间，如果存在一条通路，则称 v_i, v_j 是**连通**的. 若 G 中任意两个顶点均连通，则称 G 是**连通图**，否则称非**连通图**.

经连通图 G 的每条边一次而且仅仅一次的回路（通路）称为**欧拉回路**（欧拉通路），具有欧拉回路的图称为**欧拉图**.

图论中，欧拉最早给出关于图的奇次顶点的个数问题的定理：对任意的图 G，奇次顶点的个数一定是偶数. 解决七桥问题就是要判别它是否存在欧拉图. 有如下的**判别定理**：一个连通图 G 是欧拉图当且仅当 G 的每个顶点次数是偶数.

我们把七桥问题这样画成图：把两岸和小岛缩成点，桥化成边，就得到了图 28-2.

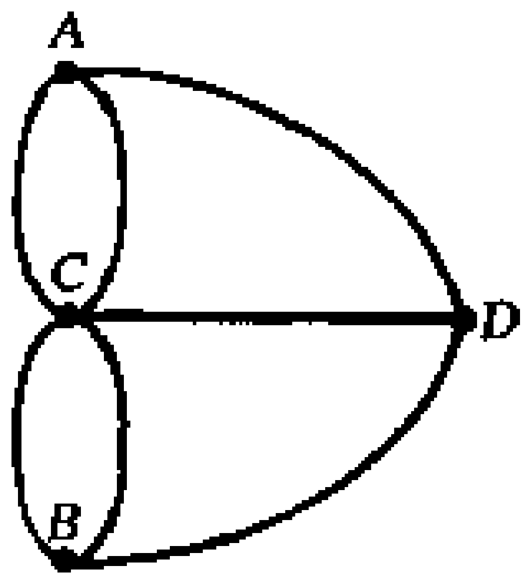


图 28-2

它的四个顶点都是奇顶点. 即它不能一笔画成，故经过桥一次且仅一次而回到原地是不可能的.

在我国民间也早就流传"一笔画"的游戏. 长期实践经验使人们知道，如果图中所有点是偶次顶点，可以任意取一点做起始点，一笔画完，回到始点. 如果图中只有两个奇次顶点，那么选择一个奇次顶点做起始点，一笔画完，终点为另一个奇次结点.

练习二十八

1. 以下两图是否能一笔画成？

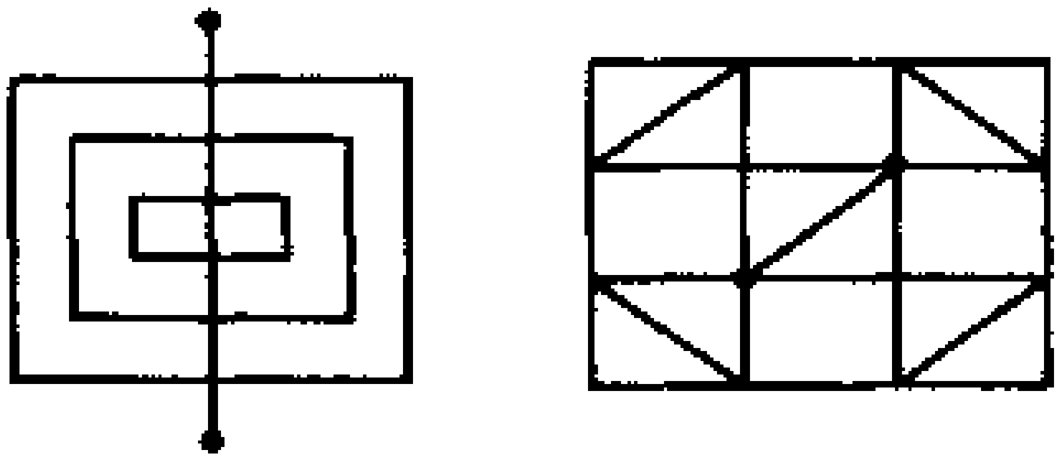


图 28-3

2. 在 8×8 黑白方格的棋盘上跳动一只马，不论跳动方向如何，要使这只马跳遍每一个方格，且每一方格恰好经过一次，问是否可能？

3. 试问 n 个顶点的完全图 K_n 内有多少回路？有没有欧拉通路或欧拉回路？

4. 设 $n\geqslant3$，考虑在同一圆周上的 $2n-1$ 个互不相同的点所成的集合 E. 将 E 中一部分点染成黑色，其余的点不染颜色. 如果至少有一对黑点，以它们为端点的两条弧中有一条弧上(不包含端点)恰含 E 中 n 个点，则称这种染色方式为好的. 如果将 E 中 k 个点染黑的每一种染色方式都是好的，求 k 的最小值(1990，IMO).

二十九、如何连线才能不构成三角形？

有 100 个点，其中任意 3 个点不共线. 证明：可以添加 2500 条连接这些点的线段，而不形成一个以这 100 个点中某些点为顶点的三角形.

我们用二分图的概念解决这类问题可十分清楚. **二分图**是我们常见的一种图，它的顶点的集合 V 是由两个没有公共元素的子集 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 与 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$ 组成的，并且在 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 之间与 $y_j(j=1,2,\cdots,m)$ 之间没有边相连. 二分图常记作 $G=(X,Y;E)$. 如图 29-1 就是一个二分图.

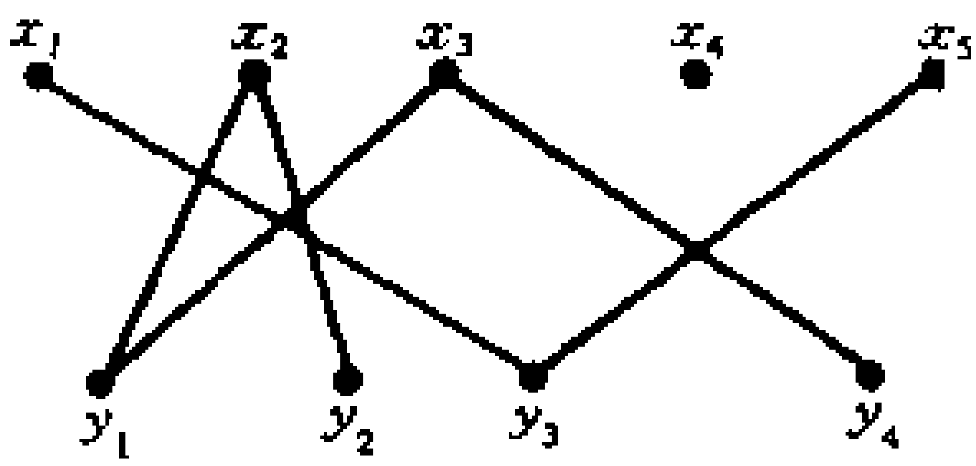


图 29-1

如果在二分图 $G=(X,Y;E)$ 中，$|X|=n$，$|Y|=m$，并且每个 $x_i\in X$ 与每个 $y_j\in Y$ 有一条边相连，对这样的二分图称为完全二分图，记作 $K_{n,m}$.

在研究图论的某些问题中，常常根据问题的特点，将顶点或边涂上颜色去分析. 将图 G 的顶点涂上颜色，如果至少要用 k 种颜色才能使任意两个相邻的顶点颜色不同，我们就说

图 G 的**色数为 k**.

显然二分图的色数$\leqslant 2$(集合 X 与 Y 各用一种颜色). 反过来,色数$\leqslant 2$ 的图是二分图.

现在,我们用二分图的概念来解决题目中所提出的问题,我们用这 100 个点为顶点作一个二分图,其中 X 与 Y 各有 50 个点,将每一个 $x_i \in X$ 与每一个 $y_j \in Y$ 用一条边连起来,恰好连了 2500 条线段而没有形成一个以这 100 个点中某些点为顶点的三角形.

我们还可以证明,如果添加 2501 条线段,那么一定有以这些点为顶点的三角形产生.

练习二十九

1. 图 29-2 是二分图吗? 如果是,请写出集合 X 和 Y 来.

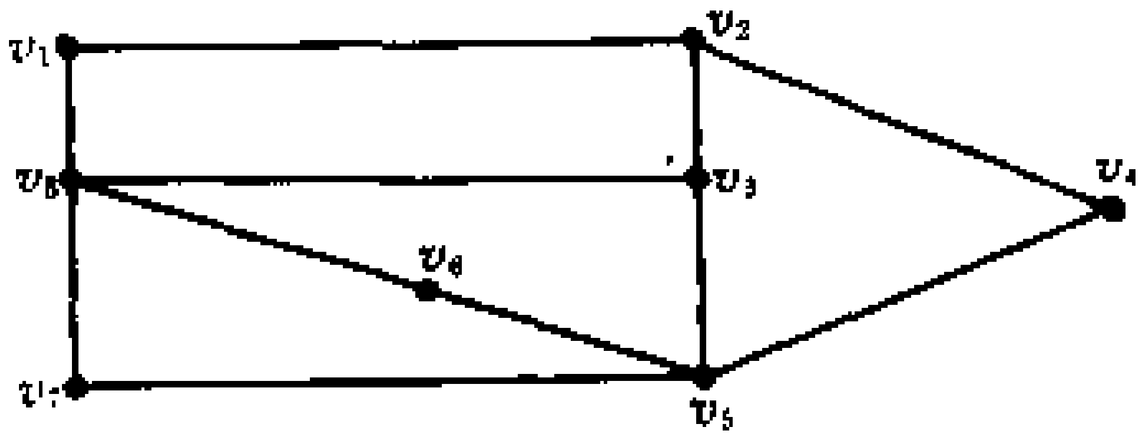


图 29-2

2. 在正二十面体的图 G 中(见图 29-3),找一个子图 G',G' 是二分图,它包含 G 的所有顶点和尽可能多的边.

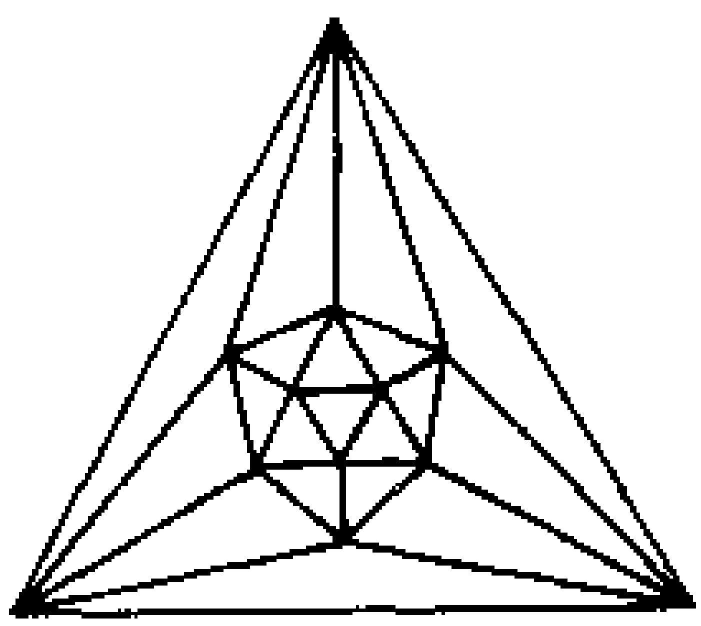


图 29-3

3. X 和 Y 两国留学生各 n ($n>2$)人,每个 X 国学生都与 Y 国的一些学生跳过舞,每个 Y

国学生至少与一个 X 国学生跳过舞. 证明：一定可以找到两个 X 国学生 x,x' 及两个 Y 国学生 y,y' 使得 x 与 y, x' 与 y' 跳过舞，而 x 与 y', x' 与 y 没有跳过舞.

4. 在图 29-4 中，能否找到一条通路经过每个顶点恰好一次（并不要求经过所有边）？

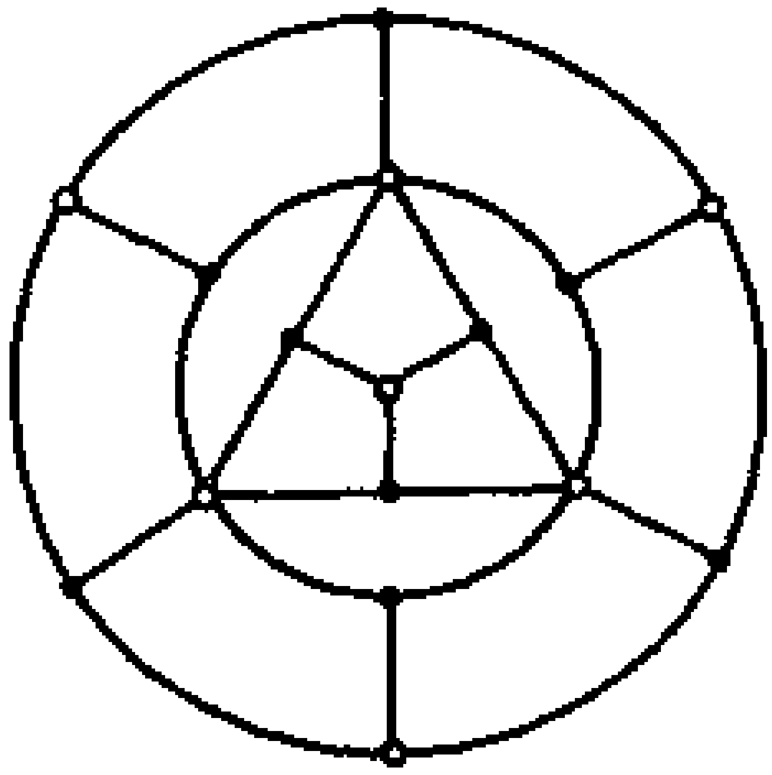


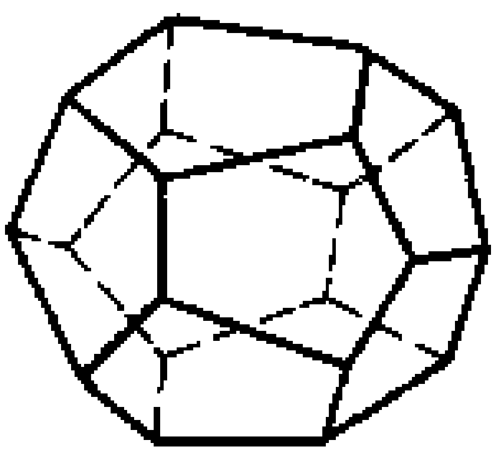
图 29-4

三十、周游世界的游戏

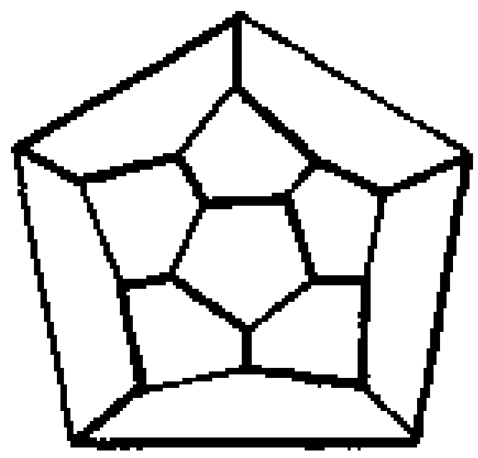
1859 年英国数学家哈密尔顿(Hamilton)提出一种名为周游世界的游戏,他用一个正十二面体的二十个顶点代表二十个大城市,要求沿着棱,从一个城市出发,经过每个城市恰好一次,然后回到出发点.

这个游戏曾风靡一时,它的解称为哈密尔顿回路,并不难求.这个问题的数学模型与欧拉回路不同,欧拉回路要求经过每边一次且仅一次,而每个顶点可能不只经过一次;而哈密尔顿回路是要求每个顶点只经过一次,但并不要求经过所有的边.精确一点说,给定图 G,若存在一条通路经过图中每个顶点恰好一次,这条通路就称为**哈密尔顿通路**.若存在一条回路,经过图中每个顶点恰好一次,这条回路称作**哈密尔顿回路**.含有哈密尔顿回路的图称为**哈密尔顿图**.

为清楚起见,把这正十二面体图 30-1(a)重画为图 30-1(b).



(a)



(b)

图 30-1

在图 30-1(b)中粗的边组成的回路就是一个解，还有四种不同的解.如果不要求最后回到原来的出发点，那么哈密尔顿通路就更多了.

对于正四面体、正六面体、正八面体及正二十面体也都有哈密尔顿回路，读者可以自己尝试练习一下.

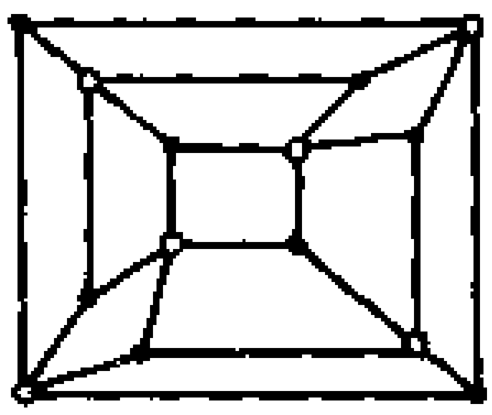
练 习 三 十

1. 一个班的学生共计选修 A,B,C,D,E,F 六门课程，其中一部分人同时选修 D,C,A，一部分选修 B,C,F，一部分选修 E,B，还有一部分人选修 A,B. 期终考试要求每天考一门课，六天内考完. 为了减轻学生负担，要求每人都不会连续参加考试. 试设计一个考试日程表.

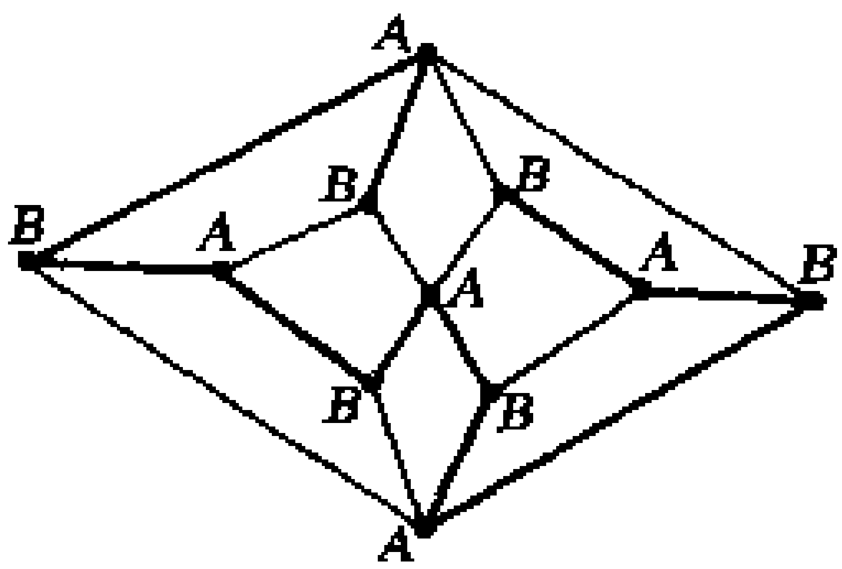
2. 完全图 K_n 是欧拉图吗？是哈密尔顿图吗？如是哈密尔顿图，有多少个哈密尔顿回路？

3. 完全二分图是欧拉图吗？是哈密尔顿图吗？

4. 以下两图有无哈密尔顿通路或哈密尔顿回路？



(a)



(b)

图 30-2

三十一、安排考试日程表的可能性

考虑七天安排七门考试的问题，要使同一个教员举行的任何两门考试不要安排在接连的两天内进行. 假如每个教员最多举行四次考试，证明安排这样的考试日程表总是可能的.

如果将七次（或七天）考试作为七个顶点，做一个图 G. 若两个顶点对应的考试是由不同的教员举行的，则这两个顶点连一条边，实际上就是判定图 G 是否有哈密尔顿通路问题.

与欧拉图的情况不同，到目前为止，我们尚未找到哈密尔顿图简单明确的充要条件，寻找这样的条件，仍是图论中尚存的主要难题之一. 目前只有一些判别存在性的充分条件的定理和某些必要条件的定理，下面给出几个简单的结果.

(1) 在二分图 $G=(X,Y;E)$ 中，若 $|X|\neq|Y|$，则 G 不是哈密尔顿图；若 $|X|$ 与 $|Y|$ 之差大于 1，则 G 没有哈密尔顿通路.

(2) 有 $n(n\geqslant3)$ 个顶点的简单图 $G=(V,E)$，如果 G 中任意两个不相邻的顶点 v_i,v_j 之间恒有

$$\deg(v_i)+\deg(v_j)\geqslant n-1,$$

则 G 中有哈密尔顿通路. 如果恒有

$$\deg(v_i)+\deg(v_j)\geqslant n,$$

则 G 中有哈密尔顿回路.

(3) 如果图 G 有哈密尔顿回路，从 G 中去掉若干个点 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 及与它们相关联的边得到图 G'，那么 G' 的连通分支不超过 k 个.

对于安排考试日程表的可能性问题，当我们按前面所说的办法作出图 G 后，因为这样一个图中每一个顶点的次数至少是 3，所以任意两个顶点的次数之和至少是 $6(6\geqslant 7-1)$，故图 G 有哈密尔顿通路，而这条路对应一个合乎要求的七次考试的日程表.

练习三十一

1. 用 $n(n>1)$ 条水平线与 n 条竖直线相截得一图，以 n^2 个交点为顶点，以截得的线段为边，这图是否有哈密尔顿通路或哈密尔顿回路？

2. $n(n>2)$ 个人参加一个集会，如果其中任何两个人合在一起都至少与其余 $n-2$ 个人互相认识，让这 n 个人站成一排，除头尾两人外其余各人都与他相邻的人互相认识吗？

3. 证明图 31-1 无哈密尔顿回路？

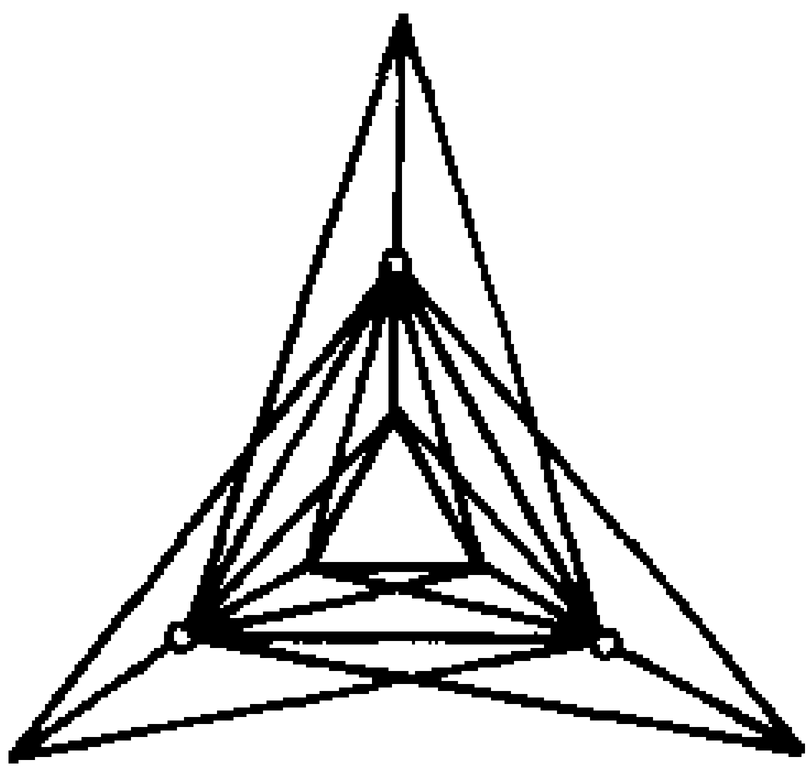


图 31-1

4. 有 11 个学生打算几天都在一个圆桌上共进晚餐，并且希望每次晚餐时，每个学生两边邻座的人都不相同. 按这样要求，他们在一起共进晚餐最多几天？

三十二、校址选在哪里最好?

已知 A,B,C,D,E,F 等六个村子,它们相互之间的距离如图 32-1. 这六个村准备在公路旁的一个村子中合修一所中学. 已知 A 村有学生 50 人,B 村有学生 40 人,C 村有学生 60 人,D 村有学生 20 人,E 村有学生 70 人,F 村有学生 90 人. 问新校址建在公路旁的 D 村还是 E 村,才能使所有学生所走的总路程最短?

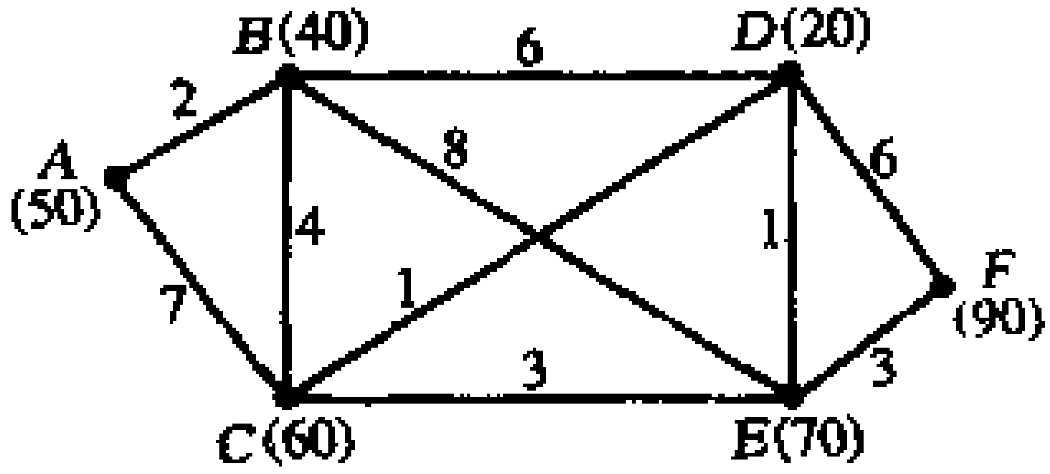


图 32-1

若图 $G=(V,E)$ 中每一条边 (v_i,v_j) 相应地有一个正数 $w(v_i,v_j)$ 称为边 (v_i,v_j) 的权,则称 G 为**赋权图**. 并记为 $G=(V,E,w)$. 为方便,一条边的权也说成是它的"长". 在赋权图中给定两个顶点 v_i 与 v_j,如果从顶点 v_i 到顶点 v_j 有许多条通路,则其中"长度"最短的通路,我们叫做从 v_i 到 v_j 的**最短通路**.

下面给出 1959 年得克斯特拉(Dijkstra)的一个求最短通路的算法,这个算法不仅给出了从 v_1 到 v_p 的最短通路,而且也给出了从 v_1 到其余各点的最短通路.

这个算法的基本思想是从 $S_1=\{v_1\}$ 出发，逐点增加构造出顶点集 V 的一系列子集 $S_1,S_2,\cdots,S_p$，使 $S_1\subset S_2\subset S_3\subset\cdots\subset S_p$，其中 $p=|V(G)|$. 一旦 S_i 构成，则由 v_1 到 S_i 中所有顶点的最短通路即被求出.

设 S 是 V 的一个真子集，且 $v_1\in S$，$\overline{S}=V-S$. 若 $P=v_1v_2\cdots v_kv$ 是从 v_1 到 $\overline{S}$ 的最短通路（是指由 v_1 到 $\overline{S}$ 中各点的所有通路中"长度"最短的那条通路），显然，$v_k\in S$，且 P 的一段 $v_1v_2\cdots v_k$ 也必是从 v_1 到 v_k 的最短通路，而 $v\in\overline{S}$，P 的长为 $d(v_1,v)=d(v_1,v_k)+w(v_k,v)$，从 v_1 到 $\overline{S}$ 的最短距离及 v 点可由下式求出：

$$d(v_1,\overline{S})=\min_{\substack{u\in S\\ v\in\overline{S}}}\{d(v_1,u)+w(u,v)\}=d(v_1,v_k)+w(v_k,v_2),$$

其中 $v_k\in S$，$v_2\in\overline{S}$. 然后将 v_2 点并入 S，再求 v_1 到 $\overline{S}$ 的最短距离. 重复同样步骤直至 $S=V$，$\overline{S}=\varnothing$，算法即停止.

具体算法：在计算过程中为了避免求 $d(v_1,\overline{S})$ 中的许多重复运算并保留以前所得结果的信息，我们采用标号的方法. 凡属于集合 S 的顶点都标上 P' 标号，属于 $\overline{S}$ 的顶点标以 T 标号，即 $S=\{v_i|v_i$ 具有 P' 标号$\}$，$\overline{S}=\{v_j|v_j$ 具有 T 标号$\}$.

开始时给起始点 v_1 标上 P' 标号 $d(v_1)=0$，其余各点标上 T 标号 $d(v_j)$，而且

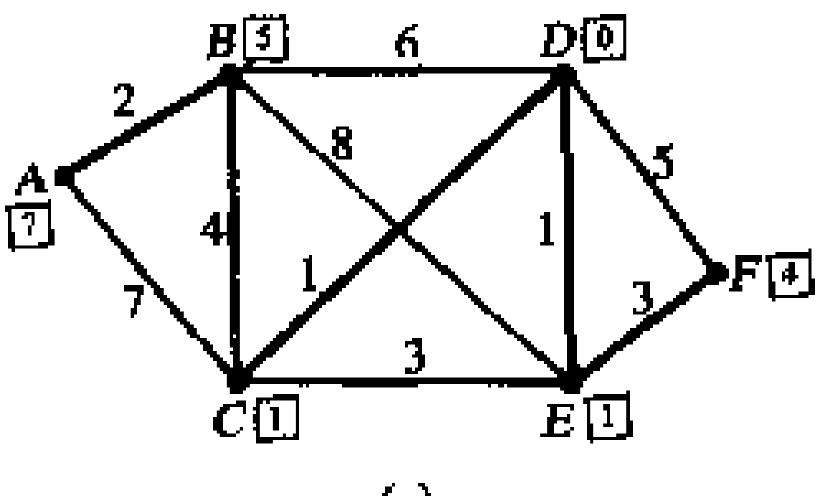
$$d(v_j)=\begin{cases}w(v_1,v_j), & \text{当 } v_1 \text{ 与 } v_j \text{ 邻接时；}\\ +\infty, & \text{当 } v_1 \text{ 与 } v_j \text{ 不邻接时.}\end{cases}$$

然后在所有 T 标号中取最小者，如 $d(v_{j0})=\min\limits_{v_j\in\overline{S}}\{d(v_j)\}$，则把点 v_{j0} 的 T 标号改为 P' 标号（即将点 v_{j0} 并入集合 S）. 再重新计算与 v_{j0} 相邻接的具有 T 标号的其他各点（如点 v_j）的 T 标号：选点 v_j 的 T 标号与 $d(v_{j0})+w(v_{j0},v_j)$ 中较小者作为 v_j

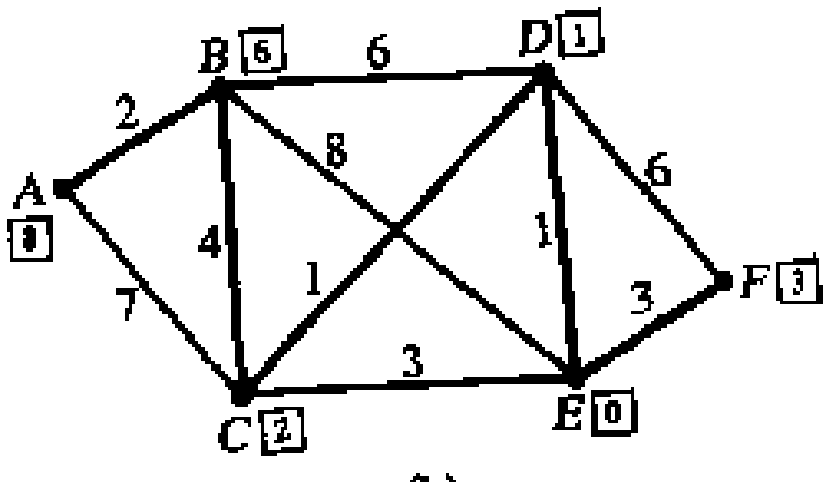
的新的 T 标号. 一般地，令 $d(v_k)=\min\limits_{v_j\in \bar{S}}\{d(v_j)\}$ 为点 v_k 的 P' 标号，于是又将 v_k 并入 S，而把 $\bar{S}$ 中与 v_k 相邻的点 v_j 的 T 标号修改为 $\min\{d(v_j),d(v_k)+w(v_k,v_j)\}$，重复上述步骤直至 $v_p\in S$，这时 $d(v_p)$ 即为从 v_1 到 v_p 的最短通路长，而每一点的 P' 标号皆等于从 v_1 到该点的最短通路长.

当 G 中所有点都标上 P' 标号后，我们"**反向追踪**"，找出 v_1 到 v_p 的最短通路. 具体做法是：由终点 v_p 开始，检查与 v_p 邻接的各个点，如其中 v_j 满足 $d(v_p)-d(v_j)=w(v_j,v_p)$ 时，则在 (v_j,v_p) 边上画一粗线条，然后再检查与 v_j 邻接的各点，如 v_i 满足 $d(v_j)-d(v_i)=w(v_i,v_j)$ 时，又在 (v_i,v_j) 边上画一条粗线条，如此做下去一直到达点 v_1 为止. 这样所有粗线条的边就构成一条从 v_1 到 v_p 的最短通路.

对于一开始所提问题中校址的选择，由得克斯特拉算法分别求出各点到 D 点及 E 点的最短距离，如图 32-2(a)及(b)所示.



(a)



(b)

图 32-2

当学校设在 D 村时，所有学生走的总路程为

$$7\times 50+5\times 40+1\times 60+1\times 70+4\times 90=1040,$$

当学校设在 E 村时，所有学生走的总路程为

$$8\times 50+6\times 40+2\times 60+1\times 20+3\times 90=1050,$$

因此学校建在 D 村较好.

练习三十二

1. 求图 32-3 中，点 v_1 到点 v_8 的最短通路.

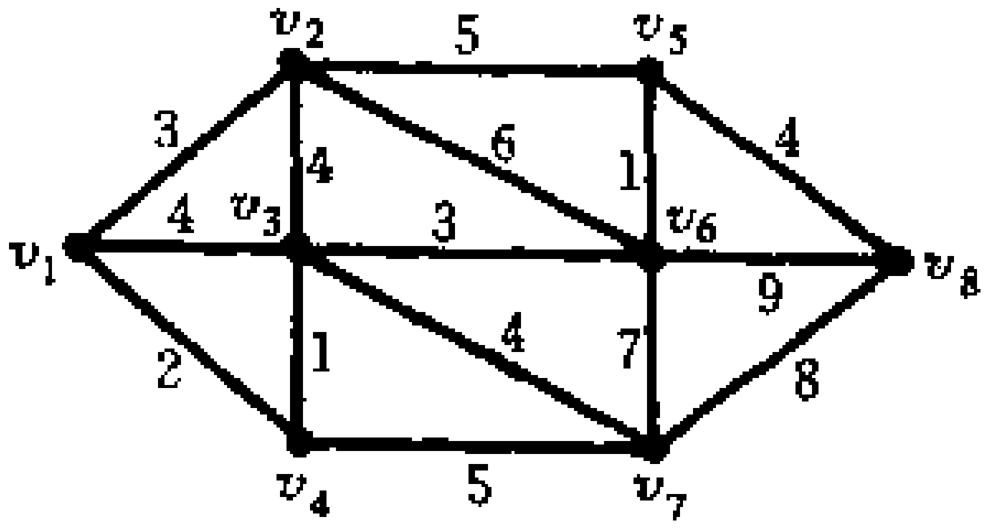


图 32-3

2. 市场预测在 5 年之内某设备的价格是：

第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
10	10	11	12	12

根据统计，该设备的维护费用每年分别是 2，3，5，8，15. 某工厂购买了一台该设备，问怎样更新设备才能使 5 年之内所花总费用最少？

三十三、中国邮路问题

中国邮路问题是在1960年由山东师范大学管梅谷教授首先提出并解决的.

邮递员传送报纸和信件，都要从邮局出发，经过他所管辖的每一条街道最后回到邮局. 要求它的最短传送路线. 这实际上可化为赋权图 $G=(V,E,w)$，求从某点出发，经过每条边至少一次，最后返回出发点的最短通路.

如果连通图 G 中各顶点次数都是偶数，则 G 一定有欧拉回路，任一条欧拉回路都是该问题的解. 如果 G 中有奇次顶点，这时某些边必被重复走过，这样的边我们称作**重复边**. 因此，问题是设图中有奇次顶点(多于2个)，如何增加重复边，而使走过的路最短? 下面定理回答了这个问题.

L 是图 $G=(V,E,w)$ 中最短邮路的充要条件是：

(1) G的每条边最多重复一次；

(2) 在G的任意一个回路上，重复边的长度之和不超过该回路长度的一半.

根据定理，首先选出奇次顶点，然后由条件(1)构造邮路，保证计算重复边之后各顶点的次数为偶数. 最后由条件(2)对所有回路进行判断，如果发现某个回路不满足条件，则令该回路中原重复的边变为不重复，而原来不重复的边改为重复，这种修改并不影响邮路的性质，待最后全部回路都满足条件(2)，该图的中国邮路问题就得解.

练习三十三

1. 求图 33-1 的中国邮路.

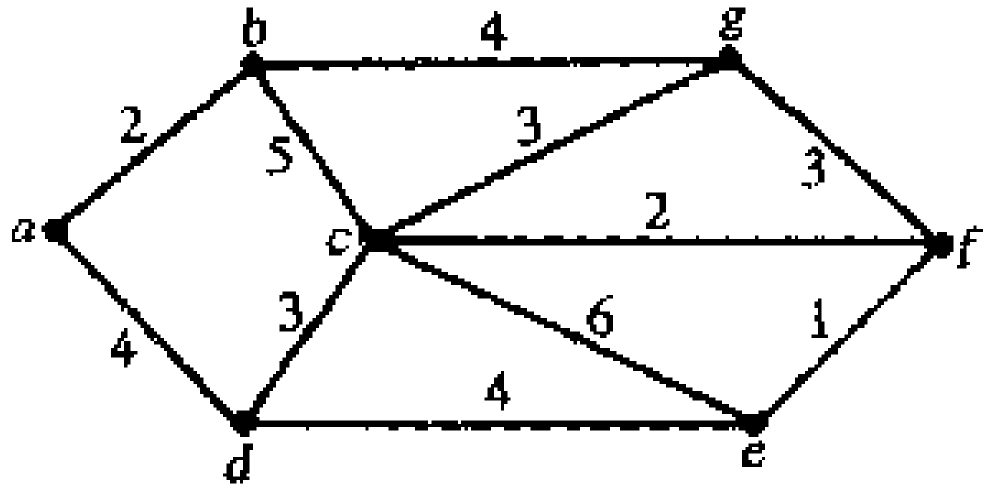


图 33-1

2. 求图 33-2 的中国邮路.

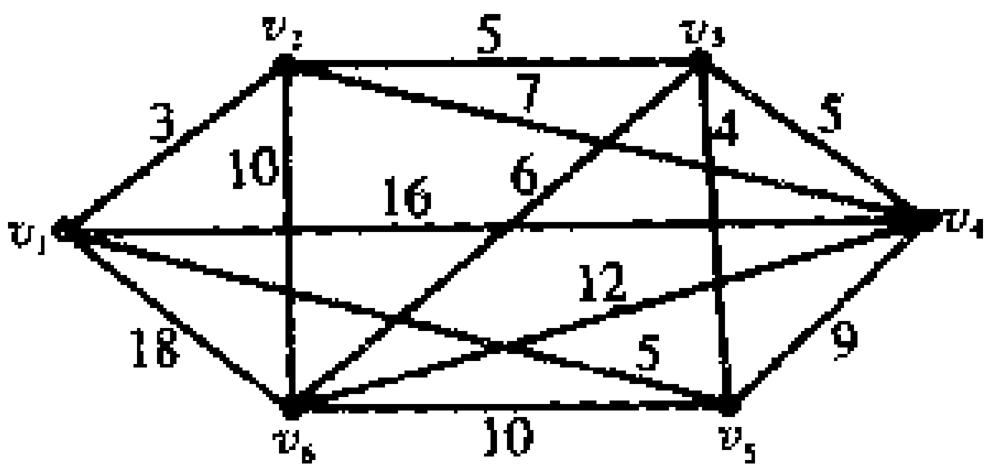


图 33-2

三十四、巧 渡 河

某人携带一只羊、一只狼和一捆草过河.主人不在时,羊要吃草,狼要吃羊.船很小,每次摆渡主人只能带一个"乘客",问主人应如何将它们摆渡到彼岸,共有几种方案?

这类过河问题,我们可以用实验的方法去寻求解决的途径,也可以用高深的数学知识(矩阵运算)去解决,但用图论中有向图去解决是最清楚的.

如果一个图的每一边都规定了方向,我们就称这个图为**有向图**.通常记为$D=(V,E)$,E是由V中顶点有序对所组成的边集,称为弧.(v_1,v_2)和(v_2,v_1)是不同的弧.与有向图相应,以前我们所遇到的图(不规定边的方向)称为**无向图**.与无向图的顶点的次数(度)相应,以v_i为起点的弧数称为顶点v_i的**出度**,记为$\deg^+(v_i)$;以v_i为终点的弧数称为顶点v_i的**入度**,记为$\deg^-(v_i)$.不难理解,有向图$D=(V,E)$中若有n个顶点、e条弧,则所有顶点入度之和与出度之和相等,并且等于弧数,即

$$\sum_{i=1}^{n}\deg^+(v_i)=\sum_{i=1}^{n}\deg^-(v_i)=e.$$

完全类似,无向图中许多定义可自然地推广到有向图中去.

在有向图$D=(V,E)$中,一个由不同的弧组成的序列$e_1e_2\cdots e_q$,如果其中e_i的起点为v_i,终点为$v_{i+1}(i=1,2,\cdots,q)$,那么这个序列称为从v_1到v_{q+1}的通路,q称为这个通路的长,

v_1 称为这个通路的起点，v_{q+1}称为这个通路的终点. 如果 $v_{q+1}=v_1$，那么这个通路称为一个回路. 对有向图 $D=(V,E)$，我们还有：有向图 $D=(V,E)$是一个通路或一个回路，则必满足：

(1) 对应的无向图 $G=(V,E)$是连通的；

(2) 满足$|\deg^+(v)-\deg^-(v)|=1$ 的顶点个数为 2 或 0，并且其余的顶点均满足 $\deg^+(v)=\deg^-(v)=1$.

对于巧渡河的问题，我们分别用 M、S，W，G 表示主人、羊、狼和草. 原岸的原始状态为 $v_0=\{M,S,W,G\}$，原岸的其余允许状态分别为 $v_1=\{M,S,W\}$，$v_2=\{M,S,G\}$，$v_3=\{M,W,G\}$，$v_4=\{M,S\}$，$v_5=\{W,G\}$，$v_6=\{G\}$，$v_7=\{W\}$，$v_8=\{S\}$. 原岸的最终状态 $v_9=\varnothing$. 令 $V=\{v_0,v_1,\cdots,v_9\}$，令 $E=\{(u,v)\mid u,v\in V$ 且 u 一步可达 $v\}$，设 V，E 构成的有向图为 $D=(V,E)$，如图 34-1 所示.

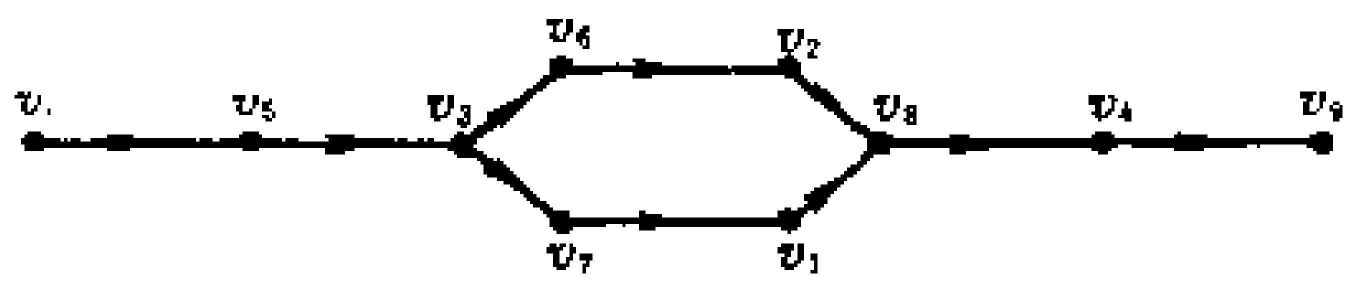


图 34-1

我们从图可知寻找从 v_0 到 v_9 的路径有两条：$v_0v_5v_3v_6v_2v_8v_4v_9$ 和 $v_0v_5v_3v_7v_1v_8v_4v_9$. 它们长度都是 7，也就是说，主人至少经过 7 次摆渡才能将羊、狼、草都摆渡到彼岸，可以有两种方案.

此题，我们也可以这样来进行，在原岸允许有十种状态，即人狼草羊、人狼羊、人狼草、人羊草、人羊、狼草、狼、草、羊、$\varnothing$(人狼羊草均在彼岸).

状态“人草”不可能出现，因为这时彼岸为“狼羊”是不允

许出现的，将每一种状态用一个点表示，如果某次船从原岸划往彼岸时，使状态 v 变成 v'，我们就作一条从 v 到 v' 的弧，这样就得到一个有向图 34-2.

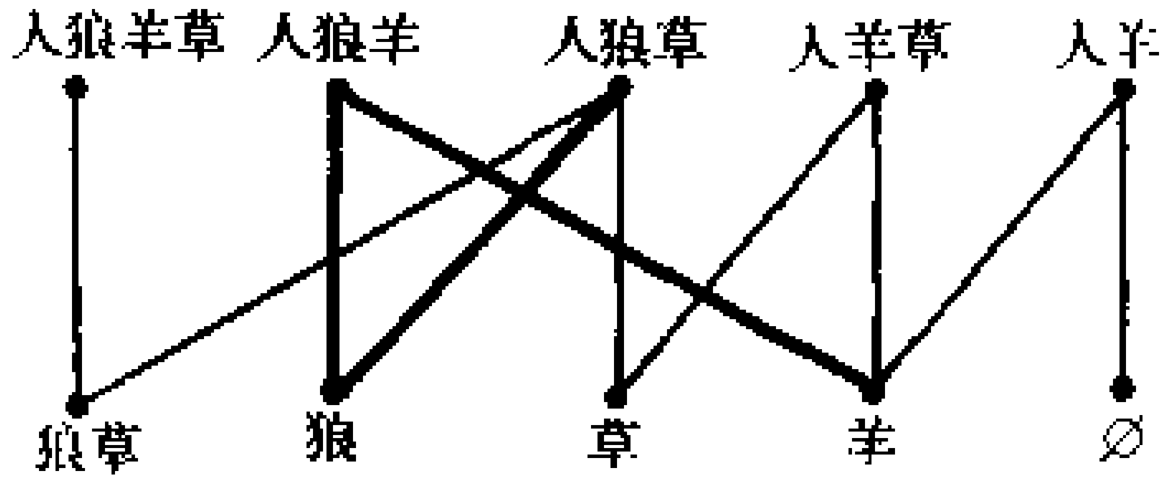


图 34-2

船是在两岸间往返的，我们的问题就是在图中找一个由初始状态“人狼羊草”到“∅”的弧的序列，这个序列中相邻的两条弧或者都是由同一点引出的，或者都是进入同一个顶点的. 这样的弧的序列是很容易找到的，图中细线所示的就是一个解.

练习三十四

1. 今有 3 个油瓶，分别能装 10 kg、7 kg 和 3 kg 油. 已知 10 kg 瓶中装满了油，其余两瓶为空瓶. 今要将油分成两个 5 kg，没有秤，问能找到几种分油方案，使倒油的次数尽量的少?

2. 100 种昆虫，每两种中必有一种能消灭另一种(但甲能消灭乙，乙能消灭丙，并不意味甲一定能消灭丙). 证明：可以将这 100 种昆虫依某种顺序排列起来，使得每一种能消灭紧接在其后的那种昆虫.

三十五、做对的题目仍然不会完全相同

10个学生参加一次考试，试题十道。已知没有两个学生做对的题目完全相同，证明在这十道题中可以找到一道试题，将这道试题取消后，每两个学生所做对的题目，仍然不会完全相同。

我们用没有回路的连通图来考虑这个问题，是比较清楚的。这种图我们称之为**树**，用符号 T 表示，树中任一边称为树的树枝。若树枝的两个端点的次数都大于或等于 2，则该树枝称为**树干**。树中次数为 1 的顶点称为**树叶**(或悬挂点)。

如邮局的邮件流动情况，如图 35-1 所示，所有邮件先送到几个支局，例如顶点 N，它是由编码第一位数字决定的，然后由邮局编码第二位数字决定发送到 $N_0, N_1, \cdots, N_9$ 10 个地区，某个地区决定后再按第三位数字发送到 10 条街道，某个街道决定后又按第四位数字决定发送到 10 个地段，第五位数

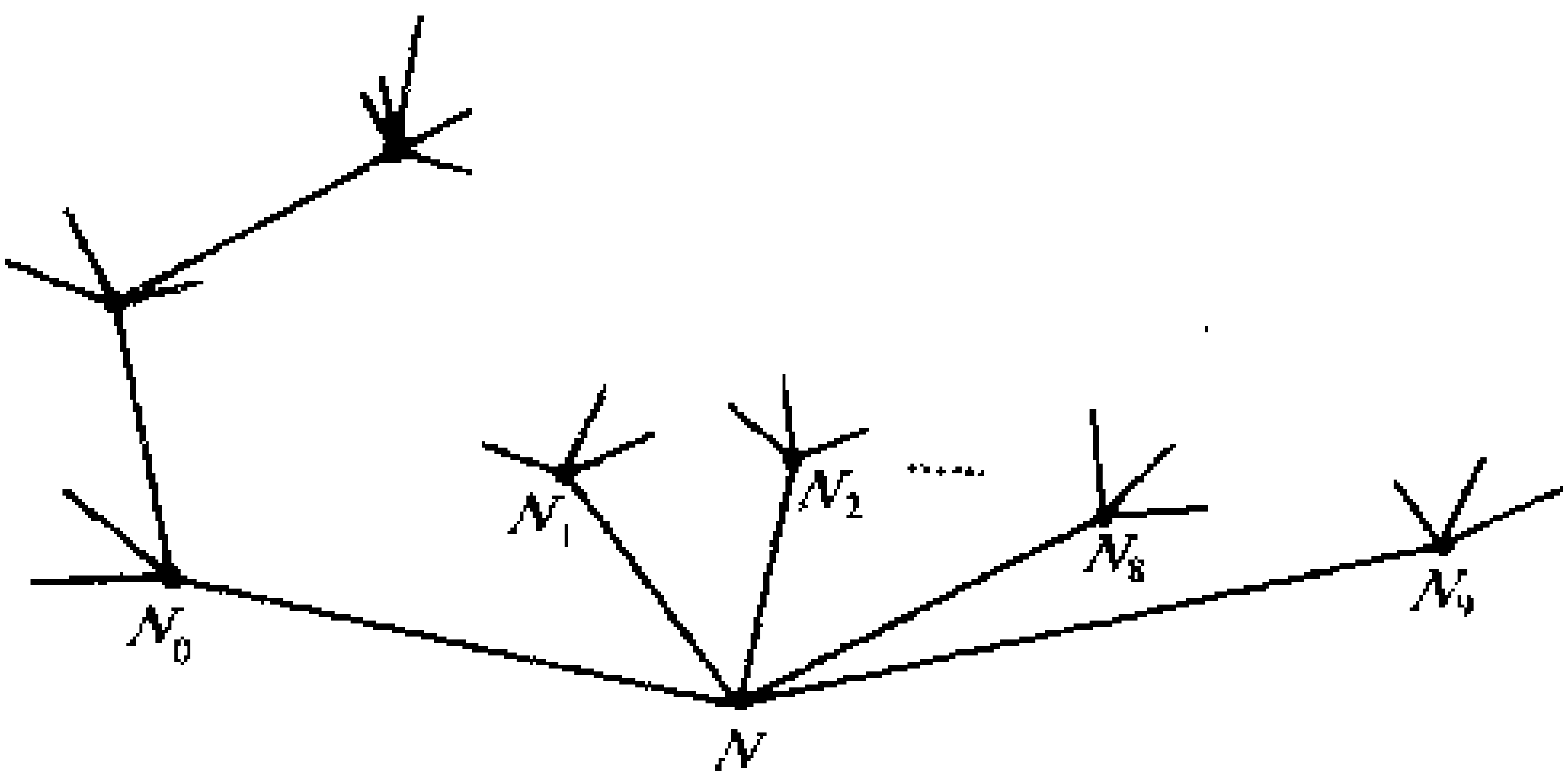


图 35-1

字决定发送到 10 个里弄或企事业单位，这样五位编码可以决定发送 10^5 个里弄或企事业单位. 该图就是从支局 N 发送邮件的分类图，实质上这就是树.

树的顶点总数与边数之间的关系是：如果树 T 的顶点数为 n，那么它的边数 $m=n-1$.

如果在一个有回路的连通图 G 中，总可以陆续去掉一些边而得到一个树 T，T 与 G 的顶点是相同的，并且从 T 陆续添加一些边就得到 G. 我们称这样得到的 T 为 G 的**生成树**.

已证明，由 n 个顶点可以产生 n^{n-2} 个不同的树.

树 T 具有以下性质：

(1) 在 T 中去掉任一条边后，所得到的图 G 是不连通的；

(2) T 添加一条边后所得到的图 G 一定有回路；

(3) T 每一对顶点 v 与 v' 之间有且仅有一条通路.

现在来证我们的题目，我们用反证法.

每一个学生用一个点 $v_i(1\leqslant i\leqslant 10)$ 表示. 如果命题不成立，那么对每一个题目 $k(1\leqslant k\leqslant 10)$，如果去掉 k 后，就可以找到一对学生 v_i 与 v_j 做对的题目相同，这不妨设原来 v_i 比 v_j 恰好多做一道题 k(如果有好几对这样学生，我们任取其中一对)，在这样的一对点 v_i 与 v_j 之间连一条边，并且标上数 k，于是得到一个有 10 个顶点、10 条边的图，并且这 10 条边上标上了 10 个互不相同的数.

如果图 G 的边数不小于顶点数，显然 G 一定有回路，设 $(v_{i_1},v_{i_2},\cdots,v_{i_k},v_{i_1})$ 为一个回路，那么沿着这个回路前进时，每通过一条边就相当于解出的题目增加或减少了一道题，并且增、减的题目是互不相同的题目，由于沿着回路绕行一周后仍回到 v_{i_1}，这就是说，由 v_{i_1} 做对的题增加一些题再减少另一些

题，最后的结果和 v_{i_1} 原来做对的题完全相同，这显然是矛盾的. 故每两个学生做对的题目，仍然不会完全相同.

练习三十五

1. 假设一个整数序列是 4,1,13,7,0,2,8,11,3，试找出其中的最大单调递增子序列.

2. 作出 K_5 的一个生成树，K_5 有多少个生成树？其中不同构的有多少？

3. 在乒乓球单打比赛中采取淘汰制，问如果 n 名选手参加比赛并决出冠军，共需进行多少场比赛？

三十六、“Good bye”的编码信息

用前缀码编写“Good bye”的编码信息.

一个最佳编码是与有向树的概念密切相关的. 如果一个有向图在不考虑边的方向时是一棵树,那么这个有向图就叫**有向树**. 如果恰有一个顶点的入度为 0,其余顶点入度为 1,则称这棵有向树为**根树**(也称家族树). 出度为 0 的顶点称为叶,出度、入度都不为 0 的点称为**分枝点**,入度为 0 的点称为**根**. 在根树中,从根到某顶点的单向通路之长,称为该顶点的**层次**.

用根树可以表示家谱,设 a 是根树的一个分枝点,如果 a 到 b 有一条边,则称 b 是 a 的**儿子**,a 是 b 的**父亲**. 如果两个顶点都是同一顶点的儿子,则称这两个顶点为兄弟. 一般我们从左向右依长幼排列.

在根树中,若每一个顶点的出度均小于或等于 m,则称这棵树为 m 叉树;若每一个顶点的出度恰好等于 m 或 0,则称这棵树为**完全 m 叉树**. 特别 $m=2$ 时,称为二叉树. 若树叶层数相同,则称完全二叉树.

任何一棵树根都可用二叉树来表示:对根的顶点从根开始逐层讨论,每层从左到右进行. 如图 36-1 所示,就是把一棵根树表为二叉树的例子.

在电报编码中,26 个英文字母必须用数字 0 或 1(或“·”和“—”)组成的序列表示. 因为 $2^4<26<2^5$,故用长度为 5 位的 0,1 序列就足以代表这 26 个字母. 但由于各个英文字母在

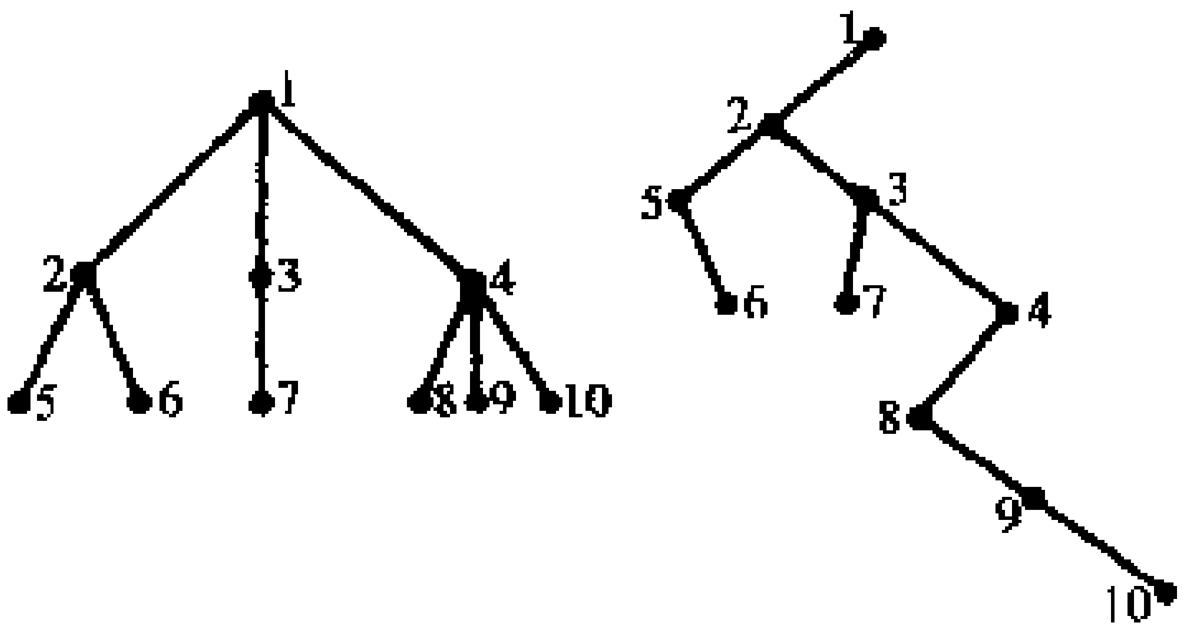


图 36-1

电报文稿中出现的频率不同，如对所有字母都用等长（5 位）的 0，1 序列表示是很不科学的. 经过统计，得知平均在 1000 个字母中各字母出现的频数如表 36.1 所示. 我们希望最好能用较短的 0，1 序列来表示经常出现的字母，这样整个数串长度才能缩短，但是，这又给译码带来新的问题，即在接收端如何把不同长度的字母序列分开呢？人们在编码时常常采用一种"前缀码"序列来表示英文字母. 所谓前缀码就是这样一个序列的集合，在这个集合中，任何一个序列都不是另一个序列的前缀.

表 36.1

字母	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
频数	82	14	28	38	131	29	20	53	63	1	4	34	25
字母	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
频数	71	80	20	1	68	61	5	25	9	15	2	20	1

我们可以利用完全二叉树直接得出所需要的二元前缀码. 给定一棵完全二叉树，把每一个分枝点关联的左、右两条边分别标以 0 和 1；对每一片叶子分别标以 0，1 组成的数字序列，这个序列即是从根到该叶子的通路上所有边的标号序

列．如图 36-2，表示一棵完全二叉树及其分配给叶子的数字序列．显然，任何一棵完全二叉树，分配给叶子上的序列集合，就是一个前缀码．不同的完全二叉树对应于不同的前缀码．我们可以证明，对于给定的前缀码可以找到相应的一棵完全二叉树．这样在通讯中，我们就可按事先规定好的前缀码发送一串信息，而接收方根据已规定好的前缀码进行译码．很明显，树中非叶顶点的代码是树叶代码的前缀．

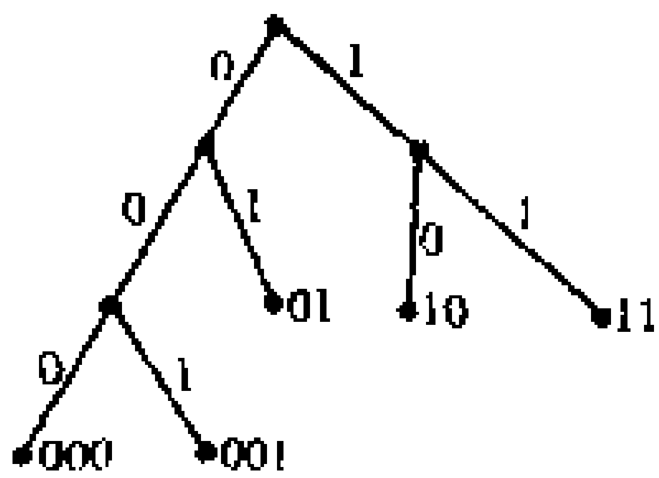


图 36-2

现在我们考虑"good bye"各字母所对应的前缀码．由于二叉树层数为 3 时，其树叶有 $2^3=8$ 个，因此这六个字母只需对应三层的二叉树．如图 36-3，令 g，o，d，b，y，e 所对应的字码分别为 000，001，010，011，10，11，显然这个序列集合为前缀码，那么"good bye"所对应的编码信息为：0000010100111011.

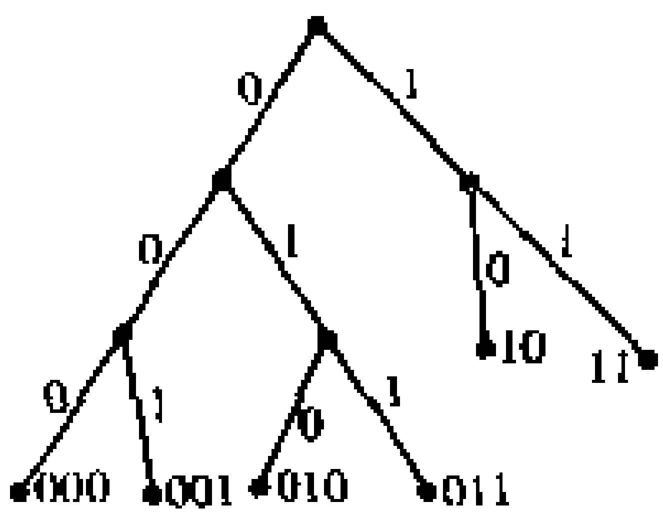


图 36-3

练习三十六

在通讯中要传输八进制数字0,1,2,3,4,5,6,7.这些数字出现的频率为：0：30%，1：20%，2：15%，3：10%，4：10%，5：6%，6：5%，7：4%.编一个最佳前缀码，使通讯中出现的二进制数字尽可能地少.具体要求如下：

(1) 画出相应的二叉树；

(2) 写出每个数字对应的前缀码；

(3) 传输按上述比例出现的数字100000个时，至少要用多少个二进制数字？

三十七、残缺棋盘问题

把一个 8×8 国际象棋的棋盘的两个对角剪去后，得到一个残缺棋盘，如图 37-1 所示. 现在有 31 张长方形纸片，每一张纸片是棋盘上黑白两个方格组成的长方形，问能否用这 31 张纸片不重叠地完全盖住这个残缺的棋盘？

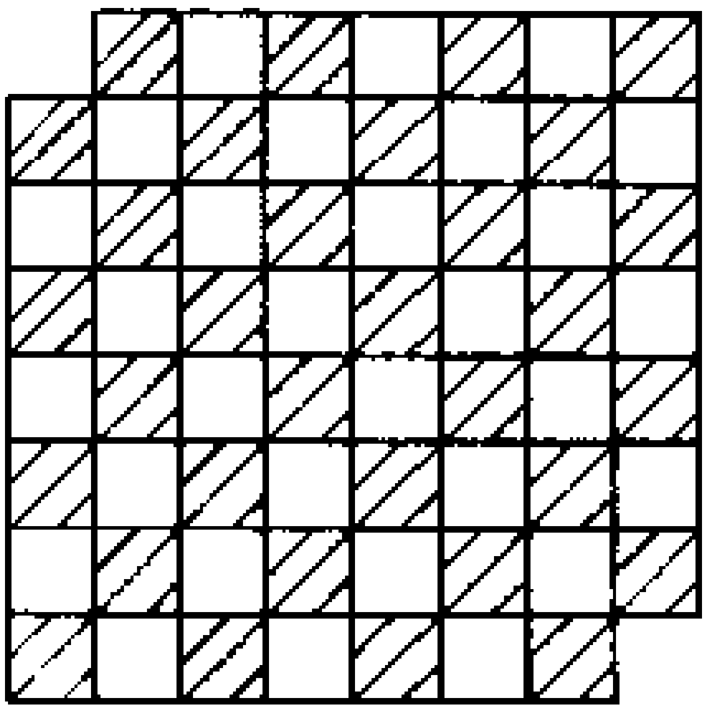


图 37-1

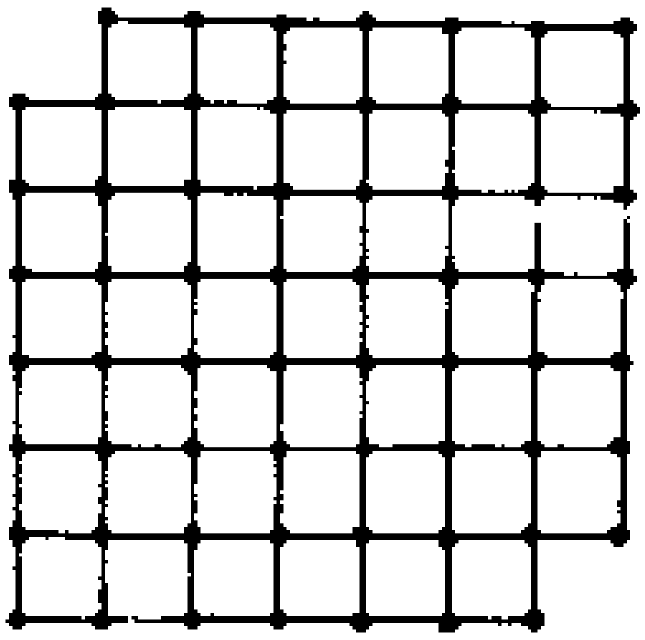


图 37-2

我们可以把这个问题转化成图论问题：构造一个图 G，G 中每个顶点表示棋盘的一个方格，这个图 G 共有 62 个顶点. 如果黑白两格相邻，对应的两个顶点之间连一条边，这样得到的图 G 如图 37-2 所示. 用一张纸片盖住两个相邻的方格，对应于在 G 中一条边盖住两个相邻顶点. 所以能否用 31 张纸片盖住上述残缺棋盘的问题就归结为在图 G 中能否找到 31 条边，它们中任意两边没有公共端点.

设 $G=(V,E)$ 是一个简单图，若 E 的一个子集 E_0 中任意两条边都没有公共端点，则称子集 E_0 为 G 的一个**匹配**. 如图

37-3 中粗线边就组成一个匹配，虚线边也组成一个匹配.

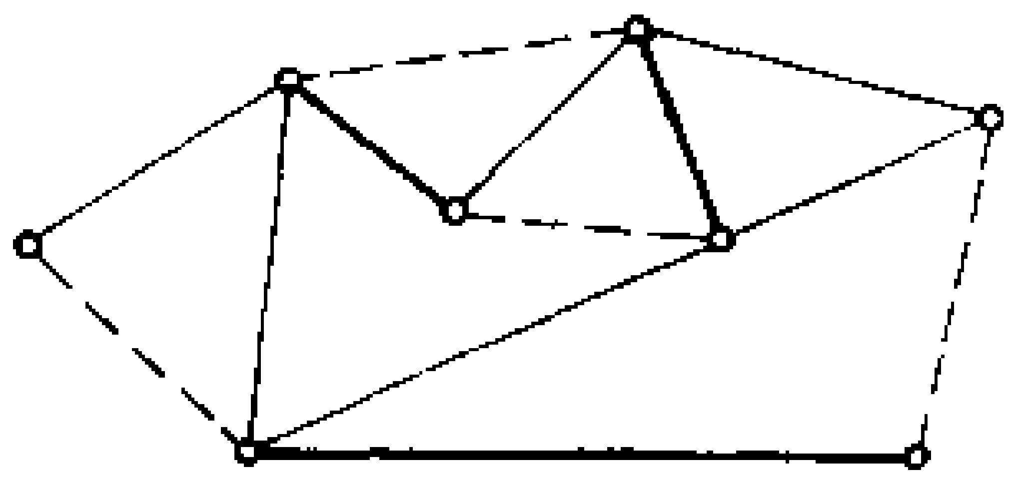


图 37-3

在图 G 的所有匹配中，边数最多的匹配称为**最大匹配**，如果图 G 中的匹配 E_0 盖住了 G 中所有顶点，则称 E_0 是 G 的**完美匹配**. 显然，完美匹配一定是最大匹配.

在应用中常见到的情形是二分图的匹配问题. 关于残缺棋盘问题，图 37-2 实际上是一个二分图 $G=(X,Y;E)$，其中 X 为白方格对应的 G 的顶点集，Y 为黑方格对应的 G 的顶点集，又相邻两方格中一个为黑方格，另一个是白方格，因而 G 中每条边的一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中，所以 G 是二分图. 残缺棋盘问题可归结为二分图 G 是否有一个完美匹配.

由完美匹配定义可知：一个二分图若有完美匹配，则两个顶点集的顶点数一定相同，即 $|X|=|Y|$. 在残缺棋盘中，白方格有 30 个，黑方格有 32 个，即 $|X|=30$，$|Y|=32$，$|X|\neq|Y|$，故图 37-2 的 G 没有完美匹配. 因此，用 31 张纸片盖住图 37-1 中的残缺棋盘是不可能的.

关于二分图的匹配问题，有一个古老而有趣的婚姻问题：在一个由有限个小伙子组成的集合中，如果每个小伙子认识几个姑娘，问在什么条件下可以使每个小伙子和他所认识的一个姑娘配成一对?

为此我们先介绍相异代表组的概念. 设给定集合 E 的 n 个非空子集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$，我们分别对每一个子集求一个代表 $x_i\in S_i$，$i=1,2,\cdots,n$，并且要求所有 x_i 都相异，这些 x_i 的全体

就组成了一个**相异代表组**，记为 SDR. 婚姻问题就可归纳为相异代表组问题，即在什么条件下，小伙子所认识的姑娘集合中可以产生 SDR. 荷尔(Hall)给出了下面的**相异代表组定理**.

假设集合 E 有 n 个子集 $S_1,S_2,\cdots,S_n$，则由这些子集产生一个相异代表组的充分必要条件是：这些子集中任意 k 个子集的并集都至少包含 E 中 k 个不同的元素，其中 $k=1,2,\cdots,n$.

下面通过例子给出一个算法——逐步调整法，具体地求出一个相异代表组. 设 $E=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ 有以下 8 个子集：$S_1=\{1,2,4,5\}$，$S_2=\{3,4\}$，$S_3=\{3,4,6,8\}$，$S_4=\{2,3\}$，$S_5=\{1,8\}$，$S_6=\{7,8\}$，$S_7=\{2,4\}$，$S_8=\{2,7\}$. 要求找出一个相异代表组.

我们首先从 S_1,S_2,S_3,S_4,S_5,S_6 中取出代表 1,4,3,2,8,7(取代表是任意的，只要代表不重复取)，但 S_7 中两个元素已分别作了 S_1 和 S_2 的代表，这就要对 S_1 到 S_6 的代表重新调整，以使 S_7 中能取出一个代表. 为了直观起见，构造一棵树 T_1，它的根是 2，另一棵树为 T_2，它的根是 4，建立一个 B 表，2,4 是它的元素. 对 T_1，2 是集合 S_4 的代表. 在集合 S_4 中还有一个元素 3，3 已经作为 S_3 的代表了，不在 B 表中，把它放入 B 表内，并把 3 作为 2 的儿子加入树 T_1 中.

我们再看元素 3，它是 S_3 的代表，在 S_3 中不在 B 表内的元素是 6 和 8，把它们放入 B 表，并且 6 和 8 作为 3 的儿子加入树 T_1 中. 经过上述步骤. 树 T_1 和 B 表如图 37-4 所示.

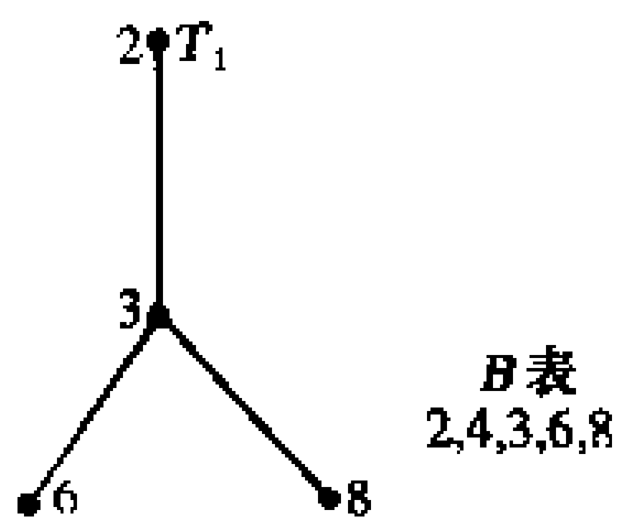


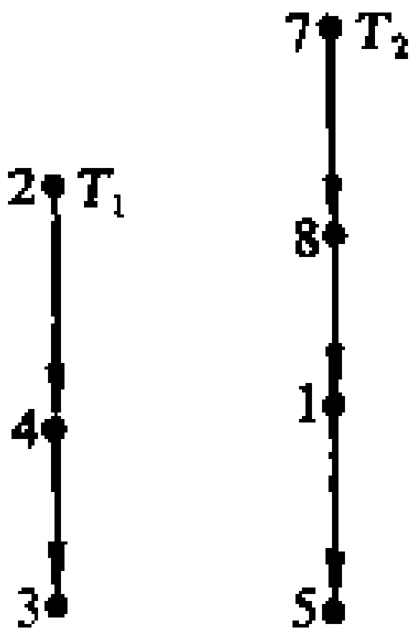
图 37-4

我们先看元素 6，它不是代表，6 在以 3 为代表的集合 S_3 中，取 6 为 S_3 的代表，3 在以 2 为代表的集合 S_4 中，取 3 为 S_4 的代表，原来 3，8，7，2 分别是 S_4 到 S_7 的代表．这样得到 S_1 到 S_7 的代表分别为 1，4，6，3，8，7，2．若最后未找出 S_1 到 S_7 的代表，则再考虑 T_2．

S_8 的元素是 2 和 7，已经是代表了．我们又要对集合 S_1 到 S_7 的代表重新进行调整．与上面方法相同，构造两棵树 T_1 和 T_2，根分别是 2 和 7，把 2 和 7 放入 B 表内．

先看树 T_1，2 是 S_7 的代表，S_7 中不在 B 表内的元素是 4，把 4 放入 B 表内，并且 4 作为 2 的儿子加入树 T_1 中，再看 4，4 是 S_2 的代表，在 S_2 中不在 B 表内的元素是 3，把 3 放入 B 表内，作为 4 的儿子加入树 T_1 中．3 是 S_4 的代表，S_4 的元素全在 B 表内，树 T_1 构造完毕．

再看树 T_2，7 是它的根，按上面相同的方法构造，求出数 5，不是代表，此时，树 T_1、T_2、B 表如图 37-5 所示．



B 表
2,7,4,3,8,1,5

图　37-5

5 不是代表，5 在以 1 为代表的集合 S_1 中，取 5 作为 S_1 的代表．1 在以 8 为代表的 S_5 中，取 1 作为 S_5 的代表，8 在以 7 为代表的 S_6 中，取 8 作为 S_6 的代表，现在可取 7 作为 S_8 的代表．这样我们得到一个相异代表组：5，4，6，3，1，8，2，7，分别作为 S_1 到 S_8 的代表．

练习三十七

1．舞会中有 10 个男青年和 10 个女青年，已知每个男青

年认识两个女青年，每个女青年认识两个男青年，证明可以适当安排使每个男青年和他认识的女青年跳舞.

2. 在国际象棋棋盘的 64 个方格中，有 16 个方格已标上记号，并且每行、每列都恰好有两个标号方格，证明可以在已标号的方格中放上 8 个黑子与 8 个白子，使每行、每列各有一个白子和一个黑子.

3. 将下列两个拉丁长方阵扩充为拉丁方阵：

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

三十八、铁路互不交叉能否实现？

有三个工厂和三个矿山，想要从每一个工厂到每一个矿山各修一条专用铁路，这些铁路互不交叉能否实现？

这个问题的实质是：在一个平面内，一个图具备什么条件，它的边才能互不相交？

如果一个图 $G=(V,E)$ 在平面上任何两边仅相交于顶点，则称 G 为**平面图**，否则为**非平面图**.

设 G 是一个连通的平面图，由图 G 的某些边所包围着，其内部既不包含 G 的顶点也不包含 G 的边，这样的区域称为 G 的**一个面**. 包围面的回路称为这个面的**边界**. 如果面的面积是有限的，则称这个面为有限面，否则称为无限面.

如果在图 G 的一些边上插入次数为 2 的顶点，得到一个新图 G'，则称 G' 和 G 同胚；如果在图 G 中删去一些边，并把每个边关联的顶点合并，用新的顶点代替，得到新图 G''，称为 G 的收缩.

我们把构成面 f 的边界回路长度（边的条数）称作这个面的次数，记作 $d(t)$. 可以证明：一个有限平面图，它的所有面的次数之和等于其边数的两倍.

1752 年欧拉首先给出任何一个凸多面体的顶点数 n、棱数 m 和面数 f 之间的关系式（称为欧拉公式）：

$$n-m+f=2.$$

事实上，欧拉公式不仅限于凸多面体，在平面连通图中也有欧拉公式，即：

设 G 是连通平面图，它的顶点数为 n，边数为 m，面数为 f，那么有 $n-m+f=2$.

把任何一个凸多面体"绷"在球面上，凸多面体的顶点不在球的最高点. 作球极投影，便在平面上得到一个对应于该凸多面体的连通平面图，但反之未必成立. 故连通平面图的欧拉公式比凸多面体的欧拉公式更为一般，也就是说，从连通平面图的欧拉公式可以得到凸多面体的欧拉公式.

对于本题，将三个工厂与三个矿山用六个点表示，九条铁路用九条边表示，如图 38-1 所示，此图显然是完全二分图 $K_{3,3}$，只要研究 $K_{3,3}$是否是平面图就可以了. 我们证 $K_{3,3}$不是平面图.

我们用反证法. 假设 $K_{3,3}$是平面图，那么由于 $n=6$，$m=9$. 由欧拉公式得 $f=2+m-n=5$. 但因 $K_{3,3}$是简单图，没有由两条边围成的面；又 $K_{3,3}$是二分图，也不会有由三条边围成的面，所以每个面至少有 4 条边，从而 $4f\leqslant 2m$，即

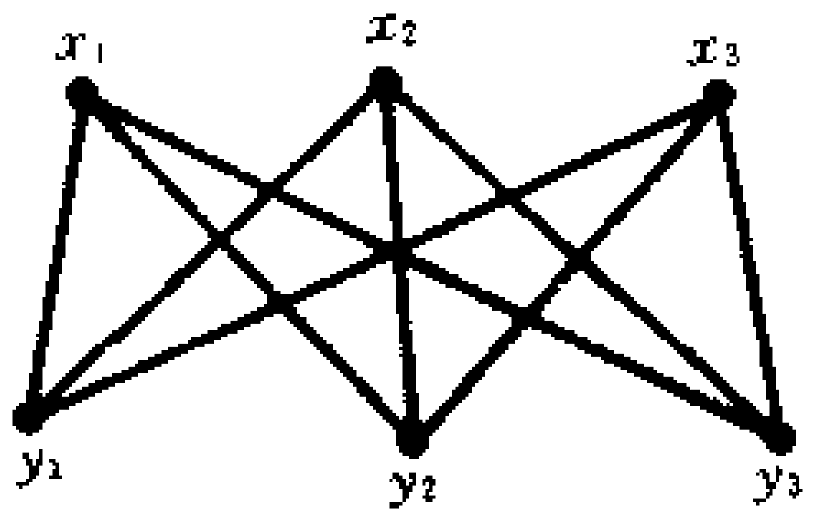


图 38-1

$$4\times 5=20\leqslant 2\times 9=18.$$

这是矛盾的. 故 $K_{3,3}$是非平面图，即在平面上九条专用铁路必有相交，除非它们不在同一平面上(地铁或空铁).

此题，给了我们一个很重要的非平面图 $K_{3,3}$. 还有一个重要的非平面图 K_5. 欧拉先利用欧拉公式证明了下面结论：

如果 G 是具有 $n(n\geqslant 3)$个顶点和 m 条边的连通简单平面图，那么 $m\leqslant 3n-6$.

事实上，这个连通简单的平面图 G，每个面至少由 3 条边

围成，总边数$\geqslant 3f$. 又因为每条边都是两个面的公共边，所以，每条边都被计算过两次. 因此，G 的边数 $m\geqslant\frac{3f}{2}$，$f\leqslant\frac{2}{3}m$. 由欧拉公式 $n-m+f=2$，得 $n-m+\frac{2}{3}m\geqslant 2$，$m\leqslant 3n-6$.

由这个结论可立刻推出 K_5 是非平面图. 因为 K_5 中，$n=5$，$m=10$，不满足不等式 $m\leqslant 3n-6$，所以 K_5 不是平面图.

在非平面图中除 K_5 和 $K_{3,3}$ 以外，当然还有其他许多非平面图. 1930 年库拉托夫斯基(Kuratowski)证明了一个简单而漂亮的结果：所有非平面图都包含着同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图. 即一个图是非平面图，当且仅当它包含一个子图与 $K_{3,3}$ 或 K_5 同胚. 该结果称为 Kuratowski 定理. 也把 $K_{3,3}$ 和 K_5 称为 Kuratowski 图.

练习三十八

1. 证明：具有 6 个顶点和 12 条边的连通的简单平面图，它的每一个区域都是由三条边围成.

2. 证明：正多面体共有五种：正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体.

3. 判断图 38-2 中(a)，(b)，(c)三个图是否是平面图.

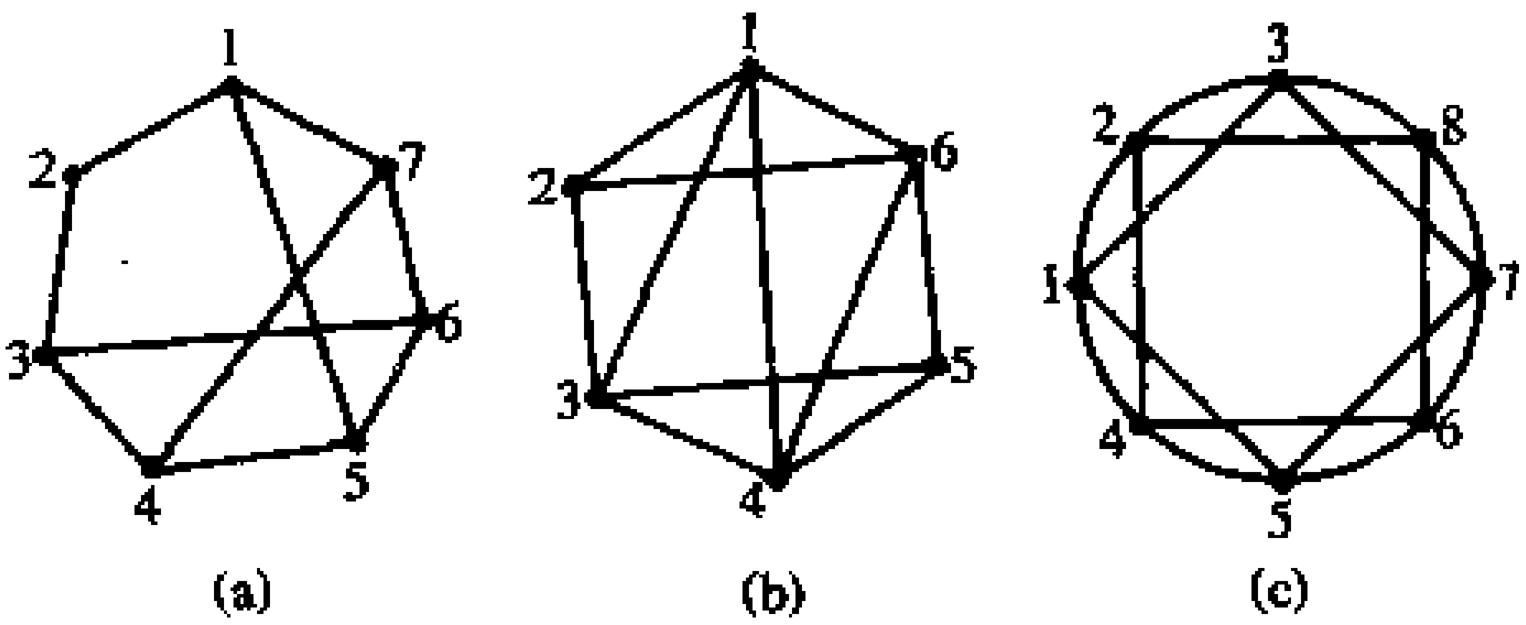


图 38-2

4. 判断图 38-3 为非平面图.

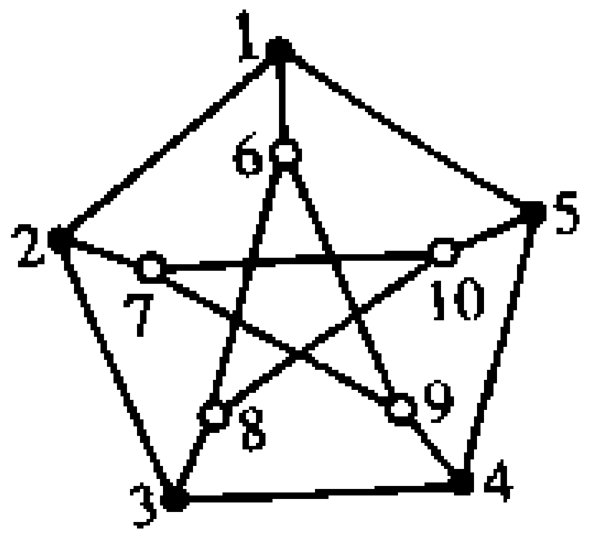


图 38-3

三十九、四 色 问 题

对任何一张地图进行着色，使任意两个有公共边界的国家染不同的颜色，那么最多只要四种颜色就足够了.

这是地图的四色猜想，是一个著名的数学难题.这是在1852年，一位大学毕业生弗南西斯·葛里斯首先发现的，他把这个发现首先告诉了英国著名数学家德·摩根.摩根感到这是一个有趣的数学问题，便用数学方法去证明，但没有证明出来，于是他又写信告诉了英国数学家哈密尔顿，哈密尔顿经过长达十三年的努力，直到离开人世，也没有证明出来.1878年英国数学家凯莱在伦敦的数学年会上，饶有兴趣地提出了著名的四色猜想问题.其后经过一百多年的时间，许多数学家去证，结果都没有成功.

直到1976年9月，《美国数学会通告》宣布：美国伊利诺斯大学的两位教授阿普尔(K. Apple)和哈根(W. Haken)，他们用大型电子计算机，分析两千多种复杂的地图(这些图，有些是实际存在的，有些是数学家为了证明四色猜想而构造出来的)，包括几百万种情况，作了两百亿个逻辑判断，经过一千二百个机时的计算，证明了地图四色猜想是正确的.这一困扰着许多数学家一百多年的数学难题终于解决了.

在证明四色猜想过程中，获得了图论的许多重要结果，丰富了一些数学理论和方法.当然目前人们对这种繁琐的证明方法并不满足，力图寻求更简洁的方法，是否可以不用计算机而得到证明.

地图的每一边是两个面的公共边，地图的两个面相邻就是说这两个面有一条公共边，而不是一个公共点，这样要排除地图中有桥的情况，如图 39-1 所示(e 为桥)，即我们定义的地图是一个没有桥的连通平面图，它可以有自环和多重边.

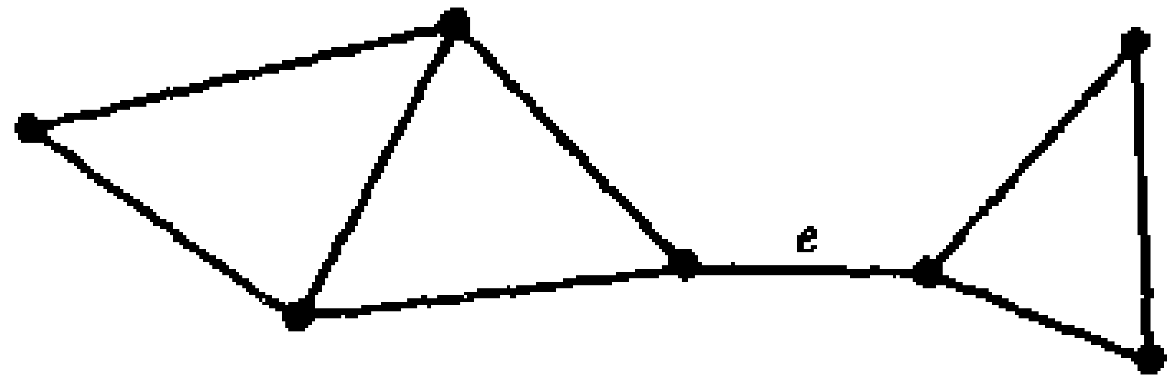


图 39-1

给定平面图 $G=(V,E)$，设它的面为 $f_1,f_2,\cdots,f_n$，若有图 $G^*=(V^*,E^*)$，满足如下条件：

(1) 对于 G 中任意一个面 f_i，内部有且仅有一个顶点 $v_i^*\in V^*$；

(2) 对于 G 的面 f_i,f_j 的公共边界 e_k 存在且仅存在一条边 $e_k^*\in E^*$，使 $e_k^*=(v_i^*,v_j^*)$且 e_k^* 与 e_k 相交；

(3) 当且仅当 e_k 只是一个面 f_i 的边界时，v_i^* 存在一个回路 e_k^* 与 e_k 相交，则称图 G^* 是图 G 的对偶图.

例如，图 39-2 的平面图 G 的对偶图 G^*(这里 G^* 的顶点和边分别用"·"及虚线表示).

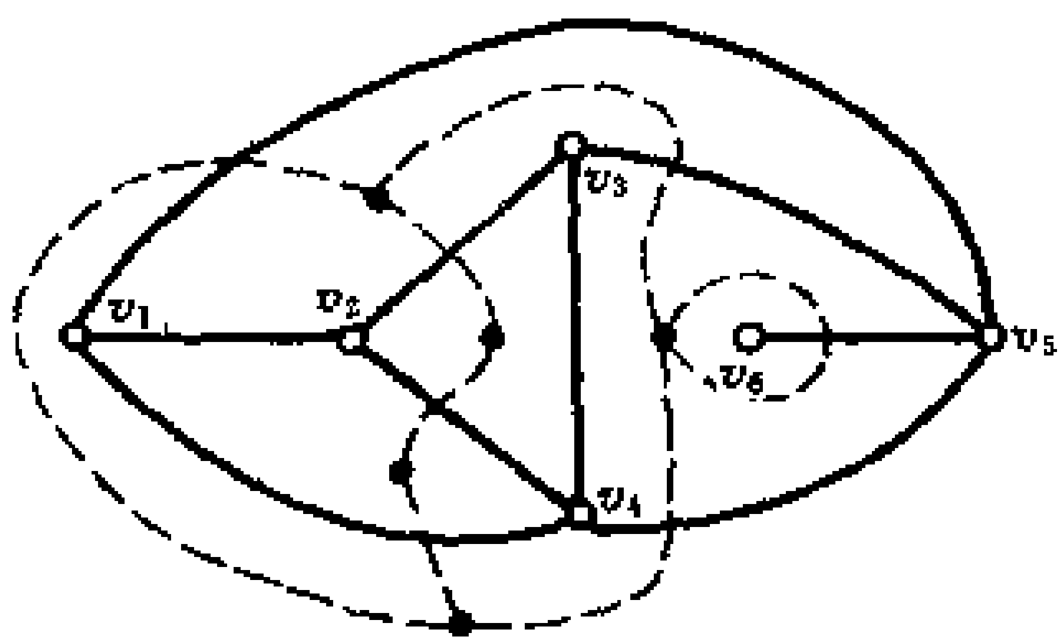


图 39-2

从对偶图的定义可以看出，如果 G^* 是 G 的对偶图，则 G 也是 G^* 的对偶图，而且 $|E^*|=|E|$，G^* 的顶点数 $|V^*|$ 恰等于 G 的面数.

如果图 G 的对偶图 G^* 同构于 G，则称 G 是**自对偶图**（见图 39-3）.

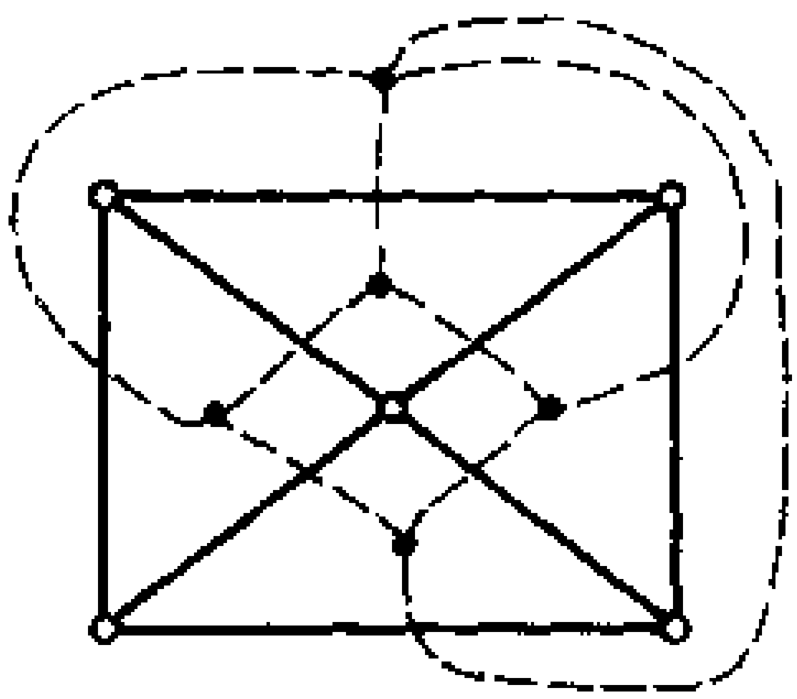


图 39-3

显然，连通平面图 G 的对偶图 G^* 的对偶图，就是原来的图 G. 利用对偶图的概念，我们可以将一些较难解决的有关平面图的问题化为它的对偶图来求解，这样有时使问题变得容易求解. 地图的着色是面着色，利用对偶概念，转化为点着色问题.

图 G 的**正常着色**是指对它的每一个顶点指定一种颜色，使得没有两个相邻顶点的颜色相同. 如果 G 的正常着色用了 k 种颜色，就称 G 为 k-着色的，对图 G 的正常着色所需的最少的颜色数称为 G 的色数，记为 $x(G)$.

易知：完全图 K_p 的色数为 p；二分图的色数为 2；若 G 是 n 个顶点的回路，则当 n 为偶数时，$x(G)=2$，n 为奇数时，$x(G)=3$.

对平面图顶点着色法有一个简单的鲍威尔(Powell)方法：

(1) 首先将 G 的顶点按次数递减排列（由于有相同次数的顶点，所以排序不是唯一的）.

(2) 同一种颜色先着在序列中的第一个顶点，然后将这种颜色依次着在这个序列中的不相邻的后继顶点上.

(3) 余下来的未着色的顶点构成一个子序列，换一种颜色按第(2)步骤相似办法在这个子序列上着色. 如此进行，直到各个顶点都已着上色为止.

点着色的四色定理是：设 $G=(V,E)$ 为任意平面图，则 $\chi(G)\leqslant 4$.

证明四色定理十分困难，现在只能用计算机归纳证明，但是五色定理证明却比较容易. 事实上，这个结果早在 1890 年就由希伍得(Heawood)所得到.

练习三十九

1. 图 39-4 为一张五间房的平面图，其中每间房均与外面院子及相邻的房间有门相通，问是否存在一条道路，使得从某点出发经过各门一次且仅一次，最后又回到该点？

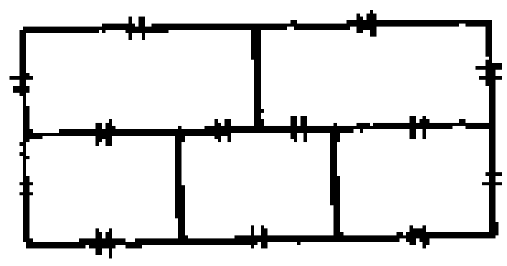


图 39-4

2. 一个如图 39-5 的平面图，给这个图以点着色.

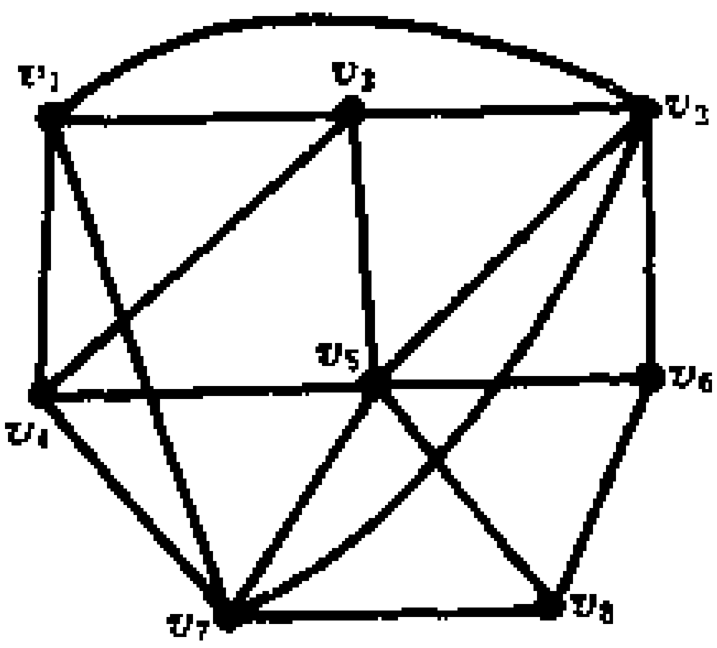


图 39-5

3. 印刷电路板的分层. 为了设计印刷电路板，我们先将电路图画成一个图 G，如图 39-6 所示. 图 G 中边对应导线，顶点对应接点，没有导线连接的两个接点之间可能要装配元件.

由于同一层电路板上导线不允许相交(除交点之外),如果图 G 是平面图,那么对应图 G 就可以设计出一块单层印刷电路板;如果图 G 不是平面图,那么对应图 G 就可以设计出一块多层印刷电路板,使每一层对应一个图 G 的平面子图. 现在要问:图 39-6 所设计的印刷电路板最少需要几层?

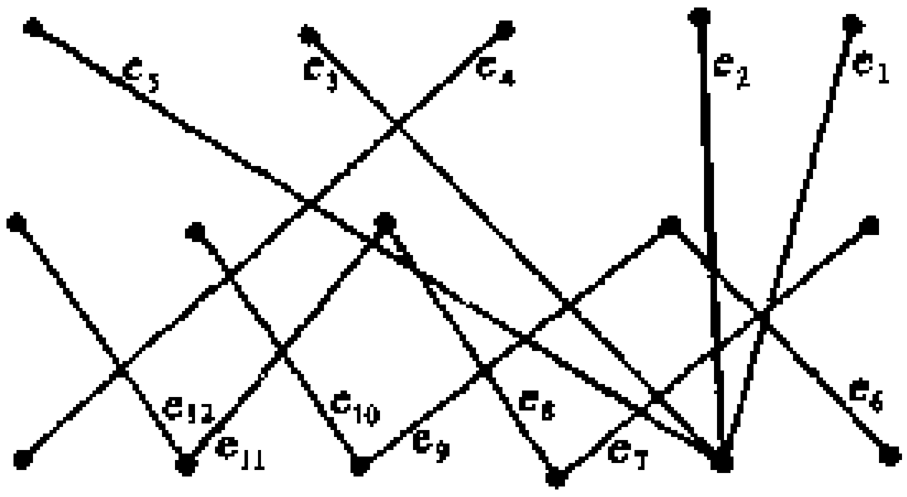


图 39-6

四十、有多少种吃奶糖的安排方案？

某人有 n 块大白兔奶糖，从元旦那天开始，每天至少吃一块，吃完为止. 有多少种安排方案？

该问题似乎无从下手，我们可以把问题转换一下，利用一一对应的办法，使问题得以清楚地解决，这种办法是处理好多混乱问题的一种好办法，这就是所谓的配对原理.

设 A,B 是集合，把 A 中的一个元素与 B 中的一个元素配成对，A,B 中每一个元素只能参加一对. 如果 A,B 中的所有元素都配上对，即 A 与 B 之间可以建立一种一一对应，则有 $|A|=|B|$.

应用配对原理求 $|A|$，关键是寻找一个既能与集合 A 建立一一对应又便于计数的集合 B. 而寻求 B，往往需要相当的技巧.

对于吃奶糖有多少种安排方案的问题，我们把 n 块奶糖（用黑圆点表示）排成一行，每两块之间留一空位，共有 $n-1$ 个空位. 在每个空位填上符号“1”或“+”，并约定形如

$$\cdot + \cdot 1 \cdot + \cdot 1 \cdot 1 \cdot + \cdot + \cdot$$

表示一种安排方案：第一天吃 2 块，第二天吃 2 块，第三天吃 1 块，第四天吃 3 块. 因此，安排方案全体组成的集 A 与上述 $n-1$ 个空位的填写符号方法全体组成的集 B 一一对应，故有 $|A|=|B|$. 共有 $n-1$ 个空位，每个空位有 2 种填写方法，所以 $|B|=2^{n-1}$，从而 $|A|=2^{n-1}$.

练习四十

1. n 名选手参加单打淘汰赛，需要打多少场后才能产生冠军？

2. 有编号 1 至 m 的 m 张纸片.

(1) 从这 m 张纸片中取出 1 张，放回；再取出 1 张，放回. 按这规则(称为有放回的抽样)共取 n 次，设第 i 次抽到 k_i 号($i=1,2,\cdots,n$). 求这 n 个号码组成不减数列

$$k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3 \leqslant \cdots \leqslant k_n$$

的抽样方法(其全体记为 A)的种数；

(2) 从这 m 张纸片中取出 n 张($2n-1 \leqslant m$)，不许重复，求这 n 个号码没有邻号的组合数(其全体记为 E).

3. 把 r 个没有区别的球分别放进编号为 1 至 n 的 n 个盆里，每盆球数不限.

(1) 求可以区别的放法种数；

(2) 求没有空盒的放法种数，设 $r \geqslant n$.

4. 圆周上有 n 个点($n \geqslant 6$)，每两点间作线段，假设其中任意 3 条在圆内无公共点. 求这些线段确定的交点落在圆内所组成的三角形的个数.

四十一、可能的赛局

两个势均力敌的乒乓球选手甲、乙相遇，先胜三局者为赢（5 局 3 胜），直到决出输赢为止. 问甲、乙的比赛共有多少种可能情形发生？

这个问题，我们可以列举出各种情形进行计数，但这样就非常繁琐，如果决胜局数增加，就更加庞杂. 我们可以用集合计数中的基本方法更好地解决此问题.

我们把有限集合 A 的元素个数 m 记为 $|A|=m$，于是用集合论的形式，给出**加法原理**：

如果把集合 S 分成两个子集 A,B，$S=A\cup B$ 且 $A\cap B=\varnothing$，则 S 的元素的个数等于 A,B 的元素个数之和，即 $|S|=|A|+|B|$.

更一般地，如果集合 S 分成子集

$$A_1,A_2,\cdots,A_m,A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m=S$$

且这 m 个子集两两不相交，则子集 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 称为集合 S 的一个**分划**. 这时，集合元素的个数等于这 m 个子集的元素之和，即有**加法公式**：

$$|S|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_m|.$$

现在，把比赛情形的全体记为 S，其中甲赢的各种情形记为 A，乙赢的各种情形记为 B，则 $S=A\cup B$ 且 $A\cap B=\varnothing$，而且 $|A|=|B|$，因此 $|S|=2|A|$.

现在考虑甲赢的各种情形. 要决出输赢，至少打满 3 局，至多打 5 局，按比赛局数把 A 分为三组. A_1：打满了 3 局，都

是甲胜，只有一种可能；A_2：打满4局，最后1局甲胜，另2个胜局在头3局中的某2局，有 C_3^2-3 种可能；A_3：打满5局，最后1局甲胜，另2胜局在头4局中的某2局，有 $C_4^2=6$ 种可能，很明显，$A=A_1\cup A_2\cup A_3$ 且 A_1、A_2，A_3 两两不相交，由加法公式得

$$\begin{aligned}|S|&=2|A|=2(|A_1|+|A_2|+|A_3|)\\&=2(1+3+6)=20.\end{aligned}$$

即甲、乙的比赛，共有20种可能的情形发生.

应用加法公式的关键是给集合一个合适或巧妙的分划.

练习四十一

1. 设 $\overline{U}$ 是正整数集合，A_i 是 $\overline{U}$ 中被5除后余数为 i 的所有正整数集合（$0\leqslant i\leqslant 4$）. 试由上述条件，给出正整数集合 $\overline{U}$ 的一个分划.

2. 求在 $1,2,\cdots,600$ 中不能被6整数的数的个数.

3. 用数字1，2写成十位数，至少有连续5位都是数字1，这样的十位数有多少个？

4. 有颗 n 面骰，各面的点数互不相同. 丢掷时任何一面都有可能朝上，丢掷这颗骰子3次，使出现（即朝上那面）的点数之和能被3整除的丢掷结果全体记为 A. 证明：

$$|A|\geqslant n^3/4.$$

四十二、聪明的班长

系里召集各班班长汇报各班选学第二外语的情况.某新编的班 30 人中,选学法语的有 7 人,选学日语的有 5 人,两科都选的有 3 人.但系里要知道两科都不选的有多少人.班长没统计这个数字,但他笔在纸上画了画,很快说出了两科都不选的人数是 21 人.他是怎么算出来的?

对有限集合元素个数问题,当各子集互不相交时,有加法公式可依,但不考虑这个条件时,可有下面两个重要定理.

定理 1 设 A_1,A_2 为任意给定的集合,则

$$|A_1\cup A_2|\leqslant|A_1|+|A_2|,$$

$$|A_1\cap A_2|\leqslant\min(|A_1|,|A_2|),$$

$$|A_1-A_2|\geqslant|A_1|-|A_2|,$$

$$|A_1\oplus A_2|=|A_1|+|A_2|-2|A_1\cap A_2|,$$

其中$\oplus$是集合运算中,不可兼的"或"(或称对称差).

定理 2(容斥原理) 对有限集合 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$

$$+\cdots+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|. \tag{1}$$

特别当 $n=2$ 时,有

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|.$$

班长将选学法语的学生记为 A,选学日语的学生记为 B,$A\cap B$ 是两科都选的学生,$\overline{A}\cap\overline{B}$是两科都不选的学生,$A\cup B$

是选其中一门或两门都选的所有学生.

由题意$|A|=7$, $|B|=5$,今要求$|\overline{A}\cap\overline{B}|$,因为$|\overline{A}\cap\overline{B}|+|A\cup B|=30$, $|A\cap B|=3$. 因此

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=30-|A\cup B|=30-(|A|+|B|-|A\cap B|)$$
$$=30-(7+5-3)=21.$$

容斥原理是计数中的一条重要原理,是西尔维斯特(J. J Sylvester)所创立. 在容斥原理中,若诸项两两不相交,即化为加法公式.

练习四十二

1. 求 1～250 之间能被 2,3,5 和 7 中任何一个数整除的整数个数.

2. 某校举办数学、物理、英语三科竞赛. 某班 30 个学生中,有 15 人参加数学竞赛,8 人参加物理竞赛,6 人参加英语竞赛,并且其中 3 人三科竞赛都参加了,问至少有多少人一科竞赛都没有参加?

3. 一个工厂里,已装配了 30 辆汽车. 可供选择的设备是收音机、空调器和白圈轮胎. 这 30 辆汽车中,15 辆有收音机,8 辆有空调器,6 辆是白圈轮胎,而这三种设备都具备的汽车有 3 辆. 求出这三种设备都不具备的汽车至少是多少辆?

四十三、衣帽间的小女孩

在一家大戏院衣帽间工作的女孩，把所有的对号牌都弄乱了，戏散后，她随便把帽子发给寄存帽子的观众．如果观众容忍了这种无礼，试问：一共有多少种发帽子的方式，使得没有一位观众领到自己原来的帽子？

在前面提到的容斥原理应用中，主要是对集合 A 进行不完全分组，但有些实际问题，我们从反面去考虑时就更为简洁和方便．这里，我们考虑对 $\overline{A}$(S 的余集)进行不完全分组的情形，这就有**逐步淘汰原理**．

设全集为 E 且 $\overline{A_i}=E-A_i$，则有

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n| &= |E|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n| \\ &= |E|-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j| \\ &\quad -\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k| \\ &\quad +\cdots+(-1)^n\left|\bigcap_{i\leqslant j\leqslant k}A_i\right|.\end{aligned}$$

逐步淘汰原理又称筛公式，因为它与数论中的筛法联系在一起．由逐步淘汰原理也可以推出容斥原理．

衣帽间小女孩问题是数学史上一个有名的问题，乍看起来数据不足，但却能得出具体结果，因而具有魅力．不仅如此，它还显示出所有的数之间的一种极有趣的关系，处理该问题的方法有几种．我们首先解决一个有趣且为一般的问题．

有甲、乙两副纸牌，各有 n 张编号自 1 至 n 的牌，把牌洗

过，然后配成 n 对，每对甲、乙牌各 1 张. 如果同一对的两张牌编号相同，就说有 1 个相合. 问

(1) 至少有 1 个相合的配牌方法有多少种?

(2) 没有相合的配牌方法有多少种?

我们设所有配牌方法的全体为 S，分别满足(1)，(2)的配牌方法的全体依次记为 A,B，则有 $S=A\cup B, A\cap B=\varnothing$.

(1) 把 A 分为 n 组，A_i：i 号牌相合的配牌方法的全体，$i=1,2,\cdots,n$. 显然 $A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$. A_i 中的配牌方法可如下得到：i 号牌相合，然后把乙牌的其余 $n-1$ 张牌在甲牌的 $1,2,\cdots,i-1,i+1,i+2,\cdots,n$ 上随意排列，放在一起配对，故有

$$|A_i|=(n-1)!,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

同理

$$|A_i\cap A_j|=(n-2)!,\quad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n;$$

$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=(n-3)!,\quad 1\leqslant i<j<k\leqslant n;$$

$$|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|=0!=1.$$

由容斥原理，有

$$\begin{aligned}|A|&=C_n^1(n-1)!-C_n^2(n-2)!+C_n^3(n-3)!\\&\quad-\cdots+(-1)^{n-1}C_n^n0!\\&=(n!)\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

(2) 由逐步淘汰原理，有

$$|B|=|S|-|A|,$$

而

$$|S|=n!,$$

故

$$|B|=(n!)\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n}\right).$$

该问题(1)是所谓耦合问题,问题(2)是所谓错位问题.显然衣帽间的小女孩问题正是我们的问题(2)中没有相合的配牌方法的种数.关于错位问题(又称更利问题),有一个有趣漂亮的结果.它的一般提法是这样的:如果集合$\{1,2,\cdots,n\}$的无重复的排列$a_1,a_2,\cdots,a_n$,满足条件$a_i\neq i(i=1,2,\cdots,n)$,则称之为排列$1,2,\cdots,n$的一个更利.我们用$D_n$来表示集合$\{1,2,\cdots,n\}$的所有更利的个数,则有以下定理.

设n是一个正整数,则有

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

当$n=1$时,不存在更利,故$D_1=0$;当$n=2$时,只有一个更利,即2,1,故$D_2=1$;当$n=3$时,有两个更利:2,3,1;3,1,2;故$D_3=2$;当$n=4$时,有九个更利:2,1,4,3;2,3,4,1;2,4,1,3;3,1,4,2;3,4,1,2;3,4,2,1;4,1,2,3;4,3,2,1;4,3,1,2;故$D_4=9$.还可以计算出

$$\begin{aligned}D_5&=5!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}\right)\\&=5!\left(\frac{3-1}{3!}+\frac{5-1}{5!}\right)=5\times4\times2+4=44,\\D_6&=6!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}\right)\\&=6!\left(\frac{3-1}{3!}+\frac{5-1}{5!}+\frac{1}{6!}\right)\\&=6\times5\times4\times2+6\times4+1\\&=240+24+1=265,\\D_7&=7!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\right)\\&=7!\left(\frac{3-1}{3!}+\frac{5-1}{5!}+\frac{7-1}{7!}\right)\\&=7\times6\times5\times4\times2+7\times6\times4+6\end{aligned}$$

$$=1680+168+6=1854,$$

$$\cdots\cdots,$$

又知道

$$e^{-1}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots,$$

于是

$$\frac{D_n}{n!}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}$$

$$=e^{-1}-(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}-(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+2)!}-\cdots,$$

从而得到

$$\left|\frac{D_n}{n!}-e^{-1}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)!}.$$

由上面的计算可知

$$\left|\frac{D_7}{7!}-e^{-1}\right|\leqslant\frac{1}{8!}=\frac{1}{40320}.$$

所以说，当 n 很大时，$\frac{D_n}{n!}$ 很接近 e^{-1}.

练习四十三

1. 2 到 120 中有多少个素数？

2. 求 1 到 10 000 之间，不能被 4，6，7 或 10 除尽的整数个数.

3. 求 1 到 10 000 之间的非完全平方和非完全立方的个数.

四十四、非降路径问题

某市区的街道，纵横交叉成矩形（如图 44-1）. 某人从原点(0,0)出发走向终点(m,n)，问非降路径可有多少种?

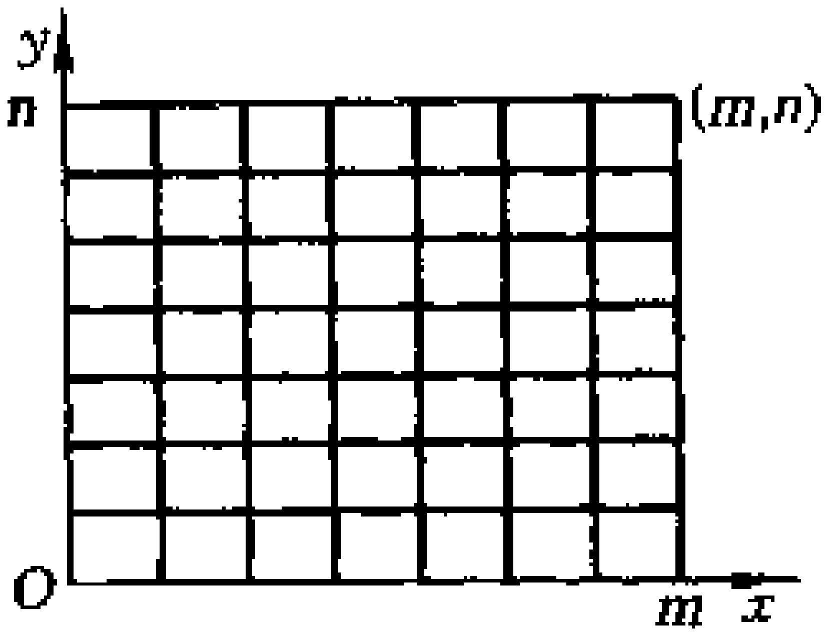


图 44-1

在前面的集合计数中，我们曾给出了加法原理，一般地可叙述为：如果进行甲过程有 m 种方法，进行乙过程有 n 种方法. 甲、乙两过程并行，则进行甲过程或乙过程的方法有 $m+n$ 种.

这是计数中的一个基本原理. 现在给出另一个基本原理——**乘法原理**：如果进行甲过程有 m 种方法，进行乙过程有 n 种方法，则进行甲过程后接着进行乙过程共有 $m\times n$ 种方法.

对这两个原理的最直接的应用就是我们所熟知的排列、组合问题. 需要注意的是这两个原理的条件的区别：若完成一件事所用的几个方案彼此之间是独立的，是“或”的关系，即选择每个方案中的每个方法都可单独地完成这件事，则应使用加法原理；若完成一件事要分若干步骤，每个步骤都不可缺少，是“与”的关系，即各步骤之间是相互联系着的，则应使用乘法原理. 由乘法原理可以推出我们所熟知的排列、组合公式.

全排列公式：$P_n=n!$.

选排列公式：

$$P_n^k=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$
$$=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

组合公式：

$$C_n^k=\frac{P_n^k}{k!}=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}.$$

此外，对于组合，我们还推出了几个基本的组合恒等式：

$$C_n^k=C_n^{n-k}, \tag{1}$$

$$C_n^k=C_{n-1}^k+C_{n-1}^{k-1}, \tag{2}$$

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n. \tag{3}$$

我们所提出的非降路径，指的是从(0,0)到(m,n)，不允许后退. 设从(0,0)点开始向水平方向前进一格为x，垂直向上走一格为y. 于是从(0,0)到(m,n)，水平方向共走m步，垂直方向要走n步，总共要走$m+n$步，一条非降路径对应一个由m个x和n个y的一个排列. 反之给了m个x和n个y的一个排列就唯一地确定了一条从(0,0)点到(m,n)点的非降路径. 所以从(0,0)点到(m,n)点的非降路径数等于m个x，n个y的排列数，即

$$C_{m+n}^m=\frac{(m+n)!}{m!\ n!}.$$

非降路径问题是一个典型的组合问题，许多组合问题都可以化成这种问题来求解，我们来看所熟知的一些组合恒等式的组合意义.

对于等式(1)可以写成更一般形式

$$C_{m+n}^m=C_{m+n}^n,$$

这说明从(0,0)点到(m,n)点的非降路径数等于从(0,0)点到(n,m)点的非降路径数. 事实上对任何一条从(0,0)点到

(m,n)点的非降路径(图 44-2),这条路径正是一条从$(0,0)$点到(n,m)点的非降路径.显然这种对应是一一的,这就证明了$C_{m+n}^{m}=C_{m+n}^{n}$.

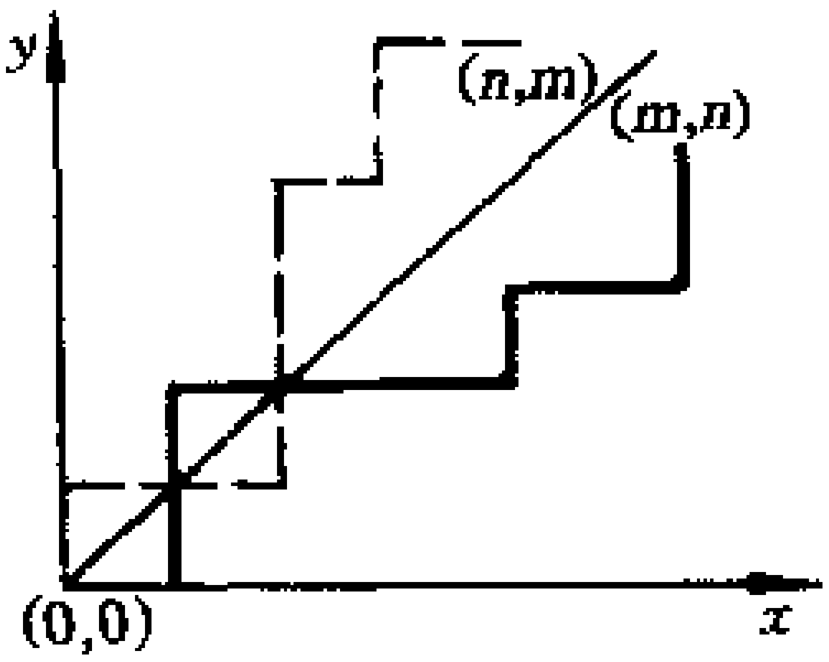


图 44-2

对于等式(2)可以写成更一般形式

$$C_{m+n}^{m}=C_{m+n-1}^{m-1}+C_{m+n-1}^{m},$$

公式左边是从$(0,0)$点到(m,n)点的非降路径数,由于这些路径不是经过$(m-1,n)$点就是经过$(m,n-1)$点到达(m,n)点(图 44-3).经过$(m-1,n)$点的路径数是C_{m+n-1}^{m},经过$(m,n-1)$点的路径数是C_{m+n-1}^{m-1},由加法原理,知等式成立.

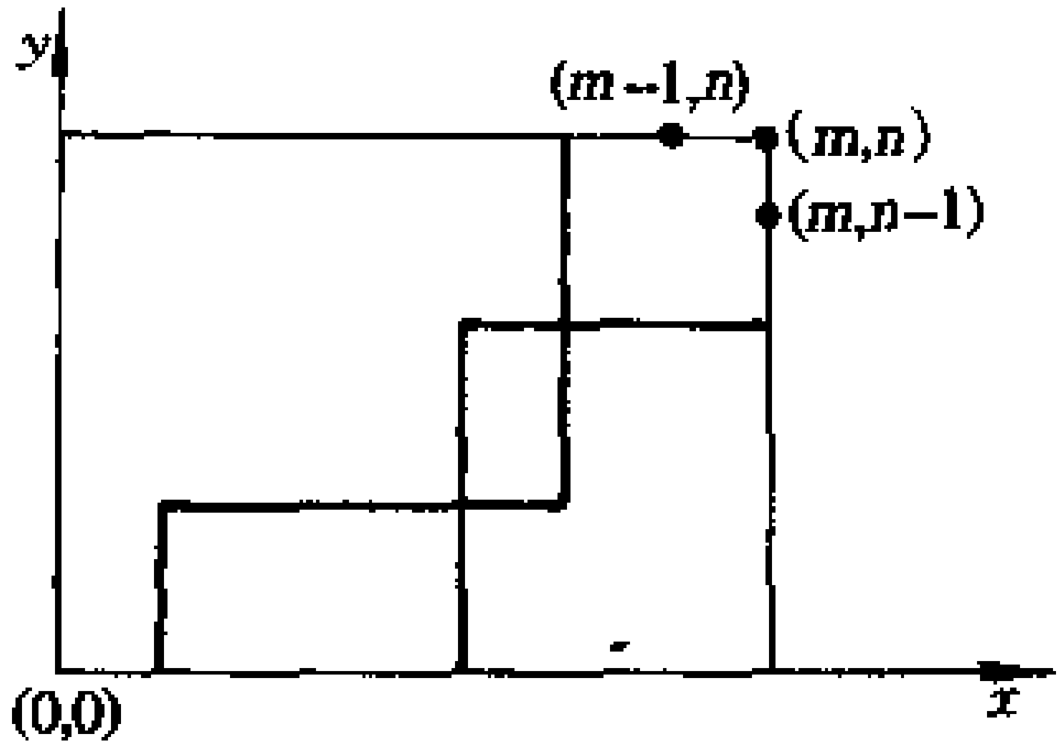


图 44-3

等式(3)是

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n,$$

先看等式左边,C_n^0 是从(0,0)点到(0,n)点的非降路径数,C_n^1 是从(0,0)点到(1,$n-1$)点的非降路径数,……,C_n^{n-1} 是从(0,0)点到($n-1$,1)点的非降路径数,C_n^n 是从(0,0)点到(n,0)点的非降路径数(图 44-4).而这所有的非降路径数之和就是从(0,0)点到斜边上的点的非降路径数之和.另一方面,从(0,0)点到斜边上任何一点的非降路径都是 n 步长,每一步是 x 或 y,有两种选择,由乘法原理,n 步的不同选择方法总数为 2^n.所以等式成立.还有其他的常用组合恒等式,我们不难用非降路径问题给出解释.

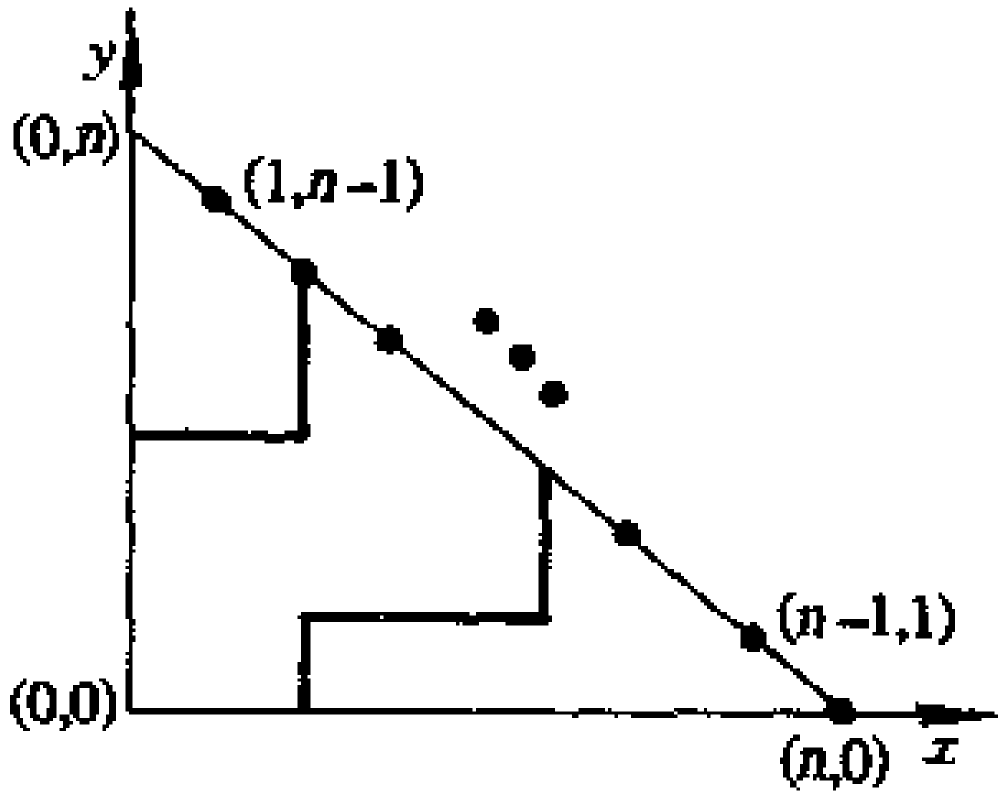


图 44-4

练习四十四

1. 从 0 到 9 这 10 个数字中,取出 5 个互不相同的数字,写成五位数,其中有多少个奇数?

2. 某保密室有 6 名工作人员,规定打开保密室时至少要有 3 个工作人员在场.为严格执行这项规定,至少应给保密室

配几把锁，至少应给每个工作人员发几把钥匙，才能使任意 2 人一定无法打开保密室，而任意 3 人一定可以打开保密室.

3. 求从(0,0)点到(n,n)点的除端点外不接触直线 $y=x$ 的非降路径数.

4. 求集合$\{1,2,\cdots,n\}$上的单调递增函数的个数.

四十五、$(a+b+c)^4$ 的展开式有多少项？其中 ab^2c 项的系数是多少？

二项式的正整数幂的展开式为

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^nb^n.$$

显然它有 $n+1$ 项，它的一般项为 $C_n^ra^{n-r}b^r$，即 $a^{n-r}b^r$ 项的系数为 C_n^r.

现在把二项展开式推广，为此介绍：

(1) 可重复排列 设 $M=\{n_i\cdot a_i|i=1,2,\cdots,k\}$ 为重集，其中 $i\neq j$ 时，$a_i\neq a_j$，并且 $n_1+n_2+\cdots+n_k\geqslant r$. 从重集 M 中取 r 个元素的一个有序配置叫做 M 的一个可重 r-排列. M 的全部可重 r-排列的个数记为 N，则当 $n_i\geqslant r$ 时有 $N=k^r$.

换句话说，从 k 个不同的元素中允许重复地取出 r 个元素的排列称为可重排列，其排列总数为 k^r. 例如，从 1,2,3 这三个元素中每次取两个的可重排列数为 3^2，它们是(1,1)，(1,2)，(1,3)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(3,1)，(3,2)，(3,3). 对如 $\{3\cdot a,2\cdot b\}$ 的全部可重 2-排列为

$$(a,a),(a,b),(b,a),(b,b).$$

记 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，那么 M 的全部可重的 n-排列数

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}=\frac{n!}{n_1!\ n_2!\ \cdots n_k!},$$

称它为可重的全排列. 这里 n_i 表示 a_i 在 M 中出现的次数，亦称 a_i 的**重数**.

(2) **可重组合** 设 $M=\{n_i \cdot a_i | i=1,2,\cdots,k\}$为重集，其中 $i\neq j$ 时有 $a_i\neq a_j$，且 $n_1+n_2+\cdots+n_k\geqslant r$. 从 M 中取出 r 个元素的子集称为 M 的一个可重 r-组合. 显然当 $n_i\geqslant r$ 时，重集 M 的全部可重 r-组合的个数为 C_{k+r-1}^r.

由于 $n_i\geqslant r$，故可设任一 a_j 的重数 $n_j=\infty$，并且令 $a_j=j$. 这样有 $M=\{\infty\cdot 1,\infty\cdot 2,\cdots,\infty\cdot k\}$，令 $S=\{1,2,\cdots,k,k+1,\cdots,k+r-1\}$. 现在我们证明，$M$ 的全部可重 r-组合数等于 S 的 r-组合数 C_{k+r-1}^r.

现在建立 M 的可重 r-组合与 S 的 r-组合之间的一一对应关系.

设$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$为 M 的一个可重 r-组合，并且不失一般性，$\alpha_1\leqslant\alpha_2\leqslant\cdots\leqslant\alpha_r$. 令

$$b_1=\alpha_1, b_2=\alpha_2+1, b_3=\alpha_3+2, \cdots, b_r=\alpha_r+r-1,$$

显然 $b_1<b_2<\cdots<b_r$，因 $\alpha_r\leqslant k$，所以对一切 b_i，均有 $1\leqslant b_i\leqslant k+r-1$，这说明$\{b_1,b_2,\cdots,b_r\}$是 S 的一个 r-组合. 进而，M 的两个不同的可重 r-组合$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$及$\{\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_r'\}$对应于同一个$\{b_1,b_2,\cdots,b_r\}$，因此 M 的可重 r-组合数$\leqslant C_{k+r-1}^r$.

另一方面，设$\{b_1,b_2,\cdots,b_r\}$是S 的一个 r-组合且 $b_1<b_2<\cdots<b_r$，则显然有 $i\leqslant b_i\leqslant k+i-1, i=1,2,\cdots,r$. 令 $\alpha_i=b_i-i+1, i=1,2,\cdots,r$，则 $1\leqslant\alpha_i\leqslant k$. 因此$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$是 M 的一个可重 r-组合，进面，S 的两个不同的 r-组合 $\{b_1,b_2,\cdots,b_r\}$及$\{b_1',b_2',\cdots,b_r'\}$不可能对应于同一个 M 的可重 r-组合$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$. 因此，$S$ 的 r-组合数 $C_{k+r-1}^r\leqslant M$ 的可重 r-组合数.

总结上述，即得 M 的可重 r-组合数为 C_{k+r-1}^r.

现在研究$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开式的系数. 众所周知，$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 表示 n 个$(x_1+x_2+\cdots+x_m)$的连乘积，把

$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 视为 m 个不同的元素，$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 展开式的一般项为 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$，而 $n_i\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{m}n_i=n$. 它表示 n_1 个 x_1，n_2 个 x_2，$\cdots$，n_m 个 x_m 连乘，它的系数可视为从集合 $M=\{n\cdot x_1,n\cdot x_2,\cdots,n\cdot x_m\}$ 中选取 n_1 个 x_1，n_2 个 x_2，$\cdots$，n_m 个 x_m 的组合数，即 $\binom{n}{n_1n_2\cdots n_m}$，因此

$$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_m}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}.$$

当 $x_1=x_2=\cdots=x_m=1$ 时，我们有

$$\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_m=n}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_m}=m^n.$$

另外，$(x_1+x_2+\cdots+x_m)^n$ 的展开式中有多少项？因为 $n_1+n_2+\cdots+n_m=n$，所以它的项数等于 M 的可重 n-组合数 C_{m+n-1}^{n}.

由上述得到的一般公式，可知 $(a+b+c)^4$ 展开式的项数为

$$C_{3+4-1}^{4}=C_6^4=C_6^2=15,$$

而 ab^2c 的系数为 $\binom{4}{1,2,1}=\frac{4!}{1!\ 2!\ 1!}=12.$

顺便介绍一下无重环排列问题.

从含有 n 个不同元素的集合 S 中，选取 $m(m\leqslant n)$ 个元素，依次排成一个环形，称为 S 的一个 m-环排列. 平面上的环排列（只能绕圆心旋转）又称为圆排列，空间上的环排列（除绕圆心旋转外，还可绕直径旋转 180°）又称为圈排列. 如项链排列. 两个圆排列经过旋转后相重合，则认为这两个圆排列是相同的. 因此，n 个元素的 m-圆排列的个数为

$$\frac{P_n^m}{m}=\frac{n!}{m\cdot(n-m)!}.$$

当 $m=n$ 时，其圆排列个数是$(n-1)!$. n 个元素的 m-圈排列个数是

$$\frac{P_n^m}{2m}=\frac{n!}{2m\cdot(n-m)!}.$$

练习四十五

1. 有男 $n+m$ 人，女 m 人$(n,m\geqslant 1)$. 问：

(1) 这 $n+2m$ 人都排成一列，女人不相邻，首尾都是男人，有多少种排法？

(2) 这 $n+2m$ 人围成一圈，女人不相邻，有多少种排法？

2. 有 8 个队比赛，采用下面的淘汰制(图 45-1)

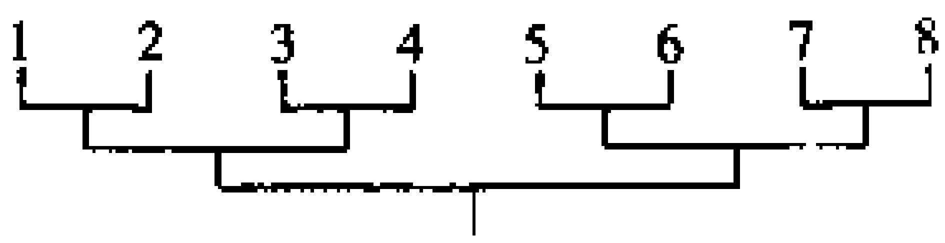


图 45-1

问在赛前抽签时，实际上可以得到多少种不同的安排表？

3. 有 10 个字母 A,A,B,B,C,C,D,D,E,E 的排列中，求相同字母不相邻的排列个数.

4. 12 个不同的球分放进 3 只不同的盒里，每盒不空且只能放偶数个，求放法种数.

四十六、猴子分苹果问题

海滩上有一堆苹果，是五个猴子的财产，它们要平均分配．第一个猴子来了，把苹果分成五堆，五堆一样多，还剩一个，它把剩下的一个扔到海里，自己拿走了其中的一堆；第二个猴子来了，它又把苹果分成五堆，又多了一个，它又把这个扔到海里，自己拿走了一堆．以后每个猴子都如此办理，问原来有多少苹果，最后至少有多少苹果？

对一个复杂的问题，有时很难得到结果，但只要把问题分成若干步，找出每两步之间的关系——递推关系，最终就可能达到目的．

给定数列$\{a_n\}$，如果存在一个把a_n与前面若干项a_{n-k}，a_{n-k+1}，…，a_{n-1}联系起来的方程

$$\Phi(a_{n-k},a_{n-k+1},\cdots,a_{n-1},a_n)=0,$$

且当$n\geqslant n_0$时都成立，则称它为数列$\{a_n\}$的**递推方程**(或递归方程)，从递推方程解出**通项**a_n的明显表达式

$$a_n=\varphi(a_{n-k},a_{n-k+1},\cdots,a_{n-1}),$$

称为数列$\{a_n\}$的**递推关系式或递推公式**．数列$\{a_n\}$前k项a_1，a_2，…，a_k的值，称为递推方程的**初始条件**．

猴子分苹果问题，关键是找出每个猴子得到苹果数的递推关系．为此，设五个猴子得到的苹果数分别为a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，并设原有苹果A个，则可得下列诸递推关系：

$$A=5a_1+1,\quad 4a_1=5a_2+1,\quad 4a_2=5a_3+1,$$

$$4a_3=5a_4+1, \quad 4a_4=5a_5+1.$$

假定先设有猴子 n 个，则有

$$4a_{n-1}=5a_n+1,$$

又 $a_1=\dfrac{A-1}{5}$，于是可得下面递推数列

$$a_n=\frac{4^{n-1}}{5^n}(A+4)-1.$$

当 $n=5$ 时，就有

$$a_5=\frac{4^4}{5^5}(A+4)-1.$$

又因 a_5 为整数，而 4^4 与 5^5 互素，所以 $A+4$ 应能被 5^5 整除，即 A 至少为 $A+4=5^5$. 从而解出原苹果数 $A=3121$. 所以

$$\begin{aligned} a_5 &= \frac{4^4}{5^5}(A+4)-1 \\ &= -1+\frac{4^4}{5^5}(3121+4)=255. \end{aligned}$$

这样，最后至少有苹果数 $255\times 4=1020$，即原来至少有 3121 个苹果，最后至少有 1020 个苹果.

寻找数列各项间的递推关系，要根据问题的要求灵活地处理，如求自然数平方和 $1^2+2^2+\cdots+n^2$ 的问题，我们令 $f(k)=k^3$，则

$$f(k+1)-f(k)=(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1.$$

于是由此递推关系，可得

$$\begin{aligned} f(2)-f(1)&=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1, \\ f(3)-f(2)&=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1, \\ f(4)-f(3)&=3\cdot 3^2+3\cdot 3+1, \\ &\cdots\cdots \\ f(n+1)-f(n)&=3n^2+3n+1. \end{aligned}$$

将上面 n 个等式相加，有

$$f(n+1)-f(1)=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

即

$$(n+1)^3-1^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+n.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{(n+1)^3-1-\frac{3n(n+1)}{2}-n}{3}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

即

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

这就是我们在初等数学中推导这个结果的一个递推方法，注意，这里我们用了 n 个自然数之和 $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$ 的结果.

练习四十六

1. 利用递推方法求 $1^3+2^3+\cdots+n^3$.

2. 求 $1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$.

3. 求证：$\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 4\alpha}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n\alpha}=\cot\alpha-\cot 2^n\alpha$.

4. m 与 n 是任意的非负整数，试证：$\frac{(2m)!\ (2n)!}{m!\ n!\ (m+n)!}$ 是一整数(1972，IMO).

四十七、世界末日问题

传说在印度佛教圣地贝拿勒斯圣庙里，安放着一个黄铜板，板上插着三根宝石针，其中一根宝石针从下到上插放着由大到小的 64 片有孔的金片，昼夜都有一个值班的僧侣，按下列法则移动金片：一次只能移动一片，小片永远要放在大片的上面. 传说当时有人声称：当 64 片金片都从一根宝石针上取下，移到另一根宝石针上时，世界就将在一声霹雳声中毁灭——世界末日到来.

这个传说提出了一个有趣的数学问题：64 片金片从一根宝石针上移至另一根宝石针上，究竟要移动多少次？

这也是个递推问题. 一般来说，递推问题主要是如何建立递推公式和如何由递推公式及初始条件求通项的值. 我们先考察一个例子.

设数列 $\{a_n\}$ 中，给定初始条件及递推公式

$$\begin{cases} a_1=3, & (1) \\ 2a_{n+1}=a_n+6, & (2) \end{cases}$$

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

由(2)得

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+3, \tag{3}$$

由(3)得

$$a_n=\frac{1}{2}a_{n-1}+3, \tag{4}$$

(3)－(4)，得

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1}). \tag{5}$$

由(5)知数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以$\frac{1}{2}$为公比，以 a_2-a_1 为首项的等比数列.

设 $b_n=a_{n+1}-a_n$，因 $a_1=3$，$a_2=\frac{a_1+6}{2}=\frac{9}{2}$，$b_1=a_2-a_1=\frac{3}{2}$，所以 $b_n=b_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$，即

$$a_{n+1}-a_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n. \tag{6}$$

把(3)代入(6)得

$$\left(\frac{1}{2}a_n+3\right)-a_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

解此式可得

$$a_n=6-6\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

即为所求的通项公式.

我们也可以这样解. 在(5)式中，设 $b_n=a_{n+1}-a_n$，则数列$\{b_n\}$是以 1/2 为公比、以 b_1 为首项的等比数列，其中

$$b_1=a_2-a_1=3/2,$$

这样由(5)式可得

$$a_3-a_2=\frac{1}{2}b_1,$$

$$a_4-a_3=\frac{1}{2}b_2,$$

$$a_5-a_4=\frac{1}{2}b_3,$$

……

$$a_n-a_{n-1}=\frac{1}{2}b_{n-2}.$$

把上面 $n-2$ 个式子相加，得

$$a_n-a_2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2}b_k. \tag{7}$$

由等比级数求和公式知

$$\sum_{k=1}^{n-2}b_k=3-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}.$$

所以

$$a_n=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\left[3-3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]=6-6\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

此例类型的递归数列，其特征是

$$\begin{cases}a_1=a, & (1')\\ a_{n+1}=pa_n+q\ (p,q\ 为常数), & (2')\end{cases}$$

求解方法的共同点是：由数列 $\{a_n\}$ 的每相邻两项之差，组成新数列 $\{b_n\}$，我们称数列 $\{b_n\}$ 为原数列 $\{a_n\}$ 的**阶差数列**. 只要 $\{b_n\}$ 可求，则可得

$$a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}b_k, \tag{3'}$$

其中

$$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1}).$$

这种解法称**阶差法**.

如果 n 为某一个定常数，如 $n=100$，则由递推公式求通项 a_{100} 的方法可以用迭代法，步步代入，步步推进；也可以用取和法，对递推公式两边分别取和. 一般说来，形如 $a_n=a_{n-1}+f(n)$ 的递推公式都可以采用两边取和的方法求通项的值.

面对形如 $a_n=f(n)a_{n-1}$ 的递推公式，仿照上例的分析，对此形式的递推公式，都可以采用等式两边分别取乘积的方法来求出通项 a_n 的值.

在世界末日问题中，要把 n 片金片按由大到小的顺序套在另一个宝石针上，必须先将上面的 $n-1$ 片金片按由大到小的顺序套在另一根宝石针上，然后将最后一片金片套在剩余的一根宝石针上，再将那 $n-1$ 片金片按由大到小的顺序套在这根针上.

设将 n 片金片按由大到小的顺序套在另一根针上需要移动的次数为 a_n，显然有递归关系：

$$\begin{cases} a_1=1, & (8) \\ a_n=2a_{n-1}+1. & (9) \end{cases}$$

由(9)得

$$a_{n+1}=2a_n+1. \tag{10}$$

(10)－(9)可得

$$a_{n+1}-a_n=2(a_n-a_{n-1}). \tag{11}$$

于是由前面的结论，可得

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k,$$

而

$$\sum_{k=1}^{n-1}b_k=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=2^n-2,$$

所以

$$a_n=1+(2^n-2)=2^n-1.$$

当 $n=64$ 时，$a_{64}=2^{64}-1$.

粗略计算一下，a_{64}是一个相当大的数，假设每移动一次需要一秒钟，64 片金片从一根宝石针移到另一根宝石针上，大约需要 5800 亿年.

练习四十七

1. 平面上有 100 个圆，任意两圆交于两点，任意三圆不

共点. 这 100 个圆把平面分成多少块不相重叠的区域?

2. 有 30 个箱子,编号为 1,2,…,30,各配一把钥匙,30 把钥匙互不相同,每个箱子放进一把钥匙,锁好. 现撬开 1,2 号箱,取出钥匙去开别的箱子,再取出钥匙又去开别的箱子,如最终能把箱子全打开,则说是一种好的放钥匙的方法. 求好的放法种数.

3. m 个人($m \geqslant 2$)互相传球,接球后即传给别人. 由甲发球,并把它当作第 1 次传球. 求经过 n 次传球后,球仍回到发球人甲手中的传球方式种数 a_n.

四十八、斐波那契数列

关于斐波那契数列的问题是一个古老有趣的数学问题，这是在 1202 年他所写的一本数学书《珠算的书》中所提出的兔子生兔子的问题.

假设有一对成年兔，放于围栏中，每个月可以生下一对小兔，而小兔在出生第二个月便可以再生一对小兔. 问：这样一年后围栏中共可多出多少对兔子？这里假定每产一对兔子必须是一雌一雄且没有死亡.

根据题意，我们可分析列表(见表 48.1)如下：

表 48.1

月　份	0	1	2	3	4	5	6	7	…
大兔	0	1	1	2	3	5	8	13	
小兔	1	0	1	1	2	3	5	8	
总对数	1	1	2	3	5	8	13	21	…

对于 $n=1,2,\cdots$，令 F_n 表示第 n 个月开始时，兔子的对数. 显然有 $F_1=1, F_2=2$. 在第 n 个月的开始，那些第 $n-1$ 个月初已经在围栏中的兔子仍然存在，而且每对在第 $n-2$ 个月初就存在的兔子将在第 $n-1$ 个月生出一对小兔来，所以有

$$\begin{cases} F_n=F_{n-1}+F_{n-2} (n\geqslant 3, n \text{ 为整数}), \\ F_1=1, F_2=2. \end{cases}$$

这是一个带有初值的递推关系，如果我们规定 $F_0=1$，则上述关系变为

$$\begin{cases}F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 2,n\text{ 为整数}),\\ F_0=1,F_1=1.\end{cases}\tag{1}$$

满足(1)式的数列就叫做**斐波那契数列**，而它的项就叫做**斐波那契数**.

由递推方程(1)可以推出斐波那契数列是：1，1，2，3，5，8，13，21，34，56，…

斐波那契数常出现在组合计数中，例如，用多米诺牌(可以看作一个 2×1 大小的方格)完全覆盖一个 $n\times 2$ 棋盘，覆盖的方案数等于斐波那契数 F_n. 如图 48-1 所示，如果用一个牌

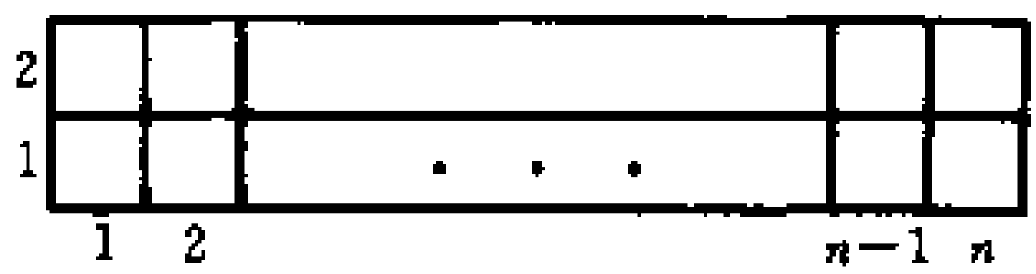


图 48-1

覆盖第一列的两个方格，那么剩下的是$(n-1)\times 2$ 棋盘的覆盖问题，如果用两个牌覆盖第一行的前两个格和第二行的前两个格，那么剩下的是$(n-2)\times 2$ 棋盘的覆盖问题. 由加法原理，这两类覆盖方案之和就是 $n\times 2$ 棋盘的覆盖方案数. 令 G_n 表示 $n\times 2$ 棋盘的覆盖方案数，则有

$$\begin{cases}G_n=G_{n-1}+G_{n-2}(n\geqslant 3,n\text{ 为整数}),\\ G_1=1,G_2=2.\end{cases}$$

这和斐波那契数的递推关系完全一样. 为了求斐波那契数递推关系，我们介绍一类最常见的、用途最广的递推方程——常系数线性递推方程的解法. 这类方程的解法，完全和微分方程中常系数线性数分方程的代数解法类似.

设有数列$\{f(n)\,|\,n=0,1,2,\cdots\}$，如果存在 k 个常数 a_1，$a_2,\cdots,a_k,a_k\neq 0$，使得

$$f(n+k)+a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+\cdots$$
$$+a_kf(n)=q(n), \tag{2}$$

其中 $q(n)$是定义在非负整数集合 N_0 上的函数，则称(2)式为数列$\{f(n)\}$的 **k 阶常系数线性递推方程**. 如果 $q(n)\equiv 0$，则(2)称为**齐次的**. 否则称为**非齐次的**. 如果 N_0 上的函数 $f(n)$ 满足方程(2)，则 $f(n)$称为递推方程(2)的**解**.

当 $k=2$ 时的齐次递推方程是

$$f(n+2)+a_1f(n+1)+a_2f(n)=0. \tag{3}$$

相应地，二次方程

$$x^2+a_1x+a_2=0 \tag{4}$$

称为齐次方程(3)的**特征方程**，其解称为(3)的**特征根**.

关于二阶齐次递推方程(3)的通解定理是：设 α_1,α_2 是二阶齐次方程(4)的两个特征根，则函数 $f(n)$是递推方程(4)的解的充分必要条件为 $f(n)$可表为如下形式：

当 $\alpha_1\neq\alpha_2$ 时，　$f(n)=\beta_1\alpha_1^n+\beta_2\alpha_2^n$，

当 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 时，　$f(n)=(\beta_1+\beta_2 n)\alpha^n$.

其中 β_1,β_2 是常数(且可由初始条件 $f(0),f(1)$唯一确定).

这样求满足初始条件的二阶齐次递推方程的解 $f(n)$，可采用如下步骤：

(1) 求特征根 α_1,α_2，并写出通解：若 $\alpha_1\neq\alpha_2$，则 $f(n)=\beta_1\alpha_1^n+\beta_2\alpha_2^n$；若 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$，则 $f(n)=(\beta_1+\beta_2 n)\alpha^n$.

(2) 把初始条件代入通解形式，得关于 β_1,β_2 的线性方程组，并解出 β_1,β_2.

现在，我们解关于斐波那契数的递推关系

$$\begin{cases}F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\\ F_0=1,F_1=1.\end{cases}$$

这个递推关系的特征方程是 $x^2-x-1=0$，特征根是

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

所以通解是

$$F_n=\beta_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

代入初始条件确定 β_1,β_2，得方程组

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2=1,\\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\beta_1+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\beta_2=1.\end{cases}$$

解这个方程组得

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \beta_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

所以原递推关系的解是

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1},$$

$$n=0,1,\cdots.$$

这个结果告诉我们一个有趣的事实，虽然 F_n 都是正整数，可是它们却由一些无理数表示出来了. 此外，斐波那契数列有许多重要、有趣的性质和应用，特别值得一提的是优选法中的分数法正是基于此数列的. 另外，在大自然界中，植物的叶序、菠萝中的鳞状花萼、蜜蜂进蜂房的方式数、艺术上的美点——黄金点等都可与斐波那契数列联系起来，真是奇妙、神秘!

练习四十八

1. 用字母 a,b 和 c 组成长度是 n 的字，如果要求没有两

个 a 相邻，问这样的字有多少个？

2. 核反应堆中有 α 和 β 两种粒子，每秒钟内一个 α 粒子分裂成三个 β 粒子，而一个 β 粒子分裂成一个 α 粒子和两个 β 粒子. 若在时刻 $t=0$ 反应堆中只有一个 α 粒子，问 $t=100$ s 时反应堆中将有多少个 α 粒子？多少个 β 粒子？共有多少个粒子？

3. 有 n 枚相同的棋子，甲、乙两人轮流取子，每次可取 1 至 2 枚，取完为止. 求首尾两次都是甲取子的取法种数 $f(n)$.

四十九、有限种砝码称重问题

实验室里有 1 g 的砝码 2 枚，2 g 的 3 枚，4 g 的 2 枚，问能称出哪些重量？各有几种方案？

表面上看，这是一个容易解决的问题，但要完整、准确、不乱地回答这个问题，还需寻找一个行之有效的方法.

下面先介绍一下母函数的概念.

定义 对于序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$，构造一函数

$$G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots,$$

称函数 $G(x)$ 是序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 的**母函数**.

例如，$(1+x)^n$ 是序列 $C_n^0,C_n^1,C_n^2,\cdots,C_n^n$ 的母函数.

如果已知序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$，则对应的母函数 $G(x)$ 便可根据定义给出. 反之，如果已求得序列的母函数 $G(x)$，则该序列也随之而确定. 序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots$ 可记为 $\{a_n\}$.

利用母函数的概念，可以解决组合学、概率统计等方面的许多问题. 这种方法（母函数方法）的基本思想是把数列和幂级数联系起来，使得数列之间的相互结合关系变成幂级数之间的运算关系，最后根据幂级数的形式来确定数列的构造.

我们回到前面提出的问题上. 易知利用砝码和砝码的叠加可称出各种不同的重量，如果我们用 x^k 表示重量为 k 的砝码，利用多项式乘法法则，便可求得相应的母函数

$$\begin{aligned}G(x)&=(1+x+x^2)\cdot(1+x^2+x^4+x^6)\cdot(1+x^4+x^8)\\&=1+x+2x^2+x^3+3x^4+2x^5+4x^6+2x^7+4x^8+\end{aligned}$$

$$2x^9+4x^{10}+2x^{11}+3x^{12}+x^{13}+2x^{14}+x^{15}+x^{16}.$$

从求得的母函数可知，利用所给出的砝码能称出 1 g 到 16 g 的重量，系数便是方案数. 例如，$4x^6$ 这一项，表示称出 6 g 的重量有 4 种方案，即

$$6=1+1+2+2;\quad 6=1+1+4;$$
$$6=2+2+2;\quad 6=2+4.$$

类似地，可解决下面类型的问题，如求用 1 分、2 分、3 分面值的邮票贴出不同数值的方案数.

因邮票允许重复，故相应的母函数为

$$\begin{aligned}G(x)&=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\\&=1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5+7x^6+\cdots,\end{aligned}$$

其中的指数表示用邮票贴出的数值，系数表示贴出这种数值的方案数.

下面引进拆分数的概念.

把一个整数进行拆分，即把整数拆分成若干整数的和，这相当于把 n 个无区别的球放到 n 个无区别的盒子，盒子允许空着，也允许放多于一个球.

整数拆分成若干整数的和，办法不一，不同拆分法的总数叫做拆分数.

例如，在开始提出的称重问题中，称出 6 g 的方案有 4 种，这个 4 就是 6 用 2 个 1、3 个 2、2 个 4 进行拆分的拆分数. 再看一个例题.

求整数 n 用 $1,2,3,\cdots,m$ 并允许重复地进行拆分的拆分数.

因 $1,2,3,\cdots,m$ 允许重复，则其母函数为

$$\begin{aligned}G(x)&=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)\cdots(1+x^m+x^{2m}+\cdots)\\&=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{1-x^m}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}.$$

$\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$的 x^n 项系数即为 n 用 1,2,3,…,m 并允许重复地进行拆分的拆分数.

练习四十九

1. 设有 1 g、2 g、3 g、4 g 的砝码各一枚,问能称出哪几种重量? 各有几种方案?

2. 设有 1 g 的砝码 3 枚,2 g 的 4 枚,4 g 的 2 枚,问能称出哪些重量? 各有几种方案?

3. 有蓝球两只,白球、绿球各一只,试求有多少种不同的组合方案?

4. 在 8 个男同志和 5 个女同志中,要组织一个由数目为偶数的男同志和数目不少于 2 的女同志组成的小组,试求有多少种组成方式?

五十、十八级台阶

问题：欲登上第十八级台阶，如果规定每步只能跨上一级或两级，共有多少种不同的走法？

这仍是斐波那契数列问题.在前面的“兔子生兔子的问题”中，求数列通项公式用的是常系数线性递推方程的解法，在这个十八级台阶的问题上，我们换一种方法——母函数方法.

登上第一级台阶，只有一种方法；登上第二级台阶有两种方法；登上第三级台阶则有三种方法.

设 F_n 表示登上第 n 级台阶的走法数，$n=1,2,\cdots$. 因为登上第 n 级台阶，他的最后一步可以从第 $n-2$ 级跨两级，也可以从第 $n-1$ 级跨一级而达到，所以有

$$\begin{cases} F_n=F_{n-1}+F_{n-2}(n\geqslant 3,n\text{ 为整数}), \\ F_1=1,F_2=2. \end{cases}$$

这是一个带有初值的递推关系.由这个递推关系可依次得到 $1,2,3,5,8,13,21,\cdots$.

如果规定 $F_0=1$，则递推关系中的 $n\geqslant 3$ 可改为 $n\geqslant 2$. 我们便得到斐波那契数列 $1,1,2,3,5,8,13,21,\cdots$.

下面我们用母函数法求通项公式.

设数列 $\{F_n\}$ 的母函数为 $G(x)$，则

$$\begin{aligned} G(x)&=F_0+F_1x+F_2x^2+\cdots+F_nx^n+\cdots \\ &=1+x+(F_1+F_0)x^2+\cdots+(F_{n-1}+F_{n-2})x^n+\cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=1+x+F_1x^2+F_0x^2+F_2x^3+F_1x^3+\cdots \\
&\quad +F_{n-1}x^n+F_{n-2}x^n+\cdots \\
&=1+(x+F_1x^2+F_2x^3+\cdots+F_{n-1}x^n+\cdots) \\
&\quad +(F_0x^2+F_1x^3+\cdots+F_{n-2}x^n+\cdots) \\
&=1+x(1+F_1x+F_2x^2+\cdots+F_{n-1}x^{n-1}+\cdots) \\
&\quad +x^2(F_0+F_1x+F_2x^2+\cdots+F_{n-2}x^{n-2}+\cdots) \\
&=1+xG(x)+x^2G(x) \\
&=1+(x+x^2)G(x).
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
G(x)&=\frac{1}{1-x-x^2} \\
&=\frac{-1}{\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)} \\
&=\frac{A}{x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+\frac{B}{x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\
&=\frac{A\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+B\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}.
\end{aligned}
$$

由

$$
\begin{cases}
A+B=0, \\
\dfrac{A(1+\sqrt{5})}{2}+\dfrac{B(1-\sqrt{5})}{2}=-1,
\end{cases}
$$

得

$$
\begin{cases}
A=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \\
B=\dfrac{1}{\sqrt{5}}.
\end{cases}
$$

所以

$$G(x)=\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\frac{-2}{1-\sqrt{5}}}{1-\left(-\frac{2}{1-\sqrt{5}}x\right)}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}{1-\left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}x\right)}.$$

因为

$$\frac{-2}{1-\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad \frac{-2}{1+\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

所以

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\left[1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^nx^n+\cdots\right]$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\cdot\left[1+\frac{1-\sqrt{5}}{2}x+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2x^2\right.$$

$$+\cdots+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n+\cdots\Big].$$

由此得

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}.$$

所以登上第十八级台阶，按要求共有 F_{18}种不同的走法，

$$F_{18}=4181.$$

练 习 五 十

在数轴上将点 1，2，3，…，n 涂成黄色或蓝色，但不允许相邻的两点都涂蓝色，共有多少种不同的着色方法？

五十一、斯特林(Stirling)数

问题：红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的三个盒子里(不允许空盒)，有多少种不同的方案？

斯特林数有两类，这里只讨论第二类.

定义 n 个有区别的球放到 m 个相同的盒子中，要求无一空盒，其不同的方案数称为第二类斯特林数，记为$S(n,m)$.

定理 1 第二类斯特林数 $S(n,k)$有以下性质：

(1) $S(n,0)=0$; (2) $S(n,1)=1$;

(3) $S(n,2)=2^{n-1}-1$; (4) $S(n,n-1)=C_n^2$;

(5) $S(n,n)=1$.

证明 公式(1),(2),(5)是显然的，只证(3),(4).

(3) 设有 n 个有区别的球 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，我们从中取出一个球，如取球 a_1，则剩下的 $n-1$ 个球，每一个都有与球 a_1 同盒，或不与球 a_1 同盒两种情况. 因要求不能有空盒，所以要排除这 $n-1$ 个球与球 a_1 都同盒的情况，故实际上只有 $2^{n-1}-1$种方案，即 $S(n,2)=2^{n-1}-1$.

(4) n 个球放到 $n-1$ 个盒子里，要求无一空盒，故恰有一盒放两个球. 所以问题转化为求从 n 个有区别的球中取 2 个的组合数，即

$$S(n,n-1)=C_n^2.$$

定理 2 第二类斯特林数满足下面的递推关系，即

$$S(n,m)=mS(n-1,m)+S(n-1,m-1),$$

其中 $n>1, m\geqslant 1$.

证明 设有 n 个有区别的球 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$，从中取出一个球设为 a_1. 现分两类情况：

(1) a_1 独占一盒，其方案数为 $S(n-1, m-1)$；

(2) a_1 不独占一盒，这相当于先把剩下的 $n-1$ 个球放到 m 个盒子且无空盒，共有 $S(n-1, m)$ 种不同的方案，然后将球 a_1 放进其中一盒，因为有 m 个盒子，所以球 a_1 不独占一盒的方案数应为 $mS(n-1, m)$.

根据加法法则有

$$S(n, m)=S(n-1, m-1)+mS(n-1, m).$$

证毕.

现在我们可以解决开始提的问题了.

根据定理 2，有

$$\begin{aligned} S(5,3) &= S(4,2)+3S(4,3) \\ &= (2^{4-1}-1)+3C_4^2 \\ &= 7+3\times 6=25. \end{aligned}$$

故红、黄、蓝、白、绿五个球放到无区别的三个盒子里（不允许空盒）共有 25 种不同的方案.

n 个球放到 m 个盒子里，按着球和盒子是否有区别，是否允许有空盒，可有 8(即 2^3)种状态，其方案数如下：

(1) 球有区别，盒子有区别，有空盒. 不同的方案数为 m^n.

(2) 球有区别，盒子有区别，无空盒. 不同的方案数为 $m!\,S(n, m)$（先不考虑盒子有区别得 $S(n, m)$，然后将 m 个盒子进行全排列）.

(3) 球有区别，盒子无区别，有空盒. 当 $n\geqslant m$ 时，其方案数为：$S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,m)$；当 $n\leqslant m$ 时，其方案

数为：$S(n,1)+S(n,2)+\cdots+S(n,n)$.

(4) 球有区别，盒子无区别，无空盒. 不同的方案数为 $S(n,m)$.

(5) 球无区别，盒子有区别，有空盒. 不同的方案数为 C_{n+m-1}^{n}. 这相当于 m 个有区别的元素取 n 个做允许重复的组合.

(6) 球无区别，盒子有区别，无空盒. 不同的方案数为：$C_{m+(n-m)-1}^{n-m}=C_{n-1}^{n-m}=C_{n-1}^{m-1}$. 这相当于下面的情况：先取 m 个球每盒一个，剩下的 $n-m$ 个无区别的球放到有区别的 m 个盒子中，这时可按(5)去处理，故不同的方案数为 $C_{(n-m)+m-1}^{n-m}$.

(7) 球无区别，盒子无区别，有空盒. 不同的方案数为方程 $G(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ 的 x^n 项的系数. 这相当于 n 用 $1,2,3,\cdots,m$ 并允许重复进行拆分的拆分数.

(8) 球无区别，盒子无区别，无空盒. 不同的方案数为方程 $G(x)=\dfrac{x^m}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$ 的 x^n 项的系数. 这相当于先取 m 个球放到 m 个盒子，每盒一个球，剩下的 $n-m$ 个球按前面办法处理.

练习五十一

1. 有大小不同的 5 条鱼放到无区别的两个水缸里(不允许有空的)，有多少种不同的放法?

2. 把 5 个人分配到 2 个单位去，每个单位至少要分去 1 人，有多少种不同的分法?

3. 把 3 个人分配到 2 个单位去，允许 3 个人到 1 个单位，有多少种不同的分法?

五十二、稳操胜券的办法

这是历史上的一个难题. 参加游戏的两个对手 A 和 B，在他们面前的桌上有几堆分开的硬币（或火柴棍、围棋子等），每堆硬币的数目是任意的. 双方轮流从任意一堆（只许一堆）拿走一枚或几枚硬币（也可把整堆取走），直到把硬币完全取完为止. 谁最后一个取完，谁就算胜利（或规定为失败）.

这个看似很简单的游戏，却含有巧妙的数学原理，如果不懂这个数学原理，那只有碰运气了. 下面我们来分析这个游戏的巧妙之处.

我们首先从最简单的情况着手分析：如果轮到 A 取硬币时只剩下一堆，他全部取走就胜利了. 我们把只剩一堆硬币的情况称为有利状态，记作(n)，n 为硬币数. 又如果轮到 A 取时剩下两堆，而且每一堆只剩下一枚，显然 B 为胜者，对 A 来讲此情况是不利状态，记作$(1,1)$. 又如果只剩两堆：一堆有两枚，另一堆有一枚. A 只要从有两枚的堆中取一枚，就置 B 于不利状态，结果 A 胜. 把此有利状态记为$(2,1)$. 同样道理，状态$(n,1)$，$n\geqslant 2$ 对 A 讲，也是有利状态，因为只要 A 从 n 中取走 $n-1$ 枚就置 B 于不利状态$(1,1)$. 如果只剩两堆中各有两枚，即$(2,2)$，仍假定由 A 来取，不难分析到$(2,2)$也是不利状态. 至此我们可以总结出一条规律：当硬币为两堆时，即(n,m)时，如果 $n=m$，则对先取者 A 来讲是一个不利状态；如 $m\neq n$，则是有利状态. 即两堆相等时，先取者必败，两堆不相等时，先取者必胜. 要想稳操胜券，关键是置对方于不利状态.

当硬币堆数多于两堆时，判断是有利状态还是不利状态就比较复杂了．例如我们想判断(1，2，3)状态是有利状态还是不利状态，也是轮到由 A 来取，他如果在第一堆里取，只能取唯一的一枚，那么余下的(2，3)就是对 B 有利状态．如果 A 在第二堆里取：当他取两枚时，B 又面临(1，3)有利状态；当他取走一枚时，则 B 面临(1，1，3)，B 把第三堆全部取走，那么余下的(1，1)对 A 就是不利状态，从而 A 将失败．如果 A 在第三堆里去取，如果 A 取走三枚，则余下的为(1，2)是对 B 有利状态；如果 A 只取两枚时，余下(1，2，1)，B 只需把第二堆里的两枚全取走，而置 A 于(1，1)不利状态；当 A 在第三堆里只取走一枚，余下的为(1，2，2)，而 B 只要取走第一堆的唯一一枚，就可置 A 于(2，2)不利状态，从而 A 也失败．总之(1，2，3)是一个不利状态．如果三堆硬币的硬币数较多，或者堆数也较多，从理论上讲可以分析出有利状态还是不利状态，但花费的时间更多且易搞错．

我们可以用“二进制”去寻求简单而方便的判别方法．

为了方便，我们把二进制数从低位到高位依次称为 2^0 位、2^1 位、2^2 位、2^3 位、…．首先，我们把各堆硬币的数量都用二进制数表示，并且把这些二进制数按位数对好，各个位按十进制数相加．如(1，2)，(2，3)，(1，3，4)这三个有利状态，按上述办法排成下面形式：

$$\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}.$$

我们可以看到，这三个有利状态的最后的“和”中的各个位，总要或多或少出现奇数．而任一个不利状态按上述办法处现，最

后的“和”中的各个位，全都只会出现偶数. 下面我们就说明这种必然性.

假定 A 面临这样一种状态，“和”中的各个数全是偶数. 现在 A 从某一堆里至少拿走一枚，这样一定会使某一行的二进制数发生变化：使得某一位（或几位）的“1”变为“0”，可能同时使另外的位数上的“0”变为“1”，但无论怎样，都会使某堆相应的那个二进制数至少有一个位数上的“1”变为“0”，而其余的二进制数不变. 因此原来这一位数上的总和相应地要减少“1”了，于是这一列的总和也由偶数变为奇数. 接着 B 取硬币时，他的目的是正确地选定某一堆硬币，确定要取多少枚，从而使他取后，那些和为奇数的列变为偶数，而原来和为偶数的列不动，这是能够办到的. 例如，B 面临的各列总和的奇偶性如下：

偶	奇	奇	偶
“2^3”	“2^2”	“2^1”	“2^0”

因为奇数不会是 0，故在“2^2”位上，至少有一行要出现“1”，若此时这一行的“2^1”位上也是 1，那么这一行的二进制形式为“ * 11 * ”（其中 * 可为 0，也可为 1），因此 B 可以在相对应的那一堆硬币中取 $2^2+2^1=6$ 枚硬币，于是这一行变为“ * 00 * ”，这样，“2^2”位这一列的总和少了“1”，同时“2^1”位这一列的总和也少了“1”，都变成偶数了；如果在“2^2”位上出现“1”的这一行，它在“2^1”位上出现的是“0”，那么这一行的二进制形式为“ * 10 * ”，B 可以在与这一行相对应的那一堆硬币中取 $2^2-2^1=2$ 枚硬币，使这一行变为“ * 01 * ”，这样，当 B 取后，在“2^2”位，这一列的和减少了“1”，而在“2^1”位这一列的和中增加了“1”，于是这两列的总和也都由奇数变成偶数了.

一般地，若存在有 2^n 位、2^{n_1} 位、…、2^{n_k} 位（其中 $n>n_1>$

$\cdots>n_k\geqslant 0$)的列的总和都是奇数时，则我们可以选出在“2^n”位上出现“1”的那一行，再看这一行中，2^{n_1}位，…，2^{n_k}位上是否也出现“1”，若出现“1”，则用加号，若出现“0”，则用减号，然后求它们的代数和，即

$$2^n+e_{n_1}2^{n_1}+\cdots+e_{n_k}2^{n_k}=N,$$

其中

$$e_{n_m}=\begin{cases}+1, & \text{当这一行的 } 2^{n_m} \text{位上出现“1”},\\ -1, & \text{当这一行的 } 2^{n_m} \text{位上出现“0”},\end{cases}\quad m=1,\cdots,k.$$

这个 N 就是我们要取的硬币数，取之后，这一行的 2^n 位、2^{n_1}位、…、2^{n_k}位上的“1”变为“0”，而“0”变为“1”，因此这些总和为奇数的列，总和都分别变成偶数了.

于是，再轮到 A 取硬币时，他又面临一个不利状态——各列总和都是偶数的状态. 如此下去，B 留给 A 的永远是最后一行全是偶数的位置，而 A 留给 B 的是至少总会有一个奇数出现在最后一行的位置，因此 A 不能最后取到硬币，这个机会将是 B 的.

我们看一个例子：若 A 面临的状态是(3,6,2)，排成二进制形式为

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 1 & 3 & 1\\ \text{奇} & \text{奇} & \text{奇} \end{array},$$

这是一个有利状态. A 应该在第二堆硬币中取 $2^2+2^1-2^0=5$ 枚硬币，使第二堆只剩下 $6-5=1$ 枚硬币. 接着 B 面临状态是

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ \hline 0 & 2 & 2\\ \text{偶} & \text{偶} & \text{偶} \end{array}.$$

这是不利状态(3,1,2),B 必败无疑. 比如,B 在第一堆中取两枚硬币,轮到 A 取时,状态变为

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ \text{偶} & \text{奇} & \text{偶} \end{array},$$

是有利状态,A 只需把“2^1”位上出现“1”的第三堆中取走 2^1 枚硬币,即把第三堆全部取完,则 B 又面临(1,1)这个不利状态了. 最后 A 必胜无疑.

从上面分析中,我们虽然从理论上把问题彻底搞清楚了,但硬币数目很大时,这就非常麻烦了. 而且所谓“有利状态”和“不利状态”完全是在游戏前由二人商定谁最后取走为胜还是为败而决定的. 这两种状态,我们可以用“平衡状态”和打破这种状态来叙述. 所谓平衡状态是这样的: 将三个数中的每一个数都表成 2 的幂之和(二进制数的展开形式)以后,每个幂都能成对出现(两次或 0 次).

根据上面所分析的道理,我们可以这样进行,暗中用纸条在每个数字下面写上等价的 2 的幂次之和,再进行配对. 例如,这三堆硬币的数目是 31,19 和 15,那么可以写成图 52-1 的方式,显然它们没有呈平衡状态. 但从第一堆移去三枚硬币,就可以达到平衡(如果用别的方式配对,从第二堆或第三堆移去三枚硬币也可以达到平衡). 在 B 被迫打破平衡之后,A 再使它

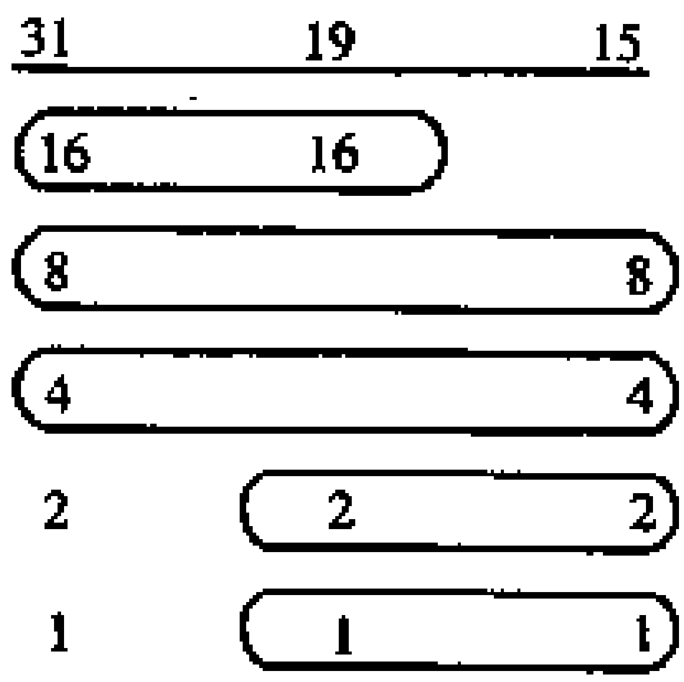


图 52-1

达到平衡，直到出现三种标准状态(3,2,1)，(2,2,0)或(1,1,1)中之一种，下一次只要取走一堆就可见胜负了(要看事先如何规定胜负)．

顺便指出，对于想在这种游戏中成为行家的人来说，要学习用心算．有一个最简单的办法，就是从最高的幂次起，迅速核对每一个数，看它们都会有哪些幂次．这样做通常比较容易判断必须从哪一堆中取硬币．显然在被移动过之后的那一堆中所留下来的数目必须等于另外两堆中其幂次未被平衡掉的那些数目之和，这样就把问题的考虑缩小到两堆，并可迅速决定移走多少硬币．例如，三堆的硬币数为 24，13 和 11，那么就只出现一个 16，所以就必须从第一堆中移走硬币．8 和 1 是另外两堆都有的，所以不平衡幂次的数的总和是 6，这就意味着必须从第一堆中移去 18 枚硬币．

练习五十二

有 15 个围棋子分五行摆成一个三角形如图 52-2，各行数目分别是 1，2，3，4 和 5，A，B 两人轮流从任一行中取子，每次至少取一个．事先有两种胜负规定：或者取最后一子的人胜，或者迫使对手去取最后一子的人胜．你该如何做才能一定获胜?

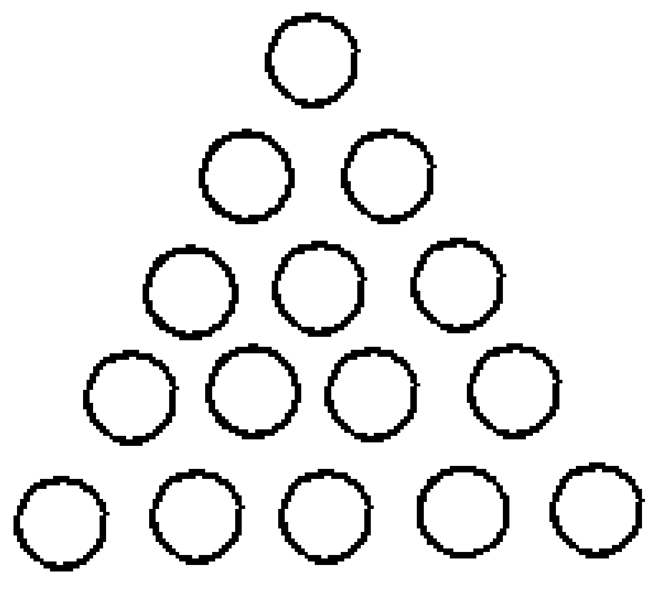


图 52-2

五十三、魔 术 方 阵

在我国古老的《易经》中有这样一句话："河出图，洛出书，圣人则(仿效)之."后来人们根据这句话传出许多神话来.相传大禹在带领百姓治好那波涛汹涌的水患之后，有龙马从河中跃出献上河图，在洛水里边有只乌龟背驮洛书给大禹.据说洛书、河图都包含了治理国家大事的大道理.传说孔夫子就因为当时世风日下，没有圣人之治，以致"河不出图"而感慨万分.

这个图没有人记载，据传说此图就是九宫图.用阿拉伯数字写出来就是图 53-1.它是从 1 到 9 这九个数字组成的具有三行三列的一个方阵，其中每行、每列以及两条对角线上三个数字之和都等于 15.此外，四个角上的数字 4,2,6,8 以及四个边上中间的数字 9,7,1,3 的和，分别都等于 20.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 53-1

九宫图是一个纵横图(三阶纵横图)，这是一个有趣的组合问题，在欧洲叫魔术方阵或幻方.由于它奇妙的性质，引起了历代数学家对它的浓厚趣味.我国南宋时代的数学家杨辉，对它深入地进行了研究，并称这种图为**纵横图**.他深入研究了三阶纵横图并给出了算法.这个方法记载在 1275 年杨辉写的《续古摘奇算经》书上.他写到："九子斜排，上下对易，左右相更，四维挺进，戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足".具体作法可以这样进行，我们取九张同样大小的正方形纸块，写

上从 1 到 9 的数字，然后将它们斜排如图 53-2 所示. 排好后，将图 53-2 中的 1 和 9 位置对调，3 和 7 位置对调，得到图 53-3. 最后把记有 1,3,9,7 的纸块向中间 5 的纸块移近，就得到了图 53-1 的九宫图——三阶魔术方阵.

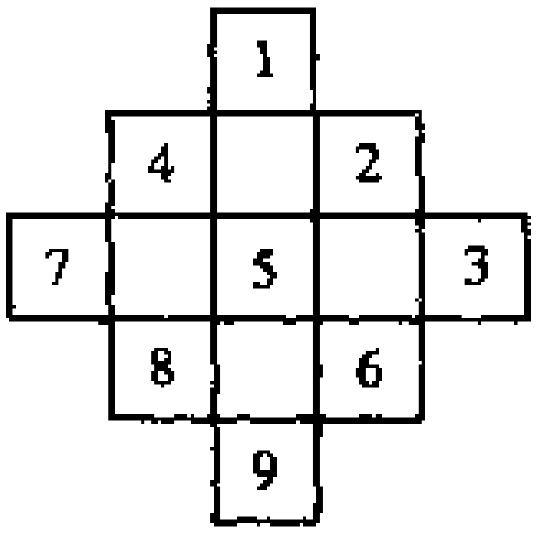


图 53-2

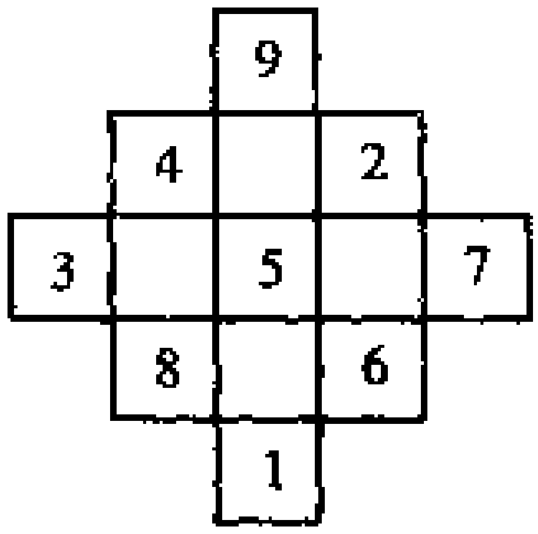


图 53-3

外国人把杨辉纵横图加以推广，即将自然数 $1,2,\cdots,n^2$ 放进由 n^2 个小正方形组成的方阵里，要求纵、横及对角线的和都相等，满足这些要求的方阵就是 n 阶纵横图，称为 n 阶魔术方阵或 n 阶幻方.

不难证明，n 阶魔术方阵的所有数字之和是

$$1+2+3+\cdots+n^2=n^2(n^2+1)/2,$$

所以，n 阶魔术方阵的每行、每列及每条对角线的数值和都等于

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2}\div n=\frac{n(n^2+1)}{2}.$$

下面我们推广杨辉的方法算出一个五阶纵横图. 首先是 25 子斜排(见图 53-4)，图中居上的有 1,6,2，居下的有 24,20,25，然后把 1 调到 19 的上面，把 2 调到 20 的上面，把 6 调到 24 的上面，就得到图 53-5. 然后再把图 53-5 居下的调到上面去，即把 24 调到 12 的上面，把 20 调到 8 的上面，把 25 调到 13 的上面，这样就得到图 53-6. 最后我们来进行左右相

换，居左的有 16，21，22，居右的有 4，5，10，现在把居左的 16 调到 8 的右边去，把 22 调到 14 的右边去，把 21 调到 13 的右边去，这样我们就得到图 53-7. 最后再把图 53-7 中居右的 4 调到 12 的左边去，把 10 调到 18 的左边去，把 5 调到 13 的左边去，这样就得到图 53-8. 这就是我们所需要的五阶纵横图. 我们不难从图 53-8 中验证各行、各列、各对角线的数值为 65.

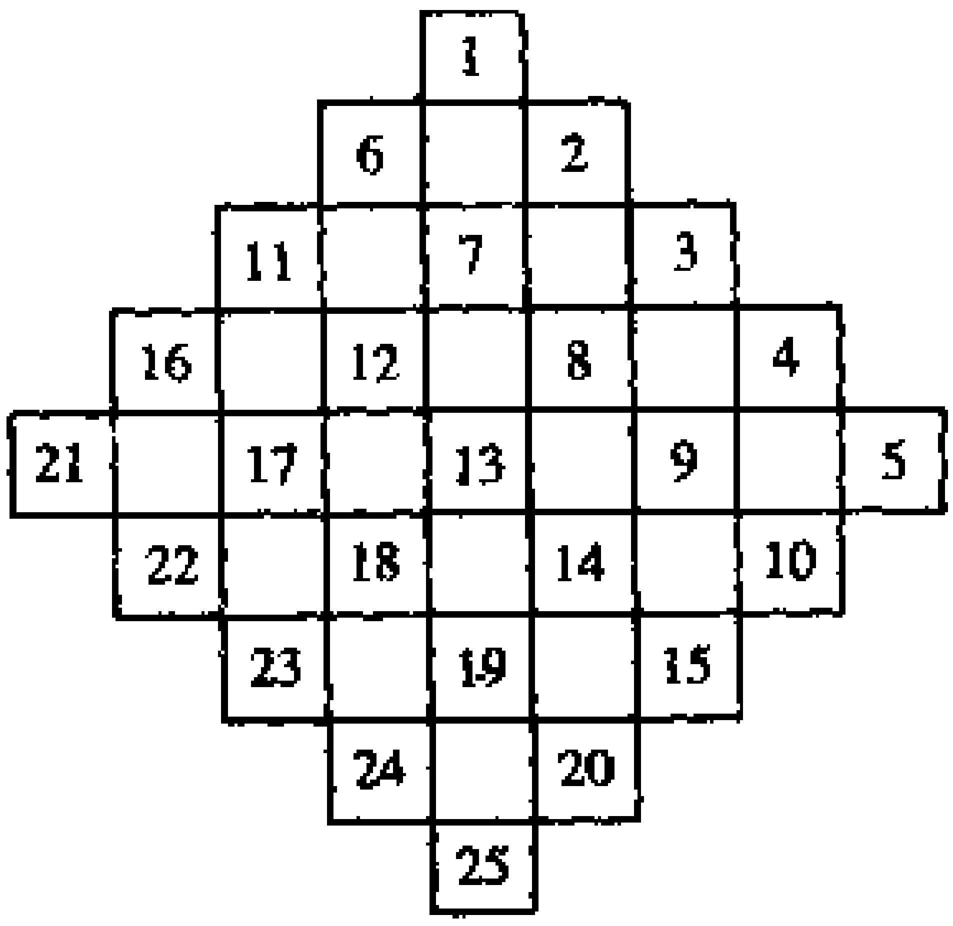


图 53-4

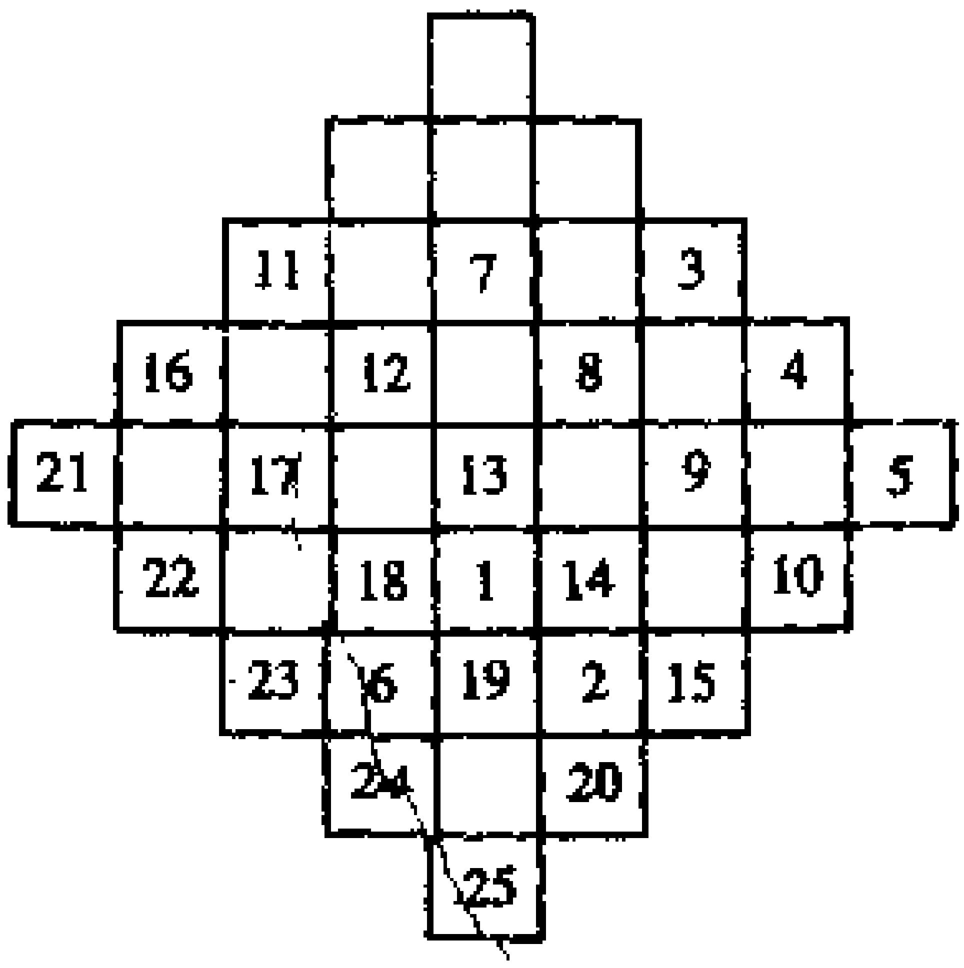


图 53-5

		11	24	7	20	3		
	16		12	25	8		4	
21		17		13		9		5
	22		18	1	14		10	
		23	6	19	2	15		

图 53-6

11	24	7	20	3		
	12	25	8	16	4	
17		13	21	9		5
	18	1	14	22	10	
23	6	19	2	15		

图 53-7

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

图 53-8

仿此，我们可以作出七阶、九阶、…奇数阶魔术方阵.

a_1	a_2
a_3	a_4

图 53-9

我们可以证明不存在二阶魔术方阵. 我们使用反证法.

假设存在二阶魔术方阵，设其如图 53-9，则由魔术方阵的定义，a_1,a_2,a_3,a_4 应满足下面条件：$1\leqslant a_i\leqslant 4$（其中 $i=1,2,3,4$）且当

$i \neq j$时，$a_i \neq a_j$（其中 $i,j=1,2,3,4$），又应有

$$a_1+a_2=a_3+a_4,$$

$$a_1+a_3=a_2+a_4.$$

两个等式两边分别相减，就有

$$a_2-a_3=a_3-a_2,$$

即 $a_2=a_3$，这与 $a_2 \neq a_3$ 矛盾. 因而不存在二阶魔术方阵.

但对于四阶、六阶魔术方阵却可以作出来，如图 53-10 中 (a)，(b).

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

(a)

27	29	2	4	13	36
9	11	20	22	31	18
32	25	7	3	21	23
14	16	34	30	12	5
28	6	15	17	26	19
1	24	33	35	8	10

(b)

图 53-10

从图 53-10 中不难验证 (a) 中各行、各列、各对角线数值分别都为 34，(b) 中各行、各列、各对角线数值分别都为 111.

值得注意的是构造魔术方阵的方法并不是唯一的，所得同阶魔术方阵的形式也不是唯一的. 比如，四阶魔术方阵有 880 种，五阶魔术方阵有 275 305 224 种之多. 随着现代电子计算机事业的发展，给这个古老的数学问题注入了新鲜血液，它在程序设计、图论、人工智能、对策论、组合分析等方面都得到了广泛的应用. 如今对魔术方阵的研究，就更加引起人们的注意了.

练习五十三

1. 证明三阶魔术方阵中，5 一定要在方阵的中间.

2. 做一个七阶魔术方阵.

可以按照如下算法构造奇数阶方阵：

(1) $a \leftarrow 1, x \leftarrow 1, y \leftarrow \frac{n+1}{2}$；

(2) 若 $a=n^2+1$，则算法结束，否则把 a 填入 (x, y) 的方格；

(3) 若 $x=1$ 且 $y=n$，则 $x \leftarrow x+1, a \leftarrow a+1$，转(2)；

(4) 若 $x=1$ 且 $y \neq n$，则 $x \leftarrow n, y \leftarrow y+1, a \leftarrow a+1$，转(2)；

(5) 若 $x \neq 1$ 且 $y=n$，则 $x \leftarrow x-1, y \leftarrow 1, a \leftarrow a+1$，转(2)；

(6) 若 $(x-1, y+1)$ 的方格为空，则 $x \leftarrow x-1, y \leftarrow y+1, a \leftarrow a+1$，转(2)；

(7) 若 $(x-1, y+1)$ 的方格不空，则 $x \leftarrow x+1, a \leftarrow a+1$，转(2).

练习题答案与解答

练　习　一

1. 用 P 表示“左边盒子里有钥匙”，Q 表示“你说的是真话”，S 表示左边盒子实际有无钥匙的回答. 于是我们仿照题目中的方法，构造出的复合命题完全同题目中的一样：

$$S=(\neg P\vee Q)\wedge(\neg Q\vee P),$$

化简为

$$S=P\wedge Q\vee\neg P\wedge\neg Q.$$

即逻辑学家提出的问题是：“我左边的盒子有钥匙且你说的是真话，或者我右边的盒子有钥匙且你说的是假话”这句话是否是真的？如果回答“是”，就打开左边的盒子；如果回答“不是”，就打开右边的盒子.

2. 对该问题从题中所给的条件是不能判定出结果的，因为是两个人的回答，且不知谁说真话谁说假话. 此时，我们要附加一个已知命题，便可构造出恰当的复合命题了.

用 P 表示“这条路是通往山顶的”；用 Q 表示“$3+2=4$”；用 S 表示对路的真实回答且是否 $3+2=4$ 的回答，列出真值表如表 1.10 所示.

表　1.10

	P　Q	S	$\neg S$
甲	1　0	0	1
乙	0　1	0	1
甲	0　0	0	1
乙	1　1	1	0

由构造复合命题方法，有

$$\neg S=(\neg S)_4=\neg P\vee\neg Q,$$

$$S=\neg(\neg P\vee\neg Q).$$

化简为

$$S=P\wedge Q.$$

于是旅游者提出的问题是："这条路通往山顶，并且 3 加 2 等于 4 吗?"，如果两个小伙子都回答"不是"，那么可以断定，他所指的路就是通往山顶的；反之，他所指的路就不是通往山顶的.

当然旅游者所附加的命题可以是任意的已知命题，如提出："这条路通往山顶且 2+2=4 吗?"此时，我们不难验证：如果回答为一个"是"和一个"不是"，那么所指的路就是通往山顶的；如回答皆为"不是"，则所指的路就不是通往山顶的.

练 习 二

1. 上述七个命题都是对命题"$P\to Q$"的不同形式的叙述. 前三个强调了条件(前提)，是从"条件 P 对结论 Q 足够"的含义描述了"$P\to Q$"，后四个强调了结论，从"结论 Q 对条件 P 是不能少的"这个含义来描述了"$P\to Q$".

2. 向导是甲部落的人.

3. 站在中间的人是农民，站在右边的人是小偷.

4. 略.

练 习 三

1. 令 P 表示"明天有考试"；Q 表示"这场球赛是争夺冠军". 这个语句的条件用逻辑式表示是$\overline{P}+(P\cdot Q)$，化简为

$$\overline{P}+(P\cdot Q)=(\overline{P}+P)(\overline{P}+Q)=\overline{P}+Q.$$

结合结论，语句就是："如果明天没有考试或者这场球赛是争夺冠军赛，那么我就去参加球赛."

2. 令 P 表示"办公室里没人"；Q 表示"自动监视系统在运行"；R 表示"办公室里有一大笔钱". 显然，如果命题 $\overline{P\cdot\overline{Q}}$ 是真，那么应该接通电源. 然而因为 $Q=P+R$，所以有

$$\overline{P\cdot\overline{Q}}=\overline{P\cdot(\overline{P+R})}=\overline{P\cdot\overline{P}\cdot\overline{R}}$$

$$=\overline{P}+P+R=1.$$

因此，断定这些指令完全是多余的，并且可用使电源始终接通的简单指令来代替.

练　习　四

1. 假定数学课排在第一，二，三节分别用 S_1, S_2, S_3 表示；语文课排在第一，二，三节分别用 Y_1, Y_2, Y_3 表示；物理课排在第一，二，三节分别用 W_1, W_2, W_3 表示. 那么，数学课的要求就是

$$S_1+S_2=1, \tag{1}$$

语文课的要求就是

$$Y_1+Y_3=1, \tag{2}$$

物理课的要求就是

$$W_2+W_3=1. \tag{3}$$

若同时被满足，必须是(1)×(2)×(3)=1，即

$$(S_1+S_2)(Y_1+Y_3)(W_2+W_3)=1. \tag{4}$$

先展开，化简前两个括号，有

$$(S_1Y_1+S_1Y_3+S_2Y_1+S_2Y_3)(W_2+W_3)=1,$$

这里数学课和语文课不能同时在第一节，即 $S_1Y_1=0$，再展开第三个括号，有

$$S_1Y_3W_2+S_1Y_3W_3+S_2Y_1W_2+S_2Y_1W_2+S_2Y_1W_3$$
$$+S_2Y_3W_2+S_2Y_3W_3=1.$$

显然有 $S_1Y_3W_3=0, S_2Y_1W_2=0, S_2Y_3W_2=0$. 于是(4)式化为

$$S_1W_2Y_3+Y_1S_2W_3=1.$$

这样有两个方案：$S_1W_2Y_3=1$ 或 $Y_1S_2W_3=1$，即数学课第一节、物理课第二节和语文课第三节，或语文课第一节、数学课第二节和物理课第三节.

2. 令每人的字母代号表示其看了电视，则第一种说法为

$$\overline{A}+AB=1,$$

即

$$\overline{A}+B=1. \tag{1}$$

第二种说法为

$$D+E=1, \tag{2}$$

第三种说法为

$$B\overline{C}+\overline{B}C=1, \tag{3}$$

第四种说法为

$$CD+\overline{C}\,\overline{D}=1, \tag{4}$$

第五种说法为

$$E\rightarrow AD,$$

即

$$\overline{E}+AD=1. \tag{5}$$

(1)×(2)×(3)×(4)×(5)=1，得

$$(\overline{A}+B)(D+E)(B\overline{C}+\overline{B}C)(CD+\overline{C}\,\overline{D})(\overline{E}+AD)=1, \tag{6}$$

对(6)两边取非(也可直接展开)得

$$A\overline{B}+\overline{D}\,\overline{E}+(\overline{B}+C)(B+\overline{C})+(\overline{C}+\overline{D})(C+D)+E(\overline{A}+\overline{D})=0.$$

化简可得

$$A+B+\overline{C}+\overline{D}+E=0.$$

故 $A=B=E=0, C=D=1$，即孩子 C 和 D 看了电影.

3. 丙第一，丁第二，乙第三，甲第四.

练　习　五

1. 把第 2 个方程化为

$$(A\,\overline{B}+\overline{C})(\overline{A\,\overline{B}}+C)=1,$$

即

$$(A\,\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)=1.$$

于是由原方程组化成方程

$$(A+B)(B+\overline{C})(A\,\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)=1,$$

化成"与-或"范式

$$\overline{A}B\,\overline{C}+AB\,\overline{C}=1.$$

所以解集为$\{010,110\}$.

2. 分别用 A,B,C,D,E 表示五人被派去，依题意有：

(1) $A\rightarrow B=1$，即$\overline{A}+B=1$；

(2) $D+E=1$；

(3) $B\,\overline{C}+\overline{B}C=1$；　　(4) $CD+\overline{C}\,\overline{D}=1$；

(5) $E\rightarrow AB=1$，即$\overline{E}+AB=1$.

于是有

$$(\overline{A}+B)(D+E)(B\,\overline{C}+\overline{B}C)(CD+\overline{C}\,\overline{D})(\overline{E}+AB)=1,$$

展开并化为"与-或"范式，就有方程

$$\overline{A}\,\overline{B}CD\,\overline{E}+AB\,\overline{C}\,\overline{D}E=1,$$

即$\overline{A}\,\overline{B}CD\,\overline{E}=1$ 或 $AB\,\overline{C}\,\overline{D}E=1$（解集$\{00110,11001\}$），这样派人有两种方案：$C$ 和 D 去或 A,B 和 E 去.

练 习 六

1. 这个电路对应的逻辑表达式 F 为

$$F=A+(\overline{B}+C)(A+B+C),$$

化简有

$$\begin{aligned}F&=(A+\overline{B}+C)(A+A+B+C)\\&=(A+C+\overline{B})(A+C+B)\\&=A+C+\overline{B}B\\&=A+C.\end{aligned}$$

于是简化电路如图 6-5.

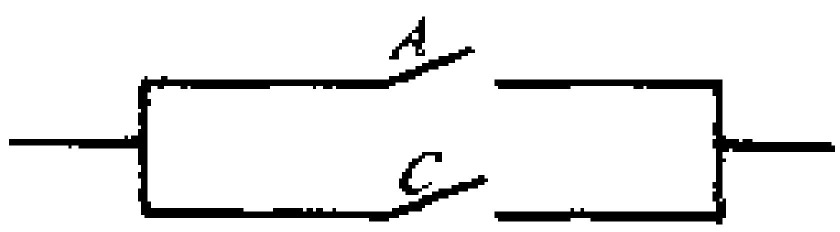


图 6-5

2. 根据题的要求，这个线路应有三个输入端(三个工厂来的信号)和两个输出端(给各台发电机发出信号). 由题设得出真值表 6.3.

表 6.3

A	B	C	X	Y
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

写出相应的逻辑式为

$$X=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+A\,\overline{B}\,\overline{C}+ABC,$$

$$Y=\overline{A}BC+A\,\overline{B}C+AB\,\overline{C}+ABC.$$

对 Y 化简有(X 已为最简式)

$$Y=ABC+AB\overline{C}+ABC+A\overline{B}C+ABC+\overline{A}BC$$
$$=AB(C+\overline{C})+AC(B+\overline{B})+BC(A+\overline{A})$$
$$=AB+AC+BC.$$

总线路如图 6-6 所示.

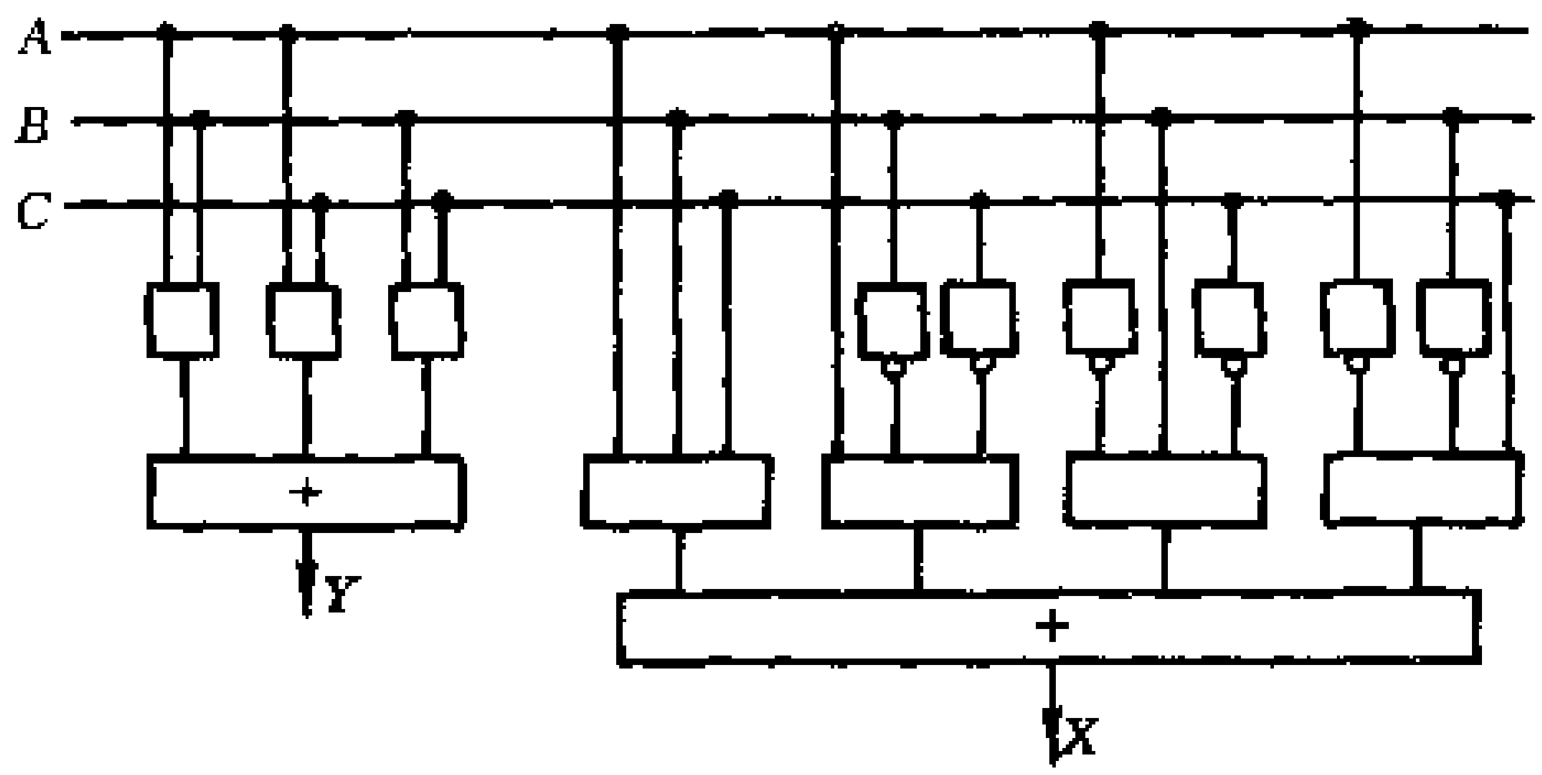


图 6-6

3. 设锁的状态为 F,电铃状态为 G,则有真值表 6.4.

表 6.4

A	B	C	F	G
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	1	0

由此表得逻辑式并化简

$$F=AB\overline{C}+ABC=AB,$$

$$G=\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}$$
$$=A\overline{B}+\overline{A}C+\overline{A}B.$$

画出逻辑线路并综合如图 6-7 所示.

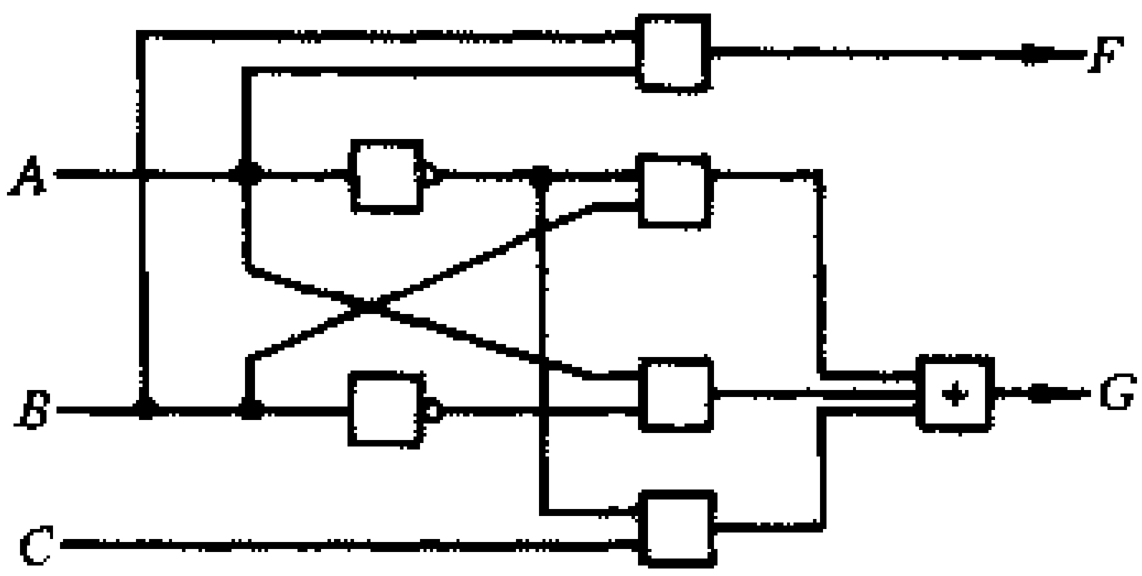


图 6-7

练　习　七

1. 母亲巧妙的回答,使鳄鱼左右为难,如果它交回孩子,母亲就说错了.母亲说错了,它当然可以吃掉孩子;可是如果它吃掉孩子,母亲又说对了,它又得把孩子毫无伤害地交还出来;无论如何,都与它自己的允诺相矛盾.鳄鱼被搞懵了.于是母亲趁机抱走孩子,跑掉了.

2. 通俗一点说,这场官司,如果弟子赢了,当然不应该交给输者讼师银子;如果弟子输了,按照协议,输了官司就不交讼师银子.这样弟子横竖不用交银子.弟子钻了这个悖论的"空子".读者可用罗素悖论观点解释一下.

练　习　八

略.

练　习　九

1. 根据"逢六进一"的特点,在右边填上一个 0,增加 6 倍;而在右边去两个 0,要减少 $6\times6=36$ 倍.

2. $abc=a\times10^2+b\times10+c$，由题意

$$\begin{aligned}
&abc\times13\times11\times7\\
&\quad=(10^2a\times10b+c)\times1001\\
&\quad=(10^2a+10b+c)\times(10^3+1)\\
&\quad=10^5a+10^4b+10^3c+10^2a+10b+c\\
&\quad=abcabc.
\end{aligned}$$

这里关键是 $13\times11\times7=1001$ 这个数，可以验证类似 10 001，100 001，…分别对四位数、五位数…也适用.

3. 证明　设 n 为基数，如果当 $n>2$ 时，就有

$$\begin{aligned}
10201&=1\times n^4+0+2\times n^2+0+1\\
&=n^4+2n^2+1\\
&=(n^2+1)^2,
\end{aligned}$$

显然为合数.

4. n.

练　习　十

1. 37.　　2. 略.

练 习 十 一

1.
$$\begin{array}{r}
6\ 1\ 5\\
0\ 8\ 6\ 3\ 2\ 2\\
+\qquad 7\ 2\ 8\ 6\\
\hline
9\ 4\ 2\ 2\ 3
\end{array}$$

2. $E=7,M=3,Y=2,T=9$.

练 习 十 二

1. 10！种.　　2. 略.　　3. 略.　　4. 略.

练习十三

1. 略.　　2. 略.　　3. 略.　　4. 153 846.

练习十四

1. 略.　　2. 略.　　3. 57.

练习十五

1. 1月1日.　　2. 28个.　　3. 略.

4. $x=8, y=64$ 或 $x=64, y=8$.　　5. 略.

练习十六

1. $$\begin{aligned}\pi(100)=&4-1+100-\left[\frac{100}{2}\right]-\left[\frac{100}{3}\right]-\left[\frac{100}{5}\right]\\&-\left[\frac{100}{7}\right]+\left[\frac{100}{2\cdot 3}\right]+\left[\frac{100}{2\cdot 5}\right]+\left[\frac{100}{2\cdot 7}\right]\\&+\left[\frac{100}{3\cdot 5}\right]+\left[\frac{100}{3\cdot 7}\right]+\left[\frac{100}{5\cdot 7}\right]\\&-\left[\frac{100}{2\cdot 3\cdot 5}\right]-\left[\frac{100}{2\cdot 3\cdot 7}\right]-\left[\frac{100}{2\cdot 5\cdot 7}\right]\\&-\left[\frac{100}{3\cdot 5\cdot 7}\right]+\left[\frac{100}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\right]\\=&4-1+100-50-33-20-14+16+10+7\\&+6+4+2-3-2-1-0+0\\=&25.\end{aligned}$$

即1到100间的素数的个数有25个.

2. $$\begin{aligned}F_5&=2^{32}+1=2^4\times(2^7)^4+1\\&=(1+5\times 2^7-5^4)\cdot(2^7)^4+1\\&=(1+5\cdot 2^7)\cdot(2^7)^4+1-5^4\cdot(2^7)^4\end{aligned}$$

$$=(1+5\cdot 2^7)\cdot(2^7)^4+(1+5\cdot 2^7)(1-5\cdot 2^7)$$
$$\cdot(1+5^2\cdot 2^{14})$$
$$=(1+5\cdot 2^7)[(2^7)^4+(1-5\cdot 2^7)(1+5^2\cdot 2^{14})]$$
$$=641\cdot 6\ 700\ 417.$$

其中用到了

$$1+5\cdot 2^7-5^4=1+5(2^7-5^3)=1+5\cdot 3=16=2^4.$$

练 习 十 七

1. 由约数公式(2)得：$F(N)=10=2\cdot 5$，故具有 10 个约数的自然数应有形式

$$N=p_1^1p_2^4\quad (p_1,p_2\text{ 为不同的素数}).$$

取 $p_1=3,p_2=2$，从而 $N=3^1\cdot 2^4=48$；

取 $p_1=5,p_2=2$，从而 $N=5^1\cdot 2^4=80$.

可以验证 p_1,p_2 再不能取其他素数. 另一方面，因 $F(N)=10=1\cdot 10$，则 $N=p^9$，此时，p 取最小素数 2，有 $2^9>100$，这不合要求. 所以 100 以内具有 10 个约数的自然数是 48 和 80.

2. 由题意知所求必同时被 2,3,5 整除，设该数为 N，因 N 是所求最小自然数，所以由(1)式有

$$N=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma,$$

又因 $N/2=2^{\alpha-1}\cdot 3^\beta\cdot 5^\gamma$ 是平方数，所以

$$2\mid(\alpha-1),\quad 2\mid\beta,\quad 2\mid\gamma.$$

而 $N/3=2^\alpha\cdot 3^{\beta-1}\cdot 5^\gamma$ 是立方数，所以

$$3\mid\alpha,\quad 3\mid(\beta-1),\quad 3\mid\gamma.$$

又由 $N/5=2^\alpha\cdot 3^\beta\cdot 5^{\gamma-1}$是五次方数，所以

$$5\mid\alpha,\quad 5\mid\beta,\quad 5\mid(\gamma-1).$$

由 $3\mid\alpha,5\mid\alpha$ 可知 α 最小数是 15，此时正好 $2\mid(\alpha-1)$；由 $2\mid\beta$，$5\mid\beta$，可知 β 最小数是 10，此时正好 $3\mid(\beta-1)$；由 $2\mid\gamma,3\mid\gamma$. 可

知 γ 最小数是 6，此时正好 $5|(\gamma-1)$；所以，所求之数

$$N=2^{15}\cdot 3^{10}\cdot 5^{6}.$$

3. 作出 12 与 15 的素因数分解. $12=2^2\cdot 3$， $15=3\cdot 5$. 因 $2\cdot 3\cdot 5=30$，故所求之整数就是与 30 互素的整数全体任何整数可表为

$$x=30m+r,\quad 0\leqslant r<30, m \text{ 为整数}.$$

而 x 与 30 互素等价上式中 r 与 30 互素，所以，这样的 r 是：1，7，11，13，17，19，23，29. 因此，与 30 互素的一切整数具有形式：$x=30m+r$，其中 $m=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$； $r=1,7,11,13,17,19,23,29$.

4. 因 $\{a,b\}=144=2^4\cdot 3^2$，故可设 $a=2^k\cdot 3^l$， $b=2^m\cdot 3^n$. 由于 $(a\cdot b)=2^3\cdot 3$，故

$$\max(k,m)=4,\quad \min(k,m)=3,$$
$$\max(l,n)=2,\quad \min(l,n)=1.$$

如果 $k=4,m=3$，则 $l=2,n=1$ 或 $l=1,n=2$，因此 $a=144$，$b=24$，或 $a=48,b=72$. 如果 $k=3,m=4$，则上之 a,b 值交换.

练 习 十 八

1. 不大于 30 的素数有：2，3，5，7，11，13，17，19，23，29，用十个素数及其幂去除 30，得出商，列出表 18.2.

表 18.2

素数 商	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29
$[30/p]$	15	10	6	4	2	2	1	1	1	1
$[30/p^2]$	7	3	1							
$[30/p^3]$	3	1								
$[30/p^4]$	1									
总和	26	14	7	4	2	2	1	1	1	1

所以

$$30!=2^{26}\cdot 3^{14}\cdot 5^{7}\cdot 7^{4}\cdot 11^{2}\cdot 13^{2}\cdot 17\cdot 19\cdot 23\cdot 29.$$

2. 由公式，有

$$\begin{aligned}&\left[\frac{2^n}{2}\right]+\left[\frac{2^n}{2^2}\right]+\cdots+\left[\frac{2^n}{2^{n-1}}\right]+\left[\frac{2^n}{2^n}\right]\\ =&2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+2+1\\ =&2^n-1.\end{aligned}$$

故 2 的最大幂次为 2^n-1.

3. 由于 $7^3<500<7^4$，由公式(1)，有

$$\begin{aligned}&\left[\frac{500}{7}\right]+\left[\frac{500}{7^2}\right]+\left[\frac{500}{7^3}\right]\\ =&\left[71+\frac{3}{7}\right]+\left[10+\frac{10}{7^2}\right]+\left[1+\frac{157}{7^3}\right]\\ =&71+10+1=82.\end{aligned}$$

故 500! 恰被 7 的 82 次方(7^{82})整除.

练 习 十 九

1. 由 $23^{102}=23^{4\cdot 25+2}$ 可知 23^{102} 与 23^2 之末位数字相同，为 9.

2. 当 $m=4k$ 时，$3^{2\cdot 4k+1}$ 与 $3^{3\cdot 4k+1}$ 的末位数字是 3，所以 a_m 末位数字由 $3+3+4=10$ 知为 0，从而 $5\mid a_m$. 当 $m=4k+1$ 时，验之知 $5\nmid a_m$，$5\mid b_m$. 同理，当 $m=4k+2$，或 $m=4k+3$ 时，有 $5\mid a_m$ 或 $5\mid b_m$.

练 习 二 十

1. 当且仅当 $n=3m$，即 n 是 3 的倍数时，2^n-1 能被 7 整除.

2. $6\times47619=285714$(个).

3. $m=3, n=103$.　　4. 7,1.

练习二十一

1. 248.　　2. 15 或 24.

3. (1) $x\equiv13 \pmod{31}$,即 13 为其解.　(2) 8,19,30.

4. 略.

练习二十二

1. $x\equiv4126 \pmod{6300}$.

2. $x\equiv67 \pmod{90}$.

练习二十三

1. 略.　　2. 略.　　3. 用反证法.

练习二十四

略.

练习二十五

1. 本题关键是构造 5 个抽屉——将 3×4 的长方形划分成 5 个区域,使在每个区域内的任两点的距离不大于 $\sqrt{5}$,如图 25-1.

将长方形划分成 5 个区域,将 6 个点放入长方形,由抽屉原则知,至少有一个区域内有两个点,易证这两个点的距离不大于 $\sqrt{5}$.

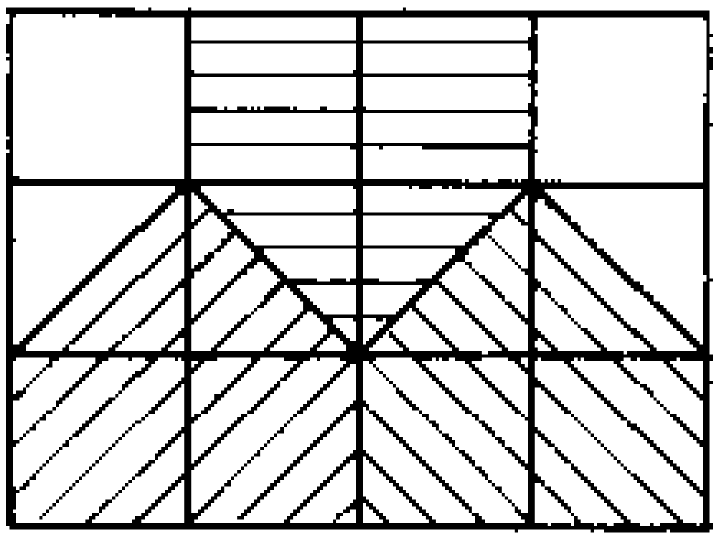


图 25-1

2. 显然，我们只要构造出 50 个抽屉来，把 1 到 100 这 100 个自然数放到这 50 个抽屉内，并且使得同一个抽屉内任两个数，它们中的某一个是另一个的倍数. 为此，我们注意，一个正整数，要么是一个奇数，要么是一个偶数. 若是一个偶数则必可表为：奇数 $\times 2^s$（其中 $s=1,2,\cdots$）的形式.

如果允许 $s=0$，那么奇数也包括在上述一般形式之中. 现在把 1 到 100 的全部整数分在下面 50 个抽屉中：

m_1：$\{1,1\times 2,1\times 2^2,1\times 2^3,1\times 2^4,1\times 2^5,1\times 2^6\}$，

m_2：$\{3,3\times 2,3\times 2^2,3\times 2^3,3\times 2^4,3\times 2^5\}$，

m_3：$\{5,5\times 2,5\times 2^2,5\times 2^3,5\times 2^4\}$，

…… ……

m_{25}：$\{49,49\times 2\}$，

m_{26}：$\{51\}$

m_{27}：$\{53\}$

…… ……

m_{50}：$\{99\}$

很明显，1，2，…，100 这 100 个整数，没有遗漏地被放入了这 50 个抽屉中，并且同一个数字不会出现在两个不同的抽屉中，因此，不论用何种方式从中取出 51 个数时，必然至少有两

个数出自同一个抽屉，而同一个抽屉中的两个数，大数必是小数的整数倍.

3. 本题相当于把 1,2,…,1978 这 1978 个数任意分成 6 组，则必有一组有如下性质：该组中至少有一个数，或者等于同一组中另两个数之和，或者等于另一个数的 2 倍. 我们用反证法证这一结论.

设任意一组数都不具备所要求的性质，则我们可以证明下述事实 P：若 $a,b\in M$，则 $a-b\notin M$. 因若 $a-b\in M$，则由 $b+(a-b)=b$可知，M 已具有题所要求的性质.

因 $1978/6>329$，由抽屉原则，至少有一组数 A 至少含 330 个数. 用 m_1 表示数组 A 中最大的数，用 m_1 减去 A 中其余的数(这些数显然是小于 1978 的自然数)得到不少于 329 个数，根据前述事实 P，它们都不是 A 中的数. 也就是说，这些数在其余 5 组中. 因 $329/5>65$，据抽屉原则，必有一组数 B，含有其中的 66 个数. 设这 66 个数中最大的是 m_2，用 m_2 减去其余 65 个数，由事实 P，所得 65 个数都不在 B 中. 下面证明这 65 个数也不在 A 中. 事实上，若其中某一个数

$$m_2-b\in A,$$

因 m_2 与 b 可以写成

$$m_2=m_1-a_1,\quad b=m_1-a_2(a_1,a_2\in A),$$

故

$$a_2-a_1=m_2-b\in A.$$

这与事实 P 矛盾.

这样，上述 65 个数只能在其余四组中，因 $65/4>16$，由抽屉原则，有一组数 C 至少含这 65 个数中的 17 个. 记这 17 个数中最大的是 m_3，用 m_3 减去其余 16 个新数，仿上可证，这 16 个数只能在其余三组 D,E,F 中，如此继续下去，最后得到

一组数 F,F 中至少含有两个数,用大数减去小数所得差,不在 A,B,C,D,E,F 中,但这个差又是一个不超过 1978 的自然数,矛盾.于是命题得证.

4. 因 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,由柯西不等式,有

$$|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|\leqslant\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}\cdot\sqrt{n}=\sqrt{n},$$

所以,当 $e_i\in A=\{0,1,2,\cdots,k-1\}$时,有

$$\begin{aligned}&|e_1x_1+e_2x_2+\cdots+e_nx_n|\\&\quad\leqslant|e_1||x_1|+|e_2||x_2|+\cdots+|e_n||x_n|\\&\quad\leqslant(k-1)(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)\\&\quad\leqslant(k-1)\sqrt{n}.\end{aligned}$$

把区间$[0,(k-1)\sqrt{n}]$等分成 k^n-1 份,每个小区间的长度为$(k-1)\sqrt{n}/(k^n-1)$.再考虑集合

$$B=\{e_1x_1+e_2x_2+\cdots+e_nx_n|e_i\in A,\quad i=1,2,\cdots,n\}.$$

由于集合 B 中共有 k^n 个元素,由抽屉原则,B 中必存在两个不同的数.

$$e_1x_1+e_2x_2+\cdots+e_nx_n \quad 及 \quad e_1'x_1+e_2'x_2+\cdots+e_n'x_n$$

落在同一个小区间内.命 $a_i=e_i-e_i'$,则$|a_i|\leqslant k-1$,且

$$\begin{aligned}&|a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n|\\&\quad=|e_1x_1+\cdots+e_nx_n-(e_1'x_1+\cdots+e_n'x_n)|\\&\quad\leqslant\frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.\end{aligned}$$

练习二十六

略.

练习二十七

略.

练习二十八

1. 图 28-3 中，每个图恰有 2 个奇次顶点，故都能一笔画出.

2. 在图 28-4 中的 8×8 黑白方格的棋盘上，每一个方格对应一个顶点，两个顶点之间有边相连，当且仅当一只马从一个对应的方格经一次跳动到另一个对应的方格，得到一个图 G. 为简单起见，我们将每个顶点的次数写在对应方格中. 在图 G 中，有四个顶点度数为 3，其他都是偶次顶点，由欧拉通路的充要条件知，G 不是欧拉图，也不构成欧拉通路. 因此要使一只马在 8×8 棋盘上完成每一种可能的跳动恰好一次是不可能的.

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

图 28-4

3. 因为在一个图中，每三边可以组成一个回路；每四边也可组成一个回路；…如此可有各种边组成的回路. 因为 K_n 为完全图，可以把问题化为：求出每三个顶点组成的回路数，每四个顶点组成的回路数，…，故 K_n 的回路总数为

$$C_n^3+C_n^4+C_n^5+\cdots+C_n^n.$$

如 K_5 有回路数

$$C_5^3+C_5^4+C_5^5=10+5+1=16.$$

当 n 为奇数时，有欧拉回路，当 n 为偶数时，只当 $n=2$ 时有欧拉通路.

4. 将 E 中的点依次记为 $1,2,3,\cdots,2n-1$，并将点 i 与 $i+(n+1)$ 用一条边相连（我们约定，$j+(2n-1)k$ $(k\in\mathbf{Z})$ 表示同一个点 j），这样得到一个图 G. G 的每个点的次数均为 2（即与两个点相连），并且相差为 3 的两个点与同一个点相连.

由于 G 的每个点的次数为 2，G 由一个或 n 个圈组成.

在 $3\nmid 2n-1$ 时，$1,2,3,\cdots,2n-1$ 中每一个点 j 都可以表示成 $3k$ 的形式，即方程

$$3x\equiv j(\bmod\ 2n-1)$$

有解，因此图 G 是一个长为 $2n-1$ 的圈，在这圈上可以取出 $n-1$ 个互不相邻的点，而且至多可以取出 $n-1$ 个互不相邻的点.

在 $3\mid 2n-1$ 时，图 G 由三个长为 $(2n-1)/3$ 的圈组成，每个圈的顶点集合为

$$\left\{1+3k,k=0,1,\cdots,\frac{2n-4}{3}\right\},$$

$$\left\{2+3k,k=0,1,\cdots,\frac{2n-4}{3}\right\},$$

$$\left\{3k,k=1,\cdots,\frac{2n-1}{3}\right\}.$$

每个圈上至多可以取出 $\dfrac{\frac{2n-1}{3}-1}{2}=\dfrac{n-2}{3}$ 个点，两两互不相邻，总共可以取出 $n-2$ 个点互不相邻.

综上所述，在 $3\nmid 2n-1$ 时，$\min k=n$，在 $3\mid 2n-1$ 时 $\min k=n-1$.

练习二十九

1. 图 29-2 是二分图，

$$X=\{v_1,v_3,v_4,v_6,v_7\},$$

$$Y=\{v_2,v_5,v_8\},$$

见图 29-5.

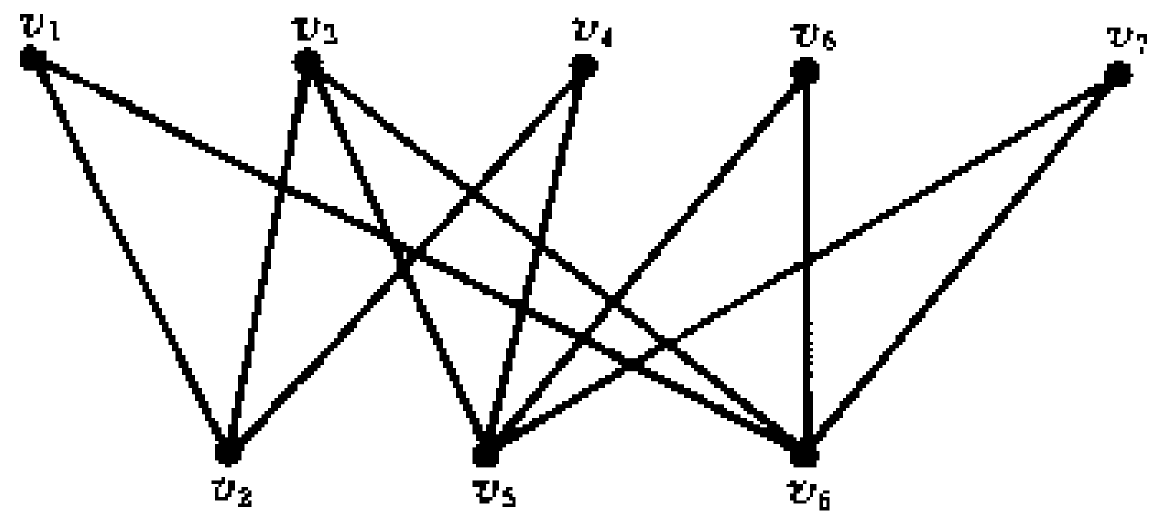


图 29-5

2. 为了使相邻的顶点具有两种不同的颜色，G 的每个面(三角形)都至少要去掉一条边，20 个面(包括最外面含的那个面)至少要去掉 10 条边(每一条边属于两个面)，所以 G 至多有 20 条边. 我们可以先确定要去的边，然后再将顶点涂上白色与黑色(见图 29-6).

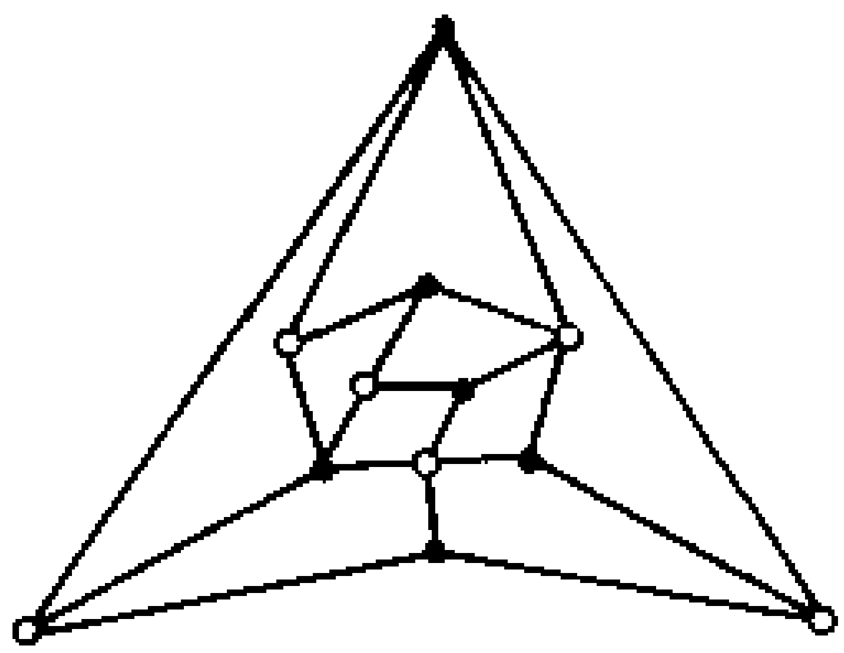


图 29-6

3. 作一个二分图 $G=(X,Y,E)$，X 的每一个顶点表示一个 X 国学生，Y 的每一个顶点表示一个 Y 国学生. 如果一个 X 国学生与一个 Y 国学生跳过舞，就在相应的两个点之间连一条边.

设在集合 X 中，点 x 的次数最大(即与 x 跳过舞的 Y 国学生最多). 因为 $\deg(x)<n$，所以在 Y 中存在一个点 y' 与 x 不相邻. 但由题设至少有 x' 与 y' 相邻，因为除 y' 外与 x' 相邻

的点为 $\deg(x')-1$，而且

$$\deg(x')-1\leqslant\deg(x)-1<\deg(x),$$

所以在与 x 相邻的点中一定有一个点 y 与 x' 不相邻，这样得出的四个点 x,x',y,y' 就代表了四个符合要求的人.

4. 见图 29-4，这是一个二分图，其中黑色点组成集合 X，白色点组成集合 Y，由于 $|X|-|Y|=9-7=2$，所以不存在一条通路经过图 29-4 中所有顶点恰好一次.

练 习 三 十

1. 以每门课为一个顶点，共同被选修的课程之间用边相连，得到图 30-3(a)，由题意，相邻顶点对应的课程不能连续考试，而不相邻的顶点所对应的课程允许连续考试. 因此作图(a)的补图(b). 问题归结为在(b)中找一条哈密尔顿通路. 如 C,E,A,F,D,B 就是一个符合要求的考试日程表.

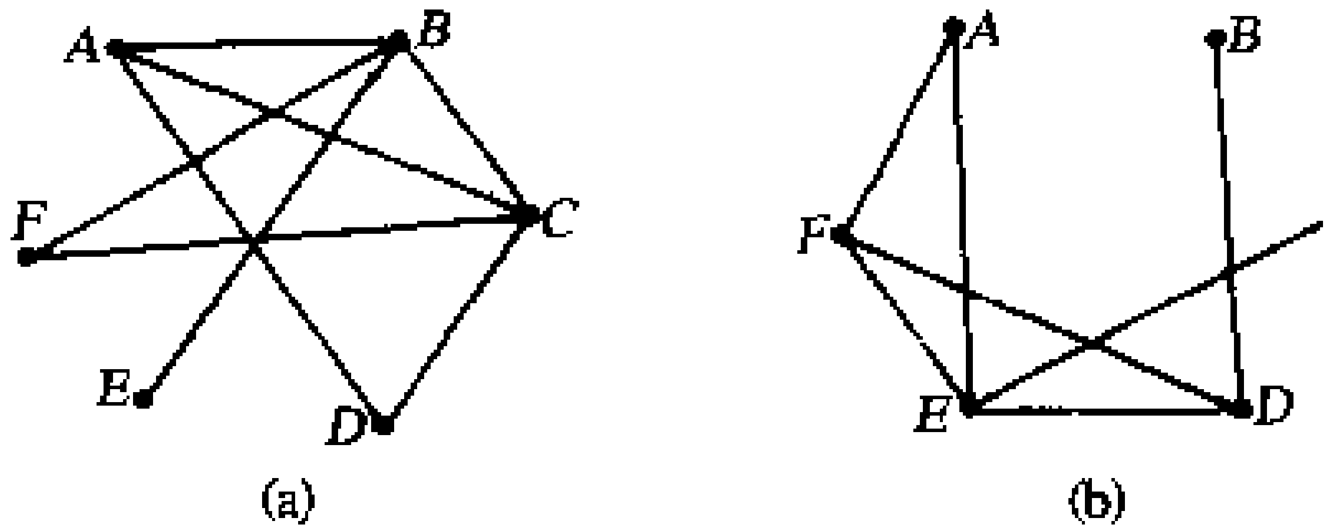


图 30-3

2. 完全图 K_n 是哈密尔顿图，共有 $\dfrac{(n-1)!}{2}$ 个哈密尔顿回路. 当 n 是奇数时，K_n 的每个顶点是偶次，所以 K_n 是欧拉图.

3. 当 m,n 均为偶数时，完全二分图 $K_{m,n}$ 是欧拉图. 当 $m=n$ 时，$K_{m,n}$ 是哈密尔顿图.

4. 图 30-2(a)无哈密尔顿通路（当然更无哈密尔顿回

路）.要证明这点，只要将顶点涂上红、蓝两种不同的颜色（图中空心点和实心点），使相邻的两个顶点不同.如果这个图有一条哈密尔顿通路，那么在这条通路的顶点一定是红、蓝相间的，因而红点与蓝点的数目相等或相差 1，但图（a）中，红点（空心点）的数目有 6 个，蓝点数目有 8 个，两者之差为 2，因此不可能有一条哈密尔顿通路.实际上图（a）是一个二分图.我们在专题三十五中，将给出更一般的结论.

图 30-2（b）不是哈密尔顿图，因为顶点标号（或染两种颜色）A 和 B，使相邻顶点标号不同，得 5 个 A 点、6 个 B 点（见图）但这个图它有一条哈密尔顿通路.如图中粗线所示.事实上它是一个二分图.

练习三十一

1. 当 n 为奇数时有哈密尔顿通路，而无哈密尔顿回路；当 n 为偶数时，有哈密尔顿回路.

2. 略.

3. 在图 31-1 中，表面上看边很多，容易得到哈密尔顿回路，但我们将三个空心顶点及它们相邻的边去掉后，所得到的图有四个连通分支，由结果（3）知图 G 无哈密尔顿回路.

4. 略.

练习三十二

1. 由得克斯特拉算法，依次作出图 32-4 的（a），（b），（c），（d），（e），（f），（g），（h）（各图中 P' 标号的点用□表示，T 标号的点用○表示），这样从图 32-4（h）可知从 v_1 到 v_8 的最短通路为

$$P=v_1v_4v_3v_6v_5v_8,$$

它的长为 11.

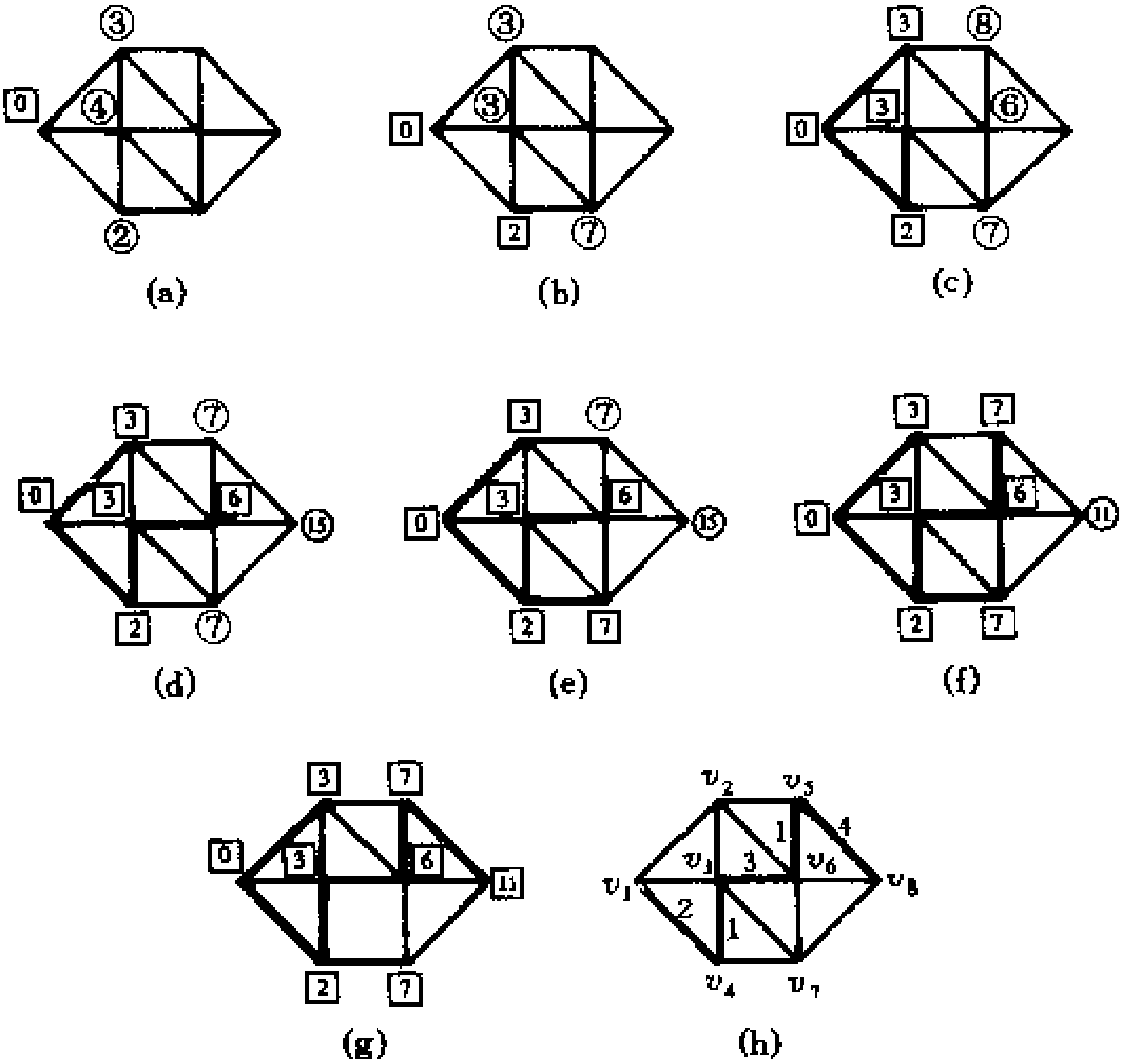


图 32-4

2. 用 v_0 表示当前时刻,v_1 表示第一年的结束和第二年的开始,…,v_5 表示第三年的结束.边(v_i,v_j)的权表示从第 $i+1$年开始购买新设备一直用到第 j 年结束所花的总费用.例如,(v_0,v_1)的权是 $10+2=12$,(v_3,v_4)的权是 $12+2=14$,(v_0,v_3)的权是 $10+2+3+5=20$,等等.这样得到图 32-5,即问题变成在图中寻找从 v_0 到 v_5 的最短通路.由得克斯特拉算法,可得 $v_0\to v_2\to v_5$ 是一条最短通路,它说明在第三年开始时更换一台新设备会使总费用最省.

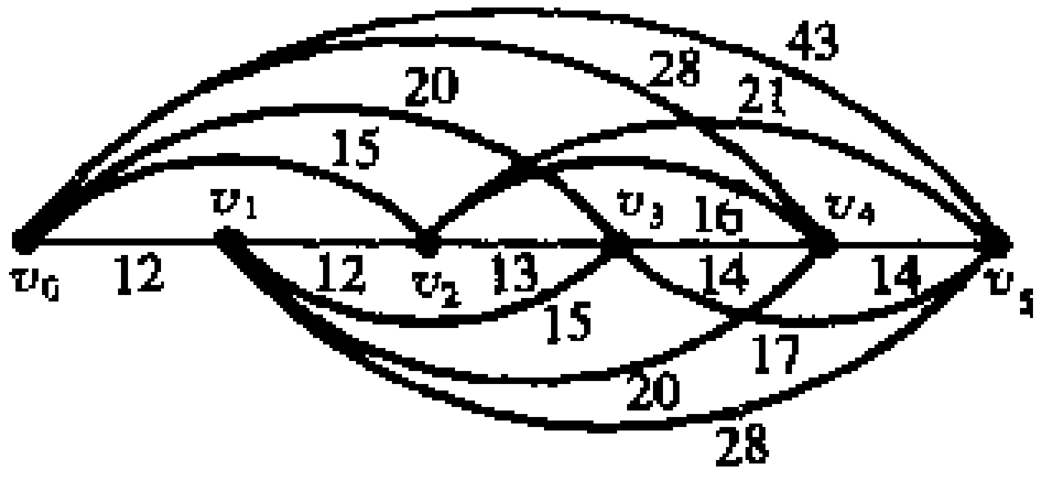


图 32-5

练习三十三

1. 次数为奇数的顶点是 b,c,d,e,f,g，令边 (a,b)，(a,d)，(c,e)，(g,f) 重复. 如图 33-3(a)，G 中存在欧拉回路.

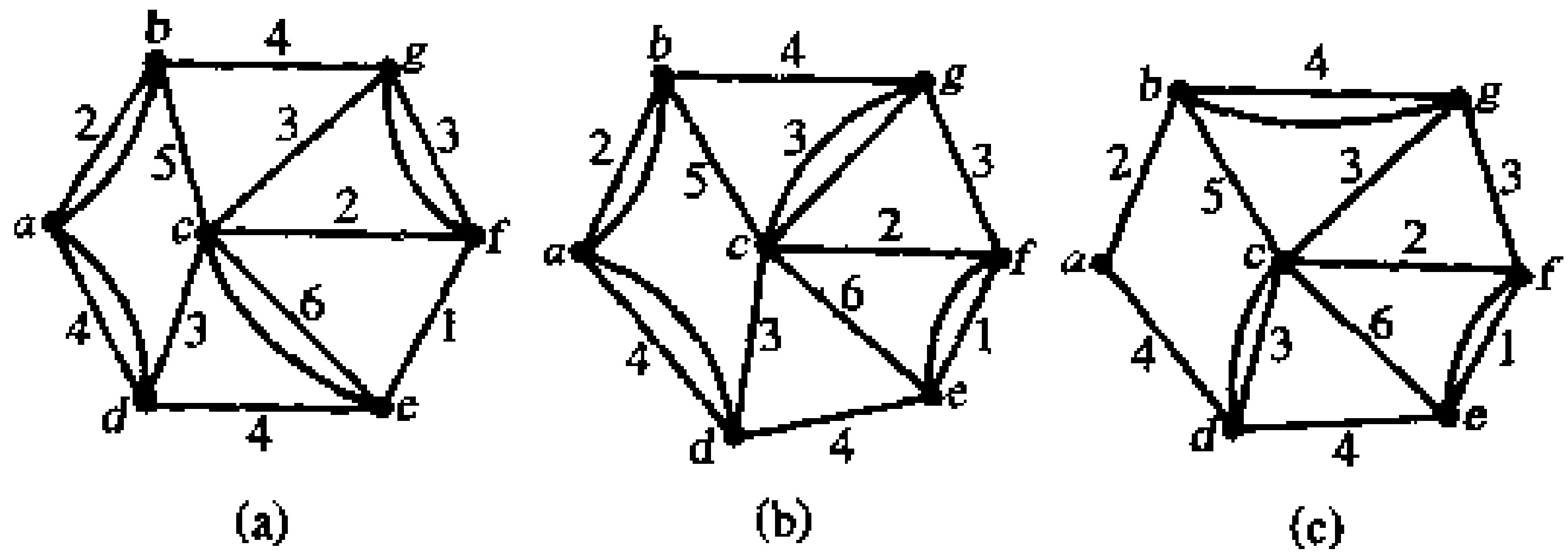


图 33-3

再由条件(2)，发现回路 $cefgc$ 中重复边总长是 9，大于非重复边的总长 4，故令 (c,g) 和 (e,f) 取代 (c,e) 和 (f,g)，得到图(b). 在该图中又发现回路 $adcgba$ 的重复边总长大于非重复边总长，再令 (b,g)，(c,d) 取代 (a,b)，(a,d) 和 (c,g) 得到图(c). 至此条件(2)得到满足，故该图的欧拉回路就是所求的中国邮路.

2. 见图 33-2，G 中只有 v_4 和 v_6 的次数是奇数，从 v_4 到 v_6 的最短路是 $v_4 \to v_3 \to v_6$. 令边 (v_3,v_6) 和 (v_3,v_4) 各重复一次构成图 G'，G' 的欧拉回路就是 G 中的中国邮路.

练习三十四

1. 设 7 kg 瓶与 3 kg 瓶中分别装了 i kg 和 j kg 油，这时 10 kg 瓶中装了 $(10-i-j)$kg 油，因而可用点 (i,j) 表示状态，$0\leqslant i\leqslant 7$，$0\leqslant j\leqslant 3$. 可是倒油时必须将一个瓶子倒满，或者将另一个瓶子倒空，(i,j)，$1\leqslant i\leqslant 6$，$1\leqslant j\leqslant 2$ 为不可能状态，于是允许的状态为 $4\times 8-2\times 6=20$ 个. 用 (i,j) 表示顶点，则顶点集为

$$V=\{(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,3),(2,0),(2,3),(3,0),(3,3),(4,0),(4,3),(5,0),(5,3),(6,0),(6,3),(7,0),(7,3),(7,1),(7,2)\},$$

其中顶点 $(0,0)$ 为起始状态，$(5,0)$ 为终止状态.

边集 E 中元素如下产生：若状态 (i_1,j_1) 可经过一次倒油达到状态 (i_2,j_2)，就在对应顶点之间连有向边，这里，两个顶点之间若有两条方向相反的有向边，就在它们的连线上画两个相反方向的箭头.

建立有向图 $D=(V,E)$，如图 34-3（这儿省略了一些无用的边）. 我们的目的是寻找从 $(0,0)$ 到 $(5,0)$ 的有向路径. 在图上，可找到两条：$(0,0)\to(7,0)\to(4,3)\to(4,0)\to(1,3)\to$

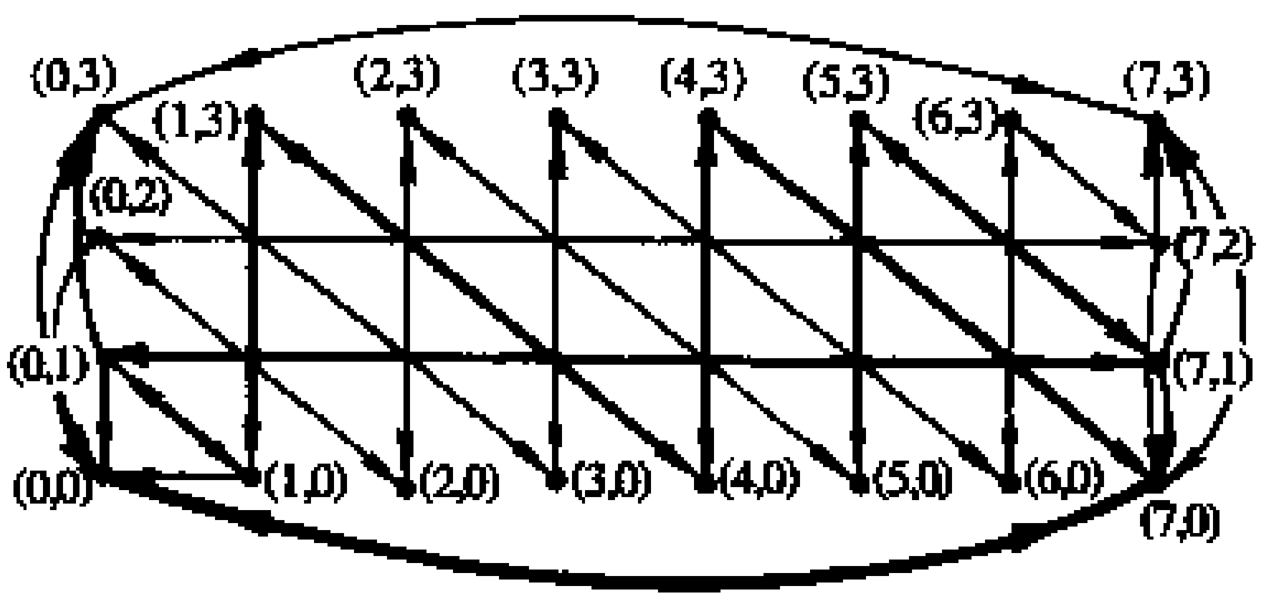


图 34-3

(1,0)→(0,1)→(7,1)→(5,3)→(5,0)，此路径长度为 9. 说明倒 9 次油可将 10 kg 油均分成两份(粗线表示).

另一条路径为：(0,0)→(0,3)→(3,0)→(3,3)→(6,0)→(6,3)→(7,2)→(0,2)→(2,0)→(2,3)→(5,0). 此路径长度为 10.

2. 略.

练习三十五

1. 解法可用一棵树来表示，其中除始点外，各点都代表序列中某个数字. 由始点到各个点 i 的路径就描述终于点 i 的单调递增子序列，如图 35-2 所示.

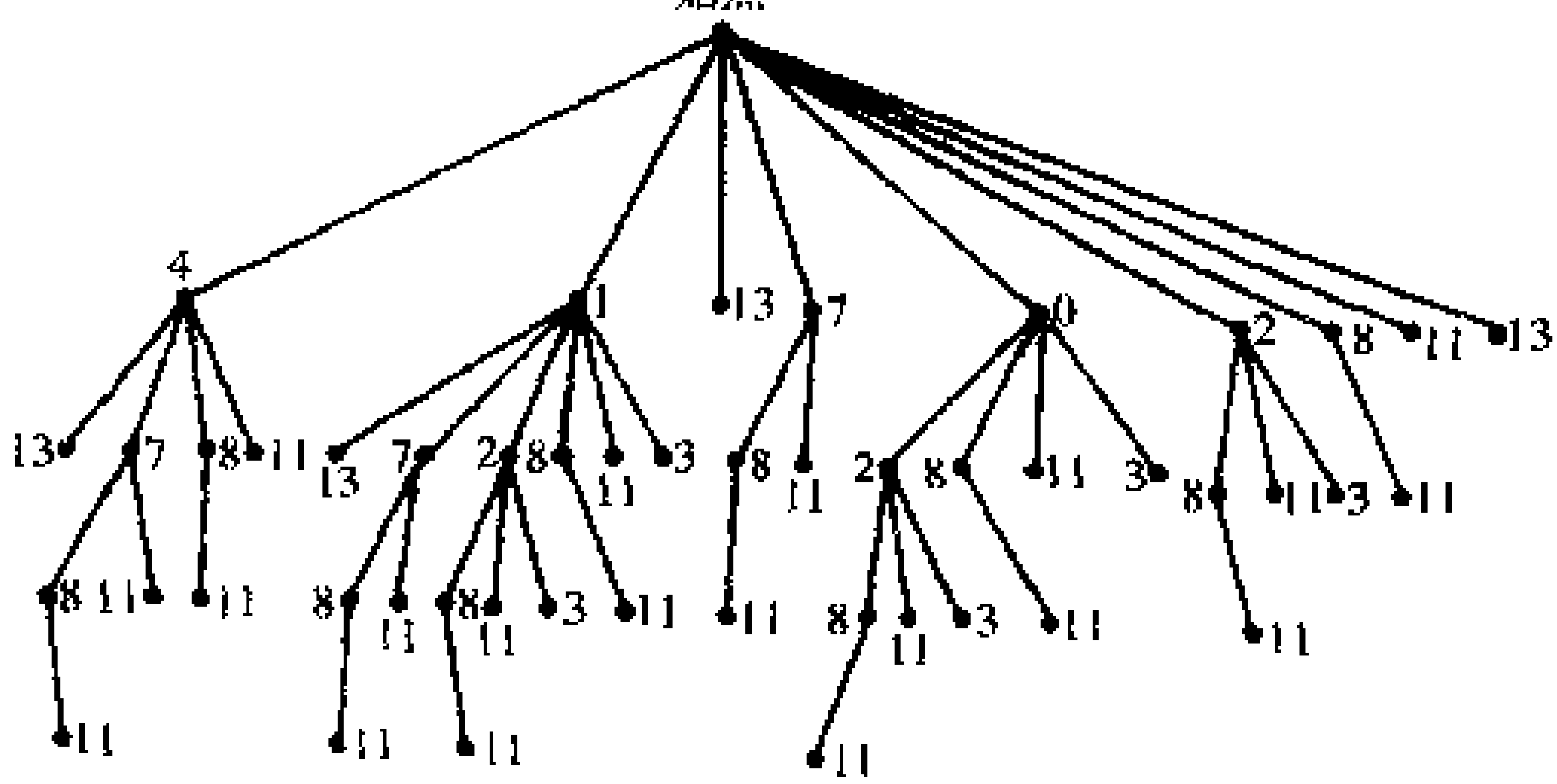


图　35-2

从这棵树上很容易观察到：这个序列包括 4 个最长单调递增序列，它们是(4,7,8,11)，(1,7,8,11)，(1,2,8,11)和(0,2,8,11). 每个子序列的段数都是 4(这种树在程序设计中称为数据树).

2. K_5 有 $5^{5-2}=125$ 个生成树. 根据顶点的最高次数分

析，可知其中互不同构的生成树只有三种．如图 35-3 所示．

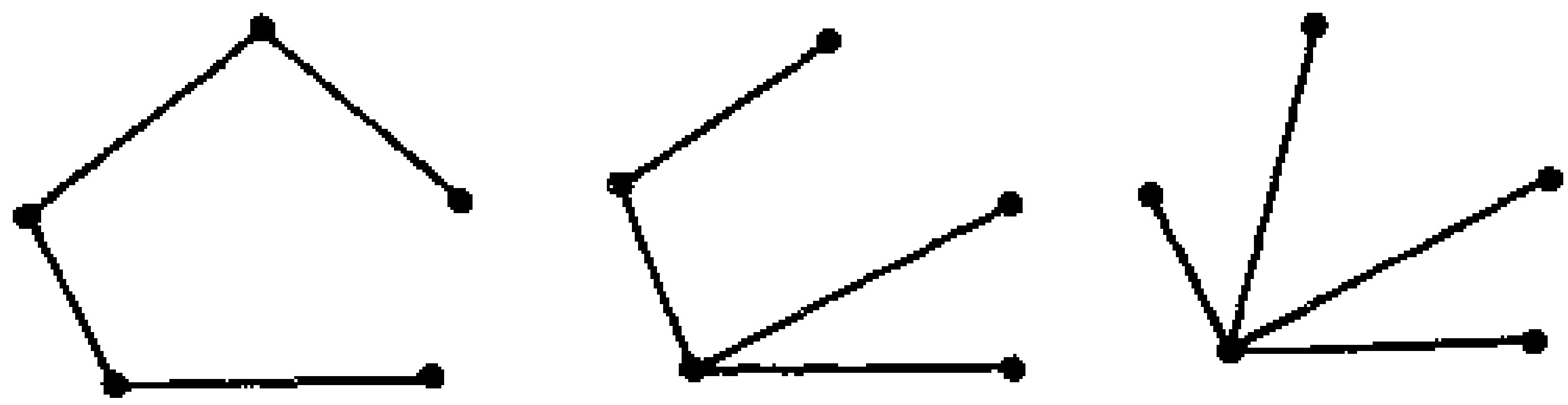


图　35-3

3. 我们用点表示选手，两名选手如果进行比赛，就在相应的两个点之间连一条边，只要证明这样得到的图是树即可确定比赛场数．我们用归纳法证明．当 $n=1$ 时，显然，设 $n=k$ 时命题成立，当 $n=k+1$ 时，设在第一场比赛中选手 v_0 被 v_2 淘汰 $(1\leqslant i\leqslant k)$，则由归纳假设 $v_1,v_2,\cdots,v_k$ 组成的图是树，添上一条边 (v_2,v_0) 仍然是树．

树的边数为 $n-1$，即共需进行 $n-1$ 场比赛．

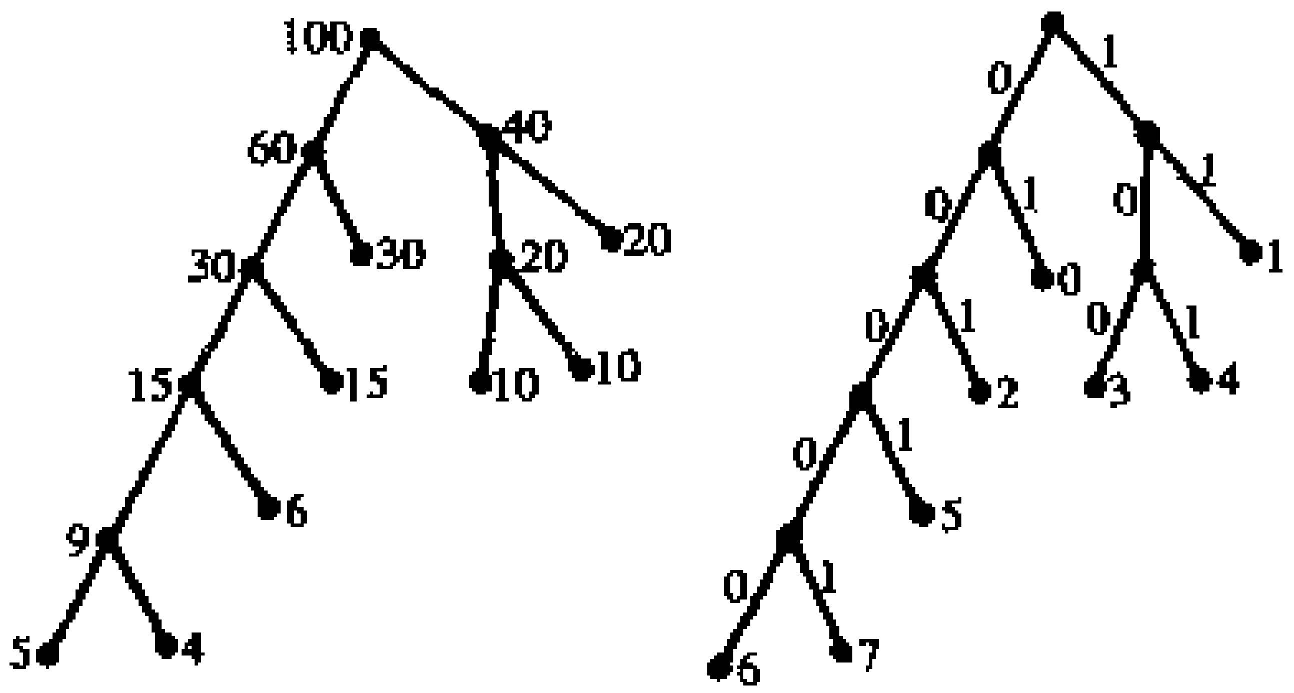
练习三十六

应该用较短的符号串传输出现频率高的数字，因而可用 100 乘以各数字出现的频率作为权，求最优二叉树．然后用这样的二叉树产生前缀码，用 100 乘以各频率得权 $w_0=30$，$w_1=20$，$w_2=15$，$w_3=10$，$w_4=10$，$w_5=6$，$w_6=5$，$w_7=4$．将这些权由小到大排列得 4，5，6，10，10，15，20，30．

(1) 所求二叉树为图 36-4(a)所示；

(2) 产生的前缀码如图 36-4(b)所示．带权为 w_i 的树叶对应的符号串就为传输 i 的符号串．数字之对应的符号串为：0：01，1：11，2：001，3：100，4：101，5：0001，6：00000，7：00001．

用这样的符号串传输上述比例出现的数字最省．



(a) (b)

图 36-4

(3) $10^4\times0.3\times2+10^4\times0.2\times2+10^4\times0.15\times3+10^4\times0.1\times3+10^4\times0.1\times3+10^4\times0.06\times4+10^4\times0.05\times5+10^4\times0.04\times5=27400$.

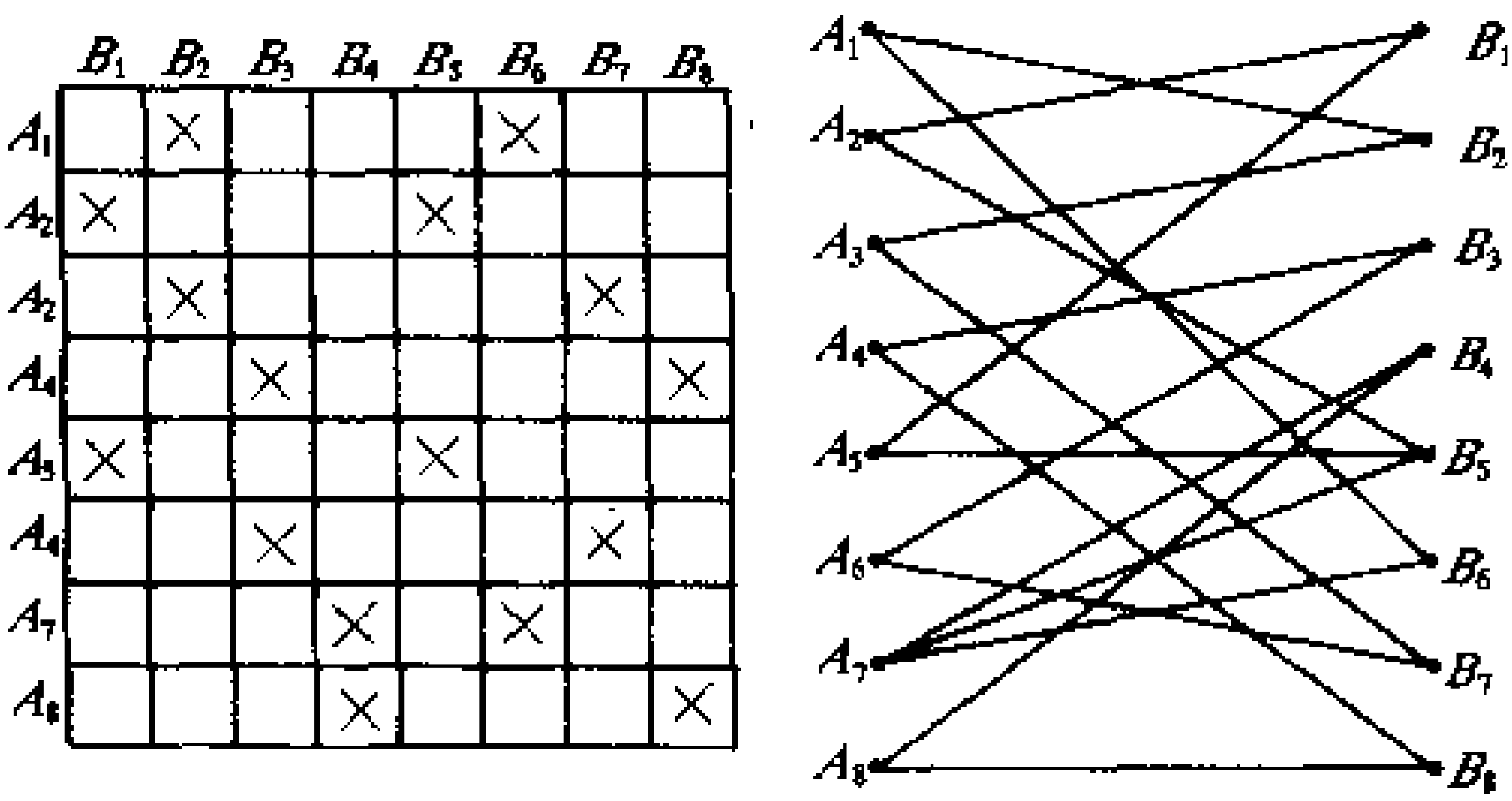
所以传输 10000 个按上述比例出现的数字至少要用 27400 个二进制数字.

练习三十七

1. 略.

2. 我们把棋盘的每一行看成一个顶点，得 8 个顶点 A_1，A_2，…，A_8. 同样，每一列看成一个顶点，得到 B_1，B_2，…，B_8. 如果第 i 行第 j 列交叉处的格子已标上记号，就在顶点 A_i 与 B_i 间连一条边，这样就得到一个二分图. 如图 37-6(a)及相应二分图 37-6(b)所示. 按题设，图中每个顶点次数都是 2，由上题结果，可以把图中 16 条边分成两组，每组都是一个完美匹配. 在一个完美匹配中 8 条边对应的 8 个格子中放上白棋，其余格子中放上黑棋，正好满足本题要求.

3. 理论上已证明：设 M 是 $m\times n$ 拉丁长方阵，且 $m<n$，



(a)　　　　(b)

图　37-6

那么可以添加 $n-m$ 行使 M 扩充为拉丁方阵.

(1) 设 $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ 的子集分别是：$S_1=\{5,6\}$，$S_2=\{3,6\}$，$S_3=\{4,5\}$，$S_4=\{2,3\}$，$S_5=\{1,2\}$，$S_6=\{1,4\}$. 使用求相异代表组的算法，可求得相异代表组为 $\{5,6,4,3,2,1\}$ 和 $\{6,3,5,2,1,4\}$. 于是，得到 6×6 拉丁方阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

(2) 仿照上题可得 4×4 拉丁方阵为

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

练习三十八

1. 因图是连通的简单平面图，故由欧拉公式 $n-m+f=2$ 得 $f=2-n+m=2-6+12=8$. 设一个区域的边界为 a 条，一条边最多可作为两个不同区域的边界，则有 $af\leqslant 2m$，故 $a\times 8\leqslant 2\times 12=24$，$a\leqslant 3$. 因为平面图的区域至少要三条边围成，故只能是 $a=3$，所以这八个平面区域的每一个区域都只能由三条边围成.

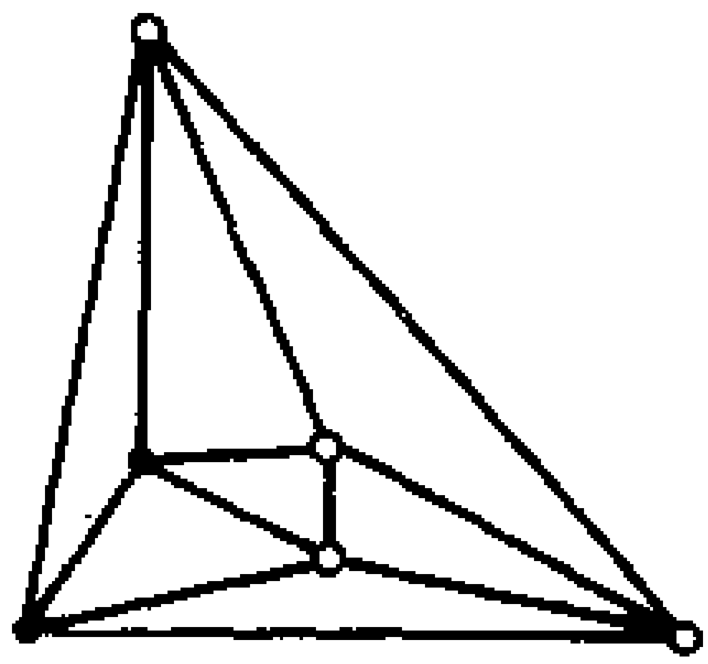


图 38-4

我们可以画出 6 个顶点和 12 条边的连通的简单平面图（图 38-4）.

2. 设正多面体有 n 个顶点、m 条棱和 f 个面，考虑对应的连通平面图，即正多面体图也有 n 个顶点、m 条边和 f 个面，并且每个面有相同的边数 n，每个顶点有相同的度数 t.

因为这个正多面体有 f 个面，每个面有 h 条边，共有 hf 条边（包括重复计算过的边）. 又因为每条边都是两个面的公共边，每条边都被重复计算过两次，因此，这个正多面体图共有 $hf/2$ 条边，即 $m=hf/2$，$f=2m/h$.

又因这正多面体图有 n 个顶点，每个顶点度数为 t，一共有 tn 条边，又每条边连结两个顶点，所以每条边都被计算过两次，因此这个正多面体图一共有 $tn/2$ 条边，即 $m=tn/2$，$n=2m/t$.

由欧拉公式，可得

$$2=n-m+f=\left(\frac{2}{t}\right)m-m+\left(\frac{2}{h}\right)m$$
$$=\left(\frac{2}{t}-1+\frac{2}{h}\right)m=\left(\frac{2h+2t-ht}{ht}\right)m,$$

显然

$$2h+2t-ht>0,$$

即

$$ht-2h-2t+4<4,$$
$$(h-2)(t-2)<4.$$

这里$(h-2)$与$(t-2)$都是正整数，只有 5 种情况可使它们的乘积小于 4. 对应于 h 和 t 分别为 3 和 3、3 和 4、4 和 3、3 和 5、5 和 3，得到如图 38-5 所示的 5 个图.

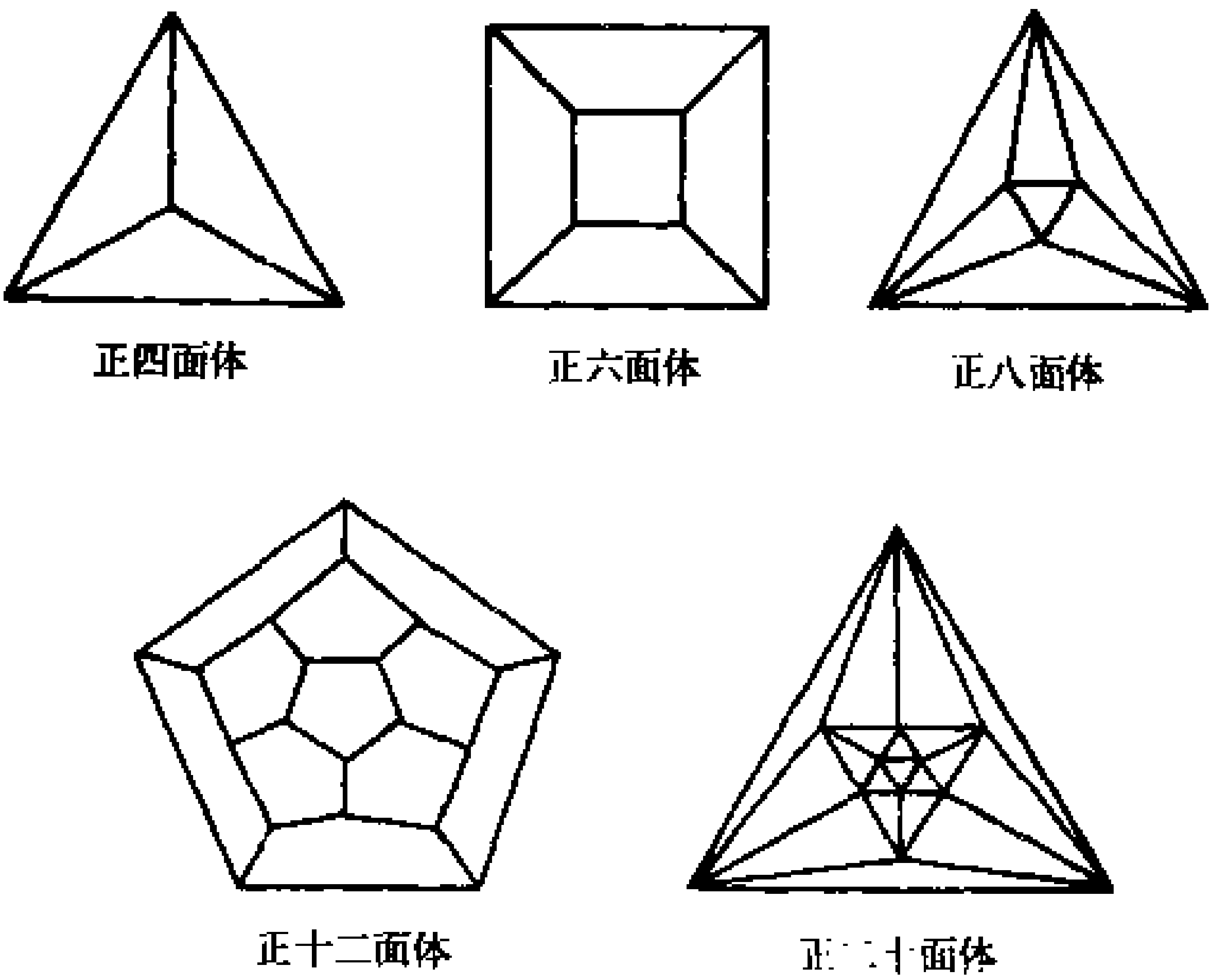


图 38-5

由上述分析和计算可列表如下(表 38.1).

表 38.1

h	t	m	n	f
3	3	6	4	4
4	3	12	8	6
3	4	12	6	8
5	3	30	20	12
3	5	30	12	20

因此，对应地分别得到正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体，共五种多面体.

3. 判定时，首先可按公式($m\leqslant 3n-6$)进行检查，如不满足，一定是非平面图；如满足，也不一定是平面图，还应找出基本回路，把回路内交叉的边置于回路之内或之外，看能否不相交；在无法避免交叉时，对图进行减缩，看子图是与 K_5，还是 $K_{3,3}$在 2 次顶点内同构.

图 38-2(a)中 10 条边、7 个顶点，满足 $m\leqslant 3n-6$($m=10$，$3n-6=21-6=15$). 考虑点 1,2,3，若删去次数为 2 的顶点 2，则减缩后的图为 $K_{3,3}$，故(a)是非平面图.

图 38-2(b)中有 11 条边、6 个顶点，满足公式($m\leqslant 3n-6$)，考虑边(2,6)与(3,5)，只要把它们置于回路(1234561)之外，即得平面图如图 38-6 所示.

图 38-2(c)中有 16 条边、8 个顶点，满足公式($m\leqslant 3n-6$)，考虑将点 1,3,5,7(或者点 2,4,6,8)间的四条边置于回路(123456781)之外，即得平面图如图 38-7 所示.

4. 只要找出图 38-3 的任一个子图使之能减缩成 K_5 或 $K_{3,3}$即可. 为此可以先找出与它同构的图，然后再找子图.

由两图同构的一些基本条件(顶点数、边数相等，顶点次数对应相等和一一对应关系)，我们找出图 38-3 的同构图 38-8(a)，并取其子图如图 38-8(b).

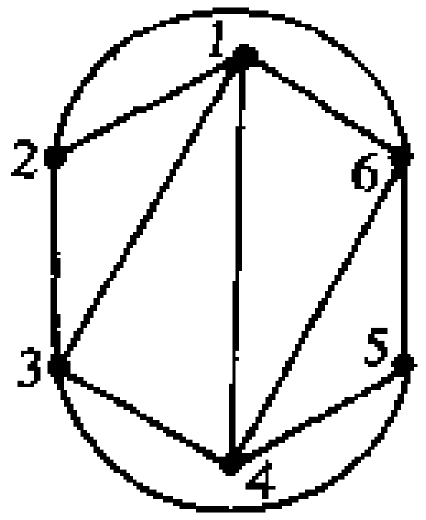


图 38-6

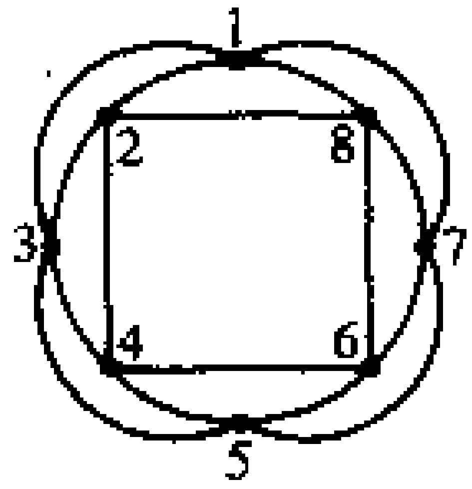
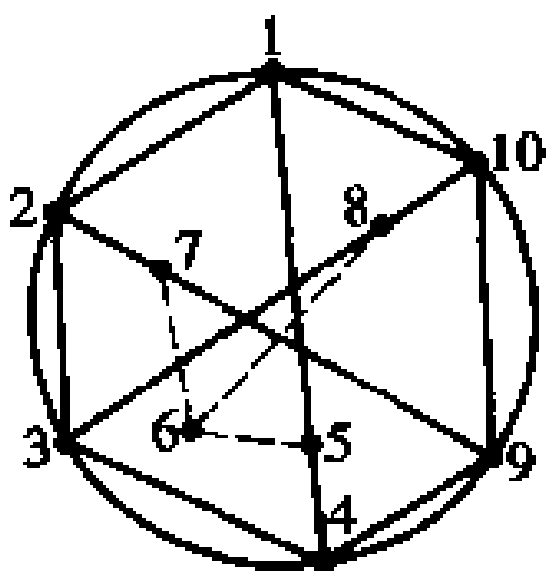
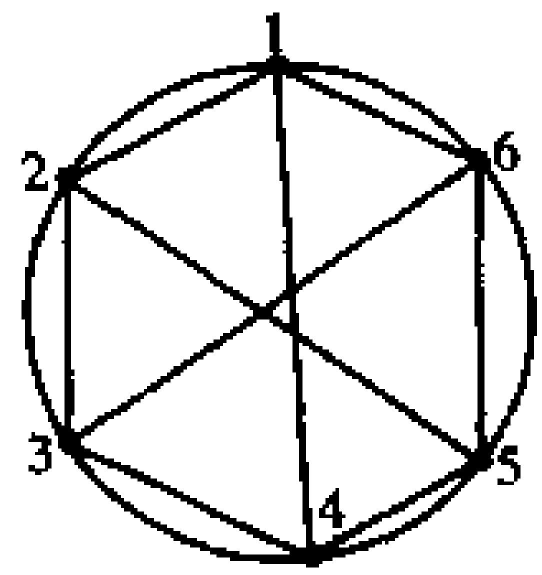


图 38-7



(a)



(b)

图 38-8

显然，对子图 38-8(b)中次数为 2 的顶点 5，7，8 进行减缩即得到 $K_{3,3}$，所以图 38-3 为非平面图.

练习三十九

1. 把 G 转化为对偶图 G^*（图 39-7 所示），即判定 G^* 是否存在欧拉回路问题.

易知，G^* 存在奇顶点，故 G^* 是非欧拉图，因而不存在一条回路通过各房门一次且仅一次.

2. 各顶点的排列顺序如下：

$$v_5 \quad v_3 \quad v_7 \quad v_1 \quad v_2 \quad v_4 \quad v_6 \quad v_8$$

用第一种颜色着在 v_5，v_1 上（方框表示），得到的序列是：

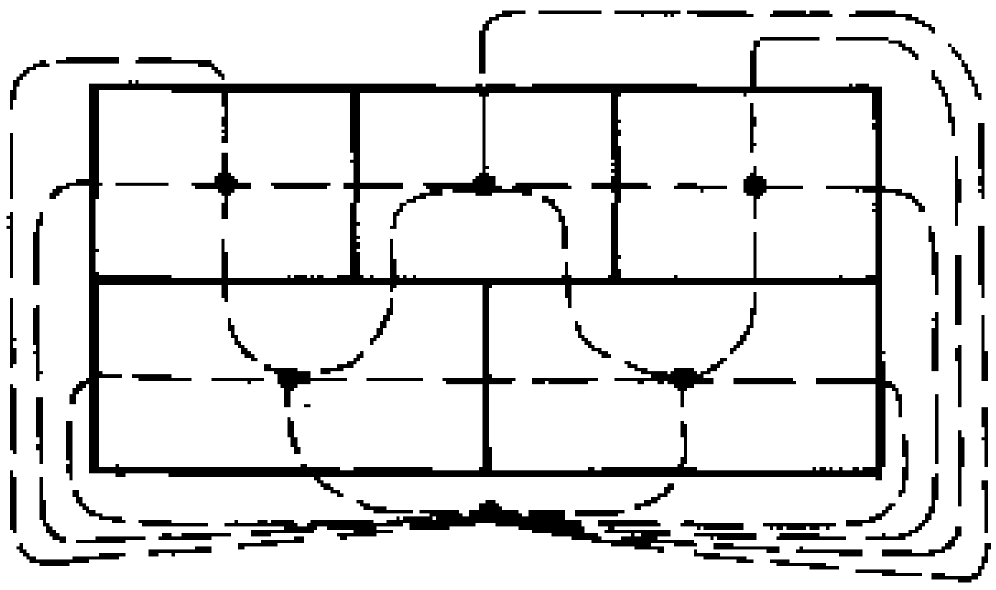


图 39-7

$\boxed{v_5}$ v_3 v_7 $\boxed{v_1}$ v_2 v_4 v_6 v_8,用第二种颜色,着在余下的空白子序列 v_3、v_4、v_8 上(三角框表示),得到的序列是: $\boxed{v_5}$ v_3 v_7 $\boxed{v_1}$ v_2 v_4 v_6 v_8,用第三种颜色着在余下的空白子序列的 v_7、v_2、v_6 上,故每个相邻顶点着了不同的颜色.这个顶点序列只要三种颜色就够了,因此 G 是个 3-色图,即 $x(G)=3$.

3. 我们作图 39-8,顶点 $v_1,v_2,\cdots,v_{12}$ 对应子图 G 中边 e_1,$e_2,\cdots,e_{12}$,顶点 v_i 与 v_j 之间有边相连表示图 G 中的边 e_i 与 e_j

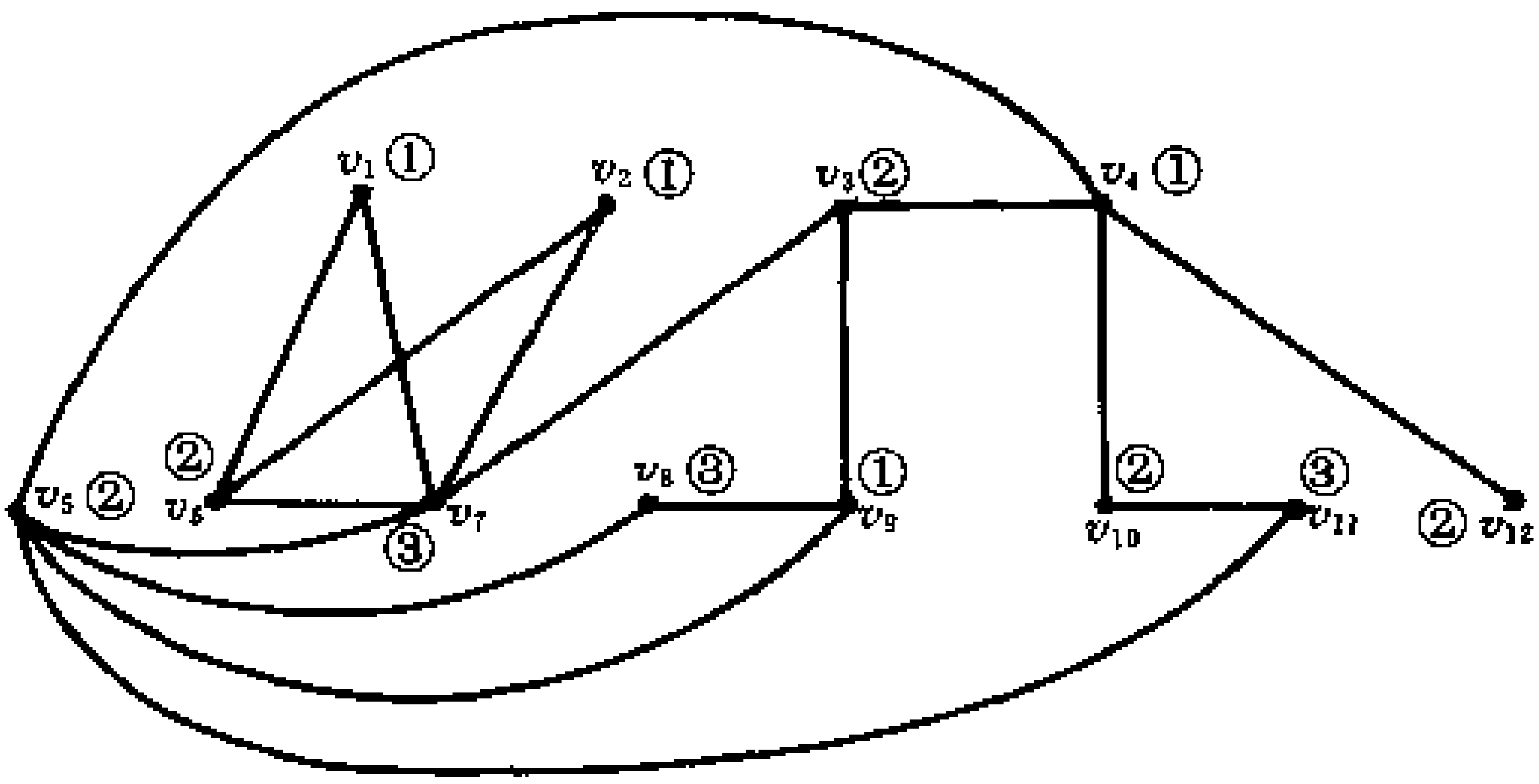


图 39-8

相交(非接点处). 例如,边 e_1 与边 e_6, e_7 相交于非接点处,对应 v_1 与 v_6 有连边, v_1 与 v_7 有连边,等等.

这个新的图的色数是 3,图 39-8 中三种颜色用①、②、③表示. 如果顶点 v_i 与 v_j 相邻,那么 v_i 与 v_j 着上不同颜色,对应的图 G 中边 e_i 与 e_j 相交时, e_i 与 e_j 着上不同的颜色. 所以 G 中同一颜色的边所构成的子图是 G 的平面子图. 这样,将 G 中着上同一颜色的边放在同一层印刷电路板上. 因此,图39-6 所设计的印刷电路板最少需要三层. 如图 39-9 中(a),(b),(c)所示. 对于每个接点来说,三层都是相连的.

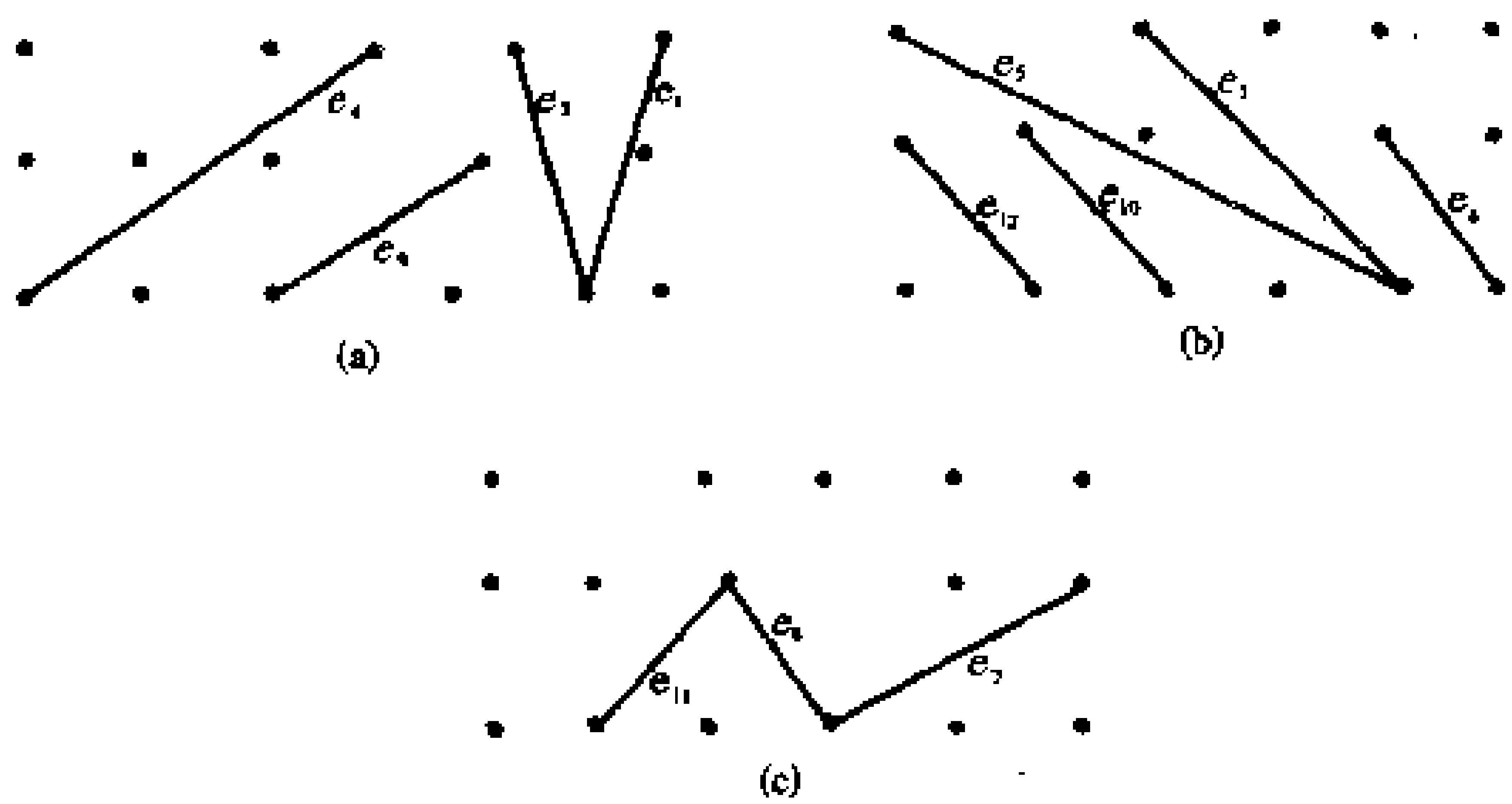


图 39-9

练 习 四 十

1. $n-1$.　　**2.** 略.

3. (1) $n-1$ 个黑圆点排在直线 l 上,把 l 分成 n 段,每段看成一个盒子,自左到右编为 $1,2,\cdots,n$ 号, r 个球没有区别,都用星号(*)表示. r 个球在 n 个盒的占位方法,可与 r 个星号(*)与 $n-1$ 个圆点(·)在 l 上的排列方式一一配对. 见图

40-1. 对应着：1 号盒放 1 个球，2 号盒放 2 个球，3 号盒没有球，4 号盒放 1 个球，5 号盒放 4 个球. 以 A 记满足题设的放球方法全体，以 B 记 r 个“$*$”、$n-1$ 个“·”的排列方式全体，则 $|A|=|B|$. B 中的每一种排列方式可如下得到：在 l 上的 $r+n-1$ 个位置中选 r 个放上“$*$”，余者放上“·”，因此 $|A|=|B|=C_{r+n-1}^{r}$.

图　40-1

(2) 为了使每盒不空，可每盒各放 1 球. 球无区别，故只有 1 种放法. 余下的 $r-n$ 个球分放 n 盒，由(1)的结论，有 $C_{r-n+n-1}^{r-n}$ 种放法，因此，没有空盒的放法有 C_{r-1}^{r-n} 种.

注意，该题属于组合论中分配问题，它与概率论中著名的占位问题有关. 近代统计物理中构造所谓微粒子模型，该题就是与之有关的一种数学模型.

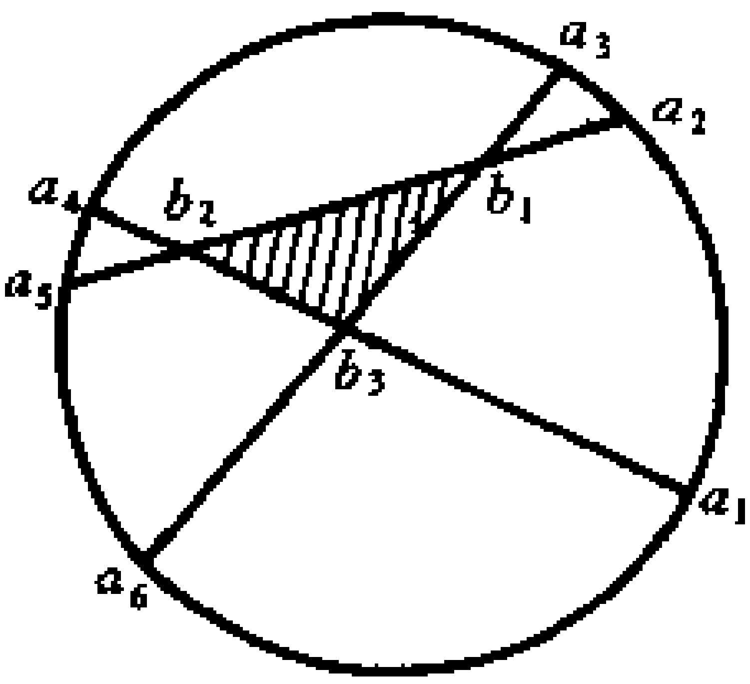


图　40-2

4. 符合题设的三角形全体记为 A，设 $\triangle b_1b_2b_3\in A$，延长三边，与圆周有 6 个交点 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6(图 40-2)，设这 6 个点按反时针顺序排列，它是 n 个给定点中的 6 个点，反过来，对这 6 个点，也只有连结 a_1a_4、a_2a_5、a_3a_6 才能得到 A 中的一个三角形，而且，由 n 个给定点中的任意 6 个点都可以按这种连结方法得到 A 中的一个三角形. 令 $\triangle b_1b_2b_3$ 与 6 点集 $\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ 配对，这给出了 A 中的三角形与由 n 个给定点产生的 6 点集之

间的一种一一对应. 由 n 个点产生的 6 点集有 C_n^6 个，所以 $|A|=C_n^6$.

练习四十一

1. $A_0=\{5,10,15,\cdots\}$是被 5 整除的一类正整数；

$A_1=\{1,6,11,\cdots\}$是被 5 除后余数为 1 的一类正整数；

$A_2=\{2,7,12,\cdots\}$是被 5 除后余数为 2 的一类正整数；

$A_3=\{3,8,13,\cdots\}$是被 5 除后余数为 3 的一类正整数；

$A_4=\{4,9,14,\cdots\}$是被 5 除后余数为 4 的一类正整数.

于是，A_0,A_1,A_2,A_3,A_4 构成正整数集合 U 的一个分划.

2. 我们从反面考虑，在 1 到 600 之间可以被 6 整除的数的个数是 $600\div 6=100$ 个，那么余下的就是不能被 6 整除的数，有 $600-100=500$ 个.

这实际上是将集合 S 分成两个不相交的子集 A 与$\overline{A}$，所求的解是 $|A|=|S|-|\overline{A}|$.

3. 112 个.　　4. 略.

练习四十二

1. 用 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表示 1 到 250 之间能被 2，3，5，7 整除的整数集合. $[x]$表示不超过 x 的最大整数，则

$$|A_1|=[250/2]=125,\quad |A_2|=[250/3]=83,$$

$$|A_3|=[250/5]=50,\quad |A_4|=[250/7]=35.$$

$$|A_1\cap A_2|=[250/(2\times 3)]=41,$$

$$|A_1\cap A_3|=[250/(2\times 5)]=25,$$

$$|A_2\cap A_3|=[250/(3\times 5)]=16,$$

$$|A_1\cap A_4|=[250/(2\times 7)]=17,$$

$$|A_2\cap A_4|=[250/(3\times 7)]=11,$$

$$|A_3 \cap A_4| = [250/(5\times 7)] = 7,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = [250/(2\times 3\times 5)] = 8,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = [250/(2\times 3\times 7)] = 5,$$
$$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = [250/(2\times 5\times 7)] = 3,$$
$$|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = [250/(3\times 5\times 7)] = 2,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = [250/(2\times 3\times 5\times 7)] = 1.$$

于是由容斥原理，可得

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| &= 125+83+50+35-41-25-16-17\\&\quad -11-7+8+5+3+2-1\\&=193.\end{aligned}$$

2. 用 A_1, A_2, A_3 分别表示参加数学、物理、英语竞赛的学生集合，于是 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 表示三科都参加的学生，$A_1 \cup A_2 \cup A_3$ 表示全部参加过比赛的学生(只要参加了)．先求 $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$ 的最大可能数，由容斥原理

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|\\&\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3|.\end{aligned}$$

这只要在上式中 $|A_1 \cap A_2|, |A_1 \cap A_3|, |A_2 \cap A_3|$ 各取最小值即可．

由定理 1 知

$$|A_1 \cap A_2| \geqslant |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3,$$
$$|A_1 \cap A_3| \geqslant |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3,$$
$$|A_2 \cap A_3| \geqslant |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3.$$

而 $|A_1| = 15, |A_2| = 8, |A_3| = 6, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3$，因此

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| \leqslant 15+8+6+3-3-3-3 = 23.$$

这表明 30 人中至多有 23 人参加竞赛，从而至少有 7 人一科竞赛都没有参加．

3. 设 A_1, A_2, A_3 分别表示具有收音机、空调器、白圈轮胎

的汽车集合，由题意有

$$|A_1|=15,\quad |A_2|=8,\quad |A_3|=6,$$

并且

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=3.$$

由容斥原理，有

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3|&=15+8+6-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|\\&\quad-|A_2\cap A_3|+3\\&=32-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|,\end{aligned}$$

因为

$$|A_1\cap A_2|\geqslant|A_1\cap A_2\cap A_3|,$$
$$|A_1\cap A_3|\geqslant|A_1\cap A_2\cap A_3|,$$
$$|A_2\cap A_3|\geqslant|A_1\cap A_2\cap A_3|.$$

所以有

$$|A_1\cup A_2\cup A_3|\leqslant 32-3-3-3=23.$$

即最多有 23 辆汽车至少具备上述三种设备之一. 因此，这三种设备都不具备的汽车，至少有 7 辆.

练习四十三

1. 设 2 到 120 的整数集合为 S，则 $|S|=119$. 不超过 $[\sqrt{120}]$ 的素数有 4 个：2，3，5，7. 以 $\pi(n)$ 记不超过 n 的素数的个数，以 A_i 记 S 中 i 的倍数全体. 于是 $\overline{A}_i$ 表示 S 中不是数 i 的倍数全体，因此，$\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_5\cap\overline{A}_7$ 中的数都是素数，但素数 2，3，5，7 不在其中，所以

$$\pi(120)=4+|\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_5\cap A_7|.$$

容易算得，$|A_2|=60$，$|A_3|=40$，$|A_5|=24$，$|A_7|=17$；$|A_6|=20$，$|A_{10}|=12$，$|A_{14}|=|A_{15}|=8$，$|A_{21}|=5$，$|A_{35}|=3$，

$|A_{30}|=4, |A_{42}|=2, |A_{70}|=|A_{105}|=1; |A_{120}|=0$. 由逐步淘汰原理，有

$$\begin{aligned}|\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_5\cap\overline{A}_7|=S-(&|A_2|+|A_3|+|A_5|+|A_7|)+\\&(|A_6|+|A_{10}|+|A_{14}|+|A_{15}|+\\&|A_{21}|+|A_{35}|)-(|A_{30}|+|A_{42}|+\\&|A_{70}|+|A_{105}|+|A_{120}|),\end{aligned}$$

代入数值，就有

$$\pi(120)=4+|\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_5\cap\overline{A}_7|=4+26=30.$$

2. 设 A_1,A_2,A_3,A_4 分别表示 1 到10 000之间能被 4，6，7，10 除尽的整数集合. 于是问题变为求 $|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4|$. 而

$$\begin{aligned}&|A_1|+|A_2|+|A_3|+|A_4|\\&\quad=\left[\frac{10000}{4}\right]+\left[\frac{10000}{6}\right]+\left[\frac{10000}{7}\right]+\left[\frac{10000}{10}\right]\\&\quad=2500+1666+1428+1000=6594.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_1\cap A_4|+|A_2\cap A_3|\\&\quad+|A_2\cap A_4|+|A_3\cap A_4|\\&\quad=\left[\frac{10000}{(4,6)}\right]+\left[\frac{10000}{(4,7)}\right]+\left[\frac{10000}{(4,10)}\right]+\left[\frac{10000}{(6,7)}\right]\\&\qquad+\left[\frac{10000}{(6,10)}\right]+\left[\frac{10000}{(7,10)}\right]\\&\quad=\left[\frac{10000}{12}\right]+\left[\frac{10000}{28}\right]+\left[\frac{10000}{20}\right]+\left[\frac{10000}{42}\right]\\&\qquad+\left[\frac{10000}{30}\right]+\left[\frac{10000}{70}\right]\\&\quad=833+357+500+238+338+142\\&\quad=2403.\end{aligned}$$

其中各分母中的 (a,b) 表示 a,b 的最小公倍数，以下同.

$|A_1\cap A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_4|+|A_1\cap A_3\cap A_4|$
$+|A_2\cap A_3\cap A_4|$
$=\left[\frac{10000}{(4,6,7)}\right]+\left[\frac{10000}{(4,6,10)}\right]+\left[\frac{10000}{(4,7,10)}\right]+\left[\frac{10000}{(6,7,10)}\right]$
$=119+166+71+47$
$=403.$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=\left[\frac{10000}{(4,6,7,10)}\right]=\left[\frac{10000}{420}\right]=23.$$

由逐步淘汰原理，有

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3\cap\overline{A}_4|=10000-6594+2403-403+23=5429.$$

3. 因为$[\sqrt{10000}]=100$，凡是小于 100 的数，其平方一定落在 1 到10 000之间，这意味着 1 到10 000之间有 100 个数是完全平方数. 同样地$[\sqrt[3]{10000}]=21$，所以有 21 个数是完全立方数$[\sqrt[6]{10000}]=4$，所以有 4 个数是完全六次方数.

由逐步淘汰原理，则非完全平方数、非完全立方数的个数为 $10000-(100+21)+4=9883$.

练习四十四

1. 按下述步骤写出符合题设的五位数. 第一步，从 1,3,5,7,9 中选一个作为个位数，有 5 种选法；第二步，除数字 0 及已选作个位数的那个数字外，从其余 8 个数字中选一个作为万位数，有 8 种选法；第三步，除已选作个位数及万位数的 2 个数字外，从其余 8 个数字中选 3 个在千、百、十位上排列，有 P_8^3 种方法，由乘法原理，共可写出 $5\times8\times P_8^3=13440$ 种符合条件的五位数.

注意，第一步保证写出的是奇数，第二步保证写出的是五位数（万位数不为 0），这是在决定分步方法时首先要考虑到的. 另外，如果要调换这两步的顺序，则将会发现，要得出答案就费事得多.

2. 从 6 人中选出 2 人小组，共有 C_6^2 个，其中任意两个小组 A_1 与 A_2，不能打开的锁一定不相同. 否则，设 A_1 组与 A_2 组都无法打开锁 a，这两组至少共有 3 人，却无法打开锁 a，与分发钥匙的要求相矛盾. 因此，保密室至少应配 $C_6^2=15$ 把锁.

再考虑这 6 人中的任一个，比如张三，对于任一个不包括张三的 2 人小组 A，A 组无法打开保密室，但加进张三后可以打开保密室，这表明张三手上应有 2 人小组 A 不能打开的那把锁的钥匙，因不包括张三的 2 人小组共有 $C_5^2=10$ 个，故张三至少应有 10 把钥匙.

最后，确实可以给出一种配 15 把锁，每人分发 10 把钥匙的方案，它符合要求：任意 2 人无法打开保密室，任意 3 人能够打开保密室. 方案如表 44.1 所示：

表 44.1

人数	锁数														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	×	×	×
2	×	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×
3	✓	✓	✓	×	×	×	×	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	✓
4	✓	✓	×	✓	×	✓	✓	✓	×	×	✓	✓	×	✓	✓
5	✓	×	✓	✓	✓	×	✓	×	×	✓	✓	×	✓	✓	✓
6	✓	✓	✓	✓	✓	✓	×	×	✓	×	×	✓	✓	✓	✓

3. $\dfrac{1}{2n-1}C_{2n}^{m}$.　　**4.** C_{2n-1}^{m}.

练习四十五

1. (1) 先让 $n+m$ 个男人排成一列，有 $(n+m)!$ 种排法. 男人之间都留出一个空位，共有 $n+m-1$ 个空位. 再让 m 个女人在这 $n+m-1$ 个空位选 m 个位置排列，有 P_{n+m-1}^{m} 种排列方法. 由乘法原理，共有 $(n+m)!\ P_{n+m-1}^{m}$ 种排法.

(2) 先让 $n+m$ 个男人围成一圈，由圆排列公式，有 $(n+m-1)!$ 种排法. 男人之间都留出一个空位，再让 m 个女人在这个 $n+m$ 个空位选 m 个位置排列，有 P_{n+m}^{m} 种排列方法. 因此，共有 $(n+m-1)!\ P_{n+m}^{m}$ 种排法. 注意，因男人已经排定，所以 m 个女人的排列不能当作圆排列.

2. 第一轮的 4 组，自左至右记为一、二、三、四组，其中第一、二组为甲区，第三、四组为乙区. 8 个队抽签即是在图 45-1 的 8 个位置排列，有 8! 种排法. 但是，两种不同的排列未必是两种实际上不同的比赛安排表. 事实上，8 个队中的某 4 个队都分在甲区与都分在乙区，实际上一样；甲区 4 个队中的某 2 个队都分在一组与都分在二组，实际上一样；乙区 4 个队中的某 2 个队都分在三组与都分在四组，实际上一样；同组(一、二、三、四组)中的 2 个队，谁编为奇数号或偶数号，实际上也一样. 因此，由乘法原理，在 8! 种排法中，与某一种排列 W 实质相同的排法有 $2\times 2^2\times 2^4=2^7$ 种(包括 W). 以 f 记实际上不同的比赛安排表的种数，则有 $2^7 f=8!$，所以 $f=8!\ 2^{-7}$.

注意此题不是直接计算 f，而是间接地通过计算与排法 W 实际上相同的所有排法的种数，再求出 f. 这也是一种常用的处理问题的方法.

3. $\dfrac{10!}{2!\ 2!\ 2!\ 2!\ 2!}-C_5^1\cdot\dfrac{9!}{2!\ 2!\ 2!\ 2!}+C_5^2\cdot\dfrac{8!}{2!\ 2!\ 2!}$

$-C_5^3 \cdot \frac{7!}{2!\ 2!}+C_5^4 \cdot \frac{6!}{2!}-C_5^5 \cdot 5!.$

4. 126720.

练习四十六

1. 令 $f(k+1)-f(k)=(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$，由此递推式，得

$$f(2)-f(1)=4 \cdot 1^3+6 \cdot 1^2+4 \cdot 1+1,$$
$$f(3)-f(2)=4 \cdot 2^3+6 \cdot 2^2+4 \cdot 2+1,$$
$$f(4)-f(3)=4 \cdot 3^3+6 \cdot 3^2+4 \cdot 3+1,$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$f(n+1)-f(n)=4n^3+6n^2+4n+1.$$

将上面 n 个式子相加，得

$$f(n+1)-f(1)=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n,$$

即

$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+n,$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{(n+1)^4-6 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-n}{4}$$
$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

即

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

利用 $\sum\limits_{k=1}^{n}k$，$\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^3$ 的结果可以求得 $\sum\limits_{k=1}^{n}k^4$ 的结果，

以至求出$\sum_{k=1}^{n}k^m=1^m+2^m+\cdots+n^m$的结果.

2. 设$f(k)=\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}$,由此递推,可得

$$f(1)=\frac{1^2}{2}+\frac{1}{2},$$

$$f(2)=\frac{2^2}{2}+\frac{2}{2},$$

$$f(3)=\frac{3^2}{2}+\frac{3}{2},$$

$$\cdots\qquad\cdots$$

$$f(n)=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2},$$

将n个式子相加,得

$$\begin{aligned}&1+3+6+10+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}\\&=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2).\end{aligned}$$

3. 因 $\frac{1}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}=\frac{\sin(2\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}$

$$=\frac{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha-\cos 2\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}$$

$$=\cot\alpha-\cot 2\alpha.$$

以其为递推式,可得

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}=\cot\alpha-\cot 2\alpha,$$

$$\frac{1}{\sin 4\alpha}=\cot 2\alpha-\cot 4\alpha,$$

$$\frac{1}{\sin 8\alpha}=\cot 4\alpha-\cot 8\alpha,$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\frac{1}{\sin 2^n\alpha}=\cot 2^{n-1}\alpha-\cot 2^n\alpha.$$

将上面 n 个式子相加，就有

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 4\alpha}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n\alpha}=\cot\alpha-\cot 2^n\alpha.$$

4. 略.

练习四十七

1. 用 a_n 表示 n 个圆把平面分成的区域数，显然 $a_1=2$. $n-1$个圆把平面分成 a_{n-1}块区域. 现添加一个圆，使这 n 个圆仍符合题设. 这个新添的圆与原先的 $n-1$ 个圆共有 $2(n-1)$ 个交点，它们把新添的圆分成 $2(n-1)$段弧，而每段弧把原先的某块区域一分为二，所以增加 $2(n-1)$块区域，即有递推公式

$$a_n=a_{n-1}+2(n-1)\ (\text{其中 } n\geqslant 2). \tag{1}$$

为了求 a_{100}，依次把 $n=100,99,\cdots,3,2$ 代入公式(1)

$$\begin{aligned}&a_{100}=a_{99}+2\cdot 99,\\&a_{99}=a_{98}+2\cdot 98,\\&\cdots \qquad \cdots\\&a_3=a_2+2\cdot 2,\\&a_2=a_1+2\cdot 1,\end{aligned} \tag{2}$$

然后，自上面下，一行一行往下推进，并注意 $a_1=2$，就有

$$a_{100}=a_{99}+2\cdot 99=a_{98}+2\cdot 98+2\cdot 99=\cdots$$

$$=a_1+2\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+2\cdot 98+2\cdot 99$$
$$=9902.$$

或者将(2)式等号两边分别相加，即对公式(1)的两边分别取和

$$\sum_{n=2}^{100}a_n=\sum_{n=2}^{100}a_{n-1}+2\sum_{n=2}^{100}(n-1),$$

同样得到 $a_{100}=2+2\sum\limits_{n=2}^{100}(n-1)=9902$，即这 100 个圆把平面分成 9902 块不相重叠的区域.

2. 记 n 个箱子 n 把钥匙好的放法种数为 a_n，显然 $a_2=2$.

考虑 $a_n\geqslant 2$，i 号箱的钥匙称为 i 号钥匙，于是 n 个箱子 n 把钥匙的放法可用 n 元有序数组 $\alpha=(k_1,k_2,\cdots,k_n)$表示：$i$ 号箱放 k_i 号钥匙，$i=1,2,\cdots,n$. 现再添加 $n+1$ 号箱 $n+1$ 号钥匙. 考虑 $n+1$ 个箱子 $n+1$ 把钥匙的下述 $n+1$ 种放法，

$$\alpha_i=(k_1,k_2,\cdots,k_{i-1},n+1,k_{i+1},\cdots,k_n,k_i),\quad 1\leqslant i\leqslant n+1,$$

与 n 个箱子 n 把钥匙的一种放法

$$\alpha=(k_1,k_2,\cdots,k_{i-1},k_i,k_{i+1},\cdots,k_n)$$

的关系. 很明显，α_{n+1}不是好放法. 可以证明：$\alpha_i(1\leqslant i\leqslant n)$是 $n+1$个箱子 $n+1$ 把钥匙的好放法，当且仅当 α 是 n 个箱子 n 把钥匙的好放法. 当 $i=1,2$ 时，这是显然的. 当 $i\geqslant 3$ 时，在放法 α_i 中能打开 i 号箱当且仅当在放法 α 中能打开 i 号箱. 因此，如果在放法 α 中不能打开 i 号箱，则 α_i 与 α 都是不好的放法. 如果在放法 α 中能打开 i 号箱，则不难知道，α_i 与 α 要么都是好放法要么都不是好放法. 因此，按上面的放法，n 个箱子 n 把钥匙的一种好放法与 $n+1$ 个箱子 $n+1$ 把钥匙的一组(n 种)好放法一一对应. 于是有递推公式

$$a_{n+1}=na_n. \tag{1}$$

最后利用递推公式(1)进行迭代，并注意到 $a_2=2$，得

$$a_{30}=29a_{29}=29\cdot 28a_{28}=\cdots=(29!)a_2=(29!)\cdot 2,$$

或者说，在递推公式(1)的两边分别取乘积

$$a_3\cdot a_4\cdot a_5\cdot\cdots\cdot a_{29}\cdot a_{30}=(2a_2)\cdot(3a_3)\cdot(4a_4)\cdot\cdots\cdot(28a_{28})\cdot(29a_{29}),$$

从而得到

$$a_{30}=(29!)a_2=(29!)2.$$

即好的放法种数是 $2\cdot 29!$

3. $a_n=(-1)^n\dfrac{m-1}{m}+\dfrac{(m-1)^n}{m}$.

练习四十八

1. 设 $h(n)$ 是所求的字的个数，$n\geqslant 1$. 我们观察到，长为 1 且没有两个 a 相邻的字有 a，b 和 c，所以 $h(1)=3$. 长为 2 的没有两个 a 相邻的字有 ab，ac，ba，bb，bc，ca，cb，cc. 所以 $h(2)=8$.

设 $n\geqslant 3$，如果字中的第一个字母是 a，那么第二个字母只能是 b 或 c，其余的字母可以有 $h(n-2)$ 种方式来选择，因此以 a 开头的字有 $2h(n-2)$ 个. 如果字中的第一个字母是 b，那么这样的字有 $h(n-1)$ 个，同理以 c 开头的字也有 $h(n-1)$ 个. 由加法原理得

$$\begin{cases} h(n)=2h(n-1)+2h(n-2), & n\geqslant 3, \\ h(1)=3, \quad h(2)=8. \end{cases}$$

先求这个递推方程的通解，它的特征方程是

$$x^2-2x-2=0.$$

特征根为 $x_1=1+\sqrt{3}$，$x_2=1-\sqrt{3}$，所以通解为

$$h(n)=\beta_1(1+\sqrt{3})^n+\beta_2(1-\sqrt{3})^n,$$

代入初值来确定 β_1 和 β_2，得

$$\begin{cases}\beta_1(1+\sqrt{3})+\beta_2(1-\sqrt{3})=3,\\ \beta_1(1+\sqrt{3})^2+\beta_2(1-\sqrt{3})^2=8,\end{cases}$$

解之得

$$\beta_1=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},\quad \beta_2=\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

因此所求的字数是

$$h(n)=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n,$$

$$n=1,2,\cdots.$$

2. 设在 t 时刻的 α 粒子数为 $f(t)$，β 粒子数为 $g(t)$. 由题意可列出下列递推关系

$$\begin{cases}g(t)=3f(t-1)+2g(t-1), & t\geqslant 1, & (1)\\ f(t)=g(t-1), & t\geqslant 1, & (2)\\ g(0)=0,f(0)=1.\end{cases}$$

从(2)式得到

$$f(t-1)=g(t-2),$$

代入(1)得递推方程：

$$\begin{cases}g(t)=3g(t-2)+2g(t-1), \quad t\geqslant 2,\\ g(0)=0,g(1)=3,f(0)+2g(0)=3,\end{cases} \tag{3}$$

特征方程是

$$x^2-2x-3=0,$$

特征根为

$$x_1=3,\quad x_2=-1.$$

所以通解是

$$g(t)=c_1 3^t+c_2(-1)^t,$$

代入初值 $g(0)=0,g(1)=3$，得

$$\begin{cases}c_1+c_2=0,\\3c_1-c_2=3,\end{cases}$$

解之得

$$c_1=3/4,\quad c_2=-3/4,$$

所以递推方程(3)的解是

$$g(t)=\frac{3}{4}\cdot 3^t-\frac{3}{4}(-1)^t,$$

从而求得

$$f(t)=g(t-1)=\frac{3}{4}\cdot 3^{t-1}-\frac{3}{4}(-1)^{t-1},$$

$$f(t)+g(t)=\frac{3}{4}\cdot 3^{t-1}-\frac{3}{4}(-1)^{t-1}+\frac{3}{4}\cdot 3^t-\frac{3}{4}(-1)^t=3^t.$$

因此有

$$f(100)=\frac{3}{4}\cdot 3^{99}-\frac{3}{4}(-1)^{99}=\frac{3}{4}(3^{99}+1),$$

$$g(100)=\frac{3}{4}\cdot 3^{100}-\frac{3}{4}(-1)^{100}=\frac{3}{4}(3^{100}-1),$$

$$f(100)+g(100)=3^{100}.$$

3. 考虑 $n+4$ 枚棋子，首尾两次都是甲取子，无非是下述三种情形之一：(1) 甲先取 1 子，乙再取 1 子，此时余下 $n+2$ 子，首尾两次都是甲取子，有 $f(n+2)$ 种取法；(2) 甲先取 1 子，乙再取 2 子或甲先取 2 子乙再取 1 子，此时余下 $n+1$ 子，首尾两次都是甲取子，有 $2f(n+1)$ 种取法；(3) 甲先取 2 子，乙再取 2 子，此时余下 n 子，首尾两次都是甲取子，有 $f(n)$ 种取法. 因此有四阶齐次递推方程

$$f(n+4)-f(n+2)-2f(n+1)-f(n)=0, \tag{1}$$

因 $f(1)=f(2)=f(3)=1, f(4)=3$，故若规定 $f(0)=0$，则式(1)当 $n\geqslant 0$ 时成立，方程(1)的特征方程为

$$x^4-x^2-2x-1=0,$$

特征根为

$$x_1=(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2,\quad x_2=(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})/2,$$

$$x_3=(1+\sqrt{5})/2,\quad x_4=(1-\sqrt{5})/2.$$

因此方程(1)的通解为

$$f(n)=\beta_1x_1^n+\beta_2x_2^n+\beta_3x_3^n+\beta_4x_4^n,$$

代入初值 $f(0)=0, f(1)=f(2)=f(3)=1$，得方程组

$$\begin{cases}\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4=0,\\ \beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_3x_3+\beta_4x_4=1,\\ \beta_1x_1^2+\beta_2x_2^2+\beta_3x_3^2+\beta_4x_4^2=1,\\ \beta_1x_1^3+\beta_2x_2^3+\beta_3x_3^3+\beta_4x_4^3=1,\end{cases}$$

解得

$$\beta_1=\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}x_1,\quad \beta_2=-\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}x_2,$$

$$\beta_3=\frac{1}{2\sqrt{5}}x_3,\quad \beta_4=-\frac{1}{2\sqrt{5}}x_4.$$

从而得

$$f(n)=\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}x_1^{n+1}-\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{3}}x_2^{n+1}+\frac{1}{2\sqrt{5}}x_3^{n+1}-\frac{1}{2\sqrt{5}}x_4^{n+1},$$

它的前 n 项是 0,1,1,1,3,4,6,11,17,27,45,72,116,….

顺便指出 $\{f(n)\}$ 是整数序列，但其通项却是用复数形式表示的. 这和前面通项用无理数形式表示相比较是很有趣的.

练习四十九

1. 设称出重量为 r 的方案数为 C_r，称出最大重量为 k 的方案数为 C_k. 不称的方案数为 C_0，则序列 $C_0, C_1, C_2, \cdots, C_k$ 的

母函数为

$$G(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)$$
$$=1+x+x^2+2x^3+3x^4+2x^5+2x^6+2x^7$$
$$+x^8+x^9+x^{10}.$$

从右端的母函数可知能称出从 1 g 到 10 g，系数便是方案数.

2. 母函数

$$G(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)$$
$$\cdot(1+x^4+x^8)$$
$$=1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6+4x^7+5x^8$$
$$+5x^9+5x^{10}+5x^{11}+4x^{12}+4x^{13}+3x^{14}+3x^{15}$$
$$+2x^{16}+2x^{17}+x^{18}+x^{19}.$$

能称出从 1 g 到 19 g 的重量，系数便是方案数.

3. 设取 r 球的组合数为 C_r，则序列 C_0,C_1,C_2,C_3,C_4 的母函数为

$$G(x)=(1+x+x^2)(1+x)(1+x)$$
$$=1+3x+4x^2+3x^3+x^4.$$

共有 1+3+4+3+1=12 种组合方案.

4. 令 a_n 为从 8 位男同志中抽出 n 个的允许组合数. 因为要求男的数目必须是偶数，故 $a_1=a_3=a_5=a_7=0$，$a_0=1$. $a_2=C_8^2=28$，$a_4=C_8^4=70$，$a_6=C_8^6=28$，$a_8=1$. 故数列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_8$ 对应一母函数

$$G_1(x)=1+28x^2+70x^4+28x^6+x^8.$$

用类似的办法可得女同志的允许组合数对应的母函数为

$$G_2(x)=10x^2+10x^3+5x^4+x^5.$$

故

$$G(x)=G_1(x)G_2(x)$$

$$=(1+28x^2+70x^4+28x^6+x^8)(10x^2+10x^3+5x^4+x^5)$$

$$=10x^2+10x^3+285x^4+281x^5+840x^6+728x^7+630x^8+350x^9+150x^{10}+38x^{11}+5x^{12}+x^{13}.$$

$G(x)$中 x^k 项的系数 C_k 为符合要求的 k 个人组成的小组的数目. 总的组成方式的总数为

$$10+10+285+281+840+728+630+350+150+38+5+1=3328.$$

练 习 五 十

设 a_n 表示所求的着色的种数. 若点 n 涂黄色,则点 1,2,3,…,$n-1$ 有 a_{n-1}种着色方法;若点 n 涂蓝色,则点 $n-1$ 只能涂黄色,而余下的点 1,2,…,$n-2$ 有 a_{n-2}种着色方法,于是得到递推关系

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n\geqslant 3).$$

显然 $a_1=2$. 规定 $a_0=1$,则递推关系中的 $n\geqslant 3$ 可改为 $n\geqslant 2$.

我们用母函数的方法求数列$\{a_n\}$的通项公式. 设数列$\{a_n\}$的母函数为 $G(x)$,则

$$\begin{aligned}G(x)&=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots\\&=1+2x+(a_1+a_0)x^2+\cdots+(a_{n-1}+a_{n-2})x^n+\cdots\\&=1+x(1+1+a_1x+a_2x^2+\cdots)\\&\quad+x^2(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)\\&=1+x+xG(x)+x^2G(x),\end{aligned}$$

所以 $$G(x)=\frac{1+x}{1-x-x^2}=\frac{-x-1}{x^2+x-1}.$$

将$\frac{-x-1}{x^2+x-1}$化成部分分式,再分别展成幂级数,可得到

$$a_n=\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

练习五十一

1. $S(5,2)=S(4,1)+2S(4,2)=1+2\times(2^{4-1}-1)=15.$

2. $2!\ S(5,2)=2\times 15=30.$

3. $2^3=8.$

练习五十二

要设法建立一种平衡状态，使 2 的同次幂都成对地出现(要么两个，要么不出现). 坚持这种战术，直到最后的状态仍对自己有利(当然，这个有利，是与最后一个取棋子的人是胜是负的规定有关).

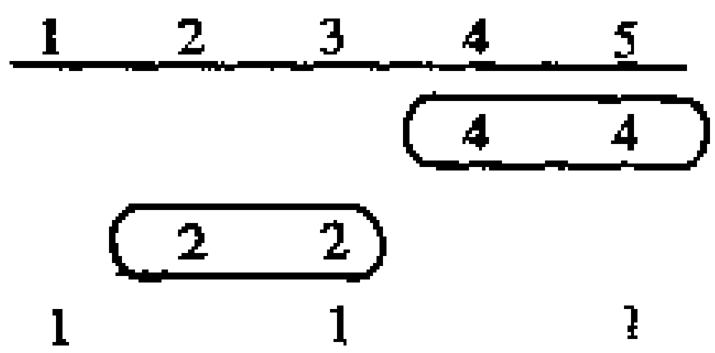


图 52-3

最初，如图 52-3 所示，2 的幂以 4 和 2 的形式成对出现，但以 1 的形式不成对出现，这是不平衡的，所以先取者应从第一、第三或第五行中取走一棋子. 倘若他不懂这游戏的诀窍，譬如错误地从中间一行取走两个棋子，那么懂这游戏诀窍的第二个人从第二行中取走一个硬币，后者显然就取得了一种平衡状态. 照这样下去，懂得游戏诀窍者最终会保持一种必胜的状态(同胜负规定有关，有时这也可以是不平衡的状态)，例如，如果规定最后取走棋子的人是输家，那么懂诀窍的人会让剩下的棋子是 1 1 1 或者 1 1 1 1 1. 值得指出的是，如果懂游戏诀窍的人是后者，而对方无意识地在先者取棋子时获得了有利状态，那么，懂游戏诀窍的人就应该只取走一个棋子，而把希望寄托在对手下一轮取棋子时发生错误. 此

外，当棋子比较少，譬如本题只有 15 个时，一个不知道要用到二进制，即不知道去考察 1，2 和 4 的人，只要玩得久了，凭经验也能找出正确的取法，这时，懂诀窍的老手可以把棋子排列的行数或每行棋子的数目胡乱地改变一下，然后再按上述方法，就可望取胜.

练习五十三

1. 由三阶魔术方阵定义，这九个数是 1，2，…，9，其每行、每列、每对角线的和为$\frac{3(9+1)}{2}=15$.

我们首先看 1 和 9 能否放在方阵中间，若把 1 居中，剩下来的 8 个数都在 1 的周围，则 2 一定与 1 同处一行（或同一列，或同一对角线）里，由于 $1+2=3$，因而与它们处于同一行（或同一列或同一对角线）的另一个数应为 $15-3=12$，而三阶魔方中没有 12 这个数，所以 1 不能居中. 又若把 9 居中，而剩下来的八个数应置于它的周围，因而 8 一定要与 9 处于同一行（或同一列或同一对角线）里，但是 $8+9=17$，这也超过 15 了，所以 9 也不能居中.

现在我们设 a 居中（其中 $2\leqslant a\leqslant 8$），则剩下来的八个数都应在它的周围，因 $a\neq 9$，所以我们可以取出 9 来，9 一定与 a 排列在同一行（或同一列或同一对角线），我们又设与 9 和 a 在同一行（或同一列或同一条对角线）的另一个数 b，由于 $b\neq 9$，所以 $1\leqslant b\leqslant 8$. 同时还应有

$$15=9+a+b\geqslant 9+a+1=10+a,$$

即 $a\leqslant 5$. 另一方面，当 a 居中时，因为 $a\neq 1$，所以我们又可以取出 1 来，它一定与 a 处于同一行（或同一列或同一条对角线），我们设与 1 和 a 处于同一行（或同一列或同一条对角线）

的另一个数为 c(其中 $2\leqslant c\leqslant 9$),则应有

$$15=1+a+c\leqslant 1+a+9=10+a,$$

即 $a\geqslant 5$. 这样 $a\leqslant 5$ 且 $a\geqslant 5$,则只有 $a=5$,故三阶魔术方阵 5 必居中.

2. 七阶方阵有 49 个小方格,填入 49 个数,49 个数斜排(见图 53-11). 图中居上的有 1,8,2,15,9,3,居下的有 47,41,35,48,42,49. 然后"上下对易",把 1 调到 33 的上面,把 9 调到 41 的上面,把 3 调到 35 的上面,把 15 调到 47 上面,就得到图 53-12. 然后再把图中居下的调到上面去,把 47 调到 23 的上面,把 41 调到 17 的上面,把 35 调到 11 的上面,把 48 调到 24 的上面,把 42 调到 18 的上面,把 49 调到 25 的上面,这样我们就得到图 53-13,最后我们来进行"左右相更". 居左的有 29,36,43,37,44,45,居右的有 5,6,7,13,14,21,把居左的 29 调到 11 的右边去,把 36 调到 18 的右边去,把 43 调到 25 的右边去,把 37 调到 19 的右边,把 44 调到 26 的右边,把 45 调到 27 的右边,这样就得到图 53-14. 然后,再把图 53-14 中居右的调到左边去,把 5 调到 23 的左边去,把 6 调到 24 的左边,把 7 调到 25 的左边,把 13 调到 31 的左边去,把 14 调到

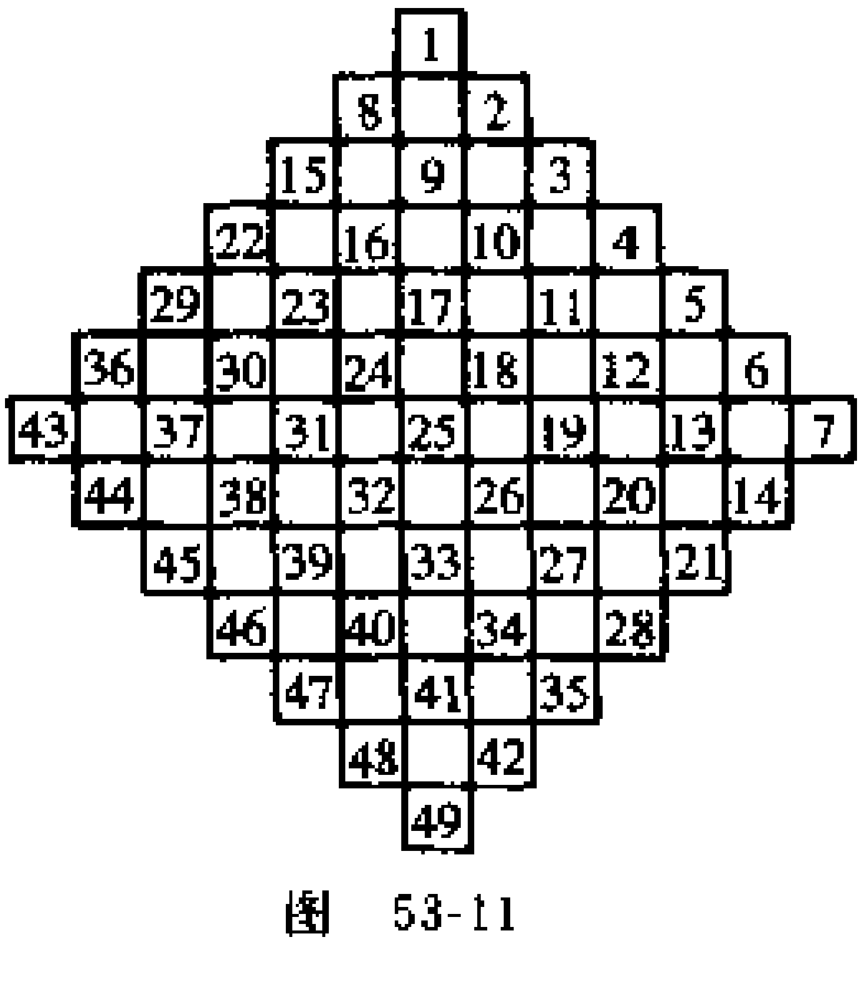


图 53-11

32 的左边，把 21 调到 39 的左边，这样就得到了图 53-15 的七阶魔术方阵，不难验证图 53-15 的各行、各列、各对角线的数值和为 175.

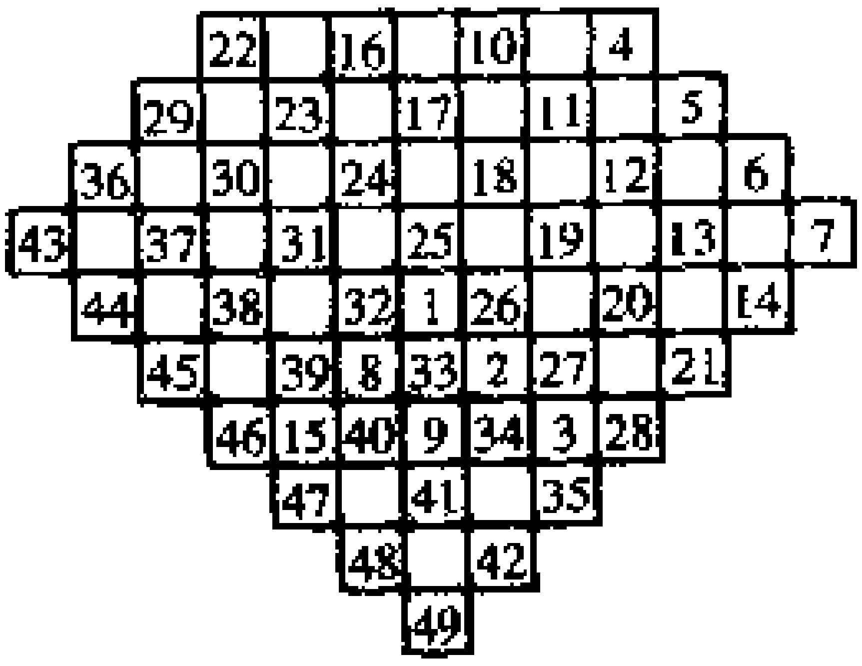


图 53-12

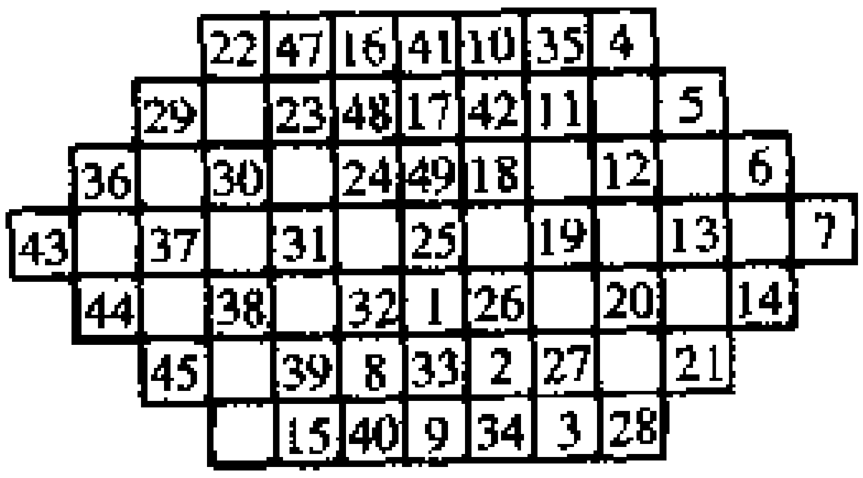


图 53-13

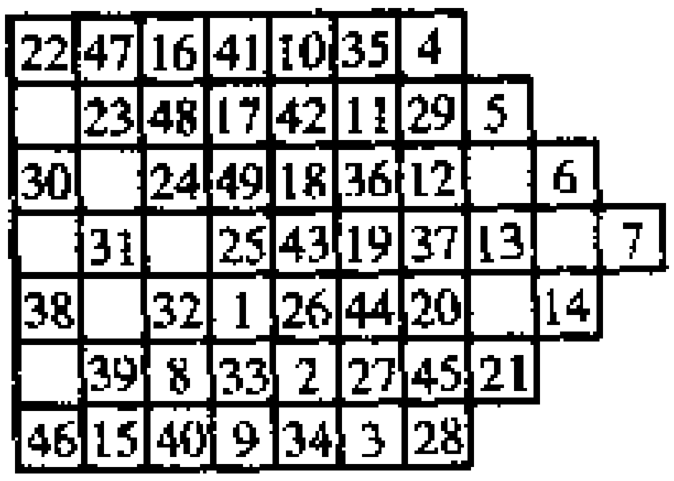


图 53-14

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	9	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

图 53-15

参 考 文 献

[1] Liu C. L., Elements of Discrete Mathematics, Mc-GRAW-Hill, Book Company, 1977.

[2] Bondy, J. A. and U. S. R. Murty, Graph Theory with Applications, North Holland, New York, 1976.

[3] 潘承洞,潘承彪,《初等数论》,北京大学出版社,1992.

[4] 刘振宏,《应用组合论》,国防工业出版社,1993.

[5] 莫绍揆,《逻辑代数初步》,江苏人民出版社,1980.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝趣味离散数学
作者＝
页数＝２３８
ＳＳ号＝１００９８３３７
出版日期＝