

「杂题记录」「NOI 2018」屠龙勇士

Jiayi Su (ShuYuMo)

2021-02-02 15:35:06

小 D 最近在网上发现了一款小游戏。游戏的规则如下：

- 游戏的目标是按照编号 $1 \rightarrow n$ 顺序杀掉 n 条巨龙，每条巨龙拥有一个初始的生命值 a_i 。同时每条巨龙拥有恢复能力，当其使用恢复能力时，它的生命值就会每次增加 p_i ，直至生命值非负。只有在攻击结束后且当生命值恰好为 0 时它才会死去。
- 游戏开始时玩家拥有 m 把攻击力已知的剑，每次面对巨龙时，玩家只能选择一把剑，当杀死巨龙后这把剑就会消失，但作为奖励，玩家会获得全新的一把剑。

小 D 觉得这款游戏十分无聊，但最快通关的玩家可以获得 ION2018 的参赛资格，于是小 D 决定写一个笨笨的机器人帮她通关这款游戏，她写的机器人遵循以下规则：

- 每次面对巨龙时，机器人会选择当前拥有的，攻击力不高于巨龙初始生命值中攻击力最大的一把剑作为武器。如果没有这样的剑，则选择攻击力最低的一把剑作为武器。
- 机器人面对每条巨龙，它都会使用上一步中选择的剑攻击巨龙固定的 x 次，使巨龙的生命值减少 $x \times ATK$ 。
- 之后，巨龙会不断使用恢复能力，每次恢复 p_i 生命值。若在使用恢复能力前或某一次恢复后其生命值为 0，则巨龙死亡，玩家通过本关。

那么显然机器人的攻击次数是决定能否最快通关这款游戏的关键。小 D 现在得知了每条巨龙的所有属性，她想考考你，你知道应该将机器人的攻击次数 x 设置为多少，才能用最少的攻击次数通关游戏吗？

当然如果无论设置成多少都无法通关游戏，输出 -1 。

测试点编号	n	m	p_i	a_i	攻击力	其他限制
1	$\leq 10^5$	$= 1$	$= 1$	$\leq 10^5$	$= 1$	无
2	$\leq 10^5$	$= 1$	$= 1$	$\leq 10^5$	$= 1$	无
3	$\leq 10^5$	$= 1$	$= 1$	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	无
4	$\leq 10^5$	$= 1$	$= 1$	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	无
5	$\leq 10^3$	$\leq 10^3$	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	特性 1、特性 2
6	$\leq 10^3$	$\leq 10^3$	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	特性 1、特性 2
7	$\leq 10^3$	$\leq 10^3$	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	特性 1、特性 2
8	$= 1$	$= 1$	$\leq 10^8$	$\leq 10^8$	$\leq 10^6$	特性 1
9	$= 1$	$= 1$	$\leq 10^8$	$\leq 10^8$	$\leq 10^6$	特性 1
10	$= 1$	$= 1$	$\leq 10^8$	$\leq 10^8$	$\leq 10^6$	特性 1
11	$= 1$	$= 1$	$\leq 10^8$	$\leq 10^8$	$\leq 10^6$	特性 1
12	$= 1$	$= 1$	$\leq 10^8$	$\leq 10^8$	$\leq 10^6$	特性 1
13	$= 1$	$= 1$	$\leq 10^8$	$\leq 10^8$	$\leq 10^6$	特性 1
14	$= 10^5$	$= 10^5$	$= 1$	$\leq 10^8$	$\leq 10^6$	无特殊限制
15	$= 10^5$	$= 10^5$	$= 1$	$\leq 10^8$	$\leq 10^6$	无特殊限制
16	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	所有 p_i 是质数	$\leq 10^{12}$	$\leq 10^6$	特性 1
17	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	所有 p_i 是质数	$\leq 10^{12}$	$\leq 10^6$	特性 1
18	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	无特殊限制	$\leq 10^{12}$	$\leq 10^6$	特性 1

测试点编号	n	m	p_i	a_i	攻击力	其他限制
19	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	无特殊限制	$\leq 10^{12}$	$\leq 10^6$	特性 1
20	$\leq 10^5$	$\leq 10^5$	无特殊限制	$\leq 10^{12}$	$\leq 10^6$	特性 1

特性 1 是指：对于任意的 i ， $a_i \leq p_i$ 。

特性 2 是指： $\text{lcm}(p_i) \leq 10^6$ ，即所有 p_i 的最小公倍数不大于 10^6 。

对于所有的测试点， $T \leq 5$ ，所有武器的攻击力 $\leq 10^6$ ，所有 p_i 的最小公倍数 $\leq 10^{12}$ 。

保证 T, n, m 均为正整数。

分析

易知这可以直接转化为 exCRT 问题。

主要记录一下不定方程的获取所有解问题。

不定方程形如：

$$ax + by = c$$

其中 x, y 为未知数， a, b 为常数。

裴蜀定理 指出：以上方程有整数解的充要条件为 $(a, b) | c$ 。

扩展欧几里得 可以解出形如：

$$ax + by = (a, b)$$

不定方程的一组整数解。

考虑构造以下式子：

$$a \left(x + \frac{b}{(a, b)} \right) + b \left(y - \frac{a}{(a, b)} \right) = (a, b)$$

不难发现如果令： $x' = x + \frac{b}{(a, b)}, y' = y - \frac{a}{(a, b)}$ ，这样构造出来的所有解 x', y' 都能成为不定方程的一组解，可以证明这样的构造方式的调整系数是最小的，能够取到所有解。（个人喜欢把 $\frac{*}{(a, b)}$ 称为调整系数）

考虑到上面的 扩展欧几里得 解出的方程常数项等于 (a, b) ，而不是 c ，考虑将解和 (a, b) 一同乘 $\frac{c}{(a, b)}$ 即可。

需要注意，乘完 $\frac{c}{(a, b)}$ 后，调整系数 不变。

关于题目，也没有题解里面说的那么卡…注意一下数据范围里面 $P_i = 1$ 的情况即可。

关于代码，换了一种 exCRT 的写法，应该会好背很多，。