

二分图 and 网络流

Jiayi Su (ShuYuMo)

2020-10-04 14:15:07

一些简单的关于图论的定义和胡扯...

总览

二分图最大匹配

- $O(nm)$
- Dinic: $O(m\sqrt{n})$

二分图最大带权匹配

- KM 算法 $O(N^3)$

定义

- 最大独立集：在图里选最多的点，使得不存在两个选了的点之间有边。
- 最小点覆盖：在图里选最少的点，使得每个边连接的两个点至少一个点被选。
- 最长反链：点集 G 中一个极大的子集 W ，使得 W 中的点互不可到达。
- 传递闭包：定义有向图 G 的传递闭包为 $A[i, j] = [\text{点 } i \text{ 和 点 } j \text{ 有通路}]$

定理

- 最长反链 = 最小链覆盖 (dilworth 定理)
- 二分图最小点覆盖 = 最大匹配
- 最小点覆盖 + 最大独立集 = 点数, 最小覆盖集与最大独立集互为补集, 其并集为点集
- Hall 定理：设一个二分图的左右部分分别为 X, Y , 且 $|X| = |Y|$
- 矩阵树定理证明：有向图矩阵树定理的一个简单组合证明

小问题

- 求 DAG 最小链覆盖 (最长反链)：传递闭包 + 拆点二分图匹配

栗题

4.2 (LOJ)

给出一个保证左部满匹配的二分图，保证左部每个点的度数不超过 2，边有边权。支持：- 修改边权 - 查询最大带权匹配 (强制保证任意时刻左侧满匹配)

对左侧点分类：- 度数为 1：这条边必须成为匹配边，可直接删除这个点和对应的右边点 - 度数为 2：左侧点 u 可直接删掉，在右侧对应的两个点之间直接连两条有向边，给这条边定向，只想哪个点就相当与选哪个点与点 u 相连的边。- 不难发现这样形成的一张图应该是，若干个树和基环树组成的森林。根据查询给边定向，其中要求一个点入度数最多为

一。树仅需选择一个边定向，在同一个树上的其他边都能被强制定向。对于基环树，环上边需要决定是顺时针还是逆时针，环外的边要指出环