

# 超奈奎斯特传输技术研究

作者姓名 李双洋

指导教师姓名、职称 白宝明 教授

申请学位类别 工学博士



学校代码 10701  
分 类 号 TN92

学 号 1701110001  
密 级 公开

# 西安电子科技大学

## 博士学位论文

### 超奈奎斯特传输技术研究

作者姓名：李双洋

一级学科：信息与通信工程

二级学科（研究方向）：通信与信息系统

学位类别：工学博士

指导教师姓名、职称：白宝明 教授

学 院：通信工程学院

提交日期：2021 年 4 月



# **Research on Faster-than-Nyquist Signaling**

A Dissertation submitted to  
XIDIAN UNIVERSITY  
in partial fulfillment of the requirements  
for the degree of Doctor of Philosophy  
in Communications and Information Systems

By

Shuangyang Li

Supervisor: Baoming Bai Title: Professor

April 2021



## 西安电子科技大学 学位论文独创性（或创新性）声明

秉承学校严谨的学风和优良的科学道德，本人声明所呈交的论文是我个人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。尽我所知，除了文中特别加以标注和致谢中所罗列的内容以外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果；也不包含为获得西安电子科技大学或其它教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同事对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示了谢意。

学位论文若有不实之处，本人承担一切法律责任。

本人签名：\_\_\_\_\_ 日 期：\_\_\_\_\_

## 西安电子科技大学 关于论文使用授权的说明

本人完全了解西安电子科技大学有关保留和使用学位论文的规定，即：研究生在校攻读学位期间论文工作的知识产权属于西安电子科技大学。学校有权保留送交论文的复印件，允许查阅、借阅论文；学校可以公布论文的全部或部分内容，允许采用影印、缩印或其它复制手段保存论文。同时本人保证，结合学位论文研究成果完成的论文、发明专利等成果，署各单位为西安电子科技大学。

保密的学位论文在\_\_\_\_\_年解密后适用本授权书。

本人签名：\_\_\_\_\_ 导师签名：\_\_\_\_\_

日 期：\_\_\_\_\_ 日 期：\_\_\_\_\_





## 摘要

为了实现未来通信网络中对频谱效率的苛刻要求，超奈奎斯特（Faster-than-Nyquist, FTN）传输技术等一些潜在的可以提升频谱效率的通信技术手段收到了广泛的关注。FTN 传输是一种典型的非正交传输方案，并且已经被证明在成形波形可实现的条件下比传统的奈奎斯特信号具有更高的 Shannon 容量。FTN 传输的容量增益来自于超过奈奎斯特速率的符号速率，然而这也带来了不可避免的严重码间串扰（Intersymbol Interference, ISI）影响。针对 FTN 传输特点，本文对 FTN 系统的信道容量、简化检测算法以及编码设计方案进行了研究，主要研究成果概括如下：

基于 Ungerboeck 信道观测模型我们提出了两种 M-BCJR 算法来实现 FTN 信号的检测。通过考虑一些“将来的”可能传输符号，我们提出的算法利用一种不同的度量来确定每个网格图时刻保留的状态。我们证明了提出的算法可以确保正确状态被保留在简化的网格图中，因此可以得到优于传统基于 Ungerboeck 信道观测模型的误码性能。我们的仿真结果验证了我们相关的分析，并且展示出了一个很好的误码性能和检测复杂度的折中。

我们分析了两种主流的具有低检测复杂度的多层 FTN 传输结构。我们分别讨论了对应的系统设计以及低复杂度的逐次干扰抵消（Successive Interference Cancellation, SIC）算法的应用。进一步地，根据对应的传输结构，我们提出了相对应的两种功率分配方案。我们还分析了两种传输结构对应的信道容量。有趣的是，我们发现了其中一种传输结构可以得到 FTN 传输的自由度（Degree-of-freedom, DoF）增益，然而另一种传输结构仅可以得到信噪比（Signal-to-noise ratio, SNR）增益。该发现对实际 FTN 系统设计具有指导意义，同时我们利用了仿真结果验证了我们的理论分析。

我们提出了一种新的基于码结构辅助的信道缩短（Code based Channel Shortening, CCS）算法来进行 FTN 信号的检测。所提出的算法利用了一种特殊的卷积码结构来吸收 FTN 传输带来的 ISI 影响，并且 CCS 算法的相关思想也可以推广至一般 ISI 信道均衡的研究中。我们将这种特殊的卷积码称为“输出可知”卷积码（Output Retainable Convolutional Code, ORCC）。该卷积码具有一种特殊的结构使得之前的若干个编码符号可以通过观察当前编码网格图状态得到。基于 ORCC 的性质，我们推导出了 CCS 算法。进一步地，我们推导了 CCS 算法的误码性能上限。基于误码性能上限，我们提出了一种全新的码搜索算法来寻找具有较好结构的 ORCC。我们的仿真结果表明提出的 CCS 算法可以得到相比传统信道缩短算法更优异的性能。

为了提高 FTN 系统的误码性能，我们提出了几种针对 FTN 系统的信道编码设

计, 包括 Turbo 码、串行级联卷积码、以及自级联卷积码。我们通过利用距离谱和 EXIT 图作为分析工具来进行码设计。对应于 Turbo 编码方式, 我们通过适当地调整接收端结构来提升误码性能。对于级联卷积码, 我们通过理论推导得到了对应的 EXIT 曲线从而进行了码结构优化。我们的仿真结果展示了超过编码奈奎斯特系统的优异性能, 并且与对应的 EXIT 图分析相符。

基于博士阶段的主要研究工作, 在本文的最后对将来 FTN 传输技术的主要研究方向进行了总结与展望。

**关键词:** 超奈奎斯特传输, 简化检测, 码设计, 信道容量

## ABSTRACT

To achieve the stringent spectral efficiency requirement of further communication networks, potential communication technologies that can enhance the spectral efficiency, such as faster-than-Nyquist (FTN) signaling, has attracted substantial attention. FTN signaling is a classic non-orthogonal signaling format that has been proved to have a greater Shannon capacity compared to conventional Nyquist signaling with practical shaping pulses. The capacity advantage of FTN signaling comes from the higher symbol rate, which in return inevitably causes severe intersymbol interference (ISI). Based on the characteristic of FTN signaling, we conducted the research on the reduced-complexity detection methods and code design for FTN systems. The main contributions of this dissertation are summarized as follows:

We proposed two novel M-BCJR algorithms for FTN signaling based on the Ungerboeck channel observation model. By taking account of the influence from the “future” symbols, the proposed algorithms determine the most reliable trellis states according to a different metric. We proved that the correct trellis states can be remained in the reduced trellis for both proposed algorithms thereby providing a better error performance compared to the conventional M-BCJR algorithm based on the Ungerboeck channel observation model. Simulation results verifies our analysis and demonstrate a good trade-off between the error performance and detection complexity.

We analyzed two commonly considered multi-layer FTN transmission structures that enable reduced-complexity detection. In specific, we discussed their transceiver structure designs and the application of successive interference cancellation (SIC). Furthermore, according to their transceiver structure, we proposed two power allocation strategies. We also derived the capacity of the two structures. Interestingly, we showed that one structure can obtain the degree-of-freedom (DoF) advantages of FTN signaling while the other one can only obtain the signal-to-noise ratio (SNR) advantages. Those results can serve as a guideline for practical FTN designs. Meanwhile, our analysis are explicitly verified by simulation results.

We proposed a novel code based channel shortening (CCS) algorithm for detecting FTN signals. The proposed algorithm applies a special type of convolutional codes to absorb the channel memory induced by FTN signaling, where the idea of CCS algorithm can also be extended to the equalization for general ISI channels. We call this type of convolutional codes the output-retainable convolutional codes (ORCCs), whose previous code symbols can be

retained by the current code trellis state. Based on the property of ORCCs, we introduce the CCS algorithm. We derived the error performance bounds of the CCS algorithm. According to the error performance bounds, we further proposed a novel code search algorithm to find good ORCCs. Simulation results demonstrate that the proposed CCS algorithm can have a better error performance compared to conventional channel shortening algorithms.

To enhance the error performance of FTN systems, we proposed various channel coding schemes for FTN signaling, include Turbo codes, serial-concatenated convolutional codes, and self-concatenated convolutional codes. We use both the distance spectrum and EXIT chart as tools for our code design. For the Turbo code, we alter the receiver structure to improve the error performance of Turbo coded FTN signaling. Furthermore, for concatenated convolutional codes, we derived the corresponding EXIT characteristics and optimized the coding structure. Our simulation results show superior error performance of the proposed coding schemes compared to the Nyquist counterpart, which also agrees with our EXIT chart analysis.

According to the main contribution of the study, we also summarized the future research directions for FTN signaling at the end of this dissertation.

**Keywords:** Faster-than-Nyquist signaling, Reduced-complexity detection, Code design, Channel capacity

## 插图索引

图 1.1	本文的主要研究工作框图 . . . . .	7
图 2.1	单载波 FTM 系统发送端框图 . . . . .	11
图 2.2	压缩因子为 $\tau = 0.5$ 时, 成形波形为 sinc 函数的 FTM 信号波形图, 对应的传输符号为 $[+1, -1, +1, -1, -1]^T$ . . . . .	12
图 2.3	单载波 FTM 系统接收端框图 . . . . .	12
图 2.4	成形波形 $h(t)$ 在不同滚降系数 $\beta_{\text{roll-off}}$ 下的频谱 . . . . .	15
图 2.5	成形波形 $h(t)$ 在不同滚降系数 $\beta_{\text{roll-off}}$ 下的信道容量 . . . . .	16
图 2.6	成形波形 $h(t)$ 在不同滚降系数 $\beta_{\text{roll-off}}$ 下的归一化频谱效率 . . . . .	17
图 2.7	当 $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ , $T = 1$ 时, $ H_{\text{fo}}(f) ^2$ 和 $ H(f) ^2$ 的图像 . . . . .	18
图 2.8	$\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ 时 FTM 系统容量 $C_{\text{FTN}}$ 与成形波形容量 $C_{\text{PSD}}$ 以及奈奎斯特系统容量比较 . . . . .	19
图 2.9	$\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ 时, FTM 系统归一化频谱效率 $\eta_{\text{FTN}}$ 与 sinc 函数成形的归一化谱效率 $\eta_{\text{sinc}}$ 以及奈奎斯特系统归一化频谱效率 $\eta_{\text{Nyquist}}$ 的比较 . . . . .	20
图 2.10	OVXDM 系统发送端框图 . . . . .	21
图 2.11	Turbo 均衡系统接收端示意图 . . . . .	23
图 2.12	基于 Forney 观测模型的 Turbo 迭代接收端框图 . . . . .	25
图 2.13	基于 Ungerboeck 观测模型的 Turbo 迭代接收端框图 . . . . .	25
图 2.14	M-BCJR 算法和 T-BCJR 算法的简易框图 . . . . .	26
图 2.15	不同 $\tau$ 条件下 $\mathbf{G}$ 与 $\bar{\mathbf{G}}$ 的特征值分布, 其中 $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ . . . . .	30
图 2.16	不同 $\tau$ 条件下时域均衡算法与频域均衡算法的检测性能图, 其中 $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ . . . . .	30
图 2.17	$\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ 时, 奈奎斯特系统与 FTM 系统在不同调映射方式下的 PAPR 性能比较 . . . . .	31
图 2.18	不同滚降系数 $\beta_{\text{roll-off}}$ 的条件下, 奈奎斯特系统与 FTM 系统在不同映射方式下的 PAPR 性能比较 . . . . .	32
图 2.19	双选信道下编码 FTM 传输与奈奎斯特传输的 FER 性能比较图, 其中 $\tau = 0.8, \beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ 。选用的编码方式为 5G 标准 LDPC 码, 其码长为 512, 码率为 0.5。 . . . . .	33
图 2.20	时频坐标系下 MFTN 符号与 OFDM 符号的比较图, 其中 $\tau = 5/6, \phi = 4/5$ . . . . .	35

图 2.21	不同成形波形及调制方式下的 TFP 可达频谱利用率性能	36
图 3.1	BPSK 映射的编码 FTN 系统发送端框图	37
图 3.2	编码 FTN 系统迭代接收端框图	37
图 3.3	前向递归示意图, 其中 FTN 信号为 BPSK 调制, 且 $M = 3$	41
图 3.4	后向递归示意图, 其中 FTN 信号为 BPSK 调制, 且 $M = 3$	41
图 3.5	正确尾巴路径在不同 $L$ 以及 $\tau$ 情况下具有最大度量值的概率, 其中映射方式为 BPSK, 成形波形滚降系数为 $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$	48
图 3.6	BPSK 映射下简化后向递归过程示意图, 其中 $M = 2, L = 2$ 。红色的粗线表示保留下的正确尾巴路径	49
图 3.7	提出的原始算法在 BPSK 映射时的 BER 性能, 其中信道编码为非递归(7, 5)卷积码, Turbo 迭代次数为 5 次, 且 $\tau = 0.5$	50
图 3.8	提出的原始算法在 BPSK 映射时的 BER 性能, 其中信道编码为非递归(7, 5)卷积码, Turbo 迭代次数为 15 次, 且 $\tau = 0.35$	51
图 3.9	提出的简化算法在 16-QAM 映射时的 BER 性能, 其中信道编码为非递归(7, 5)卷积码, Turbo 迭代次数为 10 次	52
图 4.1	奈奎斯特波形延迟叠加系统发送端框图	58
图 4.2	奈奎斯特波形延迟叠加系统发送波形示意图	58
图 4.3	奈奎斯特波形延迟叠加系统接收端框图	59
图 4.4	基于叠加编码传输的 FTN 系统发送端发送端框图	60
图 4.5	基于叠加编码传输的 FTN 系统发送波形示意图	60
图 4.6	基于叠加编码传输的 FTN 系统接收端框图	61
图 4.7	奈奎斯特波形延迟叠加系统误码率仿真性能, 其对应参数在表 4.1 中给出	73
图 4.8	基于叠加编码传输 FTN 系统的误码率仿真性能, 其对应参数在表 4.2 中给出	74
图 4.9	等功率分配条件下的奈奎斯特波形延迟叠加系统可达速率与奈奎斯特系统容量以及成形波形容量比较, 其中 $\beta_{\text{roll-off}} = 0.5, K = 4$	75
图 4.10	不同层数 $K$ 条件下, 等功率分配条件下的奈奎斯特波形延迟叠加系统可达速率, 其中 $\beta_{\text{roll-off}} = 0.5$	76
图 4.11	不同滚降系数 $\beta_{\text{roll-off}}$ 条件下等功率分配条件下的奈奎斯特波形延迟叠加系统可达速率, 其中 $K = 2$	76
图 4.12	图 4.8 中对应的, 基于叠加编码传输 FTN 系统可达速率与容量关系	77
图 5.1	卷积编码 FTN 系统发送端框图	86

图 5.2	基于 CCS 算法的 FTN 系统接收端框图 . . . . .	87
图 5.3	多项式 $\varphi_{i,j}(D)$ 的可控正则型表示 . . . . .	88
图 5.4	生成矩阵为 $\mathcal{G}(D) = [\frac{1}{1+D+D^2}, \frac{1}{D}]$ 的 ORCC 的编码器结构 . . . . .	89
图 5.5	提出的搜索算法流程图 . . . . .	97
图 5.6	基于码结构辅助的信道缩短算法 BER 性能图, 其中 $\tau = 2/3$ , 具体编码参数在表 5.2 中给出 . . . . .	100
图 5.7	基于码结构辅助的信道缩短算法 BER 性能图, 其中 $\tau = 0.5$ , 具体编码参数在表 5.3 中给出 . . . . .	101
图 6.1	Turbo 编码 FTN 系统的接收端框图 . . . . .	106
图 6.2	非对称 Turbo 编码的 FTN 系统 BER 性能。其中 FTN 的非对称 Turbo 编码生成多项式由式 (6-1) 和式 (6-2) 所示。作为对比, 奈奎斯特系统采用 LTE 标准的 Turbo 码结构 . . . . .	107
图 6.3	串行级联码编码的 FTN 系统发送端框图 . . . . .	108
图 6.4	串行级联码编码的 FTN 系统接收端框图 . . . . .	108
图 6.5	相同信息速率下, FTN-SCCC 与 Nyquist-SCCC 的 BER 性能比较 . . .	109
图 6.6	$E_b/N_0 = 2$ dB 时 SCCC 编码的 FTN 系统对应的 EXIT 图 . . . . .	110
图 6.7	自级联码编码的 FTN 系统发送端框图 . . . . .	111
图 6.8	自级联码编码的 FTN 系统接收端框图 . . . . .	112
图 6.9	SECCC 编码的 FTN 系统对应的因子图表示 . . . . .	112
图 6.10	相同信息速率下, FTN-SECCC 与 FTN-LDPC, Nyquist-Turbo, Nyquist-LDPC 的 BER 性能以及相应的容量限比较 . . . . .	113
图 6.11	$E_b/N_0 = 1.3$ dB 时 SECCC 编码的 FTN 系统对应的 EXIT 图 . . . . .	113





## 表格索引

表 1.1	4G 到 6G 的移动通信指标总结 . . . . .	4
表 1.2	FTN 传输发展简史 . . . . .	8
表 2.1	BPSK 调制下不同滚降系数时的 Mazo 极限 . . . . .	14
表 3.1	一些 FTN 检测算法的复杂度分析 . . . . .	49
表 3.2	图 3.9 中, $\tau = 0.8$ 仿真的复杂度分析 . . . . .	51
表 4.1	图 4.7 中仿真参数 . . . . .	74
表 4.2	图 4.8 中的功率分配 . . . . .	74
表 5.1	误码性能优秀的码率 $R = 1/2$ 的 ORCC 生成矩阵总结, 其中 FTN 系 统成形波形滚降系数为 $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ . . . . .	99
表 5.2	图 5.6 的仿真参数 . . . . .	100
表 5.3	图 5.7 的仿真参数 . . . . .	100
表 6.1	图 6.5 中的仿真参数 . . . . .	110
表 6.2	图 6.10 中仿真参数 . . . . .	114
表 6.3	FTN 系统的相关编码方案比较 . . . . .	114



## 符号对照表

符号	符号名称
$\tau$	FTN 时域压缩因子
$\phi$	MFTN 频域压缩因子
$E_s$	符号平均能量
$E_b$	比特平均能量
$\mathbb{E}[\cdot]$	期望运算符
$\mathbb{V}[\cdot]$	方差运算符
$\mathbb{A}$	星座点集合
$(\cdot)^*$	共轭运算符
$(\cdot)^T$	转置运算符
$(\cdot)^H$	共轭转置运算符
$\propto$	表示符号左右两边呈正比关系
$\Pr(\cdot)$	事件概率
$\operatorname{Re}\{\cdot\}$	一个复数的实数部分
$D^2(\cdot, \cdot)$	两个信号之间的欧式距离
$N_0$	白噪声单边功率谱密度
$\mathcal{X}(\cdot)$	表示满足要求的序列个数或集合的大小
$\mathbf{I}_N$	表示大小为 $N$ 的单位阵
$I(\cdot; \cdot)$	互信息运算符
$h(\cdot; \cdot)$	微分熵运算符
$\det[\cdot]$	行列式运算符
$\deg\{\cdot\}$	多项式次数
$\oplus$	模2运算符
mod	取模运算符
$\lceil \cdot \rceil$	向上取整运算符
$\sup(\cdot)$	上确界运算符



## 缩略语对照表

缩略语	英文全称	中文对照
AR	Autoregressive	自回归
ASE	Achievable spectral efficiency	可达频谱利用率
AWGN	Additive white Gaussian noise	高斯白噪声
BER	Bit error rate	误比特率
BPSK	Binary phase shift keying	二进制相移键控
CCS	Code based channel shortening	基于码结构辅助的信道缩短
CCSDS	Consultative committee for space data systems	空间数据系统咨询委员会
CDMA	Code division multiple access	码分多址
CP	Cyclic prefix	循环前缀
DoF	Degrees-of-freedom	自由度
EED	Effective Euclidean distance	有效欧式距离
EER	Event error rate	误事件率
eMBB	Enhanced mobile broadband	增强移动宽带
FDE	Frequency domain equalization	频域均衡
FDMA	Frequency division multiple access	频分多址
FER	Frame error rate	误帧率
FFT	Fast Fourier transform	快速傅里叶变换
FRCC	Fully-retainable retainable convolutional code	“全输出可知”卷积码
FTN	Faster-than-Nyquist	超奈奎斯特
GPRS	General packet radio service	通用封包无线服务
GSM	Global system for mobile communication	全球移动通讯
HSDPA	High-speed downlink packet access	高速下行分组接入
HSUPA	High-speed uplink packet access	高速上行分组接入
ICI	Inter carrier interference	子载波间干扰
IoT	Internet of things	物联网
ISI	Intersymbol interference	码间串扰
JDD	Joint detection and decoding	联合检测译码
LDPC	Low-density parity-check	低密度校验

LLR	Log likelihood ratio	对数似然比
L-MMSE	Linear minimum mean square error	线性最小均方误差
LTE	Long term evolution	长期演进
LTE-A	LTE-Advanced	高级长期演进
MAP	Maximum <i>a posteriori</i>	最大后验
MFTN	Multicarrier FTN	多载波 FTN
ML	Maximum-likelihood	最大似然
MMSE	Minimum mean square error	最小均方误差
mMTC	Massive machine-type-communication	大规模机器通信
MLC	Multi-level Coding	多层编码
MSE	Mean square error	均方误差
OFDM	Orthogonal frequency-division multiplexing	正交频分复用
PAPR	Peak-to-average-power ratio	峰均比
PDF	Probability density function	概率密度函数
PRCC	Partially-retainable retainable convolutional code	“部分输出可知”卷积码
PSD	Power spectral density	功率谱密度
QAM	Quadrature amplitude modulation	正交幅度调制
QoS	Quality of service	服务质量
QPSK	Quadrature phase shift keying	四比特相移键控
ORCC	Output retainable convolutional code	“输出可知”卷积码
OVXDM	Overlapped time/frequency domain multiplexing	时频叠加复用
RRC	Root raised cosine	根升余弦
SCCC	Serial-concatenated Convolutional Code	串行级联卷积码
SDR	Semidefinite relaxation	半定松弛
SECCC	Self-concatenated Convolutional Code	自级联卷积码
SEFDM	Spectrally efficient frequency-division multiplexing	高谱效频分复用
SIC	Successive interference cancellation	逐次干扰抵消
SINR	Signal-to-interference-plus-noise ratio	信干噪比
SNR	Signal-to-noise ratio	信噪比
SPA	Sum-product algorithm	和积算法

缩略语对照表

TCM	Trellis coded modulation	网格编码调制
TDMA	Time division multiple access	时分多址
TFP	Time-frequency packing	时频压缩
UMTS	Universal mobile telecommunication systems	通用移动通讯系统
uRLLC	Ultra reliable and low latency communications	高可靠低时延通信
WiMAX	Worldwide interoperability for Microwave access	全球互通微波访问





## 缩略语对照表

---



# 目录

摘要 .....	I
ABSTRACT .....	III
插图索引 .....	V
表格索引 .....	IX
符号对照表 .....	XI
缩略语对照表.....	XIII
第一章 绪论 .....	1
1.1 超奈奎斯特传输发展历史 .....	5
1.2 研究内容及章节安排 .....	7
第二章 FTN 传输原理介绍 .....	11
2.1 单载波 FTN 传输 .....	11
2.1.1 系统模型.....	11
2.1.2 Mazo 极限 .....	13
2.2 单载波 FTN 容量相关问题 .....	14
2.3 单载波 FTN 容量分析 .....	15
2.3.1 FTN 与 OVXDM 系统信道容量比较 .....	20
2.4 单载波 FTN 检测算法 .....	23
2.4.1 低复杂度 FTN 检测器 .....	24
2.4.2 基于网格图的 FTN 检测器 .....	24
2.4.3 频域均衡 FTN 检测器 .....	28
2.5 FTN 信号的峰均比 .....	29
2.6 多径衰落信道下的 FTN 传输 .....	32
2.7 多载波 FTN 传输 .....	34
2.8 本章小结 .....	36
第三章 基于 Ungerboeck 观测模型的 FTN 简化检测算法 .....	37
3.1 基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 算法 .....	39
3.2 算法性能分析 .....	42
3.3 简化 M-BCJR 算法 .....	47
3.4 复杂度分析 .....	48
3.5 性能仿真 .....	50
3.6 本章小结 .....	51

3.7 附录 .....	52
3.7.1 引理 3-1 的证明 .....	52
3.7.2 定理 3-1 的证明 .....	53
3.7.3 定理 3-2 的证明 .....	54
3.7.4 定理 3-3 的证明 .....	55
<b>第四章 基于多层结构的 FTN 系统设计</b> .....	<b>57</b>
4.1 系统模型 .....	57
4.1.1 奈奎斯特波形延迟叠加系统模型 .....	58
4.1.2 基于叠加编码传输的 FTN 系统模型 .....	59
4.2 奈奎斯特波形延迟叠加系统的检测以及功率分配 .....	61
4.2.1 奈奎斯特波形延迟叠加系统的检测算法 .....	61
4.2.2 奈奎斯特波形延迟叠加系统的功率分配方案 .....	62
4.3 基于叠加编码传输的 FTN 系统的检测以及功率分配 .....	62
4.3.1 基于叠加编码传输的 FTN 系统的信道观测模型 .....	63
4.3.2 基于叠加编码传输的 FTN 系统的检测 .....	64
4.3.3 基于叠加编码传输的 FTN 系统的功率分配策略 .....	64
4.4 容量分析 .....	67
4.4.1 奈奎斯特波形延迟叠加系统的容量分析 .....	68
4.4.2 基于叠加编码传输的 FTN 系统的容量分析 .....	71
4.5 仿真结果 .....	73
4.6 本章小结 .....	77
4.7 附录 .....	78
4.7.1 定理 4-1 的证明 .....	78
4.7.2 定理 4-2 的证明 .....	78
4.7.3 引理 4-2 的证明 .....	79
4.7.4 引理 4-3 的证明 .....	80
4.7.5 定理 4-3 的证明 .....	81
4.7.6 定理 4-4 的证明 .....	82
4.7.7 引理 4-5 的证明 .....	83
4.7.8 定理 4-5 的证明 .....	83
<b>第五章 码结构辅助的信道缩短技术与 FTN 检测算法</b> .....	<b>85</b>
5.1 系统框图 .....	86
5.2 “输出可知”卷积码 .....	87
5.3 码结构辅助的信道缩短算法.....	91

5.4 误码性能分析 .....	93
5.5 “输出可知”卷积码设计 .....	95
5.6 性能以及结果展示 .....	96
5.7 本章小结 .....	100
5.8 附录 .....	101
5.8.1 定理 5-1 的证明 .....	102
5.8.2 定理 5-2 的证明 .....	102
5.8.3 推论 5-1 的证明 .....	103
<b>第六章 FTN 系统的相关编码设计 .....</b>	<b>105</b>
6.1 针对 FTN 系统的非对称 Turbo 码设计 .....	105
6.2 针对 FTN 系统的级联码设计 .....	107
6.2.1 针对 FTN 系统的串行级联卷积码设计 .....	107
6.2.2 针对 FTN 系统的自级联卷积码设计 .....	111
6.3 本章小结 .....	114
<b>结 束 语 .....</b>	<b>117</b>
<b>参考文献 .....</b>	<b>119</b>
<b>致谢 .....</b>	<b>131</b>
<b>作者简介 .....</b>	<b>133</b>



## 第一章 绪论

本章简要的回顾了移动通信系统的发展历史。在此基础上，我们梳理了超奈奎斯特传输的发展过程。最后对文章的内容进行总结，并给出了具体的章节安排。

通信技术给人们的生活带来了极大的便利也从本质上改变了人们日常的生活。目前的通信技术不仅可以提供基本的语音传输等业务，还渗透到了人们生活中的方方面面。电视、手机、互联网等等目前人们必不可少的业务都需要通信技术。在不久的将来，物联网（Internet of Things, IoT）、雾计算、人工智能等等科技发展的重点也离不开通信技术的支撑。因此通信技术一直是我国乃至全世界中最重要的研究课题之一。然而，随着科技发展以及全球化的不断推进，目前的通信网络面临这前所未有的挑战。因此人们必须寻找新的技术手段来支撑可预见的通信需求爆发式的增长。其实，始自 Shannon 的开创性论文<sup>[1]</sup>以来，我们对提高通信能力的努力从未停歇。

第一代（The First Generation, 1G）移动通信网络成形于上世纪80年代初期。受限于当时的技术水平，1G 移动通信网络利用模拟信号来传输信息，并且仅支持语音业务。在 1G 移动通信网络中，多用户的信息通过频分多址（Frequency Division Multiple Access, FDMA）的方式进行区分。然而由于较强的干扰影响，1G 移动通信网络的通信质量较差且其速率峰值仅能达到 2.4 Kbps<sup>[2]</sup>。

第二代（The Second Generation, 2G）移动通信网络成形于上世纪90年代初期。不同于 1G 移动通信网络，2G 移动通信网络考虑数字信号，并且可以支持语音传输以及短信和邮件业务。2G 移动通信网络采用的多址技术为时分多址（Time Division Multiple Access, TDMA）和码分多址（Code Division Multiple Access, CDMA），且其支持的信息速率由 1G 移动通信网络中的 2.4 Kbps提升到了 14.4 Kbps到 64 Kbps。比较著名的 2G 移动通信网络包括全球移动通讯（Global System for Mobile Communication, GSM）系统以及 IS-95 CDMA（cdmaOne）系统<sup>[2]</sup>。

在上世纪 90 年代后期，随着通信技术的飞速发展，出现了所谓的 2.5G 移动通信阶段。相比于 2G 通信网络，2.5G 移动通信网络可以支持的信息速率提升到了 384 Kbps。比较著名的 2.5G 移动通信网络标准包括通用封包无线服务（General Packet Radio Service, GPRS）等<sup>[2]</sup>。

在 2000 年代初期出现了第三代（The Third Generation, 3G）移动通信网络。基本上，3G 移动通信网络是 GSM 网络以及 CDMA 技术的延续。3G 移动通信网络在支持 2G 移动网络的业务基础上同时支持移动电话的网页浏览、多媒体播放等业务。比较著名的 3G 移动通信网络标准包括通用移动通讯系统（Universal Mobile

Telecommunication Systems, UMTS) 以及 CDMA2000<sup>[2]</sup>。随着智能手机在 2000 年代中叶被普及, 3G 移动通信网络可以支持智能手机应用的峰值速率为 384 Kbps。然而由于其参数原因, 3G 移动通信网络往往需求较大的带宽并且具有较为复杂的系统设计<sup>[2]</sup>。

在 2000 年代中后期, 3G 移动通信网络已经开始向着具有更高通信要求的第四代 (The Fourth Generation, 4G) 通信网络演进。这一过渡时期也被广泛地称为 3.5G-3.9G 移动通信世代。3.5G-3.9G 移动通信网络可支持的峰值速率从 3G 网络的 384 Kbps 提升到了 2 Mbps。早期的 3.5G 移动通信标准包含高速上行分组接入 (High-Speed Uplink Packet Access, HSUPA)、高速下行分组接入 (High-Speed Downlink Packet Access, HSDPA) 等。在该世代后期, 为了实现从 3G 移动通信网络向 4G 移动通信网络的平稳过渡, 人们提出了长期演进计划 (Long Term Evolution, LTE), 即通常所知的 3.9G 移动通信世代。LTE 标准是据有 GSM/UMTS 网络的运营商最平滑的升级路线, 因此也被广泛应用<sup>[2]</sup>。

4G 移动通信网络成形于 2010 年代初期。4G 移动通信网络的峰值速率高达 1 Gbps, 传输时延低至 100 毫秒左右, 而且其服务质量 (Quality of Service, QoS) 相比于之前通信网络得到了极大的提高。4G 网络支持更多基于互联网的应用, 比如视频会议、网络游戏以及移动视频业务等等。主要的 4G 通信网络标准包含全球互通微波访问 (Worldwide Interoperability for Microwave Access, WiMAX)、以及高级长期演进 (LTE-Advanced, LTE-A) 等等, 且这些通信网络均兼容 2G 以及 3G 移动通信网络<sup>[3]</sup>。

目前第五代 (The Fifth Generation, 5G) 通信网络的标准制定已经结束, 并且其设备部署也正在进行。5G 移动通信网络拟提供比 4G 移动通信网络高 100 倍的传输速率, 其峰值速率可高达 10 Gbps。并且 5G 移动通信网络要求微秒级的低传输时延, 以及较高的传输可靠度。5G 移动通信网络可支持 IoT 设备以及智能交通等技术。部分 5G 移动通信网络支持使用 30 GHz 到 300 GHz 的频谱资源 (毫米波段)。然而毫米波信号衰减较快因此也带来了实际的系统设计困难。具体来讲, 5G 移动通信网络具有以下的显著优点<sup>[2]</sup>:

- **信息速率:** 5G 移动通信网络峰值速率可高达 10 Gbps, 大约是 4G 移动通信网络峰值速率的 100 倍。在 5G 网络中, 下载一部电影仅需几秒钟时间。
- **时延:** 5G 移动通信网络的时延低至 10 毫秒左右, 大约是 4G 移动通信网络的十分之一。
- **通信制式:** 5G 移动通信网络支持灵活的通信制式以支持多种通信场景, 包括增强移动宽带 (Enhanced Mobile Broadband, eMBB) 通信、高可靠低时延



(Ultra Reliable and Low Latency Communications, uRLLC) 通信以及大规模机器通信 (Massive Machine-Type-Communication, mMTC)。

- **高级应用**: 5G 移动通信网络支持虚拟现实、增强现实以及人工智能等技术。
- **频谱效率**: 5G 移动通信网络的频谱效率相比于 4G 移动通信网络约提高两倍。
- **用户密度**: 5G 移动通信网络的用户密度相比于 4G 移动通信网络约提高 10 倍。

随着 5G 移动通信网络的架设, 人们对第六代 (The Sixth Generation, 6G) 移动通信网络的研究也已经展开并且预计将在 2030 年左右投入运营。6G 移动通信网络预计可以提供相比与 5G 移动通信网络提高 100 倍的峰值速率。目前关于 6G 的相关通信频段还不确定, 然而可以确定的是已有的频谱资源无法支持 6G 通信严苛的通信速率要求。更多的频谱资源势必将会用于 6G 通信, 最有可能的是在毫米波通信的基础上进一步考虑太赫兹波段 300 GHz 到 3 THz 的频谱资源以满足通信需求。6G 移动通信网络预计会支持更先进的应用, 例如自主机器人、无线人脑-网络接口、区块链以及工业互联网等等。具体来讲, 6G 移动通信网络预计将以下的要求<sup>[2, 4]</sup>:

- **信息速率**: 6G 移动通信网络峰值速率预计高达 1 Tbps, 大约是 5G 移动通信网络峰值速率的 100 倍。
- **时延**: 6G 移动通信网络的时延低至 1 毫秒左右, 大约是 5G 移动通信网络的十分之一。
- **通信制式**: 6G 移动通信网络支持更为灵活的通信制式以支持多种通信场景, 包括大规模物联网设备接入以及机器对机器通信等等。
- **高级应用**: 6G 移动通信网络将支持并应用延展实景 (Extended Reality)、虚拟现实、增强现实以及人工智能等技术。
- **频谱效率**: 6G 移动通信网络的频谱效率相比于 5G 通信网络约提高三到四倍。
- **用户密度**: 6G 移动通信网络的用户密度相比于 5G 通信网络约提高 10 倍。

基于上述讨论, 我们将 4G 到 6G 的通信指标要求总结至表 1.1 中。为了满足 6G 移动通信网络的严苛指标, 一些关键性技术将被应用, 这些包括非正交传输 (Non-Orthogonal Transmission), 大规模多入多出 (Massive MIMO) 与波束成形 (Beamforming) 技术, 毫米波、太赫兹以及可见光通信, 以及超微小区网络, 全双工基站等等。

表 1.1 4G 到 6G 的移动通信指标总结

指标	4 G	5 G	6 G
峰值速率	100 Mbps	10 Gbps	1 Tbps
时延	100 ms	10 ms	1 ms
用户密度	$10^5$ 设备/km <sup>2</sup>	$10^6$ 设备/km <sup>2</sup>	$10^7$ 设备/km <sup>2</sup>
频谱效率	15 bps/Hz	30 bps/Hz	100 bps/Hz
频谱资源	最高6 GHz	最高300 GHz	预计3 THz
用户移动速度	最高350 km/h	最高500 km/h	最高1000 km/h

在本文中，我们将针对超奈奎斯特（Faster-than-Nyquist, FTN）传输这一种典型的非正交传输技术进行讨论。不同于传统的正交传输方式，FTN 系统的符号传输速率超过了奈奎斯特的无码间串扰（Intersymbol Interference, ISI）速率（下文简称为奈奎斯特速率），从而人为地引入了 ISI 来提升系统的频谱效率。由于其优异的特性，FTN 传输在近年来收到了广泛关注<sup>[5-7]</sup>，并且被学术界视为一种有效的提升频谱效率的方式<sup>[8]</sup>。

在即将到来的 6G 通信标准中，FTN 技术将会有着更广泛的应用。我们接下来举例说明三种可能的应用方向。

- 针对于不可避免的频谱资源紧缺的现象，FTN 传输等高谱效率非正交传输方案将会为对未来海量数据传输的苛刻要求提供理论基础。目前非正交传输的频谱效率增益已经被学术界广泛的接受，并且在国内引起了大量学者以及企业的关注。其中一个例子为北京邮电大学的李道本教授提出的时频叠加复用（Overlapped Time/Frequency Domain Multiplexing, OVXDM）技术<sup>[9]</sup>。本质上来讲，李道本教授的 OVXDM 技术与 FTN 技术类似，均通过人为引入 ISI 来提升系统谱效率。事实上，目前 FTN 传输的容量已经被证明超过传统正交传输（奈奎斯特）系统。值得强调的是，FTN 传输的容量增益来源于信道的自由度（Degree-of-Freedom, DoF）增益<sup>[10]</sup>。由容量公式中  $\log$  函数的特性不难证明，信道自由度的带来的容量增益将随着信噪比的增加而逐渐增大。事实上，FTN 传输的频谱效率在帧长趋近无穷时约是对应奈奎斯特传输系统的  $(1 + \beta_{\text{roll-off}})$  倍，其中  $\beta_{\text{roll-off}}$  为成形波形的滚降系数。因此，FTN 技术的应用无疑将在未来通信中具有重大的应用前景。
- Massive MIMO 技术将会是未来移动通信系统中必不可少的一种传输技术。大规模的天线设置将会极大的改善无线信道的传输特性从而提高系统的容量<sup>[2]</sup>。然而受限于实际系统的复杂度要求，MIMO 系统往往采用低精度的模拟数字转换器<sup>[11]</sup>来进行所需的信号处理。较低的符号精度将会不可避免地带来误码性能损失，然而文献表明过采样技术可以有效地降低该部分损失从而在不增加较多额外复杂度的前提下提升 MIMO 系统误码性能<sup>[11]</sup>。鉴于此，FTN 技术可以与

MIMO 技术进行很好地融合。具体来讲，由于 FTN 系统传输速率超过奈奎斯特速率，因此在接收端势必要以 FTN 速率、甚至高于 FTN 速率来进行采样。可见，基于 FTN 的 MIMO 系统可以有效地避免低精度模拟数字转换器带来的误码性能损失。因此，FTN 技术将会为未来 Massive MIMO 通信提供全新的实现方案。

- 空天地一体化的通信网络架构也是未来通信系统的重要发展方向之一。通过卫星通信与地面通信之间的优势互补，空天地一体化通信网络架构可以大幅度地提升通信网络覆盖面积以及通信带宽。然而传统的星-地通信链路由于通信距离较长，因此发送信号需要有较大的发送功率。然而用于提升发送信号功率的功率放大器往往对信号的峰均比（Peak-to-Average-Power Ratio, PAPR）较为敏感。当传输信号具有较高 PAPR 时，功率放大器将会工作在饱和区从而导致发送信号的非线性失真。非线性失真会很大程度上地限制奈奎斯特信号的传输速率。具体来讲，由于非线性失真的存在，通过增大传输信号的星座点大小很难大幅度地提升奈奎斯特系统的可达速率。鉴于星-地通信链路的特点，FTN 传输可以有效地提升星-地通信的性能。其一，文献表明 FTN 信号在一定条件下具有相比于奈奎斯特信号更低的 PAPR<sup>[12]</sup>，因此可以有效地避免非线性失真。关于 FTN 信号的 PAPR 特性，我们将于第二章中进行讨论。其二，由于 FTN 传输人为地引入了 ISI，因此其任一发送符号信息均一定程度上地弥散到了相邻的发送符号中。由此，在存在非线性失真的情况下，我们可以通过相邻接收符号中的相关信息来更好地对当前符号的非线性失真进行补偿，从而减小非线性失真的影响。由此可见，FTN 技术将会对未来空天地一体化通信网络提供技术支撑。

鉴于 FTN 传输的优点以及其在未来通信中的应用前景，本文将对 FTN 技术的一些基本原理进行总结，并在其基础上对近年来的一些 FTN 领域的相关研究进展进行梳理。在具体介绍 FTN 技术之前，我们首先回顾 FTN 传输技术的相关发展历史。

## 1.1 超奈奎斯特传输发展历史

虽然 FTN 技术与近几年收到了广泛地关注，其基本思想于上世纪已经基本确定。事实上，早在 Shannon 的 1948 年的经典文章中，FTN 传输的思想已经有所体现<sup>[1]</sup>。在文章中 Shannon 考虑了一种发送信号带宽和信道带宽不匹配的情况来推导峰值受限信道的容量下界。我们将 Shannon 原文中的相关叙述引用如下<sup>[1]</sup>：

“To obtain a lower bound consider the same ensemble of functions. Let these functions be passed through an ideal filter with a triangular transfer characteristic. The gain is to be unity

at frequency 0 and decline linearly down to gain 0 at frequency  $W$ ...First we note that a pulse  $\frac{\sin 2\pi Wt}{2\pi Wt}$  going into the filter..."

不难发现 Shannon 考虑的信道带宽为  $W$ ，而传输信号的带宽为  $2W$ 。该信号传输方式本质上即为 FTN 传输，其传输符号速率为信道带宽的二倍。尽管 Shannon 考虑了这种信号传输方式，但是其论文中并没有进一步关于信道容量与发送信号带宽和信道带宽之间关系的讨论。

尽管大部分的 FTN 文献公认 Mazo 是 FTN 传输的发明者，但是“faster-than-Nyquist”这个名称的第一次出现是在1970年的 IEEE International Symposium on Information Theory 会议中，其论文作者为 Lucky。不久后，Mazo 于 1975 年给出了关于 FTN 传输的定义及分析<sup>[13]</sup>。Mazo 在文章中着重分析了 FTN 信号间最小距离与符号传输速率之间的关系，并且发现一定程度的加快符号速率并不会带来最小欧式距离的减少。具体来讲，Mazo 发现在脉冲成形波形为 sinc 函数的条件下，二进制相移键控（Binary Phase Shift Keying, BPSK）信号，可以以 0.802 倍的奈奎斯特速率进行发送而不损失信号之间的最小欧式距离，而 0.802 的数值也被称为 Mazo 极限。这一发现也意味着在不增加发送信号带宽的条件下我们可以额外多传输约 25% 的符号，并且接收端的检测性能基本不受影响。这一现象的发现在当时引起了一些学术界的质疑，其主要原因在于奈奎斯特奈奎斯特无码间串扰传输速率速率与 Mazo 极限容易混淆。随着关于部分响应传输（Partial-Response Signaling）的最小距离研究的成熟这一现象也逐渐地被学术界广泛认可<sup>[14]</sup>。

在 2003 年，Liveris 和 Georgiades 将 FTN 的相关研究扩展到了根升余弦（Root Raised Cosine, RRC）函数为成形波形的情况。他们发现当成形波形为 RRC 函数时，FTN 现象同样存在并且比 sinc 函数成形时更为显著<sup>[15]</sup>。由于 sinc 函数难以物理实现，因此实际通信系统中往往采用 RRC 函数来代替 sinc 函数。因此这一发现为 FTN 传输在实际系统中的应用奠定了基础。关于 Mazo 极限的相关内容我们将在第二章中详细介绍。进一步地，FTN 传输的概念也被扩展到了频域，并且二维 Mazo 极限被发现存在<sup>[16]</sup>。这一发现也使得人们认识到多载波 FTN 传输（Multicarrier FTN, MFTN）的优势。更多关于 MFTN 传输的介绍将在第二章中提及。

随着研究的深入，人们对 FTN 传输的信道容量计算出现了巨大争议。一些学者计算得到的 FTN 传输的信道容量限超过了基于传统 Shannon 理论得到的信道容量限。这主要由于 FTN 信号的符号速率超过奈奎斯特速率，因此关于其信道容量的计算不能直接套用经典的 Shannon 公式。在 2009 年 Rusek 和 Anderson 给出了关于 FTN 信道容量的详细分析<sup>[10]</sup>。他们的结果显示当符号速率加快到一定程度后进一步提升符号速率并不会增加信道容量，并且这一具体数值由成形波形的带宽决定<sup>[10]</sup>。在 2018 年度的 Shannon 讲座中 Shannon 奖得主 Ungerboeck 对一些 FTN 传输技术容

量的相关内容也进行了讨论，并引发了学术界的对 FTN 传输技术的进一步关注。我们将部分 FTN 传输技术的发展历史总结在表 1.2 中。

目前 FTN 传输技术已经被学术界广泛认为是一种具有高频谱利用率的传输方式，并且体现出了与传统通信技术手段良好的兼容性。鉴于 FTN 技术的优点，越来越多的通信系统考虑了 FTN 传输技术。文献 [8] 中讨论了 FTN 技术的优点并对其在未来通信系统中的应用进行了讨论。针对第二代数字卫星广播标准（Digital Video Broadcasting - Satellite - Second Generation, DVB-S2）的制式，FTN 技术展示出了十分优异的性能<sup>[17-19]</sup>，其一些结果甚至大幅度地超出了 DVB-S2 的相关设计要求<sup>[20]</sup>。FTN 技术也被视为 5G 标准的备选波形方案之一。文献 [21] 中详细分析了多种 5G 波形备选方案的优劣性，并指出 FTN 技术可以作为一种有效的提高频谱利用率的方案。相关的一些关于 FTN 技术与 5G 标准的讨论可以参考文献 [22, 23]。

## 1.2 研究内容及章节安排

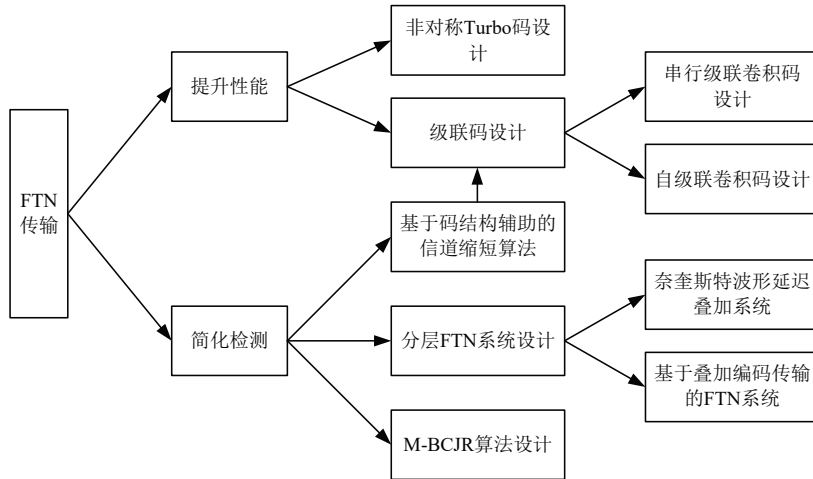


图 1.1 本文的主要研究工作框图

为了满足未来通信网络中对频谱效率的苛刻要求，本文探究了 FTN 传输的简化检测以及编码方案设计等问题，并取得了一些成果。首先，为了降低 FTN 信号的检测复杂度，我们探究了基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 算法设计，并提出了两种针对 FTN 信号的检测策略。我们通过理论推导证明了所提出的两种检测策略可以在简化遍历网格图大小的同时保留对应的正确路径，因此我们提出的检测算法具有优秀的误码性能<sup>[24]</sup>。其次，我们考虑了分层结构来进行 FTN 信号传输。我们分别讨论了两种不同的分层 FTN 传输策略<sup>[25, 26]</sup>，并针对其特点设计了信号发送以及检测算法。我们通过理论推导的方式得到了两种策略的功率分配方式，并且分析了其对应的信道容量。接下来，我们提出了一种基于码结构辅助的信道缩短算法<sup>[27, 28]</sup>，该算法

表 1.2 FTN 传输发展简史

年份	作者	主要贡献
1948	Shannon	考虑了一种本质上为 FTN 传输的信号来推导峰值受限信道的容量下界。
1970	Lucky	首先提出了“faster-than-Nyquist”的名称。
1975	Mazo	给出了具体 FTN 传输的定义。
2003	Liveris 及 Georgiades	FTN 传输的概念被扩展到成形波形为 RRC 波形的系统中。
2005	Rusek 及 Anderson	FTN 传输被推广至频域，并且发现了二维 Mazo 极限的存在。
2009	Rusek 及 Anderson	推导出 FTN 传输的容量限。
2018	Ungerboeck	在 2018 年 Shannon 讲座上讨论了 FTN 传输的相关内容。

可以仅通过遍历对应的编码网格图来实现联合信号检测及译码，并且可以得到传统信道缩短算法无法得到的编码增益。以上研究内容在本文各章节中均有体现。为了更清晰地展示本文对应研究内容，图 1.1 中给出了本文的主要研究工作框图。

本文的章节安排如下：

我们在第二章中详细阐述了 FTN 传输的基本原理。在讨论了基本的 FTN 传输信号后我们分析了其对应的信号间最小欧式距离，并引出了 Mazo 极限的分析。关于 FTN 系统信道容量的讨论一直是学术界关心的一个焦点，我们在第二章中也给出了关于 FTN 系统信道容量的推导。基于已有的 FTN 系统容量分析，我们进一步地考虑了当 FTN 信号带宽趋于无穷时的容量，并且与 OVXDM 系统<sup>[9]</sup>容量进行了比较。我们同样在第二章中讨论了一些主流的 FTN 信号检测算法，并比较了时域和频域 FTN 检测算法的优缺点<sup>[29]</sup>。我们的第二章中同样分析了 FTN 系统传输的 PAPR 特性，并且简要分析了 MFTN 传输的性能。

我们在第三章中考虑了基于 Ungerboeck 信道观测模型的 M-BCJR 算法设计。由于 Ungerboeck 信道观测模型的度量值并没有概率意义，因此仅依靠当前时刻的度量值无法直接选取最可靠的网格图状态进行保留。针对这一问题，我们提出了两种 M-BCJR 算法，这两种算法通过考虑“将来”时刻符号的影响来判断当前时刻最可靠的  $M$  个网格图状态进行保留。我们通过理论推导分析了两种算法对应的应用场景，并且我们将提出的算法与一些常用的 FTN 信号检测算法进行比较。仿真性能表明我们提出的算法可以有效地对 FTN 信号进行检测并且相比于一些常用的 FTN 信号检测算法有更好的误码性能以及复杂度的折中。

为了进一步降低检测复杂度，我们在第四章中讨论了分层结构在 FTN 传输中的应用。我们具体考虑了两种不同的 FTN 多层结构，即奈奎斯特波形延迟叠加结构以及叠加编码传输的 FTN 结构。我们分别讨论了这两种多层结构对应的发送端和接收端设计，并且考虑了具有低检测复杂度的多级译码策略来进行信号检测。我们通过理论推导得到了适合于这两种多层结构的功率分配方案。我们进一步地分析了这两种多层结构对应的信道容量。通过运用 Szegö 定理，我们给出了两种信道容量的闭合表达式。我们发现叠加编码传输的 FTN 结构可以得到 FTN 传输对应的信道自由度增益，然而奈奎斯特波形延迟叠加结构仅能得到由于滚降频谱带来的信噪比增益。通过系统仿真我们证明了得到结论的正确性。

我们在第五章中提出了基于码结构辅助的信道缩短算法，该算法通过级联一种特殊的卷积码来实现简化信号检测。我们将这种特殊的卷积码结构称为“输出可知”卷积码。该卷积码具有一种特殊的结构使得之前的若干个编码符号可以通过观察当前编码网格图状态得到。依照“输出可知”卷积码，我们给出了基于码结构辅助的信道缩短算法的具体算法步骤。进一步地，我们对所提出的算法性能进行了分析，

并且发现算法的误码性能与有效欧式距离密切相关。为了提升算法性能，我们提出了一种码搜索算法来得到具有较大有效欧式距离的“输出可知”卷积码结构。仿真结果显示我们提出的算法可以有效地检测 FTN 信号，并且在相同检测复杂度下性能优于传统的信道缩短算法。

为了提升 FTN 系统的误码性能，我们在第六章中讨论了针对 FTN 系统的纠错编码方案设计。我们考虑了 Turbo 码的设计以及级联码的设计。具体来讲，我们采用重量谱以及 EXIT 图等工具来设计纠错编码方案。针对于 FTN 传输特点，我们考虑了一种非对称的 Turbo 码结构，并适当地改变了接收端设计方案与之匹配。我们基于第五章中考虑的基于码结构辅助的信道缩短算法提出了两种级联码的设计，包括串行级联码以及自级联码。我们给出了针对于 FTN 系统的 EXIT 图的相关计算公式，并且通过 EXIT 图特性来寻找合适的码结构。仿真结果显示出了我们提出的编码方案在 FTN 传输的情况下优于相同信息速率下编码奈奎斯特系统性能。值得强调的是我们提出的针对于 FTN 系统的自级联编码方案可以得到超过相同信息速率下奈奎斯特系统受限容量限的优异性能，且其性能与 EXIT 图分析相符。

最后我们总结了全文的研究工作并对下一步的研究方向进行了讨论。



## 第二章 FTN 传输原理介绍

本章详细介绍了 FTN 传输的基本概念，讨论了单载波、多载波 FTN 传输与传统奈奎斯特传输的区别，并分析了 FTN 传输系统在高斯白噪声信道下的容量。同时，总结了主流 FTN 检测算法，并且对其误码性能进行了分析与比较。

### 2.1 单载波 FTN 传输

单载波 FTN 传输是当今学术以及工业领域中应用最广泛的一种 FTN 传输模式。因此，在本节中，我们将主要介绍单载波 FTN 传输的相关概念。

#### 2.1.1 系统模型

不失一般性地，我们考虑单载波编码 FTN 系统发送端框图如图 2.1 所示。

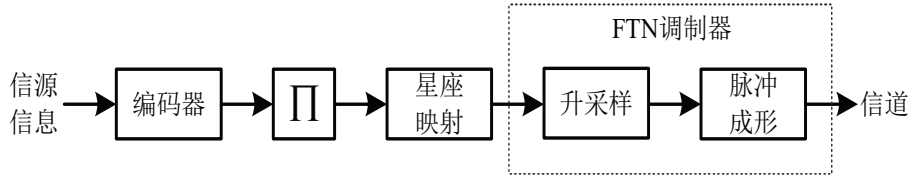


图 2.1 单载波 FTN 系统发送端框图

由图所示，信源序列经过信道编码器后进行交织，接着将交织后的码字通过星座映射后送入 FTN 调制器，其中 FTN 调制器可以通过改变升采样倍数和成形波形采样点数来实现<sup>[12]</sup>。由此，单载波 FTN 信号可以由下式表示<sup>[5, 6, 13]</sup>

$$s(t) = \sqrt{E_s} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] h(t - n\tau T), \quad (2-1)$$

其中  $N$  为发送符号个数， $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T$  为发送符号序列， $E_s$  为每符号平均能量， $h(t)$  为能量归一化的脉冲成形波形，即  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt = 1$ ， $\tau T$  为发送符号间隔时间。通常满足  $0 < \tau \leq 1$ ，称为压缩因子，并且当  $\tau = 1$  时，FTN 信号退化为传统的正交传输信号（即奈奎斯特信号）。图 2.2 给出了一个  $\tau = 0.5$  时，成形波形为 sinc 函数，传输符号为  $[+1, -1, +1, -1, -1]^T$  的 FTN 信号波形图。可见，FTN 传输相比于传统的奈奎斯特传输具有更高的码元速率，即可以在相同时间、带宽条件下传输更多码元符号。然而，在另一方面，由于 FTN 传输的码元速率超过了奈奎斯特速率，因此 FTN 信号在发送端引入了 ISI。这部分 ISI 对 FTN 系统的误码性能以及容量分析有着重要影响，对此我们将在下文中深入讨论。

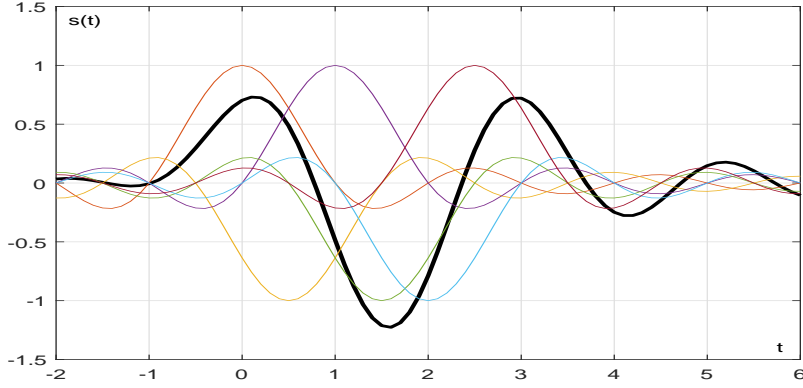


图 2.2 压缩因子为  $\tau = 0.5$  时，成形波形为 sinc 函数的 FTN 信号波形图，对应的传输符号为  $[+1, -1, +1, -1, -1]^T$

FTN 信号的接收机可以通过多种方式来实现，这里我们考虑一种常见的单载波编码 FTN 系统接收端框图如图 2.3 所示。



图 2.3 单载波 FTN 系统接收端框图

接收信号  $r(t)$  经过匹配滤波后按照 FTN 速率进行采样并送入检测器。考虑加性高斯白噪声 (Additive White Gaussian Noise, AWGN) 信道，则我们可知第  $n$  个采样值  $y[n]$  满足：

$$y[n] = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) h^*(t - n\tau T) dt = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g[m - n] + \eta[n], \quad (2-2)$$

其中  $g[k]$  为 FTN 的 ISI 系数定义如下

$$g[k] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h^*(t + k\tau T) dt, \quad (2-3)$$

$\eta[n]$  为由于 FTN 速率采样得到的色噪声样本，并满足  $\mathbb{E}[\eta[n] \cdot \eta^*[m]] = N_0 g[m - n]$ 。为了便于下文分析，我们将式 (2-2) 变为矩阵形式如下：

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}. \quad (2-4)$$

其中我们称托普利兹 (Toeplitz) 矩阵  $\mathbf{G}$  为 FTN 的信道矩阵，并满足

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g[0] & g[1] & \cdots & g[N-1] \\ g[-1] & g[0] & \cdots & g[N-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g[1-N] & g[2-N] & \cdots & g[0] \end{pmatrix}, \quad (2-5)$$

$\mathbf{y} = [y[0], y[1], \dots, y[N-1]]^T$  为信道观测序列,  $\boldsymbol{\eta} = [\eta[0], \eta[1], \dots, \eta[N-1]]^T$  为色噪声序列, 并满足  $\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}^H] = N_0 \mathbf{G}$ 。

基于 FTN 的系统模型, 我们接下来讨论 FTN 领域的一个经典结论, 即 Mazo 极限。

### 2.1.2 Mazo 极限

当 FTN 接收端采用最大似然 (Maximum-Likelihood, ML) 准则进行检测时, FTN 信号之间的最小欧式距离  $d_{\min}^2$  对系统的误比特率 (Bit Error Rate, BER) 性能起主导作用<sup>[13]</sup>。不失一般性地, 我们考虑两个 FTN 信号  $s_1(t)$  与  $s_2(t)$ , 其对应的传输符号序列分别为  $\mathbf{x}_1[x_1[0], x_1[1], \dots]^T$  和  $\mathbf{x}_2[x_2[0], x_2[1], \dots]^T$ 。我们定义  $s_1(t)$  与  $s_2(t)$  的欧式距离为  $D^2(s_1(t), s_2(t))$ 。按照欧式距离的定义<sup>[6]</sup>, 我们可得

$$\begin{aligned}
 D^2(s_1(t), s_2(t)) &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |s_1(t) - s_2(t)|^2 dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{\infty} (x_1[n] - x_2[n]) h(t - n\tau T) \right|^2 dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{n=0}^{\infty} e[n] h(t - n\tau T) \right|^2 dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e[n] e^*[m] \int_{-\infty}^{\infty} h(t - n\tau T) h^*(t - m\tau T) dt, \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e[n] e^*[m] g[n - m]. \tag{2-6}
 \end{aligned}$$

其中  $e[n] = x_1[n] - x_2[n]$  表征对应的传输符号  $x_1[n]$  与  $x_2[n]$  的数值差距。为了方便起见, 我们定义错误序列  $\mathbf{e} = [e[0], e[1], \dots]^T$ 。由式(2-6)可见, FTN 信号之间的欧式距离由其对应的压缩因子  $\tau$ , 错误序列  $\mathbf{e}$ , 以及成形波形  $h(t)$  决定。

现在我们来分析 FTN 信号之间的最小欧式距离  $d_{\min}^2$ 。我们首先引入单错误事件 (Antipodal Event) 与单错误距离 (Antipodal Distance)  $d_0^2$  的概念<sup>[14]</sup>。

**定义2-1 (单错误事件与单错误距离):** 考虑两个传输序列  $\mathbf{x}_1$  与  $\mathbf{x}_2$ , 若其对应的错误序列  $\mathbf{e}$  只包含一个非零元素, 则  $\mathbf{x}_1$  与  $\mathbf{x}_2$  为一单错误事件, 其欧式距离为称为单错误距离。

不难发现单错误距离的数值与压缩因子  $\tau$  和成形波形  $h(t)$  无关, 即

$$D^2(s_1(t), s_2(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} e[n] e^*[m] g[n - m] = |e[n']|^2 = d_0^2, \tag{2-7}$$

其中  $|e[n']|^2$  为对应的错误序列  $\mathbf{e}$  中的非零元素。值得强调的是, 由  $h(t)$  的  $T$ -正交性可知, 传统奈奎斯特信号之间的最小距离  $d_{\min}^2$  即为  $d_0^2$ 。然而针对于 FTN 信号而

言，由于其最小欧式距离的计算必考虑单错误事件，且单错误距离的数值与压缩因子  $\tau$  无关，因此针对 FTN 信号，我们有  $d_{\min}^2 \leq d_0^2$ 。

**定理2-1 (FTN 信号的最小欧式距离):** 在传输符号平均能量相同的条件下，FTN 信号之间的最小欧式距离小于等于奈奎斯特信号之间的最小欧式距离。

有趣的是，Mazo 发现一定程度的加快码元速率并不会带来最小欧式距离的减少。他通过数值计算发现在 FTN 系统的脉冲成形波形为 sinc 函数的条件下，当  $\tau > 0.802$  时，BPSK 映射下信号之间的最小欧氏距离并不会减小，这一数值也被称为 Mazo 极限。这一发现意味着在不增加信号带宽的条件下，FTN 传输相比于奈奎斯特传输可以多传输约 25% 的比特，并且接收端的检测性能基本不受影响。Mazo 极限被进一步地推广至成形波形为 RRC 函数时的情景<sup>[15]</sup>，我们将相应的结论总结如下<sup>[30]</sup>：

表 2.1 BPSK 调制下不同滚降系数时的 Mazo 极限

滚降系数 $\beta_{\text{roll-off}}$	Mazo 极限 $\tau$
0	0.802
0.1	0.779
0.2	0.738
0.3	0.703

Mazo 极限的原理不难理解。随着  $\tau$  的降低，某些非单错误事件的错误序列对应的欧式距离会逐渐逼近单错误距离。因此，必存在一个最大的  $\tau$  值，使得非单错误事件的欧式距离不小于单错误距离，这一具体的  $\tau$  值即为 Mazo 极限。值得强调的是，尽管 Mazo 极限表征着在 ML 准则检测下 FTN 传输的误码性能相比于奈奎斯特信号没有明显损失，实际 FTN 系统往往无法采用 ML 准则进行信号检测，因此和传统的奈奎斯特系统相比，FTN 系统还存在一些性能损失。不过，已有的文献表明，这些性能损失大部分可以通过强力的均衡技术以及优化的信道编码来进行补偿<sup>[6, 30]</sup>。这一部分的内容将于后文中详细介绍。

## 2.2 单载波 FTN 容量相关问题

关于 FTN 系统的容量一直是学术界关注的一个重点，因此，在本节中我们将主要介绍单载波 FTN 容量的相关内容，并在其基础上与其他非正交传输方式进行比较。

### 2.3 单载波 FTN 容量分析

在本小节中我们将讨论在 AWGN 信道下的单载波 FTN 系统容量  $C_{\text{FTN}}$ 。Shannon 在 1948 年的经典论文中给出了当成形波形  $h(t)$  为带宽受限在  $[-W, W]$  的 sinc 函数时的 AWGN 信道容量<sup>[31]</sup>：

$$C = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{WN_0} \right) \quad \text{bits/s}, \quad (2-8)$$

其中  $P$  为信号的平均功率， $N_0$  为白噪声的单边功率谱密度。我们将单位时间内接收信号空间的维度称为信道的 DoF。根据 Shannon-Nyquist 采样定理<sup>[32]</sup>可知，当成形波形单边带宽为  $W$  时，DoF 为  $2W$ 。进一步地，当成形波形频谱在受限带宽内不为恒定值，即成形波形非 sinc 函数时，依照成形波形的功率谱密度(Power spectral density, PSD)，Shannon 给出了更加通用的容量表达式<sup>[31]</sup>：

$$C_{\text{PSD}} = \int_0^\infty \log_2 \left( 1 + \frac{2P}{N_0} |H(f)|^2 \right) df \quad \text{bits/s}, \quad (2-9)$$

其中  $H(f)$  为  $h(t)$  的傅里叶变换式。

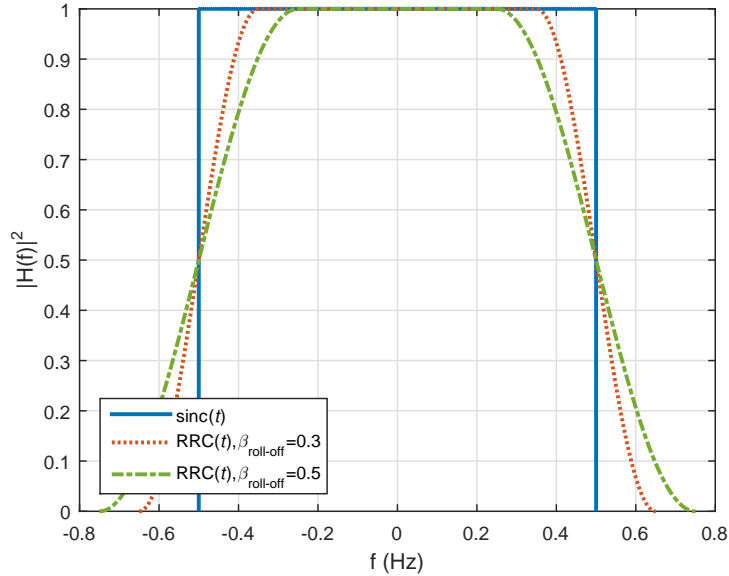
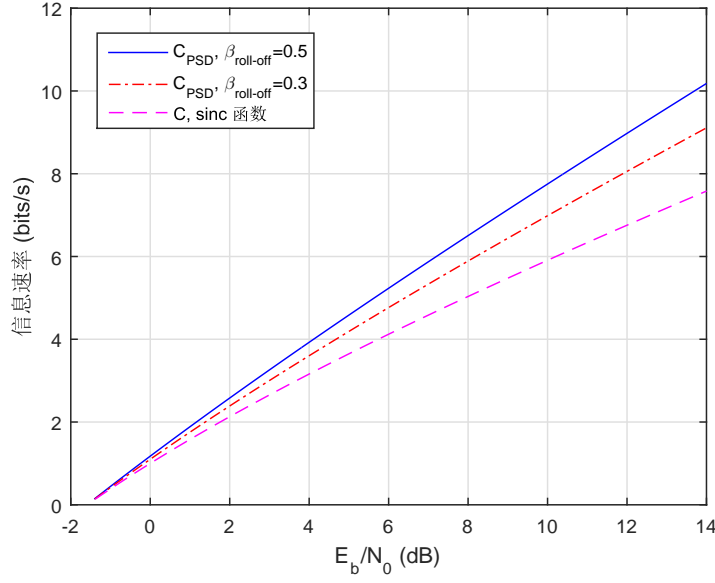


图 2.4 成形波形  $h(t)$  在不同滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  下的频谱

可以看出，当  $h(t)$  为带宽受限在  $[-W, W]$  的 sinc 函数时式 (2-9) 和式 (2-8) 等价。然而，当成形波形非 sinc 函数时，上式由于  $h(t)$  的 PSD 与带宽的原因产生了区别。图 2.4 给出成形波形  $h(t)$  在不同滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  下的频谱，其对应的信道容量（复高斯输入）在图 2.5 中给出。由图可见，当滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  增加时波形对应的容量也随之增加。值得注意的是，由于带宽  $W = (1 + \beta_{\text{roll-off}})/(2T)$  同样随着


 图 2.5 成形波形  $h(t)$  在不同滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  下的信道容量

$\beta_{\text{roll-off}}$  的增加而增加，系统的归一化频谱效率  $\eta_{\text{SE}} = C_{\text{PSD}}/W$  反而下降，不过该损失在高 SNR 时渐进趋于常数<sup>[10]</sup>。为了更直观地表示该现象，图 2.6 给出了与图 2.5 相应的归一化频谱效率曲线。尽管 sinc 函数具有着最高的频谱利用率，其物理上不可实现，因此如何利用滚降系数带来的  $C_{\text{PSD}}$  的增益至关重要。有文献指出，传统的正交传输信号无法利用滚降部分的频谱，从而带来信息速率的损失；而 FTN 信号可以充分利用这一部分的带宽，并被证明当成形函数为非 sinc 函数时，FTN 信号的容量大于传统的正交传输信号<sup>[10]</sup>。为了更好地说明 FTN 传输在信道容量方面的优势，我们首先探究单载波 FTN 信号的 ISI 特性。

我们考虑式 (2-3) 给出的 ISI 系数。为了便于分析，我们考虑下一引理

**引理 2-1 (Parseval 定理):** 函数平方的积分等于其傅里叶变换式平方积分，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df, \quad (2-10)$$

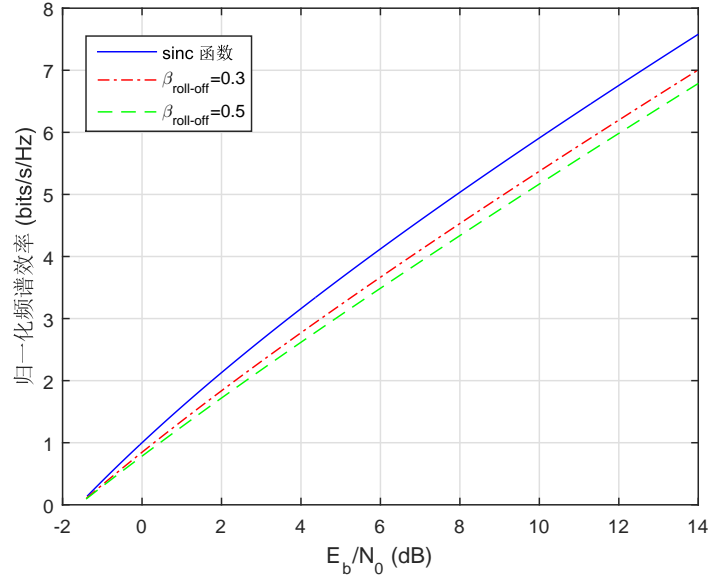
其中  $X(f)$  为函数  $x(t)$  的傅里叶变换式。

基于引理 2-1，我们可得

$$g[k] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h^*(t + k\tau T) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 e^{j2\pi k\tau T f} df. \quad (2-11)$$

注意到 FTN 的 ISI 系数  $g[k]$  具有周期性，其周期为  $1/\tau T$ 。 $g[k]$  的周期性保证了式 (2-11) 可以通过折叠频谱  $|H_{\text{fo}}(f)|^2$  来代替  $|H(f)|^2$  获得<sup>[10, 33]</sup>。我们引入折叠频谱的定义<sup>[10, 33]</sup>如下：

**定义 2-2 (折叠频谱):** 针对 FTN 系统，假设成形波形  $h(t)$  的频谱为  $|H(f)|^2$ ，则

图 2.6 成形波形  $h(t)$  在不同滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  下的归一化频谱效率

其折叠频谱  $|H_{\text{fo}}(f)|^2$  与  $|H(f)|^2$  满足下式:

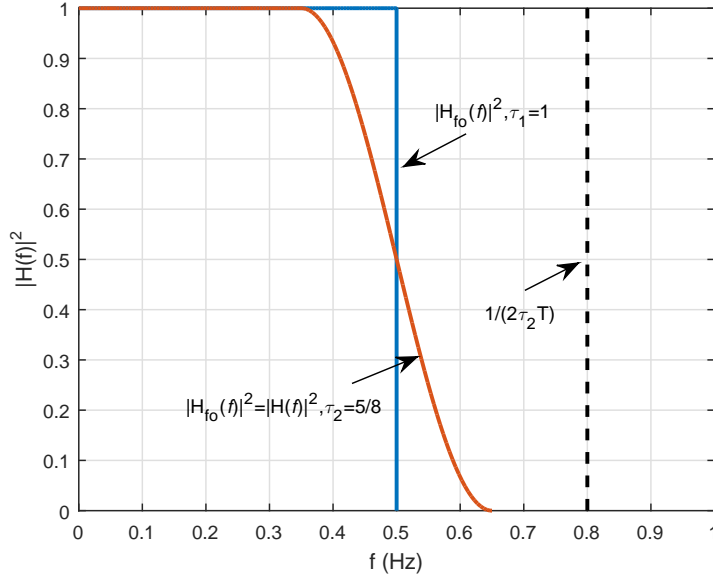
$$|H_{\text{fo}}(f)|^2 \triangleq \begin{cases} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |H(f + \frac{k}{\tau T})|^2, & |f| \leq \frac{1}{2\tau T} \\ 0, & |f| > \frac{1}{2\tau T} \end{cases}, \quad (2-12)$$

实际上, 折叠频谱等价于将原始传输信号的频谱在频率区间  $[-\frac{1}{2\tau T}, \frac{1}{2\tau T}]$  之外的能量“折叠”回该频率区间内。因此当  $\tau$  足够小时, 折叠频谱的形状与成形波形的频谱形状相同。以  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ ,  $T = 1$  为例, 图 2.7 给出了  $|H_{\text{fo}}(f)|^2$  和  $|H(f)|^2$  的在  $\tau_1 = 1$  和  $\tau_2 = 5/8$  时的图像。

对于 FTN 信号来讲, 由折叠频谱的定义可知, 当成形波形  $h(t)$  的带宽  $W \leq 1/(2\tau T)$ , 即  $\tau \leq 1/(1+\beta_{\text{roll-off}})$  时,  $|H_{\text{fo}}(f)|^2 = |H(f)|^2$ , 这也保证了滚降部分带宽可以被利用, 系统最终容量为由  $h(t)$  的 PSD 所确定的  $C_{\text{PSD}}^{[10]}$ ; 反之, 对于奈奎斯特信号来讲, 当成形波形  $h(t)$  不为 sinc 函数时,  $h(t)$  的带宽  $W > 1/2T$ 。受限于符号发送速率, 系统无法利用  $f \in (1/2T, W)$  部分的带宽, 该部分能量需要被“折叠”至  $f \in (0, 1/2T)$ 。因此, 此时系统最终容量为  $h(t)$  的  $|H_{\text{fo}}(f)|^2$  所确定的容量, 等价于 sinc 函数的 PSD 所确定的容量并在数值上等于  $C^{[10]}$ 。

同样值得关注的问题是, 当  $1/(1+\beta_{\text{roll-off}}) \leq \tau \leq 1$  时, FTN 信号的信道容量  $C_{\text{FTN}}$  与  $C$  之间的关系。通过利用 log 函数的凹性不难证明,  $C_{\text{FTN}}$  同样大于  $C$  但是小于  $C_{\text{PSD}}$ , 具体的证明过程可参考文献 [10]。由此我们可以给出以下结论:

**定理 2-2 (FTN 信道容量 [10]):** 当成形波形  $h(t)$  为非sinc函数时, FTN 信道容量


 图 2.7 当  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ ,  $T = 1$  时,  $|H_{fo}(f)|^2$  和  $|H(f)|^2$  的图像

$C_{\text{FTN}}$  满足

$$C_{\text{FTN}} = \int_0^{\frac{1}{2\tau T}} \log_2 \left( 1 + \frac{2P|H_{fo}(f)|^2}{N_0} \right) df. \quad (2-13)$$

进一步地, 我们有

$$C < C_{\text{FTN}} \leq C_{\text{PSD}}. \quad (2-14)$$

**证明:** 具体证明可以参考文献 [10]。

可以看出, 当  $\tau \leq 1/(1+\beta_{\text{roll-off}})$  时, 折叠频谱的形状与成形波形  $h(t)$  完全一致。此时 FTN 信道容量理论上可达系统最终容量  $C_{\text{PSD}}$ 。同时根据定理 2-2 不难看出, 当信噪比趋于无穷的时候 FTN 信道容量  $C_{\text{FTN}}$  约是奈奎斯特系统容量  $C$  的  $(1 + \beta_{\text{roll-off}})$  倍<sup>[10]</sup>, 这一点也反映出了 FTN 传输的优势。值得强调的是, 在成形波形 PSD 正比于注水定理给出的 PSD<sup>[34]</sup> 的条件下, 即使是二元 FTN 系统当  $\tau$  接近于零时, 其容量也可以渐进接近由高斯输入得到的  $C_{\text{PSD}}$ <sup>[35]</sup>, 这一结论也被称为 FTN 容量的渐进最优性。

图中 2.8 给出了  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  时 FTN 系统在不同  $\tau$  时的容量, 其中我们假设传输的符号服从二维高斯分布。由图所示, 随着  $\tau$  不断减小, FTN 系统容量逐渐逼近成形波容量  $C_{\text{PSD}}$ 。注意到当  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  时, 若  $\tau$  小于  $\frac{1}{1+\beta_{\text{roll-off}}} = 0.7692$ , FTN 系统容量理论上可达的成形波容量。我们注意到当  $\tau = 0.8$  时, 仿真得到的 FTN 容量限已经基本和成形波容量限重合, 这一观测也与我们之前的分析相符。

为了进一步分析 FTN 传输的 ISI 对信道容量的影响, 我们考虑式 (2-5) 中的 FTN 信道矩阵  $\mathbf{G}$ 。可以证明无论  $N$  如何变化,  $\mathbf{G}$  均为满秩矩阵。Tufts 指出该特



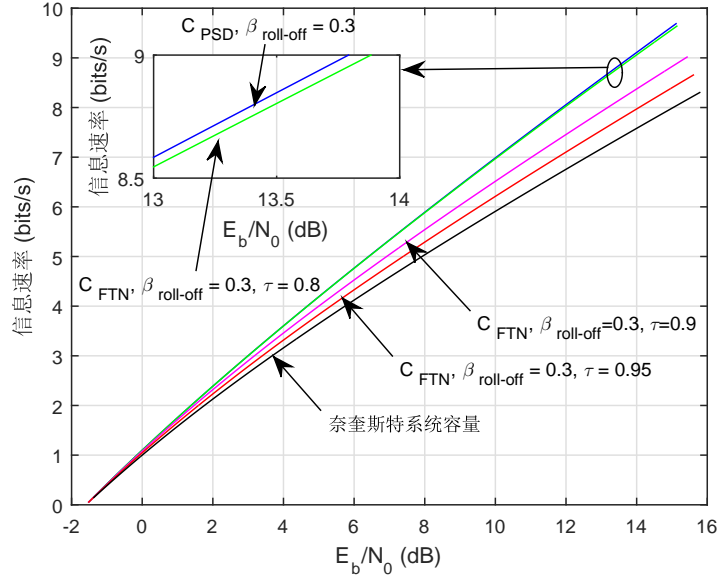


图 2.8  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  时 FTN 系统容量  $C_{\text{FTN}}$  与成形波形容量  $C_{\text{PSD}}$  以及奈奎斯特系统容量比较

性意味着当传输信道线性非时变且无噪声时，即使传输有限长实信号也可以实现任意速率下的任意小错误概率传输<sup>[36]</sup>。这一结论也从侧面证明了 ISI 的存在并不意味着系统信道容量的损失。关于 FTN 容量方面还有一个有趣的问题，即对于  $h(t)$  为非 sinc 函数时的奈奎斯特传输系统，如果接收端采样速率超过  $1/T$  会不会带来容量上的增益？不幸的是，答案是否定的，这是因为发送端的奈奎斯特传输速率限定了总的信道容量。换言之，尽管  $C_{\text{PSD}} > C$ ，但是由于发送端的奈奎斯特传输速率限定了系统的传输信息的总量不会超过  $C$ ，因此接收端无法通过过采样来得到容量增益。关于这一现象的理论证明可以参考文献[33]。

我们已经讨论了 FTN 系统的信道容量，接下来我们将讨论 FTN 系统的归一化频谱效率。为了方便下文分析，我们将 FTN 系统的归一化频谱效率记为  $\eta_{\text{FTN}}$ ，并满足

$$\eta_{\text{FTN}} \triangleq C_{\text{FTN}}/W, \quad (2-15)$$

其中  $W$  为信号的单边带宽，即  $W = (1 + \beta_{\text{roll-off}})/(2T)$ 。基于上文分析我们不难发现，由于 FTN 系统容量可以逼近  $C_{\text{PSD}}$ ， $\eta_{\text{FTN}}$  可以逼近  $\eta_{\text{SE}} = C_{\text{PSD}}/W$ 。为了进一步地体现 FTN 传输的优势，我们先将  $\eta_{\text{FTN}}$  与成形函数为 sinc 函数时的系统归一化谱效率  $\eta_{\text{sinc}} = 2TC$  以及成形函数为 RRC 函数时的奈奎斯特系统归一化谱效率  $\eta_{\text{Nyquist}} = C/W$ 。我们有以下定理：

**定理 2-3 (FTN 归一化频谱效率渐进最优性 [10]):** 当成形波形  $h(t)$  为非 sinc 函数，且  $\tau \leq \frac{1}{1+\beta_{\text{roll-off}}}$  时，FTN 归一化频谱效率  $\eta_{\text{FTN}}$  满足

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{\eta_{\text{FTN}}}{\eta_{\text{sinc}}} = 1. \quad (2-16)$$

**证明:** 具体证明可以参考文献 [10]。

**定理 2-4 (FTN 频谱效率优势):** 当成形波形  $h(t)$  为非sinc函数且  $\tau \leq \frac{1}{1+\beta_{\text{roll-off}}}$  时, FTN 归一化频谱效率  $\eta_{\text{FTN}}$  满足

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \frac{\eta_{\text{FTN}}}{\eta_{\text{Nyquist}}} \simeq 1 + \beta_{\text{roll-off}}. \quad (2-17)$$

**证明:** 考虑到当信噪比充分大时  $C_{\text{FTN}}$  约是  $C$  的  $1 + \beta_{\text{roll-off}}$  倍<sup>[10]</sup>, 因此定理 2-4 成立。 ■

上述两个定理刻画了 FTN 系统的频谱效率在信噪比趋于无穷时的趋势。不难看出, 当成形波形 PSD 给定且  $\tau$  充分小时, FTN 系统理论上不存在频谱效率的损失, 并且明显优于奈奎斯特系统。图 2.9 给出了  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  时,  $\eta_{\text{FTN}}$  与  $\eta_{\text{sinc}}$  以及  $\eta_{\text{Nyquist}}$  的比较。不难发现随着  $\tau$  的降低, FTN 归一化频谱效率要明显优于奈奎斯特系统归一化频谱效率, 并且在高信噪比时与  $\eta_{\text{sinc}}$  的差距约为常数。

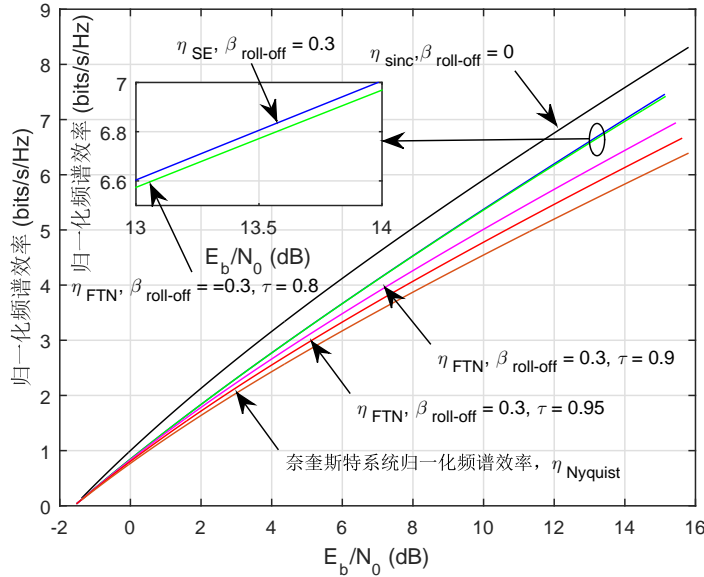


图 2.9  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  时, FTN 系统归一化频谱效率  $\eta_{\text{FTN}}$  与 sinc 函数成形的归一化谱效率  $\eta_{\text{sinc}}$  以及奈奎斯特系统归一化频谱效率  $\eta_{\text{Nyquist}}$  的比较

### 2.3.1 FTN 与 OVXDM 系统信道容量比较

在本小节中我们将简要讨论 FTN 系统信道容量与北京邮电大学的李道本教授提出的 OVXDM 系统的信道容量之间的关系。OVXDM 系统通过在时域或频域人为地加快符号传输速率的方式来实现提升系统的频谱效率, 其本质上与 FTN 传输方式较为相近。我们在图 2.10 中给出了 OVXDM 系统的发送端框图<sup>[37]</sup>。由图所示, 考虑一个基本的时域或频域成形波形  $h(t)$  或  $H(f)$ , OVXDM 系统可以通过利用时域或频域延迟叠加的模式进行调制。首先, 我们将信源序列  $u$  通过串并转换变为  $K$  个子序

列，记为  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{K-1}\}$ 。其中，第  $k$  层的子序列  $\mathbf{u}_k$  按照对应的方式进行编码与映射后分别以延迟为  $\frac{k}{K}T$  或  $\frac{k}{K}B$  的方式进行奈奎斯特速率的波形成形，其中  $B$  为子载波带宽。最终 OVXDM 系统的发送信号为每一层成形后的信号的叠加后波形。由于

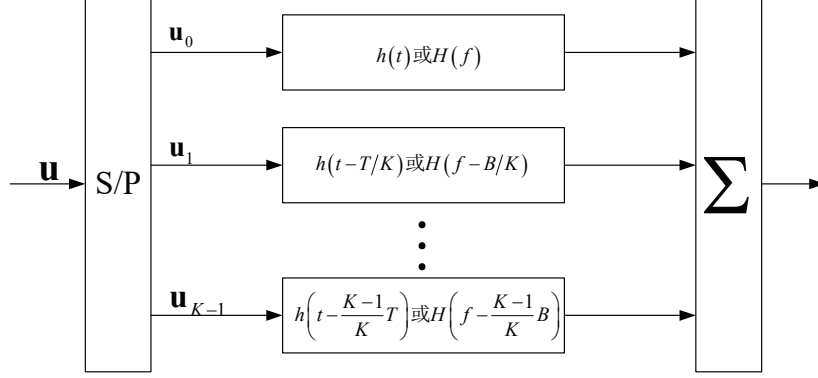


图 2.10 OVXDM 系统发送端框图

篇幅限制，我们在此省略关于 OVXDM 系统的详细介绍，一些关于 OVXDM 系统的基本原理等方面的讨论可以参考文献 [9, 37]。

基于 OVXDM 系统的发送端的多层结构，李道本教授的团队通过假设每一层的延迟叠加系统相互独立，即为独立并行子信道，来计算对应的系统信道容量。基于独立并行子信道的假设，当子信道个数趋近于无穷时，李道本教授证明了 OVXDM 系统的信道容量可以随着信噪比线性增长。这一惊人的结果超过了学术界公认的 Shannon 容量限，从而引起了学术界的广泛讨论。因此我们在此简要讨论 OVXDM 系统与 FTM 系统信道容量的区别。

首先我们考虑 FTM 系统信道容量上确界。即

$$\tilde{C}_{\text{FTN}} \triangleq \sup (C_{\text{FTN}}). \quad (2-18)$$

根据之前小节关于 FTM 传输信道容量的分析，则我们有以下定理：

**定理2-5 (FTN 容量上确界):** 当成形波形带宽趋于无穷且  $\tau$  趋于零时，FTN 系统信道容量达到其上确界  $\tilde{C}_{\text{FTN}}$ ，并且

$$\tilde{C}_{\text{FTN}} = \frac{P}{N_0} \log_2(e) \quad \text{bits/s}. \quad (2-19)$$

**证明:** 我们将定义 2-2 中折叠频谱表达式带入 FTM 信道容量表达式 (2-13)，可得

$$C_{\text{FTN}} = \int_0^{\frac{1}{2\tau T}} \log_2 \left( 1 + \frac{2P}{N_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| H \left( f + \frac{k}{\tau T} \right) \right|^2 \right) df. \quad (2-20)$$

注意到  $\left| H \left( f + \frac{k}{\tau T} \right) \right|^2$  恒大于零，考虑  $\log$  函数的性质，则我们有

$$C_{\text{FTN}} \leq \int_0^{\frac{1}{2\tau T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \log_2 \left( 1 + \frac{2P}{N_0} \left| H \left( f + \frac{k}{\tau T} \right) \right|^2 \right) df, \quad (2-21)$$

其中考虑到定义 2-2 中折叠频谱的定义, 则上式当  $\tau \leq \frac{1}{1+\beta_{\text{roll-off}}}$  时等号成立, 并且可以进一步化简为

$$C_{\text{FTN}} \leq \int_0^W \log_2 \left( 1 + \frac{2P}{N_0} |H(f)|^2 \right) df. \quad (2-22)$$

注意到式 (2-22) 中  $P/N_0$  不随  $f$  变化, 则考虑注水定理, 以及  $\int_{-W}^W |H(f)|^2 = 1$ , 我们可知当  $|H(f)|^2$  满足

$$|H(f)|^2 = |H_{\text{opt}}(f)|^2 \triangleq \begin{cases} \frac{1}{2W}, & |f| \leq W \\ 0, & |f| > W \end{cases} \quad (2-23)$$

时式 (2-22) 取得最大值, 此时成形波形频谱  $|H(f)|^2$  不存在滚降部分且在带宽内取值为常数。则我们有

$$C_{\text{FTN}} \leq \int_0^W \log_2 \left( 1 + \frac{2P}{N_0} \frac{1}{2W} \right) df = W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_0 W} \right). \quad (2-24)$$

不难发现随着带宽  $W$  不断增加, 式 (2-24) 取值不断变大, 因此我们可得<sup>[38]</sup>

$$\tilde{C}_{\text{FTN}} = \lim_{\substack{W \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow 0}} C_{\text{FTN}} = \lim_{W \rightarrow \infty} W \log_2 \left( 1 + \frac{P}{N_0 W} \right) = \frac{P}{N_0} \log_2(e) \quad \text{bits/s}. \quad (2-25)$$

根据定理 2-5 我们不难发现, 当成形波形带宽趋于无穷时, FTN 系统的信道容量随着信噪比线性增长。事实上, 当成形波形带宽趋于无穷时, 奈奎斯特系统的信道容量同样随着信噪比线性增长, 这一点可从式 (2-24) 中观察得到。这一现象早在 Cover 的信息论经典著作<sup>[38]</sup>中即有所阐述。

现在我们来简要比较 OVXDM 系统容量与 FTN 系统的容量。我们注意到 OVXDM 系统的容量证明中考虑了独立并行子信道的假设。实际上, Shannon 在其 1949 年的著作<sup>[31]</sup>中给出了著名的“ $2WT$ ”定理。简而言之, 该定理指出, 在时间  $\mathcal{T}$  ( $\mathcal{T} \rightarrow \infty$ ) 和带宽  $\mathcal{W}$  内存在  $2WT$  个正交基来表示信号。换言之, 无论如何发送信号, 在给定时间  $\mathcal{T}$  以及带宽  $\mathcal{W}$  下至多存在  $2WT$  个独立并行子信道。由此, 不难发现, 若当子信道个数趋于无穷时, 子信道之间依然保持相互独立, 则信号所占用带宽  $\mathcal{W}$  或者传输时间  $\mathcal{T}$  必然趋于无穷。在这一情况下, 按照之前分析我们可知奈奎斯特系统、FTN 系统的容量以及 OVXDM 系统的容量均为式 (2-25), 即信道容量随信噪比线性增长。因此, 在这一情况下, OVXDM 系统相比于奈奎斯特系统以及 FTN 系统来看并不存在容量优势。

进一步地, 若并行子信道的假设不成立, 则需要考虑子信道间的相关性来计算 OVXDM 系统的信道容量。关于这一问题, 李道本老师的相关文章中并没有相关的证明。不过, 从本质上来看 OVXDM 系统与本文第四章中将介绍的奈奎斯特波形延迟叠加结构十分相近。在本文第四章中, 我们计算了在逐次干扰抵消

(Successive Interference Cancellation, SIC) 检测策略下奈奎斯特波形延迟叠加结构的信道容量, 结果表明奈奎斯特波形延迟叠加结构仅仅可以得到相比于奈奎斯特系统的一个信噪比增益而无法得到 FTN 传输的自由度增益。然而, 在存在色噪声的条件下传统的 SIC 检测未必是最优的检测策略, 因此其信道容量相比于最优检测的情况也许会有一些损失。在子信道不独立情况下的 OVXDM 系统容量分析目前还没有一个结论, 因此在这一情况下其与 FTN 系统的容量比较也难以分析。然而值得强调的是, 已有文献<sup>[10, 30, 35]</sup>证明了 FTN 系统的容量在给定成形波形下具有最优性, 因此 OVXDM 系统的信道容量很难超越 FTN 系统。

## 2.4 单载波 FTN 检测算法

尽管 Mazo 极限以及 FTN 信道容量表明了 FTN 传输在 ML 检测下的优势, 最优的 ML 检测由于过高的检测复杂度往往并不适用于 FTN 系统<sup>[30, 39]</sup>。值得强调的是, 当压缩因子  $\tau < 1/(1+\beta_{\text{roll-off}})$  时, FTN 信号具有频域零点<sup>[6]</sup>。此时, 其 ISI 响应的长度理论上趋于无穷, 导致最优的 ML 检测理论上无法实现。实际上, 大部分的 FTN 检测算法仅考虑与当前符号最相邻的  $L$  个 ISI 响应, 并将其余的 ISI 响应视为噪声处理<sup>[30]</sup>。这一检测方式属于失配检测 (Mismatched Detection) 的范畴<sup>[40, 41]</sup>。失配检测的主要思想是利用一种失配的信道模型来对实际接收信号进行检测。针对压缩因子比较小的 FTN 传输系统, 用于检测的信道模型往往与实际的 ISI 影响相差较多, 然而就检测性能与复杂度的折衷而言, 其性能往往可以满足实际系统要求。

FTN 传输可分为未编码 FTN 传输以及编码 FTN 传输两种。其中, 编码 FTN 传输的检测往往需要比未编码 FTN 传输的检测更复杂。Turbo 均衡技术<sup>[42]</sup>是一种常用的编码 FTN 传输的检测方法, 其目的在于找到最大后验 (Maximum a Posteriori, MAP) 意义下 FTN 检测器与信道译码器的一组共同的“解”。Turbo 均衡技术的优势在于其可以有效地将最大后验检测拆分成两个“独立”的模块, 从而使得信号检测与译码可以基于一个相对简单的结构下实现如图 2.11 所示。Turbo 均衡技术的关键在于信号检测器与信道译码器均可以输出外信息, 从而完成信息的迭代。关于 Turbo 均衡的更多介绍可以参考文献 [43, 44]。我们接下来将不再区分编码与未编码 FTN 检测的区别, 并对主流的单载波 FTN 检测的算法进行总结。

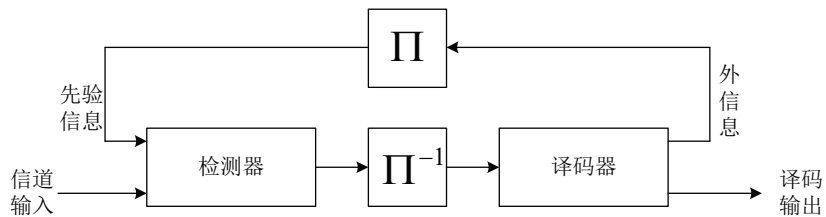


图 2.11 Turbo 均衡系统接收端示意图

### 2.4.1 低复杂度 FTN 检测器

我们称具有线性或者多项式时间复杂度的 FTN 检测器称为低复杂度 FTN 检测器。其中，最简单的 FTN 检测器考虑类似于奈奎斯特信号检测的逐符号检测的方式。文献 [45] 中提出了一种针对于低阶调制的 FTN 信号检测算法，该检测算法通过将 ISI 完全当作噪声进行处理来实现逐符号检测。然而当 ISI 影响较大时，这种检测器无法提供可靠的检测性能。因此，文献 [45] 中推导了该检测算法在无噪声情况下可检测范围，并进一步通过重新估计相邻符号的方式，将该算法推广至了有噪声的情况。基于线性最小均方误差（Linear Minimum Mean Square Error, L-MMSE）的 FTN 检测算法具有线性时间复杂度。例如，文献中 [46] 提出的基于因子图（Factor Graph）的 L-MMSE 检测器，该检测器通过自回归（Autoregressive, AR）建模的方式来消除色噪声的影响。因此其因子图中同时考虑了 L-MMSE 与 AR 模型两个模块来进行消息传递。

当接收端允许多项式时间复杂度的检测算法时，一些基于凸优化的算法可以用于检测 FTN 信号。尽管 FTN 检测问题理论上是一个非凸的优化问题<sup>[47]</sup>，一些适当的松弛方式可以将其转化为凸优化问题。文献 [47, 48] 中考虑了半定松弛（Semidefinite Relaxation, SDR）将 FTN 检测转化为了凸优化问题，其仿真结果表明该算法适用于高阶调制的 FTN 系统。除了 SDR 以外，其他的松弛方法也被证明可以有效地用于解决 FTN 检测问题<sup>[49, 50]</sup>。

大体来讲，低复杂度 FTN 检测器对于弱 ISI 情况下可以有很好的检测性能，例如： $\tau$  值接近或大于 Mazo 极限。然而其在高阶调制或者多载波 FTN 系统等更为实际的应用场合下具有更为重要的应用价值。

### 2.4.2 基于网格图的 FTN 检测器

相对于低复杂度 FTN 检测器，基于网格图的 FTN 检测器往往具有较高的复杂度并且可以得到更好的检测性能。网格图的检测算法概念源起于最优的 ML 检测，其中最具有开创性的是 Forney<sup>[51]</sup> 和 Ungerboeck<sup>[52]</sup> 的两个工作。Forney 于 1972 年首次提出了基于白化滤波器以及维特比（Viterbi）算法的 ISI 信道检测器<sup>[53]</sup>，这一基于白化滤波器的接收端设计也被称为 Forney 观测模型<sup>[51]</sup>，其具体的接收端框图如图 2.12 所示。Forney 观测模型提出的两年后，Ungerboeck 提出了一种全新的接收端设计来用于 ISI 信道检测。该设计考虑了一种全新的路径度量从而可以考虑有色噪声的影响。这一设计也被称为 Ungerboeck 观测模型<sup>[52]</sup>，其框图由图 2.13 所示。尽管 Forney 观测模型与 Ungerboeck 观测模型在理论上具有相同的检测性能，Ungerboeck 观测模型并没有像 Forney 观测模型一样受到大量关注。这也导致了基于 Ungerboeck 观测模型的 BCJR（Bahl-Cocke-Jelinek-Raviv）算法<sup>[54]</sup>在 Ungerboeck 观测模型提出的 31 年



后才被人们发明<sup>[55]</sup>。尽管如此，当今的研究表明 Ungerboeck 观测模型相比于 Forney 观测模型在特定的 ISI 检测应用中有着更多的潜在优势。

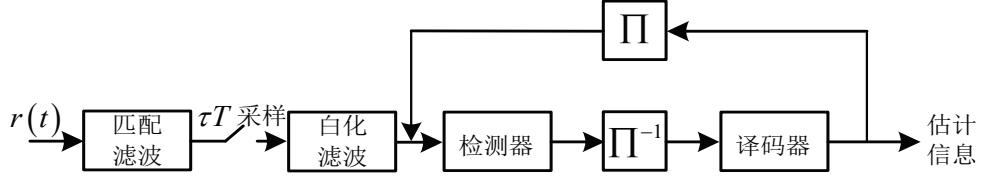


图 2.12 基于 Forney 观测模型的 Turbo 迭代接收端框图

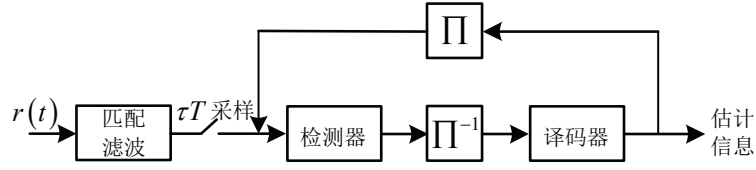


图 2.13 基于 Ungerboeck 观测模型的 Turbo 迭代接收端框图

现今大部分基于网格图的 FTN 检测算法可以分为基于 Forney 观测模型与基于 Ungerboeck 观测模型的两种，并且编码 FTN 系统通常采用 BCJR 类算法，非编码 FTN 系统通常采用维特比类算法。当 ISI 较弱时，直接采用 BCJR 算法或者维特比算法通常可以得到较好的性能，然而针对于 ISI 较强，或者调制阶数太高时 ISI 网格图的往往会有较多的状态，从而导致了过高的检测复杂度。举例来讲，文献 [6] 中展示了对成形波形的滚降系数为  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  时不同压缩因子条件下 ISI 相应的近似，其中当压缩因子为  $\tau = 0.5, 0.35, 0.25$  时，对应的近似 ISI 相应长度分别为 13, 17, 27。不难发现，即使我们考虑 BPSK 调制，针对  $\tau = 0.35$  的情况也需要 131072 个状态。这一过高的状态数也反映出了采用简化网格图算法的必要性。

基于网格图的检测算法通常有两大类简化算法，分别为简化搜索（Reduce Search）以及简化网格图（Reduced Trellis）算法。简化搜索算法通过仅搜索原有的网格图中一小部分来实现复杂度的降低；简化网格图算法通过改变原有网格图的结构使其具有更少的状态数从而降低检测复杂度。针对简化搜索算法的研究始自上世纪 70 年代<sup>[56]</sup>，该算法也被上世纪 80 年代起被应用于 ISI 信道的检测<sup>[57]</sup>。然而由于 Forney 观测模型简单的度量计算以及明确的概率分解准则，大部分简化搜索算法均基于 Forney 观测模型。其中 M-算法和 T-算法为两种基本的简化搜索策略被广泛地应用于简化搜索算法的设计中<sup>[58]</sup>。M-算法的基本思想为每一个网格图时刻仅保留最可靠的 M 个网格图状态，并删除其余状态；相对于 M-算法，T-算法在每个网格图时刻保留概率超过某一预设阈值的所有状态，并删除其余状态。举例来讲，图 2.14 中给出了 M-BCJR 和 T-BCJR 算法的简易框图。由图所示，按照前一时刻计

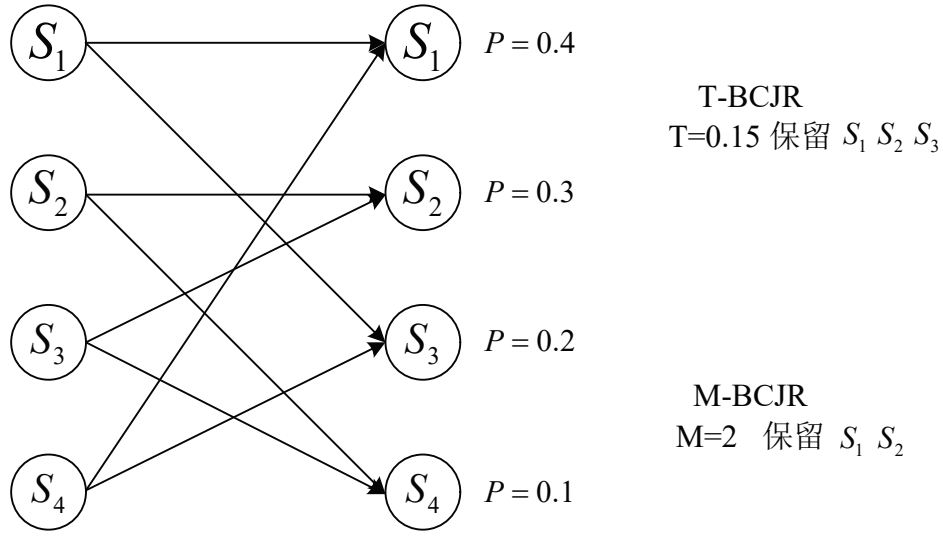


图 2.14 M-BCJR 算法和 T-BCJR 算法的简易框图

算的度量可知当前时刻 4 个状态的度量值分别为 0.4, 0.3, 0.2, 以及 0.1, 则按照 T-BCJR 算法思想进行状态保留则会在  $T = 0.15$  时保留  $S_1$ ,  $S_2$ , 以及  $S_3$  状态; 若按照 M-BCJR 算法思想进行状态保留则会在  $M = 2$  时保留  $S_1$  以及  $S_2$  状态。除了这两种算法之外, 考虑补偿状态 (Offset State) 也是一种有效的简化搜索策略。补偿状态一种虚拟的状态表示, 它参与实际度量值的运算但是并不会被考虑在状态转移之内。最著名的基于补偿状态的简化搜索算法由文献 [57] 提出, 该算法通过对信道矩阵进行分解来设置补偿状态并应用于维特比算法。在另一方面, 针对 BCJR 算法的简化搜索算法也被广泛地应用, 然而相比于针对维特比算法的简化搜索算法, 针对 BCJR 算法的简化搜索算法设计更为复杂。这是因为, 针对 BCJR 算法的简化搜索算法必须保证简化搜索的前向递归与后向递归存在至少一条共有的路径。关于这一问题的一种简单的解决办法为对前向或后向递归中的一个进行简化搜索, 并使得另外的一个递归与之相匹配。举例来讲, Colavopple 等人提出了一种针对 BCJR 算法的简化搜索算法<sup>[59]</sup>, 该算法通过前向或后向递归来构建一个“幸存图样”, 并在另一个递归中对幸存图样进行遍历。另一种更为有效的针对 BCJR 算法的简化搜索算法设计需要考虑 ISI 信道的相位特点。根据信道相应的特点, ISI 信道可以被大体分为三类, 即最小相位 (Minimum-Phase) 信道, 最大相位 (Maximum-Phase) 信道, 以及混合相位 (Mixed-Phase) 信道<sup>[60]</sup>。具体来讲, 最小相位信道的 ISI 能量集中于前几个 ISI 响应中, 最大相位信道的 ISI 能量集中于后几个 ISI 响应中。因此, 针对于最小相位信道, 前向递归的简化搜索往往比后向递归更加准确<sup>[61]</sup>。考虑 ISI 信道相位特点的 BCJR 简化搜索算法设计可以参考文献[62]。值得强调的是, 白化滤波器的输出具有最大相位, 因此 FTN 检测算法也可以考虑这一特点来进行设计<sup>[39]</sup>。作为简化检测算法的一个特殊形式,  $M^*$ -BCJR 算法展示出对一般 ISI 信道的优秀检测性能。该算法



的基本思想在于在每一个网格图时刻，没有被保留下来的状态并不是单纯被删掉，而是被融合进当前网格图时刻的幸存状态中。文献 [63] 中展示了该算法对 FTN 信号的检测性能。

基于 Ungerboeck 观测模型的简化搜索算法研究从 2000 年左右才被考虑。其中重要的原因在于 Ungerboeck 观测模型的度量并没有一个实际的概率意义，即其状态转移度量并不是一个概率密度函数 (Probability Density Function, PDF)。因此如何依照可靠度对每一个网格图时刻来保留可靠的状态成为了一个困难的问题<sup>[30, 64, 65]</sup>。文献中比较了基于 Ungerboeck 观测模型和 Forney 观测模型的简化搜索算法性能，并展示了基于 Ungerboeck 观测模型的简化搜索算法相比于基于 Forney 观测模型的简化搜索算法在高 SNR 时存在着性能损失。值得强调的是，文献 [64] 证明了基于 Ungerboeck 观测模型简化搜索算法存在着正确路径丢失的问题。具体来讲，正确路径丢失表示即使在无噪声影响时，当前网格图时刻到下一网格图时刻的正确状态转移度量并不是最大的，这导致仅仅按照状态转移度量来保留可靠状态是不够的。近年来的研究对这一问题提供了一些解决方案。文献 [66] 中提出了一个偏差补偿的算法，该算法通过将状态转移度量值加上一预设偏差后作为保留状态的依据从而降低了正确路径缺失的影响。文献 [24] 提出了一种考虑相邻符号影响的解决方案，其具体技术细节将在第三章中详细介绍。尽管基于 Ungerboeck 观测模型的简化搜索算法相比于基于 Forney 观测模型的简化搜索算法更为复杂，其更适合对 FTN 信号进行检测。其中一个重要原因是当 FTN 信号存在频谱零点时，白化滤波器理论上不可实现<sup>[39]</sup>，这一现象的原因可以参考白化滤波器设计的 Paley-Wiener 条件的相关内容<sup>[67]</sup>。因此基于 Ungerboeck 观测模型的简化搜索算法具有着更实际的应用价值。然而这一现象并不意味着基于 Forney 观测模型的简化搜索算法不能用于 FTN 信号检测，一些适当的估计可以用来设计稳定的滤波器。关于这一问题的更多内容可以参考文献 [39]。

除了常见的 Forney 和 Ungerboeck 观测模型之外，正交基模型 (Orthogonal Basis Model) 也被证明适用于 FTN 信号检测。正交基模型首次在文献 [68] 中被提出。不同于传统的接收端结构，正交基模型的匹配滤波器并不与发送端的成形波形  $h(t)$  匹配，而是与一个  $\tau T$ -正交的波形来匹配。基于正交基模型的离散时间模型可以通过考虑成形波形  $h(t)$  的分解来得到，而且由于匹配波形  $\tau T$ -正交的特性，其噪声样本为白噪声。有趣的是，理论上正交基模型只有在信号频谱存在零点时才成立<sup>[14, 68]</sup>。这一现象可以直观的解释为正交基分解需要满足 Shannon-Nyquist 采样定理<sup>[32]</sup>，因此需要  $\tau$  足够小才可以。正交基模型对 FTN 检测至关重要，因为其信道的离散时间模型仅受到白噪声的干扰，同时与 Forney 模型理论上互补。基于正交基模型的 FTN 检测器也在文献中 [63, 68] 被提及。其中文献 [63] 中提出的 FTN 检测器可以实现较大幅度的复杂度衰减并得到较好的检测性能。

简化网格图算法中最著名的是信道缩短 (Channel Shortening) 技术。在 Forney 观测模型被提出后, 许多学者发现 ISI 的网格图有时过大无法直接应用维特比算法来进行检测。这一发现促使了信道缩短技术的研究<sup>[69]</sup>。信道缩短技术的基本思想为通过在匹配滤波器后级联一特殊的滤波器使得滤波后的 ISI 相应长度有所减小<sup>[69]</sup>。早期关于这一问题的研究都关注于基于最小均方误差 (Minimum Mean Square Error, MMSE) 准则的滤波器设计<sup>[70, 71]</sup>。然而, 针对系统误码率以及可达信息速率而言, 均方误差 (Mean Square Error, MSE) 并不能直接对应系统性能。因此, 近年来关于信道缩短技术的研究主要集中在除 MSE 之外的其他度量。文献 [72] 中提出了基于 MAP 准则的信道缩短滤波器设计, 该设计可以从 MAP 的意义上最小化检测的误帧率 (Frame Error Rate, FER) 或 BER。进一步地, Rusek 等人提出了一种基于可达信息速率的信道缩短滤波器设计<sup>[73]</sup>, 该设计也被广泛地推广到了不同应用中, 例如简化搜索算法<sup>[74]</sup>与非线性卫星信道检测<sup>[75]</sup>。在另一方面, Ungerboeck 观测模型被证明比 Forney 观测模型更适合用来设计信道缩短滤波器<sup>[76]</sup>。这是因为 Ungerboeck 观测模型的度量中包含了两个矩阵乘法而 Forney 观测模型中只有一个, 因此基于 Ungerboeck 观测模型的设计可以同时两个滤波器进行优化而基于 Forney 观测模型的设计仅可以优化一个滤波器。这也促使了基于 Ungerboeck 观测模型的信道缩短滤波器设计更加灵活<sup>[76]</sup>。关于信道缩短技术在 FTN 信号检测的应用可以查阅文献[24, 77]。

作为对基于网格图的 FTN 检测器的总结我们强调 BCJR 算法实际上等价于一个在网格图上的和积算法 (Sum-Product Algorithm, SPA)。大体来讲, 利用 SPA 可以基于 FTN 的图模型来检测 FTN 信号。通过利用 Ungerboeck 观测模型, Colavolpe 等人提出了一种基于 SPA 的 FTN 检测算法<sup>[78]</sup>。文献 [24] 中展示了该算法对 16 点正交幅度调制 (Quadrature Amplitude Modulation, QAM) FTN 系统的检测性能与 M-BCJR 算法大体相同。

### 2.4.3 频域均衡 FTN 检测器

频域均衡 (Frequency Domain Equalization, FDE) 是一种有效的解决 ISI 影响的手段, 并被广泛地应用于实际系统中, 例如 OFDM 技术。FDE 也在 2013 年被首次应用于 FTN 检测。FDE 可以将 ISI 的影响从将时域上复杂的卷积变为频域上简单的线性乘积, 并且被广泛验证在当  $\tau$  较大的情况时得到可靠的检测性能。文献 [79] 中首次将 FDE 应用于 FTN 检测。然而该算法仅可以产生硬判决。这一算法也在文献 [80] 中被扩展至软判决输出的情况。由于 FDE 具有简单的结构以及较低的复杂度, 基于 FDE 的 FTN 检测器被广泛地应用于非 AWGN 信道中, 这些包括信号检测<sup>[81-83]</sup>, 以及联合信道估计与检测<sup>[84, 85]</sup>等。基于 FDE 的检测器通常需要插入循环前缀 (Cyclic

Prefix, CP) 来实现快速傅里叶变换 (Fast Fourier Transform, FFT), 并且 CP 的长度通常要求不小于 ISI 的长度。这导致基于 FDE 检测的 FTN 系统通常有一个比较小的额外开销, 这一损失可以通过采用重叠 (Overlap) FDE<sup>[86]</sup> 的方式来降低。在另一方面, 关于如何有效地插入 CP 的问题可以参考文献 [87, 88]。

虽然基于 FDE 的 FTN 检测器具有较低的检测复杂度, 但是在当 FTN 信号存在频谱零点时 FDE 可能存在不可忽视的性能损失<sup>[29]</sup>。关于这一问题, 我们需要探究  $\mathbf{G}$  的特征值分布。值得强调的是, 基于 FDE 的系统通过在发送端添加 CP 和接收端去除 CP 来将托普利兹矩阵  $\mathbf{G}$  变为循环矩阵  $\bar{\mathbf{G}}$ 。而循环矩阵的特征值分布对应于 FDE 检测的频域子信道信号能量, 因此我们在图 2.15 中画出  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  的升余弦函数在不同  $\tau$  条件下  $\mathbf{G}$  与  $\bar{\mathbf{G}}$  的特征值分布, 其中帧长为 1000 符号。通过将特征值按照降序排列, 我们可见其特征值分布与成形波形的折叠频谱相吻合<sup>[33]</sup>。具体来讲, 托普利兹矩阵  $\mathbf{G}$  的特征值对应于归一化折叠频谱在频率范围  $f \in (0, 1/\tau T)$  内的 1000 个等间隔采样点。值得强调的是, 我们可以算出对于  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ , 除了前  $\lfloor (1 + \beta_{\text{roll-off}})\tau N \rfloor$  个特征值之外的特征值均理论上接近于零, 这也与图 2.15 相吻合。

图 2.16 中展示了基于 FDE 的未编码 FTN 信号检测性能。作为对比, 我们同样画出了基于时域均衡的 BCJR 算法的检测性能, 其中针对  $\tau = 0.8$  的情况我们考虑 4 个 ISI 响应, 针对  $\tau = 0.35$  的情况我们考虑 8 个 ISI 响应。由图可见, 在相同  $\tau$  的条件下, 时域均衡的性能要好于频域均衡的性能。具体来讲, 对于  $\tau = 0.8$  的情况, 时域均衡可以有效地消除 ISI 的影响, 并得到接近于奈奎斯特传输的性能且相比于频域均衡有 5 dB 左右的性能增益。在另一方面, 对于  $\tau = 0.35$  的情况, 时域均衡与频域均衡均无法有效地消除 ISI 的影响, 其误码性能曲线展示了明显的错误平层现象 (Error Floor)。值得强调的是, 对于  $\tau = 0.35$  的情况, 频域均衡完全无法对信号进行检测, 但是时域均衡可以将误码率降至  $10^{-3}$  数量级。

值得强调的是, 尽管 FDE 由于特征值分布受限的原因导致 FTN 信号检测性能较差, 其也许可以在非 AWGN 信道中具有较大的应用前景。这一论点有两方面原因, 其中第一点如前文所述在于其具有简单的结构以及较低的复杂度; 第二点在于非理想的信道特性将有可能改变收发两端等效信道的特征值分布, 从而克服了 FDE 在 AWGN 信道中的缺点。然而关于这一问题的有关结论还需要进一步研究。

## 2.5 FTN 信号的峰均比

传输信号的 PAPR 是一个通信系统的重要指标。如果传输信号具有较高的 PAPR, 则发送端的功率放大器很有可能会工作在饱和区, 导致发送的信号存在非线性失真。因此, 实际通信系统中具有低 PAPR 的传输技术更有优势。关于 FTN 传输

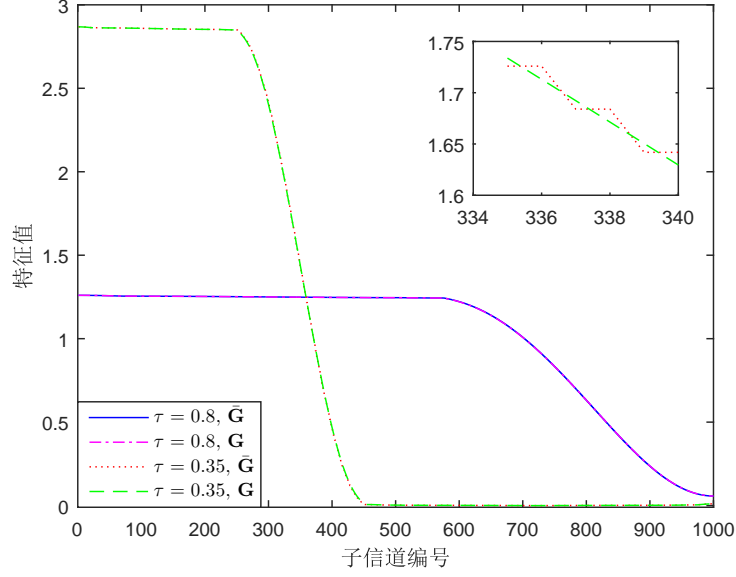


图 2.15 不同  $\tau$  条件下  $\mathbf{G}$  与  $\bar{\mathbf{G}}$  的特征值分布，其中  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$

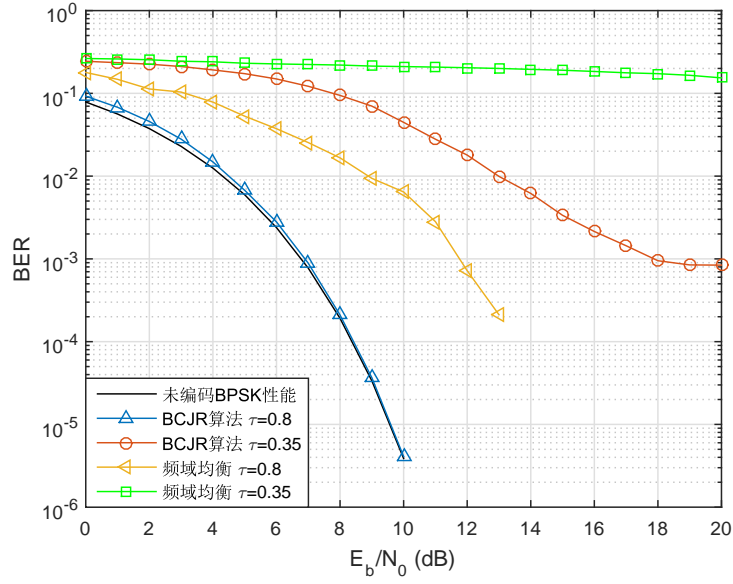


图 2.16 不同  $\tau$  条件下时域均衡算法与频域均衡算法的检测性能图，其中  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$

的 PAPR 研究也是学术界关注的一个要点。不难发现相比于奈奎斯特信号，FTN 信号的符号速率更高，因此 FTM 信号的包络变化会更为明显从而增大信号的 PAPR。然而，目前学术界发现，在相同信息速率下 FTM 信号在一定滚降系数范围内比奈奎斯特信号具有更好的 PAPR 性能<sup>[12]</sup>。我们接下来通过数值仿真的方式来分析 FTM 信号的 PAPR。

不失一般性地，我们考虑文献 [12] 中的 FTM 信号生成方式，其中对应的 RRC 波形按照  $\pm 15T$  进行截断，并且我们考虑过采样 10 倍的信号。图 2.17 中给出了在  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  时，奈奎斯特系统与 FTM 系统在不同映射方式下的 PAPR 性能比较。由图可见，在相同映射方式下 FTM 传输由于符号速率的关系其 PAPR 有所提高，并且随着  $\tau$  的降低，FTN 信号的 PAPR 信号增加。在另一方面，我们发现不同映射方式与  $\tau$  的组合可以很大程度的改善 FTM 信号的 PAPR 性能。具体来讲，四比特相移键控（Quadrature Phase Shift Keying, QPSK）映射， $\tau = 1/3$  的 FTM 系统信息速率与 8-PSK 映射， $\tau = 0.5$  的 FTM 系统信息速率相同，然而 8-PSK 映射， $\tau = 0.5$  的 FTM 系统具有更好的 PAPR 性能。值得强调的是，8-PSK 映射， $\tau = 0.5$  的 FTM 系统与 64-QAM 映射的奈奎斯特系统具有相同的信息速率，然而由图可见，FTN 系统可以得到约 1 dB 的 PAPR 增益。

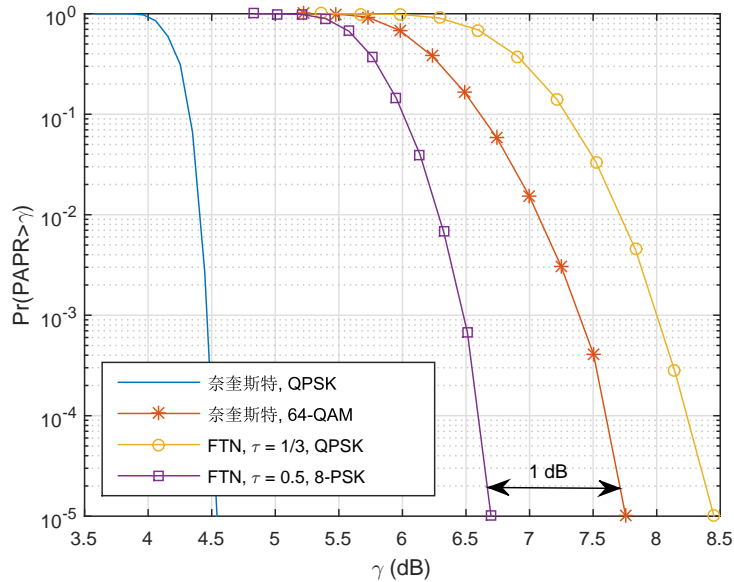


图 2.17  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  时，奈奎斯特系统与 FTM 系统在不同调映射方式下的 PAPR 性能比较

图 2.18 给出了不同滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  的条件下，奈奎斯特系统与 FTM 系统在不同映射方式下的 PAPR 性能比较。在图中，我们考虑信号 PAPR 超过门限  $\gamma$  时的概率小于  $10^{-5}$  情况下对应的门限值  $\gamma$  作为衡量 PAPR 性能的度量。由图所示，我们发现 FTM 信号的 PAPR 随着滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  的增大而逐渐降低，然而奈奎斯特信号

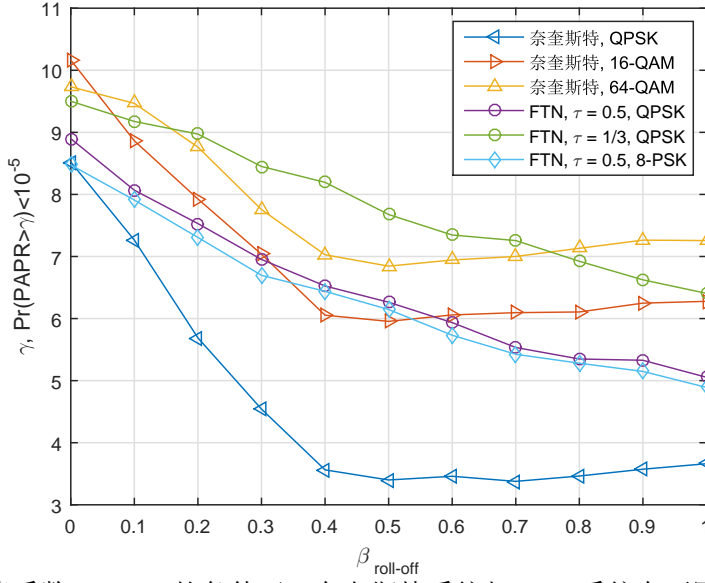


图 2.18 不同滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  的条件下，奈奎斯特系统与 FTN 系统在不同映射方式下的 PAPR 性能比较

的 PAPR 随着  $\beta_{\text{roll-off}}$  的增加而先降低后基本保持不变。类似于图 2.17，我们发现当滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  较低时，在相同信息速率下，FTN 信号的 PAPR 可以小于对应的奈奎斯特信号。注意到在实际系统中考虑的滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  通常较低，因此我们不难发现 FTN 信号比奈奎斯特信号更适用于 PAPR 要求较高的通信系统（例如深空通信）中的应用。

## 2.6 多径衰落信道下的 FTN 传输

在本节中我们简要总结多径衰落信道下的 FTN 信号相关内容。不失一般性地，我们考虑如下的多径衰落(双选)信道模型，

$$h(t, \mu) = \sum_{p=1}^P h_p e^{j2\pi\nu_p t} \delta(t - \mu_p), \quad (2-26)$$

其中  $P$  为信道中的独立可分辨径数， $h_p$ ， $\mu_p$ ，以及  $\nu_p$  分别为第  $p$  条径对应的衰落系数、时延、以及多普勒频移。

我们考虑如式 (2-1) 所示的 FTN 信号，则经过式 (2-26) 的多径衰落信道，接收

信号  $r(t)$  可表示为

$$\begin{aligned}
 r(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \mu) s(t - \mu) d\mu + w(t) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^P h_p e^{j2\pi\nu_p t} \delta(t - \mu_p) s(t - \mu) d\mu + w(t) \\
 &= \sum_{p=1}^P h_p e^{j2\pi\nu_p t} s(t - \mu_p) + w(t) \\
 &= \sum_{p=1}^P \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{E_s} h_p e^{j2\pi\nu_p t} x[n] h(t - n\tau T - \mu_p) + w(t), \quad (2-27)
 \end{aligned}$$

其中  $w(t)$  为对应的 AWGN 随机过程。基于 (2-27) 以及对应的信道参数，我们可以基于对发送符号序列  $\mathbf{x}$  进行检测，其具体的检测方案可以考虑本章之前介绍的频域均衡 FTN 检测以及基于网格图的 FTN 检测算法等。在此，我们在图 2.19 中展示一种基于迭代检测算法下的双选信道编码 FTN 系统 FER 性能。该算法的基本思想为首先对每一条路径对应的接收符号序列进行检测，该部分的检测方法为传统的基于网格图的算法。随后，将不同路径之间得到的符号概率按照消息传递算法的规则进行迭代更新。在迭代若干次后，得到检测结果。由图所示，我们考虑滚降系数为  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  的 RRC 波形作为成形波形，调制方式为 BPSK，FTN 压缩因子设为  $\tau = 0.8$ 。选用的编码方式为 5G 标准 LDPC 码，其码长为 512，码率为 0.5。作为对比，我们同时给出相同调制方式以及编码方案下的考虑奈奎斯特传输的 FER 性能。

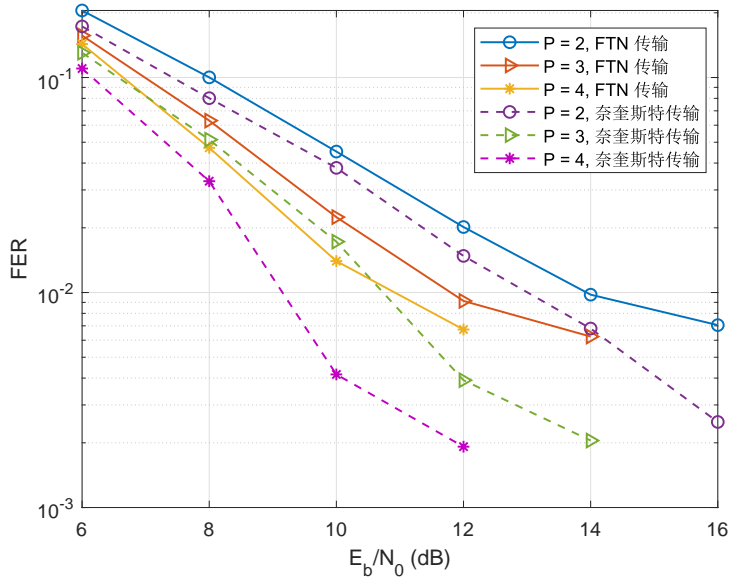


图 2.19 双选信道下编码 FTN 传输与奈奎斯特传输的 FER 性能比较图，其中  $\tau = 0.8, \beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ 。选用的编码方式为 5G 标准 LDPC 码，其码长为 512，码率为 0.5。

由图可见，随着独立可分辨径数的增加，奈奎斯特传输和 FTN 传输均能得到一

个更好的性能，这意味着所考虑的检测算法可以得到多径传输带来的分集增益。值得强调的是，奈奎斯特传输和 FTN 传输的误码率曲线斜率大致相似，因此我们可知 FTN 传输相比于奈奎斯特传输并不会损失分集增益。在另一方面，我们发现 FTN 传输的仿真曲线在高信噪比时出现了较为严重的错误平层现象。这一观察结果也说明考虑的检测算法还有进一步性能提升的空间。

关于多径衰落信道下的 FTN 传输还处于起步阶段，相关内容的分析将会是我们今后的一个重点工作。一些利用人工智能的 FTN 信号检测算法<sup>[89, 90]</sup>，以及一些基于正交时频空调制的相关研究<sup>[91-100]</sup>也许可以为多径衰落信道下的 FTN 检测带来新的方向。

## 2.7 多载波 FTN 传输

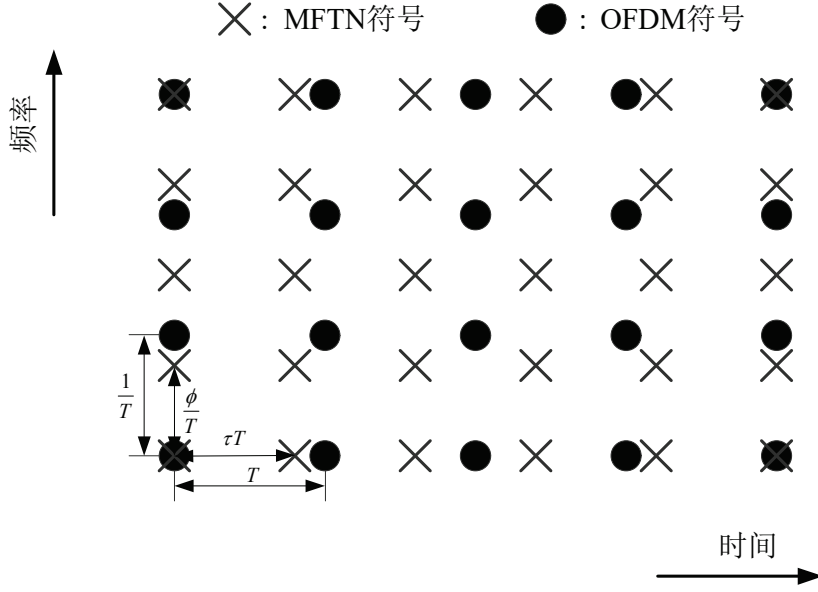
FTN 技术并不仅限于在时域上进行，近年来频域上的非正交传输也被广泛地考虑。区别于 OFDM 技术的是频域 FTN 技术的子载波之间不存在正交性，这一传输方式也被称为高谱效频分复用（Spectrally Efficient Frequency-Division Multiplexing, SEFDM）传输<sup>[101, 102]</sup>。随后，频域 Mazo Limit 的存在于 2005 年被证明。时域频域同时压缩的 MFTN 系统也被提出<sup>[103]</sup>，并被证明其时频域压缩得到的增益基本上相互独立，其结果显示可以在相同频谱利用率下节省 50% 的带宽需求<sup>[104]</sup>。不失一般性，MFTN 信号的表达式如下

$$S_{\text{MFTN}}(t) = \sqrt{E_s \tau \phi} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} x_k[n] h(t - n\tau T) \exp(-2\pi j k \phi t / T), \quad (2-28)$$

其中  $x_k[n]$  为第  $k$  子载波的第  $n$  个符号， $\tau$  和  $\phi$  分别为时域和频域的压缩因子。可见 MFTN 信号的符号间隔为  $T_\Delta = \tau T$  以及子载波间隔为  $F_\Delta = \phi / T$ 。图 2.21 给出了时频坐标系下 MFTN 符号与 OFDM 符号的比较图。

由图可见，MFTN 同时存在 ISI 以及子载波间干扰（Intercarrier Interference, ICI），这使得其接收端的检测比单载波 FTN 更为困难。对此，学者们进行了一些关于简化 MFTN 检测算法的研究<sup>[104, 105]</sup>，但是其检测复杂度还是远高于传统的 OFDM 技术。针对这一问题，Barbieri 等学者提出了一种叫做时频压缩（Time-Frequency Packing, TFP）的结构，该结构可以实现简单的逐符号检测，其检测复杂度接近于传统的 OFDM 检测复杂度<sup>[106]</sup>。该检测方案也被广泛地应用于不同通信场景中，并取得了优异的性能<sup>[107, 108]</sup>。我们接下来将详细讨论这一结构的实现方式。类似于 OFDM 检测器，TFP 采用匹配滤波器级联逐符号的检测算法来恢复传输信息。假设传输信道为 AWGN 信道，则接收端匹配滤波后得到的第  $k$  个子载波上的第  $n$  个符号可表示




 图 2.20 时频坐标系下 MFTN 符号与 OFDM 符号的比较图, 其中  $\tau = 5/6, \phi = 4/5$ 

为:

$$y_k[n] = \sqrt{E_s \tau \phi} x_k[n] + \sum_{\substack{l \neq k \\ m \neq n}} x_l[m] A_p(l-k, m-n) + \eta_k[n] \quad (2-29)$$

其中  $A_p(\kappa, \lambda) = \sqrt{E_s \tau \phi} \int h(t - \kappa \tau T) h^*(t) e^{j2\pi \lambda t} dt$  表征相邻符号的干扰程度<sup>[109]</sup>,  $\eta_k[n]$  为对应的色噪声样本。可见, 如果我们进一步地将相邻符号的干扰看作噪声处理的话, 逐符号检测是可行的。我们可得

$$y_k[n] = \sqrt{E_s \tau \phi} x_k[n] + \tilde{\eta}_k[n] \quad (2-30)$$

其中, 为进一步降低检测复杂度, 被视为高斯白噪声, 其单边功率谱密度被估计为

$$N_{I+N} = E_s \tau \phi \sum_{\substack{l \neq k \\ m \neq n}} |A_p(l-k, m-n)|^2 + N_0 \quad (2-31)$$

由此, 可根据式 (2-31) 对接收到的信号进行逐符号检测。进一步地, 通过将检测器与外码译码器之间进行迭代, 可以得到更好的检测性能。在此基础上, 为了进一步提升系统频谱利用率, TFP 结构被推广到发送端同时发送两个信息流的情形, 其发送端信号表达式为

$$\begin{aligned} S_{D-TFP}(t) = & \sqrt{(1-\rho^2) E_s \tau \phi} \sum_{k,n} x_k[n] h(t - n\tau T) \exp(-2\pi j k \phi t / T) \\ & + \rho \sqrt{E_s \tau \phi} \sum_{k,n} x_k[n] h(t - (n + 1/2) \tau T) \exp(-2\pi j (k + 1/2) \phi t / T) \end{aligned} \quad (2-32)$$

其中  $\rho \in (0, 1)$  为功率分配系数。由其表达式可知，两股信号流同时在时域以及频域上错开来避免过高的干扰。同时，接收端可以通过逐符号的检测方式对这两个信号流中功率大的信号进行检测，并通过 SIC 操作消除干扰后再对另一个信号流进行检测。

为了更好地对 TFP 的性能进行分析，我们引用文献 [106] 中的关于可达频谱利用率（Achievable Spectral Efficiency, ASE）的结果。由图可见，基于高斯波形的双信号流 TFP 具有最好的 ASE 性能。同时在相同调制方式下的双信号流的 TFP 系统 ASE 远远超过单信号流，并且在中低信噪比时接近于系统容量限。虽然 TFP 系统需要通过针对信噪比来优化时域和频域的压缩因子，但是由于其很低的检测复杂度而被广泛地应用。

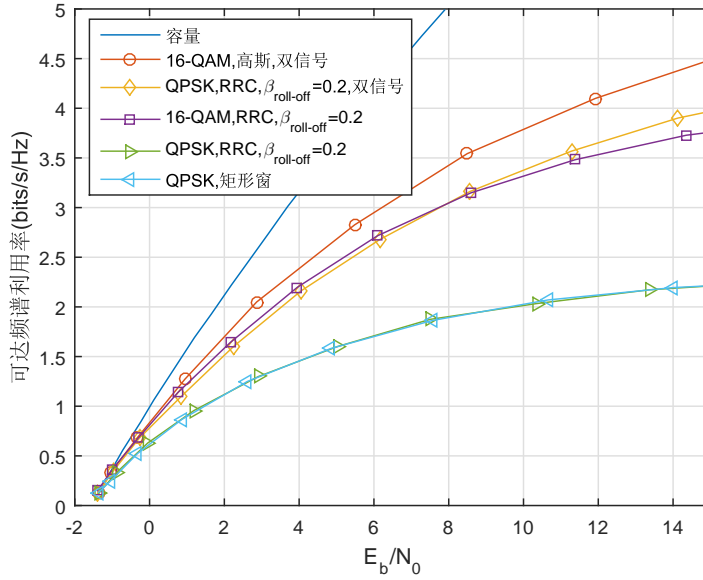


图 2.21 不同成形波形及调制方式下的 TFP 可达频谱利用率性能

## 2.8 本章小结

本章中，我们对 FTN 技术的相关概念进行了介绍，其中包括其基本概念、系统容量、单载波检测算法、多载波 FTN 概念等。通过本章的内容，我们突出了 FTN 传输相比于传统奈奎斯特传输的优势，并对目前主流的 FTN 技术研究进展进行了总结和概括。

### 第三章 基于 Ungerboeck 观测模型的 FTN 简化检测算法

本章详细介绍了两种基于 Ungerboeck 观测模型的 FTN 简化检测算法，并分析了其对应的性能以及检测复杂度。我们的仿真结果展示出所提出的两种简化检测算法可以有效地对 FTN 信号进行检测并且其性能优于传统的检测算法。

在第二章中我们简要的介绍了一些主流的 FTN 检测算法。其中，由于 Ungerboeck 观测模型的度量没有实际的概率意义因此基于 Ungerboeck 观测模型的 FTN 简化检测算法设计较为困难。本章将对这一问题进行详细讨论。不失一般性地，在本章中我们考虑一个 BPSK 映射的编码 FTN 系统，其发送端框图如图3.1所示。假设长度

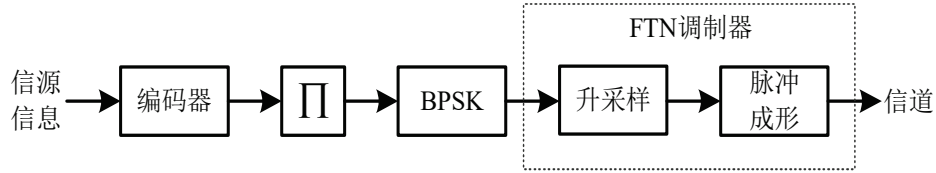


图 3.1 BPSK 映射的编码 FTN 系统发送端框图

为  $K$  的信息比特序列  $\mathbf{u}$  经过编码器后得到了码长为  $N$  长度的码字比特序列  $\mathbf{c}$ 。接下来，通过将码字  $\mathbf{c}$  经过交织并且 BPSK 映射后得到长度为  $N$  的发送符号序列  $\mathbf{x}$ 。通过上采样以及脉冲成形操作，发送的 FTN 信号由式 (2-1) 给出。为了方便本章的叙述，我们将式 (2-1) 重复如下：

$$s(t) = \sqrt{E_s} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] h(t - n\tau T). \quad (3-1)$$

相应地，我们考虑基于 Ungerboeck 观测模型的迭代接收端框图，如图 3.2 所示。接

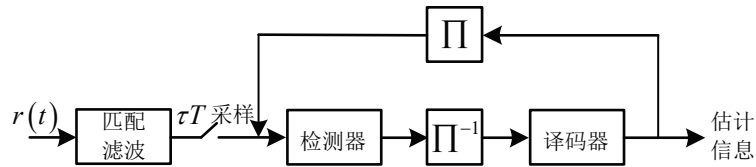


图 3.2 编码 FTN 系统迭代接收端框图

收信号  $r(t)$  经过匹配滤波后按照 FTN 速率进行采样并送入检测器。由第二章的分析可知，第  $n$  个接收符号  $y[n]$  满足

$$y[n] = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) h^*(t - n\tau T) dt = \sum_{m=0}^{N-1} x[m] g[m - n] + \eta[n] \quad (3-2)$$

其中  $g[k]$  为 FTN 的 ISI 系数定义如下

$$g[k] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h^*(t + k\tau T) dt, \quad (3-3)$$

$\eta[n]$  为由于 FTN 速率采样得到的色噪声样本, 并满足  $\mathbb{E}[\eta[n] \cdot \eta^*[m]] = N_0 g[m - n]$ 。基于接收序列  $\mathbf{y}$  的最大似然检测可以由 Ungerboeck 观测模型导出, 其具体结论由如下引理给出。

**引理 3-1 (Ungerboeck 观测模型 [52]):** 在发送序列  $\mathbf{x} = [x[0], x[1], \dots, x[N-1]]^T$  与接收序列  $\mathbf{y} = [y[0], y[1], \dots, y[N-1]]^T$  满足式 (3-2) 的条件下, 接收序列  $\mathbf{y}$  的最大判决满足:

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ x^*[n] \left[ y[n] - \frac{1}{2} g[0] x[n] - \sum_{l=1}^{N-1} g[l] x[n-l] \right] \right\}. \quad (3-4)$$

**证明:** 具体证明在本章附录中给出。

根据引理 3-1, 我们可以看出, 针对 FTN 信号, 尽管每一个发送符号均受到来自其之前和之后发送符号的干扰, 然而基于 Ungerboeck 观测模型的检测度量仅与之前的发送符号有关。注意到引理 3-1 仅给出了基于 Ungerboeck 观测模型的硬判决度量, 然而实际系统中检测器的软判决输出也很重要。参考 Ungerboeck 观测模型, 我们可知最大似然度量  $\Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  满足 [76]

$$\Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto \prod_{n=0}^{N-1} \exp \left( \frac{2}{N_0} \operatorname{Re} \left\{ x^*[n] \left[ y[n] - \frac{1}{2} g[0] x[n] - \sum_{l=1}^{N-1} g[l] x[n-l] \right] \right\} \right). \quad (3-5)$$

基于式 (3-4) 和式 (3-5) 我们可以利用基于网格图的算法来实现基于 Ungerboeck 观测模型的信号检测。值得强调的是由于 FTN 传输人为地超过了奈奎斯特无 ISI 传输速率, 因此理论上 ISI 长度可以达到无限。为了更好地对 FTN 信号进行检测, 实际系统中通常将 ISI 的长度近似为一个充分大的数值。不失一般性地, 我们设定 ISI 的长度为  $L_1$ , 则式 (3-2) 可简化为

$$y[n] = \sum_{m=n-L_1}^{n+L_1} x[m] g[m-n] + \eta[n]. \quad (3-6)$$

同时, 式 (3-4) 与 (3-5) 可简化为

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ x^*[n] \left[ y[n] - \frac{1}{2} g[0] x[n] - \sum_{l=1}^{L_1} g[l] x[n-l] \right] \right\} \quad (3-7)$$

以及

$$\Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto \prod_{n=0}^{N-1} \exp \left( \frac{1}{N_0} \operatorname{Re} \left\{ x^*[n] \left[ y[n] - \frac{1}{2} g[0] x[n] - \sum_{l=1}^{L_1} g[l] x[n-l] \right] \right\} \right). \quad (3-8)$$

为了方便接下来的推导，我们定义 Ungerboeck 度量函数如下

$$\begin{aligned} & \varphi(y[n], S_n, S_{n-1}) \\ & \triangleq \exp \left( \frac{2}{N_0} \operatorname{Re} \left\{ x^*[n] \left[ y[n] - \frac{1}{2} g[0] x[n] - \sum_{l=1}^{L_I} g[l] x[n-l] \right] \right\} \right). \end{aligned} \quad (3-9)$$

则我们可知  $\Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto \prod_{n=1}^N \varphi(y[n], S_n, S_{n-1})$ 。接下来，我们考虑基于 Ungerboeck 观测模型的 FTN 简化检测算法。

### 3.1 基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 算法

我们考虑基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 算法，其中在网格图中我们每一时刻仅保留最多  $M$  个不同状态来降低检测复杂度。考虑到 ISI 的长度为  $L_I$ ，我们可知完整的网格图大小为  $2^{L_I}$ 。因此如何在每一时刻从  $2^{L_I}$  个可能状态中选出  $M$  个状态进行保留是决定该算法性能的关键。值得强调的是，由于 Ungerboeck 观测模型的度量没有实际的概率意义因此基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 算法不能直接根据对应时刻的度量值来选择所保留的  $M$  个状态。我们接下来将提出针对这一问题的一种解决方案。

不失一般性地，我们定义  $n$  时刻的网格图状态  $S_n \triangleq (x[n - L_I + 1], x[n - L_I + 2], \dots, x[n])$ 。根据这一定义我们拟按照  $n$  时刻网格图状态的后验概率来对状态进行保留。对应  $S_n = s$ ，其后验概率满足

$$\Pr(S_n = s | y_1^N) = \frac{\Pr(S_n = s, y_1^N)}{\Pr(y_1^N)} \propto \Pr(S_n = s, y_1^N), \quad (3-10)$$

其中  $y_1^N \triangleq [y_1, y_2, \dots, y_N]^T$ 。我们考虑之前传输符号对当前概率的影响，则基于式 (3-10) 可得

$$\Pr(S_n = s, y_1^N) = \sum_{\mathcal{X}(x_1^{n-1})} \Pr(x_1^{n-1}, S_n = s, y_1^N), \quad (3-11)$$

其中  $\mathcal{X}(\cdot)$  表示满足要求的序列个数。考虑到 M-BCJR 算法的性质，我们将式 (3-11) 近似为

$$\Pr(S_n = s, y_1^N) \simeq \sum_{i=1}^M \Pr(x_1^{n-1}[i], S_n = s, y_1^N), \quad (3-12)$$

式中  $x_1^{n-1}[i]$  表示第  $n$  时刻状态为  $s$  的第  $i$  个可能路径。进一步地, 根据网格图中每一时刻状态的马尔可夫特性我们可知

$$\begin{aligned}
 & \Pr(S_n = s, y_1^N) \\
 & \simeq \sum_{i=1}^M \Pr(x_1^{n-1}[i], S_n = s, y_1^n, y_{n+1}^N) \\
 & = \sum_{i=1}^M \Pr(x_1^{n-1}[i], S_n = s, y_1^n) \Pr(y_{n+1}^N | x_1^{n-1}[i], S_n = s, y_1^n) \\
 & = \sum_{i=1}^M \Pr(x_1^{n-1}[i], S_n = s, y_1^n) \Pr(y_{n+1}^N | S_n = s). \tag{3-13}
 \end{aligned}$$

由式 (3-13) 可知, 状态  $S_n = s$  的后验概率可以通过两部分概率乘积得到, 这一点类似于传统的 **BCJR** 算法。进一步地, 按照马尔可夫特性, 我们注意到  $x_1^{n-1}[i]$  可以利用对应的网格图状态变化所表示, 即  $x_1^{n-1}[i]$  可以唯一地由状态转移序列  $\mathcal{S}_0[i], \mathcal{S}_1[i], \dots, \mathcal{S}_{n-1}[i]$  确定, 其中  $\mathcal{S}_k[i]$  为第  $k$  时刻网格图中保留的第  $i$  个状态。我们可将式 (3-13) 右手边的第一项概率进行展开可得

$$\begin{aligned}
 & \Pr(x_1^{n-1}[i], S_n = s, y_1^n) \\
 & = \Pr(y_1^n | x_1^{n-1}[i], x[n]) \prod_{k=1}^n \Pr(\mathcal{S}_k[i] | \mathcal{S}_{k-1}[i]) \\
 & \propto \prod_{k=1}^n \varphi(y[k], \mathcal{S}_k[i], \mathcal{S}_{k-1}[i]) \Pr(x[k]). \tag{3-14}
 \end{aligned}$$

类似于之前推导, 我们将式 (3-13) 右手边的第一项概率进行展开可得

$$\begin{aligned}
 \Pr(y_{n+1}^N | S_n = s) & = \sum_{\mathcal{X}(x_{n+1}^N)} \Pr(y_{n+1}^N, x_{n+1}^N | S_n = s) \\
 & = \sum_{\mathcal{X}(x_{n+1}^N)} \Pr(y_{n+1}^N | x_n^N) \Pr(x_{n+1}^N | S_n = s) \\
 & \propto \sum_{\mathcal{X}(x_{n+1}^N)} \left\{ \prod_{k=1}^{N-n} \varphi(y[n+k], S_{n+k}, S_{n+k-1}) \Pr(x[n+k]) \right\}. \tag{3-15}
 \end{aligned}$$

基于式 (3-14) 与式 (3-15) 我们可以利用前向递归和后向递归的方式来计算对应的概率。注意到在后向递归中考虑所有  $\mathcal{X}(x_{n+1}^N)$  种不同的序列往往导致过高的复杂度, 通常仅考虑  $L$  长度的序列即可满足大部分通信系统要求, 其中我们称  $L$  为后向递归深度, 其数值需要按照 **ISI** 相应的长度以及具体数值来进行设计。不失一般性地, 图 3.3 和图 3.4 给出了前向递归和后向递归的示意图, 其中 **FTN** 信号为 **BPSK** 调制, 且  $M = 3$ 。

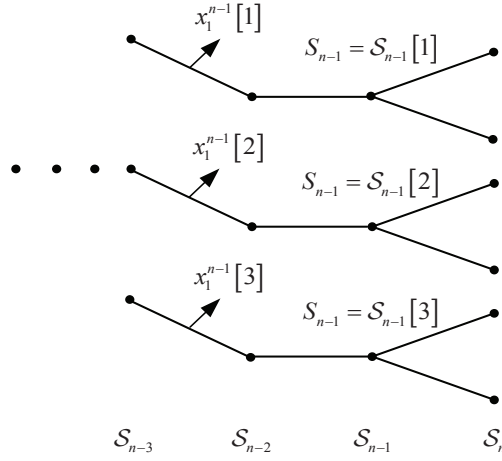


图 3.3 前向递归示意图，其中 FTN 信号为 BPSK 调制，且  $M = 3$

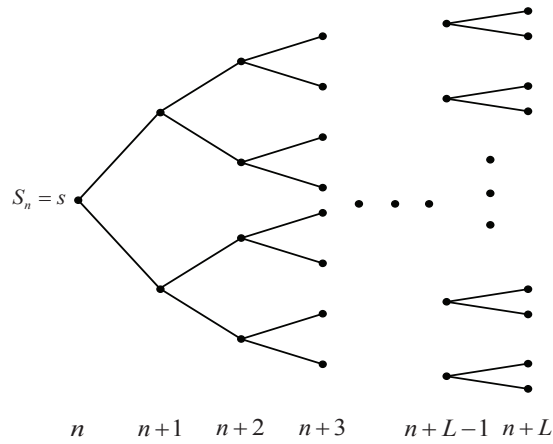


图 3.4 后向递归示意图，其中 FTN 信号为 BPSK 调制，且  $M = 3$

按照之前的推导, 我们接下来用  $\alpha, \beta$ , 以及  $\gamma$  来表示对应的前向递归、后向递归, 以及状态转移度量。则给定  $n-1$  和  $n$  时刻的保留状态集合  $\mathcal{S}_{n-1}$  和  $\mathcal{S}_n$ , 我们定义状态  $s' \in \mathcal{S}_{n-1}$  到  $s \in \mathcal{S}_n$  的转移度量为

$$\gamma_n(S_{n-1} = s', S_n = s) \triangleq \varphi(y[n], s, s') \Pr(x_n). \quad (3-16)$$

我们定义前向递归计算为

$$\begin{aligned} \alpha_n(s) &\triangleq \sum_{i=1}^M \Pr(x_1^{n-1}[i], S_n = s, y_1^n) \\ &\propto \sum_{i=1}^M \prod_{k=1}^n \varphi(y[k], \mathcal{S}_k[i], \mathcal{S}_{k-1}[i]) \Pr(x[k]) \\ &= \sum_{s' \in \mathcal{S}_{n-1}} \alpha_{n-1}(s') \gamma_n(S_{n-1} = s', S_n = s). \end{aligned} \quad (3-17)$$

我们定义后向递归深度为  $L$  的后向递归计算为

$$\begin{aligned} \beta_n(s) &\triangleq \Pr(y_{n+1}^N | S_n = s) \\ &\propto \sum_{\mathcal{X}(x_{n+1}^{n+L})} \prod_{k=1}^L \varphi(y[n+k], S_{n+k}, S_{n+k-1}) \Pr(x[n+k]) \\ &= \sum_{\mathcal{X}(x_{n+1}^{n+L})} \prod_{k=1}^L \gamma_{n+k}(S_{n+k-1}, S_{n+k} = s). \end{aligned} \quad (3-18)$$

最终, 我们可以得到  $S_n = s$  的后验概率为

$$\Pr(S_n = s | y_1^N) \propto \sum_{s' \in \mathcal{S}_{n-1}} \alpha_{n-1}(s') \gamma_n(S_{n-1} = s', S_n = s) \beta_n(s) = \alpha_n(s) \beta_n(s). \quad (3-19)$$

进一步地, 考虑到 BPSK 调制, 我们定义  $x_n$  的对数似然比为

$$\begin{aligned} \text{LLR}(x[n]) &\triangleq \ln \frac{\Pr(x[n] = +1 | y_1^N)}{\Pr(x[n] = -1 | y_1^N)} \\ &\simeq \ln \frac{\sum_{s \in \mathcal{S}_{+1}} \Pr(S_n = s | y_1^N)}{\sum_{s' \in \mathcal{S}_{-1}} \Pr(S_n = s' | y_1^N)}, \end{aligned} \quad (3-20)$$

其中我们定义  $\mathcal{S}_{+1}$  与  $\mathcal{S}_{-1}$  为对应  $x[n] = +1$  和  $x[n] = -1$  的状态集合。基于如上分析, 我们将基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 算法步骤总结于算法 1 中。

## 3.2 算法性能分析

在本小节中我们将通过理论分析来证明前一小结提出的算法优于传统的基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 算法。传统的 M-BCJR 算法仅通过前向递归的度量



**Algorithm 1 基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 算法**

**初始化:** 对于  $1 \leq i \leq M$ , 令  $\mathcal{S}_0[i] = 0, \alpha_0[i] = 1$ 。其中我们默认 0 状态对应为全 +1 的传输符号。

**算法步骤:**

- 1: **for**  $l$  从 1 到  $N$  **do**
- 2: 基于  $\mathcal{S}_{n-1}$  保留的  $M$  个状态以及其对应前向递归度量  $\alpha_{n-1}$  来计算  $n$  时刻所有可能状态  $S_n$  的度量值  $\alpha_n$ . 对应的度量计算公式由式 (3-17) 给出。注意如果存在路径合并的现象, 即若干个  $n-1$  时刻的不同状态均可得到  $n$  时刻的同一状态, 则将该状态保留并且其度量值设为对应路径度量值的加和。
- 3: 针对每一个  $n$  时刻的可能状态  $S_n$ , 按照式 (3-18) 计算其后向度量。
- 4: 通过式 (3-19) 计算每一个可能状态  $S_n$  的近似后验概率。
- 5: 通过式 (3-20) 计算 LLR( $x_n$ ), 并对  $x_n$  进行判决记为  $\hat{x}_n$ 。同时, 后验概率最大的  $M$  个可能状态被保留至集合  $\mathcal{S}_n$ 。
- 6: **end for**
- 7: **返回**  $\hat{\mathbf{x}}$ 。

值来决定该时刻的状态保留。然后由于 Ungerboeck 观测模型的特殊性, 其度量值没有实际的概率意义, 因此仅通过度量大小来进行状态选择会出现正确路径丢失 (Correct Path Loss) 现象并导致检测性能损失 [64]。接下来, 我们将证明所提出的算法可以有效地避免正确路径丢失现象从而提高检测性能。

为了更好地说明提出算法的优点, 我们考虑  $M = 1$  的情况。将式 (3-17) 代入式 (3-18) 可得

$$\Pr(S_n = s, y_1^N) \propto \sum_{\mathcal{X}(x_{n+1}^{n+L})} \prod_{k=1}^{n+L} \varphi(y[k], S_k, S_{k-1}) \Pr(x[k]). \quad (3-21)$$

由式 (3-21) 可知, 所提出的算法考虑了长度为  $n+L$  长度序列的度量值。为了简化符号, 我们定义  $\mathbf{A} \triangleq (n+L) \times (n+L+L_1)$  以及  $\mathbf{B} \triangleq (n+L) \times (n+L)$ 。进一步地, 我们考虑路径  $\mathbf{v} = v_1^{n+L} = x_1^{n+L} + e_1^{n+L}$ , 其中  $e_1^{n+L}$  为正确的传输序列,  $e_1^{n+L}$  为一错误序列, 则基于最大似然检测下该路径的度量值<sup>1</sup>为

$$\begin{aligned} & J(\mathbf{v}) \\ = & \text{Re} \left\{ (x_1^{n+L} + e_1^{n+L})^H y_1^{n+L} - \frac{1}{2} \|x_1^{n+L} + e_1^{n+L}\|^2 - (x_1^{n+L} + e_1^{n+L})^H \mathbf{G}_{\text{LA}} (x_1^{n+L} + e_1^{n+L}) \right\}, \end{aligned} \quad (3-22)$$

<sup>1</sup>为了简便起见, 从此开始, 我们把将对应的实数域数值以及其指数部分均称为度量值。

其中  $\mathbf{G}_{\text{LA}}$  为  $\mathbf{G}$  矩阵 (2-5) 的包含主对角线元素的下三角部分, 可以表示为

$$\mathbf{G}_{\text{LA}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ g[-1] & 0 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g[-L_I] & \cdots & g[-1] & 0 & 0 \\ 0 & g[-L_I] & \cdots & g[-1] & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & g[-L_I] & \cdots & g[-1] & 0 \end{pmatrix}. \quad (3-23)$$

考虑到 (3-2), 式 (3-22) 可扩展为

$$J(\mathbf{v}) = \text{Re} \left\{ (x_1^{n+L} + e_1^{n+L})^H \mathbf{G}_{\text{UA}} x_1^{n+L+L_I} - (x_1^{n+L})^H \mathbf{G}_{\text{LB}} e_1^{n+L} - \frac{1}{2} D^2(e_1^{n+L}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \|x_1^{n+L}\|^2 - (e_1^{n+L})^H x_1^{n+L} + (x_1^{n+L} + e_1^{n+L})^H \eta_1^{n+L} \right\}, \quad (3-24)$$

其中  $\mathbf{G}_{\text{UA}}$  为  $\mathbf{G}$  矩阵 (2-5) 的不包含主对角线元素的上三角部分, 可以表示为

$$\mathbf{G}_{\text{UA}} = \begin{pmatrix} g[0] & g[1] & \cdots & g[L_I] & 0 & \cdots & 0 \\ & g[0] & \ddots & & g[L_I] & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g[1] & \cdots & g[L_I] & 0 \\ \vdots & & & g[0] & g[1] & \cdots & g[L_I] \\ & & & & g[0] & \ddots & \vdots \\ & & & & & \ddots & g[1] \\ 0 & & \cdots & & & & g[0] \end{pmatrix}, \quad (3-25)$$

同时  $D^2(e_1^{n+L})$  用来表征两个差为  $e_1^{n+L}$  的序列之间的欧式距离, 定义为

$$D^2(e_1^{n+L}) = (e_1^{n+L})^H \mathbf{G} e_1^{n+L} = 2\text{Re} \left\{ (e_1^{n+L})^H \mathbf{G}_{\text{LB}} e_1^{n+L} \right\} + \|e_1^{n+L}\|^2. \quad (3-26)$$

现在让我们考虑另外一条可能路径  $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{v}_1^{n+L} = x_1^{n+L} + \tilde{e}_1^{n+L}$ , 其中  $\tilde{e}_1^{n+L}$  为不同于  $e_1^{n+L}$  的错误序列, 则我们可计算序列  $\mathbf{v}$  与序列  $\tilde{\mathbf{v}}$  的度量值差别为

$$J(\tilde{\mathbf{v}}) - J(\mathbf{v}) \\ = \text{Re} \left\{ (m_1^{n+L})^H \mathbf{T} x_{n+L+1}^{n+L+L_I} - (m_1^{n+L})^H \mathbf{G} \left( e_1^{n+L} + \frac{1}{2} m_1^{n+L} \right) + (m_1^{n+L})^H \eta_1^{n+L} \right\}, \quad (3-27)$$

其中我们定义  $m_1^{n+L} = \tilde{e}_1^{n+L} - e_1^{n+L}$ , 同时  $\mathbf{T}$  为大小为  $(n+L) \times L_I$  的矩阵如下式所示

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g[L_I] & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ g[L_I-1] & g[L_I] & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & \vdots \\ g[2] & g[3] & \cdots & g[L_I] & 0 \\ g[1] & g[2] & \cdots & g[L_I-1] & g[L_I] \end{pmatrix}. \quad (3-28)$$

基于式 (3-27) 我们可以讨论正确路径丢失现象。我们首先给出正确路径丢失的定义如下：

**定义 3-1 (正确路径丢失):** 假设  $S_n = s$  为路径  $x_1^{n+L}$  对应的  $n$  时刻正确状态, 并假设  $S_n = s'$  为  $n$  时刻的某一错误状态, 其对应的长度为  $n$  的错误序列为  $e_1^n = [0, \dots, 0, e_n]^T$ 。则当  $M = 1$  时, 若满足

$$\ln \frac{\Pr(S_n = s', y_1^N)}{\Pr(S_n = s, y_1^N)} > 0, \quad (3-29)$$

我们称发生正确路径丢失。

基于该定义, 我们将证明所提出的算法在  $L$  充分长时可以有效避免正确路径丢失。注意到  $x[n]$  尽可能从星座点集合  $\mathbb{A}$  中取值, 我们引入如下定理。

**定理 3-1 (正确尾巴路径):** 我们称长度为  $n + L$  的路径  $\mathbf{v} = v_1^{n+L} = x_1^{n+L} + e_1^{n+L}$  为正确尾巴路径当且仅当除  $v[n]$  外的全部符号均正确, 即  $e[k] = 0, 1 \leq k \leq n + L, k \neq n$ 。则对应于  $n$  时刻由路径  $x_1^{n-1}$  引出的  $\mathcal{X}(\mathbb{A})$  个可能状态  $s_1, s_2, \dots, s_{\mathcal{X}(\mathbb{A})}$ , 其后验概率满足

$$\Pr(S_n = s_k, y_1^N) \propto \exp \left( \frac{2}{N_0} J(\mathbf{v}_k) \right), \quad (3-30)$$

其中  $\mathbf{v}_k$  为  $s_k$  对应的正确尾巴路径。

**证明:** 具体证明在本章附录中给出。

基于定理 3-1 我们可知, 后向递归可以视为一种找寻正确尾巴路径的过程。进一步地, 如果我们已知正确尾巴路径, 则我们并不需要考虑后向递归。这一结论也使得我们考虑对所提出算法进一步进行简化, 相关的讨论会在下文内详细列出。基于定理 3-1, 我们可得如下推论。

**推论 3-1 (正确尾巴路径的应用):** 考虑状态  $S_n = s$ 、 $S_n = s'$  以及其对应的两条正确尾巴路径  $\mathbf{v}$  以及  $\mathbf{v}'$ , 则我们有

$$\ln \frac{\Pr(S_n = s', y_1^N)}{\Pr(S_n = s, y_1^N)} = \frac{2}{N_0} [J(\mathbf{v}') - J(\mathbf{v})] \quad (3-31)$$

**证明:** 本推论的证明可以由定理 3-1 直接得出因此在此省略。

基于推论 3-1, 我们考虑路径  $\mathbf{v} = v_1^{n+L} = x_1^{n+L}$  以及路径  $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{v}_1^{n+L} = x_1^{n+L} + e_1^{n+L}$ , 其中  $e_1^{n+L} = [0, \dots, 0, e_n, 0, \dots, 0]^T$ 。

$$\ln \frac{\Pr(S_n = s', y_1^N)}{\Pr(S_n = s, y_1^N)} = \frac{2}{N_0} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ (e[n])^* \left( \sum_{l=L+1}^{L_I} g[-l] x[n+l] + \eta_n \right) - \frac{1}{2} |e[n]|^2 \right\} \right\}. \quad (3-32)$$

接下来我们考虑在无噪声情况时, BPSK 映射下的正确路径丢失问题。注意到在 BPSK 映射的条件下错误符号满足  $e[n] \in \{-2, 0, 2\}$ 。则将式 (3-32) 代入到式 (3-29)

中并注意到  $g[i] = (g[-i])^*$ , 我们可知正确路径丢失出现时下式将会成立

$$-x[n] \sum_{l=L+1}^{L_1} g[l] x[n+l] - 1 > 0. \quad (3-33)$$

进一步地, 按照 BPSK 映射的星座点不难发现, 当  $x[n+l] = -x[n]g[l]/|g[l]|$  成立时, 式 (3-33) 不等号左边取得最大值。由此, 我们可知 BPSK 映射下正确路径丢失发生的条件为

$$\sum_{l=L+1}^{L_1} |g[l]| > 1. \quad (3-34)$$

**命题 3-1 ( $L$  大小与正确路径丢失):** 对于 BPSK 映射且  $M = 1$  的情况, 为了保证在无噪声传输条件下不发生正确路径,  $L$  需要满足  $\sum_{l=L+1}^{L_1} |g[l]| < 1$ 。

由命题 3-1 不难发现, 当  $L$  取得合适的数值时所提出的算法可以有效地避免正确路径丢失现象。值得强调的是传统基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 算法无法避免正确路径丢失 [64], 因此可见我们提出的算法要优于传统算法。在另一方面, 上述的证明主要考虑 BPSK 映射情况, 关于其他更为实际的映射方式的证明也可以参考上述证明得到。

我们接下来考虑  $M > 1$  的情况。当命题 3-1 不满足的时候, 我们可以通过增大  $M$  来保留更多的状态从而使得正确状态被尽可能地保留在当前时刻。因此, 如何选择  $M$  的大小是一个值得考虑的问题。不难发现, 当  $M > 1$  时, 在每一时刻均有可能有错误状态被保留下来。因此, 我们需要考虑当错误状态被保留下来时需要多少个状态可以使得在下一时刻正确状态还可以被算法保留。我们定义  $M'$  为即使有错误状态被保留的条件下依旧可以保证正确状态被保留的所需最小状态数。则我们有如下定理

**定理 3-2 (BPSK 映射下  $M' = 0$  的条件):** 对于 BPSK 映射的情况, 无噪声传输条件下如满足

$$2 \sum_{l=1}^{L_1-L} l |g[L+l]| - \frac{1}{2} d_{\min}^2 < 0, \quad (3-35)$$

则  $M' = 0$  成立, 其中  $d_{\min}^2$  是 FTM 信号之间的最小欧式距离。

**证明:** 具体证明在本章附录中给出。

当  $M' = 0$  时, 所提出算法在  $M = 1$  的条件下即可在无噪声传输情况下得到无错传输的性能, 因为在这一情况下正确路径将会保证有最高的度量值。进一步地, 当  $M' > 0$  时, 只要满足  $M > M' + 1$ , 所提出算法仍然可以避免错误路径丢失现象, 这是因为在每一个时刻正确的路径的状态均会被保留在最有可能的  $M$  个状态中, 因此正确路径不会丢失。值得注意的是在实际传输系统中导致正确路径丢失的错误事件并不会一定存在, 因此即使当  $M < M' + 1$ , 所提出的算法也不一定会导致检测失

败。在另一方面我们可以从定理 3-2 中看出  $M$  和  $L$  的取值对算法的性能至关重要。简单来讲，一个较大的  $L$  可以确保在一个较小  $M$  的情况下也可以避免正确路径丢失，且反之亦然。因此在实际中我们可以选用一个较大的  $M$  来代替较大的  $L$  来在保证算法性能的前提下降低检测复杂度。

### 3.3 简化 M-BCJR 算法

基于之前的分析我们发现所提出的基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 算法可以有效地避免正确路径丢失现象，然而所提出的算法具有较高的检测复杂度。具体来讲，式 (3-18) 的计算需要考虑长度为  $L$  的所有可能符号组合，其检测复杂度随着  $L$  而指数增长。为了进一步降低这一检测复杂度，我们可以考虑定理 3-1 的结论。基于定理 3-1 我们可知对应状态的正确尾巴路径可以表征后向递归的度量。因此如果可以确定正确尾巴路径则可以有效地避免后向递归的多次运算。为此，我们考虑如下定理

**定理 3-3 (正确尾巴路径度量值):** 当 BPSK 映射且无噪声传输时，存在一个关于 ISI 相应  $\mathbf{g}$  的集合  $\mathcal{R}$  使得从任意状态出发，正确尾巴路径一直拥有最大的度量值。进一步地，存在一个集合  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$ ，并满足

$$\mathcal{R}' = \left\{ \mathbf{g} \mid 3 \sum_{i=1}^{L_1} |g[i]| + \sum_{j=1}^{L-1} |g[j]| < 1 \right\}. \quad (3-36)$$

**证明:** 具体证明在本章附录中给出。

基于定理 3-2 我们可知，当 ISI 相应  $\mathbf{g}$  满足式 (3-36) 的条件时，我们理论上可以从任意状态出发计算所有的相应的路径，然后选取度量值最大的那条路径作为正确尾巴路径从而简化后向递归的运算。为了进一步说明该问题，图 3.5 中给出了 BPSK 映射下不同  $L$  以及  $\tau$  情况下正确尾巴路径具有最大度量值的概率，其中成形波形滚降系数为  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ 。我们在仿真中考虑了所有的可能输入和错误序列组合，因此图 3.5 具有代表性。值得强调的是满足式 (3-36) 的 ISI 相应  $\mathbf{g}$  大概对应应在  $\tau = 0.9$  的情况。然而可以从图中看出，当  $\tau = 0.8$  时，正确尾巴路径仍然具有最大的度量值，这也反映出了定理 3-2 的正确性。同时我们观察到，当  $L$  增大时，正确尾巴路径具有最大度量值的概率逐渐减小。对于这一现象一个直观的解释是在  $L$  较大的情况时，可能的错误路径较多，因此正确尾巴路径的较难保证具有最大的度量值。在另一方面，定理 3-2 也给出了关于这一问题的数学解释，观察式 (3-36) 不难发现，当  $L$  增大时，集合  $\mathcal{R}'$  的范围逐渐减小，这也与我们的观察相符。注意到在实际的检测中往往还有其他因素影响正确尾巴路径与其他路径的度量值，这包括网格图大小、星座大小以及外信息等等。

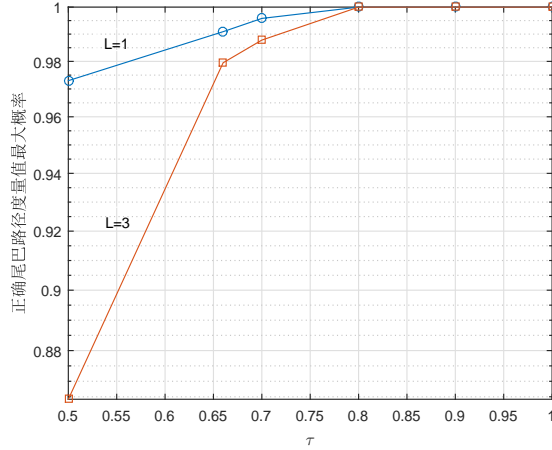


图 3.5 正确尾巴路径在不同  $L$  以及  $\tau$  情况下具有最大度量值的概率，其中映射方式为 BPSK，成形波形滚降系数为  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$

当正确尾巴路径找到以后，我们可以简单的得到后向递归  $\beta$  的度量。因为我们这一小节提出的算法简化仅于后向递归有关，因此我们修改算法 1 中步骤3如下。

简化  $M$ -BCJR 算法的步骤3：从  $n$  时刻一任意状态  $S_n = s$  出发，计算其所有引出的长度为  $L$  的路径  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{(X(\mathbb{A}))^L}\}$  的度量值，

$$J(\mathbf{v}_k) = \prod_{k=1}^L \varphi(y[n+k], S_{n+k}, S_{n+k-1}) \Pr(x_{n+k}). \quad (3-37)$$

之后将具有最大度量值的路径记为正确尾巴路径，其对应的路径记为  $\hat{x}_{n+1}^{n+L}$ 。则后向递归度量值记为

$$\beta_n(s') = \prod_{k=1}^L \varphi(y[n+k], S_{n+k}, S_{n+k-1}) \Pr(\hat{x}_{n+k}). \quad (3-38)$$

其中  $S_n = s'$ ,  $S_{n+k}$  为  $S_{n+k-1}$  以及  $\hat{x}_{n+k}$  引出的下一状态。

图 3.6 给出了一个简化后向度量计算的示意图，其中映射方式为 BPSK 且  $M = 2$ ,  $L = 2$ 。图中红色的粗线表示保留下来的正确尾巴路径。如图所示，我们从一任意状态出发首先计算了所有可能路径的度量值。随后我们将具有最大度量值的路径保留下来并用于其他状态的后向递归运算。关于我们提出的两种算法的复杂度将在下一小节进行讨论。

### 3.4 复杂度分析

在这一小节我们将分析所提出算法以及一些常用FTN检测的复杂度。具体来讲，我们将比较不同算法所需的网格图状态数，递归次数，以及滤波器个数。我们将相应的结果总结在表 3.1 中。为了方便起见，我们将 3.1 节提出的算法称为原始算法，并将 3.3 节提出的算法称为简化算法。

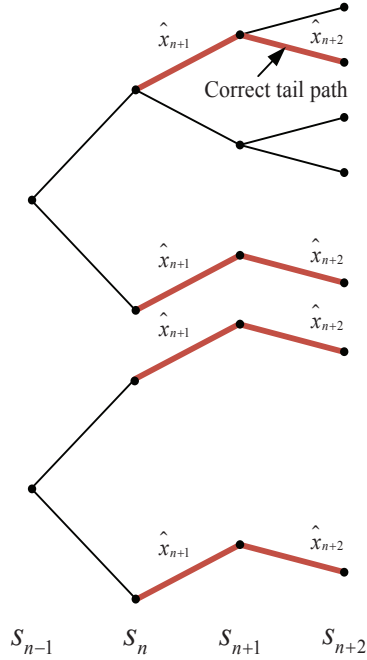


图 3.6 BPSK映射下简化后向递归过程示意图，其中  $M = 2$ ， $L = 2$ 。红色的粗线表示保留下的正确尾巴路径

表 3.1 一些 FTN 检测算法的复杂度分析

算法	网格图状态数	递归次数	滤波器个数
原始算法	$M\mathcal{X}(\mathbb{A}) \frac{(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^{L+1}-1}{\mathcal{X}(\mathbb{A})-1}$	1	1
简化算法	$\frac{(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^{L+1}-1}{\mathcal{X}(\mathbb{A})-1} + (L+1) \times (M\mathcal{X}(\mathbb{A}) - 1)$	1	1
原始BCJR算法	$(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^{L_1}$	2	1
信道缩短算法 [73]	$(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^v$	2	2
M-BCJR 算法 [63]	$M(\mathcal{X}(\mathbb{A}))$	3	3 或 4

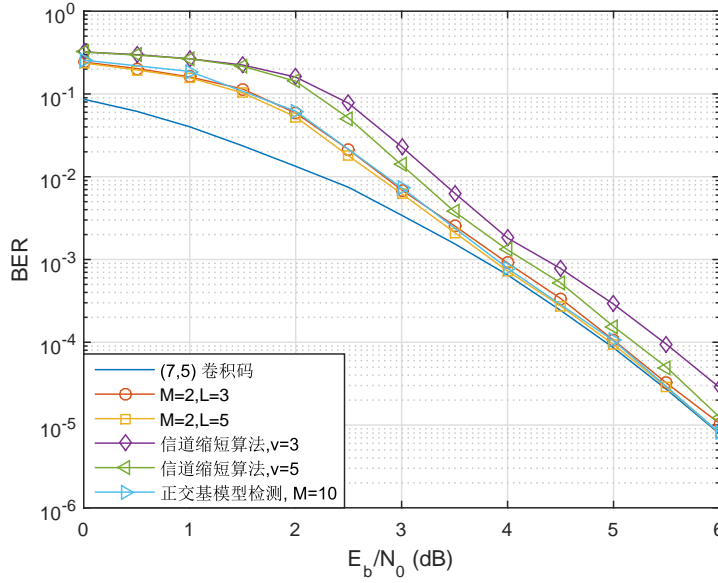


图 3.7 提出的原始算法在 BPSK 映射时的 BER 性能, 其中信道编码为非递归(7, 5)卷积码, Turbo 迭代次数为 5 次, 且  $\tau = 0.5$

由表 3.1 所示, 我们可以看到所提出原始算法和简化算法的复杂度随着  $M$  增加而线性增长, 随着  $L$  增加而指数增长。因此在实际检测中, 我们可以考虑选取一个较大的  $M$  来代替较大的  $L$ 。在另一方面, 我们提出的算法仅需要一次递归运算与一次滤波操作。因此我们算法可以取得一个较好的复杂度与性能的折中。

### 3.5 性能仿真

我们将在本小节中展示所提出算法的性能。不失一般性地, 我们考虑码率为 0.5 的非递归(7, 5)卷积码, 其信息位长度为  $K = 6000$ 。对于原始算法, 我们考虑 BPSK 映射下  $\tau = 0.5$  和  $\tau = 0.35$  的两个情况, 同时作为比较, 我们也将仿真文献 [63] 和 [73] 的算法性能。对于简化算法, 我们考虑 16-QAM 映射下  $\tau = 2/3$  的情况, 我们也将比较仿真文献 [78] 的算法检测性能以及复杂度。

图 3.7 中展示了  $\tau = 0.5$  时所提出的原始算法的性能。由图所示, 在 5 次 Turbo 迭代的条件下我们所提出的算法超过了文献 [73] 的信道缩短算法。具体来讲, 在算法复杂度近似的情况下我们的算法在  $M = 2, L = 3$  和  $M = 2, L = 5$  的条件下超过了信道缩短算法在  $v = 3$  和  $v = 5$  条件下的性能。并且我们提出的算法在 4 dB 时性能收敛至无 ISI 情况时的最优性能。文献 [63] 中的基于正交基模型的检测算法在  $M = 10$  的条件下与提出算法在  $M = 2, L = 5$  的条件下有着相似的性能。然而由于其算法特性, 其接收机通常需要 3 至 4 个滤波操作以及 3 次递归运算。

图 3.8 中展示了  $\tau = 0.35$  时所提出的原始算法的算法性能。在 15 次 Turbo 迭代时, 我们所提出的算法在  $M = 8, L = 5$  条件下在 5 dB 时收敛至无 ISI 情况性能。该



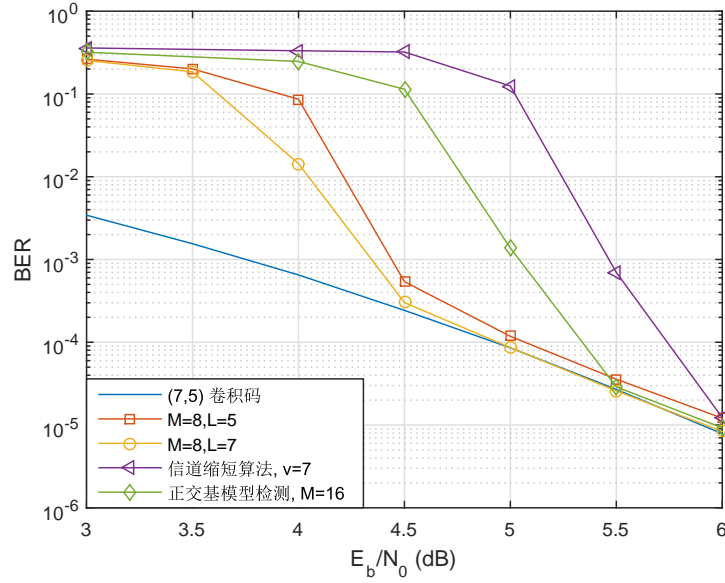


图 3.8 提出的原始算法在 BPSK 映射时的 BER 性能，其中信道编码为非递归(7, 5)卷积码，Turbo 迭代次数为 15 次，且  $\tau = 0.35$

性能明显优于信道缩短算法<sup>[73]</sup>在  $v = 7$  条件下的性能。进一步地，在  $M = 8, L = 7$  条件下我们的算法在 4.5 dB 时可以收敛至无 ISI 情况性能，该性能优于  $M = 16$  条件下基于正交基模型的检测算法<sup>[63]</sup>的性能 1 dB 左右。

图 3.9 中展示了所提出的简化算法在 16-QAM 映射时的性能。当  $\tau = 2/3$  时，系统的谱效率相当于 64-QAM 映射时奈奎斯特系统谱效率。然而通过简化算法，我们可以得到大概 4.5 dB 的性能增益。我们观察到在  $\tau = 0.8$  时，消息传递算法<sup>[78]</sup>在  $L_E = 4$ ，且 50 次迭代的情况下性能与我们提出的简化算法在  $M = 4, L = 3$  时相似。然而简化算法所需的检测复杂度更低，其具体的复杂度需求总结于表 3.2 中。我们统计算法针对每一个符号检测时的加法数、查表数以及迭代次数。不难发现提出的简化算法需在每次迭代中需要更多的加法数以及查表数，但是仅需要一次递归运算即可完成检测。因此考虑到消息传递算法需要的迭代次数，我们提出的算法需要更少的复杂度即可完成检测。

表 3.2 图 3.9 中， $\tau = 0.8$  仿真的复杂度分析

算法	加法数	查表数	递归/迭代数
简化算法, $M = 4, L = 3$	25396	12541	1
消息传递算法, $L_E = 4$	15872	1552	50

### 3.6 本章小结

在本章中我们讨论了基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 检测算法。针对传统基于 Ungerboeck 观测模型的 M-BCJR 检测算法存在正确路径丢失问题，我们提出了

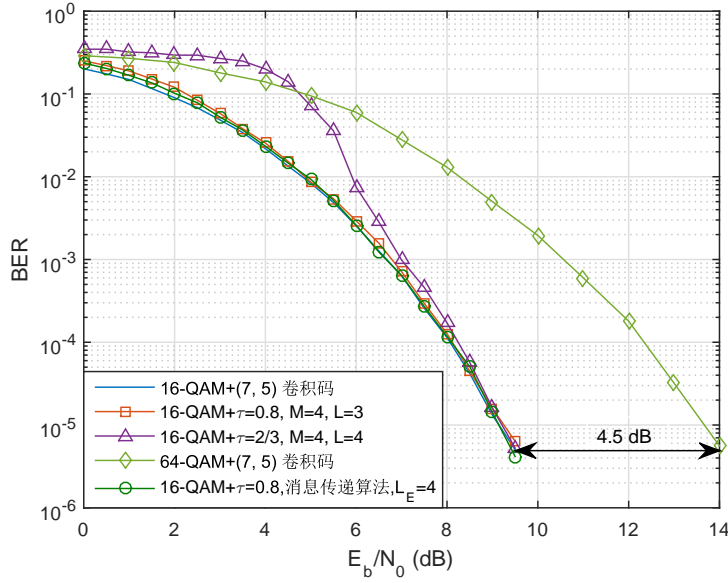


图 3.9 提出的简化算法在 16-QAM 映射时的 BER 性能，其中信道编码为非递归(7, 5)卷积码，Turbo 迭代次数为 10 次

一种新的 M-BCJR 检测算法。该算法通过考虑一些“将来”的符号来避免正确路径丢失。进一步地，我们根据所提出算法的特性提出了其对应的简化算法。我们分析了提出的原始算法和简化算法的检测性能和复杂度。仿真结果表明所提出的算法可以取得一个较好的检测性能与复杂度的折中。

### 3.7 附录

在本节中，我们将对本章出现的引理和定理进行证明。

#### 3.7.1 引理 3-1 的证明

首先，我们考虑在给定接收信号  $r(t)$  的条件下的最大似然概率  $\Pr(r(t)|\mathbf{x})$ 。注意到在信道为 AWGN 的条件下，最大似然检测准则等价于最小距离检测准则。由此，我们可得

$$\hat{\mathbf{x}} = \arg \max_{\mathbf{x}} \Pr(r(t)|\mathbf{x}) = \arg \min_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - s(t)|^2 dt. \quad (3-39)$$

将式 (3-39) 中的平方项展开, 我们可得

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}} &= \arg \max_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{Re} \{r(t) s^*(t)\}] - \frac{1}{2} s(t) s^*(t) dt \\
 &= \arg \max_{\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \operatorname{Re} \left\{ r(t) \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n] h^*(t - n\tau T) \right\} \right] - \frac{1}{2} s(t) s^*(t) dt \\
 &= \arg \max_{\mathbf{x}} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ x^*[n] \int_{-\infty}^{\infty} r(t) h^*(t - n\tau T) dt \right\} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} s(t) s^*(t) dt. \quad (3-40)
 \end{aligned}$$

根据式 (3-2), 式 (3-40) 可以进一步简化为

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{x}} &= \arg \max_{\mathbf{x}} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \{x^*[n] y[n]\} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s^*(t) dt \\
 &= \arg \max_{\mathbf{x}} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \{x^*[n] y[n]\} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[m] x^*[n] h(t - m\tau T) h^*(t - n\tau T) dt \\
 &= \arg \max_{\mathbf{x}} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \{x^*[n] y[n]\} - \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} x[m] x^*[n] g[m - n] \\
 &= \arg \max_{\mathbf{x}} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ x^*[n] \left[ y[n] - \frac{1}{2} g[0] x[n] - \sum_{l=1}^{N-1} g[l] x[n - l] \right] \right\}. \quad (3-41)
 \end{aligned}$$

由此, 引理 3-1 证明完毕。

### 3.7.2 定理 3-1 的证明

根据式 (3-21), 我们可得

$$\Pr(S_n = s, y_1^N) \propto \sum_{i=1}^{(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^L} \exp \left[ \frac{2}{N_0} J(\tilde{\mathbf{v}}_i) \right]. \quad (3-42)$$

其中  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  为第  $i$  条由状态  $S_n = s$  出发的可能路径。注意到星座点的个数为  $\mathcal{X}(\mathbb{A})$  我们不难发现满足条件的路径个数为  $(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^L$ 。不失一般性地, 我们假设其中第  $k$  条路径为正确尾巴路径, 则我们可得

$$\Pr(S_n = s, y_1^N) \propto \exp \left[ \frac{2}{N_0} J(\tilde{\mathbf{v}}_k) \right] \times \sum_{i=1}^{(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^L} \exp \left\{ \frac{2}{N_0} [J(\tilde{\mathbf{v}}_i) - J(\tilde{\mathbf{v}}_k)] \right\}. \quad (3-43)$$

不失一般性地, 我们假设  $\tilde{\mathbf{v}}_i$  的最后  $L$  个元素满足对应错误序列  $e_{n+1}^{n+L}$ , 则考虑到正确尾巴路径的特性, 我们可得

$$J(\tilde{\mathbf{v}}_i) - J(\tilde{\mathbf{v}}_k) = \operatorname{Re} \left\{ (e_{n+1}^{n+L})^H \mathbf{T}_1 x_{n+L+1}^{n+L+L_1} - (e_{n+1}^{n+L})^H \mathbf{G}_{L \times L} \left( \frac{1}{2} e_{n+1}^{n+L} \right) + (e_{n+1}^{n+L})^H \eta_{n+1}^{n+L} \right\}, \quad (3-44)$$

其中矩阵

$$\mathbf{T}_1 = \begin{pmatrix} g[L] & g[L+1] & \cdots & g[L_1] & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ g[2] & \cdots & g[L] & g[L+1] & \cdots & g[L_1] & 0 \\ g[1] & g[2] & \cdots & g[L] & g[L+1] & \cdots & g[L_1] \end{pmatrix}. \quad (3-45)$$

根据式 (3-44) 不难发现式中的变量仅有  $e_{n+1}^{n+L}$ 。进一步地, 考虑到式 (3-43) 中对所有  $e_{n+1}^{n+L}$  可能情况进行求和, 我们可知  $\sum_{i=1}^{(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^L} \exp \left\{ \frac{2}{N_0} [J(\tilde{\mathbf{v}}_i) - J(\tilde{\mathbf{v}}_k)] \right\}$  的值为一个与  $e_{n+1}^{n+L}$  无关的常数。则我们有

$$\Pr(S_n = s, y_1^N) \propto \exp \left[ \frac{2}{N_0} J(\tilde{\mathbf{v}}_k) \right]. \quad (3-46)$$

由此, 定理 3-1 证明完毕。

### 3.7.3 定理 3-2 的证明

我们考虑无噪声传输时  $n$  时刻的正确状态  $S_n = s$  以及一错误状态  $S_n = s'$ , 我们可知

$$\ln \frac{\Pr(S_n = s', y_1^N)}{\Pr(S_n = s, y_1^N)} \propto \ln \frac{\sum_{i=1}^{(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^L} \exp(J(\mathbf{v}'_i))}{\sum_{i=1}^{(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^L} \exp(J(\mathbf{v}_i))}, \quad (3-47)$$

其中  $\mathbf{v}'_i$  和  $\mathbf{v}_i$  为从对应状态引出的第  $i$  条路径, 其长度为  $n+L$ 。不失一般性地, 我们假设  $\mathbf{v}'_i$  和  $\mathbf{v}_i$  具有相同的错误组合  $e_{n+1}^{n+L}$ , 则我们可以进一步化简式 (3-47) 如下

$$\ln \frac{\Pr(S_n = s', y_1^N)}{\Pr(S_n = s, y_1^N)} \propto \ln \frac{\exp(J(\mathbf{v}'_k))}{\exp(J(\mathbf{v}_k))} + \ln \frac{\sum_{i=1}^{(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^L} \exp(J(\mathbf{v}'_i) - J(\mathbf{v}'_k))}{\sum_{i=1}^{(\mathcal{X}(\mathbb{A}))^L} \exp(J(\mathbf{v}_i) - J(\mathbf{v}_k))}, \quad (3-48)$$

其中我们假设  $\mathbf{v}'_k$  和  $\mathbf{v}_k$  为对应的正确尾巴路径。注意到  $J(\mathbf{v}'_i) - J(\mathbf{v}'_k) = J(\mathbf{v}_i) - J(\mathbf{v}_k)$ , 则式 (3-48) 可以进一步化简为

$$\begin{aligned} \ln \frac{\Pr(S_n = s', y_1^N)}{\Pr(S_n = s, y_1^N)} &\propto \ln \frac{\exp(J(\mathbf{v}'_k))}{\exp(J(\mathbf{v}_k))} \\ &\propto \text{Re} \left\{ (e_1^n)^H \mathbf{T}_2 x_{n+L+1}^{n+L_1} - \frac{1}{2} D^2(e_1^n) \right\}, \end{aligned} \quad (3-49)$$

其中

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \vdots \\ g[L_1] & 0 & & \\ g[L_1 - 1] & g[L_1] & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ g[L + 1] & g[L + 2] & \cdots & g[L_1] \end{pmatrix}. \quad (3-50)$$

针对 BPSK 映射, 我们可以得到式 (3-49) 的上限为

$$\begin{aligned} \ln \frac{P(S_n = s', y_1^N)}{P(S_n = s, y_1^N)} &\leq \operatorname{Re} \left\{ \max_{e_1^n, x_{n+L+1}^{n+L_1}} \left\{ (e_1^n)^H \mathbf{T}_2 x_{n+L+1}^{n+L_1} \right\} - \frac{1}{2} \min_{e_1^n} \{ D^2(e_1^n) \} \right\} \\ &= 2 \sum_{l=1}^{L_1-L} l |g_{L+l}| - \frac{1}{2} d_{\min}^2. \end{aligned} \quad (3-51)$$

由此, 定理 3-2 证明完毕。

### 3.7.4 定理 3-3 的证明

我们考虑一个  $n$  时刻的错误状态以及对应的错误序列  $e_1^n$ 。不失一般性地, 我们定义其对应的正确尾巴路径为  $\mathbf{v} = v_1^{n+L} = x_1^{n+L} + e_1^{n+L}$ , 其中  $e_1^{n+L} = [(e_1^n)^T, 0, \dots, 0]^T$ 。我们定义一个基于错误序列  $e_1^n$  的非正确尾巴路径为  $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{v}_1^{n+L} = x_1^{n+L} + \tilde{e}_1^{n+L}$ , 其中  $\tilde{e}_1^{n+L} = [(e_1^n)^T, (e_{n+1}^{n+L})^T]^T$ 。基于  $\mathbf{v}$  以及  $\tilde{\mathbf{v}}$ , 我们可以得到

$$\begin{aligned} &J(\mathbf{v}') - J(\mathbf{v}) \\ &= \operatorname{Re} \left\{ (e_{n+1}^{n+L})^H \mathbf{T}_1 x_{n+L+1}^{n+L+L_1} - (e_{n+1}^{n+L})^H \mathbf{G}' \left( e_{n-L_1+1}^n + \frac{1}{2} e_{n+1}^{n+L} \right) + (e_{n+1}^{n+L})^H \eta_{n+1}^{n+L} \right\}, \end{aligned} \quad (3-52)$$

其中

$$\mathbf{G}' = \begin{pmatrix} g[-L_1] & g[-L_1 + 1] & \cdots & g[0] & \cdots & g[L_1 - 2] & g[L_1 - 1] \\ 0 & g[-L_1] & g[-L_1 + 1] & \cdots & g[0] & \cdots & g[L_1 - 2] \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g[-L_1] & g[-L_1 + 1] & \cdots & g[0] \end{pmatrix}. \quad (3-53)$$

在无噪声传输的情况下, 我们考虑如下的矩阵划分  $\mathbf{G}' = (\mathbf{T}_3 \quad \mathbf{G}_{L \times L})$ , 其中

$$\mathbf{T}_3 = \begin{pmatrix} g[-L_1] & g[-L_1 + 1] & \cdots & g[-1] \\ 0 & g[-L_1] & \cdots & g[-2] \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & g[-L_1] & g[-L] \end{pmatrix}, \quad (3-54)$$

则我们可得式 (3-53)

$$J(\mathbf{v}') - J(\mathbf{v}) = \text{Re} \left\{ (e_{n+1}^{n+L})^H \mathbf{T}_1 x_{n+L+1}^{n+L+L_1} - (e_{n+1}^{n+L})^H \mathbf{T}_3 e_{n-L_1+1}^n - \frac{1}{2} (e_{n+1}^{n+L})^H \mathbf{G}_{L \times L} e_{n+1}^{n+L} \right\}. \quad (3-55)$$

进一步地, 我们考虑  $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_L \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{G}_L^H)$ , 则我们可知

$$J(\mathbf{v}') - J(\mathbf{v}) = \text{Re} \left\{ (e_{n+1}^{n+L})^H \mathbf{M} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^L |e[n+i]|^2 \right\}, \quad (3-56)$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} (g_L^{L_1})^T x_{n+L+1}^{n+L+1} - (g_1^{L-1})^T e_{n+2}^{n+L} - (g_{-L_1}^{-1})^T e_{n-L_1+1}^n \\ (g_{L-1}^{L_1})^T x_{n+L+1}^{n+L+2} - (g_1^{L-2})^T e_{n+3}^{n+L} - (g_{-L_1}^{-2})^T e_{n-L_1+2}^n \\ \vdots \\ (g_2^{L_1})^T x_{n+L+1}^{n+L+L-1} - (g[1])^T e[n+L] - (g_{-L_1}^{-L+1})^T e_{n-L_1+L-1}^n \\ (g_1^{L_1})^T x_{n+L+1}^{n+L+L} - 0 - (g_{-L_1}^{-L})^T e_{n-L_1+L}^n \end{pmatrix}. \quad (3-57)$$

显然, 若我们用  $M_k$  来表示矩阵  $\mathbf{M}$  中的第  $k$  个元素, 则式 (3-56) 满足

$$J(\mathbf{v}') - J(\mathbf{v}) < \sum_{k=1}^L \max_{e_{n-L_1+k}^n, e_{n+k}^{n+L}, x_{n+L+1}^{n+L+L_1}} \left\{ \text{Re} \left\{ (e[n+k])^* M_k - \frac{1}{2} |e[n+k]|^2 \right\} \right\}. \quad (3-58)$$

因此我们只需要一个区间使得

$$\max_{e_{n-L_1+k}^n, e_{n+k}^{n+L}, x_{n+L+1}^{n+L+L_1}} \left\{ \text{Re} \left\{ (e[n+k])^* M_k - \frac{1}{2} |e[n+k]|^2 \right\} \right\} \quad (3-59)$$

对于  $1 \leq k \leq L$  成立。注意到 BPSK 映射的星座点, 基于式 (3-59) 我们可得

$$\begin{aligned} & \max_{\substack{x_{n+L+1}^{n+L+L_1} \\ x_{n+L+1}^{n+L+L_1}}} \text{Re} \left\{ (g_{L-k+1}^{L_1})^T x_{n+L+1}^{n+L+1} \right\} \\ & - \min_{e_{n+k+1}^{n+L}} \text{Re} \left\{ \left( g_1^{(L-k)} \right)^T e_{n+k+1}^{n+L} \right\} \\ & - \min_{e_{n-L_1+k}^n} \text{Re} \left\{ (g_{-L_1}^{-k})^T e_{n-L_1+k}^n \right\} < 1. \end{aligned} \quad (3-60)$$

经过一些进一步地化简, 我们可得

$$3 \sum_{i=1}^{L_1} |g[i]| + \sum_{j=1}^{L-1} |g[j]| < 1. \quad (3-61)$$

注意到 (3-60) 中的三个最值条件不可能同时满足, 因此 (3-61) 对应的集合为实际满足要求集合  $\mathcal{R}$  的一个子集。由此, 定理 3-3 证明完毕。

## 第四章 基于多层结构的 FTN 系统设计

本章详细介绍了基于多层结构的 FTN 系统设计。我们分析了两种多层结构的容量，并在此基础上讨论了其对应的检测方式。我们的仿真结果展示出多层 FTN 系统可以取得优异的检测性能并且具有较低检测复杂度。

我们在之前的章节中分析了 FTN 系统的诸多优势，包括具有更高的信道容量，可以实现高谱效率传输等等。然而 FTN 系统通常具有较高的检测复杂度，从而限制了其更广泛的应用。在本章中我们将考虑一种特殊的 FTN 系统发送结构，即多层 FTN 发送结构。该结构的本质思想类似于叠加编码传输策略<sup>[25, 26]</sup>。具体来讲，多层 FTN 系统可以将发送信号视为若干个信号的叠加，其中每个信号相比于叠加后的信号均携带了更少的信息。多层 FTN 系统的优点在于其可以在接收端采用多级译码，并可以考虑 SIC 的方式来降低检测复杂度。进一步地，通过合理的功率分配，该系统可以达到逼近容量限的优异性能。

在本章中我们将分析多层 FTN 系统的特性，包括其系统框图、容量分析、检测方式等等。值得注意的是，在已有的文献中有两种主流的多层 FTN 结构<sup>[25, 110]</sup>，我们将这两种多层 FTN 结构分别称为基于叠加编码传输的 FTN 结构以及奈奎斯特波形延迟叠加结构。我们将证明基于叠加编码传输的 FTN 结构得到 FTN 传输的自由度增益（对应于容量表达式中  $\log$  前面的系数），然而奈奎斯特波形延迟叠加结构只能得到信噪比增益（对应于容量表达式中  $\log$  函数中的信噪比部分）。

### 4.1 系统模型

不失一般性地，我们考虑  $K$  层结构中每一层的信号均采用 BPSK 映射，其中，每一层有  $N$  个符号且第  $k$  层符号对应的发送功率为  $P_k$ 。在发送端我们用  $u_k[n]$ ,  $c_k[n]$ ,  $v_k[n]$  以及  $x_k[n]$  来分别表示第  $k$  层的第  $n$  个信息比特、码字符号、传输符号以及交织后的传输符号，其中  $0 \leq k \leq K-1, 1 \leq n \leq N$ 。类似的，在接收端我们用  $\hat{u}_k[n]$ ,  $\hat{c}_k[n]$ ,  $\hat{v}_k[n]$  以及  $\hat{x}_k[n]$  来分别表示第  $k$  层的第  $n$  个信息比特判决、码字符号判决、传输符号以及交织后的传输符号估计，其中  $0 \leq k \leq K-1, 1 \leq n \leq N$ 。类似于第二章的描述，我们用  $h(t)$  表示对应的成形波形，其对应的频谱为  $|H(f)|^2$ 。基于上述的符号定义，我们将分别对考虑的两层多层结构进行描述，其中为方便叙述，我们用相同或相似的符号来表示具有相近物理意义的变量。为了方便分析，我们默认每一层采用相同的编码方式，且在接收端我们采用 SIC 策略进行信号检测。不失一般性地，我们默认检测从第 0 层开始，从第 0 层至第  $K-1$  层逐层检测。

#### 4.1.1 奈奎斯特波形延迟叠加系统模型

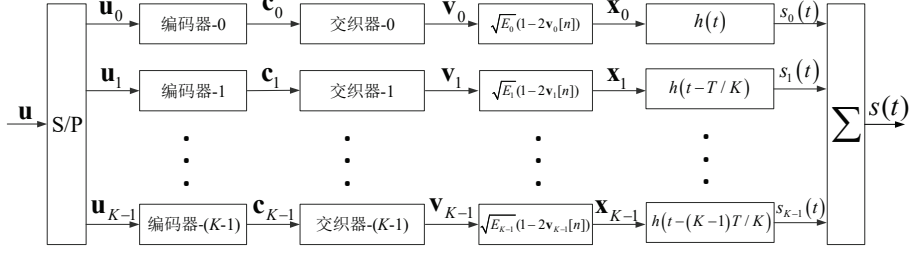


图 4.1 奈奎斯特波形延迟叠加系统发送端框图

图 4.1 展示了奈奎斯特波形延迟叠加系统发送端框图，其中层数为  $K$ 。首先，我们将信源比特序列  $\mathbf{u}$  分成  $K$  层，之后每一层分别用对应的编码器交织器以及发送功率为  $P_k$  进行 BPSK 星座映射。其中第  $k$  层的符号能量  $E_k$  满足  $E_k = E_s[k] = P_k T$ ，且  $\sum_{k=0}^{K-1} P_k = 1$ 。随后，我们将调制后长度为  $N$  的符号序列  $\mathbf{x}_k$  进行脉冲成形，具体来讲，脉冲成形后的第  $k$  层的发送信号  $s_k(t)$  可表示为

$$s_k(t) = \sum_{n=1}^N x_k[n] h\left(t - nT - \frac{k}{K}T\right), \quad (4-1)$$

其中我们将  $\frac{k}{K}T$  称为第  $k$  层对应的延迟叠加系数。观察 (4-1) 不难发现，奈奎斯特

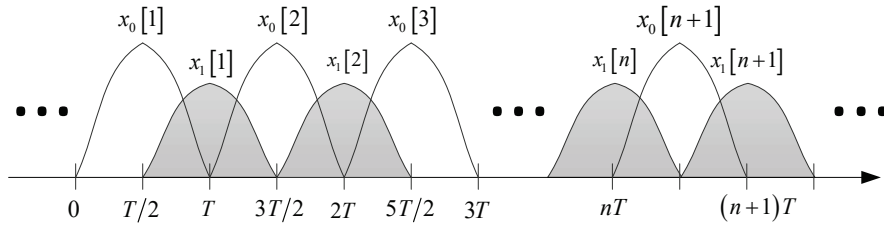


图 4.2 奈奎斯特波形延迟叠加系统发送波形示意图

波形延迟叠加系统的每一层发送信号  $s_k(t)$  均为奈奎斯特信号，即第  $k$  层符号之间不存在人为的 ISI。我们在图 4.2 中展示了奈奎斯特波形延迟叠加系统发送波形示意图，其中  $K = 2$ 。进一步地，奈奎斯特波形延迟叠加系统发送信号  $s(t)$  可以表示为

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{n=1}^N x_k[n] h\left(t - nT - \frac{k}{K}T\right). \quad (4-2)$$

经过 AWGN 信道后我们将接收到的信号  $r(t)$  进行匹配滤波后按照符号速率  $\frac{T}{K}$  进行采样，得到对应的接收符号序列  $\mathbf{y}$ 。对应于发送端结构，我们将  $\mathbf{y}$  分成  $K$  层，



每一层对应的接收符号序列记为  $\mathbf{y}_k$ ，我们可得

$$\begin{aligned} y_k[n] &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t) h^* \left( t - nT - \frac{k}{K}T \right) dt \\ &= \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{m=1}^N x_l[m] \tilde{g} \left[ m - n, \frac{l-k}{K}T \right] + w_k[n]. \end{aligned} \quad (4-3)$$

式 (4-3) 中  $\tilde{g}[k, \Delta\tau]$  为对应的 ISI 系数，我们有

$$\begin{aligned} \tilde{g}[k, \Delta t] &\triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h^*(t + kT + \Delta t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \exp(j2\pi f(kT + \Delta t)) df. \end{aligned} \quad (4-4)$$

其中第二个等式可以由引理 2-1 证明。考虑到成形波形频谱的对称性，不难发现

$$\tilde{g}[k, \Delta t] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \exp(-j2\pi f(kT + \Delta t)) df. \quad (4-5)$$

同样成立。另一方面，式 (4-3) 中  $\mathbf{w}_k$  为白噪声序列，其单边功率谱密度为  $N_0/2$ 。基于式 (4-3)，我们可以在接收端采用 SIC 检测来降低检测复杂度，其对应的接收端框图如图 4.3 所示。具体的检测细节我们将于后文中来进行详细讨论。

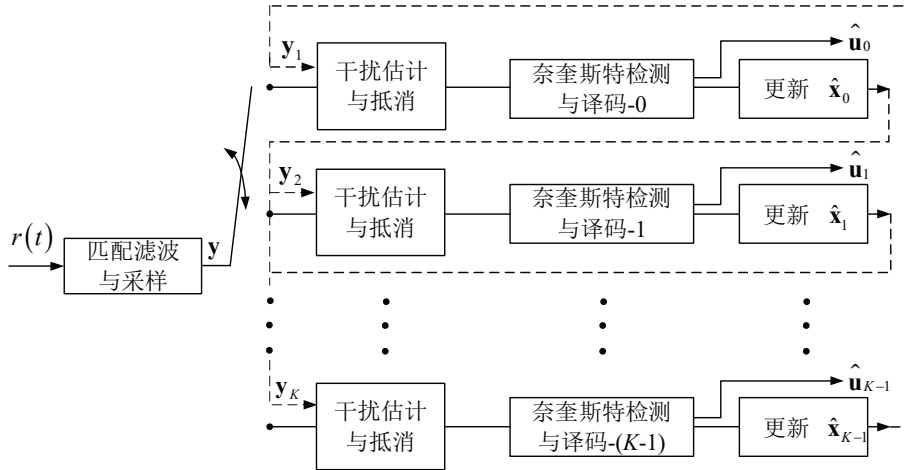


图 4.3 奈奎斯特波形延迟叠加系统接收端框图

#### 4.1.2 基于叠加编码传输的 FTN 系统模型

图 4.4 中展示了基于叠加编码传输的 FTN 系统发送端发送端框图。类似于奈奎斯特波形延迟叠加系统，我们将信源比特序列  $\mathbf{u}$  分成  $K$  层，之后每一层分别用对应

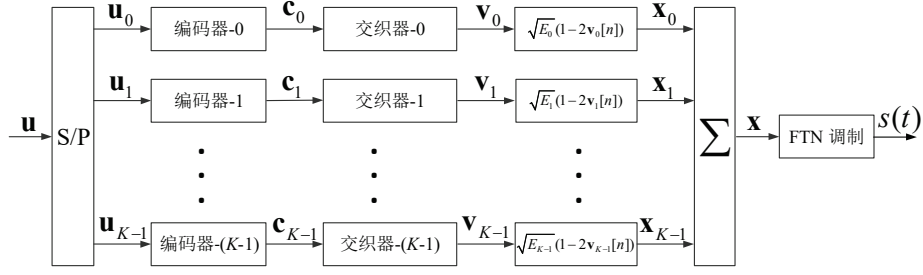


图 4.4 基于叠加编码传输的 FTN 系统发送端框图

的编码器交织器以及发送功率为  $P_k$  进行 BPSK 星座映射。其中第  $k$  层的符号能量  $E_k$  满足  $E_k = P_k \tau T$ ，且  $\sum_{k=0}^{K-1} P_k = 1$ 。不同于之前小节，我们首先将不同层的传输符号进行对应的叠加，之后将叠加后的符号序列  $\mathbf{x}$  按照 FTN 速率进行脉冲成形。则对应的基于叠加编码传输的 FTN 系统发送信号可以表示为

$$s(t) = \sum_{n=1}^N x[n]h(t - n\tau T) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{K-1} x_k[n]h(t - n\tau T). \quad (4-6)$$

对应于式 (4-6)，图 4.5 给出了基于叠加编码传输的 FTN 系统发送信号的示意图，其中  $K = 2$ ， $\tau = 0.5$ 。相比于奈奎斯特波形延迟叠加系统发送信号，不难发现基于叠加编码传输的 FTN 系统每一层的传输符号本身都引入了人为的 ISI。因此，基于叠加编码传输的 FTN 系统的检测算法往往具有更高的检测复杂度。

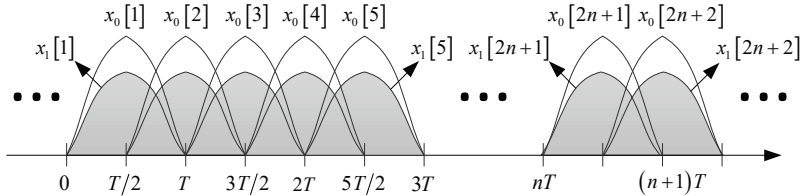


图 4.5 基于叠加编码传输的 FTN 系统发送波形示意图

不同于奈奎斯特波形延迟叠加系统，我们将接收到的信号  $r(t)$  进行匹配滤波后按照符号速率  $\tau T$  进行采样，得到长度为  $N$  的接收符号序列  $\mathbf{y}$ 。则对  $\mathbf{y}$  的第  $n$  个符号，我们可得

$$\begin{aligned} y[n] &= \int_{-\infty}^{\infty} r(t)h^*(t - n\tau T) dt \\ &= \sum_{m=1}^N x[m]g[m - n] + \eta[n] \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{m=1}^N x_k[m]g[m - n] + \eta[n], \end{aligned} \quad (4-7)$$

其中  $g[m-n]$  为 ISI 系数，其定义于第二章与第三章的定义相同，即

$$g[k] = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h^*(t + k\tau T) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 e^{j2\pi k\tau T f} df, \quad (4-8)$$

具体的理论细节可以参考引理 2-1。类似于前一小节，我们可以在接收端采用 SIC 检测来降低检测复杂度，其对应的接收端框图如图 4.6 所示。具体的检测细节我们将于后文中来进行详细讨论。

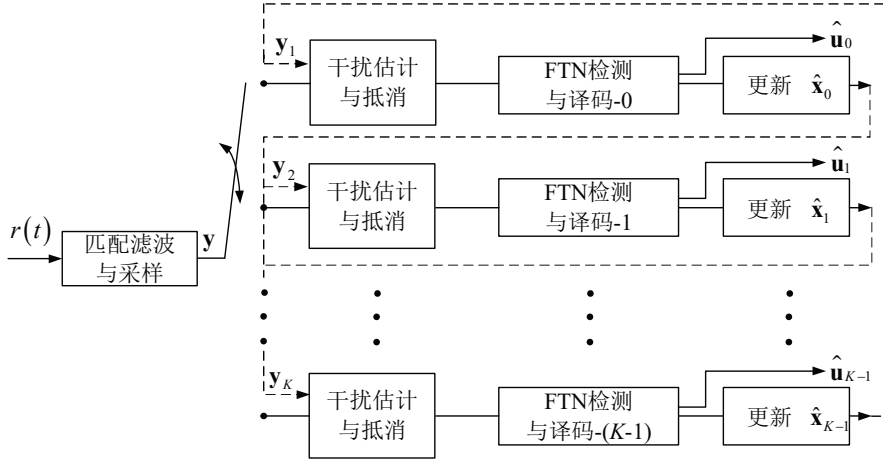


图 4.6 基于叠加编码传输的 FTN 系统接收端框图

## 4.2 奈奎斯特波形延迟叠加系统的检测以及功率分配

在本节中我们主要考虑奈奎斯特波形延迟叠加系统。根据图 4.3 的接收端框图，我们接下来将首先简述 SIC 检测，之后考虑对应的功率分配策略。

### 4.2.1 奈奎斯特波形延迟叠加系统的检测算法

不失一般性地，我们考虑第  $k$  层的信号检测。基于第 0 层到第  $k-1$  层的检测结果，我们假设对应的传输符号估计为  $\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{x}}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ ，对应的方差序列为  $\mathbf{\Gamma}_0, \mathbf{\Gamma}_1, \dots, \mathbf{\Gamma}_{k-1}$ 。进一步地，对于第  $k$  层的第  $n$  个符号，我们定义其受到来自于其他层的干扰为  $\mathcal{I}_k[n]$ 。根据 SIC 检测的思路，我们可以将  $\mathcal{I}_k[n]$  看做作高斯变量，其对应的均值和方差为

$$\mathbb{E}[\mathcal{I}_k[n]] = \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{m=1}^N \hat{x}_l[m] \tilde{g}\left[m-n, \frac{l-k}{K}T\right], \quad (4-9)$$

$$\mathbb{V}[\mathcal{I}_k[n]] = \sum_{l=0}^{K-1} \sum_{m=1}^N \Gamma_l[m] \left| \tilde{g}\left[m-n, \frac{l-k}{K}T\right] \right|^2, \quad (4-10)$$

其中第  $k+1$  层到第  $K$  层的相关参数可以初始化为  $\hat{x}_l[n] = 0$ ，以及  $\Gamma_l[n] = P_l T$ ，对于  $k+1 \leq l \leq K-1$ 。基于 (4-9) 以及 (4-10)，并注意到第  $k$  层传输信号本质上为奈奎斯特信号，则我们有

$$\Pr(x_k[n] | \mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) \propto \exp\left(-\frac{|y_k[n] - \mathbb{E}[\mathcal{I}_k[n]] - x_k[n]|^2}{N_0 + 2\mathbb{V}[\mathcal{I}_k[n]]}\right). \quad (4-11)$$

式 (4-11) 给出了  $x_k[n]$  的后验概率。进一步地，我们可以基于后验概率来对  $\mathbf{x}_k$  的估计值进行更新，即

$$\hat{x}_k[n] = \sum_{i=1}^{\mathcal{X}(\mathbb{A})} \Pr\left(x_k[n] = \sqrt{P_k T} \mathbb{A}[i] | \mathbf{y}, \hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2, \dots, \hat{\mathbf{x}}_{k-1}\right) \times \left(\sqrt{P_k T} \mathbb{A}[i]\right). \quad (4-12)$$

对应的后验方差为

$$\Gamma_k[n] = P_k T - |\hat{x}_k[n]|^2. \quad (4-13)$$

在得到了第  $k$  层传输符号的估计和方差后，我们可以对第  $k+1$  层的传输符号进行检测，其对应的检测原理类似于上述分析。

#### 4.2.2 奈奎斯特波形延迟叠加系统的功率分配方案

基于上一小节的讨论，我们将在这一小节分析奈奎斯特波形延迟叠加系统的功率分配方案。我们考虑功率分配方案的设计使得第  $k$  层的传输信号在对应的信干噪比（Signal-to-Interference-Plus-Noise Ratio, SINR）下可以保证近似无错传输。因此根据式 (4-10)，我们定义第  $k$  层的信干噪比为

$$\text{SINR}_k = \frac{P_k T}{\sum_{l=k+1}^{K-1} P_l T \sum_{m=1}^N |\tilde{g}[m - n, \frac{l-k}{K} T]|^2 + \frac{N_0}{2}}. \quad (4-14)$$

我们假设每一层的译码门限为  $\gamma$ ，即当当前信噪比/信干噪比大于译码门限  $\gamma$  时可以保证近似无错传输。则我们的功率分配方案应满足

$$\text{SINR}_k \geq \gamma. \quad (4-15)$$

该功率分配方案可以确保每一层的信息都可以被正确译出，从而完成奈奎斯特波形延迟叠加系统的检测与译码。

### 4.3 基于叠加编码传输的 FTN 系统的检测以及功率分配

在本节中我们主要考虑基于叠加编码传输的 FTN 系统。类似于前一节中对奈奎斯特波形延迟叠加系统的介绍，我们将分别考虑对应的检测策略以及功率分配。不

同于前一节的分析，由于基于叠加编码传输的 FTN 系统每一层符号间存在着 ISI 因此检测更为复杂。具体来讲，基于叠加编码传输的 FTN 系统在采用 SIC 检测的同时还需要 FTN 检测算法对每一层的符号进行检测。针对这一问题，我们可以采用第3章的算法对每一层的传输符号进行检测。为了更好地进行检测，我们接下来将推导出适合于系统的信道观测模型。

#### 4.3.1 基于叠加编码传输的FTN系统的信道观测模型

信道观测模型的推导可以基于最小距离检测。最小距离检测在噪声为加性白噪声时等价于最优的 ML 检测。为了便于推导，我们考虑每一层对应的发送信号，即

$$s_i(t) = \sum_{n=1}^N x_i[n] h(t - n\tau T). \quad (4-16)$$

在当前层检测结束后，我们可以得到这一层的发送信号估计

$$\hat{s}_i(t) = \sum_{n=1}^N \hat{x}_i[n] h(t - n\tau T). \quad (4-17)$$

考虑到图 4.6 的接收端框图，对于第  $k$  层的传输符号，我们有

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \arg \min_{\mathbf{x}_k} \int_{-\infty}^{\infty} \left| r(t) - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{K-1} \hat{s}_i(t) - s_k(t) \right|^2 dt. \quad (4-18)$$

类似于传统 Ungerboeck 观测模型的推导，我们将式 (4-18) 中的平方项展开并约掉常数项可得

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \arg \max_{\mathbf{x}_k} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \left\{ \left( r(t) - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{K-1} \hat{s}_i(t) \right) s_k^*(t) \right\} - \frac{1}{2} s_k(t) s_k^*(t) dt. \quad (4-19)$$

将式 (4-16) 代入到式 (4-19) 中我们可得

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k &= \arg \max_{\mathbf{x}_k} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^N x_k^*[n] \int_{-\infty}^{\infty} \left( r(t) - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{K-1} \hat{s}_i(t) \right) h^*(t) \right\} - \frac{1}{2} s_k(t) s_k^*(t) dt \\ &= \arg \max_{\mathbf{x}_k} \sum_{n=1}^N \operatorname{Re} \{ (y[n] - a_k[n]) x_k^*[n] \} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N x_k^*[m] x_k[n] g[m-n], \end{aligned} \quad (4-20)$$

其中

$$a_k[n] = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{K-1} \sum_{j=-L_1}^{L_1} \hat{x}_i[n+j] g[j]. \quad (4-21)$$

类似于之前章节，式 (4-21) 中的参数  $L_1$  表征考虑的 ISI 长度。基于式 (4-20)，我们可以考虑 SIC 检测策略，则我们有

$$\Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}_k, \mathbf{a}_k) \propto \prod_{n=1}^N \exp \left( \frac{\text{Re} \left\{ x_k^*[n] \left( y_n - a_k[n] - \frac{1}{2}g[0]x_k[n] - \sum_{l=1}^{L_1} g[l]x_k[n-l] \right) \right\}}{N_0 + 2\sigma_a^2[n]} \right), \quad (4-22)$$

其中我们将  $a_k[n]$  视为高斯变量，其均值由式 (4-21) 给出，且方差为

$$\mathbb{V}[a_k[n]] = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{K-1} \sum_{j=-L_1}^{L_1} \Gamma_i[n+j] g[j]. \quad (4-23)$$

类似于前一节分析，式中  $\Gamma_i$  表示第  $i$  层的符号估计对应的方差序列。

#### 4.3.2 基于叠加编码传输的 FTN 系统的检测

类似于奈奎斯特波形延迟叠加系统的检测，基于叠加编码传输的 FTN 系统同样需要进行干扰抵消。以第  $k$  层的第  $n$  个符号的检测为例，检测算法需要首先将干扰参数  $a_k[n]$  的均值和方差进行估计其对应操作可以参考式 (4-21) 以及式 (4-23)。然而于上一节不同的是由于基于叠加编码传输的 FTN 系统的每一层信号本质上为 FTN 信号，因此我们需要考虑对应的 FTN 检测策略对其进行检测。在对第  $k$  层的符号检测完毕之后，我们将对应的符号概率进行解交织以及译码操作，并更新当前层符号的估计。在第  $k$  层符号的检测于更新结束后，其对应的符号估计将用于第  $k+1$  层的符号检测，直至所有层的符号检测完毕。由于基于叠加编码传输的 FTN 系统的检测类似于奈奎斯特波形延迟叠加系统<sup>[11]</sup>。因此我们在此不再赘述。

#### 4.3.3 基于叠加编码传输的 FTN 系统的功率分配策略

在本小节中我们考虑基于叠加编码传输的 FTN 系统的功率分配策略。虽然基于叠加编码传输的 FTN 系统采用 SIC 策略，但是其功率分配策略与奈奎斯特波形延迟叠加系统并不完全相同。其主要原因在于基于叠加编码传输的 FTN 系统每层的发送信号均为 FTN 信号，然而为了避免过高的检测复杂度，我们需要考虑简化检测方案来对其进行检测。简化检测方案的应用势必会带来一些性能下降，因此我们的功率分配策略需要考虑到这一问题。接下来我们将考虑在第三章所提出的算法的条件下基于叠加编码传输的 FTN 系统的功率分配策略。

为了简化符号，我们在本小节中用  $x_n$  和  $a_n$  来表示符号  $x_k[n]$  和  $a_k[n]$ 。基于第三章的分析，我们在此考虑路径  $v_1^{n+L} = x_1^{n+L} + e_1^{n+L}$  的度量，其中  $x_1^{n+L}$  为对应的正确路径， $e_1^{n+L}$  为一可能的错误序列， $L$  为第三章算法中表征后向递归

长度的参数。进一步地，为简化符号，我们定义  $A \triangleq (n+L) \times (n+L+L_1)$  以及  $B \triangleq (n+L) \times (n+L)$ 。由此，我们路径  $v_1^{n+L} = x_1^{n+L} + e_1^{n+L}$  的度量可表示为

$$\begin{aligned} J(v_1^{n+L}) &= \text{Re} \left\{ (v_1^{n+L})^H (y_1^{n+L} - a_1^{n+L}) - \frac{1}{2} \|v_1^{n+L}\|^2 - (v_1^{n+L})^H \mathbf{G}_{L_A} (v_1^{n+L}) + (v_1^{n+L})^H \eta_1^{n+L} \right\}, \end{aligned} \quad (4-24)$$

其中  $\mathbf{G}_{L_A}$  在式 (3-23) 中给出。我们将式 (4-7) 带入式 (4-24) 可得

$$\begin{aligned} J(v_1^{n+L}) &= \text{Re} \left\{ (x_1^{n+L} + e_1^{n+L})^H \mathbf{G}_A x_1^{n+L+L_1} \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \|x_1^{n+L} + e_1^{n+L}\|^2 - (x_1^{n+L} + e_1^{n+L})^H \mathbf{G}_{L_B} (x_1^{n+L} + e_1^{n+L}) \\ &\quad \left. + (x_1^{n+L} + e_1^{n+L})^H \mathbf{G}_B b_1^{n+L} + (x_1^{n+L} + e_1^{n+L})^H \eta_1^{n+L} \right\}, \end{aligned} \quad (4-25)$$

其中  $b_n$  表示来自其他层干扰的估计值和实际值之间的差距，

$$b_n = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{K-1} x_i[n] - \hat{x}_i[n]. \quad (4-26)$$

为了简化检测，我们可以将  $b_n$  近似成高斯变量，其对应的均值为式 (4-26)，方差为

$$\mathbb{V}[b_n] = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{K-1} \Gamma_l[n]. \quad (4-27)$$

基于式 (4-25)，我们考虑不同路径的度量值之差。不失一般性地，我们考虑两条错误路径  $v_1^{n+L} = x_1^{n+L} + e_1^{n+L}$  以及  $v_1'^{n+L} = x_1^{n+L} + e_1'^{n+L}$ 。我们定义两个错误序列的差为  $m_1^{n+L} = e_1'^{n+L} - e_1^{n+L}$ ，我们有

$$\begin{aligned} J(v_1'^{n+L}) - J(v_1^{n+L}) &= \text{Re} \left\{ (m_1^{n+L})^H \mathbf{T} x_{n+L+1}^{n+L+L_1} - (m_1^{n+L})^H \mathbf{G}_B \left( e_1^{n+L} + \frac{1}{2} m_1^{n+L} \right) \right\} \\ &\quad + \text{Re} \left\{ (m_1^{n+L})^H \mathbf{G}_B b_1^{n+L} + (m_1^{n+L})^H \eta_1^{n+L} \right\}, \end{aligned} \quad (4-28)$$

其中  $\mathbf{T}$  由式 (3-28) 给出。根据式 (4-28) 我们接下来证明在满足一定条件下，第三章提出的算法可以保证每一层符号的准确检测。对此，我们给出如下定理。

**定理 4-1 (准确检测条件):** 当以下条件满足时，

$$\sqrt{2\sigma_{\max}^2} \sum_{l=-L_1}^{L_1} |g[l]| < \frac{1}{2} \sqrt{P_k \tau T} d_{\min}^2 - 2\sqrt{P_k \tau T} \sum_{l=1}^{L_1-L} l |g[L+l]|, \quad (4-29)$$

第三章提出的算法可以保证在无噪声传输时，第  $k$  层的符号无错检测，其中  $d_{\min}^2$  表示最小欧式距离， $\sigma_{\max}^2 = \max \{\mathbb{V}[b_n], 1 \leq n \leq N\}$  表示。

**证明:** 本定理的具体证明在本章附录中给出。

定理 4-1 给出了无噪声传输时第  $k$  层符号可以被正确检测的充分条件。然而在定理 4-1 的基础上去进行功率分配也许不是一个最好的选择, 关于这一问题有如下的三个原因。首先, 定理 4-1 仅考虑了无噪声传输下的情况, 并且利用了不等式的运算得出结论, 因此基于这一结果的功率分配不一定是最优策略。其二, 因为第三章的算法在本质上是通过对一个简化网格图进行搜索来进行信号检测, 因此对检测影响较大的一些错误序列理论上并不一定会出现。由于定理 4-1 考虑的是最差的检测情况, 因此按照最差情况推导得出的功率分配也不一定是最优策略。第三点, 是在于定理 4-1 并没有考虑纠错编码对误码性能的提升。因为纠错编码往往可以极大的增加系统译码、检测的准确度, 这一点尤其在 SIC 策略下至关重要。基于以上三点, 我们接下来考虑在有噪声传输时的情况, 并推导出对用的功率分配准则。

我们假设在对第  $k$  层第  $n$  个符号检测时, 算法已经确定了正确的  $S_{n-1}$  状态。则在这一条件下我们可以用下一定理来得到传输符号  $x_n$  的 LLR。

**定理 4-2 (正确尾巴路径与传输符号 LLR):** 我们定义正确尾巴路径为满足  $e_{n+1}^{n+L} = [0, 0, \dots, 0]^T$  的路径。则在  $S_{n-1}$  为正确状态且  $M = 1$  的前提下,  $x_n$  的 LLR  $L(x_n)$  满足

$$\begin{aligned} L(x_n) &\triangleq \ln \frac{\Pr(x_n = +\sqrt{P_k \tau T} | y_1^N, b_1^N, S_{n-1})}{\Pr(x_n = -\sqrt{P_k \tau T} | y_1^N, b_1^N, S_{n-1})} \\ &= \ln \frac{\Pr(s_+ | y_1^N, b_1^N, S_{n-1})}{\Pr(s_- | y_1^N, b_1^N, S_{n-1})} \propto J(\mathbf{v}) - J(\mathbf{v}') \end{aligned} \quad (4-30)$$

其中  $\mathbf{v}$  与  $\mathbf{v}'$  为两个正确尾巴路径分别由  $S_n = s_+$  对应  $x_n = \sqrt{P_k \tau T}$  与  $S_n = s_-$  对应  $x_n = -\sqrt{P_k \tau T}$  两个状态引出。

**证明:** 本定理的具体证明在本章附录中给出。

基于定理 4-2, 我们可以考量每一层检测的错误事件概率 (Event Error Rate, EER)。依照正确尾巴路径的定义, 我们假设两个正确尾巴路径分别为  $v_1^{n+L} = x_1^{n+L}$  与  $v_1^{m+L} = x_1^{n+L} + e_1^{n+L}$ , 其中  $\varepsilon \triangleq e_1^{n+L} = [0, \dots, 0, e[n], 0, \dots, 0]^T$ 。则对应错误事件  $e_1^{n+L}$ , 我们有

$$\begin{aligned} \Pr(\varepsilon) &\triangleq \Pr\left(J(v_1^{m+L}) - J(v_1^{n+L}) > 0\right) \\ &= \Pr\left(e[n] \left(\sum_{l=L+1}^{L_1} g[l] x_{n+l}\right) - |e[n]|^2 + e[n] \eta[n] + e[n] \left(\sum_{l=-L_1}^L g[l] b_{n+l}\right) > 0\right). \end{aligned} \quad (4-31)$$

进一步地, 考虑到高斯近似以及 Q 函数的特性, 我们有

$$\Pr(\varepsilon) \simeq Q\left(\sqrt{\frac{P_k \tau T}{\sigma^2}}\right), \quad (4-32)$$



其中

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} + \sum_{l=L+1}^{L_1} |g[l]|^2 P_k \tau T + \sum_{l=-L_1}^L |g[l]|^2 \sigma_b^2[n]. \quad (4-33)$$

根据式 (4-32) 与 (4-33) 我们接下来考虑具体的功率分配策略。类似于前一节的分析，我们考虑在采用信道编码情况下的功率分配。我们定义第  $k$  层信干噪比如下

$$\text{SINR}_k \triangleq \frac{P_k \tau T}{\frac{N_0}{2} + \sum_{l=L+1}^{L_1} |g[l]|^2 P_k \tau T + \sum_{l=-L_1}^L |g[l]|^2 \sigma_b^2[n]}. \quad (4-34)$$

我们假设每一层的译码门限为  $\gamma$ ，即当当前信噪比/信干噪比大于译码门限  $\gamma$  时可以保证近似无错传输。则我们的功率分配方案应满足

$$\text{SINR}_k \geq \gamma. \quad (4-35)$$

该功率分配方案可以确保每一层的信息都可以被正确译出，从而完成基于叠加编码传输的 FTN 系统的检测与译码。

#### 4.4 容量分析

在本节中我们将对两种分层结构的渐进信道容量进行讨论。不失一般性地，我们默认成形波形为滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  的 RRC 函数，多层结构的层数为  $K$ ，每一层的平均符号能量为  $E_s[k]$ 。类似于传统的关于信道容量的分析工作，我们默认传输符号服从二维高斯分布，并且传输符号数（每一层）趋近于无穷，即  $N \rightarrow \infty$ 。

为了方便相关推导，我们考虑对应收发信号关系的矩阵形式。我们首先考虑奎斯特波形延迟叠加系统，我们将式 (4-3) 表示成对应的矩阵形式，即

$$\mathbf{y}_k = \sum_{l=0}^{K-1} \mathbf{G}_{l,k} \mathbf{x}_l + \boldsymbol{\eta}_k, \quad (4-36)$$

其中  $\mathbf{G}_{l,k}$  为第  $l$  层传输符号序列对第  $k$  层传输符号序列的 ISI 矩阵，可表示为

$$\mathbf{G}_{l,k} = \begin{bmatrix} \tilde{g}[0, \frac{l-k}{K}T], & \tilde{g}[1, \frac{l-k}{K}T], & \cdots, & \tilde{g}[N-1, \frac{l-k}{K}T] \\ \tilde{g}[-1, \frac{l-k}{K}T], & \tilde{g}[0, \frac{l-k}{K}T], & \cdots, & \tilde{g}[N-2, \frac{l-k}{K}T] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}[1-N, \frac{l-k}{K}T], & \tilde{g}[2-N, \frac{l-k}{K}T], & \cdots, & \tilde{g}[0, \frac{l-k}{K}T] \end{bmatrix}. \quad (4-37)$$

在另一方面，对于基于叠加编码传输的 FTN 系统，我们将式 (4-7) 表示成对应的矩阵形式，可得

$$\mathbf{y} = \sum_{k=0}^{K-1} \mathbf{G} \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}, \quad (4-38)$$

其中  $\mathbf{G}$  由式 (2-5) 给出,  $\boldsymbol{\eta}$  为色噪声序列满足  $\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta} \cdot \boldsymbol{\eta}^H] = N_0 \mathbf{G}$ 。

基于式 (4-36) 以及式 (4-38), 我们接下来将讨论两个系统的信道容量。在开始相关推导的叙述前, 我们首先介绍在之后会用到的与托普利兹矩阵相关的 Szegö 定理。

**引理 4-1 (Szegö 定理 [112, 113]):** 假定  $\mathbf{V}$  为一大小  $N \times N$  的正定托普利兹矩阵, 即

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_0 & v_1 & \cdots & v_{N-1} \\ v_{-1} & v_0 & \cdots & v_{N-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ v_{1-N} & v_{2-N} & \cdots & v_0 \end{bmatrix}, \quad (4-39)$$

其对应的特征值由  $\{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\}$  给出。则对应一个任意连续的函数  $f_c(\cdot)$ , 下式成立

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_c(\lambda_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_c(V(\omega)) d\omega, \quad (4-40)$$

其中  $V(\omega)$  是序列  $\{\dots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \dots\}$  的离散时间傅里叶变换, 即

$$V(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_k e^{-jk\omega}. \quad (4-41)$$

#### 4.4.1 奈奎斯特波形延迟叠加系统的容量分析

我们首先对奈奎斯特波形延迟叠加系统的容量进行分析。基于式 (4-36) 以及 SIC 检测策略, 我们定义每一层的可达速率  $R_k^{\text{SIC}}$  为

$$R_k^{\text{SIC}} \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(\mathbf{y}_k; \mathbf{x}_k | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) \quad \text{bits per channel use.} \quad (4-42)$$

在给定层数  $K$  的条件下, 式 (4-43) 有如下的闭合表达式<sup>[9]</sup>。

**引理 4-2 (奈奎斯特波形延迟叠加系统的每层可达速率):** 针对于 SIC 检测, 奈奎斯特波形延迟叠加系统的第  $k$  层可达速率可表示为

$$I(\mathbf{y}_k; \mathbf{x}_k | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) = \frac{1}{2} \log_2 \det \left[ \mathbf{I}_N + \frac{E_s[k]}{N_0} \left( \mathbf{I}_N + \frac{\sum_{l=k+1}^K E_s[l] \mathbf{G}_{l,k} \mathbf{G}_{l,k}^T}{N_0} \right)^{-1} \right]. \quad (4-43)$$

**证明:** 本定理的具体证明在本章附录中给出。

基于引理 4-2 我们可以利用 Szegö 定理来推导奈奎斯特波形延迟叠加系统的每层可达速率的闭合表达式。我们定义

$$\mathbf{P}_{l,k} \triangleq \mathbf{I}_N + \frac{E_s[k]}{N_0} \left( \mathbf{I}_N + \frac{\sum_{l=k+1}^K E_s[l] \mathbf{G}_{l,k} \mathbf{G}_{l,k}^T}{N_0} \right)^{-1}. \quad (4-44)$$

为了应用 Szegő 定理, 我们首先需要证明  $\mathbf{P}_{l,k}$  在当  $N \rightarrow \infty$  时满足正定条件。对此, 我们有如下引理。

**引理 4-3 ( $\mathbf{T}_{l,k}$  矩阵性质):** 定义  $\mathbf{T}_{l,k} \triangleq \mathbf{G}_{l,k} \mathbf{G}_{l,k}^T$ , 则对于  $1 \leq l, k \leq K$ ,  $\mathbf{T}_{l,k}$  为一渐进正定矩阵, 且满足托普利兹结构。

**证明:** 本定理的具体证明在本章附录中给出。

基于引理 4-3 我们可知  $\mathbf{T}_{l,k}$  为渐进正定托普利兹矩阵。在另一方面, 我们可知托普利兹矩阵的逆同样为渐进托普利兹矩阵<sup>[112]</sup>。因此, 注意到  $N_0$  与  $E_s[k]$  均严格大于零, 我们可知  $\mathbf{P}_{l,k}$  同样为渐进正定托普利兹矩阵。接下来我们可以考虑 Szegő 定理的应用。不难发现在渐进条件下  $\mathbf{T}_{l,k}$  的对应元素  $t_{l,k}[n]$  满足

$$t_{l,k}[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}\left[m, \frac{l-k}{K}T\right] \tilde{g}\left[m-n, \frac{l-k}{K}T\right]. \quad (4-45)$$

实际上, 无穷级数  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |H(f - \frac{k}{T})|^2$  在 FTN 传输领域被称为折叠频谱, 关于该频谱的详细讨论已经在第二章中给出。基于式 (4-45), 我们可以确定其对应反傅里叶级数的闭合表达式, 其对应结论总结于定理 4-3 中。

**定理 4-3 (反傅里叶级数及其上界):** 考虑式 (4-45) 中的 ISI 参数, 则 (4-45) 对应的反傅里叶级数

$$\tilde{t}_{l,k}(2\pi fT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g}\left[n, \frac{l-k}{K}T\right] \tilde{g}\left[n-m, \frac{l-k}{K}T\right] e^{-j2\pi mTf}, \quad (4-46)$$

满足

$$\tilde{t}_{l,k}(2\pi fT) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|H\left(f - \frac{n}{T}\right)\right|^2 e^{-j2\pi n \frac{l-k}{K}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left|H\left(f - \frac{m}{T}\right)\right|^2 e^{j2\pi m \frac{l-k}{K}}. \quad (4-47)$$

以及

$$\tilde{t}_{l,k}(2\pi fT) \leq \frac{1}{T^2} |H(f)|^4. \quad (4-48)$$

其中式 (4-48) 当  $\beta_{\text{roll-off}} = 0$  时等号成立。

**证明:** 本定理的具体证明在本章附录中给出。

基于定理 4-3 以及  $|H(f)|^2$  带宽受限特性, 我们不难求得式 (4-47) 中的反傅里叶级数具体数值。基于定理 4-3 我们可以利用 Szegő 定理来求解对应的每一层的可达速率。我们将对应的结果总结在下一定理中。

**定理 4-4 (可达速率与下界):** 在 SIC 检测策略下第  $k$  层信号的可达速率为

$$R_k^{\text{SIC}} = \frac{T}{2} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \log_2 \left( 1 + \frac{E_s[k]}{N_0 + \sum_{l=k+1}^K E_s[l] \tilde{t}_{l,k}(2\pi fT)} \right) df \quad \text{bits per channel use}, \quad (4-49)$$

并存在下界为

$$R_k^{\text{SIC}} \geq \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{E_s[k]}{N_0 + \sum_{l=k+1}^K E_s[l]} \right) \text{ bits per channel use.} \quad (4-50)$$

其中当  $\beta_{\text{roll-off}} = 0$  时下界可达。

**证明:** 本定理的具体证明在本章附录中给出。

我们定义码率为根据式 (4-43) 可得的归一化可达速率, 单位为  $\text{bits/s}$ 。则基于定理 4-4 我们有。

**推论 4-1 (码率与下界):** 在 SIC 检测策略下第  $k$  层信号的码率为

$$R_k = \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \log_2 \left( 1 + \frac{E_s[k]}{N_0 + \sum_{l=k+1}^K E_s[l] \tilde{t}_{l,k}(2\pi fT)} \right) df \text{ bits/s,} \quad (4-51)$$

其下界为

$$R_k^L \triangleq \frac{1}{T} \log_2 \left( 1 + \frac{E_s[k]}{N_0 + \sum_{l=k+1}^K E_s[l]} \right) \text{ bits/s.} \quad (4-52)$$

其中当  $\beta_{\text{roll-off}} = 0$  时下界可达。

**证明:** 本推论基于定理 4-4 以及每层复信号的传输速率  $1/T$  可以直接得到。

基于推论 4-1, 我们有以下的观测和讨论。

- 不难发现奈奎斯特波形延迟叠加系统的容量下界  $R_k^L$  本质上为传统的奈奎斯特传输系统的容量界。因此, 我们可以发现奈奎斯特波形延迟叠加系统确实相比于传统的奈奎斯特传输系统存在容量增益。
- 注意到推论 4-1 中的下界可达。当成形波形滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}} = 0$  时, 即成形波形为 sinc 函数时, 下界将被取到, 此时奈奎斯特波形延迟叠加系统的容量与传统奈奎斯特传输系统的容量相同。然而当成形波形滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}} > 0$  时, 奈奎斯特波形延迟叠加系统的容量要高于传统奈奎斯特传输系统的容量, 且随着  $\beta_{\text{roll-off}}$  增大该容量上界也随着增大。
- 奈奎斯特波形延迟叠加系统的容量增益来源于信噪比的增益。不难发现式 (4-51) 中奈奎斯特波形延迟叠加系统带来的容量增益仅体现在具有较小的干扰能量。因此可知奈奎斯特波形延迟叠加系统仅能获得来自信噪比的增益, 然而并不能得到 FTN 传输的自由度增益。

接下来我们进一步考虑推论 4-1 的结论并给出奈奎斯特波形延迟叠加系统的和速率。

**推论 4-2 (总码率上下界):** 在 SIC 检测策略下, 奈奎斯特波形延迟叠加系统的和速率为

$$R_{\text{SUM}}^{\text{SIC}} \triangleq \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \sum_{k=1}^K \log_2 \left( 1 + \frac{|h_k|^2 E_s[k]}{N_0 + \sum_{l=k+1}^K |h_l|^2 E_s[l] \tilde{t}_{l,k}(2\pi f T)} \right) df \quad \text{bits/s}, \quad (4-53)$$

其下界为

$$R_{\text{SUM}}^{\text{SIC}} \geq R_k^{\text{L}} \triangleq \frac{1}{T} \log_2 \left( 1 + \frac{\sum_{k=1}^K E_s[k]}{N_0} \right) \quad \text{bits/s}. \quad (4-54)$$

其中当  $\beta_{\text{roll-off}} = 0$  时下界可达。

**证明:** 本推论可基于推论 4-1 直接得到。

至此, 我们将奈奎斯特波形延迟叠加系统的容量进行了分析, 接下来我们将讨论基于叠加编码传输的 FTN 系统的容量。

#### 4.4.2 基于叠加编码传输的 FTN 系统的容量分析

文献 [110] 中给出了关于基于叠加编码传输的 FTN 系统容量的分析, 在此我们将基于本章系统模型的设定来其相关内容。首先, 我们在下一引理中给出奈奎斯特波形延迟叠加系统的每层可达速率。

**引理 4-4 (基于叠加编码传输的 FTN 系统的每层可达速率):** 针对于 SIC 检测, 基于叠加编码传输的 FTN 系统的第  $k$  层可达速率可表示为

$$I(\mathbf{y}; \mathbf{x}_k | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) = \frac{1}{2} \log_2 \det \left[ \mathbf{I}_N + \frac{E_s[k]}{N_0} \mathbf{G} \left( \mathbf{I}_N + \sum_{l=k+1}^K \frac{E_s[l]}{N_0} \mathbf{G} \right)^{-1} \right]. \quad (4-55)$$

**证明:** 本定理的具体证明与引理 4-2 类似因此在此省略。

类似于之前小节的分析, 我们考虑用 Szegö 定理来求解对应的每一层的可达速率。不难发现, 矩阵

$$\mathbf{P}_k = \frac{E_s[k]}{N_0} \mathbf{G} \left( \mathbf{I}_N + \sum_{l=k+1}^K \frac{E_s[l]}{N_0} \mathbf{G} \right)^{-1} \quad (4-56)$$

为两个渐进托普利兹矩阵的乘积因此也是一渐进托普利兹矩阵。因此我们可以分别研究关于矩阵  $\mathbf{G}$  对应的反傅里叶级数以及矩阵  $\left(\mathbf{I}_N + \sum_{l=k+1}^K \frac{E_s[l]}{N_0} \mathbf{G}\right)$  的反傅里叶级数从而推导出  $\mathbf{P}_k$  对应的反傅里叶级数。

基于  $\mathbf{G}$  的反傅里叶级数  $t_k(2\pi f\tau T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]e^{-j2\pi k\tau T f}$ , 我们可得如下引理。

**引理 4-5 (G 的反傅里叶级数):**  $\mathbf{G}$  的反傅里叶级数  $t_k(2\pi f\tau T)$  满足

$$t_k(2\pi f\tau T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]e^{-j2\pi k\tau T f} = \frac{1}{\tau T} |H_{fo}(f)|^2. \quad (4-57)$$

其中  $|H_{fo}(f)|^2$  为 FTN 传输的折叠频谱, 其对应定义由定义 2-2 给出。

**证明:** 本定理的具体证明在本章附录中给出。

基于引理 4-5 我们可得矩阵  $\left(\mathbf{I}_N + \sum_{l=k+1}^K \frac{E_s[l]}{N_0} \mathbf{G}\right)$  的反傅里叶级数  $\tilde{t}_k(2\pi f\tau T)$ 。考虑到渐进托普利兹矩阵的结构特点, 我们可知

$$\tilde{t}_k(2\pi f\tau T) = 1 + \sum_{l=k+1}^K \frac{E_s[l]}{N_0} \cdot \frac{1}{\tau T} |H_{fo}(f)|^2. \quad (4-58)$$

基于式 (4-57) 与式 (4-58) 的结果, 我们可以应用 Szegö 定理来得到基于叠加编码传输的 FTN 系统的每层可达速率。我们将相关内容总结在下一定理中。

**定理 4-5 (基于叠加编码传输的 FTN 系统的每层可达速率):** 在 SIC 检测策略下的基于叠加编码传输的 FTN 系统的第  $k$  层可达速率为

$$R_k^{\text{SIC}} = \frac{\tau T}{2} \int_{-\frac{1}{2\tau T}}^{\frac{1}{2\tau T}} \log_2 \left( 1 + \frac{P_k |H_{fo}(f)|^2}{N_0 + \sum_{l=k+1}^K P_l |H_{fo}(f)|^2} \right) df \quad \text{bits per channel use}, \quad (4-59)$$

其中  $P_k = \frac{E_s[k]}{\tau T}$  为对应的第  $k$  层符号的平均功率。

**证明:** 本定理的具体证明在本章附录中给出。

类似于之前小结的分析, 基于定理 4-5 我们可以得到基于叠加编码传输的 FTN 系统每层的码率, 即归一化可达速率, 以及对应的总码率。

**推论 4-3 (码率):** 在 SIC 检测策略下的基于叠加编码传输的 FTN 系统第  $k$  层的码率为

$$R_k^{\text{SIC}} = \int_{-\frac{1}{2\tau T}}^{\frac{1}{2\tau T}} \log_2 \left( 1 + \frac{P_k |H_{fo}(f)|^2}{N_0 + \sum_{l=k+1}^K P_l |H_{fo}(f)|^2} \right) df \quad \text{bits/s}. \quad (4-60)$$

**证明:** 本推论基于定理 4-5 以及每层复信号的传输速率  $1/(\tau T)$  可以直接得到。

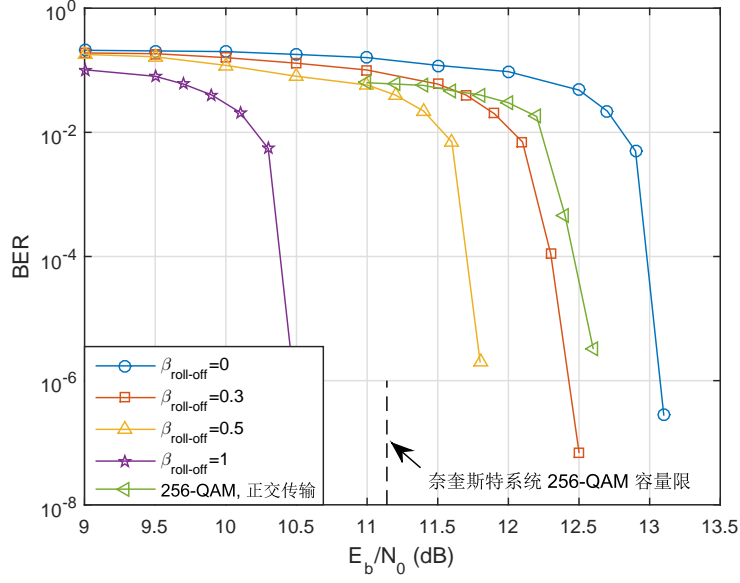


图 4.7 奈奎斯特波形延迟叠加系统误码率仿真性能，其对应参数在表 4.1 中给出

**推论 4-4 (总码率):** 在 SIC 检测策略下的基于叠加编码传输的 FTN 系统的总码率，即归一化可达和速率为

$$R_{\text{SUM}}^{\text{SIC}} = \int_{-\frac{1}{2\tau T}}^{\frac{1}{2\tau T}} \log_2 \left( 1 + \frac{P|H_{\text{fo}}(f)|^2}{N_0} \right) df \quad \text{bits/s}, \quad (4-61)$$

其中  $P = \sum_{k=1}^K P_k$  为每层信号传输功率之和，即信号传输总功率。

**证明:** 本推论基于推论 4-3 可以直接得到。

不难发现，推论 4-4 给出的基于叠加编码传输的 FTN 系统的归一化可达和速率本质上为 FTN 信号的容量（参考定理 2-2）。由此，我们可知基于叠加编码传输的 FTN 系统可以得到 FTN 传输带来的自由度增益。其信道容量在本质上与奈奎斯特波形延迟叠加系统的容量不同。

## 4.5 仿真结果

在本小节中我们将展示相关多层结构信号传输的仿真性能。图 4.7 中给出了不同滚降系数下奈奎斯特波形延迟叠加系统的误码率仿真性能，其对应的仿真参数在表 4.1 中给出，其中每层编码方式为长期演进（Long Term Evolution, LTE）通信标准中 Turbo 码<sup>[14]</sup>。我们考虑 4.2.2 小节中的功率分配方式，其中  $P_1 = 0.0121$ ,  $P_2 = 0.0121$ ,  $P_3 = 0.0121$ ,  $P_4 = 0.0121$ ,  $P_5 = 0.0121$ ,  $P_6 = 0.0121$ 。由图所示，我们可以发现随着滚降系数增大，奈奎斯特波形延迟叠加系统的误码率逐渐改善。相比于相同谱效率相同码长下的奈奎斯特系统参数，当滚降系数大于 0.3 时奈奎斯特波形延迟叠加系统的性能较优。进一步地，我们看到滚降系数等于 1 时其实

表 4.1 图 4.7 中仿真参数

	编码方式	每层信息位长度	每层码率	每层码长	映射方式
第一层参数	Turbo 码	10000	0.5	20012	QPSK
第二层参数	Turbo 码	10000	0.5	20012	QPSK
第三层参数	Turbo 码	10000	0.5	20012	QPSK
第四层参数	Turbo 码	10000	0.5	20012	QPSK
第五层参数	Turbo 码	10000	0.5	20012	QPSK
第六层参数	Turbo 码	10000	0.5	20012	QPSK
奈奎斯特系统参数	Turbo 码	90009	3/4	120024	256-QAM

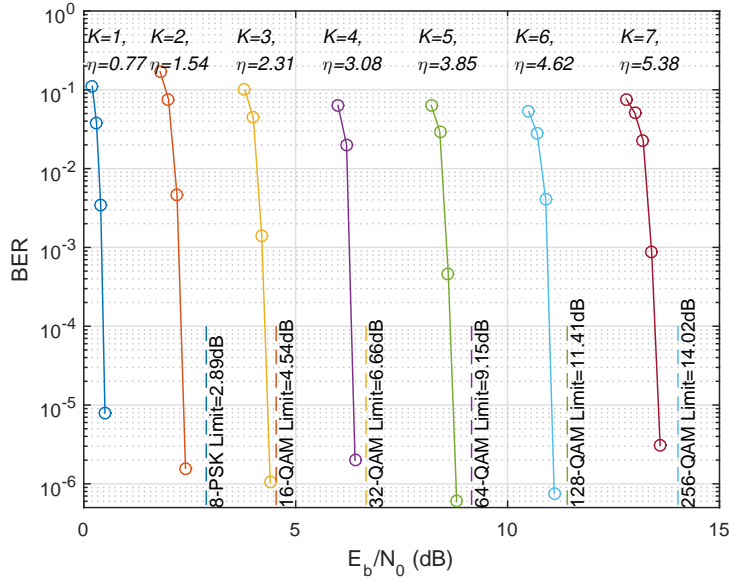


图 4.8 基于叠加编码传输 FTN 系统的误码率仿真性能，其对应参数在表 4.2 中给出

实际BER性能超过相同谱效率下奈奎斯特系统的 256-QAM 的容量限，这一点与我们之前关于信道容量的分析相吻合。

表 4.2 图 4.8 中的功率分配

$K$	$P_1/P$	$P_2/P$	$P_3/P$	$P_4/P$	$P_5/P$	$P_6/P$	$P_7/P$
2	0.6714	0.3286	-	-	-	-	-
3	0.5774	0.2837	0.1389	-	-	-	-
4	0.5403	0.2655	0.1304	0.0638	-	-	-
5	0.5237	0.2573	0.1264	0.0621	0.0304	-	-
6	0.5159	0.2535	0.1246	0.0612	0.0301	0.0147	-
7	0.5122	0.2517	0.1237	0.0608	0.0299	0.0147	0.0072

图 4.8 中给出了基于叠加编码传输FTN系统的误码率仿真性能。我们按照小节 4.3.3 中的功率分配策略对该系统进行设计，其具体的功率分配方案在表 4.2 中给出。不失一般性地，我们考虑  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  以及第六章提出的针对 FTN 信号设计的 Turbo 码，其码率为  $R = 1/3$ 。我们在图 4.8 中给出了对应的频谱效率（用  $\eta$  表示），并比较了对应频谱效率下的奈奎斯特系统在不同映射方式下的容量限。由图所示，



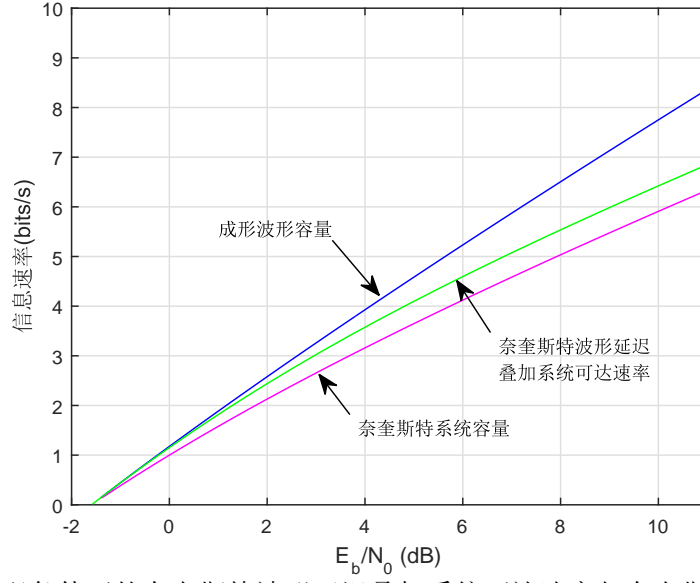


图 4.9 等功率分配条件下的奈奎斯特波形延迟叠加系统可达速率与奈奎斯特系统容量以及成形波形容量比较，其中  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.5$ ， $K = 4$

我们发现基于叠加编码传输 FTN 系统可以得到优于奈奎斯特系统容量限的优异误码率性能。这一观察体现出了叠加编码传输 FTN 系统的优点，并且与之前关于信道容量的分析相吻合。

接下来我们展示奈奎斯特波形延迟叠加系统可达速率仿真结果，其结果在图 4.9 中给出。不失一般性地，我们假设考虑等功率分配的传输方案，且  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.5$ ， $K = 4$ 。由图可见奈奎斯特波形延迟叠加系统可达速率高于传统奈奎斯特系统信道容量，然而距离成形波形容量  $C_{\text{PSD}}$  还有较大差距。由图可见，当信噪比足够高时奈奎斯特波形延迟叠加系统可达速率曲线与传统奈奎斯特系统信道容量曲线相平行，这一观测验证了奈奎斯特波形延迟叠加系统可以得到信噪比的增益。在另一方面，我们发现随着信噪比增高，奈奎斯特波形延迟叠加系统可达速率与成形波形容量的差距逐渐变大，这说明奈奎斯特波形延迟叠加系统无法得到自由度增益。这些观测验证了我们在之前小节中的相关分析。

图 4.10 中给出了奈奎斯特波形延迟叠加系统在不同层数  $K$  的条件下的可达速率。我们假设考虑等功率分配的传输方案，且  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.5$ 。由图所示，我们考虑了  $K = 2, 3, 4, 8$  四种不同情况下的可达速率。其中  $K = 2$  的情况下系统理论可达速率最高，这是因为当  $K = 2$  时对应的折叠频谱所相位叠加后数值最低。然而不难发现，不同的  $K$  对奈奎斯特波形延迟叠加系统的可达速率影响不大。

图 4.11 中给出了奈奎斯特波形延迟叠加系统在不同滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  的条件下的可达速率。我们假设考虑等功率分配的传输方案，且  $K = 2$ 。由图所示，我们考虑了  $\beta_{\text{roll-off}} = 0, 0.3, 0.5, 1$  四种不同情况下的可达速率。其中  $\beta_{\text{roll-off}} = 0$  时奈奎斯特

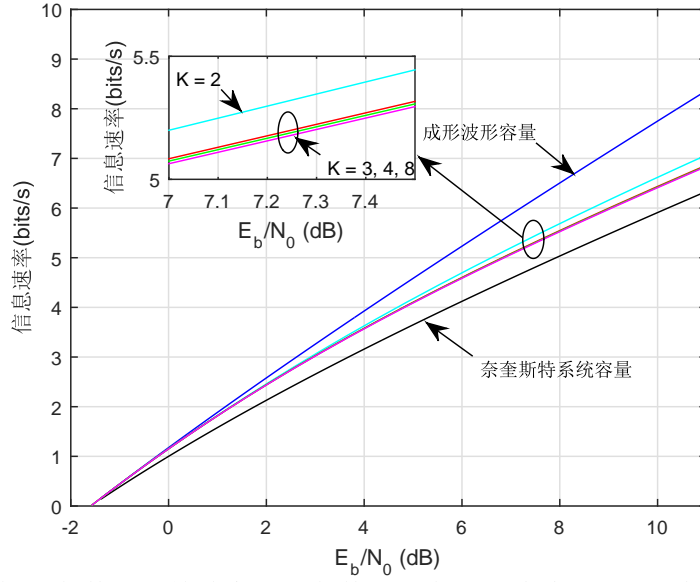


图 4.10 不同层数  $K$  条件下，等功率分配条件下的奈奎斯特波形延迟叠加系统可达速率，其中  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.5$

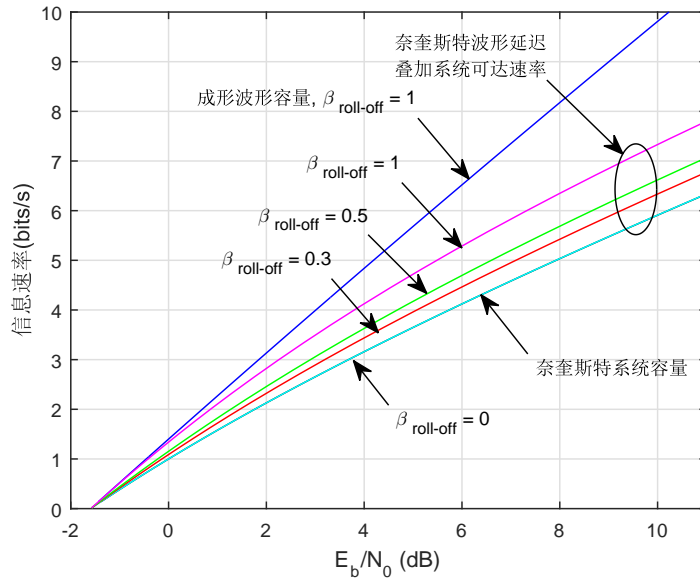


图 4.11 不同滚降系数  $\beta_{\text{roll-off}}$  条件下等功率分配条件下的奈奎斯特波形延迟叠加系统可达速率，其中  $K = 2$

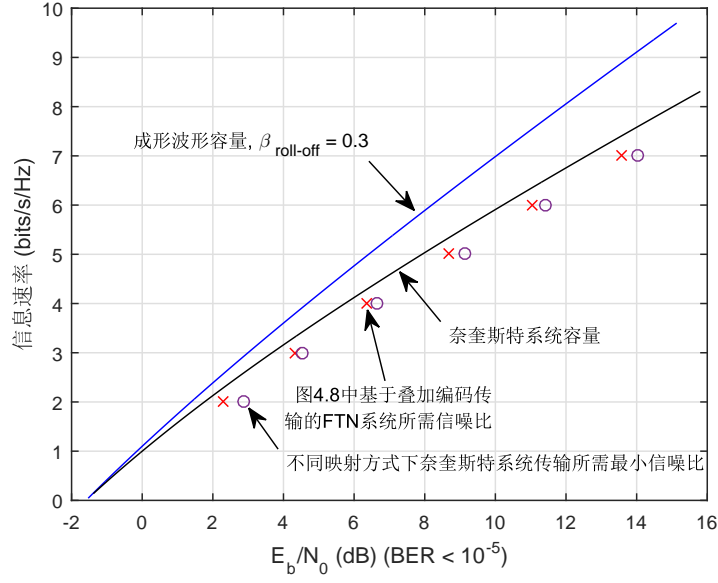


图 4.12 图 4.8 中对应的，基于叠加编码传输 FTN 系统可达速率与容量关系

波形延迟叠加系统的可达速率与奈奎斯特系统容量重合。在另一方面，随着  $\beta_{\text{roll-off}}$  逐渐增大，奈奎斯特波形延迟叠加系统的可达速率也随之增加，这些观测与我们之前的分析相符。

由于基于叠加编码传输 FTN 系统的理论可达速率与 FTN 系统容量相同，因此我们在此不再赘述。针对于图 4.8 的仿真结果，我们在图 4.12 中展示了其与不同系统的容量之间的关系。图中“x”表示在该信息速率下基于叠加编码传输的 FTN 系统所需的信噪比，“o”表示在该信息速率下奈奎斯特系统在不同映射方式基础上所需的最小信噪比（即对应容量限所需信噪比）。不难发现基于叠加编码传输的 FTN 系统可以有效地获得 FTN 传输带来的容量增益，然而其与对用的 FTN 容量限还有一定差距。这一观测也说明了基于叠加编码传输的 FTN 系统还有进一步优化的可能，这将会是我们接下来的研究工作之一。

## 4.6 本章小结

在本章中我们讨论了两种主流与 FTN 传输有关的多层结构。我们分别叙述了其对应的收发端结构、检测算法及复杂度、功率分配策略。并在其基础上探究了两种多层结构对应的系统容量。我们证明了基于叠加编码传输的 FTN 系统可以得到 FTN 传输带来的自由度增益，然而奈奎斯特波形延迟叠加系统仅仅可以得到信噪比增益。我们展示了相关的仿真结果来支持我们的理论分析并展示出了多层结构的优势。值得强调的是本章的相关内容与非正交多址技术相互联系<sup>[115?]</sup>，关于这一问题的讨论也是我们今后的研究方向之一。

## 4.7 附录

在本节中，我们将对本章出现的引理和定理进行证明。

### 4.7.1 定理 4-1 的证明

参考第三章的分析，我们有

$$\ln \frac{\Pr(S_n = s', y_1^N, b_1^N)}{\Pr(S_n = s, y_1^N, b_1^N)} \propto \sum_{i=1}^{2^L} J(\mathbf{v}'_i) - J(\mathbf{v}_i), \quad (4-62)$$

其中  $\mathbf{v}_i$  与  $\mathbf{v}'_i$  为具有相同的部分错误序列  $e_{n+1}^{n+L}$ 。基于式 (4-28) 与定理 3-1 我们可得

$$\begin{aligned} & \ln \frac{\Pr(S_n = s', y_1^N, b_1^N)}{\Pr(S_n = s, y_1^N, b_1^N)} \\ & \propto \text{Re} \left\{ (e_1^n)^H \mathbf{T}_2 x_{n+L+1}^{n+L_1} - \frac{1}{2} D^2(e_1^n) + (e_1^n)^H \mathbf{G}'' b_1^{n+L} + (e_1^n)^H \eta_1^n \right\}, \end{aligned} \quad (4-63)$$

其中  $\mathbf{T}_2$  在式 (3-50) 中给出，且  $\mathbf{G}''$  满足  $\mathbf{G}'' = \mathbf{G}_{n \times (n+L)}$ 。按照之前分析，我们将  $b_n$  近似为高斯变量，则在无噪声传输下式 (4-63) 存在上界，即

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left\{ (e_1^n)^H \mathbf{T}_2 x_{n+L+1}^{n+L_1} - \frac{1}{2} D^2(e_1^n) + (e_1^n)^H \mathbf{G}'' b_1^{n+L} + (e_1^n)^H \eta_1^n \right\} \\ & < \text{Re} \left\{ \max_{e_1^n, x_{n+L+1}^{n+L_1}} \left\{ (e_1^n)^H \mathbf{T}_2 x_{n+L+1}^{n+L_1} \right\} - \frac{1}{2} \min_{e_1^n} \{ D^2(e_1^n) \} + \max_{e_1^n} \left\{ (e_1^n)^H \mathbf{G}'' b_1^{n+L} \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (4-64)$$

考虑到  $e[n] \in [-2\sqrt{P_k \tau T}, 0, 2\sqrt{P_k \tau T}]$ ，则我们可以将式 (4-64) 进一步取上界可得

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left\{ \max_{e_1^n, x_{n+L+1}^{n+L_1}} \left\{ (e_1^n)^H \mathbf{T}_2 x_{n+L+1}^{n+L_1} \right\} - \frac{1}{2} \min_{e_1^n} \{ D^2(e_1^n) \} + \max_{e_1^n} \left\{ (e_1^n)^H \mathbf{G}'' b_1^{n+L} \right\} \right\} \\ & < \sqrt{2\sigma_{\max}^2 P_k \tau T} \sum_{l=-L_1}^{L_1} |g[l]| + P_k \tau T \left( 2 \sum_{l=1}^{L_1-L} l |g[L+l]| - \frac{1}{2} d_{\min}^2 \right). \end{aligned} \quad (4-65)$$

基于式 (4-65) 和一些直接的推导，我们可以得到定理 4-1 中的结论。由此，定理 4-1 证明完毕。

### 4.7.2 定理 4-2 的证明

参考第三章的分析，我们有

$$\Pr(S_n = s | y_1^N, b_1^N, S_{n-1}) \propto \sum_{i=1}^{2^L} \exp[J(\mathbf{v}_i)], \quad (4-66)$$

其中  $\mathbf{v}_i = x_1^{n+L} + e_1^{n+L}$ 。注意到式 (4-66) 包含了所有可能存在的  $2^L$  中错误序列进行求和，因此等价于基于联合概率求解边缘化概率的运算。不失一般性地，我们假设  $\mathbf{v}_k$  与  $\mathbf{v}'_k$  为对应的正确尾巴路径，则式 (4-66) 可被展开得

$$\frac{\Pr(s_+ | y_1^N, b_1^N, S_{n-1})}{\Pr(s_- | y_1^N, b_1^N, S_{n-1})} \propto \exp[J(\mathbf{v}_k) - J(\mathbf{v}'_k)] \times \frac{\exp[J(\mathbf{v}_1) - J(\mathbf{v}_k)] + \exp[J(\mathbf{v}_2) - J(\mathbf{v}_k)] \cdots}{\exp[J(\mathbf{v}'_1) - J(\mathbf{v}'_k)] + \exp[J(\mathbf{v}'_2) - J(\mathbf{v}'_k)] \cdots}. \quad (4-67)$$

基于式 (4-28) 我们可知

$$\begin{aligned} & J(\mathbf{v}_i) - J(\mathbf{v}_k) \\ &= \text{Re} \left\{ (m_{n+1}^{n+L})^H \mathbf{T}_1 x_{n+L+1}^{n+L+L_1} - (m_{n+1}^{n+L})^H \mathbf{G}_B \left( \frac{1}{2} m_{n+1}^{n+L} \right) \right\} \\ & \quad + \text{Re} \left\{ (m_{n+1}^{n+L})^H \mathbf{G}_{L \times L} b_{n+1}^{n+L} + (m_{n+1}^{n+L})^H \eta_{n+1}^{n+L} \right\}, \end{aligned} \quad (4-68)$$

其中  $\mathbf{T}_1$  由式 (3-45) 给出。进一步地，因为式 (4-66) 包含了所有可能存在的进行求和，因此我们有

$$\frac{\exp[J(\mathbf{v}_1) - J(\mathbf{v}_k)] + \exp[J(\mathbf{v}_2) - J(\mathbf{v}_k)] \cdots}{\exp[J(\mathbf{v}'_1) - J(\mathbf{v}'_k)] + \exp[J(\mathbf{v}'_2) - J(\mathbf{v}'_k)] \cdots} = 1. \quad (4-69)$$

由此，定理 4-2 证明完毕。

### 4.7.3 引理 4-2 的证明

参考互信息计算以及链式法则<sup>[38]</sup>，我们可得

$$\begin{aligned} & I(\mathbf{y}_k; \mathbf{x}_k | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) \\ &= h(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) - h(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e)^N \det \left( \sum_{l=k}^K E_s[l] \mathbf{G}_{l,k} \mathbf{G}_{l,k}^T + N_0 \mathbf{I}_N \right) \\ & \quad - \frac{1}{2} \log_2 (2\pi e)^N \det \left( \sum_{l=k+1}^K E_s[l] \mathbf{G}_{l,k} \mathbf{G}_{l,k}^T + N_0 \mathbf{I}_N \right) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \det \left[ \left( \sum_{l=k}^K E_s[l] \mathbf{G}_{l,k} \mathbf{G}_{l,k}^T + N_0 \mathbf{I}_N \right) \left( \sum_{l=k+1}^K E_s[l] \mathbf{G}_{l,k} \mathbf{G}_{l,k}^T + N_0 \mathbf{I}_N \right)^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} \log_2 \det \left[ \mathbf{I}_N + \frac{E_s[k] \mathbf{G}_{k,k} \mathbf{G}_{k,k}^T}{N_0} \left( \mathbf{I}_N + \frac{\sum_{l=k+1}^K E_s[l] \mathbf{G}_{l,k} \mathbf{G}_{l,k}^T}{N_0} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (4-70)$$

进一步地, 注意到  $\mathbf{G}_{k,k} = \mathbf{I}_N$ , 式 (4-70) 可进一步化简为

$$I(\mathbf{y}_k; \mathbf{x}_k | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) = \frac{1}{2} \log_2 \det \left[ \mathbf{I}_N + \frac{E_s[k]}{N_0} \left( \mathbf{I}_N + \frac{\sum_{l=k+1}^K E_s[l] \mathbf{G}_{l,k} \mathbf{G}_{l,k}^T}{N_0} \right)^{-1} \right]. \quad (4-71)$$

由此, 引理 4-1 证明完毕。

#### 4.7.4 引理 4-3 的证明

根据  $\mathbf{T}_{l,k}$  的定义不难发现, 若证明对于任意  $1 \leq l, k \leq K$ ,  $\mathbf{T}_{l,k}$  均为正定矩阵等价于证明  $\mathbf{G}_{l,k}$  为正定矩阵。根据式 (4-37) 可知,  $\mathbf{G}_{l,k}$  为基于一组非零能量函数  $h(t + nT + \frac{l-k}{K}T)$  的 Gram 矩阵, 其中  $\mathbf{G}_{l,k}$  的第  $i$  行第  $j$  列元素由  $h(t + iT + \frac{l-k}{K}T)$  与  $h(t + jT + \frac{l-k}{K}T)$  的内积得到。根据 Gram 矩阵的特点我们可知  $\mathbf{G}_{l,k}$  的行列式值非负。因此我们仅需要证明  $\mathbf{G}_{l,k}$  的行列式值非零。我们可以考虑 Gram 准则<sup>[116]</sup>, 该准则表示对于一组严格频率受限且其支撑集上数值有限的函数  $h(t + nT + \frac{l-k}{K}T)$ , 对应的 Gram 矩阵当且仅当对应的函数集合  $h(t + nT + \frac{l-k}{K}T)$  对于  $n = 0, \dots, N-1$  线性独立时有非零行列式值。为了证明线性独立特性, 我们考虑文献 [117] 中命题 5.1.1 的结论。该结论给出了一个线性独立的充分条件<sup>[33]</sup>, 即对于  $1 \leq l, k \leq K$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{g} \left[ n, \frac{l-k}{K}T \right] = 0. \quad (4-72)$$

考虑式 (4-5), 若证明 (4-72), 我们仅需要证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 \exp \left( j2\pi f \left( nT + \frac{l-k}{K}T \right) \right) df = 0. \quad (4-73)$$

注意到  $\frac{l-k}{K}T$  为一定值, 因此根据 Riemann-Lebesgue 引理<sup>[118]</sup>, 式 (4-73) 成立。在另一方面, 我们可知两个托普利兹矩阵的乘积为渐进托普利兹矩阵<sup>[112]</sup>。因此在  $\mathbf{G}_{l,k}$  为托普利兹矩阵的条件下, 我们可知  $\mathbf{T}_{l,k}$  为渐进托普利兹矩阵。由此, 引理 4-3 证明完毕。

## 4.7.5 定理 4-3 的证明

考虑到式 (4-5), 我们有

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g} \left[ n, \frac{l-k}{K} T \right] \tilde{g} \left[ n-m, \frac{l-k}{K} T \right] e^{-j2\pi m T f} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g} \left[ n, \frac{l-k}{K} T \right] \left( \int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 e^{-j2\pi\lambda((n-m)T + \frac{l-k}{K}T)} d\lambda \right) e^{-j2\pi m T f} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g} \left[ n, \frac{l-k}{K} T \right] \int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 e^{-j2\pi\lambda(nT + \frac{l-k}{K}T)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi(f-\lambda)mT} d\lambda. \quad (4-74)
 \end{aligned}$$

接下来, 我们考虑泊松求和公式, 即  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi kx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x+k)$ 。将其带入式 (4-74) 可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g} \left[ n, \frac{l-k}{K} T \right] \tilde{g} \left[ n-m, \frac{l-k}{K} T \right] e^{-j2\pi m T f} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g} \left[ n, \frac{l-k}{K} T \right] \int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 e^{-j2\pi\lambda(nT + \frac{l-k}{K}T)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(m - (f - \lambda)T) d\lambda \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g} \left[ n, \frac{l-k}{K} T \right] \int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 e^{-j2\pi\lambda(nT + \frac{l-k}{K}T)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T} - \lambda\right) d\lambda \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g} \left[ n, \frac{l-k}{K} T \right] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| H\left(f - \frac{m}{T}\right) \right|^2 e^{-j2\pi(f - \frac{m}{T})(nT + \frac{l-k}{K}T)} \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g} \left[ n, \frac{l-k}{K} T \right] e^{-j2\pi f(nT + \frac{l-k}{K}T)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| H\left(f - \frac{m}{T}\right) \right|^2 e^{j2\pi \frac{m}{T}(nT + \frac{l-k}{K}T)} \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{g} \left[ n, \frac{l-k}{K} T \right] e^{-j2\pi f(nT + \frac{l-k}{K}T)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| H\left(f - \frac{m}{T}\right) \right|^2 e^{j2\pi m \frac{l-k}{K}}. \quad (4-75)
 \end{aligned}$$

其中式 (4-75) 由于当  $m$  且  $n$  均为整数时  $e^{j2\pi mn} = 1$  成立可得。进一步地, 类似关于式 (4-75) 的推导, 我们可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{g} \left[ n, \frac{l-k}{K} T \right] \tilde{g} \left[ n-m, \frac{l-k}{K} T \right] e^{-j2\pi m T f} \\
 &= \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H\left(f - \frac{n}{T}\right) \right|^2 e^{-j2\pi n \frac{l-k}{K}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| H\left(f - \frac{m}{T}\right) \right|^2 e^{j2\pi m \frac{l-k}{K}}. \quad (4-76)
 \end{aligned}$$

进一步地, 针对于式 (4-75), 我们有

$$\begin{aligned}
 \tilde{t}_{l,k}(2\pi fT) &= \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H\left(f - \frac{n}{T}\right) \right|^2 e^{-j2\pi n \frac{l-k}{K}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| H\left(f - \frac{m}{T}\right) \right|^2 e^{j2\pi m \frac{l-k}{K}} \\
 &\leq \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| H\left(f - \frac{n}{T}\right) \right|^2 \left| e^{-j2\pi n \frac{l-k}{K}} \right| \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| H\left(f - \frac{m}{T}\right) \right|^2 \left| e^{j2\pi m \frac{l-k}{K}} \right| \\
 &= \frac{1}{T^2} |H(f)|^4.
 \end{aligned} \tag{4-77}$$

注意到当  $\beta_{\text{roll-off}} = 0$  时,  $|H(f)|^2$  的带宽受限于  $|f| \leq \frac{1}{2T}$ 。因此当  $\beta_{\text{roll-off}} = 0$  时式 (4-77) 等号成立。由此, 定理 4-3 证明完毕。

#### 4.7.6 定理 4-4 的证明

对式 (4-43) 应用 Szegő 定理可得

$$\begin{aligned}
 R_k^{\text{SIC}} &\triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(\mathbf{y}_k; \mathbf{x}_k | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}) \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log_2 \left( 1 + \frac{E_s[k]}{N_0} \left( 1 + \frac{\sum_{l=k+1}^K E_s[l] \tilde{t}_{l,k}(\omega)}{N_0} \right)^{-1} \right) d\omega,
 \end{aligned} \tag{4-78}$$

其中  $\omega = 2\pi fT$ 。考虑定理 4-3, 式 (4-78) 可化简为

$$R_k^{\text{SIC}} = \frac{T}{2} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \log_2 \left( 1 + \frac{E_s[k]}{N_0 + \sum_{l=k+1}^K E_s[l] \tilde{t}_{l,k}(2\pi fT)} \right) df. \tag{4-79}$$

在另一方面, 考虑式 (4-48), 式 (4-79) 可化简为

$$\begin{aligned}
 R_k^{\text{SIC}} &\geq \frac{T}{2} \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} \log_2 \left( 1 + \frac{E_s[k]}{N_0 + \sum_{l=k+1}^K E_s[l] \frac{1}{T^2} |H(f)|^4} \right) df \\
 &= \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{E_s[k]}{N_0 + \sum_{l=k+1}^K E_s[l]} \right).
 \end{aligned} \tag{4-80}$$

由此, 定理 4-4 证明完毕。



#### 4.7.7 引理 4-5 的证明

类似于引理 4-3 的证明，我们有

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] e^{-j2\pi k\tau T f} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 e^{j2\pi k\tau T \lambda} d\lambda e^{-j2\pi k\tau T f} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k + \tau T(\lambda - f)) d\lambda \tag{4-81}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\tau T} \int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\lambda - f + \frac{k}{\tau T}\right) d\lambda \\
 &= \frac{1}{\tau T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| H\left(f - \frac{k}{\tau T}\right) \right|^2 \\
 &= \frac{1}{\tau T} |H_{f_0}(f)|^2. \tag{4-82}
 \end{aligned}$$

其中式 (4-81) 来自于泊松求和公式，式 (4-82) 来自于定义 2-2。由此，引理 4-6 证明完毕。

#### 4.7.8 定理 4-5 的证明

类似于定理 4-4 的证明，我们对式 (4-55) 应用 Szegö 定理可得

$$\begin{aligned}
 R_k^{\text{SIC}} &\triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} I(\mathbf{y}; \mathbf{x}_k | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}), \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log_2 \left( 1 + \frac{E_s[k]}{N_0} t_k(\omega) \tilde{t}_k^{-1}(\omega) \right) d\omega \tag{4-83}
 \end{aligned}$$

其中  $\omega = 2\pi T f$ 。考虑引理 4-6，我们可得

$$\begin{aligned}
 R_k^{\text{SIC}} &= \frac{\tau T}{2} \int_{-\frac{1}{2\tau T}}^{\frac{1}{2\tau T}} \log_2 \left( 1 + \frac{E_s[k]}{N_0} \frac{1}{\tau T} |H_{f_0}(f)|^2 \left( 1 + \sum_{l=k+1}^K \frac{E_s[l]}{N_0} \frac{1}{\tau T} |H_{f_0}(f)|^2 \right)^{-1} \right) df \\
 &= \frac{\tau T}{2} \int_{-\frac{1}{2\tau T}}^{\frac{1}{2\tau T}} \log_2 \left( 1 + \frac{P_k |H_{f_0}(f)|^2}{N_0 + \sum_{l=k+1}^K P_l |H_{f_0}(f)|^2} \right) df, \tag{4-84}
 \end{aligned}$$

其中  $P_k = P[k] = E_s[k] / (\tau T)$ 。由此，定理 4-5 证明完毕。



## 第五章 码结构辅助的信道缩短技术与 FTN 检测算法

本章详细介绍了码结构辅助的信道缩短技术及其在 FTN 系统中的应用。我们首先介绍了一类“输出可知”卷积码，并基于其特性讨论了基于码结构辅助的信道缩短技术在 FTN 系统中的应用。进一步地，我们通过优化重量谱设计了适合 FTN 系统的“输出可知”卷积码。仿真结果表明，我们提出的基于码结构辅助的信道缩短检测性能优于传统信道缩短算法，并且其性能可以通过优化码结构来进一步提升。

在本文的之前几章中，我们详细介绍了一些 FTN 的检测算法。然而目前大部分 FTN 检测算法仅考虑信号检测性能而很少去根据信道编码进行优化，这也往往导致了编码 FTN 系统的设计困难。针对这一现象，我们提出了一种码结构辅助的信道缩短（Code based Channel Shortening, CCS）算法来实现 FTN 信号的检测。该技术通过考虑一种特殊的编码结构从而极大程度地简化了信号的检测。进一步地，基于 CCS 算法，我们可以通过优化码结构来实现系统误码性能和所需复杂度的折中。

我们提出的 CCS 算法需要考虑一种特殊的编码结构。我们将这一种码称为“输出可知”卷积码（Output Retainable Convolutional Code, ORCC）。该卷积码具有一种特殊的结构使得之前的若干个编码符号可以通过观察当前编码网格图状态得到<sup>[27, 28]</sup>。针对于 ISI 信道而言，传统的最优接收机设计应该基于联合检测译码（Joint Detection and Decoding, JDD）策略。该策略需要通过考虑码结构和 ISI 信道特点对应的大网格图（Super-trellis）来进行设计。然而，我们提出的 CCS 算法可以有效地将大网格图简化为对应的 ORCC 编码网格图，从而降低所需检测、译码的复杂度。值得强调的是，CCS 算法不同于传统的信道缩短算法，其并不需要级联额外的滤波器来简化网格图。进一步地，CCS 算法提供了一种全新的 ISI 信道设计理念，即通过编码来“吸收”信道 ISI 的影响。具体来讲，通过利用 ORCC 的结构特点，我们不仅可以降低检测和译码复杂度，并且相比于传统的信道缩短算法还可以得到对应的编码增益。接下来，我们对本章的主要内容进行简单梳理。

- 我们设计了一种特殊的 ORCC 结构。该卷积码的网格图状态中包含之前的编码符号信息。我们详细地分析了 ORCC 的特点，并且讨论了其码结构和可确定的之前编码符号个数之间的关系。进一步地，我们定义了两种不同的 ORCC 结构，分别称为“全输出可知”卷积码（Fully-Retainable Convolutional Codes, FRCC）以及“部分输出可知”卷积码（Partially-Retainable Convolutional Codes, PRCC）。其中 FRCC 的网格图状态可以与当前符号全部的相关编码符号，然而 PRCC 仅可以确定部分相关编码符号。

- 基于 ORCC，我们提出了 CCS 算法。该算法可以通过仅考虑编码网格图来实施 JDD。
- 通过考虑有效欧式距离 (Effective Euclidean Distance, EED)，我们推导出了 CCS 算法的误码性能限。基于性能限，我们提出了一种新的搜索算法来搜寻具有较大 EED 的 ORCC。通过搜索算法我们得到了在  $\tau = 0.8, 2/3, 0.5, 0.35$  情况下具有不同约束长度的较好 ORCC。

## 5.1 系统框图

不失一般性地，我们考虑 AWGN 信道下的卷积编码 FTN 系统，其中符号映射方式为 BPSK。图 5.1 中给出了考虑的发送端框图。假设长度为  $K$  的信源比特序列被分为具有相同长度的  $M$  个子序列，即  $\mathbf{u} = [\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(M-1)}]$ 。在经过码率为  $M/N$  的卷积编码器后我们得到  $N$  个编码序列，即  $\{\mathbf{c}^{(0)}, \mathbf{c}^{(1)}, \dots, \mathbf{c}^{(N-1)}\}$ 。通过将  $N$  个编码序列复用，我们可得对应的长度为  $\tilde{N}$  的卷积码字  $\mathbf{c}$ ，其满足  $\mathbf{c} = [c_0^{(0)}, c_0^{(1)}, \dots, c_0^{(N-1)}, c_1^{(0)}, c_1^{(1)}, \dots, c_1^{(N-1)}, \dots]$ 。通过 BPSK 映射，我们基于  $\mathbf{c}$  得到传输符号序列  $\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{\tilde{N}-1}]^T$ ，即  $x_n = 1 - 2c_n, 0 \leq n \leq \tilde{N} - 1$ 。由此，传输的 FTN 信号满足如下表达式

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\tilde{N}-1} x_n h(t - n\tau T), \quad (5-1)$$

其中  $h(t)$  为对应的  $T$  正交成形波形， $\tau$  为 FTN 压缩因子。平均符号能量满足  $E_s = \mathbb{E}[|x_n|^2]$ 。

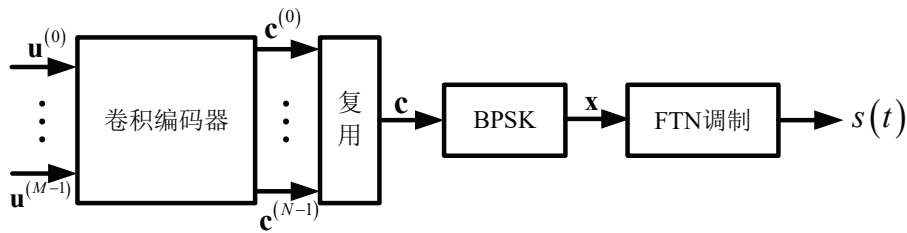


图 5.1 卷积编码 FTN 系统发送端框图

我们考虑如图 5.2 所示的 FTN 接收端框图。不失一般性地，我们默认考虑长度为  $L_1$  的 ISI 影响。接收的 FTN 信号可表示为  $r(t) = s(t) + w(t)$ ，其中  $w(t)$  为 AWGN 过程其单边 PSD 为  $N_0/2$ 。通过对  $r(t)$  进行解调（匹配滤波以及 FTN 速率采样），我们可得接受符号序列  $\mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_{\tilde{N}-1}]^T$ 。我们有

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}, \quad (5-2)$$

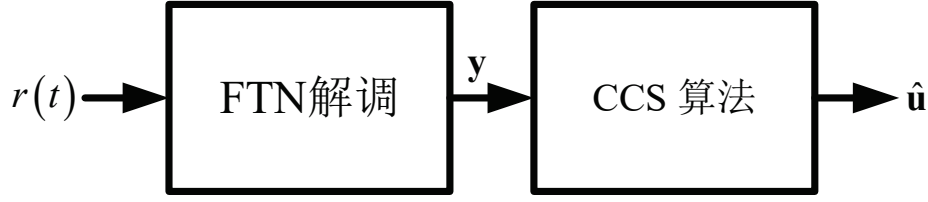


图 5.2 基于 CCS 算法的 FTN 系统接收端框图

其中  $\mathbf{G}$  为式 (2-5) 的截断形式，即令式 (2-5) 中  $g[k] = 0, |k| > L_1$ 。类似于之前章节的叙述，我们用  $\boldsymbol{\eta}$  表示色噪声序列，针对 BPSK 传输，我们有  $\mathbb{E}[\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{\eta}^H] = (N_0/2)\mathbf{G}$ 。

基于式 (5-2) 的信号检测问题可以考虑 JDD 策略。具体来讲，JDD 算法需要遍历由 ISI 信道响应以及卷积码结构确定的大网格图。对于 BPSK 映射，我们不难发现这一大网格图的大小将是编码网格图大小的  $2^{L_1}$  倍<sup>[19]</sup>。注意到  $L_1$  的数值通常较大，因此 JDD 的复杂度往往较高而难以实现<sup>[63]</sup>。因此 FTN 信号检测通常考虑次优的检测算法，特别是一些可以取得较好的误码性能与复杂度折中的算法往往更为常用。

## 5.2 “输出可知”卷积码

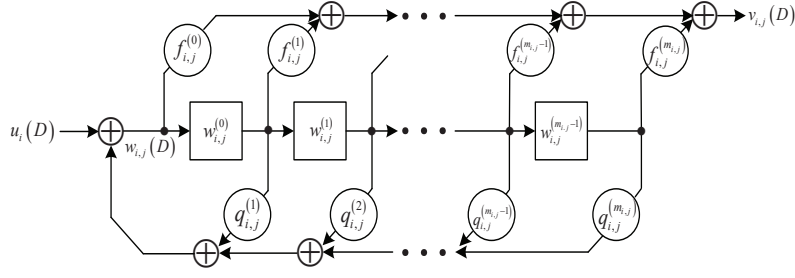
在本节中我们将定义 ORCC 并讨论其特点。不失一般性地，一个码率为  $R = M/N$  的二元卷积码  $\mathcal{C}$  的生成矩阵可表示为

$$\mathcal{G}(D) = \begin{pmatrix} \varphi_{0,0}(D) & \varphi_{0,1}(D) & \cdots & \varphi_{0,N-1}(D) \\ \varphi_{1,0}(D) & \varphi_{1,1}(D) & \cdots & \varphi_{1,N-1}(D) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{M-1,0}(D) & \varphi_{M-1,1}(D) & \cdots & \varphi_{M-1,N-1}(D) \end{pmatrix}, \quad (5-3)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_{i,j}(D) &= \varphi_{i,j}^{(0)} + \varphi_{i,j}^{(1)}D + \varphi_{i,j}^{(2)}D^2 + \cdots + \varphi_{i,j}^{(m)}D^m, \\ i &= 0, 1, \dots, M-1, \quad j = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (5-4)$$

这里  $\varphi_{i,j}(D)$  为一个二元多项式。为了便于下文分析，我们在此定义最高多项式次数为  $m_{\max} = \arg \max_{i,j} \{\deg\{\varphi_{i,j}(D)\}\}$ ，其中  $\deg\{\cdot\}$  表示多项式次数。考虑图 5.3 中多项式  $\varphi_{i,j}(D)$  的可控正则型 (Controller Canonical Form) 表示，我们有  $\varphi_{i,j}(D) = f_{i,j}(D)/q_{i,j}(D)$ ，其中  $f_{i,j}(D)$  与  $q_{i,j}(D)$  分别为其对应的两个函数。定义  $u_i(D)$  和  $v_{i,j}(D)$  为第  $i$  个输入序列 (对应  $\mathbf{u}^{(i)}$ ) 和其对应的第  $j$  个输出序列。进一步地，我们定义移位寄存器  $w_{i,j}(D)$  的输入序列为  $\varphi_{i,j}(D)$ 。则令  $c_j(D)$  为卷积编码


 图 5.3 多项式  $\varphi_{i,j}(D)$  的可控正则型表示

器的第  $j$  个输出序列（对应  $\mathbf{c}^{(j)}$ ），我们可得<sup>[120]</sup>

$$u_i(D) = q_{i,j}(D) w_{i,j}(D), \quad (5-5)$$

$$v_{i,j}(D) = f_{i,j}(D) w_{i,j}(D), \quad (5-6)$$

$$c_j(D) = v_{0,j}(D) \oplus v_{1,j}(D) \oplus \cdots \oplus v_{M-1,j}(D), \quad (5-7)$$

其中  $\oplus$  表示模 2 运算符。我们定义 ORCC 如下：

**定义 5-1 (“输出可知”卷积码):** 我们称一个卷积码为“输出可知”卷积码，如果它的生成多项式满足如下条件：

$$v_{i,j}(D) = w_{i,j}(D), \quad (5-8)$$

即对于  $i = 0, 1, \dots, M$ ,  $j = 0, 1, \dots, N-1$ , 满足  $f_{i,j}(D) = 1$ 。

一个卷积码如果满足 ORCC 定义，则以下两个命题成立。

**命题 5-1 (网格图状态与编码符号):** 针对于 ORCC，对于  $j = 0, 1, \dots, N$  我们有

$$c_j(D) = w_{0,j}(D) \oplus w_{1,j}(D) \oplus \cdots \oplus w_{M-1,j}(D). \quad (5-9)$$

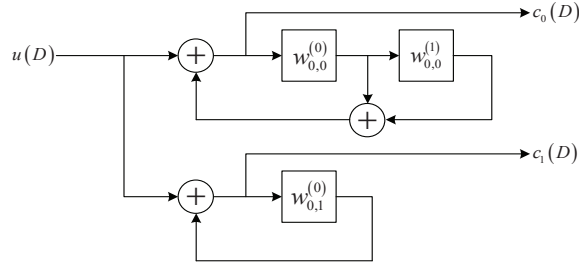
**证明:** 该命题可以通过式 (5-7) 以及式 (5-8) 得到。

命题 5-1 表示通过观察寄存器中的数值（网格图状态）我们可以确定一部分之前的编码符号。这一特性对我们 CCS 算法的设计很有帮助，因为我们可以仅通过观察编码网格图状态来进行检测。因此我们需要去确定在给定 ORCC 结构的前提下可以确定多少相关符号。令  $m_{i,j} = \deg\{w_{i,j}(D)\}$  表示  $w_{i,j}(D)$  的多项式次数，则我们有下一命题。

**命题 5-2 (可确定的编码符号):** 在给定编码网格图状态  $w_{i,j}(D)$  的条件下，ORCC 可以最多确定  $\sum_{j=0}^{N-1} m_j$  个之前编码符号，其中  $m_j = \arg \min_i m_{i,j}$ 。

针对于 ORCC，对于  $j = 0, 1, \dots, N$  我们有

$$c_j(D) = w_{0,j}(D) \oplus w_{1,j}(D) \oplus \cdots \oplus w_{M-1,j}(D). \quad (5-10)$$


 图 5.4 生成矩阵为  $\mathcal{G}(D) = \left[ \frac{1}{1+D+D^2}, \frac{1}{D} \right]$  的 ORCC 的编码器结构

**证明:** 基于式 (5-10) 我们可知编码符号  $c_j(D)$  在当且仅当  $w_{i,j}(D)$ ,  $0 \leq i \leq M-1$  全部已知的条件下可以确定。注意到多项式  $w_{i,j}(D)$  的次数为  $m_{i,j}$ 。因此在给定  $j$  的条件下我们可以通过  $w_{i,j}(D)$ ,  $0 \leq i \leq M-1$  确定最多  $m_j$  个编码符号。进一步地, 通过考虑式 (5-3) 中生成矩阵  $\mathcal{G}$  的大小我们可以得到命题 5-2。

现在我们可以考虑 ORCC 的译码。与通常的定义相同, 我们定义卷积码的网格图状态如下

$$S \triangleq [\mathbf{w}_{0,0}, \mathbf{w}_{1,0}, \dots, \mathbf{w}_{M-1,N-1}], \quad (5-11)$$

其中  $\mathbf{w}_{i,j} = [w_{i,j}^{(0)}, w_{i,j}^{(1)}, \dots, w_{i,j}^{(m_{i,j}-1)}]$  为  $w_{i,j}(D)$  中参数对应的向量。基于命题 5-2, 通过考虑 BPSK 映射 (一个传输符号对应一个编码符号), 我们可以在给定 ORCC 网格图状态  $S$  的条件下根据式 (5-10) 以及式 (5-11) 确定之前部分的传输符号。我们可以利用下一例子来说明这一问题。考虑码率为  $R = 1/2$  的 ORCC, 其对应的生成矩阵为

$$\mathcal{G}(D) = \left[ \frac{1}{1+D+D^2}, \frac{1}{D} \right]. \quad (5-12)$$

我们在图 (5.4) 中给出了 ORCC 的编码器结构。不失一般性地, 我们考虑一个长度为  $\tilde{N} = 6$  的码字<sup>1</sup>, 其对应的网格图状态转移对应为 “000  $\xrightarrow{1/11}$  101  $\xrightarrow{1/01}$  011  $\xrightarrow{1/00}$  000”。根据命题 5-1, 我们可以根据网格图状态来确定之前的传输符号。举例来讲, 在第一个时刻的状态 “101” 表示  $w_{0,0}^{(0)} = 1, w_{0,0}^{(1)} = 0, w_{0,1}^{(0)} = 1$ 。基于式 (5-10), 对应于  $\mathbf{w}_{0,0} = [1, 0]$ , 我们可知  $c_0^{(0)} = 1$  和  $c_{-1}^{(0)} = 0$ 。类似地, 对应于  $\mathbf{w}_{0,1} = [1]$ , 我们可知  $c_0^{(1)} = 1$ 。因此, 对于状态 “101”, 我们可知之前编码符号为  $[1, 1, \times, 0]$ , 其中 “ $\times$ ” 表示当前状态不可确定的之前编码符号。类似地, 对于状态 “011”, 我们可知之前的编码符号为  $[0, 1, \times, 1]$ 。对于状态 “000”, 之前的编码符号为  $[0, 0, \times, 0]$ 。因此通过综合考虑所有网格图状态对应的之前编码符号, 我们可以知道传输的编码符号为  $[1, 1, 0, 1, 0, 0]$ 。

在接下来的章节中, 我们将利用输出可知的特性来设计 CCS 算法。具体来讲, 我们用  $\hat{\mathbf{x}}_k$  来表示通过编码网格图状态  $S_k$  对应的长度为  $L_1$  的传输符号向量 (对应

<sup>1</sup>严格来说, 考虑的码字为其对用的分组码的码字。

于 BPSK 调制)。通过确定的向量  $\hat{\mathbf{x}}_k$  我们可以用来对当前传输符号进行检测。值得强调的是, 根据命题 5-2 我们不难发现在给定编码网格图状态的情况下有可能仅可以确定部分之前相关符号。此时不能确定的符号将可以在中被视为一个擦除符号用 ‘ $\times$ ’ 来表示。具体来讲, 我们有下一命题

**命题 5-3 ( $\hat{\mathbf{x}}_k$  中元素):** 给定  $k$  时刻的编码网格图状态  $S_k$ , 对于  $\hat{\mathbf{x}}_k$  中的第  $i$  个元素  $\hat{x}_k^{(i)}$ ,  $i = 0, \dots, L_1 - 1$ , 我们有

$$\hat{x}_k^{(i)} = \begin{cases} x_{kN-L_1+i}, & i \geq L_1 - Nm_j \\ \times, & i < L_1 - Nm_j \end{cases}, \quad (5-13)$$

其中  $j = (N - ((L_1 - i) \bmod N)) \bmod N$ , “mod” 表示取模运算。

**证明:** 注意到在给定  $w_{i,j}(D)$ ,  $0 \leq i \leq M - 1$  的条件下我们可以最多确定  $m_j$  个之前时刻编码符号。进一步地, 通过考虑卷积编码序列  $\{\mathbf{c}^{(0)}, \mathbf{c}^{(1)}, \dots, \mathbf{c}^{(N-1)}\}$  的复用我们可知相同编码输出序列的相邻的编码符号在复用后的码字  $\mathbf{c}$  中会被  $N - 1$  来自于其他编码输出序列的符号所分隔。因此, 我们仅需要通过观察  $S_k$  中对应的每个编码序列  $\mathbf{c}^{(j)}$  中的最邻近的  $m_j$  个编码符号即可得到  $\hat{\mathbf{x}}_k$  中元素。

基于命题5-3, 我们可以定义两种 ORCC。

**定义5-2 (“全输出可知”卷积码):** 我们称一个卷积码为“全输出可知”卷积码 (FRCC), 如果它的网格图状态可以确定  $L_1$  最相邻的之前传输符号, 其对于  $\hat{\mathbf{x}}_k$  中不存在擦除符号, 即  $\forall j \in [0, N - 1], Nm_j \geq L_1$ 。

**定义5-3 (“部分输出可知”卷积码):** 我们称一个卷积码为“部分输出可知”卷积码 (PRCC), 如果它的网格图状态不能确定  $L_1$  最相邻的之前传输符号, 其对于  $\hat{\mathbf{x}}_k$  中存在擦除符号, 即  $\exists j \in [0, N - 1], Nm_j < L_1$ 。

值得注意的是, 当 FRCC 编码信号经过在 ISI 信道后, 其对应的大网格图 (由信道相应与编码结构组成) 可完全简化为编码网格图。此时如果检测算法仅基于编码网格图设计将不会有任何检测或译码性能损失。在另一方面, 对应于 PRCC 编码信号, 其对应的大网格图在理论上并不可以被完全简化为编码网格图。因此如果检测算法仅基于编码网格图设计将会导致部分性能损失。这一性能损失与信道的 ISI 相应长度以及对应 ORCC 的约束长度密切相关。这一性能损失的研究对系统设计至关重要, 因此我们将会在后文中详细讨论。

在此我们强调 FRCC 的编码网格图大小最小为  $2^{L_1}$ , 这一点可以通过命题 5-2 得到。进一步地, 因为 FRCC 的大网格图完全等价于编码网格图因此基于编码网格图来进行 JDD 并不会带来性能损失。另一方面, PRCC 的网格图大小通常小于  $2^{L_1}$ , 因此基于基于编码网格图来进行 JDD 会降低检测的复杂度但是带来一些性能损失。然而这一性能损失可以通过编码设计来获得更大的编码增益来弥补。这一问题相关的讨论将会中后文中提及。



### 5.3 码结构辅助的信道缩短算法

在给定 FTN (ISI) 网格图的条件下, 我们可以利用引理 3-1 的 Ungerboeck 观测模型来基于接收符号序列  $\mathbf{y}$  对发送符号序列  $\mathbf{x}$  进行检测, 我们有

$$\Pr(\mathbf{y}|\mathbf{x}) \propto \prod_n \varphi(y_n, \mathbf{x}), \quad (5-14)$$

其中  $\varphi(y_n, \mathbf{x})$  与式 (3-9) 具有相同的物理意义, 表征 Ungerboeck 观测模型的检测度量, 即

$$\varphi(y_n, \mathbf{x}) \triangleq \exp \left\{ \frac{2}{N_0} \operatorname{Re} \left\{ x_n^* \left( y_n - \frac{1}{2} g[0] x_n - \sum_{l=1}^{L_1} g[l] x_{n-l} \right) \right\} \right\}. \quad (5-15)$$

因此, 对于给定路径  $\mathbf{x}$ , 其度量值满足

$$J(\mathbf{x}) \triangleq \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{x}^H \mathbf{y} - \frac{1}{2} g[0] \|\mathbf{x}\|^2 - \mathbf{x}^H \mathbf{G}_L \mathbf{x} \right\}, \quad (5-16)$$

其中  $\mathbf{G}_L$  由式 (3-23) 给出。基于式 (5-16), 我们可以采用 Viterbi 算法<sup>[53]</sup> 和 BCJR 算法<sup>[54, 55]</sup> 来计算对应序列和符号的度量。然而其对应的检测复杂度在  $L_1$  较大时往往过高。接下来我们将考虑利用前一节中的 PRCC 来实现简化检测设计。

考虑到卷积编码符号与 BPSK 映射后符号的一一对应关系, CCS 算法的设计要点在于找到可以最大化度量值 (5-16) 并满足卷积编码结构的可能路径  $\mathbf{x}$ 。具体来讲, 我们可以利用编码网格图中对应状态组成的马尔科夫链来表征  $\mathbf{x}$ , 因此我们可以通过仅遍历编码网格图来计算对应的路径度量。

不失一般性地, 我们考虑一组卷积码网格图状态  $\mathcal{S} \triangleq \{S_0, S_1, \dots, S_L\}$  表征对应的路径  $\mathbf{x}$ , 其中  $L$  为编码网格图长度, 即  $L = K/M$ 。等价于式 (5-16), 通过考虑编码网格图与 ISI 网格图的关系, 我们有<sup>2</sup>

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{L-1} \phi(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, x_{kN-L_1}^{kN-1}) \quad (5-17)$$

$$= \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{i=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ x_{kN+i}^* \left( y_{kN+i} - \frac{1}{2} g[0] x_{kN+i} - \sum_{l=1}^{L_1} g[l] x_{kN+i-l} \right) \right\}, \quad (5-18)$$

其中  $\varphi(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, x_{kN-L_1}^{kN-1})$  对应 ISI 网格图的度量运算式 (5-16)。我们将式 (5-18) 进一步展开可得

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{i=0}^{N-1} \operatorname{Re} \left\{ x_{kN+i}^* \left( y_{kN+i} - \frac{1}{2} g[0] x_{kN+i} - \sum_{l=0}^{i-1} g[l] x_{kN+i-l} - \sum_{l=i}^{L_1} g[l] x_{kN+i-l} \right) \right\}. \quad (5-19)$$

<sup>2</sup>我们在此默认  $L_1 > N$ , FTN 系统通常满足这一条件。

注意到式 (5-19) 中  $\sum_{l=i}^{L_1} g[l]x_{kN+i-l}$  表示之前传输符号对当前检测符号的 ISI 干扰, 这部分干扰无法通过考虑当前时刻到下一时刻的编码网格图状态转移来抵消。然而, 要消除这一部分 ISI 的影响我们需要得到之前传输符号的信息, 即将编码网格图扩展为由码结构和 ISI 决定的大网格图。作为一个替代方案, 我们可以利用命题 5-2 中的结论, 即通过观察 ORCC 编码网格图状态来得到之前传输符号  $\sum_{l=i}^{L_1} g_l x_{kN+i-l}$  的估计。因此, 在给定 ORCC 码结构  $\mathcal{C}$  的条件下, 我们可以得到 CCS 的路径度量值为

$$J(\mathbf{x}) \approx \hat{J}(\mathbf{x}) \triangleq \sum_{k=0}^{L-1} \gamma(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, \mathcal{C}) \quad (5-20)$$

$$= \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{i=0}^{N-1} \text{Re} \left\{ x_{kN+i}^* \left( y_{kN+i} - \frac{1}{2} g[0] x_{kN+i} - \sum_{l=0}^{i-1} g[l] x_{kN+i-l} - \sum_{l=i}^{L_1} g[l] \hat{x}_k^{(L_1-l-1)} \right) \right\}, \quad (5-21)$$

其中  $\gamma(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, \mathcal{C})$  表征基于编码网格图状态  $S_k$  以及 ORCC 结构  $\mathcal{C}$  得到的分支度量估计值, 并且在计算时  $\hat{\mathbf{x}}_k$  中的擦除元素可以当成零处理。

通过式 (5-18) 以及式 (5-21) 我们可知  $\hat{\mathbf{x}}_k$  中的估计被用来计算  $\sum_{l=i}^{L_1} g[l]x_{kN+i-l}$  的数值。因此, 我们提出的 CCS 算法仅需要考虑编码网格图而非复杂度大网格图来进行检测从而极大地降低了检测复杂度。具体来讲, 基于式 (5-21) 我们可以采用 Viterbi 算法以及 BCJR 算法的思想来进行信号检测。不难发现 CCS 算法对应的检测复杂度与 ORCC 的记忆长度而非信道的记忆长度呈指数关系。然而, 正如在命题 5-2 中的讨论, PRCC 只能得到部分之前符号的估计因此当  $L_1$  大于可以确定的符号个数时, CCS 算法具有性能损失。鉴于这一问题, 我们在下一定理中考虑原始分支度量  $\varphi(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, x_{kN-L_1}^{kN-1})$  和 CCS 算法分支度量  $\gamma(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, \mathcal{C})$  的差别。

**定理 5-1 (分支度量差别):** 在给定 ORCC 编码网格图的条件下, 原始分支度量  $\varphi(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, x_{kN-L_1}^{kN-1})$  与 CCS 算法分支度量  $\gamma(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, \mathcal{C})$  的差距存在上界, 即

$$|\varphi(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, x_{kN-L_1}^{kN-1}) - \gamma(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, \mathcal{C})| \leq \zeta \quad (5-22)$$

其中  $\zeta = \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{l=i, l \geq Nm_j-1}^{L_1} |g[l]| E_s$  且  $j = (N - ((l+1) \bmod N)) \bmod N$ 。

**证明:** 本定理的具体证明在本章附录中给出。

上述定理给出了两种分支度量的差距的上界。举例来讲, 我们考虑  $\tau = 2/3$  的 FTN 传输系统, 其成形波形为滚降系数为  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  的 RRC 波形。根据定理 5-1, 我们可知在 ORCC 生成矩阵满足式 (5-12) 以及  $L_1 = 5$  的条件下有  $\zeta = 0.06 E_s$ 。进一步地, 若我们选用 FRCC 进行编码则上述差距将会缩小为零。在另一方面, 基

于网格图的检测考虑路径度量而不仅仅是分支度量来进行判决，因此仅考虑 PRCC 带来的分支度量损失并不足以来分析 CCS 算法误码性能。在后文中我们将考虑基于  $\hat{J}(\mathbf{x})$  度量进行 ML 检测的性能分析。

## 5.4 误码性能分析

因为 CCS 算法的路径度量不同于传统基于 Ungerboeck 观测模型的 ML 检测，因此其误码性能也与 ML 性能有所区别。考虑到 ORCC 结构以及每个编码网格图状态对应的  $\hat{\mathbf{x}}_k$ ，我们可以将式 (5-21) 写成对应的矩阵形式如下：

$$\hat{J}(\mathbf{x}) = \text{Re} \left\{ \mathbf{x}^H \mathbf{y} - \frac{1}{2} g_0 \|\mathbf{x}\|^2 - \mathbf{x}^H \mathbf{T}_L \mathbf{x} \right\}, \quad (5-23)$$

其中  $\mathbf{T}_L$  为一个大小为  $\tilde{N} \times \tilde{N}$  且主对角线元素均为零的下三角矩阵。通过考虑 ORCC 的结构，我们可以确定  $\mathbf{T}_L$  中元素的值。我们定义  $l = |j - i| - i \bmod N$ ，则对应  $t_{i,j}$ ， $0 < i < \tilde{N} - 1, i < j$ ，我们有

$$t_{i,j} = \begin{cases} g[i - j], & |j - i| < i \bmod N, \text{ or } \lceil l/N \rceil \leq m_{N-(l \bmod N)}; \\ 0, & \text{else.} \end{cases} \quad (5-24)$$

这里“ $\lceil \cdot \rceil$ ”表示向上取整运算符。应注意对于 FRCC，矩阵  $\mathbf{T}$  与  $\mathbf{T}_L$  应与  $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{G}_L$  完全相同。然而对于 PRCC，这些矩阵将会不同。举例来讲，我们考虑式 (5-12) 中对应的大小为  $8 \times 8$  的矩阵  $\mathbf{T}$  与  $\mathbf{T}_L$ ，我们有

$$\mathbf{T}_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g[-1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g[-2] & g[-1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g[-3] & g[-2] & g[-1] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g[-4] & 0 & g[-2] & g[-1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g[-5] & 0 & g[-3] & g[-2] & g[-1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g[-4] & 0 & g[-2] & g[-1] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g[-5] & 0 & g[-3] & g[-2] & g[-1] & 0 \end{pmatrix}, \quad (5-25)$$

以及

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} g[0] & g[-1] & g[-2] & g[-3] & g[-4] & g[-5] & 0 & 0 \\ g[-1] & g[0] & g[-1] & g[-2] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ g[-2] & g[-1] & g[0] & g[-1] & g[-2] & g[-3] & g[-4] & g[-5] \\ g[-3] & g[-2] & g[-1] & g[0] & g[-1] & g[-2] & 0 & 0 \\ g[-4] & 0 & g[-2] & g[-1] & g[0] & g[-1] & g[-2] & g[-3] \\ g[-5] & 0 & g[-3] & g[-2] & g[-1] & g[0] & g[-1] & g[-2] \\ 0 & 0 & g[-4] & 0 & g[-2] & g[-1] & g[0] & g[-1] \\ 0 & 0 & g[-5] & 0 & g[-3] & g[-2] & g[-1] & g[0] \end{pmatrix}. \quad (5-26)$$

接下来我们考虑在给定传输序列  $\mathbf{x}$  和一错误序列  $\mathbf{e}$  的条件下的性能分析。按照通常的定义，我们定义错误序列  $\mathbf{e}$  对应的欧式距离为

$$D^2(\mathbf{e}) = \frac{1}{2E_b} \mathbf{e}^H \mathbf{G} \mathbf{e}, \quad (5-27)$$

其中  $E_b = E_s/R$  表征平均比特信噪比。由于 CCS 算法采用了不同于传统 ML 检测算法的度量，我们定义有效欧式距离如下

$$D_{\text{eff}}^2(\mathbf{e}) = \frac{1}{2E_b} \mathbf{e}^H \mathbf{T} \mathbf{e}. \quad (5-28)$$

基于其定义，我们有如下定理。

**定理 5-2 (误码率分析):** 在给定传输符号序列  $\mathbf{x}$  的条件下，CCS 算法的判决得到  $\mathbf{x} + \mathbf{e}$  的概率存在渐进上界

$$\Pr(\mathbf{e}|\mathbf{x}) \lesssim Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0} D_{\text{eff}}^2(\mathbf{e}) \frac{D_{\text{eff}}^2(\mathbf{e})}{D^2(\mathbf{e}) + \frac{2\sigma_{\text{ISI}}^2(\mathbf{x}, \mathbf{e})}{N_0}}} \right), \quad (5-29)$$

其中

$$\sigma_{\text{ISI}}^2(\mathbf{x}, \mathbf{e}) \triangleq \frac{1}{2E_b} \mathbb{E} \left[ \mathbf{x}^H (\mathbf{G} - \mathbf{T}) \mathbf{e} \mathbf{e}^H (\mathbf{G} - \mathbf{T})^H \mathbf{x} \right], \quad (5-30)$$

表征高斯近似情况下剩余 ISI 的方差。

**证明:** 本定理的具体证明在本章附录中给出。

值得强调的是定理 5-2 对一般的 ORCC 均适用，包括 FRCC 和 PRCC。注意到对于 FRCC，矩阵  $\mathbf{T}$  与矩阵  $\mathbf{G}$  完全相同，因此  $\sigma_{\text{ISI}}^2(\mathbf{x}, \mathbf{e})$  的值为零，此时归一化有效欧式距离  $D_{\text{eff}}^2(\mathbf{e})$  与归一化欧式距离  $D^2(\mathbf{e})$  相同。因此对于 FRCC，式 (5-29) 与文献 [6] 中的分析相一致。在另一方面，因为对于 PRCC 情况下 CCS 算法仅考虑部分 ISI，因此观察式 (5-29) 不难发现，剩余的 ISI 会影响误码性能。具体来讲，剩余 ISI 会降低欧式距离并增大对应的噪声影响，从而影响误码率的指数衰减速率。为了减小剩余 ISI 的影响，我们需要对 PRCC 的码结构进行优化。注意到对于考虑的编码 FTN 系统其发送序列因该满足 ORCC 的码结构约束。因此 ML 检测的判决  $\mathbf{x} + \mathbf{e}$  也必须满足 ORCC 的结构约束。为了得到更准确的误码分析，我们需要对 ORCC 的结构来寻找对应错误事件的有效欧式距离频谱。值得强调的是当传输信道不存在 ISI 时，寻找欧式距离谱等价于寻找其对应的汉明距离<sup>[121]</sup>。传统分析距离谱的方式通常假设传输的是全零码字，然后考虑所有可能的合法码字的汉明重量<sup>[121]</sup>。然而对应于 FTN 传输，由于 ISI 的存在我们不能直接采用这一方式来寻找重量谱。举例来讲，我们考虑传输全零码字，则我们可知发送的符号序列  $\mathbf{x}$  中元素数值均为  $+\sqrt{E_s}$ 。在这一情况下，受到传输星座点的限制，错误序列  $\mathbf{e}$  中元素不可能为  $+2\sqrt{E_s}$ ，这一情况明显与实际不符。因此，我们需要比较所有的可能传输符号序列对，从而找到有效欧式距离谱。寻找有效欧式距离谱对我们的分析至关重要，因此我们将在下一节中详细讨论。在此我们考虑在有效欧式距离谱已经找到的条件下的误码分析。

我们定义错误事件集合  $U(\varepsilon) \triangleq \{\varepsilon | N_u = i, L_\varepsilon(i) = L_\varepsilon, \omega(i) = \omega\}$ ，其中每一个错误事件均对应两个长度为  $N_u = i$  的不同码字并且具有事件长度  $L_\varepsilon(i) = L_\varepsilon$ ，有效

欧式距离  $w(i) \triangleq D_{\text{eff}}^2(\mathbf{e}) = \omega$ 。我们定义对应于错误事件的累加信息-重量枚举函数 (Cumulative Information-Weight Enumerator, CI-WE) 如下:

$$B(W) \triangleq \sum_{i=1}^K B_{i,w} W^w = \sum_{i=1}^K \sum_{w(i)=w_{\min}}^{w_{\max}} \frac{1}{2^{ML_{\varepsilon}(i)-1}} N_U(\varepsilon) W^w, \quad (5-31)$$

其中  $N_U(\varepsilon)$  的大小为  $U(\varepsilon)$ ,  $w_{\min}$  和  $w_{\max}$  表示所有可能对应的错误事件的最小和最大的有效欧式距离。式 (5-31) 中  $1/2^{ML_{\varepsilon}(i)-1}$  用来表征对应错误事件出现的概率<sup>[122]</sup>。基于累加信息-重量枚举函数, 我们有如下的推论。

**推论 5-1 (误码率上界):** CCS 算法的误码率存在近似上界

$$P_b(U(\varepsilon)) \lesssim \sum_{i=1}^K \frac{i}{K} B_{i,w} Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0} w \frac{w}{D^2(\mathbf{e}) + \frac{2\sigma_{\text{ISI}}^2(U(\varepsilon))}{N_0}}} \right), \quad (5-32)$$

其中

$$\sigma_{\text{ISI}}^2(U(\varepsilon)) = \frac{1}{2E_b} \mathbb{E} \left[ \mathbf{x}^H (\mathbf{G} - \mathbf{T}) \mathbf{e} \mathbf{e}^H (\mathbf{G} - \mathbf{T})^H \mathbf{x} | U(\varepsilon) \right], \quad (5-33)$$

表征集合  $U(\varepsilon)$  对应的高斯近似下的剩余 ISI 方差。

**证明:** 本定理的具体证明在本章附录中给出。

值得强调的是推论 5-1 中需要确定传输序列  $\mathbf{x}$  和错误序列  $\mathbf{e}$ , 然而由于对应集合  $U(\varepsilon)$  过大因此比较困难。我们注意到在高信噪比时系统性能将会收敛于最小有效欧式距离对应的误码性能。因此, 在实际系统中对于集合  $U(\varepsilon) = \{\varepsilon | N_u = i, L_{\varepsilon}(i) = L_{\varepsilon}, \omega(i) > \omega_{\min}\}$  的  $\sigma_{\text{ISI}}^2(U(\varepsilon))$  计算可以被适当放宽。具体来讲, 我们可以将  $U(\varepsilon) = \{\varepsilon | N_u = i, L_{\varepsilon}(i) = L_{\varepsilon}, \omega(i) > \omega_{\min}\}$  的  $\sigma_{\text{ISI}}^2(U(\varepsilon))$  数值用零来近似, 并且我们可以用对应  $\omega_{\min}$  的错误序列  $\mathbf{e}$  来计算  $D^2(\mathbf{e})$  的数值。基于这一简化, 式 (5-32) 也许会导致一个较松的上界。不过随着信噪比的增加, 简化后的上界将会更为准确地模拟实际 BER 的指数衰减性能。

基于本节中的误码性能分析, 我们将在下一节中分析 ORCC 设计问题。

## 5.5 “输出可知”卷积码设计

原则上我们优化“输出可知”卷积码的目的是最大化最小有效欧式距离  $d_{\min}^2 \triangleq \arg \min_{\varepsilon} D_{\text{eff}}^2(\mathbf{e})$ 。考虑到 Q 函数的性质, 在忽略剩余 ISI 影响的条件下  $d_{\min}^2$  将会对系统的平均误码性能起主导作用。因此, 我们的码设计准则可以总结为一下两个步骤。

1. 寻找在给定记忆长度下可以最大化  $d_{\min}^2$  的码结构。
2. 最小化可以得到  $d_{\min}^2$  的码字组合的数量, 即最小化式中的  $B_{i,w}$  项。

因为我们不能默认发送全零码字因此我们不能直接采用传统的搜索算法来得到距离谱。针对我们的系统，有效距离谱必须包含编码网格图中所有可能错误序列的计算。鉴于此，我们提出一种新的搜索算法。该算法基于用于设计非线性 trellis 码的双向动态规划算法<sup>[122]</sup>（Double Dynamic Programming Algorithm）而来。

为了降低有效欧式距离的计算的复杂度，我们通过考虑编码网格图中状态转移情况来计算所有的可能路径对的有效欧式距离。基于式 (5-21)，我们用累加的方式计算对应的度量值。我们定义  $\hat{\mathbf{e}}_l = \hat{\mathbf{x}}_l - \hat{\mathbf{x}}'_l$  为  $l$  时刻编码网格图中状态  $S_l$  和  $S'_l$  对应之前符号估计之差，其中  $\hat{\mathbf{x}}_l$  与  $\hat{\mathbf{x}}'_l$  分别为对应  $S_l$  和  $S'_l$  的之前符号估计。则式 (5-28) 可变为

$$D_{\text{eff}}^2(\mathbf{e}) = \sum_{l=0}^{L-1} \frac{1}{2E_b} (e_{Nl}^{Nl+N-1})^H \mathbf{G}_{N \times N} (e_{Nl}^{Nl+N-1}) + \frac{1}{E_b} \hat{\mathbf{e}}_l^H \mathbf{H}_l (e_{Nl}^{Nl+N-1}), \quad (5-34)$$

其中  $\mathbf{H}_l, l = 0, \dots, L-1$  对应于一系列长度随  $l$  变化的矩阵，可表示为

$$\mathbf{H}_l = \begin{pmatrix} g[lN+1] & g[lN+2] & \cdots & g[lN+N] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g[2] & g[3] & \cdots & g[N+1] \\ g[1] & g[2] & \cdots & g[N] \end{pmatrix}. \quad (5-35)$$

可以注意到通过式 (5-34) 有效欧式距离可以通过对应于状态转移的累加运算得到。因此我们的搜索算法可以通过确定初始和截至状态的前提下遍历所有不相交路径的思想进行设计。

我们在图 5.5 中给出了提出的搜索算法流程图。该算法的输入为三个不同矩阵  $nextstate$ ,  $currentoutput$  以及  $preoutput$ 。对应给定编码网格图状态以及输入，矩阵  $nextstate$  以及  $currentoutput$  给出对应的下一时刻状态以及对应的编码输出，矩阵  $preoutput$  则给出之前传输符号的估计。在图 5.5 中  $\mathcal{X}(S)$  表示对应的编码网格图大小， $OPT$  表示状态转移对应的编码输出， $d_c^2$  表示初始状态相同但在同一时刻结尾状态分别为  $NS_1$  和  $NS_2$  的两条路径对应的有效欧式距离。该算法的输出为最小有效欧式距离  $d_{\min}^2$ ，并且可以通过简单的寄存操作来记录  $d_{\min}^2$  出现的次数。由此，我们可以对码结构进行选取。注意到有效欧式距离仅有码结构，FTN 符号速率以及成形波形决定，因此所提出的算法并不需要考虑信噪比的影响。

在下一节的内容中我们将展示通过提出的搜索算法得到的 ORCC 结构。

## 5.6 性能以及结果展示

我们首先展示基于提出的搜索算法得到的一些优秀 ORCC。不失一般性地，我们考虑码率为  $R = 1/2$  的 ORCC，且 FTN 传输的成形波形为滚降系数为  $\beta_{\text{roll-off}} =$

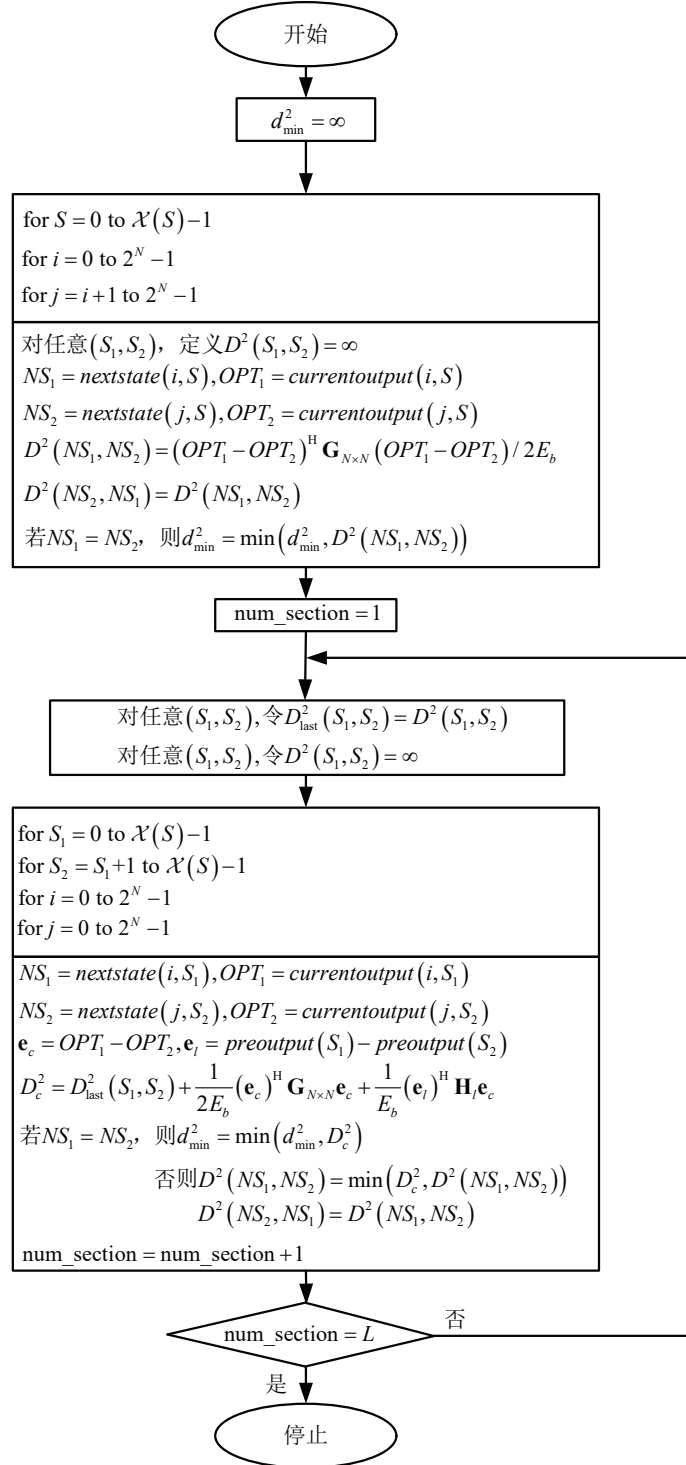


图 5.5 提出的搜索算法流程图

0.3 的 RRC。我们将得到的结果展示在表中，其中  $d_{H,\min}$  为对应的最小汉明距离。我们在图中包含了 ORCC 对应的生成矩阵以及其生成矩阵的最小实现 (Minimal Realization) 形式，表中的记忆长度对应为 ORCC 生成矩阵的寄存器个数。进一步地，我们定义渐进编码增益如下<sup>[121]</sup>：

$$\text{Coding gain} \simeq 10\log_{10} \left( \frac{d_{\min}^2}{d_{\tau,\min}^2} \right), \quad (5-36)$$

其中  $d_{\tau,\min}^2$  表示未编码 FTN 信号在相同  $\tau$  和成形波形条件下的归一化最小欧式距离<sup>3</sup>。

从表 5.1 中不难看出，具有相同汉明距离的码可以在 FTN 传输的情况下具有不同的有效欧式距离。值得强调的是，对于一些特殊码字，其渐进编码增益可以小于零。举例来讲，我们考虑生成矩阵为  $\mathcal{G}(D) = \left[ \frac{1}{1+D^2}, \frac{1}{1+D+D^2} \right]$  的 ORCC。通过穷搜我们发现这个 ORCC 是码率为 1/2，记忆长度为 4，且  $\tau = 0.5$  的条件下最优的 ORCC。然而这一 ORCC 对应的  $d_{\min}^2$  仅为 0.71，对应的编码增益为 -1.53 dB。这一现象表明 ORCC 带来的编码增益有可能小于码率损失带来的性能损失。因此我们可以引入最小记忆长度的概念，表征 ORCC 在当前 FTN 情形下可得到正的编码增益所需的最小记忆长度。特别地，我们通过穷搜可以发现对应于 FTN 传输  $\tau = 0.5$  和  $\tau = 0.35$  情况下最小记忆长度分别为 5 和 6。一般来讲，随着  $\tau$  降低所需的最小记忆长度增大。这一点与直观的理解相符，即更严重的 ISI 需要一个具有更高的检测复杂度。

我们在图 5.6 中展示了 CCS 算法的 BER 性能，其中  $\tau = 2/3$ ，成形波形滚降系数为  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ 。作为对比，我们在图中展示了最优的联合检测译码算法（基于大网格图的 BCJR 算法）的性能，其编码方式采用与 CCS 算法中 ORCC 等价的卷积码，即其生成矩阵具有最小实现形式。为了方便起见，我们将具体的仿真参数总结于表 5.2 中。由图可见，CCS 算法可以接近于最优算法的误码性能，然而仅需要其对应 1/4 的检测复杂度。这是因为 CCS 算法的复杂度仅取决于选用的 ORCC 的记忆长度，而与 ISI 的长度无关。在另一方面，CCS 算法的性能与我们在推论 5-1 中给出的误码性能上界相匹配，这也证明了我们理论分析的正确性。

图 5.7 中展示了 CCS 算法与传统信道缩短算法<sup>[73]</sup>的 BER 性能比较，其中  $\tau = 2/3$ ，成形波形滚降系数为  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ 。为了体现 CCS 算法的优异性能，类似于图 5.6 我们同时展示了最优的联合检测译码算法的性能。可以看到 CCS 算法性能接近最优的联合检测译码算法，并且仅需要其对应 1/8 的检测复杂度。类似于图 5.6，我们观察到 CCS 算法的性能与推论 5-1 中给出的误码性能上界相匹配。进一步地，在相同复杂度的条件下，CCS 算法相比于传统的信道缩短算法可以得到约 2.5 dB 的信噪比增益。这是由于传统的信道缩短算法需要分别考虑信号的检测以及译码，

<sup>3</sup>文献[14]中对部分  $d_{\tau,\min}^2$  进行了总结。



表 5.1 误码性能优秀的码率  $R = 1/2$  的 ORCC 生成矩阵总结, 其中 FTN 系统成形波形滚降系数为  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$ 

$\tau$	记忆长度	“输出可知”形式	最小实现形式	$d_{\min}^2$	$d_{H,\min}$	渐进编码增益
$\tau = 0.8$	3	$\left[\frac{1}{1+D+D^2}, \frac{1}{1+D}\right]$	$\left[1, \frac{1+D+D^2}{1+D}\right]$	2.46	4	0.90 dB
	4	$\left[\frac{1}{1+D+D^2}, \frac{1}{1+D^2}\right]$	$\left[1, \frac{1+D+D^2}{1+D^2}\right]$	2.68	5	1.27 dB
	5	$\left[\frac{1}{1+D+D^3}, \frac{1}{1+D^2}\right]$	$\left[1, \frac{1+D+D^3}{1+D^2}\right]$	3.27	5	2.14 dB
	6	$\left[\frac{1}{1+D^3+D^4}, \frac{1}{1+D+D^2}\right]$	$\left[1, \frac{1+D^3+D^4}{1+D+D^2}\right]$	3.85*	6	2.84 dB
	7	$\left[\frac{1}{1+D^3+D^4}, \frac{1}{1+D^2+D^3}\right]$	$\left[1, \frac{1+D^3+D^4}{1+D^2+D^3}\right]$	4.01*	6	3.02 dB
$\tau = 2/3$	3	$\left[\frac{1}{1+D^2}, \frac{1}{1+D}\right]$	$[1, 1+D]$	1.85	3	1.31 dB
	4	$\left[\frac{1}{1+D+D^2}, \frac{1}{1+D^2}\right]$	$\left[1, \frac{1+D+D^2}{1+D^2}\right]$	2.17	5	2.00 dB
	5	$\left[\frac{1}{1+D+D^3}, \frac{1}{1+D^2}\right]$	$\left[1, \frac{1+D+D^3}{1+D^2}\right]$	2.70	5	2.95 dB
	6	$\left[\frac{1}{1+D^3+D^4}, \frac{1}{1+D+D^2}\right]$	$\left[1, \frac{1+D^3+D^4}{1+D+D^2}\right]$	3.35	6	3.88 dB
	7	$\left[\frac{1}{1+D+D^4}, \frac{1}{1+D^2+D^3}\right]$	$\left[1, \frac{1+D+D^4}{1+D^2+D^3}\right]$	3.52*	6	4.10 dB
$\tau = 0.5$	5	$\left[\frac{1}{1+D^2+D^3}, \frac{1}{1+D^2}\right]$	$\left[1, \frac{1+D^2+D^3}{1+D^2}\right]$	1.52	5	1.78 dB
	6	$\left[\frac{1}{1+D^2+D^4}, \frac{1}{1+D^2}\right]$	$\left[1, \frac{1+D^2+D^4}{1+D^2}\right]$	2.00*	4	2.97 dB
$\tau = 0.35$	6	$\left[\frac{1}{1+D^2}, \frac{1}{1+D+D^2+D^3+D^4}\right]$	$\left[1, \frac{1+D^2}{1+D+D^2+D^3+D^4}\right]$	0.74*	6	1.21 dB

\*表示对应的码并不是穷搜得到的结果。

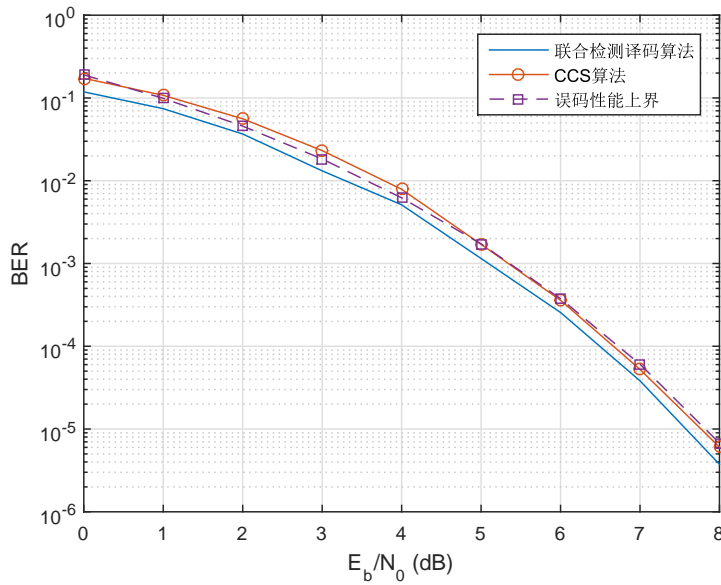


图 5.6 基于码结构辅助的信道缩短算法 BER 性能图，其中  $\tau = 2/3$ ，具体编码参数在表 5.2 中给出

表 5.2 图 5.6 的仿真参数

检测/译码算法	状态个数	生成矩阵	记忆长度	信息长度
联合检测译码算法	64	$\left[1, \frac{1+D+D^2}{1+D^2}\right]$	2	1000
CCS算法	16	$\left[\frac{1}{1+D+D^2}, \frac{1}{1+D^2}\right]$	4	1000

然而 CCS 算法可以同时考虑这两个问题因此可以得到更好的误码性能。

表 5.3 图 5.7 的仿真参数

检测/译码算法	状态个数	生成矩阵	记忆长度	信息长度
联合检测译码算法	256	$\left[1, \frac{1+D^2+D^3}{1+D^2}\right]$	3	1000
信道缩短算法 <sup>[73]</sup>	32	$\left[1, \frac{1+D^2+D^3}{1+D^2}\right]$	3	1000
CCS算法	32	$\left[\frac{1}{1+D^2+D^3}, \frac{1}{1+D^2}\right]$	5	1000

## 5.7 本章小结

在本章中我们考虑了针对 BPSK 映射的 CCS 算法设计。我们考虑了一种特殊的卷积码结构来吸收 FTN 传输带来的码间串扰影响。由此，所提出的算法联合考虑了编码约束与码间串扰，因此具有超过传统信道缩短算法的优异性能。通过对距离谱的研究，我们对算法的性能进行了分析。性能分析结果与我们的仿真验证相符。值得强调的是我们提出的算法可以直接地被扩展到高阶映射系统以及一般 ISI 信道中。不难发现，CCS 算法思想在于利用码的结构来缩短码间串扰的长度，该设计与其码间串扰的能量大小无关，因此可以适用于一般的 ISI 信道。注意到高阶映射系统需要在每一个编码网格图时刻确定更多的之前编码符号。因此，我们可以通过考虑一

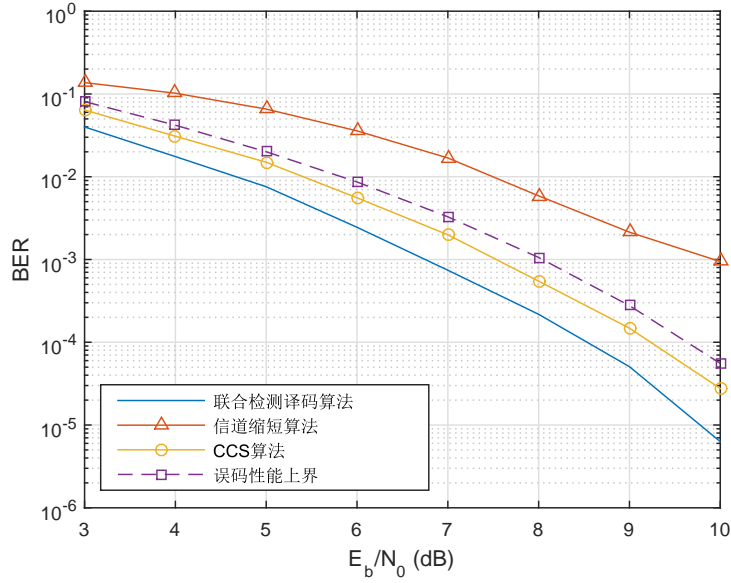


图 5.7 基于码结构辅助的信道缩短算法 BER 性能图，其中  $\tau = 0.5$ ，具体编码参数在表 5.3 中给出

个具有较长记忆长度的 ORCC 来实现 CCS 算法，其中对应的之前传输符号估计可以通过考虑相邻的编码符号来求确定。值得强调的是当系统具有较长信道记忆长度以及较高映射阶数时，仅通过设计具有很长记忆长度的 ORCC 来实现 CCS 算法并不容易。因此，我们可以考虑多层编码（Multi-Level Coding, MLC）方式来实现 ORCC 算法。具体来讲，我们可以在每层比特信道中考虑一个 ORCC。在接收端，我们可以在每个编码网格图时刻，将每个比特信道通过 ORCC 得到的之前编码符号联合考虑并得到对应的之前时刻传输符号估计。进一步地，我们可以通过消息传递的方式来更新不同比特信道的估计从而改善检测性能。因此 CCS 算法也可以在高阶映射系统中应用。

当传输系统的 ISI 长度较低时，我们可以简化对应的 ORCC 设计。特别地，我们可以考虑一种特殊的 ORCC 形式，其每个编码网格图状态可以确定比编码记忆长度少的编码符号。具体来讲，定义 5-1 中指出生成多项式  $\varphi_{i,j}(D)$  对应的寄存器中元素  $w_{i,j}$  需要与之前  $m_{i,j}$  个多项式输出相同。然而当部分 ISI 影响较小时我们可以适当放宽这一定义使得 ORCC 编码网格图状态仅可以确定具有较大 ISI 影响的之前传输符号，从而简化 ORCC 的设计。

关于基于码结构辅助的信道缩短算法的一些相关扩展是一个值得进一步研究的课题，这也将是我们下一步的研究工作之一。

## 5.8 附录

在本节中，我们将对本章出现的引理和定理进行证明。

### 5.8.1 定理 5-1 的证明

考虑式 (5-19) 与式 (5-21)，我们有

$$\varphi(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, x_{kN-L_I}^{kN-1}) - \gamma(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, \mathcal{C}) = - \sum_{i=0}^{N-1} \text{Re} \left\{ x_{kN+i}^* \sum_{l=i}^{L_I} g[l] e_l \right\}, \quad (5-37)$$

其中  $e_l = x_{kN+i-l} - \hat{x}_k^{(L_I-l-1)}$  表示实际传输符号和估计符号之差。进一步地，考虑命题 5-3，我们可知式 (5-37) 满足

$$\begin{aligned} & \varphi(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, x_{kN-L_I}^{kN-1}) - \gamma(S_{k+1}, y_{kN}^{kN+N-1} | S_k, \mathcal{C}) \\ &= - \sum_{i=0}^{N-1} \text{Re} \left\{ x_{kN+i}^* \sum_{l=i, l \geq Nm_j-1}^{L_I} g[l] x_{kN+i-l} \right\}, \end{aligned} \quad (5-38)$$

其中  $j = (N - ((l+1) \bmod N)) \bmod N$ 。因此考虑到 BPSK 映射的特点，式 (5-38) 存在上界即，式 (5-22)。由此定理 5-1 证明完毕。

### 5.8.2 定理 5-2 的证明

考虑到式 (5-23)，错误路径  $\mathbf{x} + \mathbf{e}$  的度量值为

$$\hat{J}(\mathbf{x} + \mathbf{e}) = \text{Re} \left\{ (\mathbf{x} + \mathbf{e})^H \mathbf{y} - \frac{1}{2} g[0] \|\mathbf{x} + \mathbf{e}\|^2 - (\mathbf{x} + \mathbf{e})^H \mathbf{T}_L (\mathbf{x} + \mathbf{e}) \right\}. \quad (5-39)$$

将式 (5-2) 代入式 (5-23) 和 (5-39)，我们有

$$\begin{aligned} & \hat{J}(\mathbf{x} + \mathbf{e}) - \hat{J}(\mathbf{x}) \\ &= \text{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{e}^H \mathbf{G} \mathbf{e} + \mathbf{e}^H \boldsymbol{\eta} + (\mathbf{x} + \mathbf{e})^H (\mathbf{G}_L - \mathbf{T}_L) (\mathbf{x} + \mathbf{e}) - \mathbf{x}^H (\mathbf{G}_L - \mathbf{T}_L) \mathbf{x} \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{e}^H \mathbf{G} \mathbf{e} + \mathbf{e}^H \boldsymbol{\eta} + \mathbf{x}^H (\mathbf{G}_L - \mathbf{T}_L) \mathbf{e} + \mathbf{e}^H (\mathbf{G}_L - \mathbf{T}_L)^H \mathbf{x} + \mathbf{e}^H (\mathbf{G}_L - \mathbf{T}_L) \mathbf{e} \right\}. \end{aligned} \quad (5-40)$$

注意到  $\mathbf{G} = \mathbf{G}_L + \mathbf{G}_U$  和  $\mathbf{G}_L = \mathbf{G}_U^H - \mathbf{I}$ ，上式可以进一步简化。经过一些化简，式 (5-40) 可变为

$$\hat{J}(\mathbf{x} + \mathbf{e}) - \hat{J}(\mathbf{x}) = \text{Re} \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{e}^H \mathbf{T} \mathbf{e} + \mathbf{e}^H \boldsymbol{\eta} + \mathbf{x}^H (\mathbf{G} - \mathbf{T}) \mathbf{e} \right\}. \quad (5-41)$$

式 (5-41) 中最后一项表示 CCS 算法对应的剩余 ISI 项。因此，为了进一步分析误码性能，我们将其近似为一个高斯变量。不难发现该项的均值为零，方差为  $\sigma_{\text{ISI}}^2(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \mathbf{x}^H (\mathbf{G} - \mathbf{T}) \mathbf{e} \mathbf{e}^H (\mathbf{G} - \mathbf{T})^H \mathbf{x}$ 。基于这一假设，我们只需计算

$$\Pr(\mathbf{e} | \mathbf{x}) = \Pr(\hat{J}(\mathbf{x} + \mathbf{e}) - \hat{J}(\mathbf{x}) > 0). \quad (5-42)$$

关于这一概率的计算类似文献 [52] 中的推导。因此我们在此不再赘述。由此定理 5-2 证明完毕。

### 5.8.3 推论 5-1 的证明

该推论来自于 Union Bound<sup>[121]</sup>，其中我们默认每一帧传输中只能至多发生一次错误事件。因此我们有

$$P_b \lesssim \sum_{i=1}^K \frac{i}{K} B_{i,w} P_\varepsilon, \quad (5-43)$$

其中  $P_\varepsilon$  表示错误事件  $\varepsilon$  发生的概率。进一步地，将式 (5-29) 代入上式我们可以得到式 (5-32)。值得强调的是，式 (5-32) 中的期望仅针对集合  $U(\varepsilon)$  中的错误事件。这是因为在给定集合中错误事件有相同的有效欧式距离和错误比特数。由此推论 5-1 证明完毕。



## 第六章 FTN 系统的相关编码设计

本章详细讨论了针对 FTN 系统的一些编码设计方案。基于 EXIT 图等工具，我们提出了针对 FTN 系统的非对称 Turbo 码以及级联码的设计方案。我们的仿真结果展示了所提出的针对 FTN 系统的编码设计具有优异的误码性能。

本文之前章节内容主要考虑了 FTN 信号的检测问题，在本章中我们将讨论针对 FTN 系统的一些纠错编码设计方案。我们在第五章中介绍了一种特殊的针对 FTN 系统的卷积码设计，其主要目的在于简化 FTN 检测算法。然而在这一章中，我们的编码设计方案主要目的是为了提升系统的误码性能。考虑到 FTN 信号的检测算法，我们在本章中着重考虑重量谱以及 EXIT 图作为手段来设计对应的纠错编码方案。关于编码 FTN 系统重量谱的分析在本文第五章中已经有所讨论，而针对 FTN 系统的 EXIT 分析我们将在 6.2 节中详细介绍。基于重量谱以及 EXIT 图，我们接下来将提出了针对 FTN 系统的非对称 Turbo 码以及级联码的设计方案。

### 6.1 针对 FTN 系统的非对称 Turbo 码设计

Turbo 码是一种常用的近年来常用的现代编码。通过两个分量码之间的外信息传递，码长较长的 Turbo 码可以得到逼近容量限优异性能。实际通信标准中的 Turbo 码往往采用对称结构，即采用两个相同分量码（通常是卷积码）来进行设计<sup>[114]</sup>。然而针对于 FTN 系统，非对称 Turbo 码展示出了优异的误码性能<sup>[247]</sup>。在本小节中我们将简要介绍针对 FTN 系统非对称 Turbo 码的设计准则。

针对于 Turbo 编码的 FTN 系统而言，很多因素都制约着最终的误码性能。其中包括检测算法、编码结构、以及接收机调度等等。注意到 Turbo 迭代检测通过编码器返回的外信息来逐步改善检测性能。因此，针对于编码 FTN 系统而言，其编码方案需可以保证在较低信噪比时也可以产生准确度较高的外信息。在另一方面，由于编码系统本身的误码性能与码结构密切相关，因此所选码字本身应具有一个较好的重量谱。针对于这两点，针对 FTN 系统设计的 Turbo 码可以选用非对称结构来实现上述两个方面的折衷。具体来讲，我们可以令其中一个分量码具有较好的迭代收敛门限，另外一个分量码具有较好的重量谱。较好的收敛门限保证了编码 FTN 系统可以在较低信噪比时收敛至无 ISI 性能。较好的重量谱保证了编码 FTN 系统有着较低





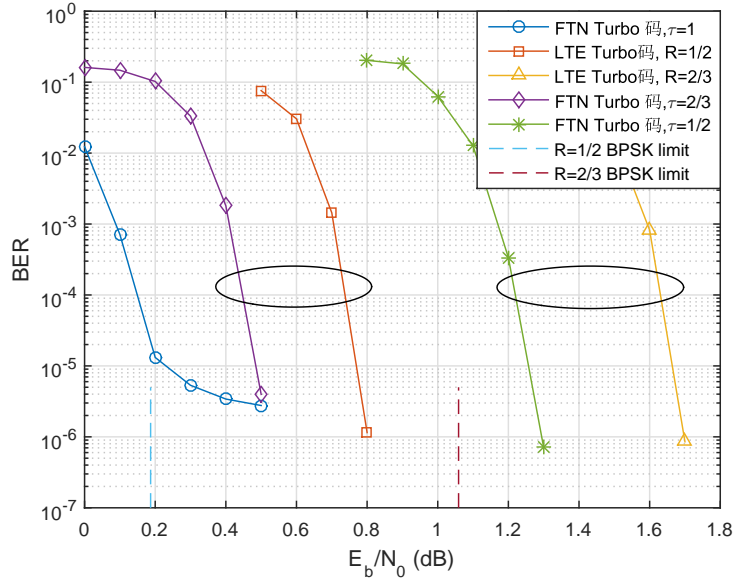


图 6.2 非对称 Turbo 编码的 FTN 系统 BER 性能。其中 FTN 的非对称 Turbo 编码生成多项式由式 (6-1) 和式 (6-2) 所示。作为对比，奈奎斯特系统采用 LTE 标准的 Turbo 码结构

的性能提升了约 0.3 dB。同时与对应的奈奎斯特传输受限容量限相差仅 0.3 dB。进一步地，在  $\tau = 0.5$  的情况下，我们提出的非对称 Turbo 码性能比相同信息速率下 LTE 的 Turbo 码<sup>[114]</sup>在奈奎斯特传输时的性能提升了约 0.4 dB，与对应的奈奎斯特传输受限容量限相差仅为 0.25 dB。这一结果充分地体现了我们提出的针对 FTN 系统的非对称 Turbo 码的优异性能。

## 6.2 针对 FTN 系统的级联码设计

在本节中我们将对第五章的相关 FTN 系统编码设计进行扩展。具体来讲，我们将考虑在 CCS 简化算法检测的基础上设计针对 ORCC 的级联码，使得 FTN 系统在较低检测/译码复杂度的基础上可以有更好的误码性能。为了更好地应用 CCS 算法，我们级联码的设计必须满足级联内码为 ORCC，并在此基础上利用 EXIT 图<sup>[124]</sup>为工具来优化级联码设计。接下来，我们将分别讨论 FTN 系统的串行级联卷积码<sup>[125]</sup>（Serial-Concatenated Convolutional Codes, SCCC）以及自级联卷积码<sup>[126]</sup>（Self-Concatenated Convolutional Code, SECCC）设计。

### 6.2.1 针对 FTN 系统的串行级联卷积码设计

不失一般性地，我们考虑如图 6.3 所示的 FTN 系统发送端框图。由图所示，二元的信息序列  $\mathbf{u}$  送入一个 SCCC 编码器，其对应的内码为 ORCC。SCCC 编码后的码字在经过 BPSK 映射后得到传输序列  $\mathbf{x}$ ，并在之后按照 FTN 传输速率进行波形成形以及发送。对应于图 6.3，我们考虑由图 6.4 所示的 FTN 系统接收端框图。经过

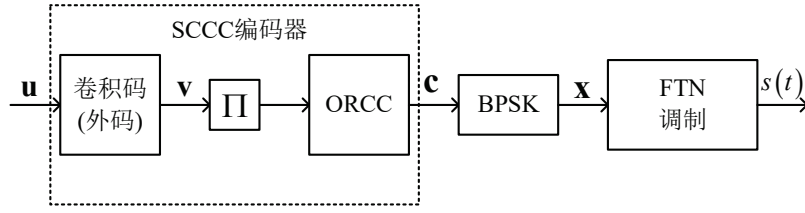


图 6.3 串行级联码编码的 FTN 系统发送端框图

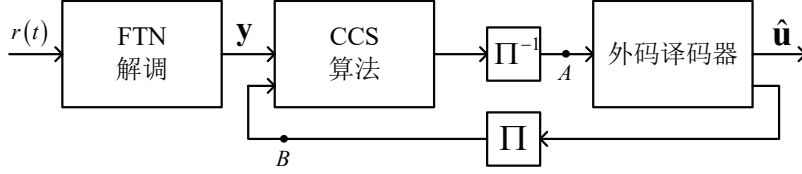


图 6.4 串行级联码编码的 FTN 系统接收端框图

FTN 解调后，对应的充分统计量  $\mathbf{y}$  将按照 Turbo 均衡的方式来进行检测以及译码，其中 CCS 算法检测器与外码译码器将会交互外信息。在经过充分次数的迭代后，我们可以得到信息序列  $\mathbf{u}$  的估计  $\hat{\mathbf{u}}$ ，该估计也将被视为接收端的输出判决。

为了更好地设计 SCCC 码，我们在此假设对应接收端检测和译码部分的输入 LLR 服从独立高斯分布，即图 6.4 中的 A 和 B 点。接下来我们将阐述该假设的合理性。实际上在 FTN 领域中，迭代接收机的输出 LLR 具有近似高斯分布的特性已经被广泛地认可<sup>[14, 123, 127, 128]</sup>。其中文献 [123] 通过将实际的输出 LLR 分布与高斯分布 PDF 相比较来验证了高斯近似的合理性。在另一方面，由于检测器和译码器之间往往存在交织器，因此，我们通常假设对应的检测器输入与译码器输入之间相互独立 [123]。

基于独立高斯分布的假设，我们可以极大地简化级联码的设计。注意到检测器与译码器的 EXIT 曲线无法用闭合表达式来刻画，因此我们借助蒙特卡洛仿真 (Monte Carlo Simulation) 的方式来评估其性能。我们通过蒙特卡洛仿真的方式来生成充分多的传输码字，由此在给定先验信息  $I_A$  作为输入的条件下，我们可以得到对应的平均输出外信息<sup>[129]</sup>

$$I_{E, \text{DET}} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{x=\pm\sqrt{E_s}} \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(\xi|x) \log_2 \left( \frac{\Pr(\xi|x=\sqrt{E_s}) + \Pr(\xi|x=-\sqrt{E_s})}{\Pr(\xi|x)} \right) d\xi,$$

$$I_{E, \text{DEC}} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{v=0,1} \int_{-\infty}^{\infty} \Pr(\xi'|v) \log_2 \left( \frac{\Pr(\xi'|v=0) + \Pr(\xi'|v=1)}{\Pr(\xi'|x)} \right) d\xi', \quad (6-3)$$

其中  $\xi$  和  $\xi'$  为对应输出 LLR 向量  $\boldsymbol{\xi}$ （对应于 CCS 算法）和  $\boldsymbol{\xi}'$ （对应于外码译码器）的元素。注意到检测器和译码器的输出 LLR 向量中元素并不一定相互独立<sup>[129]</sup>，因此  $\Pr(\xi|x)$  和  $\Pr(\xi'|v)$  需要通过直方图的方式<sup>[129]</sup>来得到。

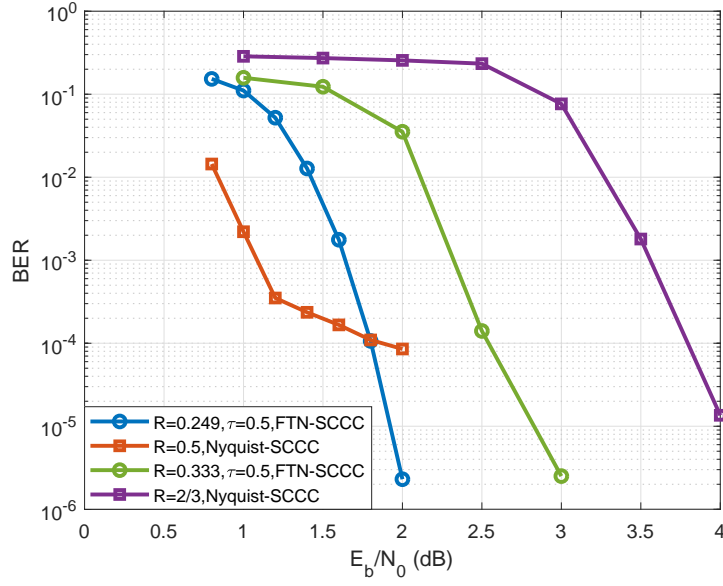
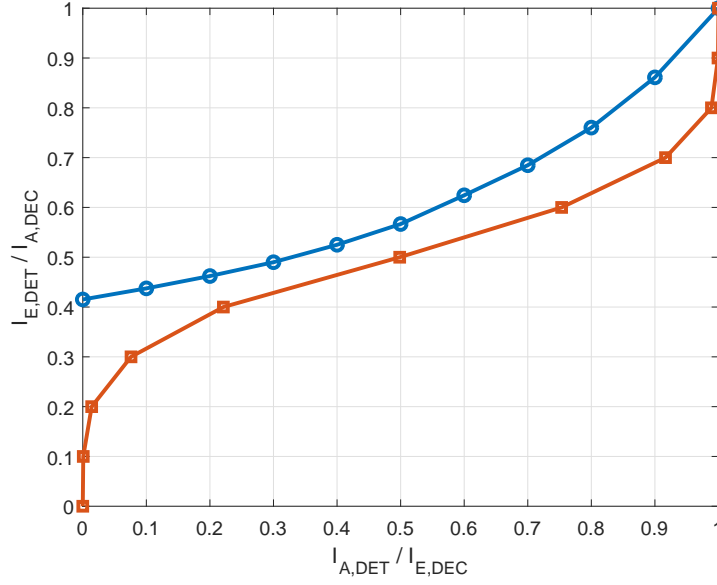


图 6.5 相同信息速率下, FTN-SCCC 与 Nyquist-SCCC 的 BER 性能比较

基于式 (6-3), 我们可以在给定先验信息  $I_A$  的条件下画出对应的 EXIT 曲线, 其中  $I_A$  的生成方式可以参考文献 [124]。因此我们对针对 FTN 系统的 SCCC 的设计准则为在给定信噪比和  $\tau$  的条件下, 使得画出的两条 EXIT 曲线之间有一个较小的开放通道。具体来讲, 我们通过选择 ORCC 来使 CCS 算法对应的 EXIT 曲线与给定的外码 EXIT 曲线相匹配。我们通过考虑传统的 SCCC 的码重特点来选取合适的外码。针对于 SCCC 来讲, 外码的最小汉明距离将会很大程度上决定高信噪比下 SCCC 误码性能的错误平层位置<sup>[121]</sup>。因此我们选取 1/2 码率的四状态 (7, 5) 递归卷积码作为外码。该卷积码的最小汉明距离为 5, 且被证明在 FTN 传输的条件下具有较好的误码性能<sup>[123]</sup>。我们注意到 EXIT 曲线的数值与所考虑的信噪比有关。因此, 我们需要在给定信噪比的条件下评估给定外码和不同内码的 EXIT 曲线性能。基于 EXIT 曲线, 我们可以找到给定外码条件下使得对应的两条 EXIT 曲线相匹配的所需最低信噪比的内外码结构。在得到相匹配的内外码结构后我们的 SCCC 设计完毕。

接下来我们将展示所设计的针对 FTN 系统的 SCCC 误码性能。不失一般性地, 我们考虑  $\tau = 0.5$  的 FTN 系统, 其滚降系数为  $\beta_{\text{roll-off}} = 0.3$  的 RRC 函数为成形波形, 并且考虑第五章中提出的 CCS 算法来进行检测。图 6.5 中展示了我们设计的 SCCC 误码性能。作为对比我们同样画出了相同信息速率下奈奎斯特系统的 SCCC (下文中称为 Nyquist-SCCC) 性能。我们考虑 Nyquist-SCCC 的内外码具有相同的生成矩阵  $\mathcal{G}(D) = \left[1, \frac{1+D^2}{1+D+D^2}\right]$ , 该 SCCC 为通用移动通信系统 (Universal Mobile Telecommunications System, UMTS) 标准的备选码字之一。在另一方面, 针对 FTN 系统的 SCCC (下文中称为 FTN-SCCC) 通过之前叙述的 EXIT 分析进行了优化, 其


 图 6.6  $E_b/N_0 = 2$  dB 时 SCCC 编码的 FTN 系统对应的 EXIT 图

对应的内外码生成矩阵分别为  $\mathcal{G}_{\text{inner}}(D) = [1, \frac{1}{1+D^2}]$  和  $\mathcal{G}_{\text{outer}}(D) = [1, \frac{1+D^2}{1+D+D^2}]$ 。我们考虑以下两种类别的 FTN-SCCC 与 Nyquist-SCCC 的比较，其对应的参数总结于表 6.1 中。其中第一个类别的 FTN-SCCC 码率为  $R \approx 0.25$ ， $\tau = 0.5$ ，对应的信息速率与码率为  $R \approx 0.5$  的 Nyquist-SCCC 相接近。第二个类别的 FTN-SCCC 码率为  $R \approx 1/3$ ， $\tau = 0.5$ ，对应的信息速率与码率为  $R \approx 2/3$  的 Nyquist-SCCC 相接近。对于 Nyquist-SCCC 我们考虑文献 [130] 中采用的打孔方式。相对应的，FTN-SCCC 的打孔方式依照打孔矩阵  $\mathbf{P} = [1, 0, 1, 1]$ 。

表 6.1 图 6.5 中的仿真参数

类别	编码方式	状态数	内码码率	外码码率	总体码率	$\tau$	码长
类别 A	FTN-SCCC	4	0.499	0.499	0.249	0.5	8192
	Nyquist-SCCC	4	0.666	0.749	0.499	N/A	8188
类别 B	FTN-SCCC	4	0.666	0.499	0.333	0.5	8194
	Nyquist-SCCC	4	0.666	0.999	0.666	N/A	8197

从图 6.5 中可以看出类别 A 中所设计的 FTN-SCCC 可以在  $E_b/N_0 = 1.9$  dB 时得到  $\text{BER} < 10^{-5}$  的误码性能并且没有出现明显的错误平台。与之相对应的，我们在图 6.6 中给出了其对应的在  $E_b/N_0 = 2$  dB 时的 EXIT 图，图中清晰可见两条曲线中有一条开放的通道，这一观察也证明了 FTN-SCCC 在对应的信噪比下可以收敛。在另一方面，Nyquist-SCCC 在误码率  $\text{BER} < 10^{-3}$  时出现了明显的错误平台，但是其译码收敛门限优于 FTN-SCCC。然而在类别 B 的仿真结果中我们看到 FTN-SCCC 相比于 Nyquist-SCCC 在相同信息速率下有 1.2 dB 的性能提升，这一现象表示了相比于传统的通过打孔来提高速率的方法，FTN 传输更为高效。通常来讲，打孔

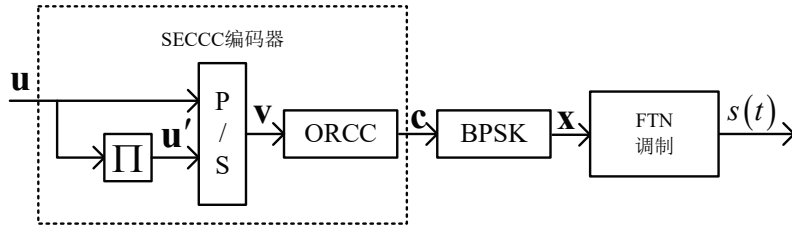


图 6.7 自级联码编码的 FTN 系统发送端框图

操作对 Nyquist-SCCC 的汉明距离影响很大，尤其是当码率较高的时候。注意到 Nyquist-SCCC 的外码最小汉明距离对其整体误码性能的指数衰减速率有着决定性作用<sup>[121]</sup>。因此 Nyquist-SCCC 的性能对于打孔较为敏感。与之不同的是 FTN-SCCC 通过人为地引入 ISI 来提升信息速率，该方式并不会改变原有的编码结构。因此，当高信噪比时 ISI 的影响可以通过均衡算法来抵消，此时 FTN-SCCC 的总体误码性能将会被所考虑的编码结构所确定。因此 FTN-SCCC 在高信噪比时比 Nyquist-SCCC 更有优势。这一结论也与图 6.5 中的观察相符。

### 6.2.2 针对 FTN 系统的自级联卷积码设计

不失一般性地，我们考虑图 6.7 的发送端框图。信源比特序列  $\mathbf{u}$  和其对应的交织后序列  $\mathbf{u}'$  经过并串转换后输入进 ORCC 编码器，得到码字  $\mathbf{c}$ 。我们将码字  $\mathbf{c}$  经过 BPSK 映射后得到的传输序列  $\mathbf{x}$  按照 FTN 速率进行发送，得到发送信号  $s(t)$ 。我们在图 6.8 中展示了考虑的接收端框图。通过匹配滤波和 FTN 速率采样，我们将接收信号  $r(t)$  转换为充分统计量  $\mathbf{y}$ 。关于  $\mathbf{y}$  的检测与译码我们考虑图 6.9 中的图模型。在图模型中，我们用“ $\Pi$ ”来表示对应的交织以及解交织操作。我们用“ $\equiv$ ”来表示类似于二元低密度校验（Low-Density Parity-Check, LDPC）码的变量节点约束，即所有与之相连的边必须有相同的数值。基于对图模型的介绍，我们接下来讨论对应的联合检测与译码算法。我们将 CCS 算法输出的外信息  $\xi$  对应于信源比特序列  $\mathbf{u}$  和其对应的交织后序列  $\mathbf{u}'$  分成两部分，记为  $\xi_u$  和  $\xi_{u'}$ 。之后  $\xi_{u'}$  部分的消息在经过节点  $\Pi$  后到达节点  $\equiv$ 。节点  $\equiv$  将得到的  $\xi_u$  和  $\xi_{u'}$  的信息按照约束条件进行更新，然后按照图模型送回 CCS 算法模块作为输入。我们定义 CCS 算法的输出外信息按照图模型更新后又返回到 CCS 算法模块这一过程称为一次迭代。对信源信息序列  $\mathbf{u}$  的估计  $\hat{\mathbf{u}}$  在若干次迭代后即可得到。

接下来我们讨论对于 SECCC 编码的 FTN 系统的 EXIT 分析。考虑到编码结构，我们将 CCS 算法的输出分为两部分，分别对应  $\xi_u$  和  $\xi_{u'}$ 。这样做的原因是由于  $\xi_u$  和  $\xi_{u'}$  对应的外信息并不一定具有相同的分布。举例来讲，若编码码字进行了打孔操作后， $\xi_u$  和  $\xi_{u'}$  的置信度可能会不同。因此，我们需要在  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{u}'$  的先验信息的条件下



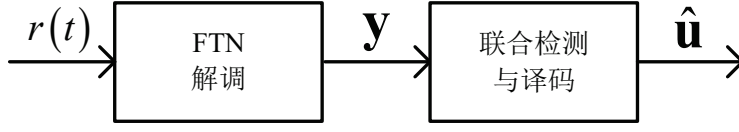


图 6.8 自级联码编码的 FTN 系统接收端框图

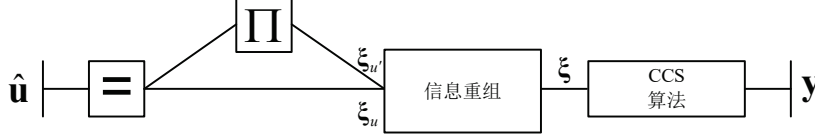


图 6.9 SECCC 编码的 FTN 系统对应的因子图表示

计算对应的  $\xi_u$  和  $\xi_{u'}$  的外信息。然而，这样的 EXIT 图分析将会得到一个十分复杂的三维 EXIT 图。因此为了简化分析，我们可以仅考虑系统收敛时的外信息传递轨迹。具体来讲，我们定义第  $i$  次迭代时对应于  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{u}'$  的先验信息以及外信息为  $I_{A,u}^{(i)}$ ,  $I_{E,u}^{(i)}$ ,  $I_{A,u'}^{(i)}$ , 以及  $I_{E,u'}^{(i)}$ 。由此，我们有

$$I_{A,u}^{(i+1)} = I_{E,u'}^{(i)}, \quad (6-4)$$

$$I_{A,u'}^{(i+1)} = I_{E,u}^{(i)}. \quad (6-5)$$

上述等式成立的原因在于  $\square$  节点仅交换对应相连的边的 LLR，但是并不改变其具体的数值。类似于之前小节的分析，我们假设 CCS 算法的输入 LLR 满足独立高斯分布。我们通过蒙特卡洛仿真的方式产生大量的传输码字，并且按照式 (6-3) 的方式来评估对应的 EXIT 曲线性能，其中对应的概率通过直方图的方式来确定<sup>[129]</sup>。在给定信噪比的条件下，我们可以按照之前小节的讨论来画出 EXIT 曲线，并且寻找到当对应的 EXIT 曲线在给定信噪比下有一个开放的通道时对应的 ORCC 结构作为设计好的码结构。

我们考虑与之前小节相同的仿真参数，对应的针对 FTN 系统的 SECCC（下文中称为 FTN-SECCC）误码性能在图 6.10 中给出。通过 EXIT 优化，我们 SECCC 对应的 ORCC 生成矩阵为  $\mathcal{G}(D) = \left[ \frac{1}{1+D^2}, \frac{1}{1+D+D^2} \right]$ ，且按照打孔矩阵  $\mathbf{P} = [1, 0, 1, 1]$  进行打孔使得其码率近似为  $R = 1/2$ 。作为比较，我们同样在图中给出了针对 FTN 系统设计的 LDPC 码<sup>[131]</sup>（下文中称为 FTN-LDPC），以及空间数据系统咨询委员会（Consultative Committee for Space Data Systems, CCSDS）中给出的奈奎斯特系统 LDPC 码（下文中称为 Nyquist-LDPC），以及原始的 Turbo 码<sup>[132]</sup>（下文中称为 Nyquist-Turbo）性能，其中 Nyquist-Turbo 的打孔矩阵为  $\mathbf{P} = [1, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1]$ 。我们在表 6.2 中给出了具体的仿真参数，其中 FTN-LDPC 采用 BCJR 检测并且 FTN-

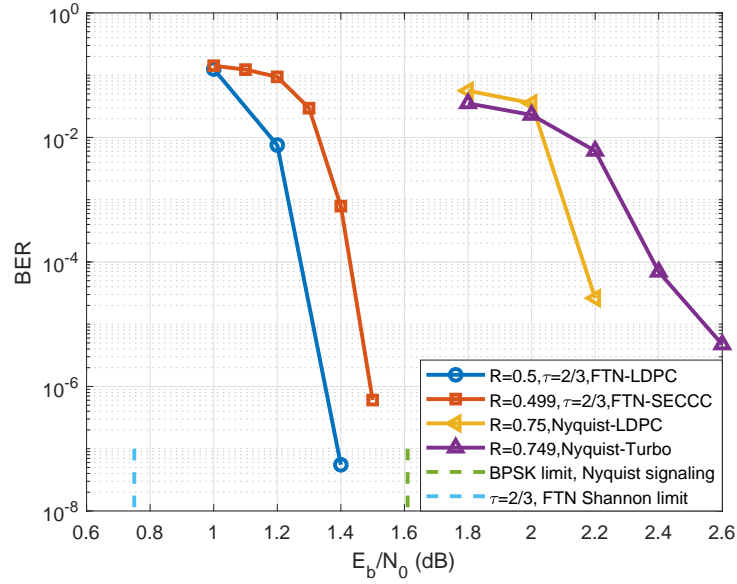


图 6.10 相同信息速率下, FTM-SECCC 与 FTM-LDPC, Nyquist-Turbo, Nyquist-LDPC 的 BER 性能以及相应的容量限比较

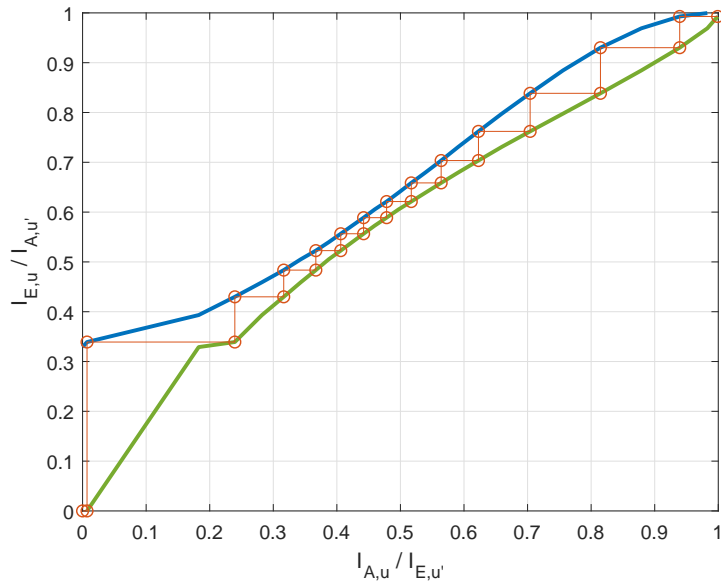


图 6.11  $E_b/N_0 = 1.3$  dB 时 SECCC 编码的 FTM 系统对应的 EXIT 图

LDPC 和 Nyquist-LDPC 的译码方法均为和积算法<sup>[121]</sup> (Sum Product Algorithm, SPA)。

表 6.2 图 6.10 中仿真参数

编码方式	码率	检测方式	译码器	迭代次数	$\tau$	码长
FTN-SECCC	0.499	16-状态BCJR	N/A	50	2/3	64808
FTN-LDPC	0.5	32-状态BCJR	50次迭代SPA	50	2/3	64800
Nyquist-LDPC	0.75	N/A	50次迭代	50	N/A	65536
Nyquist-Turbo	0.749	N/A	16-状态BCJR	50	N/A	64816

由图 6.10 所示, 我们提出的 FTN-SECCC 在  $E_b/N_0 = 1.5$  dB 时达到 BER 数量级  $10^{-7}$ , 这一结果相比于奈奎斯特系统的 BPSK 容量限对应 0.75 比特每符号时超出了 0.11 dB。我们将这一结果对应的 EXIT 图分析展示在图 6.11 中, 其中我们可以观察到在  $E_b/N_0 = 1.3$  dB 时 EXIT 图中有明显的开放通道。同时, FTN-SECCC 的 BER 性能仅与对应的波容量限相差 0.75 dB。进一步地, 我们发现在相同检测复杂度下 (相同状态数的 BCJR 算法以及迭代次数), FTN-SECCC 的性能相比于相同信息速率下的原始 Turbo 码有着 1.1 dB 的增益。类似的, FTN-SECCC 性能比相同信息速率下的 CCSDS 标准的 Nyquist-LDPC 性能提升了约 0.72 dB。我们同样将所提出的 FTN-SECCC 与目前作者所知的性能最好的 LDPC 码相比较。由图可见 FTN-SECCC 的性能相比于 FTN-LDPC 相差仅为 0.12 dB, 然而值得强调的是 FTN-LDPC 系统需要考虑较为复杂的 FTN 检测器, 并且需要 50 次 Turbo 迭代来完成检测与译码, 并且对应的译码器需要 50 次迭代。然而 FTN-SECCC 系统仅需要 16 状态的 BCJR 算法来实现联合检测与译码, 且译码器中不需要迭代。不难发现 FTN-SECCC 系统的检测/译码复杂度相比于 FTN-LDPC 系统大幅度降低。因此, 我们可以发现 FTN-SECCC 系统可以提供一个更好的检测性能与复杂度的折中。

### 6.3 本章小结

在本章的上述内容中, 我们提出了多种针对 FTN 系统的纠错编码方案设计, 包括 Turbo 码、SCCC、SECCC、以及 LDPC 码。这些纠错编码方案设计有着不同的出发点与性能。在此, 我们将对上述不同编码方案进行总结与比较。

表 6.3 FTN 系统的相关编码方案比较

编码方式	误码门限	误码平层	综合实现复杂度
FTN Turbo	一般	较差	较低
FTN-SCCC	较差	最优	低
FTN-SECCC	较优	一般	低
FTN-LDPC	最优	较优	较高



我们在表 6.3 中对本章的相关编码方案进行了比较。我们比较的结果基于相关的仿真结果以及具体的实现复杂度。值得强调的是由于本章中所考虑的 Turbo 码、SCCC、以及 SECCC 均基于简化检测算法，因此其对应的实现复杂度相对较低。在另一方面，本章中所考虑的 LDPC 码针对 FTN 的传输特性进行了优化，因此其具有很好的误码门限，然而为了实现其性能，系统通常需选用近似 ML 的检测算法，因此其所需的实现复杂度最高。

由此，我们对本章的相关编码方案进行了总结。然而针对 FTN 系统的编码设计还处于起步阶段，一些传统编码的性能提升方法，例如文献中的比特叠加方法<sup>[9]</sup>，也许会对 FTN 系统的编码设计带来新的思路，其相关研究也是我们接下来的研究课题之一。



## 结束语

未来通信中需要高频谱效率的传输技术来满足各种通信业务要求。因此，针对高频谱利用率的传输方式研究至关重要。在重点实验室基金一般项目资助下，本文对超奈奎斯特传输技术进行了相关学术研究工作，取得的主要成果如下。

1. 我们总结了 FTN 传输技术的基本原理，并且讨论了其若干重要指标，包括 FTN 信号间的最小欧式距离、信道容量、峰均比等。我们简要的评述了目前主流的 FTN 检测算法，并且讨论了时域检测算法和频域检测算法的优缺点。进一步地，我们考虑了多载波情况下的 FTN 传输技术，并且讨论了其对应的简化检测算法。
2. 针对 FTN 系统具有较高检测复杂度的现象，我们提出了两种基于 Ungerboeck 信道观测模型的 M-BCJR 算法。所提出的两种算法通过考虑部分“将来”传输符号的影响来进行每个时刻的网格图状态保留，从而比传统 M-BCJR 算法的状态保留更为可靠。我们通过理论推导给出了两种算法可以确保正确路径被保留的条件。仿真结果显示我们提出的算法可以有效地检测 FTN 信号，并且相比于传统 FTN 检测算法所提出的两种算法具有更好的复杂度与性能折中。
3. 我们讨论了两种多层 FTN 传输结构，即奈奎斯特波形延迟叠加结构以及叠加编码传输的 FTN 结构，的相关问题。针对于对应的多层结构，我们讨论了发送端和接收端设计，并应用了多级译码策略来降低检测复杂度。进一步地，我们针对对应的结构推导出了相应的功率分配方案。基于 Szegő 定理，我们分析了两种多层结构的信道容量，并给出了对应的闭合表达式。我们证明了叠加编码传输的 FTN 结构可以得到 FTN 传输对应的信道自由度增益，然而奈奎斯特波形延迟叠加结构仅能得到由于滚降频谱带来的信噪比增益。通过系统仿真我们证明了得到结论的正确性。
4. 为了简化 FTN 系统接收端的计算复杂度，我们提出了一种基于码结构辅助的信道缩短算法。该算法通过级联“输出可知”卷积码来实现简化信号检测。根据“输出可知”卷积码的特性，我们讨论了基于码结构辅助的信道缩短算法的具体算法步骤并且对其性能进行了分析。基于我们得到的误码性能上界，我们提出了一种码搜索算法来得到具有较大有效欧式距离的“输出可知”卷积码结构。仿真结果显示所提出的基于码结构辅助的信道缩短算法可以取得优于传统信道缩短算法的优异性能。

5. 为了保证 FTN 系统的可靠传输，我们讨论了针对 FTN 系统的纠错编码方案设计。针对 FTN 信号的特点，我们考虑了 Turbo 码的设计以及级联码的设计。我们通过重量谱的分析设计了非对称 Turbo 码的结构，并且我们适当地改变了接收端结构以提升其译码性能。我们基于第五章中考虑的基于码结构辅助的信道缩短算法提出了两种级联码的设计。通过对应的 EXIT 图分析，我们找到了合适的码结构。仿真结果显示出了我们提出的编码方案与 EXIT 图的分析相符，并且可以得到超过奈奎斯特系统受限容量限的优异性能。

本文对 FTN 技术进行了一些研究，然而还有很多相关问题值得进一步的探索，主要包括：

1. 尽管关于 FTN 传输的研究展示出其极大的应用前景，然而其对应的硬件设计相关研究还比较少。因此，如何进行 FTN 系统硬件实现，以及在满足实际硬件要求的前提下优化 FTN 系统设计，均为值得研究的关键问题。
2. 目前关于 FTN 传输的研究大部分着重在 AWGN 信道，然而针对实际的衰落信道的相关研究还比较少。关于 FTN 传输在衰落信道的研究将会对 FTN 技术在实际通信系统的应用起到指导作用，因此例如信道估计、检测等问题均值得研究。
3. 为了进一步提升系统的频谱效率，FTN 传输需要与其他关键技术相融合，例如 Massive MIMO 技术以及毫米波通信技术。因此，如何针对 MIMO 系统以及毫米波系统设计 FTN 传输方式也是一个值得研究的问题。
4. 在高移动通信场景下的 FTN 系统设计也是一个重要的研究课题。6G 通信网络中需要对高达 1000 km/h 的高移动用户进行可靠的传输。较高的移动速度势必带来较高的多普勒频移现象，因此如何在存在大幅度多普勒频移条件下设计 FTN 传输系统值得深入研究。

## 参考文献

- [1] C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication," *The Bell System Technical Journal*, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, 1948.
- [2] R. Chataut and R. Akl, "Massive MIMO systems for 5G and beyond networks-overview, recent trends, challenges, and future research direction," *Sensors*, vol. 20, no. 10, p. 2753, 2020.
- [3] L. J. Vora, "Evolution of mobile generation technology: 1G to 5G and review of upcoming wireless technology 5G," *International Journal of Modern Trends in Engineering and Research*, vol. 2, no. 10, pp. 281–290, 2015.
- [4] M. Z. Chowdhury, M. Shahjalal, S. Ahmed, and Y. M. Jang, "6G wireless communication systems: Applications, requirements, technologies, challenges, and research directions," *IEEE Open Journal of the Communications Society*, vol. 1, pp. 957–975, 2020.
- [5] 李双洋, 白宝明, 马啸, "超奈奎斯特传输技术: 现状与挑战," *电子学报*, vol. 48, no. 1, pp. 189–197, 2000.
- [6] J. B. Anderson, F. Rusek, and V. Öwall, "Faster-than-Nyquist signaling," *Proceedings of the IEEE*, vol. 101, no. 8, pp. 1817–1830, 2013.
- [7] J. Fan, S. Guo, X. Zhou, Y. Ren, G. Y. Li, and X. Chen, "Faster-than-Nyquist signaling: An overview," *IEEE Access*, vol. 5, pp. 1925–1940, 2017.
- [8] M. El Hefnawy and H. Taoka, "Overview of faster-than-Nyquist for future mobile communication systems," in *2013 IEEE 77th Vehicular Technology Conference (VTC Spring)*, 2013, pp. 1–5.
- [9] D. Li, "Overlapped multiplexing principle and an improved capacity on additive white Gaussian noise channel," *IEEE Access*, vol. 6, pp. 6840–6848, Dec. 2018.
- [10] F. Rusek and J. B. Anderson, "Constrained capacities for faster-than-Nyquist signaling," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 55, no. 2, pp. 764–775, 2009.
- [11] A. B. Üçüncü and A. Ö. Yılmaz, "Oversampling in one-bit quantized massive MIMO systems and performance analysis," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 17, no. 12, pp. 7952–7964, Dec. 2018.
- [12] C. Le, M. Schellmann, M. Fuhrwerk, and J. Peissig, "On the practical benefits of faster-than-Nyquist signaling," in *2014 International Conference on Advanced Technologies for Communications (ATC 2014)*, 2014, pp. 208–213.
- [13] J. E. Mazo, "Faster-than-Nyquist signaling," *The Bell System Technical Journal*, vol. 54, no. 8, pp. 1451–1462, 1975.
- [14] J. Anderson, *Bandwidth Efficient Coding*. John Wiley & Sons, 2017.

- [15] A. D. Liveris and C. N. Georghiades, “Exploiting faster-than-Nyquist signaling,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 9, pp. 1502–1511, 2003.
- [16] F. Rusek and J. B. Anderson, “The two dimensional Mazo limit,” in *Proceedings of International Symposium on Information Theory*, 2005, pp. 970–974.
- [17] P. Kim and D.-G. Oh, “Design of a receiver faster than Nyquist signalling in DVB-S2 standard,” in *2014 International Conference on Information and Communication Technology Convergence (ICTC)*, 2014, pp. 989–990.
- [18] H. Kwon, M.-S. Baek, J. Yun, H. Lim, and N. Hur, “Design and performance evaluation of DVB-S2 system with FTN signaling,” in *2016 International Conference on Information and Communication Technology Convergence (ICTC)*, 2016, pp. 1210–1212.
- [19] G. Maalouli and B. A. Bannister, “Performance analysis of a MMSE turbo equalizer with LDPC in a FTN channel with application to digital video broadcast,” in *2014 48th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, 2014, pp. 1871–1875.
- [20] N. Pham, J. B. Anderson, F. Rusek, J.-M. Freixe, and A. Bonnaud, “Exploring faster-than-Nyquist for satellite direct broadcasting,” in *31st AIAA International Communications Satellite Systems Conference*, 2013, p. 5603.
- [21] P. Banelli, S. Buzzi, G. Colavolpe, A. Modenini, F. Rusek, and A. Ugolini, “Modulation formats and waveforms for 5g networks: Who will be the heir of OFDM?: An overview of alternative modulation schemes for improved spectral efficiency,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 31, no. 6, pp. 80–93, 2014.
- [22] J. G. Andrews, S. Buzzi, W. Choi, S. V. Hanly, A. Lozano, A. C. Soong, and J. C. Zhang, “What will 5G be?” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 32, no. 6, pp. 1065–1082, 2014.
- [23] F.-L. Luo and C. J. Zhang, *Signal processing for 5G: Algorithms and implementations*. John Wiley & Sons, 2016.
- [24] S. Li, B. Bai, J. Zhou, P. Chen, and Z. Yu, “Reduced-complexity equalization for faster-than-Nyquist signaling: New methods based on Ungerboeck observation model,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 66, no. 3, pp. 1190–1204, 2017.
- [25] S. Li, B. Bai, J. Zhou, Q. He, and Q. Li, “Superposition coded modulation based faster-than-Nyquist signaling,” *Wireless Communications and Mobile Computing*, vol. 2018, 2018.
- [26] 李双洋, 平磊, 白宝明, 马啸, “基于多层叠加传输的超奈奎斯特传输方案,” *通信学报*, vol. 38, no. 9, pp. 86–94, 2017.
- [27] S. Li, J. Yuan, and B. Bai, “Code based channel shortening for faster-than-Nyquist signaling,” in *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, 2020, pp. 1–6.

- [28] S. Li, J. Yuan, B. Bai, and N. Benvenuto, "Code-based channel shortening for faster-than-Nyquist signaling: Reduced-complexity detection and code design," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 68, no. 7, pp. 3996–4011, Apr. 2020.
- [29] S. Li, W. Yuan, J. Yuan, B. Bai, D. W. K. Ng, and L. Hanzo, "Time-domain vs. frequency-domain equalization for FTN signaling," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 69, no. 8, pp. 9174–9179, Aug. 2020.
- [30] F. Rusek, *Partial Response and Faster-than-Nyquist Signaling*. Lund University, 2007.
- [31] C. E. Shannon, "Communication in the presence of noise," *Proceedings of the IRE*, vol. 37, no. 1, pp. 10–21, 1949.
- [32] H. Nyquist, "Certain topics in telegraph transmission theory," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 47, no. 2, pp. 617–644, 1928.
- [33] Y. J. D. Kim, "Properties of faster-than-Nyquist channel matrices and folded-spectrum, and their applications," in *2016 IEEE Wireless Communications and Networking Conference*, 2016, pp. 1–7.
- [34] S. Shamai, L. H. Ozarow, and A. D. Wyner, "Information rates for a discrete-time Gaussian channel with intersymbol interference and stationary inputs," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 37, no. 6, pp. 1527–1539, 1991.
- [35] Y. G. Yoo and J. H. Cho, "Asymptotic optimality of binary faster-than-Nyquist signaling," *IEEE Communications Letters*, vol. 14, no. 9, pp. 788–790, 2010.
- [36] D. W. Tufts, "Nyquist's problem — the joint optimization of transmitter and receiver in pulse amplitude modulation," *Proceedings of the IEEE*, vol. 53, no. 3, pp. 248–259, 1965.
- [37] 李道本, "重叠复用原理下加性白高斯噪声信道的容量," 北京邮电大学学报, 2016.
- [38] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, 2012.
- [39] A. Prlja, J. B. Anderson, and F. Rusek, "Receivers for faster-than-Nyquist signaling with and without turbo equalization," in *2008 IEEE International Symposium on Information Theory*, 2008, pp. 464–468.
- [40] A. Ganti, A. Lapidoth, and I. E. Telatar, "Mismatched decoding revisited: General alphabets, channels with memory, and the wide-band limit," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 46, no. 7, pp. 2315–2328, 2000.
- [41] N. Merhav, G. Kaplan, A. Lapidoth, and S. S. Shitz, "On information rates for mismatched decoders," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 40, no. 6, pp. 1953–1967, 1994.
- [42] C. Douillard, M. Jézéquel, C. Berrou, D. Electronique, A. Picart, P. Didier, and A. Glavieux, "Iterative correction of intersymbol interference: Turbo-equalization," *European Transactions on Telecommunications*, vol. 6, no. 5, pp. 507–511, 1995.
- [43] R. Koetter, A. C. Singer, and M. Tüchler, "Turbo equalization," *IEEE Signal Processing Magazine*,

- vol. 21, no. 1, pp. 67–80, 2004.
- [44] M. Tuchler, R. Koetter, and A. C. Singer, “Turbo equalization: Principles and new results,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 50, no. 5, pp. 754–767, 2002.
  - [45] E. Bedeer, M. H. Ahmed, and H. Yanikomeroglu, “A very low complexity successive symbol-by-symbol sequence estimator for faster-than-Nyquist signaling,” *IEEE Access*, vol. 5, pp. 7414–7422, 2017.
  - [46] P. Şen, T. Aktaş, and A. ö. Yilmaz, “A low-complexity graph-based LMMSE receiver designed for colored noise induced by FTN-signaling,” in *2014 IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, April 2014, pp. 642–647.
  - [47] E. Bedeer, M. H. Ahmed, and H. Yanikomeroglu, “Low-complexity detection of high-order QAM faster-than-Nyquist signaling,” *IEEE Access*, vol. 5, pp. 14 579–14 588, 2017.
  - [48] E. Bedeer, H. Yanikomeroglu, and M. H. Ahmed, “Low-complexity detection of M-ary PSK faster-than-Nyquist signaling,” *arXiv preprint arXiv:1810.05443*, 2018.
  - [49] S. Lai and M. Li, “Low-complexity symbol detection for FTN signaling by combinatorial L1-norm relaxation,” in *2018 IEEE 88th Vehicular Technology Conference (VTC-Fall)*, Aug 2018, pp. 1–5.
  - [50] F.-M. Han, M. Jin, and H.-X. Zou, “Binary symbol recovery via  $l_\infty$  minimization in faster-than-Nyquist signaling systems,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 62, no. 20, pp. 5282–5293, 2014.
  - [51] G. Forney, “Maximum-likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of intersymbol interference,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 363–378, 1972.
  - [52] G. Ungerboeck, “Adaptive maximum-likelihood receiver for carrier-modulated data-transmission systems,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 22, no. 5, pp. 624–636, 1974.
  - [53] G. D. Forney, “The Viterbi algorithm,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, no. 3, pp. 268–278, 1973.
  - [54] L. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv, “Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate (corresp.),” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 20, no. 2, pp. 284–287, 1974.
  - [55] G. Colavolpe and A. Barbieri, “On MAP symbol detection for isi channels using the Ungerboeck observation model,” *IEEE Communications Letters*, vol. 9, no. 8, pp. 720–722, 2005.
  - [56] J. Anderson and J. Bodie, “Tree encoding of speech,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 21, no. 4, pp. 379–387, 1975.
  - [57] A. Duel-Hallen and C. Heegard, “Delayed decision-feedback sequence estimation,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 37, no. 5, pp. 428–436, 1989.
  - [58] V. Franz and J. B. Anderson, “Concatenated decoding with a reduced-search BCJR algorithm,”



- 
- IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 16, no. 2, pp. 186–195, 1998.
- [59] G. Colavolpe, G. Ferrari, and R. Raheli, “Reduced-state BCJR-type algorithms,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 19, no. 5, pp. 848–859, 2001.
- [60] J. G. Proakis, *Digital signal processing: Principles algorithms and applications*. Pearson Education India, 2001.
- [61] C. Fragouli, N. Seshadri, and W. Turin, “On the reduced trellis equalization using the M-BCJR algorithm,” in *Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS)*. Princeton University, Mar. 2000.
- [62] D. Fertonani, A. Barbieri, and G. Colavolpe, “Reduced-complexity BCJR algorithm for turbo equalization,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 55, no. 12, pp. 2279–2287, 2007.
- [63] A. Prlja and J. B. Anderson, “Reduced-complexity receivers for strongly narrowband intersymbol interference introduced by faster-than-Nyquist signaling,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 60, no. 9, pp. 2591–2601, 2012.
- [64] M. Loncar and F. Rusek, “On reduced-complexity equalization based on Ungerboeck and Forney observation models,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 8, pp. 3784–3789, 2008.
- [65] F. Rusek, M. Loncar, and A. Prlja, “A comparison of Ungerboeck and Forney models for reduced-complexity ISI equalization,” in *IEEE GLOBECOM 2007-IEEE Global Telecommunications Conference*, 2007, pp. 1431–1436.
- [66] G. M. Guvensen, Y. Tanik, and A. O. Yilmaz, “A reduced-state Ungerboeck type MAP receiver with bidirectional decision feedback for M-ary quasi orthogonal signaling,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 62, no. 2, pp. 552–566, 2014.
- [67] G. D. Forney and G. Ungerboeck, “Modulation and coding for linear Gaussian channels,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 6, pp. 2384–2415, 1998.
- [68] J. B. Anderson, A. Prlja, and F. Rusek, “New reduced state space BCJR algorithms for the ISI channel,” in *2009 IEEE International Symposium on Information Theory*, 2009, pp. 889–893.
- [69] D. D. Falconer and F. Magee Jr, “Adaptive channel memory truncation for maximum likelihood sequence estimation,” *Bell System Technical Journal*, vol. 52, no. 9, pp. 1541–1562, 1973.
- [70] S. Fredricsson, “Joint optimization of transmitter and receiver filters in digital PAM systems with a Viterbi detector,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 22, no. 2, pp. 200–210, 1976.
- [71] C. Beare, “The choice of the desired impulse response in combined linear-Viterbi algorithm equalizers,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 26, no. 8, pp. 1301–1307, 1978.
- [72] R. Venkataramani and M. F. Erden, “A posteriori equivalence: A new perspective for design of optimal channel shortening equalizers,” *arXiv preprint arXiv:0710.3802*, 2007.

- [73] F. Rusek and A. Prlja, "Optimal channel shortening for MIMO and ISI channels," *IEEE Transactions on Wireless communications*, vol. 11, no. 2, pp. 810–818, 2011.
- [74] S. Hu, H. Kröll, Q. Huang, and F. Rusek, "Optimal channel shortener design for reduced-state soft-output Viterbi equalizer in single-carrier systems," *IEEE Transactions on Communications*, vol. 65, no. 6, pp. 2568–2582, 2017.
- [75] G. Colavolpe, A. Modenini, and F. Rusek, "Channel shortening for nonlinear satellite channels," *IEEE Communications Letters*, vol. 16, no. 12, pp. 1929–1932, 2012.
- [76] F. Rusek, G. Colavolpe, and C. E. W. Sundberg, "40 years with the Ungerboeck model: A look at its potentialities [lecture notes]," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 32, no. 3, pp. 156–161, 2015.
- [77] J. Fan, Y. Ren, Y. Zhang, and X. Luo, "MLSE equalizer with channel shortening for faster-than-Nyquist signaling," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 30, no. 9, pp. 793–796, 2018.
- [78] G. Colavolpe, D. Fertonani, and A. Piemontese, "SISO detection over linear channels with linear complexity in the number of interferers," *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, vol. 5, no. 8, pp. 1475–1485, 2011.
- [79] S. Sugiura, "Frequency-domain equalization of faster-than-Nyquist signaling," *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 2, no. 5, pp. 555–558, 2013.
- [80] S. Sugiura and L. Hanzo, "Frequency-domain-equalization-aided iterative detection of faster-than-Nyquist signaling," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 64, no. 5, pp. 2122–2128, 2014.
- [81] W. Yuan, N. Wu, X. Qi, H. Wang, and J. Kuang, "A graphical model based frequency domain equalization for FTN signaling in doubly selective channels," in *2016 IEEE 27th Annual International Symposium on Personal, Indoor, and Mobile Radio Communications (PIMRC)*, 2016, pp. 1–5.
- [82] W. Yuan, N. Wu, H. Wang, and J. Kuang, "Variational inference-based frequency-domain equalization for faster-than-Nyquist signaling in doubly selective channels," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 23, no. 9, pp. 1270–1274, 2016.
- [83] N. Wu, W. Yuan, H. Wang, Q. Shi, and J. Kuang, "Frequency-domain iterative message passing receiver for faster-than-Nyquist signaling in doubly selective channels," *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 5, no. 6, pp. 584–587, 2016.
- [84] T. Ishihara and S. Sugiura, "Iterative frequency-domain joint channel estimation and data detection of faster-than-Nyquist signaling," *IEEE Transactions on wireless Communications*, vol. 16, no. 9, pp. 6221–6231, 2017.
- [85] Q. Shi, N. Wu, X. Ma, and H. Wang, "Frequency-domain joint channel estimation and decoding

- for faster-than-Nyquist signaling,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 66, no. 2, pp. 781–795, 2017.
- [86] H. Fukumoto and K. Hayashi, “Overlap frequency domain equalization for faster-than-Nyquist signaling,” *arXiv preprint arXiv:1509.00562*, 2015.
- [87] S. B. Hong and J.-S. Seo, “Performance enhancement of faster-than-Nyquist signaling based single-carrier frequency-domain equalization systems,” *IEEE Transactions on Broadcasting*, vol. 62, no. 4, pp. 918–935, 2016.
- [88] S.-B. Hong and J.-S. Seo, “An efficient insertion of the cyclic prefix/suffix for frequency domain equalization in faster-than-Nyquist signaling,” in *2016 39th International Conference on Telecommunications and Signal Processing (TSP)*, 2016, pp. 437–440.
- [89] B. Liu, S. Li, Y. Xie, and J. Yuan, “Deep learning assisted sum-product detection algorithm for faster-than-Nyquist signaling,” in *2019 IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, 2019, pp. 1–5.
- [90] —, “A novel sum-product detection algorithm for faster-than-Nyquist signaling: A deep learning approach,” *arXiv preprint arXiv:2012.08084*, 2020.
- [91] R. Hadani, S. Rakib, M. Tsatsanis, A. Monk, A. J. Goldsmith, A. F. Molisch, and R. Calderbank, “Orthogonal time frequency space modulation,” in *Proc. 2017 IEEE Wireless Commun. Net. Conf. (WCNC)*, 2017, pp. 1–6.
- [92] S. Li, J. Yuan, W. Yuan, Z. Wei, B. Bai, and D. W. K. Ng, “On the performance of coded OTFS modulation over high-mobility channels,” in *Proc. IEEE Int. Conf. Commun. Workshops (ICC Workshops)*, 2021, pp. 1–6.
- [93] Z. Wei, W. Yuan, S. Li, J. Yuan, and D. W. K. Ng, “Transmitter and receiver window designs for orthogonal time frequency space modulation,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 69, no. 4, pp. 2207–2223, 2021.
- [94] S. Li, W. Yuan, Z. Wei, J. Yuan, B. Bai, D. W. K. Ng, and Y. Xie, “Hybrid MAP and PIC detection for OTFS modulation,” *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. 70, no. 7, pp. 7193–7198, Jul. 2021.
- [95] S. Li, W. Yuan, Z. Wei, and J. Yuan, “Cross domain iterative detection for orthogonal time frequency space modulation,” to appear in *IEEE Trans. Wireless Commun.*, 2021.
- [96] S. Li, J. Yuan, W. Yuan, Z. Wei, B. Bai, and D. W. K. Ng, “Performance analysis of coded OTFS systems over high-mobility channels,” *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 20, no. 9, pp. 7193–7198, Jul. 2021.
- [97] S. Li, W. Yuan, Z. Wei, R. He, B. Ai, B. Bai, and J. Yuan, “A tutorial to orthogonal time frequency space modulation for future wireless communications,” in *2021 IEEE/CIC Int. Conf. Commun. China (ICCC Workshops)*, 2021, pp. 439–443.
- [98] S. Li, W. Yuan, C. Liu, Z. Wei, J. Yuan, B. Bai, and D. W. K. Ng, “A novel ISAC transmission

- framework based on spatially-spread orthogonal time frequency space modulation,” to appear in *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, 2022.
- [99] W. Yuan, S. Li, Z. Wei, J. Yuan, and D. W. K. Ng, “Data-aided channel estimation for OTFS systems with a superimposed pilot and data transmission scheme,” *IEEE Wireless Commun. Lett.*, vol. 10, no. 9, pp. 1954–1958, Sept. 2021.
- [100] Z. Wei, W. Yuan, S. Li, J. Yuan, G. Bharatula, R. Hadani, and L. Hanzo, “Orthogonal time-frequency space modulation: A promising next-generation waveform,” *IEEE Wireless Commun.*, vol. 28, no. 4, pp. 136–144, Aug. 2021.
- [101] I. Kanaras, A. Chorti, M. R. Rodrigues, and I. Darwazeh, “Spectrally efficient FDM signals: Bandwidth gain at the expense of receiver complexity,” in *IEEE International Conference on Communications*, 2009, pp. 1–6.
- [102] I. Kanaras, “Spectrally efficient multicarrier communication systems: signal detection, mathematical modelling and optimisation,” Ph.D. dissertation, UCL (University College London), 2010.
- [103] J. B. Anderson and F. Rusek, “Improving OFDM: Multistream faster-than-Nyquist signaling,” in *4th International Symposium on Turbo Codes & Related Topics; 6th International ITG-Conference on Source and Channel Coding*, 2006, pp. 1–5.
- [104] F. Rusek and J. B. Anderson, “Multistream faster than Nyquist signaling,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 57, no. 5, pp. 1329–1340, 2009.
- [105] D. Dasalukunte, F. Rusek, and V. Öwall, “An iterative decoder for multicarrier faster-than-Nyquist signaling systems,” in *IEEE International Conference on Communications*, 2010, pp. 1–5.
- [106] A. Barbieri, D. Fertonani, and G. Colavolpe, “Time-frequency packing for linear modulations: spectral efficiency and practical detection schemes,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 57, no. 10, pp. 2951–2959, 2009.
- [107] A. Piemontese, A. Modenini, G. Colavolpe, and N. S. Alagha, “Improving the spectral efficiency of nonlinear satellite systems through time-frequency packing and advanced receiver processing,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 61, no. 8, pp. 3404–3412, 2013.
- [108] G. Colavolpe and T. Foggi, “Time-frequency packing for high-capacity coherent optical links,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 62, no. 8, pp. 2986–2995, 2014.
- [109] T. Strohmer and S. Beaver, “Optimal OFDM design for time-frequency dispersive channels,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 51, no. 7, pp. 1111–1122, 2003.
- [110] Y. J. D. Kim, J. Bajcsy, and D. Vargas, “Faster-than-Nyquist broadcasting in Gaussian channels: Achievable rate regions and coding,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 64, no. 3, pp. 1016–1030, 2016.
- [111] M. Liu, S. Li, Q. Li, and B. Bai, “Faster-than-Nyquist signaling based adaptive modulation and

- coding,” in *2018 10th International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP)*, 2018, pp. 1–5.
- [112] R. M. Gray, *Toeplitz and Circulant Matrices: A Review*. Now Foundations and Trends, 2006.
- [113] B. Simon, *Szegő’s Theorem and Its Descendants: Spectral Theory for  $L_2$  Perturbations of Orthogonal Polynomials*. Princeton university press, 2010, vol. 6.
- [114] 3GPP, “Group Radio Access Network, Evolved Universal Terrestrial Radio Access, Multiplexing and Channel Coding,” Release 8, Technical Specification (TS) 36.212, 2007.
- [115] S. Li, Z. Wei, W. Yuan, J. Yuan, B. Bai, D. W. K. Ng, and L. Hanzo, “Faster-than-Nyquist asynchronous NOMA outperforms synchronous NOMA,” *IEEE J. Sel. Areas Commun.*, vol. 40, no. 4, pp. 1128–1145, Apr. 2022.
- [116] F. R. Gantmakher, *The Theory of Matrices*. American Mathematical Society, 1959, vol. 131.
- [117] P. J. Brockwell, R. A. Davis, and S. E. Fienberg, *Time Series: Theory and Methods*. Springer Science & Business Media, 1991.
- [118] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*. Tata McGraw-hill education, 2006.
- [119] F. Schuh, A. Schenk, and J. B. Huber, “Reduced-complexity super-trellis decoding for convolutionally encoded transmission over ISI-channels,” in *Proceedings of International Conference Computing, Networking and Communications (ICNC)*, 2013, pp. 484–489.
- [120] R. Johannesson and K. S. Zigangirov, *Fundamentals of Convolutional Coding*. John Wiley & Sons, 2015.
- [121] W. Ryan and S. Lin, *Channel Codes: Classical and Modern*. Cambridge university press, 2009.
- [122] S. S. Pietrobon, G. Ungerboeck, L. C. Pérez, and D. Costello, “Rotationally invariant nonlinear trellis codes for two-dimensional modulation,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 40, no. 6, pp. 1773–1791, 1994.
- [123] J. B. Anderson and M. Zeinali, “Best rate 1/2 convolutional codes for Turbo equalization with severe ISI,” in *Proceedings of IEEE International Symposium on Information Theory*, 2012, pp. 2366–2370.
- [124] S. Ten Brink, G. Kramer, and A. Ashikhmin, “Design of low-density parity-check codes for modulation and detection,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 52, no. 4, pp. 670–678, Apr. 2004.
- [125] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, “Serial concatenation of interleaved codes: Performance analysis, design, and iterative decoding,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 44, no. 3, pp. 909–926, May 1998.
- [126] S. Benedetto, D. Divsalar, G. Montorsi, and F. Pollara, “Self-concatenated codes with self-iterative decoding for power and bandwidth efficiency,” in *Proceedings of IEEE International Symposium*

- on *Information Theory*, Aug. 1998, p. 177.
- [127] J. B. Anderson, “A review of faster than Nyquist signaling with an extension to four-level modulation,” in *Proceedings of International Symposium on Turbo Codes & Iterative Information Processing*, 2016, pp. 6–10.
  - [128] J. B. Anderson and M. Zeinali, “Analysis of best high rate convolutional codes for faster than Nyquist turbo equalization,” in *Proceeding IEEE International Symposium on Information Theory*, 2014, pp. 1987–1991.
  - [129] S. Ten Brink, “Convergence behavior of iteratively decoded parallel concatenated codes,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 49, no. 10, pp. 1727–1737, 2001.
  - [130] F. Babich, G. Montorsi, and F. Vatta, “Rate-compatible punctured serial concatenated convolutional codes,” in *Proceedings of IEEE Global Telecommunication Conference*, vol. 4, 2003, pp. 2062–2066.
  - [131] I. E. Bocharova, B. D. Kudryashov, and R. Johannesson, “Searching for binary and nonbinary block and convolutional LDPC codes,” *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 62, no. 1, pp. 163–183, 2015.
  - [132] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima, “Near Shannon limit error-correcting coding and decoding: Turbo-codes (1),” in *Proceedings of IEEE International Conference on Communications*, vol. 2, 1993, pp. 1064–1070.
  - [133] P. C. Massey and D. J. J. Costello, “New developments in asymmetric Turbo codes,” in *Proceedings of International Symposium on Turbo Codes & Iterative Information Processing*, 2000, pp. 93–100.
  - [134] *Low Density Parity Check Codes for Use in Near-Earth and Deep Space Applications (131.1-O-2 Orange Book)*. Consultative Committee for Space Data Systems, Sep. 2007.
  - [135] Z. Ding, X. Lei, G. K. Karagiannidis, R. Schober, J. Yuan, and V. K. Bhargava, “A survey on non-orthogonal multiple access for 5G networks: Research challenges and future trends,” *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 35, no. 10, pp. 2181–2195, 2017.
  - [136] L. Dai, B. Wang, Z. Ding, Z. Wang, S. Chen, and L. Hanzo, “A survey of non-orthogonal multiple access for 5G,” *IEEE Communications Survey and Tutorials*, vol. 20, no. 3, pp. 2294–2323, May 2018.
  - [137] Z. Wei, L. Yang, D. W. K. Ng, J. Yuan, and L. Hanzo, “On the performance gain of NOMA over OMA in uplink communication systems,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 68, no. 1, pp. 536–568, Jan. 2020.
  - [138] G. Ungerboeck, “Channel coding with multilevel/phase signals,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 28, no. 1, pp. 55–67, 1982.
  - [139] B. Lee, J. Kim, H. Lee, B. Shim, Y. Kim, and J. Lee, “Towards faster-than-Nyquist transmission

for beyond 5G wireless communications,” in *IEEE International Conference on Communications (ICC)*, 2019, pp. 1–6.





## 致谢

从 2009 年来到西安电子科技大学到现在已经过去了十二个年头。在这段期间有着欢乐与迷茫也有过痛苦与反思。在这学生时代即将结束的时刻，真心向一路以来认识的同学、老师们，还有一直支持我的亲人们表达诚挚的感谢。

首先感谢我的博士导师白宝明教授。白老师为人平易近人并且对科学研究有着严谨认真的态度，一直以来是我心目中优秀导师的典范。从我开始读博以来，白老师的诚挚的教导，准确的科研方向把握，以及对我的研究工作的支持都使我受益匪浅。白老师学术知识渊博，并且经常和学生讨论。针对科研问题，白老师总是可以一阵见血地指出最重要的关键，而且经常可以给出具有启发性的回答。在修改论文时，白老师不厌其烦地反复斟酌每一个用词，这种态度让我领会到了科学研究的严谨性也对我以后的学术研究起到了深远的影响。在这些年来白老师的悉心教导下，我掌握了正确的科研方法也具备了一定的独立研究能力，并为我以后的学术生涯打下了坚实的基础。在这里还要感谢白老师对我参与学术交流的支持，尤其衷心感谢白老师给我出国交流的机会。通过出国交流，我领略到了国际上学者的风范，并且切身实际地接触到了科研的最前线，也为我今后发展起到了很大的帮助。在此，谨向您致以最诚挚的谢意。

感谢澳大利亚新南威尔士大学的 Jinhong Yuan 教授。Yuan 教授是我交流访问时的国外导师，也是一位国际上公认的编码、无线通信领域的专家。Yuan 教授有着敏锐的学术洞察力，并且对大的科研方向有着很好的把握。与 Yuan 教授的讨论经常带给我很大的收获，对于一些不懂的问题或者不了解的研究领域，Yuan 教授经常会耐心地为我讲解，并且会对我提出的疑惑或者想法给出进一步地解释和指导。在此，感谢您对我在我身上花费的心血以及对我学术科研工作的支持。

感谢澳大利亚新南威尔士大学的 Derrick wing kwan Ng 博士。Derrick 与 Yuan 教授在同一课题组工作，并且在我国外交流期间对我有很多帮助。Derrick 对无线通信以及凸优化的相关知识了解十分深入，并且经常与我分享国际上的前沿学术进展。尽管 Derrick 于 2012 年才获得博士学位，他现在已经在 2021 年被评选为 IEEE Fellow。虽然 Derrick 现在已经有了很多学术成就，但是他就像一个大哥一样和我沟通与我讨论问题，从来没有一点架子。从 Derrick 身上我领略到了真正勤奋工作的人的生活态度。Derrick 对工作的认真态度以及取得的成就一直激励着我不断努力并向他看齐。

感谢中山大学的马啸教授。感谢您对我科研方面的指导以及对我科研工作的支持与鼓励。每次听到您的学术报告都使我收获颇丰，并且深刻地感受到您对科学研

究的严谨态度。在此，特别向您表示感谢。

还要感谢美国加州大学 Davis 分校的 Shu Lin 教授。作为信道编码领域的泰斗，您经常在百忙之中来到国内给我们进行学术报告而且对我们的一些工作提出指导意见。您作为一位年近 90 的长者，多次远道而来，帮助我们年轻人学习和成长，真的我们深深地感动。还记得在一次厦门的学术会议上，您在茶歇期间拍了我的肩膀和我说工作做得不错，我当时真的受宠若惊。从您的身上我看到了一位学术泰斗的风范，您对我工作的鼓励也让我对我今后的学术生活充满信心。

感谢我们综合业务网理论及关键技术(ISN)国家重点实验室信道编码课题组的同门师兄师姐师弟师妹们：黎Bing、朱敏、徐恒舟、张睿、穆锡金、冯丹、陈佩瑶、李华安、余忠洋、路清雅、关贺方、万飞、刘孟孟、徐荣池、孙成、陈刚、沈春慧、平磊、孙浩、邱晨、阮潇男、张强、徐旻子、李倩、邓堤峡、何庆黎、任兆丰、谭雪、黄福威、刘蒙蒙、窦欣、张继朋、刘震、王晓颖、胡智欣、吴磊、侯典浩、李秉豪、周沈洋、张嘉怡、张春琼、高瑞雪、申振宇、王元、袁瑞敏、司晨曦等，谢谢你们对我的帮助、陪伴和支持，也祝愿大家工作学习顺利，前程似锦。在此特别感谢黎Bing老师、陈佩瑶博士、冯丹博士、穆锡金博士、余忠洋博士、刘孟孟博士生、李倩硕士和司晨曦硕士在科研道路上对我的帮助和鼓励。

还要感谢我在澳大利亚新南威尔士大学交流时结识的老师们：杨雷博士、Yixuan Xie (Shane) 博士、意大利 Padova 大学的 Nevio Benvenuto 教授、英国南安普顿大学的 Lajos Hanzo 教授、澳大利亚卧龙岗大学的 Qinghua Guo 教授、澳大利亚悉尼大学的 Yonghui Li 教授等。感谢你们对我科研学习的帮助。同样需要感谢 Jinhong Yuan 和 Derrick 课题组的同学们：赵楼、邱旻、孙卓、魏志强、袁伟杰、刘畅、康芑、Bryan Liu、吴晓薇、蔡元心、廖一欢、胡少康、Sachini Jayasooriya、种若汐等。感谢大家对我平时的关心与照顾。在此特别感谢经常与我讨论问题的袁伟杰博士、魏志强博士以及刘畅博士对我学术科研的帮助。

还要感谢我的家人们对我一直以来的支持。你们的支持一直是我前进的动力。

最后对参与论文评阅和答辩的专家教授致以最衷心的感谢，并敬请您们批评指正。

## 作者简介

### 1. 基本情况

李双洋，男，辽宁沈阳人，1991年12月出生，西安电子科技大学通信工程学院通信与信息系统专业2017级博士研究生。

### 2. 教育背景

2009.08～2013.07，西安电子科技大学，本科，专业：通信工程

2013.08～2016.01，西安电子科技大学，硕士研究生，专业：信息与通信工程

2017.03～，西安电子科技大学，博士研究生，专业：通信与信息系统

### 3. 攻读博士学位期间的研究成果

#### 3.1 发表学术期刊论文（全部或部分包含在本文中）

- [1] S. Li, B. Bai, J. Zhou, P. Chen, and Z. Yu, “Reduced-complexity equalization for faster-than-Nyquist signaling: New methods based on Ungerboeck observation model,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 66, no. 3, pp. 1190-1204, Mar. 2018.
- [2] S. Li, J. Yuan, B. Bai, and N. Benvenuto, “Code based channel shortening for faster-than-Nyquist signaling: Reduced-complexity detection and code design,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 68, no. 7, pp. 3996-4011, Jul. 2020.
- [3] S. Li, W. Yuan, J. Yuan, B. Bai, D. W. K. Ng, and L. Hanzo, “Time-domain vs. Frequency-domain equalization for FTN signaling,” *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 69, no. 8, pp. 9174-9179, Aug. 2020.
- [4] S. Li, B. Bai, J. Zhou, Q. He, and Q. Li, “Superposition coded modulation based faster-than-Nyquist signaling,” *Wireless Communications and Mobile Computing*, vol. 2018, Article ID 4181626, 10 pages, 2018.
- [5] 李双洋，白宝明，马啸，超奈奎斯特传输：现状与挑战[J]. 电子学报, 2020, 48(1): 189-197.
- [6] 李双洋，平磊，白宝明，马啸，基于多层叠加传输的超奈奎斯特传输方案[J]. 通信学报, 2017, 38(9): 86-94.

### 3.2 发表学术会议论文（全部或部分包含在本文中）

- [1] **S. Li**, Z. Wei, W. Yuan, J. Yuan, B. Bai, and D. W. K. Ng, “On the achievable rates of uplink NOMA with asynchronized transmission,” in *IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, Nanjing, China, 2021, pp. 1-7.
- [2] **S. Li**, J. Yuan, and B. Bai, “Code based channel shortening for faster-than-Nyquist signaling,” in *IEEE International Communication Conference*, Dublin, Ireland, 2020, pp. 1-6.
- [3] M. Liu, **S. Li**, Q. Li and B. Bai, “Faster-than-Nyquist signaling based adaptive modulation and coding,” in *IEEE International Conference on Wireless Communications and Signal Processing (WCSP)*, Hangzhou, 2018, pp. 1-5.

### 3.3 发表学术期刊论文（未包含在本文中）

- [1] **S. Li**, J. Yuan, W. Yuan, Z. Wei, B. Bai, and D. W. K. Ng, “Performance analysis of coded OTFS systems over high-mobility channels,” to appear in *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2021.
- [2] Z. Wei, W. Yuan, **S. Li**, J. Yuan, and D. W. K. Ng, “Transmitter and receiver window designs for orthogonal time frequency space modulation,” to appear in *IEEE Transactions on Communications*, 2021.
- [3] D. Shi, W. Yuan, **S. Li**, N. Wu, and D. W. K. Ng, “Cycle-slip detection and correction for carrier phase synchronization in coded systems,” *IEEE Communications Letters*, vol. 25, no. 1, pp. 113-116, Jan. 2021.
- [4] W. Yuan, C. Liu, F. Liu, **S. Li** and D. W. K. Ng, “Learning-based predictive beamforming for UAV communications with jittering,” *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 9, no. 11, pp. 1970-1974, Nov. 2020.
- [5] W. Yuan, **S. Li**, L. Xiang, and D. W. K. Ng, “Distributed estimation framework for beyond 5G intelligent vehicular networks,” *IEEE Open Journal of Vehicular Technology*, vol. 1, pp. 190-214, Nov. 2020.
- [6] J. Zhang, B. Bai, **S. Li**, M. Zhu, and H. Li, “Tail-biting globally-coupled LDPC codes,” *IEEE Transactions on Communications*, vol. 67, no. 12, pp. 8206-8219, Dec. 2019.
- [7] J. Zhang, B. Bai, M. Zhu, **S. Li**, and H. Li, “Protograph-based globally-coupled LDPC codes over the Gaussian channel with burst erasures,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 153853-153868, 2019.
- [8] 袁伟杰, 李双洋, 种若汐, 白宝明, Ng D. W. K., 面向 6G 物联网的分布式

译码技术[J]. 电子与信息学报, 43(1):21-27。

- [9] **S. Li**, W. Yuan, Z. Wei, J. Yuan, B. Bai, D. W. K. Ng, and Y. Xie, “Hybrid MAP and PIC detection for OTFS modulation,” to appear in *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 2021.
- [10] **S. Li**, W. Yuan, Z. Wei, J. Yuan, “Cross domain iterative detection for orthogonal time frequency space modulation,” submitted to *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Jan. 2021, Major Revision.
- [11] Z. Wei, W. Yuan, **S. Li**, J. Yuan, B. Ganesh, R. Hadani, and L. Hanzo, “Orthogonal time-frequency space Modulation: A promising next generation waveform”, submitted to *IEEE Wireless Communications*, Sep. 2020. Minor Revision.
- [12] Z. Wei, W. Yuan, **S. Li**, J. Yuan, and D. W. K. Ng, “Off-grid channel estimation with sparse Bayesian learning for OTFS systems”, submitted to *IEEE Transactions on Wireless Communications*, Jan. 2021, Major Revision.
- [13] B. Liu, **S. Li**, Y. Xie, and J. Yuan, “A novel sum-product detection algorithm for faster-than-Nyquist signaling: A deep learning approach,” submitted to *IEEE Transactions on Communications*, Dec. 2020, Major Revision.
- [14] W. Yuan, **S. Li**, Z. Wei, J. Yuan, and D. W. K. Ng, “Data-Aided Channel Estimation for OTFS Systems with A Superimposed Pilot and Data Transmission Scheme”, submitted to *IEEE Wireless Communications Letters*. Feb. 2021, Minor Revision.

### 3.4 发表学术会议论文（未包含在本文中）

- [1] **S. Li**, J. Zhang, B. Bai, X. Ma, and J. Yuan, “Self-superposition transmission: A novel method for enhancing performance of convolutional codes,” in *IEEE International Symposium on Turbo Codes & Iterative Information Processing (ISTC)*, Hong Kong, 2018, pp. 1-5.
- [2] B. Liu, **S. Li**, Y. Xie, and J. Yuan, “Deep learning assisted sum-product detection algorithm for faster-than-Nyquist signaling,” in *IEEE Information Theory Workshop (ITW)*, Visby, Sweden, 2019, pp. 1-5.
- [3] W. Yuan, **S. Li**, Z. Wei, J. Yuan, and D. W. K. Ng, “Bypassing channel estimation for OTFS transmission: An integrated sensing and communication solution,” in *IEEE Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, Nanjing, China, 2021, pp. 1-6.
- [4] Z. Wei, W. Yuan, **S. Li**, J. Yuan, and D. W. K. Ng, “Performance analysis and win-

dow design for channel estimation of OTFS modulation”, in *IEEE International Communication Conference*, Montreal, Canada, 2021, pp. 1-5.

- [5] S. Li, J. Yuan, W. Yuan, Z. Wei, B. Bai, and D. W. K. Ng, “On the performance of coded OTFS modulation over high-mobility channels,” in *IEEE International Communication Conference Workshop*, Jun. 2021.

### 3.5 申请（授权）专利

- [1] 李倩, 李双洋, 白宝明, 基于 Ungerboeck 模型的超奈奎斯特信号检测方法, 中国发明专利[P], 授权号: CN107018102A。
- [2] 白宝明, 刘蒙蒙, 王杨, 李双洋, 张冀, 卷积码的自叠加传输方法, 中国发明专利[P], 授权号: CN109194448B。

### 3.6 参与科研项目及获奖

- [1] 重点实验室基金一般项目（61421040307）, 面向资源受限卫星通信的超奈奎斯特传输技术研究, 2018.1-2019.12, 已结题, 负责 FTN 传输系统设计。