

Бассейны Ньютона - 3

Введение

Рассмотрим уравнение в комплексных числах

$$f(z) = z^5 + c = 0,$$

где c – комплексная постоянная. Метод Ньютона для нахождения решения такого уравнения состоит в последовательном вычислении z_n по правилу

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

при некотором начальном условии z_0 . Предел последовательности – корень уравнения.

Выбор начального z_0 очень важен. Так как функция может иметь несколько нулей, то при различных z_0 метод может сходиться к различным корням. Однако, что за области обеспечат сходимость к тому или иному корню?

Бассейнами Ньютона назовем разбиение комплексной плоскости на множества, соответствующих одному и тому же корню $f(z) = 0$.

На практике, построение такого разбиения в точности невозможно, но можно построить его приближение. Обозначим через $P_i(R)$ множество таких комплексных чисел z_0 , что в последовательности z_n найдется элемент, находящийся на расстоянии меньше R от i -го корня уравнения. Эти множества будут хорошим приближением настоящих бассейнов.

Задания

1. Напишите программу, которая при заданных значениях параметров c (например, 1 или другое комплексное число), $R > 0$ (выбирайте поменьше: 10^{-3} , 10^{-4} и т.д.) на комплексной плоскости рисует множества $P_i(R)$. Для этого необходимо перебрать (с небольшим шагом) всевозможные комплексные значения z_0 , лежащие внутри видимой области. Для каждой точки необходимо запустить процесс вычисления z_n и проверки, не лежит ли текущий z_n на расстоянии меньшем R от корня уравнения. Когда это условие выполнится, то точка красится в цвет, соответствующий этому корню.

2. Используя программу, определите, как меняется изображение при изменении параметра c (помните, что он комплексный).

Ожидаемые результаты

1. Программа (исходный код и исполняемый файл), строящая изображение бассейнов Ньютона ($P_i(R)$), в зависимости от c и R .

2. Сделайте возможность сохранения построенной картинки в jpeg-файл.

3. Дайте возможность пользователю изменять параметры c (не забывайте, что он комплексный) и R .

4. Сделайте возможность изменения масштаба по осям, сдвига координатной сетки, чтобы можно было детально рассмотреть любую часть построенного рисунка.

5. Как будет изменяться изображение при изменении параметров?